From Dual Coding to Multiple Coding:

Effects of Multiple Symbolic Representations

for Mathematical Understanding

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Philosophie

der Fakultät HW

Bereich Empirische Humanwissenschaften

der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Natalie Ott

aus Münchberg

Saarbrücken, 2017

Dekan: Prof. Dr. Cornelius König, Universität des Saarlandes

Berichterstatter: Prof. Dr. Roland Brünken, Universität des Saarlandes

Prof. Dr. Markus Vogel, PH Heidelberg

Tag der Disputation: 3. November 2017

Acknowledgements (in German)

Diese Arbeit hätte nicht fertig werden können ohne die große Unterstützung einer ganzen Reihe von Personen:

Zuallererst danke ich meinem Doktorvater, Professor Roland Brünken, für die Chance, am Lehrstuhl für Empirische Bildungsforschung promovieren zu dürfen, seine kompetente Betreuung während der letzten Jahre, die vielen hilfreichen und kritischen Rückmeldungen und für seine fortwährende Ermutigung und Unterstützung in dieser Zeit.

Genauso danke ich Professor Dr. Markus Vogel für die tolle interdisziplinäre Zusammenarbeit, die wertvollen Rückmeldungen und tatkräftige Unterstützung, seine ansteckende Begeisterung für dieses Forschungsthema und seine große Geduld mit uns Nicht-Mathematikern.

Ein ganz besonderes Dankeschön geht an Dr. Sarah Malone, die als meine Betreuerin mit mir durch diese ereignisreichen letzten Jahre gegangen ist. Danke für Deine kompetente und herzliche Unterstützung, Deine offene Tür bei jeder noch so kleinen Frage, Deine wirklich unendliche Geduld und Deinen enormen Einsatz. Was hatte ich ein Glück, von Dir betreut zu werden!

Sehr herzlich bedanken möchte ich mich auch bei meinen Kollegen für die schöne Zeit am Lehrstuhl und besonders bei all den Hiwis, die mich bei dieser Arbeit so großartig unterstützt haben – allen voran natürlich Katharina Scheuerer und Kristin Altmeyer, sowie Musaab Al-Tuwaijari und Mira Römer stellvertretend für alle anderen.

Einen besonders wichtigen Beitrag haben die vielen Babysitter geleistet, allen voran meine Eltern und Schwiegereltern, die sich unermüdlich und liebevoll um unsere Kinder gekümmert haben – meinen herzlichen Dank besonders an die beiden Omas!

Genauso danke ich meiner Familie generell, besonders meinen Geschwistern, sowie meinen Freunden sowohl im Saarland als auch in Bayern, die immer daran geglaubt haben, dass diese Arbeit trotz allem geschafft werden kann und so oft ganz praktisch und spontan einfach da waren und ausgeholfen haben.

Mein größter Dank aber gilt dem außergewöhnlichen Mann an meiner Seite: Sebastian, danke, dass Du das alles mitgemacht und mich bis zuletzt immer wieder motiviert und unterstützt hast. So oft sah es nicht danach aus, aber jetzt ist es soweit: Wir haben es geschafft!

Abstract

Multiple representations are fundamental elements of learning materials. Following Seufert (2003), the term multiple representations refers to the combination of two or more representations, containing the same or differing content and consisting of the same or differing modality and codality. In multimedia research, usually the effectiveness of combining representations of different types of codality (mostly text and image) is examined, showing to be more effective for learning when presented together than when presented alone (*multimedia effect*, for example, Mayer, 2009). There are plausible theoretical models for effects of these combinations, usually assuming two different channels at least for the initial processing of the information from multiple representations (for example, Paivio, 1986; Schnotz & Bannert, 1999, 2003). In mathematics and science education, multiple *symbolic* representations are combined as well. These combinations differ from the previously mentioned text-picture combinations in so far as they do not contain both a symbolic and an analogously coded representation, but two symbolically coded representations. However, these are encoded in different character systems, such as, for example, text and formula. Comparably rarely, these combinations are examined in the research on multiple representations, and no hypotheses on differentiation between representations of the same code but different coding systems can be derived from the available theoretical models.

The present thesis investigates how learners deal with multiple symbolic representations. In several multirepresentational experiments, two questions are examined: first, whether the principles of multimedia learning can be applied to multiple symbolic representations, and second, based on the results of these studies, whether the common theories on multimedia learning must be differentiated with regard to multiple symbolic representations.

Focusing on the investigation of multiple symbolic representations, the first study was conducted in order to search for empirical evidence of differing influence of text and formulas on performance and to test material from the mathematical field of elementary propositional logic. Results reveal differences between the use of text and formulas and the significant influence of the direction of representational change between the two forms of representation on performance, where formulas stand out as the more difficult representation. These results lead to the question of whether this difference is large enough to replicate the multimedia effect for multiple symbolic representations. Therefore, in the second study, the multimedia effect was investigated using materials specifically designed to precisely separate the two relevant factors of quantity and diversity of representations possibly causing this effect. Quantity here means the number of representations given, whereas diversity stands for whether or not the used representations differ in their coding. Results of study 2 deliver for the first time empirical evidence for the multimedia effect based on multiple symbolic representations, which is comparable in its large effect size to results based on symbolic and analog representations. On the basis of studies 1 and 2, the third and final study examines the question whether, in addition to the multimedia effect, further principles of multimedia learning such as the generation principle for multiple symbolic representations can be replicated. Therefore, the third study investigated whether previous generation of the missing representation leads to better performance. In line with the first study, results of study 3 confirm the difficulties with the formula representation showing that generating formulas is more difficult than generating text. Additionally, results provide evidence for a multimedia effect based on multiple symbolic representations when presented simultaneously.

By investigating the special case of symbolic mathematical representations within the setting of multimedia learning theories, the results of this thesis contribute to research in three major ways: First, by using the example of elementary propositional logic, the results provide evidence for the fostering effect of multiple symbolic representations (text and formula), especially when presented in combination. Second, this thesis shows that the principles of multimedia learning cannot be transferred directly to the special case of multiple symbolic representations, which is for example the case for learner-generated representations. Thirdly and as the main finding, the presented work provides the replication of the multimedia effect for multiple symbolic representations, which will add to the further development of cognitive theories and positively impact the design of multirepresentational learning in STEM education.

Zusammenfassung (in German)

Multiple Repräsentationen gelten als grundlegende Elemente von Lernmaterialien. Der Begriff multiple Repräsentationen meint die „Kombination von mindestens zwei Repräsentationen gleichen oder unterschiedlichen Inhalts, sowie gleicher oder unterschiedlicher Kodalität und Modalität“ (Seufert, 2003, S. 11). In der Multimediaforschung wird zumeist die Wirksamkeit der Kombination von Repräsentationen unterschiedlicher Kodalität untersucht (meistens Text und Bild), die zusammen präsentiert lernförderlicher sind als eine Repräsentation alleine (*Multimedia-Effekt*, z.B. Mayer, 2009). Für die Wirkung dieser Kombinationen liegen plausible theoretische Modelle vor, die in der Regel von verschiedenen Kanälen zumindest für die anfängliche Verarbeitung der Informationen aus multiplen Repräsentationen ausgehen (z.B. Paivio, 1986; Schnotz & Bannert, 1999, 2003). Vor allem im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht werden jedoch häufig auch multiple *symbolische* Repräsentationen kombiniert, die allerdings in unterschiedlichen Zeichensystemen kodiert sind, wie z.B. Text und Formel. Vergleichsweise selten werden diese Kombinationen in der Forschung zu multiplen Repräsentationen untersucht und aus den vorliegenden theoretischen Modellen lassen sich hierzu keine Hypothesen zur Differenzierung zwischen Repräsentationen ableiten, die zwar von gleicher Kodalität sind, aber aus unterschiedlichen Kodierungssystemen stammen.

In der vorliegenden Arbeit geht es daher um den Umgang von Lernenden mit multiplen symbolischen Repräsentationen. In mehreren Experimenten zu multiplen Repräsentationen werden zwei Fragestellungen untersucht: zum einen, ob sich die Prinzipien multimedialen Lernens auf multiple symbolische Repräsentationen übertragen lassen und zum anderen, ob ausgehend von diesen Ergebnissen gängige Theorien zum Lernen mit Multimedia hinsichtlich multipler symbolischer Repräsentationen differenziert werden müssen.

Um multiple symbolische Repräsentationen zu untersuchen, wurde die erste Studie durchgeführt, wobei nach empirischen Belegen für den unterschiedlichem Einfluss von Text und Formeln auf die Leistung gesucht und Material aus dem mathematischen Feld der elementaren propositionalen Logik getestet wurde. Die Ergebnisse zeigen Unterschiede in der Verwendung von Text und Formeln und den signifikanten Einfluss der Richtung des Repräsentationswechsels zwischen den beiden Darstellungsformen auf die Leistung, wobei Formeln sich als die schwierigere Darstellung herausstellen. Diese Ergebnisse führen zu der Frage, ob dieser Unterschied groß genug ist, um den Multimediaeffekt für multiple symbolische Repräsentationen replizieren zu können. Daher wurde in der zweiten Studie der Multimedia-Effekt unter Verwendung eigens konzipierter Materialien untersucht, um die relevanten Faktoren Quantität und Diversität von Repräsentationen, die diesen Effekt möglicherweise bewirken, präzise zu trennen. Quantität steht hier für die Anzahl der gegebenen Repräsentationen, während Diversität bedeutet, ob sich die verwendeten Repräsentationen in ihrer Kodierung unterscheiden oder nicht. Die Ergebnisse aus Studie 2 liefern zum ersten Mal empirische Evidenz für den Multimedia-Effekt auf der Basis multipler symbolischer Repräsentationen, wobei die hohen Effektstärken vergleichbar sind mit Ergebnissen, die auf symbolischen und analogen Repräsentationen basieren.

Auf der Grundlage von Studie 1 und 2 wird in der dritten und letzten Studie der Frage nachgegangen, ob sich neben dem Multimediaeffekt auch weiterführende Prinzipien multimedialen Lernens wie das Generierungsprinzip für multiple symbolische Repräsentationen replizieren lässt. Darum wird nun in der dritten Studie detailliert untersucht, ob die vorherige Generierung der fehlenden Darstellung zu einer besseren Leistung führt. In Übereinstimmung mit der ersten Studie bestätigen die Ergebnisse der dritten Studie die Schwierigkeiten mit der Formelrepräsentation hinsichtlich dessen, dass die Generierung von Formeln deutlich schwerer ist als die Generierung von Text. Es finden sich außerdem Hinweise auf einen Multimedia-Effekt für multiple symbolische Repräsentationen, wenn sie gleichzeitig präsentiert werden.

Aufgrund der Untersuchung des Spezialfalls symbolischer Repräsentationen im Rahmen multimedialer Lerntheorien, erweitern die Ergebnisse dieser Arbeit bisherige Forschung in dreierlei Hinsicht: erstens, indem am Beispiel der elementaren Aussagenlogik empirische Evidenz für die fördernde Wirkung multipler symbolischer Repräsentationen (Text und Formel) präsentiert werden kann, besonders für den Fall, wenn sie in Kombination eingesetzt werden; zweitens zeigen die Ergebnisse, dass die Prinzipien des multimedialen Lernens nicht eins zu eins auf den Sonderfall vielfacher symbolischer Repräsentationen übertragen werden, was beispielsweise bei selbst generierten Repräsentationen der Fall ist; und drittens liefert die vorgestellte Arbeit als wichtigstes Ergebnis die Replikation des Multimedia-Effekts für multiple symbolische Darstellungen - ein Ergebnis, das zur Weiterentwicklung kognitiver Theorien beitragen und die Gestaltung des Lernens mit multiplen Repräsentationen in der STEM-Ausbildung positiv beeinflussen wird.

Contents

List of figures

List of tables

1 Theoretical foundations

1.1 Introduction

Multimedia learning significantly affects our daily life, be it in class, at work or at home. Illustrated school books, PowerPoint presentations, or furniture assembly instructions all deliver their information through different kinds of media, such as words or pictures. Following Weidenmann (2011) the term *media* refers to materials, technical devices or configurations with which information can be communicated and stored. The presented media is characterized by intentional messages, which are encoded by conventionalized symbol systems and structured according to the instructional strategy. From a psychological point of view, focusing on the level of presentation formats, the term *multimedia* means using different forms of representations such as both texts and pictures (Mayer, 2014; Schnotz, 2014). Accordingly, *learning with multimedia* is the construction of knowledge from text and pictures (Mayer, 2014). The intentional design of learning environments in order to promote knowledge acquisition is defined as *multimedia instruction* (Mayer, 2014). Theories and research on multimedia learning and instruction deal with the question what and how people mentally process when perceiving such multimedia information. Understanding these mental processes is essential in order to actively promote learning by the intentional presentation of words and pictures.

Multimedia learning and instruction has grown into a great research area with a large number of studies published every year and early work dating back to at least the 1980s. In a landmark publication of that time, Paivio (1986) introduced a dual-coding approach, stating that human perception is followed by cognitive information processing separated into two different channels: visual/pictorial and auditory/verbal processing. The author designed a simple model of how the cognitive system handles the numerous external information sources and actively processes the perceived information. His dual coding theory explains the different cognitive processes involved in the processing of verbal and visual information (Clark & Paivio, 1991; Paivio, 1986). The authors assume two different but linked mental systems: the verbal system and the nonverbal system. Verbal representations, such as text, are assumed to be processed within the verbal cognitive system and nonverbal representations, such as pictures, but also sounds, actions and other nonlinguistic objects and events, are assumed to be processed within the nonverbal cognitive system. The so-called referential connections link both systems in the sense that corresponding words and pictures are matched to each other and therefore processed twice (dual), which is why pictures are assumed to be processed in both systems and remembered better than text alone (Paivio, 186).

The dual coding approach laid the foundation for several decades of fruitful research eventually evolving into three of the major theories within multimedia learning as we know them today: the *Cognitive Load Theory* (e.g., Paas & Sweller, 2014), the *Cognitive Theory of Multimedia Learning* (Mayer, 2005) and the *Integrated Model of Text and Picture Comprehension* (Schnotz & Bannert, 2003). Fundamental for all three theories is the assumption of limited capacity of human working memory (Miller, 1956; Peterson & Peterson, 1959), which significantly influences successful learning. However, their focus and the implications for learning are different.

1.1.1 Cognitive theories on multimedia learning

Introduced by John Sweller in 1988, the *Cognitive Load Theory* (e.g. Paas & Sweller, 2014; Plass, Moreno & Brünken, 2010; Sweller, 2011, 2012; Sweller, Ayres, & Kalyuga, 2011) emphasizes the limited human cognitive capacities for information processing and differentiates between three categories of cognitive engagement when learning, referred to as cognitive load: intrinsic load, extraneous load, and germane load. Intrinsic load is the fix cognitive load of a given task due to its natural complexity. Extraneous load is caused by inappropriate instructional designs that unnecessarily impede cognitive processing and waste cognitive resources on orientation rather than engage in learning activities. Germane load, at last, arises from the process of effective knowledge acquisition. It refers to the actual working memory resources destined for dealing with intrinsic cognitive load (Kalyuga, 2011; Sweller, 2010; Sweller et al., 2011). In order to support learning, the cognitive load theory emphasizes instructional design aspects that avoid cognitive overload and increase germane load. In recent publications, this theory is further developed in the sense that only two instead of three types are considered: intrinsic and extraneous load (Kalyuga, 2011; Leppink et al., 2014). They argue that attempts to increase germane load actually increase intrinsic load because these activities add interactive elements to the learning task. Working memory resources dedicated to deal with intrinsic load are therefore called “germane resources”, which is why germane load is no longer considered as distinct factor but included into intrinsic load (Choi, van Merriënboer, & Paas, 2014). Moreover, the physical learning environment is added as a distinct casual factor of cognitive load (Choi et al., 2014). The authors emphasize the importance of the learning environment as an additional factor, which interacts with both the learner’s characteristics as well as the learning-task characteristics. Including both the previous and the recent view, the cognitive load theory explains the different types of cognitive load possibly leading to cognitive overload and learning loss due to an unfavorable presentation of learning material. The kind of representations that are used for learning therefore seems to be decisive for success.

The two other theories differ from the cognitive load approach by explicitly considering multimedia aspects. Mayer's *Cognitive Theory of Multimedia Learning* (2005), the most commonly known theory on multimedia learning, explains in particular why multiple representations presented in different modalities reduce working memory load and thus facilitate learning. It rests upon three major assumptions: a dual-channel view of the human information processing system separated into the visual/pictorial and the auditory/verbal processing channel, the assumption of limited capacity of human processing, and active processing as a prerequisite for successful learning (Mayer, 2014). The concept of dual-channel processing is based on the sensory distinction between eyes and ears, assuming that each of the two senses receives fundamentally distinct stimuli, which are therefore processed differently, that is in two different "channels" (see figure 1).

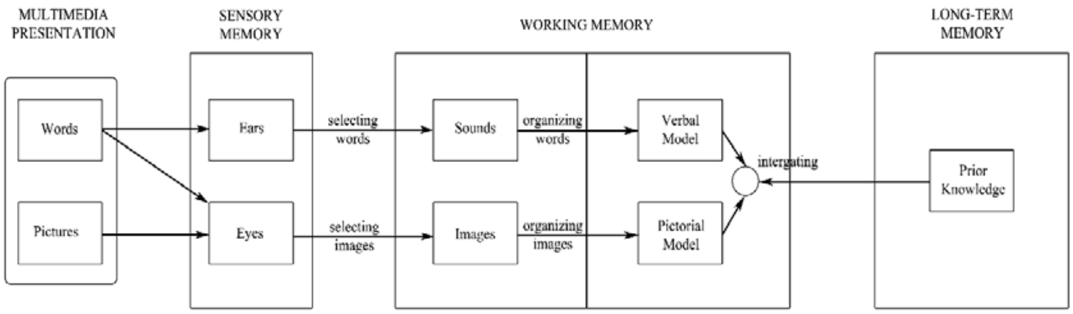


Figure 1. Cognitive theory of multimedia learning (Mayer, 2014).

Here lies the main difference to our next major theory, the *Integrated Model of Text and Picture Comprehension* (Schnotz & Bannert, 2003). Even though sensory aspects are equally included in the main theory, this model provides a shift towards the distinction between different representational formats based on text surface or picture surface structures, including the following processing of semantic deep structures (Schnotz, 2014). The model of Schnotz and Bannert is therefore able to explain why multiple representations, which are presented in different coding, can serve as a basis for facilitating the learning process.

Analyzing the existing forms of external representations, Schnotz (2014) extracts two basic formats: descriptions and depictions. He emphasizes text as the most common kind of descriptions, but additionally refers to all other kinds of representations which consist of symbols, including mathematical expressions and formulas. On the other hand, the author describes depictions as representations that consist of icons or characters that are similar to the depicted. Examples are for instance pictures, drawings and photographs, but also maps or graphics. Based on this distinction, Schnotz and Bannert (2003) introduced their theoretical framework for analyzing text and picture comprehension (see figure 2). They assume two distinct branches of comprehension: a branch of descriptive representations for text comprehension and a branch of depictive representations for picture comprehension. On the basis of research findings on text comprehension, three kinds of mental representations are assumed to be constructed after reading a text or listening to a text (Graesser, Millis, & Zwaan, 1997; Kintsch, 1998; McNamara, 2007; van Dijk & Kintsch, 1983; van Oostendorp, & Goldman, 1999; Weaver, Mannes, & Fletcher, 1995). These three kinds of internal representations are the text surface representation, the propositional representation, and the mental model. Primarily, the reader mentally pictures a text surface representation directly after reading, without necessarily understanding it yet. Based on this and evolving to the next level, the reader constructs a propositional representation, which includes the ideas in the text at a conceptual level. At the final stage, the reader constructs a mental model of the content provided in the text. Concerning internal representations in the process of picture comprehension, there also seem to emerge different mental representations (Kosslyn, 1994; Lowe, 1996). These are, again at first, a perceptual representation of the picture surface, and then, a mental model reflecting the content of the picture. In order to reflect the reciprocal influence within mental activity, the author additionally proposes interactions between mental models and propositional representations, which are intended to further construct mental models and read off new information from the constructed mental model, the so-called model inspection (Schnotz & Bannert, 2003). Based on the external representations, internal representations are consequently considered to be either descriptive or depictive.

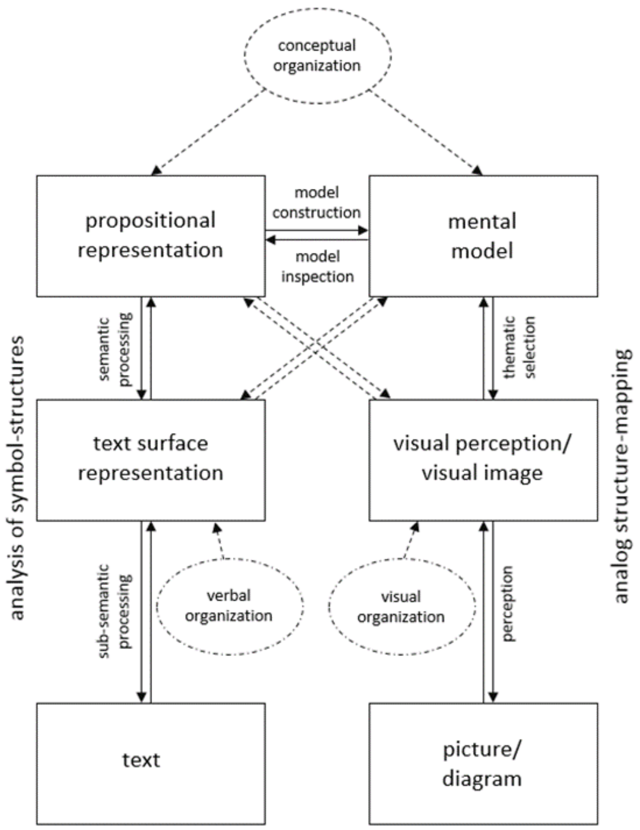


Figure 2. Theoretical framework for analyzing text and picture comprehension (Schnotz & Bannert, 2003).

