

# 自発的質量生成機構の解析

Analysis of Spontaneous Mass Generation Mechanism

金沢大学大学院自然科学研究科  
数物科学専攻  
素粒子・宇宙・理論物理研究室

学籍番号 1123102004  
氏名 小内 伸之介

## 学位論文要旨

We analyzed the spontaneous symmetry breaking in the Nambu–Jona-Lasinio model (NJL model). One way of analyzing this phenomenon is a method of external field. However, the physical mass obtained by that method is incorrect and the chiral symmetry is not spontaneously broken. The correct solution is determined by comparing the height of the effective potential. Therefore, we developed a new iterative transformation method and showed that the new method selects the physical mass uniquely in the NJL model at zero density. Furthermore, the iterative method did not work in the NJL model at finite density, so the detailed analysis was implemented by the other two methods, but even in these cases, correct physical mass may not be obtained in some cases. This problem was solved by introducing mathematically expanded concept of weak solution. An analysis method using weak solutions of partial differential equations was applied to the Ising model to show its physical correctness.

## 導入

素粒子の質量は、カイラル対称性の自発的破れが起源である。QCDの有効理論を考えると、masslessのカイラル対称性のあるモデルで、真空がカイラル対称性を力学的に破り、質量が自発的に生成される理論が適当である。そのようなモデルとしてよく用いられるのが、Nambu–Jona-Lasinio 模型 (NJL 模型) である。NJL 模型においてよく行われる解析方法では、何らかの方法で、 $1/N$  leading の寄与が満たすべき方程式を立て、その解を探索するという手法をとる。例えば、Schwinger-Dyson 方程式により非自明解を探すという手法や経路積分に補助場と呼ばれる場を導入し、フェルミオン場を経路積分することで、補助場の有効ポテンシャルを評価し、その最小値を探索する手法である。これらの手法では、相互作用の結合定数がある値を越えると確かに非自明な解が現れ、有限の質量が生成されると結論される。そして実際に、そのような解を摂動論的な立場で理解しようとすると、無限個のダイアグラムの和で表現されていることもわかる。しかし、解が複数個存在する場合には、摂動論的な無限個のダイアグラムの和が一意的に定まらないのではないかという疑問が生じる。更に、その解は必要条件を満たしているにすぎず、その解が物理的に実現すると言うには、有効ポテンシャルを評価するなどの解析が必要となる。つまり十分条件を満たすことを示さねばならない。

## 逐次変換法：0密度 NJL 模型

以上の疑問に答えるために、私たちは裸の質量を導入した摂動論を構成する。裸の質量を導入する理由は、各ダイアグラムが0になるという摂動論の問題を回避するためである。そして、それによって無限個のダイアグラムの和を一意的に計算する方法を逐次変換法によって与える。つまり、提案する私たちの方法は、摂動論によって直接的にダイアグラムの和を計算することを目指す。

問題となるのは、 $1/N$  leading の自己エネルギーをどのようにして計算するかである。相互作用の結合定数に対する級数の形では、無限個のダイアグラムの和であるため各項の計算は難しく、それらを足す方法が必要となる。そこで、新たにダイアグラムを分類する方法を提案し、各ダイアグラムに対して節長という指標を定義する。節長とは、ダイアグラムが含む「足」の最大の長さとする。足の長さとは、外線から始めて、連なるループの先端に至るまでの経由するフェルミオンのループ数のことである。節長が  $n$  までの全ダイアグラムを考慮した質量項を  $M^{(n)}$  と書く。私たちが求めたいのは  $M^{(\infty)}$  である。

$$\begin{aligned}
 M^{(n)} &\longrightarrow S^{(n)} = \text{---} \bullet \bullet \cdots \bullet \text{---} \\
 &\quad \downarrow \\
 M^{(n+1)} &= \text{---} \times \text{---} + \frac{\text{---} \circ \text{---}}{g} \\
 &= \text{---} \times \text{---} + \frac{M^{(n)}}{g}
 \end{aligned}$$

