Sci. Rep. Kanazawa Univ.
Vol. 8, No. 2, pp. 251–257
September 1963

Sur les ensembles ramifiés (I).

Toshio HIRAGUCHI
Institut Mathematique, Faculté des Sciences, Université de Kanazawa
(Reçu 30 June 1963)

Dans cette note et dans celle qui suivras je me propose de réviser et d'augmenter ma dernière note "Sur les ensembles ramifiés" (Sci. Rep. Kanazawa Uni. Vol. VIII, No.1, 1962) qui a besoin de beaucoup de correction.

1. Généralité

Soit E un ensemble ordonné et e un élément quelconque de E. On désigne par

$$S(e;E),\ R(e;E)$$

l'ensemble

$$\{x \mid x\in E,\ x<e\},\ \{x \mid x\in E,\ x\geqq e\}$$

respectivement; l'ensemble $S(e;E)$ s'appelle *segment* de E déterminé par l'élément e.

Un ensemble ordonné E est appellé ensemble *ramifié*, si tous les segments de E sont bien ordonnés. Il est clair qu' une partie d'un ensemble ramifié est aussi un ensemble ramifié.

Soient E un ensemble ramifié et e un élement de E. On dit que l'élément e a le *rang* α dans E ou e est un élément de rang α dans E, si le type d'ordre de segment $S(e;E)$ est un ordinal α. L'ensemble de tous les éléments de rang α dans E s'appelle *section de rang* α de E et se note E_α.

(1.1) *Pour tout élément* $x_\alpha\in E_\alpha$, *il existe une et une seule partie bien ordonnée* $\{x_\varphi \mid \varphi\leqq\alpha\}$ *telle que*

$$x_0<x_1<\cdots<x_\varphi<\cdots<x_\alpha;\ x_\varphi\in E_\varphi.$$

(1.2) *Si* $x_\alpha\in E_\alpha$, $x_\beta\in E$ *et* $\alpha<\beta$, *alors* $x_\alpha<x_\beta$ *ou bien* x_α *et* x_β *ne sont pas comparables dans* E.

(1.3) *Si* $E=\emptyset$ *pour un ordinal* α, *alors* $E=\emptyset$ *pour tout ordinal* $\varphi\geqq\alpha$.

Il en suit que s'il existe un ordinal φ tel que $E_\varphi=\emptyset$, il existe un ordinal ρ tel que $E_\rho=\emptyset$ tandis que $E_\varphi\neq\emptyset$ pour tout ordinal $\varphi<\rho$. L'ordinal ρ de cette sorte est appelé le *rang* de E et E est appelé de rang ρ.

2. Noyau d'un ensemble ramifié.

Soit E un ensemble ramifié de rang ρ. On dit qu'un élément x est de la *première catégorie dans E par rapport à un ordinal* φ, s'il est incomparable à tout élément de rang $\varphi<\rho$. On note $C_1(\varphi;E)$ l'ensemble de tous les éléments de la première catégorie par rapport à φ.

(2.1) *Si* $x\in C_1(\alpha;E)$, *alors le rang de* x *est plus petit que* α.

En effet, supposons au contraire que le rang de x soit $\geqq\alpha$, alors il existe, d'aprés (1.1), un élément $x_\alpha\in E_\alpha$ tel que $x_\alpha\leqq x$. Donc on a $x\notin C_1(\alpha;E)$, contrairement à l'hypothèse.

(2.2) $$C_1(0;E)=\emptyset.$$

(2.3) *Si* $\alpha<\beta$, *alors* $C_1(\alpha;E)\subseteqq C_1(\beta;E)$.

En effet, supposons au contraire qu'il existe un élément x tel que $x\in C_1(\alpha;E)$ et $x\notin C_1(\beta;E)$. Alors le rang de x est $<\alpha$ d'aprés (2.1) et il existe un élément $x_\beta\in E_\beta$ tel que $x<x_\beta$. Donc il existe, d'aprés (1.1), un $x_\alpha\in E_\alpha$ tel que $x<x_\alpha<x_\beta$, contrairement à $x\in C_1(\alpha;E)$.

On dit qu'un élément x est de la *seconde catégorie* dans E par rapport à un ordinal $\varphi<\rho$, s'il existe au moins un élément de rang φ comparable à x. On note $C_2(\varphi;E)$ l' ensemble de tous les éléments de la seconde catégorie dans E par rapport à φ.