Schnotz (2014) describes mental models at the highest level of processing, which are assumed to emerge into a general abstract structure because they are based on the integration of various sensory information like visual, auditory, and touch (see also the extended version of the *Integrated model of text and picture comprehension*, Schnotz, 2014). The previously explained concept is visualized in figure 2. This model does not, however, make a statement on how to differentiate between representations that are encoded in the same way but differ in their coding systems. This is for instance the case for multiple symbolic representations like text and formula. Taking into account the theoretical bases of both theories, within this thesis, the focus will be on the distinction being made between processing of descriptions (symbol structures) and processing of depictions (analog structures).

1.1.2 A semiotic view on representations

Defining representations, Palmer (1978) wrote: "A representation is, first and foremost, something that stands for something else." Even though there are numerous variants of representations, according to Schnotz (2014) there are only two basic forms: descriptions and depictions. As described above, descriptions include both text and (among others) mathematical representations such as formulas. For both kinds of representations, Schnotz (2001) states that these descriptive representations are described by means of symbols. These symbols are of an arbitrary structure and are connected to the object they represent only by conventions (Peirce, 1906). Two common symbolic code systems are the verbal (alphabetical) system and the numerical (mathematical) system (Weidenmann, 2011). Both symbolic systems have in common that they are able to provide representations that differ in their symbol systems and still contain the same information, which means for certain cases that a text and a formula can be informationally equivalent. This is due to the fact that both symbolic representations like text and formulas consist of main elements (e.g. nouns or mathematical propositions and variables) and relating elements (e.g., verbs and prepositions or mathematical logical operators). Therefore, a description based on symbols contains relational elements, which are added to the representation for structuring purposes (Schnotz, 2001). According to Palmer (1978), this defines descriptional representations as “extrinsic” representations. Pictures or depictional representations naturally contain inherent structural features, which is why the author defines them as “intrinsic” representations.

Overall, text and formula obviously are different. This is the case not only for visually perceptible differences such as “∀” and “for all” due to the two different symbol systems, but also inherent differences like higher information density in mathematical notations and unambiguity of mathematical expressions (Maier & Schweiger, 1999). Up to this point, however, it is not clear how these differences *within* multiple symbolic representations influence mental processes and performance, an issue that will be addressed in the presented research.

1.1.3 Learning with multiple representations

Concerning the two theories on multimedia learning, both of them have in common that they focus on the two basic elements: text and pictures. These elements are also known as representations, i.e. illustrations, symbols, pictures or any kind of other exemplification intended to represent a defined content. We speak of multiple representations if more than one representation is used for learning. Following Seufert (2003), multiple representations in general are therefore combinations of two or more representations of the same or differing content, which may also be of the same or differing modality and codality. What is special about multiple (external) representations is that they can provide remarkable benefits for improving human learning. Additionally, the specific representations used influence learner processing and how these learners represent information (Kozma, 1991; van Meter & Garner, 2005). However, not all multimedia representations are equally effective and may even have adverse effects (e.g., Ainsworth, 1999, 2006). As a prominent review, Ainsworth (2006) provides an extensive discussion on a range of factors that influence learning with multiple representations. Based on the current state of research, she develops a theoretical framework (the so-called *DeFT framework*) pointing out three fundamental aspects of learning with multiple representations: unique *de*sign parameters for multirepresentational learning, the *f*unctions of multiple representations during learning, and the cognitive *t*asks learners are engaged with when learning with multiple representations. This approach differs from the above mentioned theories in the sense that it addresses different aspects of learning with multiple representations and emphasizes the design factors of effective multi-representational software rather than the form of representational system.

When analyzing the design factors for multi-representational systems, the author mentions first of all the number of representations, then the way of information distribution, the specific form of the representational system, in which sequence the representations are provided, and lastly, the kind of support for translation between the given representations. All of these factors seem to influence the processes and outcomes of learning.

In early research on multiple representations, studies like the one from Levin, Anglin, & Carney (1987) concentrated on how to improve reader’s memory for text comprehension by simultaneously presenting pictures with the text. In the following two decades of multirepresentational research, the focus had widened by including all kinds of representations such as diagrams, equations, graphs, tables, animations, and even sound or video, producing rather mixed results on the benefits (e.g., Cox & Brna, 1995; Tabachneck, Koedinger, & Nathan, 1994) or hindering effects (e.g., Chandler & Sweller, 1992; Van Someren, Reimann, Boshuizen, & de Jong, 1998) of learning with multiple representations. Nowadays, research has matured into second-generational studies shifting from the question of whether multiple representations support learning to when and under what conditions they do so (Ainsworth, 2014). Considering the benefits of multiple external representations, Ainsworth (1999, 2006) proposes three main functions: to complement, constrain, and construct (see figure 3).

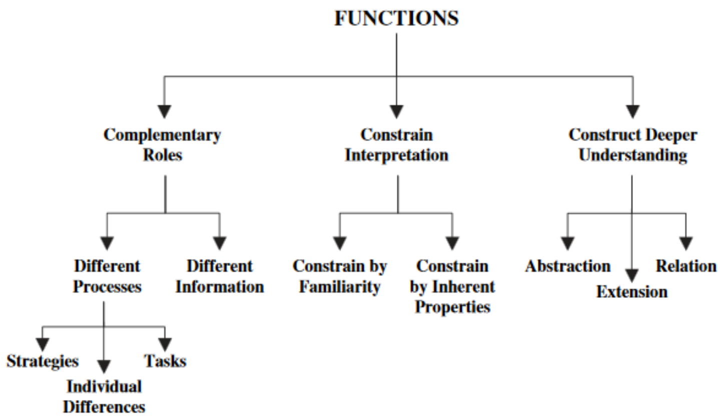


Figure 3. A functional taxonomy of multiple representations (Ainsworth, 2006).

In order to bring out the advantages of each individual representation, one can combine *complementary* representations. This means that the presented representations differ either in the processes they support or in the information each representation contains, which complement each other. When looking at same content representations, they still have different computational properties meaning that they differ in how quickly and easily these representations can be cognitively processed. This has been widely researched within many different domains (e.g., Card, Mackinlay, & Shneiderman, 1999; Hegarty, 2011; Kress & van Leeuwen, 1996; Reed, 2010; Scaife & Rogers, 1996; Treagust & Tsui, 2013; Tversky, 2011; Ware, 2008) finding for instance, how diagrams, tables or graphs foster understanding due to their spatial features, making search and recognition easier. Parnafes and Disessa (2004) investigated different forms of representations (animation of a racing turtle vs number list of velocity and time) and found that each form of representation supported complementary cognitive processing. Taking into account individual differences, learners who are presented with different types of informationally equivalent representations are able to choose their preferred representation (e.g., Dunn & Dunn, 1993). Evidence for learning improvement due to choosing ones preference out of complementary representations is presented by Plass, Chun, Mayer, and Leutner (1998), who found that students, who could choose their preferred mode of additional information (verbal/visual/both), performed better when comprehending a story in a second language. However, research on individual differences emphasizes differing expertise either with the learning content or the representations used (Stenning, Cox, & Oberlander, 1995; ChanLin, 2001) rather than the mere preference of a specific representational format. Research on task and representation interaction revealed how performance can be improved by matching the structure of information in the given problem with the form of the presented representation (Gilmore & Green, 1984) and how learners provided with several representations benefit from the best representation for the current task (Tapiero, 2001). Finally, complementary representations consisting of different formats of representation are found to facilitate the use of more or less effective metacognitive strategies such as self-explanation (Ainsworth & Loizou, 2003). This may be the case because different forms of representations encourage the learner to try multiple strategies for problem solving, while switching between the strategies helped compensating for individual weaknesses of the individual strategy (Tabachneck et al., 1994). In sum, research on complementary representations has shown that no representation is universally superior, but needs to be matched with the requirements of the actual learning tasks (Ainsworth, 2014).

Another advantage of combining multiple external representation is that one (easier or more familiar) representation may help to access and understand a second (complex or unfamiliar) representation, the so-called *constraining* function of representations. One representation therefore provides a constraining (or guiding) function in relation to at least one other representation. Investigating simulation environments and dynamic representations, Leinhardt, Zaslavsky, and Stein (1990) found that providing a simple animation of a moving car reduces the possibility that learners will misinterpret the less familiar graph on velocity-time-interaction. This advantage is frequently confirmed not only for computer environments (Mokros & Tinker, 1987; Beichner, 1990; van der Meij & de Jong, 2006, 2011) but also for analog representations in physics or chemistry education (Prain & Waldrip, 2006; Madden, Jones, & Rahm, 2011). This function, however, implies several limitations (Ainsworth, 2014). First of all, it is only effective if learners understand the relationship between the constraining and the more difficult representation. Secondly, the easier representation may produce misconceptions concerning the second representation, and thirdly, the constraining function might prove to be unnecessary for the learner who understands the second representation without any additional help. For the latter, Ainsworth (2014) predicts an *expertise reversal effect* (Kalyuga, Ayres, Chandler, & Sweller, 2003) stating that novices will improve from constraining functions whereas experts may even be inhibited.

The third and final function of multiple external representations is the *construction of deeper understanding* by using multiple representations. As a prerequisite, learners need to understand the relation between all given representations and should be able to transform one representation into another (e.g. draw a graph based on a given formula) and integrate all given representations. This has proved to be of particular difficulty (e.g., Ainsworth, Bibby, & Wood, 2002; Anzai, 1991; Schoenfeld, Smith, & Arcavi, 1993; Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987; Yerushalmy, 1991). Especially in STEM education (science, technology, engineering, and mathematics), successful performance is associated with fluently using and mastering the coordination of multiple representations (Kultusministerkonferenz, 2012). In order to support such expertise, Stull, Hegarty, Dixon, and Stieff (2012) showed that translation performance between various diagrams of molecular structure could be fostered by providing students with interactive physical models. Working with multiple representations can help students understand complex concepts (Olympiou, Zacharias, & de Jong, 2012) and even facilitate team work performance, in the sense that multiple representations foster student collaborations to coordinate and deepen their understanding (White & Pea, 2012; Furberg, Kluge, & Ludvigsen, 2013). Constructing understanding by working with multiple representations is proved to be successful if students are provided with appropriate support.

Overall, Ainsworth (2014) emphasizes that research on learning with multiple representations should not only analyze the cognitive aspects of dealing with multiple representations but should additionally take into account the pedagogical functions multiple representations are supposed to fulfil for learners. Contradicting results in previous research can be explained by her functional concept, e.g. Kalyuga, Chandler, and Sweller (1998) versus Ainsworth, Bibby, and Wood (1997): The first group of researchers summarizes results of a number of studies dealing with diagrams and corresponding but redundant text representations. They show that redundancy in the presented representations should be reduced with increasing expertise. In contrast, the second group of researchers found that learners benefited more from non-redundant presentations than from fully redundant representations. According to Ainsworth (2006), these conflicting results can be explained by the different functions of multiple representations: for the first result, the used representation text may have been used to constrain understanding of the additionally presented diagram whereas in the second study, the given representations complement each other. Additionally, Ainsworth (2014) further points out the significance of achieving representational competence (Kozma & Russell, 2005), which is an essential contributor to student learning and important aim of instructional effort (e.g. Stieff, Scopelitis, Lira, & Desutter, 2016), in order to fully benefit from the advantages of multiple external representations.

To summarize the theoretical basis, all theories contribute helpful insight in their own way: The cognitive load theory shows how unfavorable presentation of learning material leads to cognitive overloading and consequently to a loss in learning. The type of representation therefore seems to be decisive for successful understanding and knowledge acquisition. Mayer’s cognitive theory of multimedia learning explains (based on Paivio, 1986) why multiple representations of different modalities relieve working memory and thus facilitate learning. Additionally, the model of Schnotz and Bannert (2003) can explain why representations, presented in different coding, also promote learning. However, this model does not differentiate between representations of the same code but different coding systems. This issue will be addressed in the presented research concerning the special case of multiple symbolic representations. Finally, the different functions of the single and combined representations can be analyzed more precisely through the *DeFT* framework of Ainsworth (2006).

1.1.4 Principles of multimedia learning

In order to create learning material which meaningfully integrates multiple representations, the well-researched principles of multimedia learning should be considered. Therefore, in the following sections some of the basic and advanced principles of multimedia learning are described. These are the *multimedia principle* (Mayer, 2001), the *redundancy principle* (Chandler & Sweller, 1991), and the *generative drawing principle* (Schwamborn, Mayer, Thillmann, Leopold, & Leutner, 2010). These principles were chosen for the following reasons: First of all, replicating the multimedia principle for multiple symbolic representations would clearly show the specific differences between textual and formal representations and additionally reveal their supplementary functions when presented in combination. Secondly, the redundancy principle serves as a counterbalance stating the exact opposite and providing the possibility to theoretically support the discussions. Finally, the generative drawing principle was chosen in order to find out whether learners will benefit from generative activities when dealing with multiple symbolic representations. For an extensive review on these and also further principles of multimedia learning see Mayer, 2014.

1.1.4.1 The multimedia principle

Since multimedia learning is learning from text and pictures, the rationale for studying multimedia learning is the most well-known finding of multimedia research: people can learn more deeply from text and pictures than from text alone (the so-called *multimedia principle*, Mayer, 2001), which is theoretically based on the dual coding assumption (Paivio, 1986) described above. This principle has proved to successfully operate across various types of multimedia representations including both static and dynamic forms, various methods of learner interaction, and different levels of prior knowledge (for a review see e.g. Butcher, 2014). Concerning static representations, as they are examined in this thesis, research has shown that the addition of static illustrations or diagrams to a textually or audio presented verbal representation facilitates deeper understanding of the learning materials. This finding could be frequently replicated, for instance, concerning the special case of diagrams (Butcher, 2006; Cuevas, Fiore, & Oser, 2002; Glenberg & Langston, 1992; Mayer & Gallini, 1990). Within the field of STEM education, static representations like text and formulas belong to the commonly used representations. However, their fostering or inhibiting effects on learning and understanding, have been rarely investigated so far.

1.1.4.2 The redundancy principle

Stating that redundant material inhibits rather than fosters learning, Kalyuga and Sweller (2014) differentiate between two forms of redundancy: first, presenting identical information in multiple forms and second, unnecessarily elaborating already presented information. Theoretically based on *Cognitive Load Theory* (Sweller, 2011, 2012; Sweller et al., 2011), the authors explain this principle with the logical assumption that any cognitive resources spend on activities other than learning cannot be spend on constructing coherent mental models based on the essential material, decreasing the possible learning outcome. When processing redundant information, the limited cognitive capacity is unnecessarily diminished.

Interestingly, this contradicts the fact that research has unequivocally shown to what extent different forms of representations have different computational properties (e.g. Card et al., 1999; Hegarty, 2011; Kress & van Leeuwen, 1996; Reed, 2010; Scaife & Rogers, 1996; Treagust & Tsui, 2013; Tversky, 2011; Ware, 2008). This leads to the statement that informationally equivalent representations can be advantageous for learning, *because* they represent the same information in different forms, and therefore possibly complement each other (e.g., Larkin & Simon, 1987).

Despite these findings, Kalyuga and Sweller (2014) define one representation (referring to Larkin & Simon, 1987, the authors chose text) as redundant and explain their statement with their second form of redundancy. This explanation, however, seems not sufficient for the results mentioned before. The previously described theoretical concept about different functions of multiple external representations (*DeFT*, Ainsworth, 2006) provides an alternative perspective: additionally to investigating whether or not redundancy occurs, the author suggests to include the different functions of multiple external representations (see 1.1.3), which provides a more detailed picture of why and how multiple (informationally equivalent) representations work together or not. This perspective questions the first form of redundancy and considers whether or not redundancy is actually limited to the second form: the unnecessary elaboration of additional information distracting the learner from concentrating on what is crucial for learning. In order to shed light into the mentioned contradiction, this thesis precisely separates codality and quantity of representations and offers evidence contradicting the first form of redundancy (see study 2).

1.1.4.3 The generative drawing principle

Van Meter and Garner (2005) show how learners no longer passively consume information, but actively process them when they are assigned to draw pictures reflecting the main learning contents. Therefore, the generative drawing principle states that students perform better after being asked to draw while reading (Schwamborn et al., 2010). This improvement in performance is usually explained with the *generative theory of drawing construction* (van Meter & Garner, 2005), which explains this finding through deeper processing of perceived information due to selecting important learning contents, cognitively organizing them and integrating them with prior knowledge.

Research on this principle, however, provided mixed results. Studies with contradicting results failed to show benefits of a drawing activity (e.g., Leutner, Leopold, & Sumfleth, 2009; Rasco, Tennyson, & Boutwell, 1975; Tirre, Manelis, & Leicht, 1979). Leopold, Sumfleth, and Leutner (2013) found that providing pictorial summaries rather than having learners create them by themselves leads to increased learning performance. Similar to this, Schwamborn, Thillmann, Opfermann, & Leutner (2011) were able to show that self-generated pictures decreased text comprehension whereas provided pictures increased text comprehension. The authors explain their findings with an increase of cognitive load during generative activities and argue that these learners had fewer resources left for essential cognitive processing. In contrast, there are many studies showing evidence for increased text comprehension due to drawing activities, either without instructional support for drawing (Alesandrini, 1981; Gobert & Clement, 1999; Leopold & Leutner, 2012) or including instructional support for drawing, e.g. generating verbal self-explanations before drawing or partly pre-drawn backgrounds (Ainsworth, 2010; Schmeck et al., 2012; Friedrich, Schmeck, Opfermann, Leutner, 2013). Concerning the generation of symbolic representations there is implicit research on text generation, which usually serves as a control condition in many of the previously mentioned studies. Based on current research on generative learning activities, learning including pictorially presented information tends to outperform learning with verbally presented information. There is, however, no empirical study that we know of, explicitly transferring the principle of generation to multiple symbolic representations and the comparison of text and formula generation. If multiple symbolic representations such as text and formula differ in their influence on learning activities, this might also be the case for the generation of either one symbolic representation (see study 3).

1.2. Desiderata of research

1.2.1 Question of transfer

Common principles going along with multirepresentational learning, such as the multimedia effect for the combination of text and picture (see Mayer, 2009, for a review), have tendencially proved to successfully enhance knowledge acquisition. What we do not know, however, is whether these principles are also true for multiple symbolic representations like text and formulas as they are commonly used in STEM education. In the following, the focus is on the two symbolic representations text and formula instead of the normally used symbolic and analog representations text and pictures. Research on these two particular representations is rather rare compared to other scientific or mathematical representations such as graphs or figures. As one of few studies, Dee-Lucas and Larkin (1991) investigated scientific reasoning on proofs and compared the influence of two representational formats on subsequent problem solving. One format was an equation-based proof and the other format was a same content verbal proof. They found that the verbal proofs resulted in better problem solving performance than the equation-based proofs, whereas the problems had to be solved after the proofs were removed. They explain their findings with the participants having problems processing these (typical) equations. Additionally, the authors say that the equations distracted the participants and shifted their attention away from non-equational contents crucial for understanding the underlying logic of the proofs. Contrary to that, Müller and Heise (2006) compared same content formula-based and textual representations in physics and found that the participants working with the formula version performed significantly better than the participants working with the textual version. In each case, one representational format and its problem were presented simultaneously. However, the authors did not include the condition of both representational formats plus the problem. In one of their studies on cognitive load measurement, Leppink, Paas, Van der Vleuten, Van Gog and Van Merriënboer (2013) compared the two representational formats text and formula varying the order of appearance (first text explanation then formula explanation vs first formula explanation then text explanation). Measuring cognitive load, the results show that the average score was highest after the students received the formula format and before they were then allowed to engage in the text version. Again, both representational formats were not presented simultaneously.

The presented empirical evidence shows that it seems to matter whether learning material is provided through formulas or their same content textual counterpart, and may therefore have a significant influence on performance. By tendency, text seems to be more helpful (DeeLucas & Larkin, 1991; Leppink, et al., 2013), however, formulas also tend to have specific advantages (Müller & Heise, 2006). Due to the major importance of symbolic representations such as text and formula within STEM education and mathematics in particular, in this thesis, several studies are conducted in order to investigate whether the major principles of multimedia learning can be replicated within this setting. This leads to the first main question of research: Do the principles found in general multimedia research apply to multiple symbolic representations in the same way?

1.2.2 Question of differentiation

Within the outlined theoretical setting, this thesis addresses a blind spot in the prominent theories on multimedia learning. Regarding the major theories introduced above, both the *Cognitive Theory of Multimedia Learning* (Mayer, 2014) and the *Integrative Model of Text and Picture Comprehension* (Schnotz & Bannert, 2003) explain the positive effects of combining representations which differ in modality or codality. Modality is referred to as the sensory organs (eyes, ears, sense of touch), through which a medial offer is perceived, whereas codality means the use of different coding formats such as text, pictures, or numbers (Weidenmann, 2011). However, they neglect representations differing for design factors other than the form of their representational system. That is, for instance, the case for multiple symbolic representations like text and formulas, as they frequently occur in math and science education. We therefore chose this special case of multiple symbolic representations by using materials from the mathematical field of elementary propositional logic and empirically searched for evidence for the multimedia effect. Referring to the model of Schnotz and Bannert (2003), a differentiation within the descriptive branch indicates to a certain extent different channels of processing not only for multiple representations, but also for multiple *symbolic* representations. The research presented above supports the conclusion that, even if they are identical in content, text and formula can be differently effective for learning. A further underpinning for this assumption would be the result, that the combination of text and formula, even if they are identical in content, better promote learning than one of these representations presented alone. This leads to the second main question of research: Do the theoretical models have to be differentiated within the descriptive branch?

1.3 Aims and research questions

The studies presented in this thesis are conducted in order to meet the above mentioned two objectives: investigating (1) whether or not principles of multimedia learning can be transferred on multiple symbolic representations and (2) due to the results whether or not common theories in multimedia learning should be differentiated. Based on the theoretical foundations presented above and in order to find answers to our two major research questions, a series of three studies on multiple symbolic representations was conducted.