この  $n$  から  $n+1$  へのステップは、 $M^{(n+1)}$  を  $M^{(n)}$  で表す逐次変換式で表現できる:

$$M^{(n+1)} = F [M^{(n)}] . \quad (1)$$

ここで、裸の質量以外の変換関数  $F$  は、プロパゲーター  $S^{(n)}$  でのループ積分の計算に対応するので、すぐに求めることができ、

$$F(M) = m_0 + gM (1 - M^2 \log (1 + M^{-2})) \quad (2)$$

となる。質量次元のすべての物理量はカットオフ  $\Lambda$  の単位として無次元化した。

この逐次変換式によって、求めたい質量  $M^{(\infty)}$  を解析する。変数変換  $F$  による変換は、離散的なくりこみ変換とみることができる。くりこみ変換の性質として重要なのは、固定点の構造であり、それを図1に示す。裸の質量を変化させながら、固定点の場所を横軸に、結合定数を縦軸にとって描いた。逐次変換で求まる節長が無限大の時の値は、相互作用の結合定数が小さい間は、固定点は正の領域に一つだけ安定固定点として存在する。その固定点の値は、裸の質量を0にすると0となる。結合定数が臨界結合定数を超えると、負の領域に二つの固定点が発生する。出発点である裸の質量は、真ん中と右端の二つの固定点の間にあるため、節長無限大の時の値は、右端の固定点で与えられる。これは、正の裸の質量に対しては、正の安定固定点を選ばれると言える。この時、右端の固定点の値は、裸の質量を0としても0とならない。従って、節長が無限大の質量の値も、裸の質量が0の極限で有限に保たれると言える。

節長によって、質量が生成されていく様子を示したのが、図2, 3である。これらの図から、いかに大きな節長をとっても、それが有限である限り、裸の質量を0にすれば、その質量も0になることがわかる。逆に、どんなに裸の質量が小さくても、それが0でない限り、十分に長い節長までくりこみを進めれば、必ず質量は生成され、安定固定点の値に近

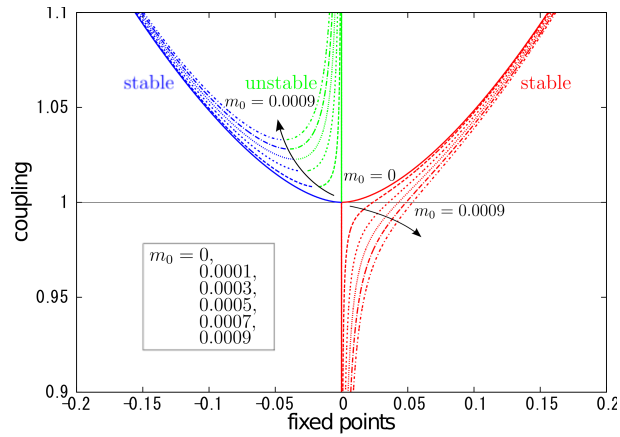


図 1: 変換関数の固定点構造の結合定数と裸の質量による変化

づく。節長と裸の質量という二つのパラメタの極限順序によって得られる質量の結果は異なるが、本来、節長に対する制限はないので、この意味において、節長を無限大にする極限が先にとられるべきである。つまり、相互作用の結合定数が臨界結合定数より大きい場合、対称性は自発的に破れ、質量は自発的に生成されると結論できる。