(2.4) *Si le rang de* x *est* α, *alors* x *est de la seconde catégorie par rapport à tout ordinal* $\varphi\leqq\alpha$.

Cela résulte aussitôt de la définition et de (1.1).

(2.5) $x\in C_1(\alpha;E)$ *entraîne* $S(x;E)\subseteqq C_2(\alpha;E)$.

En effet, soit β le rang de x. Dans le cas ou $\beta<\alpha$: il existe un $a_\alpha\in E_\alpha$ tel que $x<x_\alpha$. D'autre part, $y\in S(x;E)$ entraîne $y<x$ d'où $y<a_\alpha$. On a donc $y\in C_2(\alpha;E)$. Dans le cas ou $\beta\geqq\alpha$: il existe un $a_\alpha\in E_\alpha$ tel pue $a_\alpha\in S(x;E)$. Or $S(x;E)$ étant bien ordonné, tout élement de $S(x;E)$ est comparable à a_α. Donc on a $S(x;E)\subseteqq C_2(\alpha;E)$.

(2.6) *Si* $\alpha<\beta<\rho$, *alors on a*

$$E_\alpha=[E_\alpha\cap C_1(\beta;E)]\cup[E_\alpha\cap C_2(\beta;E)],$$
$$[E_\alpha\cap C_1(\beta;E)]\cap[E_\alpha\cap C_2(\beta;E)]=\emptyset.$$

(2.7) *Quels que soient les ordinaux* $\alpha<\rho$ *et* $\beta<\rho$, $E_\alpha\cap C_2(\beta;E)\neq\emptyset$.

En effet, lorsque $\beta\leqq\alpha$ cela évident puisque tout élément de E_α est, d'aprés

(2.4), de la seconde catégorie par rapport à β. Lorsque $\alpha<\beta$, pour chque $a_\beta\in E_\beta$ il existe un $a_\alpha\in E_\alpha$ tel que $a_\alpha<a_\beta$, d'où $a_\alpha\in C_2(\beta;E)$, ce qui achève la démonstration.

(2.8) *Si* $\alpha<\beta<\gamma<\rho$, *on a* $[E_\alpha\cap C_2(\beta;E)]\supseteqq[E_\alpha\cap C_2(\gamma;E)$.

En effet, pour un élément quelconque x_α de $E_\alpha\cap C_2(\beta;E)$ il existe un $a_\gamma\in E_\gamma$ tel que $x_\alpha<a_\gamma$. Donc il existe, d'aprés (1.1), un $a_\beta\in E_\beta$ tel que $x_\alpha<x_\beta<a_\gamma$, d'où $x_\alpha\in E_\alpha\cap C_2(\beta;E)$.

(2.9) *Quel que soient les ordinaux* α *et* β *tels que* $\alpha<\beta<\rho$, *on a*

$$\textstyle\bigcap_{\alpha<\varphi<\rho}[C_2(\varphi;E)\cap E_\alpha]=\bigcap_{\beta<\varphi<\rho}[C_2(\varphi;E)\cap E_\alpha].$$

En effet, pour tout $\varphi\leqq\beta$ et pour tout $\psi>\beta$ on a d'aprés (2.8)

$$E_\alpha\cap C_2(\varphi;E)\supseteqq C_2(\psi;E)\cap E_\alpha,$$

d'où

$$\begin{aligned}&\textstyle\bigcap_{\alpha<\varphi\leqq\beta}[C_2(\varphi;E)\cap E_\alpha]\\ \supseteqq&\textstyle\bigcap_{\beta<\psi<\rho}[C_2(\psi;E)\cap E_\alpha].\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}&\textstyle\bigcap_{\alpha<\varphi<\rho}[C_2(\varphi;E)\cap E_\alpha]\\ &=[\textstyle\bigcap_{\alpha<\varphi\leqq\beta}(C_2(\varphi:E)\cap E_\alpha)]\cap[\bigcap_{\beta<\psi<\rho}(C_2(\psi;E)\cap E_\alpha)]\\ &=\textstyle\bigcap_{\beta<\psi<\rho}[C_2(\psi;E)\cap E_\alpha].\end{aligned}$$

On dit qu'un élement x de E est de la *seconde catégorie dans* E s'il est de la seconde catégorie par rapport à tout ordinal $\varphi<\rho$. L'ensemble de tous les éléments de la seconde catégorie dans E s'appelle *noyau* de E et se note E^*. En vertu de la définition il est clair que

$$E^*=\textstyle\bigcap_{0\leqq\varphi<\rho}C_2(\varphi;E).$$

(2.10) $x\in E^*$ *entraîne* $S(x;E)\subset E^*$.