As described above, multiple symbolic representations such as text and formula have both similarities and differences. The similarities led to the fact that within the theories of multimedia learning, multiple symbolic representations were grouped into one category: descriptions (Schnotz, 2014). On the other hand, there are several studies in which, in addition to other forms of representations such as images or graphs, the differences between text and the formula become clear as well as their different effects on learning and problem solving (e.g., Andrá, Lindström, Arzarello, Holmqvist, Robutti, & Sabena, 2015; Geiger, Stradtmann, Vogel, & Seufert, 2011; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). With the clear focus on the two purely symbolic representations text and formula, as a first step these findings should be replicated. The first study therefore focused on the development of appropriate materials and the question of whether, and to what extent, different symbolic representations such as text and formula make a difference on performance. This was intended to be achieved by investigating to what extent the participants are able to transfer from one representation into the other and assess the mathematical content of a logical statement. Both tasks provide results to the question of which version of representation (text vs formula) better supports problem solving. As research material, we developed various math problems from the mathematical field of elementary propositional logic. Not only did the developed materials prove to be useful for research on this subject, results also indicated differences in the use of text and formulas. There was a significant influence of the direction of representational change between the two forms of representation on performance, while formulas are the more difficult representation. In line with previous research, the different influences of the individual symbolic representations on the participants' performance could also be demonstrated in this study 1.

In the following, the question arises whether these differences are large enough to replicate a multimedia effect for multiple symbolic representations. If it is possible to prove the multimedia effect for multiple symbolic representations, this can be seen as indication that common theories on the subject of multimedia learning must be differentiated. The previously found differences in dealing with each symbolic representation lead to the theoretical assumption that the multimedia effect can possibly be replicated for multiple symbolic representations. This is why the second study focused on the empirical confirmation of the multimedia effect for multiple symbolic representations. In order to be able to precisely separate the two relevant factors possibly causing the multimedia effect, further material was developed assuring to differentiate between these two factors: codality and quantity of representations. The results of study 2 confirm the multimedia effect and deliver for the first time substantial empirical evidence for this effect in the special case of multiple symbolic representations.

Based on these results and the previously used materials, the third and last study was conducted in order to investigate whether or not also advanced principles of multimedia learning can be replicated for multiple symbolic representations. As an advanced principle of multimedia learning we chose the generation principle. Since transforming one representation into the other is a generative activity, this study investigated the question whether or not this generative activity positively influences conceptual understanding of the given problems. According to Kalyuga and Sweller (2014), two informationally equivalent representations are redundant, and therefore lead to poorer performance. In contrast, the multimedia effect states that a combined presentation would lead to better performance. Research in this last study was intended to replicate the multimedia effect for multiple symbolic representations with different materials and focused in more detail on the transformation activity in comparison to presentation of ready-made representations, investigating whether previous generation of missing representations leads to better performance. In accordance with the first study, results of study 3 provide additional evidence for the difficulties students face when dealing with the formula representation in terms of generation. Additionally, and in line with study 2, these findings provide additional results contradicting the redundancy assumption for multiple symbolic representation as informationally equivalent representations. Instead, and in accordance with study 2, they indicate a multimedia effect for multiple symbolic representations, which was, however, restricted to the simultaneous presentation of given representations.

1.4 Outline of the thesis

This thesis consists of three empirical chapters based on the above mentioned three different studies. Even though I am the first author of all three articles, several people also contributed to the research and writing of the articles, such as Prof. Roland Brünken, Prof. Markus Vogel, and Dr. Sarah Malone. References for all chapters are collectively provided at the end of the thesis. The following is an overview of the three different empirical chapters. Note that each chapter is self-contained and can be read independently.

Chapter 2: The focus of the first study is on transformation between multiple representations, also known as representational change, which belongs to the important elements of representational competence in mathematics (Kultusministerkonferenz, 2012). The two main purposes of this study were, first of all, to find out whether or not the developed materials specifically developed for the purposes of this study are suitable for research on multiple symbolic representations, and in that context, learn more about how beginners and advanced university students (N=236) deal with different multiple representations. We therefore investigated expertise-related differences when transforming multiple symbolic representations by looking at how well they are able to translate one representation into the other, and how successfully they can assess the mathematical content of a given statement, depending on the required direction of representational change. Using an expert-novice-paradigm, both experimental groups worked on problem solving material from the mathematical field of propositional logic. All participants were asked to first translate logical statements either from textual into formal or from formal into textual writing and afterwards rate the logical statement as true or false. The materials proved to be appropriate for this research. Results show significant differences in performance between the textual and the formula representation condition for both the advanced students and the beginners and a marginal interaction effect indicating that the beginners are more dependent on the given representation than the advanced students are. The beginners performed by tendency better when asked to create the textual version and seemed to benefit from the textual representations as initial representation concerning their rating performance.

We conclude that symbolic representations differ concerning their influence on information processing and the choice of given representation may significantly influence the learner's task performance especially for beginners.

Chapter 3: In the second study, the multimedia effect is intended to be replicated for multiple symbolic representations. The primary aim hereby is to find out whether or not this new multimedia effect is comparable to the multimedia effect based on text and pictures. Again, we focus on multimedia learning in elementary propositional logic and investigate the effect of different combinations of representations (text, formula, graphic) on problem solving with N=146 university students. Six experimental groups were compared: two single-representation groups (text or formula), three dual-representation groups (all possible pairs), and one triple-representation group. Two hypotheses were tested: The quantity hypothesis is that the more representations are available, the better is the problem solving performance. The diversity hypothesis implies that the positive effect of multiple representations only manifests if the used representations differ in their coding (symbolic/analog). Results rather support the quantity hypothesis: compared to the single representation conditions, the participants benefited to the same extent from being provided with two symbolic representations (text and formula) as with two different-code representations (text and graphic), whereas text is the decisive representation. These results show that the found multimedia effect based on text and formula is comparable to the one based on text and graphic and therefore support a multiple rather than a dual coding perspective. These findings indicate the importance and benefit of multiple symbolic representations for learning.

The contents of this chapter are submitted to the international peer-reviewed journal "*Learning and Instruction*" and might include changes after acceptance.

Chapter 4: For the third and last study, we extend the theoretical foundation of this thesis to advanced principles of multimedia learning such as generative learning activities. We did this in order to find out, whether other principles of multimedia learning can also be applied to multiple symbolic representations. Learning and problem solving can be fostered in general by providing multiple representations (*multimedia effect*, Mayer, 2009). In addition, learners may benefit even more from text and picture if they have created the pictures themselves by drawing while reading (*generative drawing effect*, Schmeck et al., 2014). This study investigated whether these effects can be replicated for multiple symbolic representations (text and formula). A 2x2x2 mixed design study (partially crossed) was conducted with the between subjects-factor representation generation (demanded vs not demanded), the first within subjects-factor type of given representation (text vs formula) and the second within subjects-factor number of representations (one vs 2). N=120 students, randomly assigned to one of the two groups, had to solve 29 problems from the field of propositional logic, either after having translated them into the missing representation (generation of text resp. formula demanded) or directly (generation of text resp. formula not demanded). One third of the problems was represented as a text and another third as a formula. The remaining served as control items, and therefore, included both representations. Results show, that the participants performed by tendency better in those items that provided the problems in both representations, than if only one representation was given. Generating the missing representation did not have a fostering effect on problem solving. Contrarily to generative drawing, representation generation does not seem to be beneficial if a second symbolic representation has to be created. The multimedia effect for multiple symbolic representations could be confirmed, however, it was restricted to ready-made representations.

2 Study 1: The role of expertise when dealing with representational changes in mathematics

2.1 Introduction

Mathematical representations and the transformation between them play a major role in research on mathematics didactics (e.g., Goldin, 1998; Swan, 1985; Ainsworth et al., 2002). According to Kaput (1987), mathematics learning and application is about representation and symbolization. These two aspects form the foundations of mathematics and are at the same time crucial for any cognitive mathematical activity. Teachers in STEM education (science, technology, engineering and mathematics) generally use multiple forms of representation not only to support learning and problem solving, but also to represent the various aspects of abstract mathematical content (Ainsworth, 1999; Duval, 2006). Representations therefore reflect the "core of understanding in mathematics" (Duval, 1999, p. 3) and are used in multiple ways. Following Seufert (2003a), a rather broad definition describes multiple representations as combinations of two or more representations containing the same or differing content and containing the same or differing modality and codality. For constructing a coherent mental representation of the mathematical domain, learners have to understand each of the single representations as well as their integration (Seufert, Vogel, & Brünken, 2008). Furthermore, several distinct representations have to be combined adequately to develop an appropriate concept image (e.g., Janvier 1987; Ainsworth, Bibby, & Wood, 1998). The active process of mapping corresponding elements between the different representations can be seen as one important aspect of the integration processes (*coherence formation*, Seufert 2003b).

2.1.1 Learning with multiple external representations

Multiple representations play an important role not only in mathematics but also for learning in general. In this context, empirical research shows that learning with multiple representations can be very beneficial for learning (e.g., Ainsworth, 2006; Mayer, 2001). However, research also shows that this setting sometimes even leads to lower learning outcomes than learning with single representations (e.g., Ainsworth, 1999, 2006). Not only the characteristics and the nature of the given representation seem to influence problem solving and learning performance, but also the characteristics of the learner himself, which is empirically shown in research within the setting of *aptitude-treatment interaction* (ATI): due to different (cognitive) abilities, varying knowledge or personality individuals learn differently with the same learning materials, which is why the material needs to be adjusted to the individual aptitudes of the learners (Cronbach & Snow, 1977). In this regard, cognitive factors like visuospatial abilities (Vogel & Seufert, 2012) and also the domain specific expertise play a major role when dealing with multiple representations (Seufert et al. 2007; Sweller et al. 2003). For example, Yerushalmy (1991) showed that especially students with low prior knowledge in the specific content domain often have problems to integrate different representations. Typically, errors occur when learning to switch between different mathematical representations (Bodemer, Ploetzner, Feuerlein, & Spada, 2004), which is, as mentioned above, a crucial skill within representational competence in mathematics. Kozma and Russell (1997) compared undergraduate chemistry students with professional chemists transforming representations like graphs and equations into specific alternative representations. They found that professionals exceeded the undergraduates in creating equivalent representations, especially regarding verbal descriptions for any presented representation. In the same study, Kozma and Russell (1997) confirmed an earlier result of Spilich, Vesonder, Chiesi, and Voss (1979) showing how novice learners relate multiple representations by only paying attention to their surface characteristics while experts combine the underlying concepts. In line with Duval (1988; 2006), these patterns of results indicate significant influences on task difficulty and learning performance concerning the direction of representational change. However, experts seem to be less dependent on inherent representational difficulty and the specific challenges concerning representational change. To gain further insights into the processing of multiple representations and to include expertise as an influencing factor in our research, we looked at how beginners and advanced students differ.

2.1.2 Multiple external representations in mathematics

From the perspective of the mathematical education, which emphasizes the transformation of mathematical representations as being the foundation of mathematical activity (Duval, 2006), we know that mathematical expertise implies being able to recall diverse representations of a single mathematical object. Therefore, and in addition to processing multiple external representations, we also focus on the active part of transforming one representation into another representation (e.g, formula into graph or text into formula), which is considered as one of various significant skills when dealing with multiple representations and is commonly referred to as *representational competence* (Kozma & Russell, 1997; Kozma, Chin, Russell, & Marx, 2000; Nathan, Stephens, Masarik, Alibali, & Koedinger, 2002). In his theoretical framework, Duval (2006) considers transformations of (mathematical) representations as lying at the core of mathematical activities: The fundamental idea is not to focus on single representations but on systems of representations, which open up different perspectives on the underlying mathematical object being not directly perceivable. Hence, in mathematics information is conveyed by using different representational forms like graphs, tables, text or formulas parallel to each other, namely multiple representations. In STEM education, all kinds of combinations of multiple representation are used. This also includes representations of the same codality and modality, e.g. textual instructions and formulas. Research shows that not all combinations of representations have an advantageous effect on learning and problem solving (e.g., Ainsworth et al., 2002). Research on multiple representations in mathematics in particular reveals a wide variety of results about beneficial and inhibiting effects. However, these studies show overall that multiple representations can help students to develop a deeper understanding of scientific and mathematical concepts (Cheng, 1999; Carpenter & Shah, 1998; Harrison & Treagust, 2000; Kozma & Russel, 1997; Schank & Kozma, 2002; Yerushalmy, 1991; Debellis & Goldin, 2006; Hitt, 2002).

In his framework for defining components and properties of mathematical problems, Lithner (2003) provides a clarifying perspective in the sense that he delineates mathematical objects on one side and the interaction with (one) mathematical object(s) on the other side. Mathematical objects can be “numbers, variables, functions, graphs, diagrams, matrices, etc.” (p. 33), whereas interactions are actions that can be applied to one or several objects and may in consequence produce different objects. The author therefore describes *transformations* between mathematical representations as interactions with one object producing other objects (see also Chang, Cromley, & Tran, 2016). Duval (2006) differentiates between two forms of transformation: treatment and conversion, whereas treatment is the transformation of representations within one representational system (e.g. carrying out a calculation) and conversion is described as the transformation from one representational system to another (e.g. transforming equations into graphs, or natural language into notation using letters). The author stresses conversion between a starting representation system and its target as a “gap that many students cannot succeed getting over” (Duval, 2006, p. 121). Focusing on the two representations text and formula, which belong to the commonly used representations in mathematics, both representations have in common that they are symbolic representations (*descriptions*; Schnotz, 2014), being able to transport the same mathematical contents, in contrast to pictorial representations (*depictions*; Schnotz, 2014). Duval (2006), however, emphasizes the differences between the semiotic representation systems used in mathematics such as natural language on one side, and formal notations on the other (just to mention two out of several semiotic representation systems the author designates). This includes visually perceptible differences due to the two different symbol systems such as “for all” and its formal pendant “∀” as well as inherent differences, e.g. higher information density or unambiguity of mathematical expressions (Maier & Schweiger, 1999).

In order to separate knowledge about effects of these multiple symbolic representations themselves and the transformation between them, we differentiate between research on multiple representations as fix materials and research on actively transforming given external representations into another format. Concerning text and formula as given materials reveals rather mixed pattern of results. Müller and Heise (2006) for instance compared the performance of two groups of middle school physics students when calculating content equivalent physics problems on blood pressure measurement. One group worked with a textual representation of the problem and the other group with a combination of text and formulas. They found significant differences between the textually presented physics problems and the same problems presented using formula in favor of the formula version. They conclude that formulas are easier to process due to their clarity compared to the textual version. In contrast, Koedinger and Nathan (2004; see also Nathan & Koedinger, 2000) showed that textually presented math story problems were easier to solve for high school students than problems with the same content presented through equations. They conclude that the nature of the external representation could influence problem solving since understanding equations might be more difficult than interpreting text - or if one representation offers less solution strategies than the other does. In a classroom study, Nathan et al. (2002) examined seventh- and eighth-grade students' abilities on problem solving using graphical, tabular, textual, and formal representations and found that students performed better when using any of the given single representation for problem solving than when translating from a given representation into another. They claim that success is significantly influenced by the specific representation used, whereas students performed better on linear math problems when given a textual representation than provided with a formal representation. However, formal representations led to better performance than verbal representations when dealing with nonlinear math problems. The authors relate this result to the *complexity-representation interaction* (Koedinger, Alibali, & Nathan, 2008) stating that verbal representations serve best for lower complexity problems, while formal representations serve best for higher complexity problems. This is theoretically based on their Early Algebra Problem Solving (EAPS) theory (Koedinger & McLaren, 2002), a cognitive model within the ACT—R cognitive architecture ("adaptive control of thought", Anderson, 1976, and due to the incorporation of rational analysis the R for "rational", Anderson, 1990) and the "pedagogical domain theory" (Koedinger & McLaren, 2002, p. 1), explicitly providing an explanation why students' performance is better when working on certain word problems than on equivalent equations (Koedinger & Nathan, 2004; Nathan & Koedinger, 2000). They explain the verbal advantage by differences in problem comprehension and differences in the students' strategy selection. Problem comprehension means the translation of any external problem representations (story problem, verbal or symbolic) into an internal quantitative network representations of the quantities and relations involved in the given problem. Differences in the students' strategy selection refer to either formal or informal strategies when solving a problem. The authors claim that students tend to use formal strategies when given equations even though they feel unsure about them, whereas they tend to use the more successful informal strategies when given verbal statements. They state that algebra problem solving challenges students not because of "doing of algebra" but rather because the challenge lies in "reading of algebra" (p. 24) (see also Baranes, Perry, & Stigler, 1989; Carraher, Carraher, & Schliemann, 1987; Payne & Squibb, 1990).

Studies on transformation of given external representations reveal a different picture. Geiger, Stradtmann, Vogel, and Seufert (2012), for instance, found that creating textual representations either from pictorial or from formal representations is the most difficult task (i.e., harder than creating formulas) and suggest that students' mathematical verbalizations need to be fostered. However, when using plain text like describing syntactical features of the representation or describing a function in a purely mathematical sense, students were more successful (Geiger, Stradtmann, Vogel, & Seufert, 2011). Similarly, Kilpatrick, Swafford, and Findell (2001) found that students perform more accurately when translating from formal notation into text. However, Andrà et al. (2015) conducted an eye-tracking study with Swedish university students in order to find out how multiple representations of the same mathematical object are observed. A given stimulus (text, graph, or formal notation) had to be matched with the only one correct out of four corresponding representations of a different format (e.g. a given formal notation with one out of four corresponding textual representations). Results reveal that the students worked the least accurately when completing transformation from formal notation to text. These differences in pattern of results may be due to the fact that the presented research uses all sorts of different materials: direct vs far transformation (e.g., verbal into formal notation vs formal into graphical notation), abstract vs familiar mathematical representations, comparably easy vs difficult problems, and so forth. In sum, however, research shows that textually presented mathematical contents may help to improve problem solving performance.

Looking at research on this topic in general, there seems to be a clear focus on transformations form a starting representation to its target representation that differ in more aspects than solely in their representation system (e.g., transforming equations into graphs, which differ not only in system but also in codality). However, “simple” transformations such as transforming a verbal statement into its equivalent formal notation are rarely under consideration even though Duval (2006) describes how even these direct translations are of specific difficulty for learners. Direct transformations seem to differ from the other transformations usually investigated to such an extent that they are commonly left aside and maybe labeled as too easy. They could, however, be of particular interest for fostering representational competence in the sense that they function as some sort of step in-between.

Overall, there are rather mixed results concerning the usefulness of various types of representations and combinations thereof with regard to learning and problem solving in STEM-education. For this reason, the common theoretical foundations need to be considered.

2.1.3 Blind spot in theories of multimedia learning

One of the major theories dealing with multiple representations and explaining multimedia learning is the *Integrated Model of Text and Picture Comprehension* (Schnotz & Bannert, 1999, 2003). Within this theoretical setting, Schnotz and Bannert (2003) provide a theoretical framework for text and picture comprehension, which emphasizes a clear distinction between the cognitive processing of symbolic representations on one hand and the cognitive processing of analog structures on the other hand (see figure 2, chapter 1). Schnotz (2014) describes these two different forms of representations as “basic forms of representations” (p. 76) and defines them as descriptions (symbolic representations like texts and formulas) and depictions (analog representations like pictures, photographs, paintings, or maps). This model is theoretically based on the dual-coding assumption (Paivio, 1986), stating that text and pictures are processed via two different cognitive branches and are therefore engaged in deeper processing than either one alone, which results in better understanding. Referring to this dual-coding approach, the framework explains the relevant positive effects of the combination of different representations such as text and pictures by analyzing the mental integration of text and pictures and the process of mental model construction. Focusing on symbolic and analog representations, this framework, however, neglects representations which differ in other ways than by the nature of their representation systems, for instance in terms of codality. Codality refers to the use of different code systems such as text and mathematical notation. The model of Schnotz and Bannert (1999, 2003) as well as the other major theories on multimedia learning (e.g., *Cognitive Theory of Multimedia Learning*, Mayer, 2007) have in common that they deal with multiple representations which refer to these two different types: text and picture. However, up to this point there is no clear theoretical distinction on how multiple symbolic representations like text and formulas are processed, which are of the same symbolic codality and therefore located on the *same* branch of cognitive processing. That way, the major models and the theoretical framework of Schnotz and Bannert (2003) in particular do not make a statement on how multiple symbolic representations interact when learning only with multiple symbolic representations instead of learning with multiple representations like text and pictures.

2.1.4 Research aims and design

As described above, mathematical experts have the flexibility to deal with multiple symbolic representations, which can be seen in the ability to switch from one representation to another. In order to learn more about multiple symbolic representations, their successful or unsuccessful use, and in order to derive insights for the design of learning arrangements for novices, this study examines dealing with multiple symbolic representations by choosing material on representational change within an expert-novice design. We therefore look at advanced students compared to beginners in order to derive from both of them insights for the design of learning arrangements for novice learners and therefore follow in parts the *expert performance approach* of Ericsson and Smith (1991). Expertise research shows that experts outperform novices in their particular domain due to their better established knowledge and skills concerning their domain. Findings of expertise research are generally considered generalizable across different domains (Chi, Glaser, & Farr. 1988). According to the expert performance approach, Ericsson and Smith (1991) present three stages of research. During the first stage, the focus lies on the generation of representative task formats by comparing experts and novices solving these tasks. In the second stage, they concentrate on the identification of mechanisms of expert performance and measurements at the process level, again using expert-novice comparisons. The third and final stage is about covering expertise development by using valid tasks for training studies. The here presented research may serve as the basis for a subsequent training study, which is why in this study we focus on the first two stages.