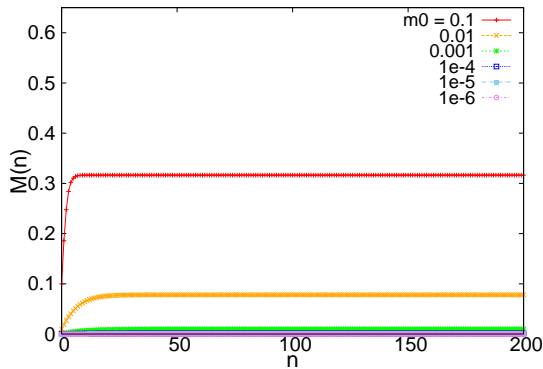


図 2: 節長拡大に伴う質量生成:  $g=0.7$

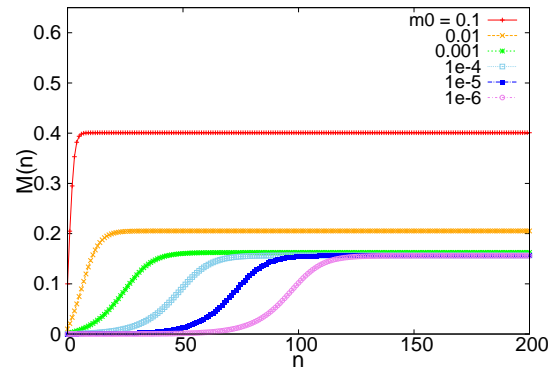


図 3: 節長拡大に伴う質量生成:  $g=1.5$

## 逐次変換法：有限密度 NJL 模型

有限密度 NJL 模型に対し、0 密度 NJL 模型で導入した逐次変換法を同様に適用する。節長を  $n$  とした逐次変換式は、

$$M^{(n+1)} = m_0 + \frac{GM^{(n)}}{2\pi^2} \theta(|M| - \mu) \left[ \sqrt{1 + M^{(n)2}} + M^{(n)2} \ln \frac{|M^{(n)}|}{1 + \sqrt{1 + M^{(n)2}}} \right. \\ \left. + \theta(\mu - |M^{(n)}|) \left\{ \sqrt{1 + M^{(n)2}} - \mu \sqrt{\mu^2 - M^{(n)2}} + M^{(n)2} \ln \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - M^{(n)2}}}{1 + \sqrt{1 + M^{(n)2}}} \right\} \right] \quad (3)$$

この逐次変換式を用いて、固定点構造を図4に示す。固定点は右端から、安定固定点、不安定固定点、安定固定点、不安定固定点、安定固定点と交互に存在する。出発点である裸の質量は、真ん中の安定固定点の右にあるために、節長無限大時の値は、真ん中の自明な安定固定点にトラップされる。つまり、逐次変換法は、有限密度 NJL 模型において、正しい物理的な解（最右端の安定固定点）を選ばないことがわかる。

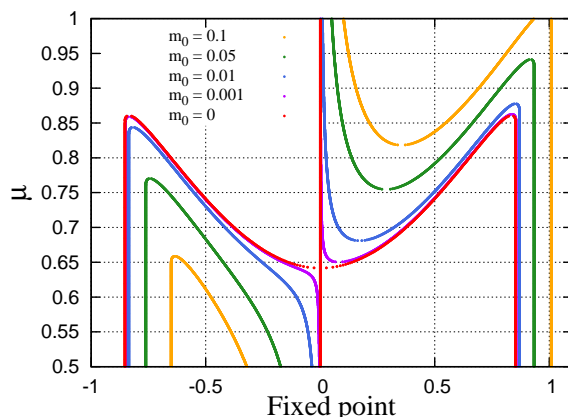


図 4: 固定点構造

## いくつかの方法

有限密度の NJL 模型において、逐次変換法では正しい物理的質量を得られない場合があることを示した。ここから、その他の方法として、外場の方法、赤外スケールカットオフを導入する方法、常微分方程式を用いる方法を扱う。紙面の都合上、詳細は博士論文本体に譲る。これらの解析の重要な帰結は、ここで取り上げたどの方法を用いても正しい物理的質量は得られない場合があることである。

## 偏微分方程式の方法

最後に、偏微分方程式を用いる方法で解析する。この方法では、「弱解」という数学的に拡張された概念を導入し、それが正しい物理的質量を与えることを示す。また弱解から得られる物理量の計算結果も示す。さらにこの偏微分方程式の弱解を用いた解析方法を Ising 模型に適用し、その物理的正しさをみる。

