

繊維集合体圧縮特性の接触点モデルと理論式

松平 光男, 秦 虹*

A Contacting Point Model and the Theoretical Equation about Compressional Property of Fiber Assemblies

Mitsuo MATSUDAIRA and Hong QIN*

Abstract

In order to make a detailed theory about compressional properties of fiber assemblies, a basic mechanical model based on the idea that the pressure was increased by the increase of the number of contacting point between fibers and compression plate was proposed. The relationship between pressure and deformation was proved to follow the equation: $P = a \cdot \exp(b_2 \cdot x) + c_2$. The regression constants b_2 and c_2 , which were obtained from the 2nd stage of compressional curve, were explained clearly in relation to structure of fiber assemblies. b_2 is strongly connected to the number of contacting point between fibers and fibers and to compressional deformation. c_2 is related to the change of contacting point between fibers and compression plate and to the linearity of compressional curve. The range of b_2 value was from 4.45 to 147.56 (/mm) and that of c_2 value was from -1.2 to +1.2 (gf/cm²) for the samples examined here.

緒言

圧縮特性は基本力学特性の一つである。繊維集合体の圧縮特性については、従来から数多くの圧縮変形曲線に関する実験式や理論式が提出されているが、計算精度、適用範囲及び圧縮変形の原理などの面でまだ不十分である。例えば、van Wykの圧縮理論では繊維集合体の繊維エレメントを無規則配向に仮定していたが¹⁾、実際の圧縮過程では構成された繊維の配向現象が必然的に起こってくる。松尾の圧縮理論では繊維エレメントを単純な曲げに仮定しているが^{2,3)}、実際には圧縮変形により繊維集合体の繊維同士間に摩擦移動を生じている^{4,5)}。川端、丹羽の圧縮変形の実験式は底を e とする指数関数

を仮定しているが^{6,7)}、実際の圧縮変形曲線を計算する場合には、精度が若干劣っている。また、最近では、小森ら^{8,9,10)}やCarnabyら^{11,12,13)}によって繊維配向を考慮した理論式や圧縮-回復ヒステリシス挙動を考慮した理論式、あるいは圧縮エネルギー最小化法による理論式が提出されているが、これらの理論式は、具体的に計算する上で困難性があり、繊維集合体の構造パラメータとの結び付けが容易ではなかった。

筆者ら⁴⁾は、布の圧縮曲線と回復曲線を各々三つの段階に分けることができた。しかしながら、特に圧縮の第2段階の曲線が指数曲線で近似できるという理由については明確な説明を提出していなかった。そこで本報では、布を中心に繊維集合体の圧縮特性を測定し、圧縮-変形

曲線を分析することにより、集合体の一般的な圧縮過程を考慮した新しい力学モデルと理論式を提案する。そして、より精度の高い圧縮過程の回帰式を見出し、圧縮変形曲線第2段階の回帰曲線に関する回帰定数の力学的な意味を明確化する。

1. 圧縮変形の理論

繊維集合体から立方体を取り出して検討する。この立方体が上、下両面から圧力板の圧縮力を受ける場合には、接触した面積をA、物体力をqとするならば、面積Aの分布力の合力Fは

$$F = q \cdot A \quad (gf) \quad (1)$$

で与えられる。ここで $A = \text{const}$ を保った場合、集中力Fの大きさを決定するのはqだけである。しかし、繊維集合体を圧縮する場合には圧縮変形に伴い、圧縮板と繊維との接触点が増えてくるので、接触面積Aが大きくなる。即ち、「接触面積Aは変形量の函数である」というこ

とが認められる。一方、立方体の中に図1(a)に示すように、単位面積あたりにN個の圧力を支える「道」(loading path)が存在し^{2,3)}、それぞれの「道」はm個の等間隔(=h)の変形プロセスがあるものとする。一つの「道」が支えている力をPとするならば、単位面積の集中力Pは次式となる。

$$P = p \cdot N \quad (gf/cm^2) \quad (2)$$

ここで、

P : 一つの「道」が支えている力 (gf)