2.1.5 Questions and hypotheses

As multiple representations like text and formula are often used in STEM education, the present study was conducted to investigate how beginners and advanced students work with multiple symbolic representations in order to reveal the differences in dealing with verbal-symbolic representations like text on one side and formal-symbolic representations like equations on the other side. This was intended to be achieved by implementing the above described skill of representational change in the research materials, since research shows that the more mathematical expertise an individual has the better he or she is in changing from one representation into the other.

The mathematical field of elementary propositional logic was chosen as subject area, in which logical mathematical expressions such as text and formulas can be represented in two different but content equivalent symbolic representations (see table 1).

Table 1
Sample of the used materials from the mathematical field of propositional logic both as textual and formula version (translated from the original German)

For all natural numbers a and b, the following holds: If the least common multiple of a and b is given by the product of the two numbers, then their greatest common divisor equals 1.	$\underset{a,b\in IN}{\forall} lcm\,(a,b) = a \cdot b \Rightarrow \text{gcd}\,(a,b) = 1$

The focus of both item development and main study were the generation of appropriate testing material, which consists of tasks on representational change from one symbolic representation into the other, and, moreover, the investigation of expertise related differences in the use of symbolic representations of the same mathematical contents. Based on the theoretical frameworks of the common information processing theories and the procedure of the *expert performance approach* the following three hypotheses were tested.

Hypothesis 1 – Following the first stage of the expert-performance-approach, which is supposed to reveal significant differences between the beginners and advanced students, the first hypothesis states that advanced students perform better than beginners (main effect expertise).

Hypothesis 2 – Based on previous research presented above, we expect differences in dealing with the two symbolic representations text and formula and therefore state as our second hypothesis that the direction of representational change influences the difficulty of a given problem (main effect direction of representational change).

Hypothesis 3 – Combining the first two hypotheses and in line with research on expertise presented above, our third hypothesis states that advanced students are less dependent on the direction of representational change (verbal to formal vs formal to verbal) concerning their performance than beginners are (interaction effect expertise*direction of representational change).

2.2 Method

2.2.1 Item development and pretest

We developed a set of ten math problems from the mathematical field of propositional logic. Each math problem contained up to six subtasks, adding up to a total of 47 items. Every item consisted of a logic expression presented either textually, formally, or both. If only one representation was given (text *or* formula) the participants were instructed to translate the given expression into the missing representation (translation task). If the task provided both representations, i.e. both the initial representation and the translated representation, the participants were asked to judge the correctness of the translated representation (true/false) and of the mathematical content of the given expression (true/false) (rating task) (see appendix D, part 1 for the complete set of math problems used in this study (in German)).

The material was pretested with a sample of German university students in an expert-novice-design. The total sample contained N=203 participants separated into beginners (N=93; mean age=21.34 years, *SD*=3.58; 63.4 % female; mean number of semesters enrolled in college: 1.53 semester, *SD*=1.4) and advanced students (N=110; mean age=22.76 years, *SD*=2.44; 68.2 % female, 9.9 % missing; mean number of semesters enrolled in college: 4.34, *SD*=1.73). Regarding the used items, the internal consistency is satisfactory (α=.832). Item difficulties and discrimination indices for each item are provided in appendix A, table 13. To assess an aspect of criterion-based validity, we analyzed for each item whether there is an association between expertise (beginner vs advanced students) and item resolution including all items (no vs yes). Resulting phi-coefficients are also provided in appendix A, table 13. Positive values indicate that advanced students were more likely to solve the item than beginners were.

Based on the described item analysis, most items (41 out of 47) show positive phi-coefficients indicating expertise related measurements. However, item difficulties show that the items were rather too easy. We conclude that the structure of the materials itself is satisfactory but changed the items according to the requirements of the main study (see 2.2.2.2).

2.2.2 Main Study

2.2.2.1 Experimental Design and Participants

A 2x2 design was conducted with the between factor expertise (advanced students vs beginners) and the within factor direction of representational change (from formal to textual vs from textual to formal). The total sample contained N=236 participants separated into beginners (N=157; mean age=20.93 years, *SD*=2.99; 68.8 % female, .6% missing; mean number of semesters enrolled in college: 1.51 semester, *SD*=1.15) and advanced students (N=79; mean age=24.05 years, *SD*=4.54; 58.2 % female, 8.9 % missing; mean number of semesters enrolled in college: 6.06, *SD*=2.22).

2.2.2.2 Materials and procedure

Both groups worked with a paper-pencil test containing math problems from the field of propositional logic. Each test sheet consisted of seven math problems, each problem containing up to eight subtasks adding up to a total of 32 items. They were developed based on the pretested materials and can be distinguished in terms of subject matter being either mathematical (26 items, i.e. formulas) or non-mathematical (six items, i.e. logical expressions taken from daily life, for instance “If the class is silent, then the teacher is in a good mood”). These non-mathematical items solely had to be transferred into the missing representation. Since there was no mathematical content, no rating task was required for these items (see table 2 for a sample).

Table 2
Sample for a non-mathematical problem without rating task

Given are the following statements:

A: The class is silent. *B:* The teacher is in a good mood.

3.1 Please verbalize the formal statements.

Formal	Verbal
$B \Leftrightarrow A$	

3.2 Please translate into formal notation.

Verbal	Formal
The class is not silent and the teacher is not in a good mood.	

All other purely mathematical items included both translation and rating tasks. Structurally, each item consisted of a textual problem introduction, the math problem itself, and either one or two blank boxes as respond parts used for the translation of the given expression and/or the rating of the mathematical content of the given expression (true or false). By presenting these two different subtasks of translating and rating, we are able to differentiate between two levels of analysis: the translation performance on the first level of analysis and the rating performance on the second level of analysis (see appendix D, part 2 for the complete set of math problems used in the main study).

All of the pretested math problems described above had to be adapted to the requirements of the main study. This was accomplished by adapting the pretested problems in the sense that we increased difficulty and ensured a clear distinction between each direction of representational change. One major weakness of the preliminary study was that the tasks used were not tested for both directions of representational change – this was taken care of, which is why several of the pretested items were combined and all pretested items were modified for the main study. In order to test each item in both possible ways of direction of representational change, we developed a translated version of each item (text version and formula version of each item). That way, we had item pairs consisting of a text and its corresponding formula, which were randomly distributed on two different test sheets so that there was a parallel A and B version of each test sheet. Both test versions were approximately equally and randomly distributed among each group of participants with χ^2 (1, N=236) = .256, *n.s.* (see table 3 for distribution overview).

Table 3
Distribution of test version A and B

	Version A	Version B
Beginners	N=81	N=76
Advanced students	N=38	N=41

All test sheets were divided into two parts. The first short part consisted of information about the study and questions on personal data, the second major part consisted of the math problems.

For the first dependent variable, participants' test performance was assessed by their sum score over all test items divided by the number of items that deal with the translation of the given symbolic representation (dependent variable translation). The second dependent variable includes the participants' test performance by their sum score divided by the number of items conducted over all test items that deal with the rating of the mathematical content of the given logical expression. Performance per item was either scored by 1 (correctly solved item) or 0 (missing or incorrect answer).

All participants were tested in a field setting during their normal lecture time. First, they were given an overall instruction concerning the procedure of the test and an additional explanation about all mathematical symbols used in the test. Then, participants took the test and had to hand in their test sheets after a maximum of 45 minutes.

2.3 Results

Both groups did not differ significantly concerning their overall high school math grade ($F(1,182)=.29$, *n.s.*) and educational level ($F(1,200)=.62$, *n.s.*). Since two of the 32 items had to be excluded due to an error in one of the test sheets, conductions are based on the remaining 30 items.

The data analysis was carried out by a multivariate 2-factorial RM-ANOVA with repeated measures on the factor direction of representational change and the between-subjects factor expertise. The parallel test version (A or B) was included in the analysis as an independent variable (see appendix A, table 15 for descriptive details and significances). For the dependent variables, individual test scores for translation and rating were computed (sum of correctly solved items divided by number of items; see table 4 for means and standard deviations for each condition test score).

Table 4
Means and standard deviations of the test scores (maximum 1, minimum 0) for all four conditions

	Expertise	***M***	***SD***	***N***
Translation from textual to formal	Beginners	.55	.21	156
	Advanced students	.72	.14	79
	Overall	.61	.21	235
Translation from formal to textual	Beginners	.59	.22	156
	Advanced students	.68	.20	79
	Overall	.62	.22	235
Rating from textual to formal	Beginners	.54	.21	156
	Advanced students	.67	.18	79
	Overall	.58	.21	235
Rating from formal to textual	Beginners	.50	.21	156
	Advanced students	.68	.20	79
	Overall	.56	.22	235

Note. *M* = Mean, *SD* = Standard Deviation.

Multivariate analysis indicates that advanced students outperformed the beginners in all conditions, as can be seen in the RM-ANOVA showing a significant main effect of the factor expertise ($F(2,231)=34.785$, $p<.001$; $\eta_p^2=.231$). Moreover, concerning the direction of representational change, results revealed a significant main effect for the factor direction of representational change ($F(2,231)=18.309$, $p<.001$; $\eta_p^2=.137$). Additionally, on the multivariate level two interaction effects were found. Computing both the translation and the rating subtask of each problem, the first significant interaction effect was found between expertise and direction of representational change ($F(2,231)=4.206$, $p=.016$; $\eta p^2=.035$). The second significant interaction effect could be found between the direction of representational change and the type of test version (A or B) ($F(2,231)=44.011$, $p<.001$; $\eta p^2=.276$).

In order to show the impact of single variables, further results were calculated on univariate level. These analyses reveal consistent results for the main effect of representational change both for translation tasks ($F(1,232)=21.005$, $p<.001$; $\eta p^2=.083$) and rating tasks ($F(1,232)=16.027$, $p<.001$; $\eta p^2=.065$), as well as for the second interaction effect between the direction of representational change and the type of test version (A or B) again both for translation tasks ($F(1,232)=43.355$, $p<.001$; $\eta p^2=.157$) and rating tasks ($F(1,232)=45.665$, $p<.001$; $\eta p^2=.164$). Concerning the first interaction effect between expertise and direction of representational change, we find a significant interaction effect between expertise and the direction of representational change for the translation subtasks ($F(1,232) = 5.398$; $p= .021$; $\eta_p^2= .023$), indicating that during translation the advanced students are less dependent on the direction of representational change than the beginners. In the case of rating subtasks, results show a marginal significant interaction effect between expertise and direction of representational change ($F(1,232)=2.994$; $p=.085$; $\eta p^2= .013$). In the following diagrams, the results for each dependent variable (transformation and rating) are visualized (see figures 4a and 4b).

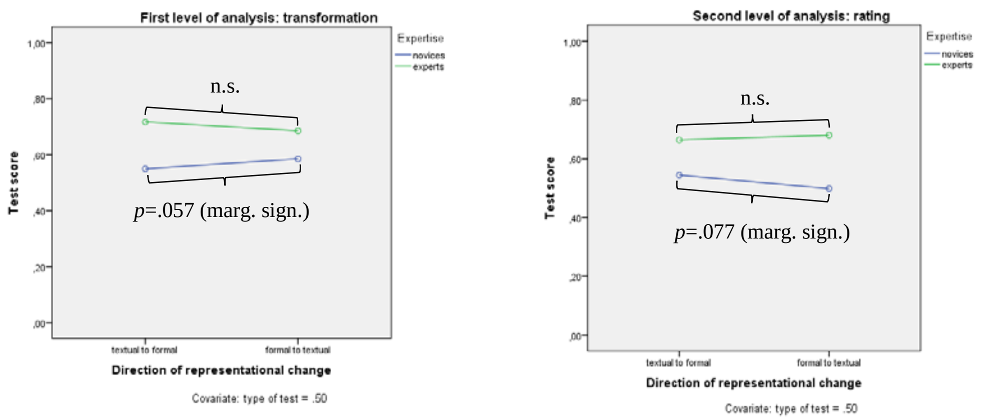


Figure 4 A/Left. Profile diagram of the interaction effect for the first level of analysis (transformation) separated into the two directions of representational change (textual into formal vs formal into textual). *B/Right.* Profile diagram of (marginal significant) interaction effect for the second level of analysis (rating) separated into the two directions of representational change (textual into formal vs formal into textual).

The results show that both the direction of representational change and the expertise have a significant influence on the participant's performance and that beginners are more dependent on the version of representational format than the advanced students are. For beginners, text not only seems to be easier to create but also by tendency fosters rating performance when given as initial representation.

2.4 Discussion

The purpose of the presented research was to investigate how beginners and advanced university students deal with different multiple representations, that is, to what extent they can transfer one representation into the other and to what extent they are able to assess the mathematical content of a logical statement, and additionally, which type of representation (textual or formal representation) facilitates problem solving. As an empirical setting, we used material from the mathematical field of propositional logic, which proved to be suitable for research on this subject.

The results of the presented study reveal a significant influence of expertise and direction of representational change when working with symbolic representations and provide evidence for disadvantages for beginners if problems are presented in an unfavorable way. This can be seen as an indication that, with increasing expertise, it becomes less relevant in which of the symbolic forms the problems are represented. As presented in the main study, beginners perform significantly worse than advanced students when working with the given problems. Fundamental for expert-novice comparisons, this result confirms the first hypothesis, which is predicting a main effect of expertise. Referring to the first stage of the *expert-performance approach* (Ericsson & Smith, 1991), representative tasks were identified and may be used for further studies. Moreover, the main study reveals a significant influence of the demanded direction of representational change on both the advanced students and beginners' performance, confirming the second hypothesis of a main effect of direction of representational change. Results show that for the translation tasks the advanced students outperformed the beginners significantly if a formula had to be created based on the given text. In the case of a reversed direction of representational change, the difference between the beginners and the advanced students was smaller. The advanced students may therefore be better in creating formulas, because they are more familiar with it. For the beginners, however, text tends to be more supportive for both translation tasks and rating performance when given as the initial representation. These results are in line with the above presented previous research on verbal and formal mathematical representations, showing how verbal representations possibly enhance problem solving performance (e.g. Koedinger & Nathan, 2004; Nathan & Koedinger, 2000).

Concerning the marginal interaction between expertise and direction of representational change, the results show that in the case of the translation subtasks beginners are more dependent on the direction of representational change than advanced students are. The marginal interaction for the dependent variable rating provides a (small) indication that the advanced students exceed the beginners more clearly if the given output representations was a formula instead of if it was a text. This is not surprising, as the formula is the familiar way of visually representing mathematical contents for the advanced students regarding such problems.

2.4.1 Implications

With regard to the practice of learning, these results emphasize the importance of transformation on the way to representational competence. However, they simultaneously reveal how students fail to delve into greater mathematical understanding. Following Bodner (1996), dealing with representations should not be seen as unproblematic aids for improved scientific learning. Instead, instructors should be aware of the specific problems beginners face, i.e. only paying attention to surface features such as letters or numbers, and explicitly reveal their reasoning when using multiple representations, so that students can understand the concepts associated with the features of used representations (Kozma & Russell, 1997). In order to foster representational competence, learners could, for instance, be encouraged to translate given mathematical expressions into their own words.

From a theoretical perspective, the results of the present studies on multiple symbolic representations suggest that the verbal and the formal representation, even if they express the same content, do not seem to be completely redundant. Otherwise it should not be decisive for the performance, which of the representations is presented and which one is supposed to be created. Especially for the beginners the differences seem to be significant.

2.4.2 Limitations and future research

The presented research implies a methodological limitation in the sense that the presented problems consist of different types which might not correctly picture the existing skills of the participants. After this study, it remains open whether or not the translation process may lead to better performance, or whether it solely depends on the fact which representation is given. It would therefore be important to revise the existing material so that we can precisely separate the impact of each type of representation (text vs formula) and its associated rating task as well as the impact of generating either type of representation starting from each type of representation separately. In that sense, future research should focus on investigating the dual codality more thoroughly and examine learner generated representations based on differing given types of representations. Due to the results presented above and in line with suggestions of Chang et al. (2016) and Acevedo Nistal, Van Dooren, and Verschaffel (2012), future research should include text as one representation in order to facilitate mathematical problem solving and even allow students to use text as a “flexible representation choice”.

Based on the *expert-performance approach* (Ericsson & Smith, 1991), a next step can be to identify mechanisms of expert performance to answer the question how exactly advanced students differ from beginners in dealing with multiple symbolic representations. Running an analytic study, one could investigate the sub-processes that are influenced by expertise. One possible approach could be to eye-track learners’ problem solving performance in order to investigate qualitatively different inspection patterns between experts and novices. Referring to the third and last stage of the expert-performance approach, a training study might reveal how novices benefit from the experts way of handling multiple symbolic representations. Due to the results of this study requiring additional analytical studies, however, the initially planned training study as well as the further procedure according to the expert-performance-approach (Ericsson & Smith, 1999) were temporarily postponed. Instead, and based on the result that especially for beginners, symbolic representations containing equivalent content are not redundant, follow-up studies should consider this particular learning group. If these representations are not redundant for them, it would be possible that they complement each other when presented simultaneously, and thus lead to better performance compared to being presented individually. This can be theoretically based on the framework of Ainsworth (2006, 2014), in which multiple representations can take different roles, like constructing, constraining or complementing each other.

2.5 Conclusions

In sum, we conclude that the paradigm presented in this study has proved to be beneficial for expertise related research on multiple symbolic representations and representational change. We are able to deliver empirical evidence for the finding that the type of representation (textual or formal) influences students' performance on tests and can therefore be considered as significant. The interaction with different representations is of particular importance for learning, which is why these results contribute to our understanding on dealing with multiple symbolic representations.

3 Study 2: Multiple symbolic representations: The combination of formula and text supports problem solving in the mathematical field of propositional logic

3.1 Introduction

Specific learning contents can be provided to the learner in different forms, for example as a text, pictures or animations. Frequently, more than one representation of a concept is used to foster learning and problem solving. According to Seufert (2003a), multiple representations are combinations of two or more representations of the same or differing content, which may be also be of the same or differing modality and codality. This broad definition includes all possible combinations of external representations. Within the field of STEM education (science, technology, engineering and mathematics), multiple representations are widely used not only to foster learning and problem solving, but also to represent the various aspects of abstract mathematical contents (Ainsworth, 1999; Duval, 2006). Representations are "at the core of understanding in mathematics" (Duval, 1999, p. 3). Still, because of their abstractness mathematical objects have no perceptual correspondence with real world representations (Rehm & Vogel, 2013). Typically in this domain, all kinds of combinations of representations are used, particularly ones with the same codality and/or modality, as for example formulas and textual instructions. However, research has shown that not all combinations of representations are beneficial for learning and problem solving (e.g. Ainsworth et al., 2002). Research on multiple representations in mathematical domains lead to a wide variety of results concerning their fostering or inhibiting effects. Overall, many studies show how multiple representations help students to develop a deeper understanding of scientific and mathematical concepts (Debellis & Goldin, 2006; Hitt, 2002;

Yerushalmy, 1991). Looking at two types of representations in math often being used, namely text and formula, there are mixed findings. Koedinger and Nathan (2004) were able to show that textually presented math problems were easier to solve for high school students than same content problems presented trough equations. The authors conclude that the type of external representation could influence problem solving if one representation is harder to understand than the other – as decoding equations might be more difficult than interpreting text -– or if one representation permits fewer solution strategies than the other does. In contrast, Müller and Heise (2006) compared two groups of middle school physics students and found how textually presented physics problems lead to worse results, while the same physics problems presented using formulas lead to better performance. They explain their result with better clarity of formulas in comparison to text.

In a learning study, Ainsworth et al. (2002) compared pictorial (splatwall and archery target) and mathematical (numerals and histogram) representations and a mixed system of both. The children learned estimation better with either pictorial or mathematical representations while the combination of both hindered learning. The children had problems in relating both representations.

Concerning studies on multiple representations that belong to the same type of representation, there is much research on multiple graphical representations (e.g., Bennett, 2004; Hake, 2004). For example, Rau, Aleven, & Rummel, (2009, 2015) found in one of their learning studies how multiple graphical representations of fractions in addition to conventional symbolic notation were more conductive to learning than a single graphical representation as long as students were supported in relating the graphical representations with mathematical concepts.

Taken together, research shows mixed findings concerning the usefulness of different kinds of representations and their combinations for learning and problem solving in math and sciences. This implies to delve into the respective theoretical approaches.

3.1.1 Cognitive models of learning with multiple representations

One of the most important impacts of cognitive theories of learning with media (Mayer, 2001; Schnotz & Bannert, 1999) is that learning can be improved by several aspects of information presentation, formulated in evidence-based principles of multimedia learning such as the multimedia principle (Mayer, 2001). The multimedia effect (Mayer, 2009) is one of the most well-known findings in learning with text and pictures (cf. Butcher, 2014; Levie & Lentz, 1982; Vekiri, 2002 for reviews) and can be seen as a “benchmark finding” (Schweppe, Eitel, & Rummer, 2015, p. 24) for every theory of multimedia learning. It shows that learning with a combination of text and pictures is more effective than learning from words or pictures alone (Mayer, 2001) and result in better learning outcomes even when tested after a delay (Schweppe at al., 2015). The multimedia effect is usually explained with Paivio’s dual coding theory (1986). According to the author, verbal (symbolic code) and pictorial information (analog code) is processed in two different cognitive subsystems resulting in two different, but linked mental representations. Hence, illustrated text appeals to both ways of information processing, which is expected to result in more sophisticated mental models compared to text alone.

Other common theories on multimedia learning explain the benefit of combining representations of different codality (e.g. text and picture) or modality (e.g. visual and auditory representations, cf. Mayer, 2001; Paivio, 1986; Schnotz & Bannert, 1999). Referring to Paivio’s dual coding approach they assume different channels, at least for the initial stages of information processing (e.g. Mayer, 1997; Schnotz & Bannert, 1999, 2003; Schnotz, 2005). The integrated model of text and picture comprehension of Schnotz and Bannert (1999), for example, shows how symbolic and analog information are perceived through either the verbal or the pictorial channel, are processed separately and finally integrated in order to form a coherent mental model. According to Schnotz (2014) all variants of representations can be classified as descriptions or depictions. He characterizes descriptions as texts and all other kinds of symbolic representations such as mathematical expressions and formulas that consist of symbols. Text and formulas are therefore considered as the same type of representation, namely symbolic representations. Depictions, however, are pictures and all other kinds of representations that consist of icons, i.e. signs which have similarity with their referent. This includes pictures, photographs, and suchlike but also maps and graphs due to their abstract structural common features. As to the combination of multiple symbolic representations ore multiple analog representations, the above mentioned theoretical models give no indication to expect a particular benefit compared to single representations.