非摂動くりこみ群では、量子効果がどれだけ入っているかを示すスケールパラメータを変化させることにより、それに伴う物理量の変化をみる。それと同様の手法として、Schwinger–Dyson 方程式にスケール依存性を持たせて、3変数の非線形方程式として取り扱う。すなわち、Schwinger-Dyson 方程式の運動量積分の動径方向の上限を紫外カットオフの  $\Lambda_0$ 、下限をくりこみスケールに対応したカットオフ  $\Lambda(t) \equiv e^{-t}\Lambda_0$  にする。この変更により、スケール依存性のある Schwinger–Dyson 方程式は、

$$M(m_0, t) = m_0 + \Sigma(\Lambda_0, \Lambda(t)) \quad (4)$$

となる。この2変数関数となった物理的質量  $M(m_0, t)$  を、物理的質量関数と呼ぶ。ここで  $\Sigma(\Lambda_0, \Lambda(t))$  は、 $M(m_0, t)$  と  $t$  を変数とする2変数関数でもあるので  $\Delta(M(m_0, t), t) \equiv \Sigma(\Lambda_0, \Lambda(t))$  と書くと、スケール  $t$  依存性のある Schwinger–Dyson 方程式は、

$$M(m_0, t) = m_0 + \Delta(M(m_0, t), t) \quad (5)$$

と書ける。さらに、この  $M(m_0, t)$  をある偏微分方程式の解とし、 $m_0$  と  $t$  を独立変数と解釈することができる。その偏微分方程式を導出するために、3変数関数  $F(M, m_0, t)$  を  $F(M, m_0, t) := M - m_0 - \Delta(M, t)$  と定義する。よって、スケール  $t$  依存性のある Schwinger–Dyson 方程式 (5) は、

$$F(M(m_0, t), m_0, t) = 0 \quad (6)$$

と書ける。最終的に、この式から独立変数  $m_0$  と  $t$  について、

$$\begin{cases} \frac{\partial M(m_0, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Delta(M(m_0, t), t)}{\partial t} \frac{\partial M(m_0, t)}{\partial m_0} = 0, \\ \text{初期関数: } M(m_0, 0) = m_0, \end{cases} \quad (7)$$

という偏微分方程式を得る。

次に、新たに  $H(M, t)$  という関数を導入し、以下のように定義する。

$$\begin{cases} H(M, t) \equiv - \int_0^M dM' \frac{\partial \Delta(M', t)}{\partial t} \\ \quad = -4ge^{-3t} \left[ \theta(\sqrt{e^{-2t} + M^2} - \mu) \sqrt{e^{-2t} + M^2} + \theta(\mu - \sqrt{e^{-2t} + M^2}) \mu \right], \\ \frac{\partial H(M, t)}{\partial M} = - \frac{\partial \Delta(M, t)}{\partial t} = -\theta(\sqrt{e^{-2t} + M^2} - \mu) \frac{4gMe^{-3t}}{\sqrt{e^{-2t} + M^2}}. \end{cases} \quad (8)$$

これより式 (7) は、

$$\frac{\partial M(m_0, t)}{\partial t} + \frac{\partial H(M, t)}{\partial M} \frac{\partial M(m_0, t)}{\partial m_0} = \frac{\partial M(m_0, t)}{\partial t} + \frac{\partial H(M(m_0, t), t)}{\partial m_0} = 0 \quad (9)$$

となる。このタイプの偏微分方程式は「保存則」と呼ばれる。本論文では、この非線形偏微分方程式を特性曲線の方法で解く。導かれる特性曲線方程式を解くと、多価解となるが、物理量として解は1価でなければならない。それにより物理的解  $M(m_0, t)$  は不連続点を持つ。よってその不連続点では偏微分方程式は満たされず、そのような  $M(m_0, t)$  は通常の意味での解ではない。そこで、不連続点も許される解として、弱解という数学的に定義が拡張された解を導入する。

$$\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dm_0 \left[ M(m_0, t) \frac{\partial \xi(m_0, t)}{\partial t} + H(M, t) \frac{\partial \xi(m_0, t)}{\partial m_0} \right] + \int_{-\infty}^\infty dm_0 M(m_0, 0) \xi(m_0, 0) = 0. \quad (10)$$