N : 単位面積あたりの力を支えている「道」の数 (1/cm²)

以上の立方体における繊維集合体の集合形態は非常に複雑であるが、ランダムに集合しているものではない。ある組織により構成された布(織物、ニットなど)の繊維はある程度一定に並んでいる。不織布、ふとん綿などの繊維集合体でも圧縮によって、繊維は圧縮方向と垂直な面で分布している。このように分布している繊維集合体は圧縮力を受けると、圧縮方向および

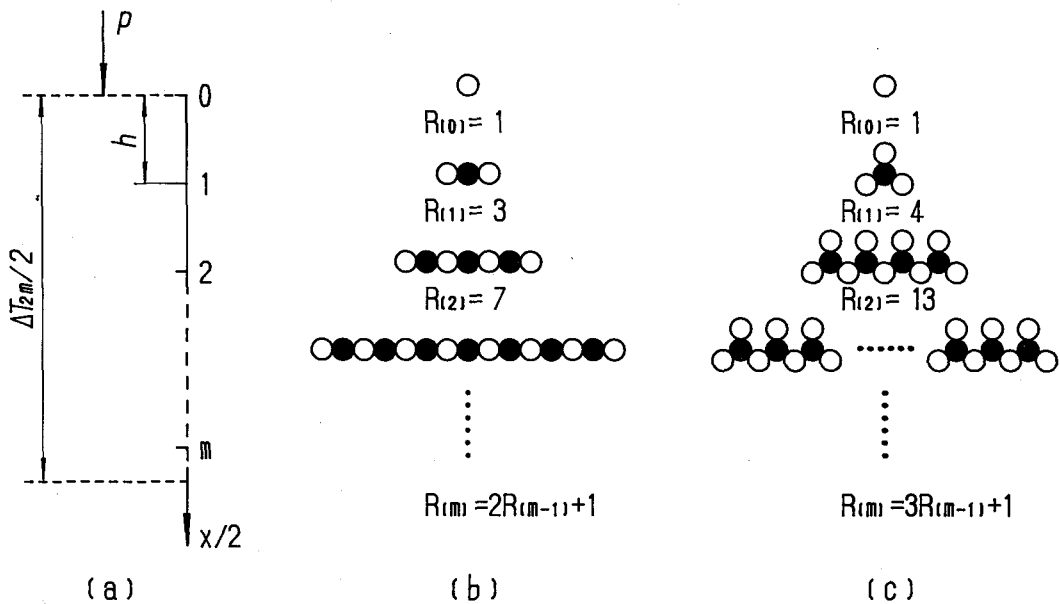


Fig.1 The model of the compressional process (a) and contacting point models (b), (c) of fibrous assemblies

繊維軸方向と垂直な方向へ移動する⁵⁾。すなわち、圧縮変形に伴い、繊維と繊維の間に滑りを生じている。ここで、一つの「道」の圧縮変形過程を図1 (b, c) に示す接触点モデルで仮定する。圧縮板との接触点数が多ければ多いほど、圧縮板との接触面積が大きいことが認められる。最初、圧縮板は最上面の繊維と接触して、力は接触点でこの繊維に伝わる。この繊維の下には必ずこれを支えている二点以上の繊維間の接触点が存在している(図中の○と●の間に繊維間の接触点を表示する)。上からの力によって下の繊維間接触点で働く力が静摩擦力を越えると、滑りが生じて、上の繊維は下の繊維の間に移動する(図中の●)。これを圧縮変形の第1プロセス(m=0)と仮定する。もし、図1 (b) のような繊維間の接触点が2点ならば、圧縮板と繊維との接触点は1点接触から3点接触になる。次に、3点接触から7点接触になる。このように、1, 3, 7, 15, 31……の順で接触点数が増えていく。もし、図1 (c) のような繊維間の接触点が3点ならば、圧縮板と繊維との接触点は1点接触から4点接触になる。次に、4点接触から13点接触になる。このように、1, 4, 13, 40, 121……の順で接触点数が増えていく。