The Cognitive Load Theory (e.g. Paas & Sweller, 2014; Plass et al., 2010; Sweller et al., 2011) implies that learning is most effective when as little cognitive resources as possible are wasted on inappropriate designs (extraneous load) and as much cognitive resources as possible are used on processing the learning contents (germane and intrinsic load). The Cognitive Load Theory (Sweller, van Merriënboer & Paas, 1998) would even expect a hampering effect of multiple representations of the same kind. This effect is known as the redundancy effect (Chandler & Sweller, 1991), describing how redundant information in learning materials rather interferes with than fosters learning (Kalyuga & Sweller, 2014). Redundancy is given when the same information is presented simultaneously in several forms. Redundant learning material, like two symbolic information equivalent representations, may increase extraneous cognitive load because the learner has to coordinate the redundant information and, therefore, is distracted from activities related to the learning goals.

Recent research, though, reveals deficits of the Paivio based theories mentioned above, including the finding that their assumption of initially creating codality specific representations and integrating text and pictures afterwards could not be held (Scheiter, Eitel, & Schüler, 2016). Instead, these findings support the assumption of early reciprocal influence of text and image processing during learning with multimedia and the construction of an integrated mental model. Moreover, while learning with text and graphic, the learner seems to create one single integrated mental model instead of two linked mental models (Schüler, Arndt, & Scheiter, 2015).

3.1.2 Functions of representations

Apart from the type of representation (symbolic vs analog) or their way of mental processing, Ainsworth (2006) explains the benefit of multiple representations with their ability to provide specific functions during learning. In her conceptual framework for learning with multiple, external representations she differentiates between complementary functions, constraining functions and constructing functions of representations (DeFT –Design, Functions, Tasks; Ainsworth, 1999, 2006). However, there is no distinct differentiation between the three categories: multiple external representations may support more than one function simultaneously (Ainsworth, Wood, & O'Malley, 1998). In the present study, we used three representations – text, formula and graphic – and all possible combinations of the three representations in mathematical problem solving tasks. To make assumptions about the functions of the respective representation provided by each combination, it is important to specify how the different representations relate to each other. In this study, the two information equivalent symbolic representations text and formula were applied. The text representation is the spelled out version of the formula, e.g. as a teacher could verbalize it and contains the same information as the formula. The formula can be considered as providing the corresponding information of the text in a very condensed and redundancy avoiding form, which is also coded in a symbolic way, only using a different symbol system. The respective graphic is not information equivalent to the other representations but rather illustrates the given problem, probably providing mental offloading, as contextual information of the problem has not to be kept in mind during problem solving (table 5 provides samples of each representational format).

Table 5
Samples of each of the three representational formats formula, text and graphic (translated from the original German)

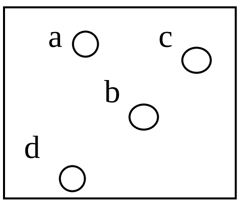
Representation	Samples
Formula	$(P(c)) \wedge (\neg \forall x \in M_1 : P(x)) \wedge (P(b) \Leftrightarrow P(a)) \wedge (P(c) \Rightarrow P(a))$
Text	c is filled. And: Not for all elements x in M_1 it holds that: x is filled. And: b is filled if and only if a is filled. And: If c is filled, then a is filled.
Graphic	M_1 

Table 6 shows the four possible combinations of the used representations text, formula and graphic and the specific functions they are assumed to meet.

Table 6
The functions of representations in the present study concerning their combinations

Combinations of Representations	Functions
Text and formula	complementary function in the sense of complementary process + constraining function, if one of the two representations is easier
Text and graphic	Constructing function
Formula and graphic	Constructing function
Text and formula and graphic	Constraining and constructing function + complementary process concerning text and formula alone

The combination of text and formula may count as complementary, since even though both representations theoretically contain the same information they still differ in their coding subsystems and complementary processes may be supported. This combination, however, may also contain a constraining function, if one of the two representations is more familiar for the individual (text for novice learners; formulas for advanced learners and mathematical experts). The combinations of text and graphic as well as formula and graphic are both considered to have constructing functions, because the information presented through both a symbolic and an analog representation supports the integration of information and enables the learner to deepen their understanding in a way that would be difficult to achieve with only one representation (multimedia principle). Concerning the combination of all three representations, each function is represented: the complementary process function when looking at text and formula, the constructing function due to the addition of the graphic and the constraining function through the combined presentation of text and formula.

3.1.3 Desideratum of research: quantity vs diversity?

Theories on multimedia learning can be adduced to generate hypotheses about promising ways to combine representations. The prominent theories explaining the effectiveness of multiple representations, namely the Cognitive Theory of Multimedia Learning (CTML, Mayer, 2009), Cognitive Load Theory (CLT, Sweller et al., 1998), and the Integrated Model of Text and Picture Comprehension (Schnotz & Bannert, 1999) are based on assumptions emphasizing dual channel processing. Therefore, these theoretical models are appropriate to explain positive effects of combining representations which differ in modality or codality, but neglect representations differing for other design factors than for the form of their representational systems. The multimedia principle, well studied for multiple representations that include both symbolic (descriptional) and analog (depictional) representations, is far less examined within the field of multiple symbolic representations as they frequently occur in math or the natural sciences. Studies addressing the multimedia effect usually use only text as the symbolic representation and graphics as analog representation of a certain learning content (e.g., Ainsworth et al., 2002; Bodemer et al., 2004; Seufert, 2003).

Ainsworth (2006) addresses this problem by postulating a framework of more dimensions of representations – design factors, functions, and cognitive tasks – used to classify representations and their combinations, which allow effective learning. According to the author, even representations of the same codality (e.g. both symbolic:

text and formula) have the potential to be advantageous for learning, compared to single representations if they provide functions that foster deep understanding. In contrast, dual channel approaches would predict no benefit when learning from multiple symbolic representations (e.g. Levie & Lentz, 1982). As such forms of multiple representations are often used in STEM education, the present study was conducted to investigate whether Ainsworth's framework can serve to generate effective combinations of multiple symbolic representations.

This leads to a confounding of the two possible explanations quantity vs diversity: Even though dual coding seems to be a good explanation for the multimedia effect, it is not finally proven whether the provision of information in two different codes accounts for the detected learning benefits. An alternative explanation could be that working with two representations, whether differing for codality or not, always leads to better learning results than one representation alone, as long as they provide at least one of the functions mentioned by Ainsworth (2006). The present study focuses on the codality of multiple representations for problem solving in the field of elementary propositional logic in math, investigating whether quantity or diversity in codality accounts for the advantage of multiple representations in the specific domain of elementary propositional logic.

For all we know, there is no empirical study explicitly investigating and replicating the multimedia effect for two representations using code systems of the same kind, namely two symbolic representations. Therefore, our goal is to empirically separate the two factors possibly causing the multimedia effect: the quantity of representations (one vs. two representations) and the diversity of representational code (same vs. different). In order to investigate this, we can only use combinations that meet one of the functions described by Ainsworth (2006).

A pilot study on the materials development was conducted first, followed by the main study testing the hypotheses. The research aim of our pilot study was the generation of appropriate testing material whereas in the main study we focused on the multimedia effect. The following two opposing hypotheses were tested.

Hypothesis 1 – Diversity-Hypothesis: The combination of symbolic and analog representations results in higher performance than the combination of two symbolic representations or one symbolic representation alone (constructing functions).

Hypothesis 2 – Quantity-Hypothesis: The combination of representations always results in higher performance than one representation alone (complementary and constraining functions).

3.2 Method

3.2.1 Pilot study

We developed a set of 25 math problems from the field of elementary propositional logic, which could be divided in five subsets consisting of five items of the same type each. Every item was composed of a textual instruction, a formula and – as the response part – a graphic in which the participants were expected to mark on the solution of the problem. The material was pretested with a sample of German university students in an expert-novice-design. The total sample contained N=211 participants, separated into beginners (N=141; mean age=20.83 years, SD=3.05; 69.5 % female; mean number of semesters enrolled in college: 1.32 semester, SD=.91) and advanced students (N=70; mean age=23.89 years, SD=4.03; 59.2 % female, 9.9 % missing; mean number of semesters enrolled in college: 6.06, SD=2.23).

Both the beginners and advanced students worked with paper-pencil based materials and the investigation took place within the first two weeks of the new college year. That way it was possible to test the beginners before they acquired domain specific knowledge going beyond school math in the further course of the semester.

The 25 math problems from the field of elementary propositional logic consist of four types of problems: first filling points (9 problems), second filling and marking points (4 problems), third connecting points (7 problems) and fourth filling circles, triangles and rectangles (5 problems) (see figure 5 for a sample of “filling points”). Even though from a mathematical point of view, “points” cannot be filled, the used language does not allow any misinterpretation due to the definiteness of the problem description (see appendix E for the complete set of math problems used in this study (in German)).

Inside the rectangles fill out exactly these points that make the given expression “true“.
P(x) stands for “x is filled”.

$$(\neg P(e) \vee \neg P(f)) \wedge (P(d) \Rightarrow P(e)) \wedge (\forall x \in M_1 : \neg P(x)) \wedge (\neg P(b) \Rightarrow P(d))$$

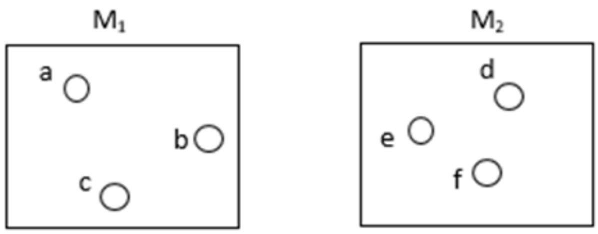


Figure 5. Example of the used math problems from the type "filling points".

The reliability analysis was conducted separately for the five item groups. Since the subscales were quite short, the resulting values for internal consistency were considered satisfactory (α = .59 to .75).

Item difficulties and discrimination indices for each item are provided in ap-pendix C, table 17. To assess an aspect of criterion-based validity, we analyzed for each item whether there was an association between expertise (beginner vs. advanced students) and item resolution (no vs. yes). Resulting phi-coefficients are also provid-ed in ap-pendix C, table 17. Positive values indicate, that advanced students were more likely to resolve the item than beginners were. The correlation between overall item scale and the participants expertise is low positive, but significant r = .15 (p = .048). There are five groups of items, labeled group A, group B, group C, group D, and group E. For the main study, all items of group B were eliminated due to their high difficulties and because of two of their phi coefficients (B2 and B5), which were negative. Even though three other items (A4, D5 and E4) of the remaining 20 items show negative correlations to the criteria expertise they were retained, since all remaining items were slightly extended for the main study. Moreover, one of the remaining items (A1) could not be transferred into the problem structure required for the main study and was hence eliminated. The remaining 19 items were used for the main study.

3.2.2 Main study

3.2.2.1 Experimental design and participants

In order to replicate both the multimedia effect for representations with different co-dalities such as symbolic and graphical representations and the multimedia effect for multiple representations of the same (symbolic) type such as text and formula, a six-group design was used (G1 to G6, see table 7).

Table 7
Overview of the six-group design

		diversity of representations	
		same	different
quantity of representations	single (1)	G_1 (formula), G_2 (text)	
	multiple (2)	G_3 (formula + text)	G_4 (formula + graphic), G_5 (text + graphic), G_6 (text + formula + graphic)

All participants (N=146) were German university students or graduates from high school (97.9% high school graduates about to be or already enrolled in college, 2.1% other); mean age = 22.80 years, SD = 4.43; 17,8% male, 80.8% female (1.4% missing). They were students lacking domain specific knowledge, i.e. knowledge in advanced mathematics operationalized through their course of studies (human studies: 76.4%; cultural and literature studies: 12.1%; law and economics: 5.7%; material science, chemistry and pharmacy: 4.3%, other: 1.4%) and were randomly assigned to one of the six groups.

3.2.2.2 Materials and procedure

All six groups worked with a paper-pencil test containing math problems from the field of elementary propositional logic. Each test sheet consisted of a first short part including information about the study and questions on personal data, and a second part including the 19 math problems from our pilot study, which were presented through a textual problem introduction, the math problem itself and a multiple-choice-response-part. All of these math problems of the pilot study had to be adapted to the requirements of the main study. This was accomplished by adding a text version of the given formula to each problem. That way, the material consisted of 19 math problems each containing the elements formula, textual representation of the formula and graphic. For a complete sample – including the multiple-choice response part at the end of each item – see appendix C, table 18. For every group (G1 to G6), the required elements of each problem were selected. Whereas the instructional text of the problem as well as the response part were kept constant for all six groups, the presentation of the mathematical problems varied according to the group (see table 1 for samples of each representational format and appendix F for the complete set of all versions of math problems used in this study (in German)).

The first group (G1) worked with a formula-only version of the material, propositional logic problems were solely presented as formulas. G2 worked with a text-only version: the problems were presented as a content equivalent text. G3 worked with a formula-text-version, providing the problems as formula and text. G4 worked with a formula-graphic version, where the problems were presented as a formula, while an additional graphic was given. The participants of G5 worked with a text-graphic version: the problems were presented as texts enriched by additional graphics. G6 finally worked with all three possible representations: text, formula and graphic. So G1 and G2 served as single representation condition groups, G4, G5 and G6 as multiple diverse condition groups and G3 as condition using multiple representations of the same code form. As a dependent variable, participants' test performance was assessed by their sum score over all 19 test items. Participants were tested either individually or in groups. First, they were given an overall instruction concerning the procedure of the test where they were told that all mathematical symbols used in the test are explained on the third page of each test sheet. Then, participants took the test and had to hand in their test sheets after a maximum of 45 minutes.

3.3 Results

The six groups did not differ significantly concerning their overall high school grade ($F(5,137)=.66$, *n.s.*), overall math grade ($F(5,109)=.69$, *n.s.*) and educational level ($F(5,140)=.57$, *n.s.*). The analysis of internal consistency revealed a Cronbach's α of .89 for all 19 items (see appendix C, table 20 for the item analysis).

To compare the performance between the six experimental conditions a one factorial ANOVA was conducted. The independent variable was representational format (as used in G1 to G6) and as a dependent variable individual test scores were computed (sum of correctly solved items divided by number of items; see table 8 for means and standard deviations).

Table 8
Means and standard deviations of the test scores (maximum 1, minimum 0)

	M	***SD***	***N***
Group 1 (formula only)	.44	.24	24
Group 2 (text only)	.55	.23	25
Group 3 (formula and text)	.71	.21	27
Group 4 (formula and graphic)	.52	.26	23
Group 5 (text and graphic)	.82	.18	25
Group 6 (text, formula and graphic)	.73	.25	22
Overall	.63	.26	146

The ANOVA for performance shows a significant main effect for the factor representational format ($F(5,140)=9.70$, $p<.001$). The Duncan post-hoc test reveals two homogeneous subgroups A and B, which means that there are significant differences for every combination between the two subgroups (for paired comparisons between each individual group see appendix C, table 20). The first subgroup A consists of the formula-only version, the text-only version and the formula-graphic version (group 1, 2 and 4). The second subgroup B comprises the formula-text version, the text, formula and graphic version and the text-graphic version (group 3, 6, and 5, see table 9).

Table 9
Results of the Duncan Posthoc-test

	N	***Subgroup A***	***Subgroup B***
Group 1 (formula only)	24	.44	
Group 4 (formula and graphic)	23	.52	
Group 2 (text only)	25	.55	
Group 3 (formula and text)	27		.71
Group 6 (text, formula and graphic)	22		.73
Group 5 (text and graphic)	25		.82
Significance within Subgroups		.096	.121

The differences between the two subgroups are not only highly significant, but also with respect to the effect sizes of the individual comparisons for all combinations between the two subgroups consistently moderate to high ($d_{Cohen}>.69$) (see table 10).

Table 10

Effect sizes for all combinations between the two subgroups 1, 2 and 4 vs. 3, 6 and 5

Combinations between the two subgroups	**Effect sizes (d_{Cohen})**
Group 1 & Group 3	1.19
Group 1 & Group 5	1.77
Group 1 & Group 6	1.20
Group 2 & Group 3	0.70
Group 2 & Group 5	1.27
Group 2 & Group 6	0.75
Group 4 & Group 3	0.78
Group 4 & Group 5	1.31
Group 4 & Group 6	0.82

The results show that even though text is always part of the succeeding combinations in subgroup B, it belongs to subgroup A with worse results when presented alone.

3.4 Discussion

The purpose of the present study was to investigate whether multiple representations foster problem solving in elementary propositional logic tasks, and furthermore, how three different types of external representations – text, formula and graphic – should be assembled to ensure optimum performance. As the three representations can be classified into either symbolic coding (text and formula) or analog coding (graphic), two factors possibly causing the multimedia effect could be empirically separated: quantity and diversity of external representations. The results of the present study show

how the combination of formula and text fosters problem solving in propositional logic and support a dual coding rather than a multiple coding perspective.

As reported in our main study, the groups perform equally well when comparing the combination of all three representations (text, formula, and graphic) with different coding and the combination of the two representations text and graphics. This result partially confirms the diversity hypothesis, stating that the combination of a symbolic representation with an analog representation leads to better performance than combining two symbolic representations or one representation alone. It is consistent with common theories on learning with multimedia that base on dual channel assumptions: multiple representations differing in modality or codality or both cause the multimedia effect. However, and against the diversity hypothesis, no multimedia effect was found for the combination of formula and graphic although both representations were presented through different codality. Moreover, the presentation of formula and text (both symbolic representations) leads to better results than the presentation of formula and graphics (one symbolic and one analog representation), which rather supports the quantity hypothesis.

Beyond the findings of traditional studies regarding the multimedia effect, the present study shows that also the combination of two symbolic representations can produce a multimedia effect, outperforming conditions using one symbolic representation alone. These results deliver for the first time empirical evidence for a more differentiated view on the multimedia effect and its theoretical underpinnings in math learning. These findings match the quantity hypothesis, stating that multiple representations lead to better performance than one representation alone. It should not matter whether the combination includes representations of different or same codality. The hypothesis is partially confirmed since three out of four groups with multiple representation perform significantly better than the two groups with only one representation. Moreover, the group with text and formula performs significantly better than the two groups where text and formula were presented alone. In line with our quantity hypothesis, the results confirm the multimedia effect for both the use of multiple symbolic representations (text and formula) as well as for multiple representations of different code types (text and graphic). However, the quantity hypothesis is also partially disproved as the combination of formula and graphic does not outperform one representation alone. Additionally, there is no 'the more the better'-effect when comparing the groups with two representations to the group with all three representations, which in turn argues against the quantity hypothesis.

Overall, none of the two hypotheses could be fully confirmed, since two of our results, which affect both hypotheses, do not fit into the overall picture. The first result is that the combination of formula and graphic leads to poor performance, because even provided with the graphic, the participants were unable to appropriately use the formula. While the graphic alone does not contain the full information needed for solving the problem, the formula is crucial in order to solve the problem. From a semantical point of view, the combination of formula and graphic would therefore be equal to the formula alone, which in that case additionally supports the quantity hypothesis. Moreover, the results of the present study imply that relating formula and graphic is more difficult for novice learners than relating formula and text or graphic and text. These findings match the results of Ainsworth et al. (2002), who found no positive learning effects for the combination of mathematical and graphical representation. As mentioned above, the authors explain their findings with the participants having problems relating these representations differing in terms of codality. Formula and graphic may be more distinctive than formula and text (Kaput, 1987) and may therefore be harder to process. Another reason for the result could be the fact that the participants do not deal with formulas on a regular basis and have problems processing the formula in case they were not provided with the textual translation. To confirm this hypothesis, an expert-novice-design could be carried out, where both mathematical experts and participants with average mathematical knowledge work with the used materials. As a second result there is no ‘the more the better’-effect. One explanation could be that the knowledge gain comes from the combination of two specific representations and a third representation provides no additional benefit for the participants. Another reason could be, that only those two representations were considered that seemed the most helpful from the participant’s perspective.

Finally, considering the functions of representations the results show a mixed picture. Concerning the combination of text and formula the findings confirm the complementary function in the sense of processing. Contrary to theoretical expectation, there is no redundancy effect for the combination of text and formula, even though both representations are of the same codality. Instead, we find a positive gain through the combination of the two symbolic representations text and formula. Be-cause even though text and formula are both symbolically coded and contain the same information, they are written with two code systems of significant difference: one is purely mathematical, the other one is used both in mathematics and in every-day language (Kaput, 1987). Therefore, this combination fulfills the complementary function. As for the constraining function, there is evidence for the finding that text, even though it is not equally helpful when presented alone, serves as a constraining function when combined with its information equivalent formula, since only when combined with text, these combinations became helpful. The formula, likewise, when combined with its text, also seems to have a constructing function inasmuch as it is the combination of text and formula that helps the participants to perform better. Both the combination of text and graphic and formula and graphic should reveal their constructing function, but there is evidence only for the combination of text and graphic. The explanation could be that if the symbolic representation (text) is accessible for the participant, the graphic serves as additional help. If the symbolic representation (formula) is inaccessible, the graphic cannot compensate this disadvantage. This may be because the used graphic is not information equivalent to text and formula and that the graphic's constructing function will only unfold in combination with an accessible symbolic representation. As discussed above no multimedia effect was found for the combination of formula and graphic and therefore no constructing function could be proved for this case. Concerning the combination of all three representations all three representational functions could be shown to be helpful even though – as discussed above – there is no "the more the better" effect.