Cela résulte aussitôt de (2.5).

(2.11) *Pour tout élément* $x\in E^*$, $S(x:E^*)=S(x:E)$.

En effet, il est clair que $S(x;E^*)\subseteqq S(x;E)$. D'autre part on a d'aprés (2.10) $S(x;E)\subset E^*$, d'où $S(x;E)\subseteqq S(x;E^*)$. Par suite on a $S(x:E^*)=S(x;E)$.

(2.12) *Si le rang d'un élément* x *dans* E^* *est* α, *le rang de* x *dans* E *est aussi* α.

Cela résulte aussitôt de (2.11).

Désignons par $E_\alpha{}^*$ la section de rang α de E^*. D'aprés (2.12) on a $E^*_\alpha=E_\alpha\cap E^*$.

(2.13) *Quel que soit l'ordinal* $\alpha<\rho$, *on a*

$$\begin{aligned}E^*_\alpha&=\textstyle\bigcap_{\alpha<\varphi<\rho}[C_2(\varphi;E)\cap E_\alpha]\\ &=E_\alpha-\textstyle\bigcup_{\alpha<\varphi<\rho}C_1(\varphi;E).\end{aligned}$$

En effet, on a d'aprés (2.9)

$$\begin{aligned} E^*_\alpha &= E_\alpha \cap E^* \\ &= \bigcap_{0<\varphi<\rho}[C_2(\varphi;E)\cap E_\alpha] \\ &= \bigcap_{\alpha<\varphi<\rho}[C_2(\varphi;E)\cap E_\alpha]. \end{aligned}$$

En considérant la complémentaire de $\bigcap_{\alpha<\varphi<\rho}[C_2(\varphi;E)\cap E_\alpha]$ relativement à E_α on a d'aprés (2.6)

$$\begin{aligned} E_\alpha^* &= E_\alpha - \bigcup_{\alpha<\varphi<\rho}[E_\alpha - C_2(\varphi;E)\cap E_\alpha] \\ &= E_\alpha - \bigcup_{\alpha<\varphi<\rho}[C_1(\varphi;E)\cap E_\alpha]. \end{aligned}$$

3. Une autre expression de E^*.

Soit E un ensemble ramifié de rang ρ. Désignons par

$$S(E_\alpha;E), \quad R(E_\alpha;E)$$

la réunion

$$\bigcup_{x\in E_\alpha} S(x;E), \ \bigcup_{x\in E_\alpha} R(x;E)$$

respectivement.

(3.1) *Si* $\alpha<\beta<\gamma<\rho$, *alors on a*

$$\begin{aligned} E_\alpha \cap S(E_\beta;E) &\supseteqq E_\alpha\cap S(E_\gamma;E), \\ E_\gamma\cap R(E_\alpha;E) &= E_\gamma\cap R(E_\beta;E). \end{aligned}$$

En effet, soit, a_α un élément quelconque de $E_\alpha\cap S(E_\gamma;E)$; il existe alors un $a_\gamma\in E_\gamma$ tel que $a_\alpha<a_\gamma$. Donc il existe un $a_\beta\in E_\beta$ tel que $a_\alpha<a_\beta<a_\gamma$, d'où $a_\alpha\in S(a_\beta;E)$, ce qui démontre la première inclusion.

Soit maintenent a_γ un élément quelconque de $E_\gamma\cap R(E_\alpha;E)$; alors $a_\alpha<a_\gamma$ pour un $a_\alpha\in E_\alpha$ et il existe un $a_\beta\in E_\beta$ tel que $a_\alpha<a_\beta<a_\gamma$, d'où $a_\gamma\in E_\gamma\cap R(E_\beta;E)$. Soit au contraire b_γ un élément quelconque de $E_\gamma\cap R(E_\beta;E)$; alors $b_\beta<b_\gamma$ pour un $b_\beta\in E_\beta$ et il existe un $b_\alpha\in E_\alpha$ tel que $b_\alpha<b_\beta<b_\gamma$, d'où $b_\gamma\in E_\gamma\cap R(E_\alpha;E)$. Par suite on a la dernière égalité.