繊維集合体を圧縮する過程では繊維-繊維間の間隔は減少する。この間隔は繊維の応力と繊維-繊維間に働く摩擦力により維持されている。圧縮力の増加に伴い、繊維-繊維間に働く力が静摩擦力を越えると、滑りを生じる。ここで、一つの繊維-繊維間の静摩擦力を越えて働く力をfとするならば、一つの力を支えている「道」での力Pは圧縮板との接触点数R_(m)とfとの積で表される。即ち：

$$P = f \cdot R_{(m)} \quad (gf) \quad (3)$$

ここで：

f：一つの繊維-繊維間の静摩擦力を越える働く力 (gf)

R_(m)：第mプロセスでの圧縮板と繊維との接触点数

図1の (b, c) により、第mプロセスでの圧縮板と繊維との接触点数R_(m)は一つ前の第(m-1)プロセスでの圧縮板と繊維との接触点数R_(m-1)に摩擦接触点数を乗ずることによって与えられる。そこで、次式が得られる。

$$R_{(m)} = n \cdot R_{(m-1)} + r \quad (4)$$

ここで、

n：一つの繊維-繊維間の摩擦接触点数

r：補助定数

(4)式について、等式の両側で次のように変換する。

$$\begin{aligned} R_{(m)} &= n R_{(m-1)} + r \\ n R_{(m-1)} &= n^2 R_{(m-2)} + n r \\ n^2 R_{(m-2)} &= n^3 R_{(m-3)} + n^2 r \\ &\dots \dots \dots \\ n^{(m-2)} R_{(m-(m-2))} &= n^{(m-1)} R_{(m-(m-1))} + n^{(m-2)} r \\ n^{(m-1)} R_{(m-(m-1))} &= n^m R_{(m-m)} + n^{(m-1)} r \end{aligned}$$

等式の左右の項をすべて足し合わすことにより、次式を得る。

$$\begin{aligned} R_{(m)} &= n^m \cdot R_{(0)} + r \cdot \sum_{i=1}^m n^{(i-1)} \\ &= n^m \cdot R_{(0)} + r \cdot \frac{n^m - 1}{n - 1} \quad (5) \end{aligned}$$

ここで、

R₍₀₎：最初のプロセス(m=0)で圧縮板と繊維との接触点数

最初のプロセス(m=0)で圧縮板と繊維との接触点数R₍₀₎を1とするならば、次式になる。

$$R_{(m)} = \frac{n-1+r}{n-1} \cdot n^m - \frac{r}{n-1} \quad (6)$$

$$\mu = \frac{n-1+r}{n-1} \quad (7)$$

$$\lambda = \frac{r}{n-1} \text{ と置くと,} \quad (8)$$

$$R_{(m)} = \mu \cdot n^m + \lambda = \mu \cdot \exp(m \cdot \ln n) + \lambda \quad (9)$$

$$\mu = 1 - \lambda \quad (10)$$

図1 (a) より, m と変形量 x との関係は

$$m = \frac{x}{2 \cdot h} \quad (11)$$

である。但し,

x : 圧縮変形量 (mm)

h : 一つのプロセスで圧縮される繊維集合体の変形量 (mm)

(2) 式, (3) 式と (9) 式を整理すると, 次式を得る。

$$P = \mu \cdot f \cdot N \cdot \exp(m \cdot l_n) + \lambda \cdot f \cdot N \\ = a \cdot \exp(b \cdot x) + c \quad (\text{gf/cm}^2) \quad (12)$$

但し,

$$a = \mu \cdot f \cdot N = \frac{n-1+r}{n-1} \cdot f \cdot N \quad (\text{gf/cm}^2) \quad (13)$$

$$b = \frac{l_n}{2 \cdot h} \quad (1/\text{mm}) \quad (14)$$

$$c = \lambda \cdot f \cdot N = \frac{-r}{n-1} \cdot f \cdot N \quad (\text{gf/cm}^2) \quad (15)$$