3.4.1 Implications

From a practical perspective, these pattern of results lead to potential improvements concerning the design of multimedia learning materials in mathematics. Since the results show how only those combinations including the textual representation are helpful, text seems to be the decisive representation in this setting. Text itself, how-ever, does not facilitate the problem. In a limited way, the same is also true for the formula representation. Text is not more helpful because of its familiarity but because of certain features, which only lead to better performance when combined with the equivalent formula. Concerning school learning, it should be considered to use multiple representations when introducing a new mathematical concept. As an essential component, one should especially pay attention to include the representation text.

Theoretically, the findings of the presented studies on multiple symbolic representations speak against the common dual channel processing view. Text and formula differ in their symbol systems and need to be seen as two different symbolic representations. Considering the results presented in this study and the explanations provided above, multiple symbolic representations are not as redundant as a textual representation being simultaneously presented visually and aurally. The model of Schnotz and Bannert (1999, 2003) does not differentiate here. Since there is no redundancy effect, this result can be seen as an indication for differentiating the descriptional branch of the integrated model of text and picture comprehension. In our view, the results show that mainly the combination of multiple representations that fulfill their expected function rather than their semiotic type support learning, as formulated in the quantity hypothesis. However, as neither one of the two hypotheses can clearly be confirmed or rejected, the reason could be that the hypotheses are too simple. Multiple representations seem to support each other not solely because of their diversity or quantity. From a theoretical point of view this implies to enlarge the underlying theoretical models of learning with multiple representations from a dual coding to a multiple coding perspective, which is of great importance for all those content domains using more than text and pictures as common representational for-mats.

3.4.2 Limitations and future research

This research differs from typical multimedia studies in the sense that our materials were rather constructed since these types of math problems do not appear in common school books. It would be important to investigate whether the observed findings can also be replicated with actual school problems that would have to be adapted accordingly.

Due to a possible methodological limitation we cannot say whether an integration of the two representations occurred while problem solving. An alternative explanation for the advantage of multiple representations could be that the participants are allowed to choose the representation they prefer, assumedly the one that seems to be the easier one from the individual's perspective (Cox & Brna, 1995; Scanlon, 1998). If only one representations is offered, they have to use this one (even though it might be the more difficult representation for them). If both representation are presented, they can work with their preferred representation. On average, the participants' perform better with both representations than with one of the two alone, because everyone uses what works better for them individually, mostly ignoring the other one. Some research has been done to investigate the effect of matching representations to individual learning styles, although providing limited empirical evidence (e.g. Plass et al., 1998). To clarify this issue, currently an eye-tracking experiment is carried out in order to learn more about the participant's visual preferences when looking at the presented representations.

As discussed above, we were unable to observe the expected multimedia effect for the combination of formula and graphic, that is the combination of symbolic and analog representations, but still found the formula to be a significant addition when combined with text. One explanation might be that the formulas without "translation" are too difficult for the participants to process. Future studies should investigate the role of simultaneously presented translations when dealing with formulas and their possibly helpful effects.

The results of the present study may also have implications for test develop-ment, since effective problem solving shows individual competence within a specific domain. Ainsworth (2014) introduces the term multirepresentational assessment to emphasize the importance of an appropriate assessment of the outcomes of multi-representational learning. Multiple representations can be used either for the stimulus part or for the response part of test items. On the one side, the present study provides evidence for the integration of multiple representation in the stimulus part of test items, as they can lead to higher performance. On the other side, being skilled in a certain domain often means being able to deal with its specific representations by interpreting, constructing and transforming them. Therefore, multiple representations in the response part seem essential to capture competencies. Brünken, Steinbacher, Schnotz, and Leutner (2001) showed that test items were more appropriate to measure learning outcomes, if they were presented in the same codality as the used learning materials. So far, further research is needed to investigate the effect of the integration of multiple representations in the response part of test items to capture the effects of complex learning.

3.5 Conclusions

To conclude, the paradigm that is used in the presented studies has proved to be useful for investigating promising applications of the multimedia effect within STEM education. Using this paradigm, we were able to provide empirical evidence for the finding that multiple representations, which are composed of two symbolic representations, are helpful. Since the combination of representation is crucial for many learning situations, the results add to our understanding in dealing with multiple representations. These finding are therefore highly relevant for the further development of common cognitive theories of multimedia learning, from which practical recommendations for designing multimedia instruction can be derived.

4 Study 3: Do self-generated symbolic representations support performance in propositional logic items?

4.1 Introduction

4.1.1 Common cognitive theories on multimedia learning

Multiple external representations serve as fundamental learning materials and research has revealed various approaches in order to benefit more deeply from what is the basis of multimedia learning: the combined presentation of text and pictures. This combination has proved to result in significantly increased performance compared to learning with words alone, commonly referred to as the *multimedia effect* (e.g., Mayer, 2001). The multimedia effect is usually explained with Paivio's dual coding theory (1987), assuming that differently coded external representations are mentally processed through two cognitive channels: one channel for verbally/auditory presented materials and a second channel for visually/spatially presented materials. Understanding is therefore facilitated by learning materials that simultaneously provide the learners with verbal information (symbolic code) and matching pictorial information (analog code). This differentiation between symbolic and analog code serves as theoretical basis for the two most common multimedia theories, which are the *cognitive theory of multimedia learning* (Mayer, 2009) and the *integrative model of text and picture comprehension* (Schnotz & Bannert, 2003). Besides the so called dual-channel assumption (Mayer, 2014), and based on research on human cognitive capacity, both of these multimedia theories assume limited processing capacity for each channel and thirdly, emphasize active processing as a prerequisite for learning and understanding (Mayer, 2014) or comprehension and coherence formation (Schnotz, 2014). Even though they share major commonalities, however, the main difference between the two theories lies in the fact, that the cognitive theory of multimedia learning rather focuses on the different types of memory and their specific functions in the process of learning and understanding, while the integrative model of text and picture comprehension emphasizes representational formats of given external representations and their comprehensive integration.

As a third theory connected to multimedia learning, the *cognitive load theory* (Sweller et al., 2011) contributes a further approach: by also stressing the limits of capacity in human cognitive working memory, this theory explains how understanding evolves based on “the ability to simultaneously process required elements in working memory” (Paas & Sweller, 2014, p. 36). In order to process these required elements of information, the authors describe how the human brain must acquire, storage and use information, which is made more difficult by inappropriate design (extraneous load) and task complexity (intrinsic load). By improving instructional design features (i.e., reducing extraneous load), more effective cognitive resources can be spend on intrinsic processing (referred to as germane load), which actually leads to understanding. Within multimedia learning, cognitive load theory therefore suggests improvements of instructional design and application of the multimedia principles such as the previously mentioned multimedia principle.

4.1.2 Generative learning activities

Additionally, learners possibly benefit even more from text and pictures if they have created the pictures themselves by drawing while reading than if they are simply provided with illustrated texts. This phenomenon is called the *generative drawing effect* (e.g. Schwamborn et al., 2010; Schmeck, Mayer, Opfermann, Pfeiffer, & Leutner, 2014), which is usually explained with Garner's (2005) *generative theory of drawing construction* emphasizing the shift from passive consumption of taught information to an active involvement in cognitive processes (see van Meter & Garner, 2005 for a review; Schwamborn et al., 2010). The generative theory of drawing construction is based on Wittrock's (1974, 1989) generative model of learning. Generation is one of four components Wittrock (1989) detects for meaningful learning besides motivation, attention, and memory. By drawing representational pictures, learners do not only create an additional representation, but meanwhile they are assumed to engage in deep cognitive processing (*generative learning processes*; Mayer 2009). While translating from text to a pictorial representation, learners have to select relevant information from the text, spatially organize it in a drawing, and use prior knowledge for relating the textual information to the drawing (Fiorella & Mayer, 2015). In their study with learning disabled high school students on syllogistic reasoning, Grossen and Carnine (1990) found that the first group of these students, who self-generated diagrams, performed significantly better than the second group of these students, who worked with provided diagrams. These effects were consistent for both posttest and maintenance test scores. Furthermore, several studies provide evidence for a relation between the quality of self-generated representation as an influencing factor and the success of learning with self-generated representations (e.g., Hall, Bailey, & Tillman, 1997; Schwamborn, Thillmann, Leopold, Sumfleth, & Leutner, 2010; Leopold, 2009; Van Meter, Aleksic, Schwartz, & Garner, 2006). According to van Meter and Garner (2005), and with reference to the generation of pictures, quality in this sense it defined as the extent to which the individual components of the generated representations (picture) are arranged in the way as it is described in the given text. And additionally, the type of generated representation itself rather than the generation activity alone might influence learning processes. Gobert and Clement (1999) for instance, were able to show that fifth grade students reading a scientific text on plate tectonics developed a deeper conceptual understanding of causal relationships when asked to generate a diagram in comparison to generating a summary. These processes are therefore assumed to improve students' learning by facilitating the integration of different representations, in particular representations of different representational systems (van Meter & Garner, 2005).

4.1.3 Multimedia learning and transformation in mathematics

Dealing with multiple external representations is especially important in STEM education (science, technology, engineering, and mathematics), where multiple representations are not only used in order to foster learning and improve problem solving abilities, but also to visualize abstract scientific contents (Ainsworth, 1999; Duval, 2006). Overall, constructing representations is known to improve understanding of science concepts (see Tippett, 2016 for a review). Lithner (2003) provides a theoretical framework of mathematical task examination in which he describes transformation as the interaction with one or more mathematical objects resulting in the creation of different mathematical objects. The generation of other representations based on certain provided representations is also known as transforming representations from one format into another. Due to its complex prerequisites in terms of understanding and knowledge of mathematical principles, transformation is considered as key competence (Ainsworth et al., 2002; Duval, 2006), and belongs to of several important skills when dealing with multiple external representations, which is commonly referred to as *representational competence* (Kozma & Russell, 1997; Kozma et al., 2000; Nathan et al., 2002).

While there is only a comparably small amount of research on transformation between the four major mathematical representations (i.e., graph, table, formula, and text) and the direction of representational change between them, these studies frequently reveal the difficulties students face when transforming one representation into another (e.g., Andrá, et al., 2015; Geiger, et al., 2011; Van Dooren et al., 2012). Focusing on symbolic representations like text and formulas, research provides rather inconsistent evidence concerning which representation facilitates students' learning the most. Geiger et al. (2011) for instance found that students did poorly on text production on a more complex level like producing verbal representations of real-world contexts for given functions. However, students showed better performance for text production when told to describe syntactical elements only. These findings are consistent with our own results (Ott, Malone, Vogel, & Brünken, 2015). When told to change between the two symbolic representations text and formula, the problem solving performance of beginners and advanced university students is significantly influenced by the initially presented representation, whereas the direction from formula to text lead to better problem solving performance for novice learners compared to advanced students. Additionally, text as initial representation by tendency fostered the beginners' performance when rating the mathematical content of a given statement as true or false (see also chapter 2). Contrarily, in an eye-tracking study, Andrà et al. (2013) compared student's gaze behavior when being presented with either a graph, a formula, or a plain text description and told them to find a matching representation among four text representations (when given formula or graph) or formulas (when given text). Results show that students performed the worst when translating from formula to text. Overall, however, all studies have in common that they indicate significant differences between representational formats and significant fostering or inhibiting effects on problems solving performance.

4.1.4 Research aims and hypotheses

Referring to the above mentioned theoretical foundation of the integrated model of text and pictures comprehension (Schnotz & Bannert, 2003), multiple symbolic representations like formulas and text are of the same codality and therefore seen to be processed within the same channel, whereas differently coded representations such as graphs and text are seen to be processed in the two different channels.

The multimedia effect, as well as the generative drawing effect are well studied for the combination of representations that differ for their codality: one is symbolically coded (e.g. text or formulas) and the other is analogically coded (e.g. pictures or drawings). By analogy with generative drawing, it can be assumed, that the generation of a second representation always leads to generative processing and therefore to better learning outcomes. It may be the case that the generative drawing effect also occurs when transforming one of these symbolic representations into the other.

Therefore, the research aims of the present study were (a) to find out which one of the given representations (text vs formula) is easier to handle for the participants and to replicate the multimedia effect for multiple symbolic representations (text and formula) and (b) to investigate how the generation of an additional symbolic representation (text resp. formula) influences conceptual understanding. Based on the theoretical models and empirical evidences presented above, the following four hypotheses were tested.

Hypothesis 1 – In line with the presented research showing significant influences of the different types of representations on task performance, the first hypothesis states that different representations lead to different results (main effect type of representation).

Hypothesis 2 – For the second hypothesis, the focus is on investigating the multimedia effect for multiple symbolic representations. In this case, two symbolic representations would lead to better performance than one representation alone (multimedia effect).

Hypothesis 3 – Previous results additionally indicate differences in the difficulty of representation generation, which leads to the third hypothesis stating that one type of generation is easier to produce than the other (main effect type of representation generation).

Hypothesis 4 – Referring to the influences of generative activities, the fourth hypothesis states that the generation of representation fosters better conceptual understanding than no generation (main effect generation).

4.2 Method

4.2.1 Experimental design and participants

In order to investigate the impact of the two different symbolic representations text and formula combined with learner generation of representations, we separated the sample into two different sub-studies: a dual-coding study estimating the influence of the representational codalities and a generation study, examining the effects of learner generative activities. A total of three factors are defined: The first (within) factor A varies the number of given representations (one vs two representations), which were presented to the participants. The second (within) factor B differentiates the two types of codality (text vs formula) and the third (between) factor C representation generation indicates, whether or not the participants had to complete generation tasks (yes vs no). We therefore used a 2*2*2 mixed design (partially crossed) (see figure 6).

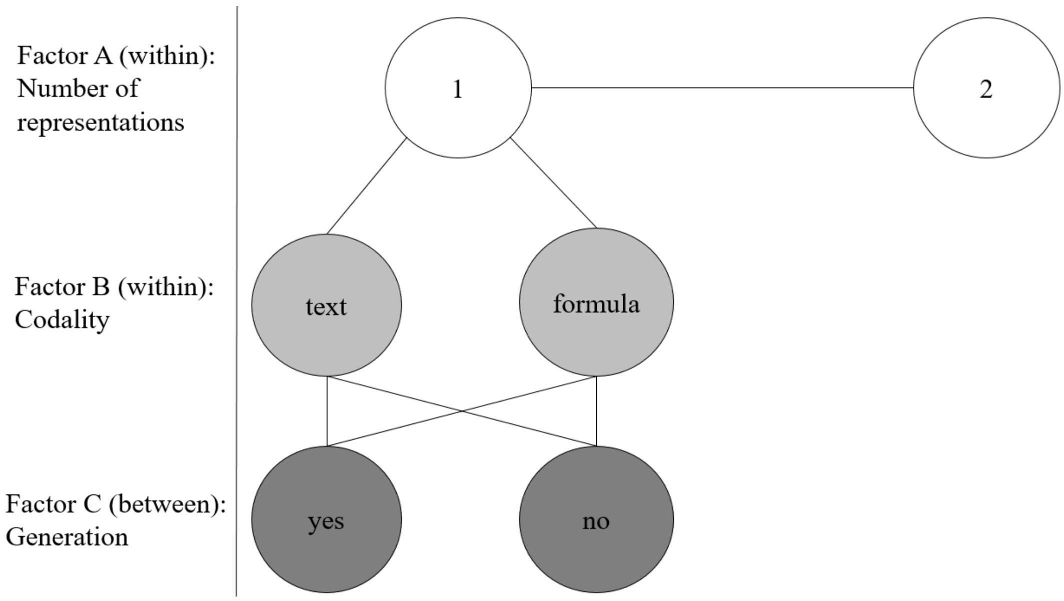


Figure 6. Overview of the 2*2*2 mixed design (partially crossed).

The participants (N=125) were German university students mostly in their first or second semester and randomly assigned to one of the two conditions generation not demanded (dual coding) vs generation demanded. In order to clearly refer to the both separated and combined data analysis, these two conditions are in the following referred to as “sub-studies”. Descriptive analysis of participants are as follows: dual coding sub-study (N=55; mean age=21.15 years, *SD*=3.61; 65.5% female, 1.8% missing; mean number of semesters enrolled in college: 1.31, SD=.77) and generation sub-study (N=70; mean age=22.00, SD=4.5; 74.3% female, 1.4% missing; mean number of semesters enrolled in college: 2.57, SD=2.82). Five participants had to be eliminated from analysis due to incomplete data.

4.2.2 Materials and procedure

The whole sample worked with paper-pencil based test sheets containing ten math problems from the field of elementary propositional logic with up to eight subtasks adding up to a total of 29 items. All test sheets consist of two parts. The first short part contains information about the study and questions on personal data. The second and larger part of the test sheets consisted of the math problems.

Each participant, randomly assigned to one of the two sub-studies, had to solve the ten math problems by either transforming a given (textual or formal) representation into the missing (textual or formal) representation and indicating whether the presented term was mathematically correct or not or rating the mathematical correctness without previous transformation. Referring to the between-subject factor generation demanded vs not demanded, the participants were assigned to one of the two conditions. These two conditions differed insofar that for the generation sub-study (condition 1), participants received the written instruction to generate a missing representation by translating either a given text into a same content formula or a given formula into a same content text, in case a representation was missing and additionally rate the correctness of the given term (as an example for a given textual term: “For all natural numbers x there is a number y, which is greater than x.” (true)). The other participants, assigned to the dual-coding sub-study (condition 2), were not instructed to generate the missing representations, but only to rate the correctness of the given term.

Each item was initially available in three versions: either the problem was represented as a text (version A), or as a same content formula (version B) or both representations were given (version C). The participants received a test sheet including all items, whereas the version of each item (A, B, or C) varied randomly for each test sheet. This was accomplished by putting together each test sheet individually through an algorithm, which ensured that the three versions of each item were distributed randomly throughout the entire stack of test sheets ensuring the operationalization of both the within-subjects factor codality (text vs formula) and the within-subjects factor number of representations (one vs two). That way approximately one third of the problems was represented as a text and about another third as a formula. The remaining approximate third served as control items, which therefore included both representations and were identical for both sub-studies. Participants in the generation demanded group were instructed to complement single representations (version A and B of the items) by generating the respective missing representation and rate the correctness of the term afterwards (generation sub-study). Participants in the generation not demanded group were instructed to directly rate the correctness of the given term without generating a second representation (dual coding sub-study) (see appendix B, table 16 for a complete sample of all three versions).

When looking at the study as whole, including both dual-coding and generation tasks, their variation of the initial representations and the amount of given representations, a total of five conditions follows: text only including generation and rating (Y_{111}), formula only including generation and rating (Y_{121}), text only with rating excluding generation (Y_{112}), formula only with rating excluding generation (Y_{122}), text and formula with rating and excluding generation (Y_2) (see table 11).

Table 11
Overview over the five conditions Y111 to Y2

		Number of given representations		
		1		2
		Codality		Y_2
		Text	Formula	
Generation	yes	Y_{111}	Y_{121}	
	no	Y_{112}	Y_{122}	

As the dependent variables, the test performance of each participant was assessed by three sum scores which are composed of the items in the respective versions A, B, or C. There are two dependent variables: *generation* (correct/incorrect) and *rating* (correct/incorrect). The rating performance was considered as a performance indicator for all participants. In addition, for the generation demanded condition the correctness of the generated representation was assessed if generation was required. Participants of both sub-studies were tested in a field setting during their normal lecture time. First, all of them were given an overall instruction concerning the procedure of the test. All mathematical symbols used in the test were explained and the participants were told that all symbols are additionally explained on the third page of each test sheet. Afterwards, the participants took the tests and handed them in after a maximum of 45 minutes.

4.3 Results

The participants of the two sub-groups did not differ concerning their overall high school grade, which refers to a single grade summing up the individual's final exam grades at the end of high school (Man-Whitney-U-Test: U=1435.50, p=.029 two-tailed, *n.s.)* and overall math grade, which refers to the grade of the final math exam in high school (U=1158.00, p=.031 two-tailed, *n.s.*). Both variables, however, do not correlate significantly with the performance variable *rating*, conducted separately for each version: correlation of final grade with rating performance (textual representation given) (r=-.068, p=.288, n=121) and rating performance (formal representation given) (r=-.048, p=.451, n=122); correlation of final math grade with rating performance (textual representation given) (r=-.101, p=.146, n=109) and rating performance (formal representation given) (r=-.076, p=.269, n=110). No significant correlations could be found, which is why none of these variables were included in the following calculations. According to the order of hypotheses presented, at a first level of analysis, the results were conducted for each sub-study separately, followed by the second level of analysis based on the combined data of both sub-studies.

4.3.1 Dual-coding sub-study (Hypotheses 1 and 2)

In order to compare how the rating performance was influenced by the different item versions DC_A, DC_B and DC_C, a t-test for paired samples was conducted. For the dependent variable *rating*, the individual test scores were conducted for each version separately by taking the sum of correctly solved item divided by the number of items (see table 12 for means and standard deviations of each version, presented in the conducted pairs).

Table 12
Means and standard deviations of the test scores (maximum 1, minimum 0) for each item version, presented in the conducted pairs

Pairs	Version	*N*	*M*	*SD*
Pair 1	A: textual representation given	55	.65	.15
	B: formal representation given	55	.52	.15
Pair 2	B: formal representation given	55	.52	.15
	C: both representations given	55	.63	.17
Pair 3	A: textual representation given	55	.65	.15
	C: both representations given	55	.63	.17
Pair 4	A&B: one representation given	55	.60	.10
	C: both representations given	55	.63	.17

Note. *M* = Mean, *SD* = Standard Deviation.