式 (10) を満たす  $M(m_0, t)$  を元の偏微分方程式 (9) の弱解と定義する。弱解  $M(m_0, t)$  はもはや連続な関数である必要はない。実際に、多価解から弱解を選ぶには、不連続点の位置がわかればよい。不連続点が発生する場所は、 $\frac{\partial M(m_0, t)}{\partial m_0}$  が  $\pm\infty$  となる点とわかっているので、あとはその不連続点が  $t$  の発展によりどう変化するのがわかればよい。その弱解の不連続点の変化を与える式は、Rankine-Hugoniot (RH) 条件と呼ばれる。

偏微分方程式 (9) の弱解である物理的質量関数  $M(m_0, t)$  を特性曲線方程式の結果と等面積則により数値計算する。有限密度に関しては、さらにその弱解から自由エネルギー  $W(m_0, t)$  と Legendre 有効ポテンシャル  $V_L(\varphi, t)$  を計算する。まず、図 5 は、 $\mu = 0$  の時の弱解  $M(m_0, t)$  である。この結果は他の方法（外場の方法、常微分方程式を用いる方法）と一致している。

次に図 6 と図 7 はそれぞれ、 $\mu = 0.7, 0.8$  の時の弱解  $M(m_0, t)$  とそれに対応する  $W(m_0, t)$ 、 $V_L(\varphi, t)$  の  $t$  発展を示している。それぞれの図で、点線は特性曲線方程式の結果であり、黒い実線は弱解とそれに対応する量を示している。

図 5 の結果は、外場の方法と常微分方程式による方法の両方からも得ることができる。一方、図 6 と図 7 の結果は、他の方法では得られない。

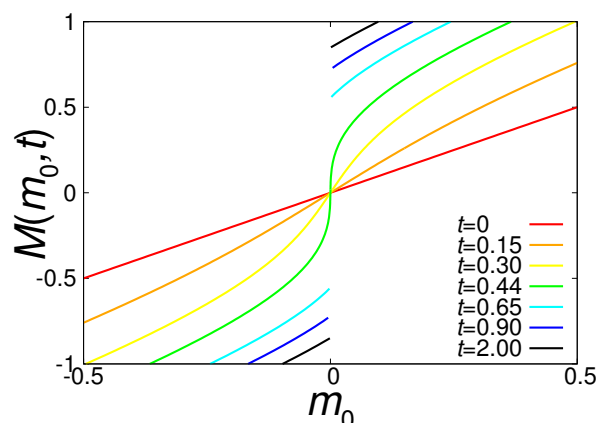


図 5: 物理的質量関数の弱解 ( $g = 1.7g_c, \mu = 0$ ).

## Ising 模型への応用

偏微分方程式の弱解を用いた相転移現象の解析方法は、Ising 模型へも応用できる。Ising 模型の平均場近似をしたギャップ方程式（自己無撞着方程式）は、

$$m = \tanh(\beta z J m + \beta h), \quad (11)$$

である。ここで  $m, h, \beta, z, J$  はそれぞれ、1 スピンあたりの磁化の期待値、外場としての磁場、逆温度、最近接スピンの数、最近接相互作用の結合定数である。ここで、3 変数関数を  $F(m, h, \beta) \equiv m - \tanh(\beta z J m + \beta h)$  のように定義することで、Ising 模型のギャップ方程式から

$$\begin{cases} \frac{\partial m(h, \beta)}{\partial \beta} - \frac{z J m + h}{\beta} \frac{\partial m(h, \beta)}{\partial h} = 0, \\ \text{初期関数: } m(h, 0) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

という偏微分方程式を得る。注目すべき点は、この偏微分方程式は保存則ではないことである。従って、変数変換をして、式 (12) を保存則に帰着させ解析する。NJL 模型の時と同様に、等面積則により Gibbs の自由エネルギーは、特性曲線の結果を凸化したものに