(12), (13), (15) 式に $x=0$ を代入すると, $P=a+c=f \cdot N$ である。これは最初のプロセス ($m=0$) で圧縮板と繊維との接触点数 $R_{(0)}$ を1と設定しているためである。 f は一つの繊維-繊維間の静摩擦力を越える働く力であるので, その大きさは繊維の表面摩擦係数と繊維間の圧力により決まる。圧縮変形に伴い, 繊維間の圧力が増えてくるが, P の増加を接触点の増加として考えると, f を繊維間摩擦力の平均値として定数に仮定している。従って, a , b , c は定数である。

2. 実験

2.1 実験装置及び条件

集合体の圧縮特性は, KES圧縮試験機を用い, 既報⁴⁾と同じA/D変換モジュールとコン

ピューター装置で測定をする。但し, 不織布, ふとん綿などの変形量が多いサンプルに対しては, 計算時間を短縮するため, データ間の読み込み時間間隔を大きくして, 総データ数を1000個以内に限定する。

測定環境は $20 \pm 0.3^\circ\text{C}$, $65 \pm 3\% \text{RH}$ である。

2.2 試料

繊維集合体の代表として, 布(織物, ニット) 88点 (その中に, ウール, ポリエステル, シルク, コットン各22点), 不織布4点(ポリエステル), ふとん綿2点(ウール)の圧縮特性を測定した。

さらに, 集合体の一般的な圧縮特性を検討するため, 石川県千里浜海岸から採取した砂の集合体の圧縮特性実験を行った。

3. 結果および考察

3.1 回帰定数 b の影響

既報で提案した圧縮過程の3段階モデルにより⁴⁾, 繊維-繊維間に摩擦を生じるのは圧縮の第2段階であるので, まず, (12)式を第2段階の座標系から図2のような全体の座標系に変換すると, 次式になる。

$$P - P_{1m} = a \cdot \exp(b \cdot (x - x_{1m})) + c \quad (16)$$

但し,

P_{1m} : 第1段階の P の最大値 (gf/cm^2)

x_{1m} : 第1段階の変形量の最大値 (mm)

(16) 式を回帰式として変換すると, 次式になる、

$$y = a \cdot \frac{\exp(b \cdot x)}{\exp(b \cdot x_{1m})} + c + y_{1m} = a_2 \cdot \frac{\exp(b_2 \cdot x)}{\exp(b_2 \cdot x) + c_2} \quad (17)$$

但し,

y : 圧縮力の回帰値 (gf/cm^2)

x_{1m}, y_{1m} : 第1段階の x, y の最大値 (mm, gf/cm^2)

a_2, b_2 : 第 2 段階の回帰定数 ($a_2 = a / \exp(b_2 \cdot x_{1m}), b_2 = b$)

c_2 : 第 2 段階の補助定数 ($c_2 = c + y_{1m}$)

実際に計算する時には、まず、(17)式を $y - c_2 = a_2 \cdot e^{b_2 \cdot x}$ に変換して、 x, y を実測値で、 c_2 を -1.2 から $+1.2$ まで、 0.01 の刻みで代入して、最小二乗法で、 a_2, b_2 を計算する。実験値と回帰値の相関係数が最大値を示す点で a_2, b_2, c_2 を決定する。

$c_2 = 0$ の場合に (17) 式を下式のように変換する。

$$\ln y = \ln a_2 + b_2 \cdot x \quad (18)$$

$$Y = \ln y, A = \ln a_2, B = b_2 \text{ とおくと,}$$

$$Y = A + B \cdot x \quad (19)$$

実験曲線の座標を上式のように対数変換すると、図 2 のような実際の繊維集合体 (サンプル 1) 圧縮変形曲線の縦軸を対数変換した結果 (図中の点線) はほぼ直線である。これに対して、繊維集合体だけでなく、一般的な集合体とする砂の圧縮変形曲線についても、縦軸を図 3 に示すように対数変換すると、ほぼ直線となる。(19)式より、回帰定数 $B (= b_2)$ はこの直線の傾きである。(14)式で定義された $b (= b_2)$ は $\ln n / (2 \cdot h)$ に等しい。繊維間の摩擦接触点数 n の値が大きく、一つの圧縮プロセスの変形量 h が小さくなれば、 b の値が大きくなる。繊維集合体の構造と関連して考えると、これは繊維集合体内部に繊維-繊維間の間隔が小さく、