(3.2) *Si* $\alpha<\beta<\rho$, *alors on a*

$$S(E_\alpha;E)\cup R(E_\alpha;E)\supseteqq S(E_\beta;E)\cup R(E_\beta;E).$$

En effet, soit x un élément quelconque de $S(E_\beta;E)\cup R(E_\beta;E)$ et soit γ le rang de x. Alors $x\in S(E_\beta;E)$ ou $x\in R(E_\beta;E)$. Dans le cas où $x\in S(E_\beta;E)$: puisque $x<a_\beta$ pour un $a_\beta\in E_\beta$, il existe un $a_\alpha\in E_\alpha$ tel que $x<a_\alpha<a_\beta$ ou $a_\alpha\leqq x<a_\beta$ selon que $\gamma<\alpha$ ou $\alpha\leqq\gamma<\beta$. On a donc $x\in S(E_\alpha;E)$ ou $x\in R(E_\alpha;E)$, d'où $x\in S(E_\alpha;E)\cup R(E_\alpha;E)$. Dans le cas où $x\in R(E_\beta;E)$: $a_\beta<x$ pour un $a_\beta\in E_\beta$. Or $a_\alpha<a_\beta$ pour un $a_\alpha\in E_\alpha$, d'où $a_\alpha<x$. Par suite $x\in R(E_\alpha;E)$, afortiori $x\in S(E_\alpha;E)\cup R(E_\alpha;E)$.

Posons maintenent

$$E^\circ = \bigcap_{o \leqq \varphi < \rho} [S(E_\varphi ; E) \cup R(E_\varphi ; E)].$$

(3.3) *Quel que soit l'ordinal* $\alpha < \rho$,

$$E^\circ = \bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} [S(E_\varphi ; E) \cup R(E_\varphi ; E)].$$

Cela résulte aussitôt de (3.2)

(3.4) $E_\alpha \cap E^\circ = \bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} [S(E_\varphi ; E) \cap E_\alpha]$ *pour tout* $\alpha < \rho$.

En effet, on a d'aprés (3.3)

$$E_\alpha \cap E^\circ = [\bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} (E_\alpha \cap S(E_\varphi ; E))] \cup [\bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} (E_\alpha \cap R(E_\varphi ; E))].$$

Or pour tout $\varphi > \alpha$ on a $E_\alpha \cap R(E_\varphi ; E) = \emptyset$, d'où l'égalité.

(3.5) $$E^\circ = E^*.$$

En effet, $\langle\langle x_\alpha \in E_\alpha \cap E^\circ \rangle\rangle$ est équivalent à $\langle\langle x_\alpha \in S(E_\varphi ; E) \cap E_\alpha$ pour tout $\varphi > \alpha \rangle\rangle$ ou, ce qui revient au même, à $\langle\langle$pour tout $\varphi > \alpha$, il existe un $a_\varphi \in E_\varphi$ tel que $x_\alpha < a_\varphi \rangle\rangle$. Cela est équivalent à $\langle\langle x_\alpha \in C_2(\varphi ; E) \cap E_\alpha$ pour tout $\varphi > \alpha \rangle\rangle$, c'est-à-dire à $\langle\langle x_\alpha \in \bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} [C_2(\varphi ; E) \cap E\alpha] \rangle\rangle$. Donc on a $E_\alpha \cap E^\circ = E_\alpha \cap E^*$ pour tout $\alpha < \rho$, d'où $E^\circ = E^*$.

4. Le rang de E^*

Le rang du noyau E^* d'un ensemble ramifié E de rang ρ n'est pas nécessairement égal à ρ. Dans ce qui suit on recherche à quelle condition il est égal à ρ.

On Dit qu'un élément $x \in E$ est *de la première catégorie par rapport à* φ *pour la première fois,* si x est de la première catégorie par rapport à φ tandi qu'il n'est pas de la première catégorie par rapport à tout $\psi < \varphi$. On désigne par $P_\varphi(E)$ l'ensemble de tous les élément de la première catégorie par rapport à φ pour la première fois.

(4.1) $$P_\varphi(E) = C_1(\varphi ; E) - \bigcup_{\psi < \varphi} C_1(\psi ; E).$$

(4.2) $$C_1(\alpha ; E) = \bigcup_{\varphi \leqq \alpha} P_\varphi(E).$$

Celles-là résultent aussitôt de la d'efinition de $P_\varphi(E)$ et de (2.3).

Posons maintenant

$$E_{\alpha\varphi} = E_\alpha \cap P_\varphi(E).$$

Autrement dit, $E_{\alpha\varphi}$ est l'ensemble de tous les éléments de rang α qui sont de la première catégorie par rapport à φ pour la première fois.