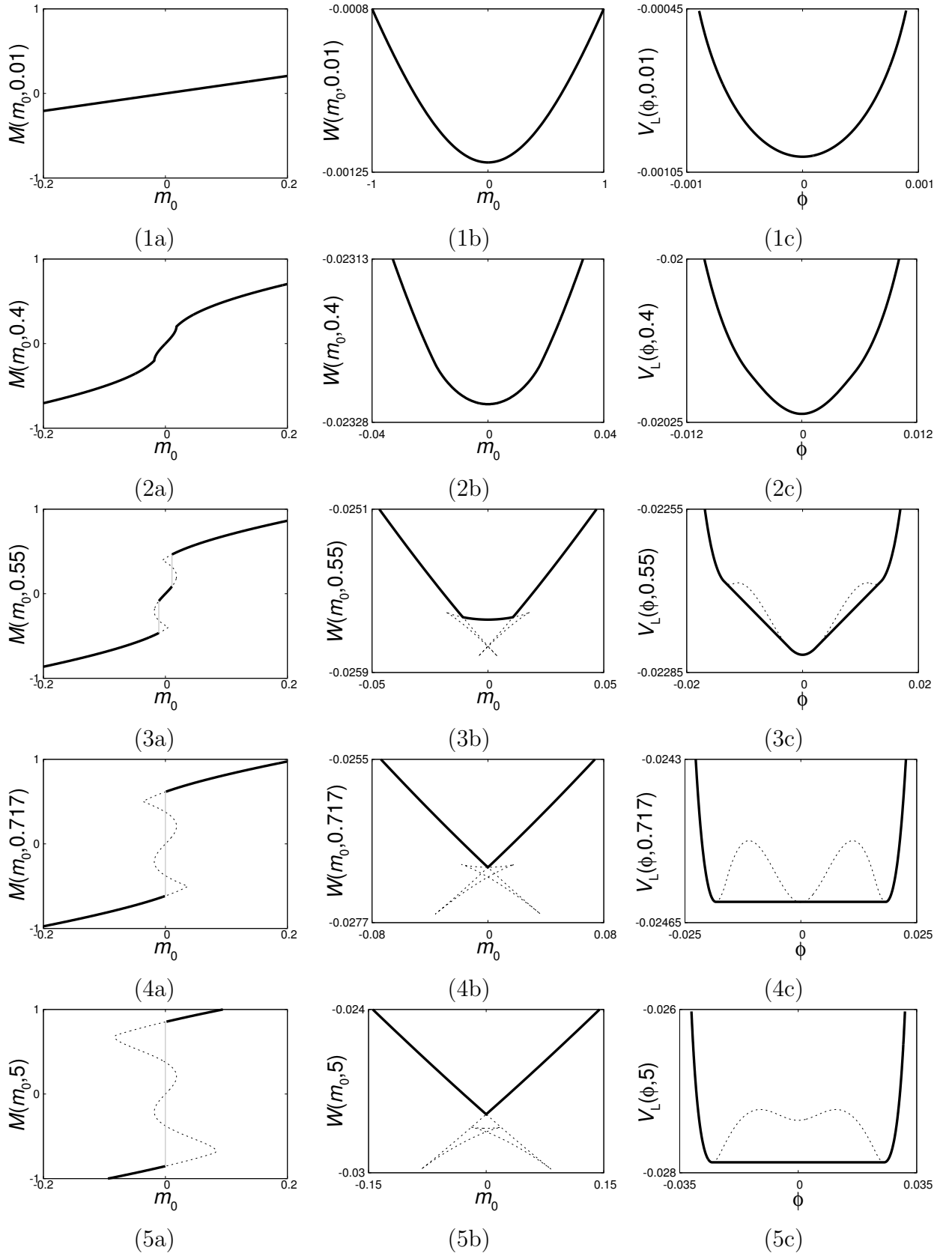


図 6: 弱解により得られる物理量の  $t$  発展 ( $g = 0.85$ ,  $\mu = 0.7$ ,  $t = 0.01, 0.4, 0.55, 0.717, 5$ ).  
(a) 物理的質量関数. (b) 自由エネルギー. (c) Legendre 有効ポテンシャル.