For the paired t-tests, an alpha adjustment according to Bonferroni was conducted, which for four tests results in an adjusted level of significance of .0125. Based on these paired t-tests and adjusted level of significance, the results show significant differences in rating performance for the comparison of version A, where only the textual representation was given (M=.65; SD=.15), and version B, where only the formula expression was given (M=.52; SD=.15), ($T(54)$=4.23, p<.001). This indicates that the textual representation resulted in better rating performance than the formal representation. There were also significant differences between version B (M=.52; SD=.15) and version C (M=.63; SD=.17), ($T(54)$= -4.169; p<.001), again indicating that participants performed significantly worse when dependent on the formal representation. No differences could be found between the versions A and C ($T(54)$=.506, p=.615, *n.s.*). In order to test the multimedia effect, we compared the mean performances in items that included only one representation with the mean performance in items including both representations. The paired t-Test revealed that the participants performed by tendency better, when the problem was represented as text and formula (*M*=.63; *SD*=.17) than as one of those representations alone (*M*=.59; *SD*=.10), (*T*(54)=1.97; *p*=.054).

4.3.2 Generation sub-study (Hypothesis 3)

In order to investigate the influence of the different versions GS_A, GS_B and GS_C on the translating and rating performance, again a *t*-test for paired samples was conducted. For the dependent variables *generation* and *rating*, the individual test scores were conducted not only for each version separately (again by taking the sum of correctly solved item divided by the number of items) but also for each direction of translation (see table 13 for means and standard deviations of each version, presented in the conducted pairs).

Table 13
Means and standard deviations of the test scores (maximum 1, minimum 0) of scores for each type of performance, presented in the conducted pairs

Pairs	Score for each type of performance	*N*	*M*	*SD*
Pair 1	translating performance from text to formula (Version A)	66	.32	.30
	translating performance from formula to text (Version B)	66	.55	.34
Pair 2	rating performance after translating from text to formula (Version A)	66	.50	.26
	rating performance after translating from formula to text (Version B)	66	.51	.25

Note. *M* = Mean, *SD* = Standard Deviation.

With regard to the correctness of the generated representation, the paired *t*-Test shows it was easier for the participants to generate correct texts (*M*=.55; *SD*=.34) than to generate correct formulas (*M*=.32; *SD*=.30), (*T*(65)= -4.44; *p*<.001). No significant difference could be found for the comparison of the rating performance for each direction of translation (text to formula vs formula to text) separately (*T*(1,64)= -.403, *p*=689, *n.s.)*. This indicates that even though the representations significantly differ in their difficulty, the direction of representational change has no influence on the rating performance.

4.3.3 Results of combined sub-studies analysis (Hypothesis 4)

For the combined analysis of both sub-studies, the above mentioned 2x2x2 mixed design study (partially crossed) was modified into a 2x2 mixed design conducting the between subjects-factor *representation generation* (demanded vs not demanded) and the within subjects-factor *type of given representation* (text vs formula). As dependent variable the mean problem solution *(rating)* per item condition was assessed. A two factorial repeated measures ANOVA with the experimental factor *representation generation* and the repeated measures factor *type of given representation* was computed. With regard to rating the correctness of the terms, the ANOVA revealed a significant but reversed main effect of *representation generation (F*(1,118)=7.60, *p*=.007, η^2=.06). The participants performed better, if they were not instructed to generate a second representation (see table 14).

Table 14
Means and Standard Deviations for performance broken down for type of given representation and representation generation

	Type of representation	*N*	*M*	*SD*
demanded	text	65	.49	.26
	formula	65	.51	.25
not demanded	text	55	.65	.15
	formula	55	.52	.15

Also and again, a significant main effect of the factor type of given representation was found (F(1,118)=4.41, p=.04, η^2=.04), indicating that items including the textual representation were easier to solve. The RM-ANOVA furthermore revealed a significant interaction between the two factors (F(1,118)=7.45, p=.007, η^2=.06), indicating that the type of representation was only relevant for problem solving if no second representations had to be created (see figure 7).

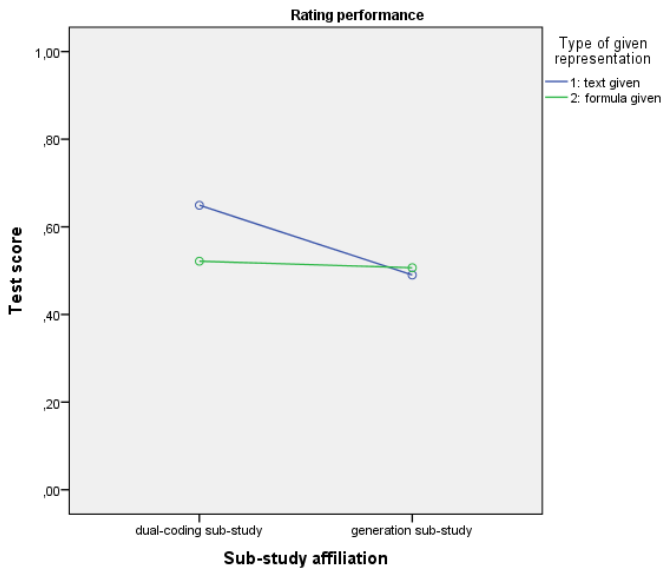


Figure 7: Profile diagram of the interaction effect for the rating performance separated into the two sub-study conditions representations generation demanded (generation sub-study) vs not demanded (dual coding sub-study).

4.4 Discussion

The present study was conducted in order to investigate influential differences between multiple symbolic representations on conceptual understanding and whether learner generative activities such as the verbal or formal translation of a given representation fosters or inhibits conceptual understanding. The patterns of results reveal a significant effect of the presented representation on the participants' conceptual understanding, which replicate our previous results (see chapter 2) and rather speak against a general fostering effect of learner generative activities.

As reported in the dual-coding sub-study on whether or not dual-coding outperforms single-coding, the results show that the rating performance is not influenced by whether the given representations are only text or text in addition to formula. However, in case the only given representation is the formula then rating performance decreases significantly in comparison to text. Additionally, rating performance is also significantly worse if the formula is the only given representation compared to the combined representation of text and formula. This result confirms the first hypothesis, stating that one representation leads to better conceptual understanding than the other and identifies the formal representation as the adverse representation in comparison to the textual representation. Moreover, this result with both representations better than formula alone, provides a first indication of the multimedia effect for multiple symbolic representations. Concerning the finding that dual-coding does not automatically lead to better performance than single-coding, one explanation could be that both representations may stand for themselves, since they contain exactly the same information. For the solution of the given problem no in-depth understanding and therefore no integration of multiple representations is necessary: first, the participant has to understand the meaning of the given mathematical expression, which seems to be easier if the representation text is (additionally) presented. Once the participant correctly understood the statement, he or she either knew the solution or not. Further study of the term does not result in deeper understanding, coherence formation is not necessary. Another finding is that linking abstract with grounded representations fosters problem solving performance (Brenner et al., 1997; Koedinger & Anderson, 1990; Koedinger, Anderson, Hadley, & Mark, 1997; Koedinger & Nathan, 2004; Nathan et al., 2002). Unfamiliar abstract (mathematical) representations like symbols or graphs are presented together with or after familiar or “grounded” representations (Koedinger & Nathan, 2004, p. 158) in order to facilitate meaning-making and self-monitoring processes. This could be another reason why presenting both representations simultaneously lead to better performance.

As for the generation sub-study, investigating whether or not generative activities such as the translation from text to formula and vice versa foster rating performance, again the results show that the formula seems to be the more difficult representation in comparison to text. When generating text vs formula, participants perform worse on the formula generation. However, when comparing rating performance in combination with generation, the direction of translation has no influence. Concerning generative activities in general, we can say, that generation by tendency even leads to worse rating performance, while rating without additional translation results in the highest scores. These results contradict the fourth hypothesis, stating that the generation of the equivalent representation may have a fostering effect on the individuals rating performance. One explanation is that the advantages of generative activities are linked to spatial features of the generated representation occurring in diagrams, figures or other pictorial representations, which demand deeper processing (Gobert & Clement, 1999; Lockhart & Craik, 1990; van Dijk & Kintsch, 1983; Slof, Erkens, Kirschner,

& Helms-Lorenz, 2013) and may therefore not occur in non-spatial representations like logic formulas or texts. Additionally, research indicates another explanation: Ainsworth et al. (2002) found that participants improved their performance when working with a multirepresentational learning environment even though they failed to coordinate representations. The authors explain their result with the suggestion that if translation is not a requirement for successful task performance, attempting to translate may even have a disadvantageous effect on learning outcomes.

In the present study, the easier representation was text, since participants performed better when generating texts compared to generating formulas and also, text seemed to be easier to process in order to determine whether a given mathematical statement is correct or not. Generating the missing formula, however, did not have a fostering but even a hampering effect on problem solving. This can be explained with cognitive load theory. It has already been mentioned above that in this type of math problem it might not be necessary to integrate the representations in order to correctly rate the mathematical content of the logical statements as true or false. In the generation condition, however, the participants were explicitly asked to do so which they obviously had difficulties with. This could have consumed resources that were no longer available for them to successfully solve the rating task. Regarding the quality of the generated representations, which is defined as the extent to which the individual components of the image are arranged as described in the text (van Meter & Garner, 2005), another explanation in terms of text and formula is that participants had more difficulties with translating the individual text components into formal notation and this notation into their correct formal relation than vice versa. In sum and contrarily to generative drawing representation, generation can be detrimental for performance, if the additional symbolic representation that has to be created is unfamiliar to the learner.

Overall, the results show that the participants performed slightly better in their rating performance in those items that provided the problems in both representations than if only one representation was given. This finding can serve as a support for the assumption that the multimedia effect is also applicable for multiple symbolic representations. The multimedia effect for multiple symbolic representations therefore could be partly confirmed. It is, however, restricted to ready-made representations. Still, further research has to be conducted to find out, whether learners really make use of both representations or rather choose the easiest or familiar one.

4.4.1 Implications

From a theoretical point of view and based on the results of the presented research, multiple symbolic representations such as text and formula need to be seen as two different symbolic representations, which cognitively seem to be processed differently. The common dual channel processing view represented by the theoretical model of Schnotz and Bannert (1999, 2003) or the *Cognitive Theory of Multimedia Learning* (Mayer, 2001) does not provide further theoretical guidance in this case. The presented results therefore deliver indications for the necessity to extend the underlying theoretical concepts of multimedia learning possibly from a dual coding to a multiple coding approach.

4.4.2 Limitations and future research

A first possible methodological limitation refers to simultaneous representation of the generation and the rating tasks. When investigating the participants' performance, there is no possibility to find out, in which order participants worked on the given tasks and whether previous translation fosters or hinders learning. This could be addressed in future studies by transferring the presented paper-pencil based setting into a computer based setting, which regulates the order of appearance of the relevant tasks and representations. A second limitation lies in the fact that the participants' prior ability or capacity in generating other representations might influence the results. In order to include investigation of these aspects, future research could therefore use eye-tracking methods or think-aloud protocols.

For further research, the indications for a multimedia effect for multiple symbolic representations could be replicated with different materials, which should be precisely designed for this specific investigation purpose. Additionally, the multimedia effect could be more obvious if an integration of the two symbolic representations is theoretically meaningful. Furthermore, it might be the case that the more difficult representation in the sense of the classical multimedia principle should be better complemented by an analog representations than by a second symbolic representation. These aspects should be addressed in further studies. Generally, further research is needed to investigate the fostering and inhibiting effects of multiple symbolic representations for learning and conceptual understanding in mathematics.

5 General discussion

In order to learn more about the special case of multiple symbolic representations (formal or textual representation), a series of multirepresentational studies was conducted. As a first approach, the developed testing materials from the mathematical field of elementary propositional logic in an expert-novice comparison revealed a significant influence of expertise: beginners face disadvantages if problems are presented inappropriately, whereas advanced learners are less dependent on the format of representation. Additionally, findings show a significant influence of the direction of representational change indicating that the initial format of representation significantly influences problem solving performance. Based on these findings showing that text and formula make a difference on performance, the second set of studies was conducted to investigate whether this difference is large enough to replicate the multimedia effect for multiple symbolic representations. This was implemented by separating the two factors possibly causing the multimedia effect: quantity and diversity of external representations. Results show a clear advantage of the simultaneous presentation of informationally equivalent multiple symbolic representations demonstrating the multimedia effect for multiple symbolic representations and supporting a dual coding rather than a multiple coding perspective. In order to expand the previous findings to advanced principles of multimedia learning such as the generative principle, the third set of studies concentrated on this issue by precisely investigating the differing computational properties between the two symbolic representations text and formula. Methodologically, learner generated activities were used in order to find fostering or inhibiting effects on conceptual understanding based on the given symbolic representation. Results reveal a significant influence of the format of representation on the performance in favor of the textual representation. In addition, the results indicate a multimedia effect based on the two symbolic representations when presented simultaneously.

5.1 Theoretical and practical significance

The studies presented in this thesis were conducted in order to meet two objectives: investigating (1) whether or not principles of multimedia learning can be transferred on multiple symbolic representations and (2) due to the results whether or not common theories in multimedia learning should be differentiated.

5.1.1 Answers on transfer

Besides the main principle of multimedia learning, i.e. the multimedia principle, two others were investigated within the course of the presented studies: the redundancy principle and (in a modified way) the generative drawing principle.

Beginning with the redundancy principle, its first form (presenting identical information in multiple forms, Kalyuga & Sweller, 2014) is contradicted by the results showing that informationally equivalent representations of the same codality still differ in their fostering or inhibiting effects on problem solving performance (see chapter 3). Revealing the multimedia effect for multiple symbolic representations, the combination of same codality representations such as text and formula even leads to significantly improved performance than compared to each representation presented alone. These results confirm the assumption that multiple representations do not necessarily have to be of different codality in order to be effective. Rather, the quality of the individual representations that are combined seems to be important. In the second study, text representation was the most helpful and thus superior to the others: without the textual representation there was no advantage of multiple symbolic representations. One explanation lies in the differences between the two code systems used: one is purely mathematical and the other is not (Kaput, 1987), whereas the purely mathematical representation is characterized by extreme information density using symbols, which are not as familiar to the participants as textual contents. On the one hand, these differences lead to the possibility of complementing and constraining each other when both symbolic representations are presented simultaneously and with text serving as a door opener for the less familiar formal representation. On the other hand, these differences imply that mathematical representations like formulas can only be taught through natural language. It is the primary medium of communication and is more familiar than the secondary acquired mathematical capabilities, like mathematically formulating a proposition (e.g. by recognizing mathematical structures, mathematically representing a proposition by using appropriate symbols and variables, or translating from one representation into the other) (OECD, 2013). One conclusion could be that the more familiar participants are with mathematical representations, the less effective may be the additional textual representation. In a broader view on this topic, Kalyuga, Chandler, and Sweller (1998) present a number of studies showing that for more experienced learners adding redundant text to a diagram inhibited learning whereas less experienced learners were able to benefit from the additional redundant text. This is also in line with research on expertise, showing that instructional guidance, crucial for novice learners, may have even inhibiting effects for advanced learners (*expertise reversal effect*; e.g. Kalyuga, Ayres, Chandler, & Sweller, 2003). Even though this issue could be addressed by replicating study 2 in an expert-novice-design, referring to the results of study 2, still the (more familiar) textual representation alone did *not* result in better performance than the formula alone. A significant increase was only the case for the combination of text and formula (see chapter 3). Therefore, familiarity with the textual representation alone cannot explain these findings. Instead, the familiarity and thus easier accessibility of information on the side of the textual representation *and*, on the other hand, the clearly structured presentation of the same information in the form of mathematical notation seem to make the decisive difference for the learner. In the sense of complementing and constraining functions (Ainsworth, 2006, 2014) the text can facilitate the access to the information, while the formula provides the same information clearly structured. Since the adjacent text translates all the symbols one by one, the learner can see their meaning at any time. He can simultaneously benefit from simpler information access and clear presentation, saving cognitive resources that can be used to solve the problem. Leaving one of the two representations away, their specific help is removed as well. The characteristics of one representation alone, however, are not helpful enough either: the information access through the text is not enough, since the task is too long and too complex to keep in mind - the text alone is simply not clear enough. Still, the clarity of the formula alone does not help either, if the learner has problems with understanding the symbols and has to spend too much of his cognitive resources on keeping their meaning in mind. Only in combination, the two representations can help the learner due to their specific characteristics and thus saves cognitive resources that are then available for successful problem solving. The material, even though redundant regarding the information it contains, is not redundant regarding the way the information is distributed. It is helpful because due to the unique characteristics, each representation takes its own *pedagogical function* (Ainsworth, 2006) and therefore fosters better problem solving performance.

Regarding the modified version of the generative drawing principle as the second focus of attention, results of generating the missing symbolic representation here do not reveal an advantageous but even an inhibiting effect on problem solving performance (see chapter 4). As previously mentioned, one explanation could be that generative activities are advantageous in principle because of the spatial features of the generated representations such as diagrams or figures, which demand deeper processing (e.g., Slof et al., 2013). These advantages may therefore not occur in non-spatial representations such as formulas or texts as they were investigated here. Another reason could be, based on cognitive load perspective, that the generation consumed additional cognitive resources that were no longer available for the solution of the task and therefore resulted in poorer performance. In further studies, this should be addressed by including a cognitive load measurement (e.g., the scales of Leppink et al., 2013). Additionally, the inverse generation effect could be due to comprehension errors that lead to errors in the generated representation. This visualized but incorrect generation was included into the reflection on the problem solution and therefore further intensified the participants' misconception. For investigation of this issue, it would therefore be necessary to relate the quality of the generation to the solution of the problem. In order to address this problem, instead of using paper-pencil based materials a computer-based investigation could be carried out for further investigations, in which an error in the generation can be displayed and improved in an intermediate step between generation and task solution. Finally, the motivation of the participants could also be of significant influence. The results of the generation condition could be worse because they might have been less motivated to determine the mathematical content of the expression after the complex generation, and therefore have used less care to solve the problem. This could be addressed by explicitly motivating the participants and additionally raising complete data on this issue, e.g. duration of working time.

Overall, and based on the multimedia effect, now there is evidence available for the fact that the two representations text and formula – even though informationally equivalent – are not fully redundant and have fostering effects on problem solving when presented together. This should be taken into account for educational purposes when for instance introducing new mathematical concepts during school lecture by including the representation text. However, regarding generative activities, the results show that symbolic representations differ from other representations in various ways such as spatial or non-spatial features. More research is needed to reveal more insight about the special case of multiple symbolic representations and their usability for improving mathematical and scientific learning.

5.1.2 Answers on differentiation

Based on the results presented above, the fruitful combination of the two symbolic representations text and formula speak against the common dual coding processing view, which differentiates between the two major branches of symbolic/descriptional and analog/depictional representation. As previously discussed, even though informationally equivalent and of the same symbolic codality, the remaining differences between the two representations based on their differing code systems are sufficient enough to produce the multimedia effect. This leads to the theoretical consequence that text and formula need to be seen as two different symbolic representations, which are not as redundant as a textual representation being presented visually and aurally. The model of Schnotz and Bannert on text and picture comprehension (1999, 2003) does not make a statement on this issue, which is why they neither provide a differentiation between these two cases nor regarding multiple symbolic representations like text and formulas. Both representations were not helpful when presented alone and secondly, there was no redundancy effect for the combination of both, but a significant increase in performance when presented in combination. Therefore, these results show that symbolic representations can also be clearly distinguished in terms of their effect on cognitive processes and the associated problem solving performance. If, however, different symbolic representations lead to different cognitive processes, with comparable improvement effects as the combined presentation of symbolic and analogous representations, then this emphasizes the need of differentiating the prevailing dual-coding assumption. Instead, multiple symbolic representations appear to be processed less in form of dual coding rather than in form of multiple coding. Following this argumentation, the presented research provides salient reasons for the need of widening the theoretical fundaments of the common theories on multimedia learning e.g. by differentiating the descriptional branch of the mentioned *integrated model of text and picture comprehension* (Schnotz & Bannert, 1999, 2003) regarding the differences within multiple symbolic representations. If multiple symbolic representations result in differing cognitive processes, different mental representations may arise due to the differences between the symbolic representations. The presented results thus address the statement of Schnotz (2014), according to which the differentiation between the descriptional and the depictional representations also applies for internal representations. If one assumes that the combination of text and formula is not only limited to the perception of surface features, but actually produces a difference in the process of understanding - as the clearly better results of the combined version suggest - the differentiation of the descriptional branch continues up to the level of propositional representations (see figure 8).

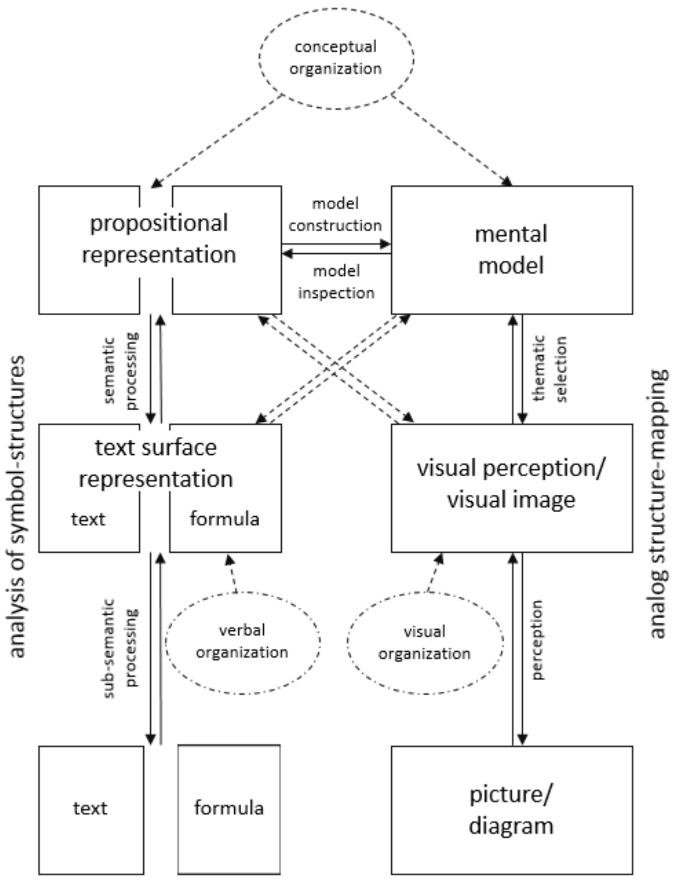


Figure 8. Adapted theoretical framework of text and picture comprehension by Schnotz and Bannert (2003) for multiple symbolic representation processing.