(4.3) *Pour tout* $\varphi \leqq \alpha$, $E_{\alpha\varphi} = \emptyset$.

En effet, puisque $P_\varphi(E) \subseteqq C_1(\varphi ; E)$, le rang de $x \in P_\varphi(E)$ est, d'aprés (2.1), plus petit que α. On a donc $E_\alpha \cap P_\varphi(E) = \emptyset$ pour $\varphi \leqq \alpha$.

(4.4) *Si* $\alpha < \beta < \rho$, *alors on a* $E_\alpha \cap C_1(\beta ; E) = \bigcup_{\alpha < \varphi \leqq \beta} E_{\alpha\varphi}$.

En effet, on a d'aprés (4.2) et (4.3)

$$E_\alpha \cap C_1(\beta;E) = \cup_{\varphi\leqq\beta}[E_\alpha \cap P_\varphi(E)]$$
$$= \cup_{\varphi\leqq\beta} E_{\alpha\varphi}$$
$$= \cup_{\alpha<\varphi\leqq\beta} E_{\alpha\varphi}\,.$$

(4.5) *Quel que soit l'ordinal* $\alpha<\rho$, $E^*=E_\alpha-\cup_{\alpha<\varphi<\rho} E_{\alpha\varphi}$.

En effet, d'aprés (2.13) et (4.4) on a

$$E^* = E_\alpha - \cup_{\alpha<\varphi<\rho}[E_\alpha \cap C_1(\varphi;E)]$$
$$= E_\alpha - \cup_{\alpha<\varphi<\rho}[\cup_{\alpha<\psi\leqq\varphi} E_{\alpha\psi}$$
$$= E_\alpha - \cup_{\alpha<\varphi<\rho} E_{\alpha\varphi}\,.$$

(4.6) *S'il existe un ordinal* $\beta<\alpha$ *tel que* $E_{\alpha\varphi}=\emptyset$ *pour tout* $\varphi>\beta$, *alors* $E^*_\alpha\neq\emptyset$.

En effet, supposons au contraire que $E^*_\alpha=\emptyset$. D'aprés (4.5) et (4.4) on a

$$E_\alpha = \cup_{\alpha<\varphi<\rho} E_{\alpha\varphi}$$
$$= \cup_{\alpha<\varphi\leqq\beta} E_{\alpha\varphi}$$
$$= E_\alpha \cap C_1(\beta;E).$$

En vertu de (2.6) on a donc $E_\alpha \cap C_2(\beta;E)=\emptyset$, contrairement à (2.7).

On peut en déduire le thérème suivant:

Théorème 1. *Soit E un ensemble ramifiê de rang* ρ. *S'il existe, pour tout ordinal* $\alpha<\rho$, *un ordinal* $\beta(\alpha)>\alpha$ *tel que* $E_{\alpha\varphi}=\emptyset$ *pour tout* $\varphi>\beta(\alpha)$, *alors le rang du noyau* E^* *de E est* ρ.

5. Ensembles ramifiés et réguliers.

Dans ce qui suit nous concidérons une classe d'ensembles ramifiés particuliers.

On dit qu'un ensemble ramifié E est *rêgulier*, s'il possède les deux propriètés suivantes:

(I) *Le rang* ρ *de E est un ordinal initial est rêgulier; par suite* ρ *n'est pas limite d'une suite transfinie d'ordinaux*$<\rho$ *dont le type d'ordre est plus petit que* ρ *et* $\alpha+\xi=\rho$ *entraîne* $\xi=\rho$.

(II) *Quel que soit l'ordinal* $\alpha<\rho$, *le cardinal de la section de E de rang* α *est plus petit que le cardinal de* ρ : *card.*$(E_\alpha)<$*card.*(ρ).

Soit E un ensemble ramifié et régulier de rang ρ.

(5.1) *Quel que soit l'ordinal* $\alpha<\rho$, *il existe un ordinal* $\beta(\alpha)>\alpha$ *tel que* $E_{\alpha\varphi}=\emptyset$ *pour tout* $\varphi>\beta(\alpha)$.