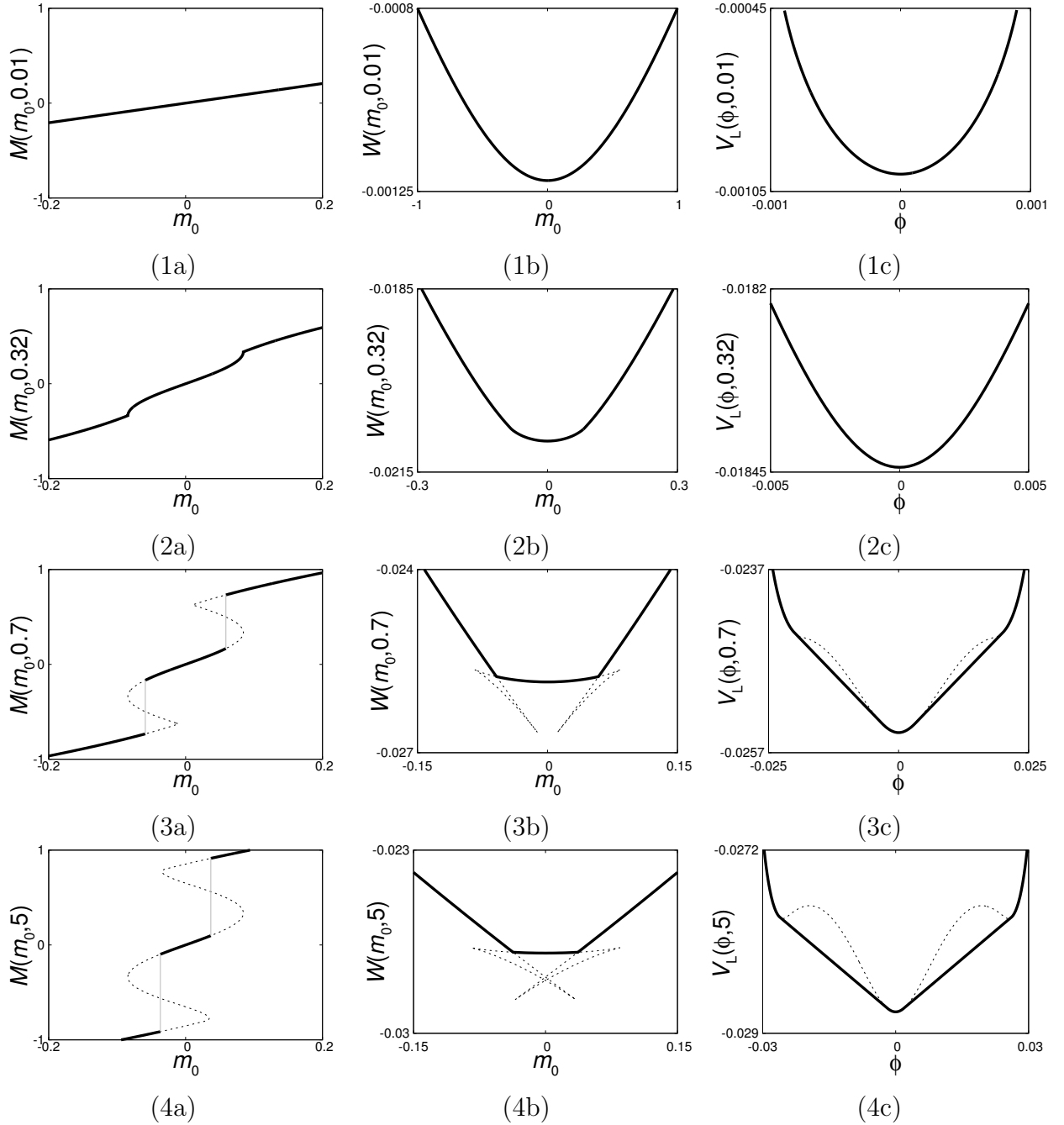


図 7: 弱解により得られる物理量の  $t$  発展 ( $g = 0.85$ ,  $\mu = 0.8$ ,  $t = 0.01, 0.32, 0.7, 5$ ). (a) 物理的質量関数. (b) 自由エネルギー. (c) Legendre 有効ポテンシャル.