構造が緊密という意味である。今回実験した繊維集合体サンプル 9 4 点の圧縮変形曲線から計算した b_2 の値の範囲は $4.45 \sim 147.56 (1/\text{mm})$ であった。

3. 2 定数 c の影響

(17) 式を対数変換すると、次式となる。

$$Y = \ln(a_2 \cdot \exp(b_2 \cdot x) + c_2) \quad (20)$$

ここで、

Y : y の対数値

(20) 式の二階微分 Y'' は

$$Y'' = \frac{a_2 \cdot c_2 \cdot b_2^2 \cdot \exp(b_2 \cdot x)}{(a_2 \cdot \exp(b_2 \cdot x) + c_2)^2} \quad (21)$$

である。実際の圧縮変形曲線の場合に、回帰定数 a_2 は常にゼロより大きいので、二階微分 Y'' の符号は c_2 と同一である。 $c_2 < 0, Y'' < 0$ の場合、対数座標系で (20) 式の曲線は上に凸となり (図 4), $c_2 > 0, Y'' > 0$ の場合、曲線は下に凸となる (図 5)。 $c_2 = 0$ の場合には直線になる。今回実験したサンプルに対しては、 $Y_{1m} = 0.5 \sim 1 (\text{gf}/\text{cm}^2)$ であり、 $c_2 = -1.2 \sim +1.2 (\text{gf}/\text{cm}^2)$ である。 $c = c_2 - Y_{1m}$ であるので、 $c = -2.2 \sim 0.7 (\text{gf}/\text{cm}^2)$ である。(15)式により、 $c = -f \cdot N \cdot r / (n - 1)$ であるから、 c の値が小さければ小さいほど、補助定数 r が大きくなる。(4)式により、 r の値が大きくなる

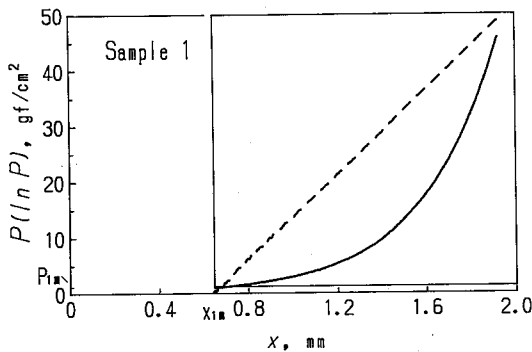


Fig.2 Changed coordinated axes of compressional curve

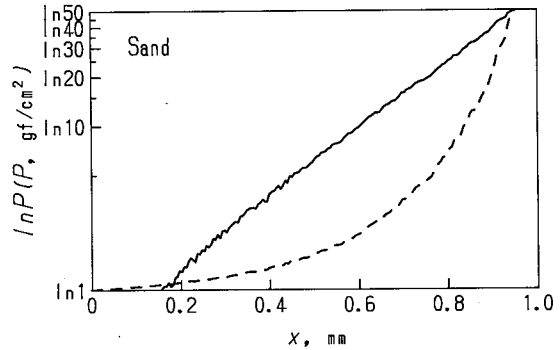


Fig.3 Compressional curve of the fine sand assembly

と、接触点数 $R_{(m)}$ の変化は直線的になる。これを繊維集合体の構造との関連で考えると、圧縮変形に従って、圧縮板と繊維との接触点の増加が前者の方 (c の値が小さい) は圧縮前半に著しく、後者の方 (c の値が大きい) は圧縮後半に著しいということを示している。

今回実験した結果では、ふとん綿、不織布、バルキーなウール、コットン布の c_2 の値はほとんどゼロより大きく、薄手の合成繊維、シルクの布の c_2 の値はほとんどゼロより小さかった。