Demonstration. Supposons que le contraire soit vrai. Alors pour tout ordinal $\gamma>\alpha$ l'ensemqle $M_\gamma=\{\varphi\,|\,\gamma<\varphi<\rho,\ E_{\alpha\varphi}\neq\emptyset\}$ ne serait pas vide et on peut definir par l'induction transfinie une suite transfinie croissante $\{\delta(\varphi)\}_{\alpha<\varphi<\rho}$ tel que $E_{\alpha\delta(\varphi)}\neq\emptyset$ comme il suit. Comme $\delta_{(\alpha+1)}$ choissons le plus petit ordinal de $M_{\alpha+1}=\{\varphi\,|\,\alpha+1<\varphi<\rho,\ E_{\alpha\varphi}\neq\emptyset\}$. Supposons que pour tout ordinal φ tel que $\alpha<\varphi<\beta$ un ordinal

$\delta(\varphi)$ tel que $E_{\alpha\delta(\varphi)} \neq \emptyset$ soit déterminé. Dans le cas où β est un ordinal isolé choisissons comme $\delta(\beta)$ le plus petit ordinal de $M_{\beta-1}$. Dans le cas où β est un ordinal limite posons

$$\lambda = \lim_{\alpha<\varphi<\beta} \delta(\varphi).$$

Tout $\delta(\varphi)$ étant $< \rho$ et ρ étant régulier, $\lambda < \rho$. On peut donc choisir comme $\delta(\beta)$ le plus petit ordinal de M_λ. Ainsi nous avons une suite transfinie demandée. ρ étant un ordinal initial, le type d'ordre de la suite $\{\delta(\varphi)\}_{\alpha<\varphi<\rho}$ est ρ. On a donc

$$card.\ (\cup_{\alpha<\varphi<\rho}(E_{\alpha\delta(\varphi)}) \geqq card.\ (\rho)),$$

puisque tous les $E_{\alpha\delta(\varphi)}$ sont disjoints deux à deux et $E_{\alpha\delta(\varphi)} \neq \emptyset$ pour tout φ. D'autre par on a d'aprés (4.5)

$$\begin{aligned} card.\ (E_\alpha) &= card.\ (E_\alpha{}^* \cup (\cup_{\alpha<\varphi<\rho} E_{\alpha\varphi})) \\ &\geqq card.\ (\cup_{\alpha<\varphi<\rho} E_{\alpha\delta(\varphi)}), \end{aligned}$$

d'où
$$card.\ (E_\alpha) \geqq card.\ (\rho),$$

contrairement à la propriètè (II); ce qui achève la démonstration.

Théorème 2. *Soit E un ensemble ramifiè de rang ρ qui est règulier. Alors le rang du noyau E^* de E est ρ et il existe, pour tout $\alpha<\rho$, un ordinal $\beta(\alpha)$ tel que*

$$E^*_\alpha = E_\alpha - \cup_{\alpha<\varphi<\beta(\alpha)} E_{\alpha\varphi}.$$

En outre on a

$$(E^*)^* = E^*;$$

autrement dit, les èlèments de E^* sont tous de seconde catègorie dans E^*.

Demonstration. La première partie de l'assertion se résulte aussitôt de (5.1), du thérème 1 et de (4.5). Pour démontre la dérnière partie supposons au contraire qu'il existe un élément x de E^* qui n'est pas de la seconde catégorie dans E^*. Alors il existe un ordinal $\alpha<\rho$ tel que $x \in C_1(\alpha; E^*)$, c'est-à-dire tel que x est de la première catégorie dans E^* par rapport à α. D'aprés (5.1) il existe un $\beta(\alpha) > \alpha$ tel que $E_{\alpha\varphi} = \emptyset$ pour tout $\varphi > \beta(\alpha)$. D'autre part, x étant un élément de E^* il est de la seconde catégorie dans E. Donc il existe un ordinal $\gamma > \beta(\alpha)$ et un élément $x_\gamma \in E_\gamma$ tels que $x < x_\gamma$. Donc il existe un $x_\alpha \in E_\alpha$ tel que $x < x_\alpha < x_\gamma$. Ce qui démontre que x_α est de la seconde catégorie dans E par rapport à γ, c'est-à-dire $x_\alpha \notin C_1(\gamma; E)$. Or d'apres (4.4) on a,

$$\begin{aligned} E_\alpha \cap C_1(\gamma; E) &= \cup_{\alpha<\varphi\leqq\gamma} E_{\alpha\varphi} \\ &= \cup_{\alpha<\varphi\leqq\beta(\alpha)} E_{\alpha\varphi} \\ &= E_\alpha - E^*_\alpha. \end{aligned}$$

On a donc $x_\alpha \notin E_\alpha - E^*_\alpha$, d'où $x_\alpha \in E_\alpha{}^*$, contrairement à $x \in C_1(\alpha; E^*)$; ce qui démontre le théorème. 《A suivre》