なっている。これらの結果より Ising 模型のギャップ方程式（平均場近似）に対応する偏微分方程式の弱解は、物理的に正しい解であると言える。

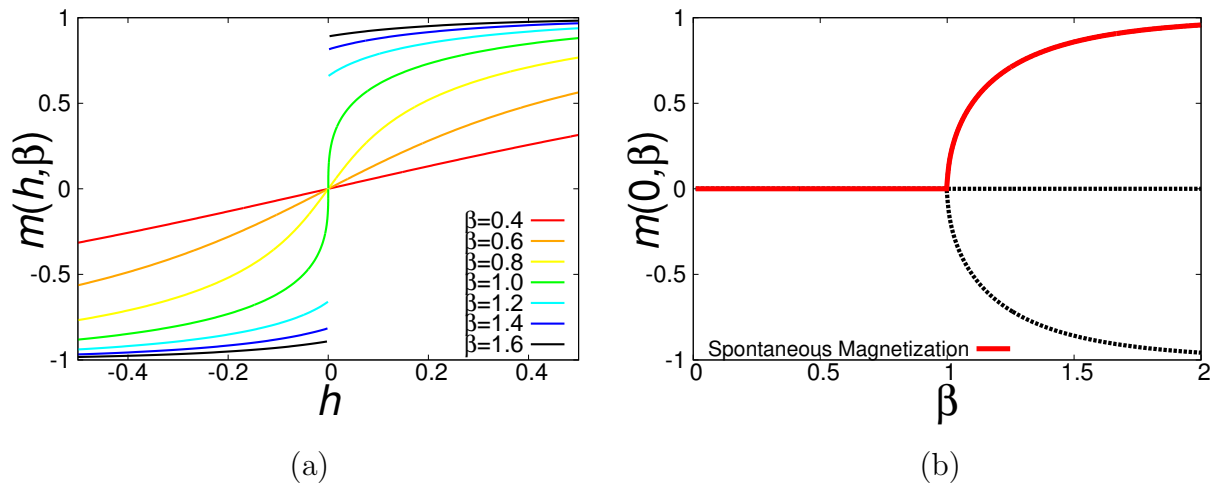


図 8: (a) 磁化の弱解 (b) 自発磁化

## 学位論文審査報告書（甲）

1. 学位論文題目（外国語の場合は和訳を付けること。）

自発的質量生成機構の解析

2. 論文提出者 (1) 所属 数物科学 専攻

(2) 氏名 小内伸之介

3. 審査結果の要旨（600～650字）

本論文は、素粒子論の中心課題である自発的質量生成機構について、新しい計算方法を開発したものである。カイラル対称な理論でフェルミオンが質量を獲得するには、対称性の自発的破れを経由する。フェルミオン・反フェルミオンの複合状態が凝縮する場合を力学的なカイラル対称性の破れと呼び、非摂動的量子効果で対称性が破れる。これまでは自己無撞着な方程式をたて、その解を求める方法が使われてきた。これは必要条件に過ぎないので一般に複数の解が得られ、その中のどれが物理的に正しい解なのかを別の方法で検証する必要があった。

本論文では裸の質量を導入して摂動論を定義し、必要なダイアグラムを順次足していくための逐次変換を作る。この逐次変換を無限回くり返せば無限個のダイアグラムの和となり、それは変換の固定点から得られる。南部・ジョナラシニオ模型に適用し、十分に強い結合で自発的に質量が生成されることを示した。同時に逐次変換の各段階で、自動的に凸関数となる物理的な有効ポテンシャルを与えることも示した。他方、一次相転移が起こる有限密度系では、逐次変換による無限和がある条件の下では正しくなくなることを発見した。そこで自己無撞着方程式を偏微分方程式化する方法を開発しその弱解を定義することによって、物理的に正しい解が一意的に求まることを示した。

本論文は、著者の広い学識を示し、共同研究に基づくものではあるが、解析的計算、数値計算を独力でっており、学位論文に値すると認定した。

4. 審査結果 (1) 判定（いずれかに○印） 合格 ・ 不合格

(2) 授与学位 博士（理学）