3. 3 代表的な試料の分析

五つの織物サンプルを実例として検討する。実験したサンプルの圧縮変形曲線を (17) 式に代入して回帰計算した結果を表1に示す。圧縮変形曲線を図4、図5に表す。

表1の中では、サンプル4、5、6よりサンプル2、3の b_2 の値が大きい、圧縮エネルギーWCの値が小さい、変形量 ΔT_m の値が小さい。

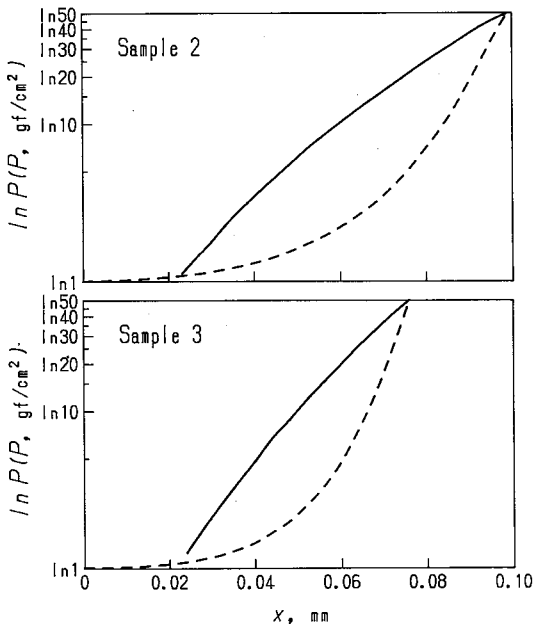


Fig.4 Compressional curves of samples 2, 3 in semi-logarithmic coordinated axis

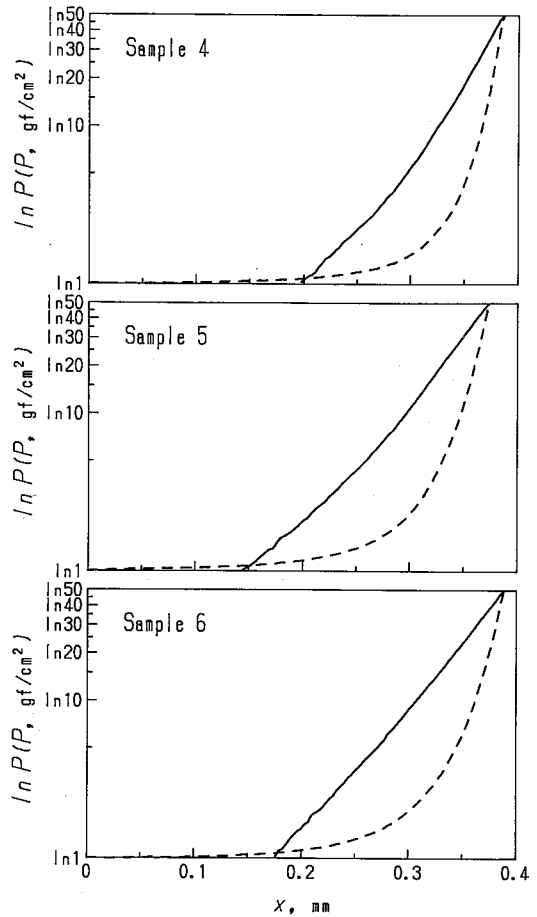


Fig.5 Compressional curves of samples 4 - 6 in semi-logarithmic coordinated axis

実際の手触りの圧縮感はサンプル4、5、6よりサンプル2、3の方が硬い。

図5により、この三つのサンプルの圧縮変形量と圧縮変形曲線の形状がほぼ同じであるが、圧縮特性のパラメータと手触りの圧縮特性が微妙な差がある。

サンプル4はサンプル5に比べると、圧縮線形性 LC の値がほぼ同一であるが、 b_2 の値はサンプル4の方が大きい。3. 1で検討したように、 b_2 の値が大きくなると、圧縮硬い。これはこの三つのサンプルの中ではサンプル4が手触り感で最も圧縮硬いサンプルであることと一致

