

# Олександр Рудик

## Теорема Кантора — Бернштейна

**Теорема Кантора — Бернштейна.** *Якщо існують ін'єктивні відображення*

$$f: A \rightarrow B,$$

$$g: B \rightarrow A,$$

*то існує бієкція  $h: A \rightarrow B$ .*

*Інакше кажучи, потужності множин  $A$  і  $B$  збігаються:  $|A| = |B|$ .*

**Доведення.** Запровадимо такі позначення:

$$C_0 = A \setminus g(B);$$

$$C_{n+1} = g(f(C_n)) \text{ при } 0 \leq n;$$

+  $\infty$

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

На рис. 1 подано ілюстрацію до побудови шуканої  $h$  для випадку, коли:  
 $A, B$  — горизонтальні відрізки,  
 $f, g$  — гомотетії з центрами відповідно  $Q, P$ .

*Рис. 1.*

Товстою лінією на рисунку позначено:

- на верхньому відрізку  $A$ , рахуючи справа наліво, —  $C_0, C_1, C_2$ ;
- на нижньому відрізку  $B$ , рахуючи справа наліво, —  $f(C_0) = g^{-1}(C_1), f(C_1) = g^{-1}(C_2)$ .

Якщо  $a$  не належить до  $C$ , а значить, і до  $C_0$ , тоді  $a$  має належати до  $g(B)$  — образу множини  $B$  при відображенні  $g$ . У цьому випадку існує  $g^{-1}(a)$ .

Для довільного  $a \in A$  означимо:

$$\begin{aligned}h(a) &= f(a) \text{ при } a \in C, \\h(a) &= g^{-1}(a) \text{ при } a \notin C.\end{aligned}$$

Для довільного  $b \in B$  означимо:

$$\begin{aligned}h^{-1}(b) &= f^{-1}(b) \text{ при } b \in f(C), \\h^{-1}(b) &= g(b) \text{ при } b \notin f(C).\end{aligned}$$

Маємо:  $h$  — коректно визначене шукане взаємно однозначне відображення (бієкція).

Запропоноване визначення відображення  $g$  неконструктивне в тому сенсі, що не існує загального алгоритму визначення за *скінчену* кількість кроків для *довільних* заданих множин  $A$ ,  $B$  і ін'єкцій  $f$ ,  $g$ , чи належить елемент  $a$  множини  $A$  до відповідної множини  $C$  чи ні.

Ернст Шредер першим сформулював теорему, але опублікував неправильне доведення. Незалежно цю теорему сформулював Георг Кантор. Учень Кантора Фелікс Бернштейн опублікував дисертацію, що містила повністю коректне доведення. Тому теорему називають теоремою Кантора — Бернштейна або теоремою Кантора — Бернштейна — Шредера.