している。

サンプル6はサンプル5に比べると、圧縮エネルギーWCと b_2 の値がほぼ同一であるが、 c_2 の値はサンプル6の方が小さい。3. 2で検討したように、 c_2 の値が小さければ小さいほど、 r の値が大きくなり、圧縮板との接触点数の変化は線形性が大きくなる。そのため、圧縮線形性LCの値が大きくなっている。

4. 結論

繊維集合体の圧縮特性について、今回提案した理論式で実験値に対して既報より精度の高い回帰計算を行い、検討した結果、以下の結論が得られた。

(1) 繊維集合体の圧縮過程に関し、圧縮変形に伴い、圧縮板と繊維との接触点数が増えるという基本的な力学モデルを提案し、圧縮-変形関係式について、 $P = a \cdot \exp(b \cdot x) + c$ と

いう理論式を導いた。

(2) 既報で提案した圧縮の第2段階における、理論式から得た回帰式の回帰定数 b_2 、 c_2 は繊維集合体の構造と関連するパラメータと認められる。回帰定数 b_2 は繊維集合体内部の繊維-繊維間の接触点数および圧縮変形量と強く関連し、 c_2 は圧縮変形に従って、圧縮板と繊維との接触点数の変化、および圧縮変形の線形性と関連していることを明らかにできた。

(3) 実際に繊維集合体の圧縮実験を行い、圧縮-変形曲線が計算式に極めて近似することを確認できた。今回実験した結果では、 b_2 の値の範囲は4.45~147.56(gf/cm²)であり、 c_2 の値の範囲は-1.2~+1.2(1/mm)であった。

参考文献

- 1) C.M. van Wyk ; J. Text. Inst., 37, T285(1946)
- 2) 松尾達樹、東京工業大学工学博士学位論文(1968)

Table 1 Results of experiment

| Sample | Textile materials | Textile weave | b_2 (1/mm) | c_2 (gf/cm ²) | LC (-) | WC (gf·cm/cm ²) | ΔT_m^* (mm) |
|--------|-------------------|---------------|-----------------|--------------------------------|-----------|--------------------------------|------------------------|
| 1 | Cotton | Plain | 4.23 | 0.03 | 0.4285 | 1.1745 | 1.055 |
| 2 | Polyester | Plain | 43.10 | -1.11 | 0.5622 | 0.1209 | 0.098 |
| 3 | Silk | Plain | 66.91 | -0.66 | 0.5387 | 0.0803 | 0.062 |
| 4 | Wool | Twill | 26.23 | 0.64 | 0.3203 | 0.2026 | 0.257 |
| 5 | Wool | Twill | 20.19 | 0.58 | 0.3285 | 0.2533 | 0.301 |
| 6 | Wool | Twill | 19.99 | 0.39 | 0.3988 | 0.2570 | 0.260 |

*: $\Delta T_m = T_0 - T_m$

- 3) T.Matuo,D.R.Lee ; Proceedings 2nd Asian Textile Congress in Soeul(1993)
- 4) 松平光男, 秦虹、織機誌(論文集),46,T226(1993)
- 5) M.Matudaira,H.Qin ; Proceedings of 22nd Fuji Textile Research Conference, p.128(1993)
- 6) 川端季雄, 丹羽雅子, 河合芳子、織機誌(論文集),31, T74(1978)
- 7) 川端季雄, 丹羽雅子、織機誌(論文集),31,T88(1978)
- 8) M.Itoh,T.Komori ; Sen-i Gakkaishi, 47, p563(1991)
- 9) T.Komori,M.Itoh ; Text. Res.J., 61, 588(1991)
- 10) T.Komori,M.Itoh,A.Takaku ; Text. Res.J., 62, 567(1992)
- 11) G.A.Carnaby,N.Pan ; Text. Res.J., 59, 275(1989)
- 12) D.H.Lee,G.A.Carnaby ; Text. Res.J., 62, 185(1992)
- 13) D.H.Lee,G.A.Carnaby,T.Tandon ; Text.Res. J., 62, 258(1992)