Propositional representations are described as independent of the specific choice of words and syntax used for the external symbolic representation. Instead, on this level, the ideas transported by the symbolic representation are mentally represented at a conceptual level (Schnotz, 2014). Unlike the combination of text and image, one has to deal with purely abstract content in the combination of text and formula. Since propositional representations are based on the specific symbols of the external symbolic representation, and since these symbol systems differ in the case of multiple symbolic representations, this may, accordingly, result in different propositional representations, which in turn can be linked and used for problem solving. To what extent the propositional prepositions resulting from multiple symbolic representations differ and how exactly they interact, in what way this process is influenced through mental models and prior knowledge, and what instructional principles should be derived from them, should be investigated in further research.

In sum, the underlying theoretical models may need to be enlarged from a dual coding to a multiple coding perspective in order to include the specific characteristics of multiple symbolic representations and foster further research on their beneficial application for educational use.

5.2 Limitations

Additionally to the limitations already discussed for each individual study at the end of the empirical chapters, there are several limitations concerning this thesis as a whole. As a main limitation it should be noted that none of the presented studies were intended to be learning studies and are limited to testing only. Since little research has been done explicitly on the subject matter, the conducted research concentrated on finding testing effects. As a next step, learning studies will have to investigate the appropriate transfer of the presented findings into beneficial mathematical and scientific learning environments.

A second – methodological - limitation lies in the fact that the chosen way of study implementation does not allow any indication concerning how the participants actually worked with the given materials. For example, there is no possibility to say whether or not the individual participant worked with both representations if both were presented simultaneously, or in which order, and whether that order matters. This issue could be addressed by running an eye-tracking study within a laboratory setting in order to investigate the participants' inspection patterns.

A third and important limitation is that the material used in this thesis is confined exclusively to the field of elementary propositional logic and, of course, cannot be regarded as representative for all mathematics and natural sciences. Thus, it cannot be said with certainty that the presented results of this thesis can be replicated for any symbolic representation. This issue can be addressed by testing other material from different areas of mathematics and natural sciences, regarding whether the results are comparable in terms of the multimedia effect and the transfer of further principles of multimedia learning.

5.3 Conclusions

In the course of this thesis, we were able to shed light into the special case of symbolic representations within multimedia learning theories and testing applications. Results show, on the one hand, that multiple symbolic representations contain special properties that enable them to enhance learning when presented in combination. These features, on the other hand, also lead to the fact that other principles of multimedia learning, e.g. concerning generative learning activities, cannot be easily transferred to multiple symbolic representations. As the main finding of this thesis, however, the replication of the multimedia effect for multiple symbolic representations will hopefully add to the further development of cognitive theories on multimedia learning and positively impact the design of multimedia learning environments in STEM education.

References

Acevedo Nistal, A., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2012). What counts as a flexible representational choice? An evaluation of students' representational choices to solve linear function problems. *Instructional Science, 40*(6), 999–1019. doi:10.1007/s11251-011-9199-9

Ainsworth, S. E. (1999). A functional taxonomy of multiple representations. *Computers and Education, 33*, 131-152. doi: 10.1016/S0360-1315(99)00029-9

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183-198. doi: 10.1016/j.learninstruc.2006.03.001

Ainsworth, S. E. (2010). Improving learning by drawing. In S.R. Goldman, J. Pellegrino, K. Gomez, L. Lyons, & J. Radinsky (Eds.), *Learning in the disciplines: Proceedings of the 9th International conference of the Learning Sciences* (vol. 2, pp. 167-168). Chicago: International Society of the Learning Sciences.

Ainsworth, S. E. (2014). The multiple representation principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 464-486). New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139547369

Ainsworth, S., Bibby, P.A., & Wood, D.J. (1997). *Evaluating principles for multi-representational learning environments.* Paper presented at the 7th European conference for Research on Learning and Instruction, August, Athens.

Ainsworth, S. E., Bibby, P. A., & Wood, D. J. (1998) Analyzing the costs and benefits of multi-representational learning environments. In M. van Someren, H. P. A. Boshuizen, T. de Jong & T. P. Reimann (Eds.), *Learning with Multiple Representations* (pp.120-134). Oxford: Elsevier Science.

Ainsworth, S. E., Bibby, P., & Wood, D. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *Journal of the Learning Sciences 11*, 25-61. doi: 10.1207/S15327809JLS1101_2

Ainsworth, S. E. & Loizou, A.T. (2003). The effects of self-explaining when learning with text or diagrams. *Cognitive Science, 27* (4), 669-681. doi: 669–681. 10.1207/s15516709cog2704_5

Ainsworth, S. E., Wood, D., & O'Malley, C. (1998). There is more than one way to solve a problem: Evaluating a learning environment that supports the development of children's multiplication skills. *Learning and Instruction, 8*, 141-157. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00013-3

Alesandrini, K. L. (1981). Pictorial–verbal and analytic–holistic learning strategies in science learning. *Journal of Educational Psychology, 73*(3), 358-368. doi: 10.1037//0022-0663.73.3.358

Anderson, J.R. (1976). *Language, memory, and thought.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Anderson, J.R. (1990). *The adaptive character of thought.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Andrá, C., Lindström, P., Arzarello, F., Holmqvist, K., Robutti, O. & Sabena, C. (2015). Reading mathematics representations: An eye-tracking study. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(suppl. 2), 237-259. doi:10.1007/s10763-013-9484-y

Anzai, Y. (1991). Learning and use of representations for physics expertise. In: K. Anders-Ericsson, J. Smith (Eds.), *Towards a general theory of expertise: Prospects and limits.* Cambridge: Cambridge University Press.

Baranes, R., Perry, M., & Stigler, J. W. (1989). Activation of real-world knowledge in the solution of word problems. *Cognition and Instruction, 6,* 287-318. doi: 10.1207/s1532690xci0604_1

Beichner, R. J. (1990). The effect of simultaneous motion presentation and graph generation in a kinematics lab. *Journal of research in science teaching, 27* (8), 803-815. doi: 10.1002/tea.3660270809

Bennett, J. M. (2004). *Holt middle school math*. New York, NY: Holt Rinehart & Winston.

Bodemer, D., Ploetzner, R., Feuerlein, I., & Spada, H. (2004). The active integration of information during learning with dynamic and interactive visualizations. *Learning and Instruction, 14,* 325-341. doi: 10.1016/j.learninstruc.2004.06.006

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Reed, B. S., & Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal, 34*(4), 663-689. doi: 10.3102/00028312034004663

Brünken, R., Steinbacher, S., Schnotz, W., & Leutner, D. (2001). Mentale Modelle und Effekte der Präsentations- und Abrufkodalität beim Lernen mit Multimedia. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 15*, 15-27. doi: 10.1024//1010-0652.15.1.16

Butcher, K. R. (2006). Learning from text with diagrams: Promoting mental model development and inference generation. *Journal of Educational Psychology, 98* (1), 182-197. doi: 10.1037/0022-0663.98.1.182

Butcher, K. R. (2014). The Multimedia Principle. In R. E. Mayer (Ed.)*, The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 174-205). Cambridge: Cambridge University Press. doi: 10.1017/cbo9781139547369.010

Card, S. K., Mackinlay, J. D., & Shneiderman, B. (1999). *Readings in information visualization: using vision to think.* San Francisco: Morgan Kaufmann.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schlieman, A. D. (1987). Written and oral mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 83-97. doi: 10.2307/749244

Carpenter, P-A. & Shah, P. (1998). A model of the perceptual and conceptual processes in graph comprehension. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, *4* (2), 75-100. doi: 10.1037//1076-898x.4.2.75

Chandler, P., & Sweller, J. (1991). Cognitive load theory and the format of instruction. *Cognition and Instruction*, *8*, 293-332. doi: 10.1207/s1532690xci0804_2

Chandler, P., Sweller, J. (1992). The split-attention effect as a factor in the design of instruction. *British Journal of Educational Psychology, 62* (2), 233–246. doi: 10.1111/j.2044-8279.1992.tb01017.x

Chang, B.L., Cromley, J.G., & Tran, N. (2016). Coordinating multiple representations in a reform calculus textbook. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14* (8), 1475-1497. doi: 10.1007/s10763-015-9652-3

ChanLin, L. (2001). Formats and prior knowledge on learning in a computer-based lesson. *Journal of Computer Assisted Learning, 17* (4), 409–419. doi: 10.1046/j.0266-4909.2001.00197.x

Cheng, P.C.H. (1999). Unlocking conceptual learning in mathematics and science with effective representational systems. *Computers and Education*, 33 (2), 109-130. doi: 10.1016/s0360-1315(99)00028-7

Chi, M. T. H., Glaser, R., & Farr, M. J. (1988). *The nature of expertise*. Hillsdale, NJ: Erlbaum. doi: 10.4324/9781315799681

Clark, J.M. & Paivio, A. (1991). Dual Coding Theory and Education. *Educational Psychology Review, 3* (3), 149-210. doi: 10.1007/BF01320076

Cox, R., & Brna, P. (1998). Supporting the use of external representations in problem solving: the need for flexible learning environments. *Journal of Artificial Intelligence in Education*, *6*, 239-302.

Cronbach, L., & Snow, R. (1977). *Aptitudes and instructional methods: A handbook for research on interactions.* New York: Irvington.

Cuevas, H. M., Fiore, S. M., & Oser, R. L. (2002). Scaffolding cognitive and meta-cognitive processes in low verbal ability learners: Use of diagrams in computer-based training environments. *Instructional Science, 30* (6), 433-464. doi: 10.1023/A:1020516301541

Debellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 131-147. doi: 10.1007/s10649-006-9026-4

DeeLucas, D. & Larkin, J.H. (1991). Equations in scientific proofs: Effects on comprehension. *American Educational Research Journal, 28*, 661-682. doi: 10.2307/1163153

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, Hillsdale, NJ: NEA.

Dunn, R. & Dunn, K. (1993). *Teaching secondary students through their individual learning styles: Practical approaches for grades 7-12.* Boston: Allyn & Bacon.

Duval, R. (1988). Graphiques et équations: l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 235-253.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education. Vol. I, 3-26.

Duval, R. (2002). *Proof understanding in mathematics: What ways for students.* In: Proceedings of 2002 international conference on mathematics: Understanding proving to understand (pp. 61-77).

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Ericsson, K. A., & Smith, J. (1991). Prospects and limits of the empirical study of expertise: An introduction. In K. A. Ericsson & J. Smith (Eds.), *Toward a general theory of expertise: Prospects and limits (*pp. 1-38). New York: Cambridge University Press.

Fiorella, L., & Mayer, R. E. (2015). Eight ways to promote generative learning. *Educational Psychology Review*, *28*(4), 717–741. doi:10.1007/s10648-015-9348-9

Friedrich, L.A., Schmeck, A., Opfermann, M., & Leutner, D. (2013, April). *Computer-based visualizations as comprehension aids for science text learning.* Paper presented at the AERA Conference, San Francisco.

Geiger, M., Stradtmann, U., Vogel, M. & Seufert, T. (2011, August-September). *Transformations between different forms of representations in mathematics.* Paper Presented at the Biennial Meeting of the European Association for Research on Learning and Instruction, Exeter, England.

Geiger, M., Stradtmann, U., Vogel, M., & Seufert, T. (2012). *Transformationen zwischen mathematischen Repräsentationen: Welche Fähigkeiten haben Lernende?* Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Münster: WTM Verlag.

Gilmore, D.J., & Green, T.R.G. (1984). Comprehension and recall of miniature programs. *International Journal of Man–Machine Studies, 21* (1), 31–48. doi:10.1016/s0020-7373(84)80037-1

Glenberg, A. M., & Langston, W. E. (1992). Comprehension of illustrated text: Pictures help to build mental models. *Journal of Memory and Language, 31* (2), 129-151. doi:10.1016/0749-596x(92)90008-l

Gobert, J. D., & Clement, J. J. (1999). Effects of student-generated diagrams versus student-generated summaries on conceptual understanding of causal and dynamic knowledge in plate tectonics. *Journal of Research in Science Teaching, 36*(1), 39-53. doi:10.1002/(sici)1098-2736(199901)36:1<39::aid-tea4>3.0.co;2-i

Graesser, A.C., Millis, K.K., & Zwaan, R.A. (1997). Discourse comprehension. *Annual Review of Psychology, 48,* 163-189. doi:10.1146/annurev.psych.48.1.163

Grossen, B., & Carnine, D. (1990). Diagramming a logic strategy: Effects on difficult problem types and transfer. *Learning Disability Quarterly, 13*(3), 168-182. doi: 10.2307/1510699

Hake, S. (2004). *Saxon math 5/6.* Norman, OK: Saxon

Hall, V.C., Bailey, J., & Tillman, C. (1997). Can student-generated illustrations be worth ten thousand words? *Journal of Educational Psychology, 89*, 677-681. doi: 10.1037/0022-0663.89.4.677

Harrison, A.G. & Treagust, D.F. (2000). Learning about atoms, molecules, and chemical bonds: A case study of multiple-model use in grade 11 chemistry. *Science Education*, *84* (3), 352-381. doi: 10.1002/(sici)1098-237x(200005)84:3<352::aid-sce3>3.0.co;2-j

Hegarty, M. (2011). The cognitive science of visual-spatial displays: Implications for design. *Topics in cognitive science*, *3*(3), 446-474. doi:10.1111/j.1756-8765.2011.01150.x

Hitt, F. (2002). *Representations and mathematical visualization: PME-NA Working Group (1998-2002)*. Mexico City: Cinvestav-IPN.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of functions as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-72). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Kalyuga, S. (2011). Cognitive load theory: How many types of load does it really need? *Educational Psychology Review*, *23* (1), 1–19. doi:10.1007/s10648-010-9150-7

Kalyuga, S., Ayres, P., Chandler, P., & Sweller, J. (2003). The expertise reversal effect. *Educational psychologist*, *38* (1), 23-31. doi: 10.1207/S15326985EP3801_4

Kalyuga, S., Chandler, P., & Sweller, J. (1998). Levels of expertise and instructional design. *Human Factors, 40* (1), 1-17. doi: 10.1518/001872098779480587

Kalyuga, S. & Sweller, J. (2014). The Redundancy principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 247-262). Cambridge: Cambridge University Press. doi: 10.1017/cbo9781139547369.013

Kaput, J. J. (1987). Towards a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159-196). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: A paradigm for cognition*. New York, NY: Cambridge University Press.

Kintsch, W., & Van Dijk, T. A. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.

Koedinger, K., Alibali, M., & Nathan, M. (2008). Trade-offs between grounded and abstract representations: Evidence from algebra problem solving. *Cognitive Science: A Multidisciplinary Journal, 32*(2), 366–397. doi:10.1080/03640210701863933

Koedinger, K. R., & Anderson, J. R. (1990). Abstract planning and perceptual chunks: Elements of expertise in geometry. *Cognitive Science, 14,* 511–550. doi: 10.1207/s15516709cog1404_2

Koedinger, K. R., Anderson, J. R., Hadley, W. H., & Mark, M. A. (1997). Intelligent tutoring goes to school in the big city. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, *8,* 30–43.

Koedinger, K. R. & Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences*, *13*, 129-164. doi: 10.1207/s15327809jls1302_1

Kosslyn, S. M. (1994). *Image and brain*. Cambridge, MA: MIT Press.

Kozma, R. B. (1991). Learning with media. *Review of Educational Research, 61*(2), 179-211. doi: 10.3102/00346543061002179

Kozma, R., Chin, E., Russell, J., & Marx, N. (2000). The roles of representations and tools in the chemistry laboratory and their implications for chemistry learning. *Journal of the Learning Sciences, 9*(2), 105–143. doi:10.1207/s15327809jls0902_1

Kozma, R.B. & Russel, J. (1997). Multimedia and understanding: Expert and novice responses to different representations of chemical phenomena. *Journal of Research in Science Teaching, 34* (9), 949-968. doi: 10.1002/(sici)1098-2736(199711)34:9<949::aid-tea7>3.0.co;2-u

Kozma, R., & Russell, J. (2005). Students becoming chemists: Developing representational competence. *Visualization in science education, 1*, 121-145. doi:10.1007/1-4020-3613-2_8

Kress, G. R., & Van Leeuwen, T. (1996). *The grammar of visual design.* London: Routledge.

Kultusministerkonferenz. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012* [PDF file]. Berlin: Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. Retrived from http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science, 11*(1), 65–100. doi:10.1111/j.1551-6708.1987.tb00863.x

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1–64. doi:10.3102/00346543060001001

Leopold, C. (2009). *Lernstrategien und Textverstehen. Spontaner Einsatz und Förderung von Lernstrategien.* Münster: Waxmann.

Leopold, C., & Leutner, D. (2012). Science text comprehension: Drawing, main idea selection, and summarizing as learning strategies. *Learning and Instruction*, *22*(1), 16-26. doi: 10.1016/j.learninstruc.2011.05.005

Leopold, C., Sumfleth, E., & Leutner, D. (2013). Learning with summaries: Effects of representation mode and type of learning activity on comprehension and transfer. *Learning and Instruction, 27,* 40-49. doi: 10.1016/j.learninstruc.2013.02.003

Leppink, J., Paas, F., Van der Vleuten, C. P., Van Gog, T., & Van Merriënboer, J. J. (2013). Development of an instrument for measuring different types of cognitive load. *Behavior Research Methods, 45* (4), 1058-1072.

Leppink, J., Paas, F., Van Gog, T., Van der Vleuten, C. P. M., & Van Merriënboer, J. J. G. (2014). Effects of pairs of problems and examples on task performance and different types of cognitive load. *Learning and Instruction, 30* , 32–42. doi: 10.1016/j.learninstruc.2013.12.001

Leutner, D., Leopold, C., & Sumfleth, E. (2009). Cognitive load and science text comprehension: Effects of drawing and mentally imagining text content. *Computers in Human Behavior*, *25*(2), 284-289. doi: 10.1016/j.chb.2008.12.010

Levie, W. H., & Lentz, R. (1982). Effects of text illustrations: a review of research. *Educational Communication and Technology*, *30*, 195-232. doi:10.1007/BF02765184

Levin, J. R., Anglin, G. J., & Carney, R. N. (1987). On empirically validating functions of pictures in prose. In D. M. Willows & H. A. Houghton, (Eds.), *The Psychology of Illustration*, *1*, 51-86. doi:10.1007/978-1-4612-4674-9_2

Lithner, J. (2003). Students’ mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(1), 29–55. doi: 10.1023/A:1023683716659

Lockhart, R., & Craik, F.I.M. (1990). Levels of processing: A retrospective commentary on framework for memory research. *Canadian Journal of Psychology*, *44*, 87–112. doi: 10.1037/h0084237

Lowe, R. K. (1996). Background knowledge and the construction of a situational representation from a diagram. *European Journal of Psychology of Education*, *11*(4), 377-397. doi: 10.1007/bf03173279

Madden, S. P., Jones, L. L., & Rahm, J. (2011). The role of multiple representations in the understanding of ideal gas problems. *Chemistry Education Research and Practice, 12* (3), 283-293. doi: 10.1039/c1rp90035h

Maier, H., & Schweiger, F. (1999). Mathematik und Sprache. Wien: Öbv & hpt.

Mayer, R. E. (1997). Multimedia learning: Are we asking the right questions? *Educational psychologist, 32*, 1-19. doi: 10.1207/s15326985ep3201_1

Mayer, R. E. (2001). *Multimedia learning*. New York: Cambridge University Press.

Mayer, R. E. (2005). Cognitive theory of multimedia learning. In: Mayer, R.E. (Ed.). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning,* Cambridge: Cambridge University Press.

Mayer, R. E. (2009). *Multimedia learning* (2nd ed.). New York: Cambridge University Press. doi:10.1017/cbo9780511811678

Mayer, R. E. (2014). Cognitive theory of multimedia learning. In: Mayer, R.E. (Ed.). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning*, Cambridge: Cambridge University Press. doi: 10.1017/cbo9781139547369.005

Mayer, R. E., & Gallini, J. K. (1990). When is an illustration worth ten thousand words? *Journal of Educational Psychology, 82* (4), 715-726. doi: 10.1037//0022-0663.82.4.715

McNamara, D.S. (Ed.) (2007). *Reading comprehension strategies: Theories, interventions, and technologies.* New York: Lawrence Erlbaum.

Miller, G.A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review, 63* (2), 81-97. doi: 10.1037/h0043158

Mokros, J. R., & Tinker, R. F. (1987). The impact of microcomputer-based labs on children's ability to interpret graphs. *Journal of research in science teaching, 24* (4), 369-383. doi:10.1002/tea.3660240408

Müller, R., & Heise, E. (2006). Formeln in physikalischen Texten: Einstellung und Textverständnis von Schülerinnen und Schülern. *Physik und Didaktik in Schule und Hochschule, 2*, 62-70.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and Instruction, 18*, 207-235. doi: 10.1207/S1532690XCI1802_03

Nathan, M.J., Stephens, A.C., Masarik, D.K., Alibali, M.W., & Koedinger, K.R. (2002). Representational fluency in middle school: A classroom based study. In Mewborn, D., Szatain, P., White, D., Wiegel, H., Bryant, R., & Nooney, K. Columbus, O.H. (Eds), *Proceedings of the Twenty-fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

OECD. (2013). *“Mathematics Framework” in PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy* [PDF-file]. Paris: OECD Publishing. Doi: 10.1787/9789264190511-3-en

Ott. N., Malone, S., Vogel, M., & Brünken, R. (2015). *Ich sehe was, was Du nicht siehst: Expertiseabhängige Informationsverarbeitung mathematischer Notation.* Vortrag auf der 3. Tagung der Gesellschaft für Empirische Bildungsforschung (GEBF), Ruhr Universität Bochum.

Paas, F., & Sweller, J. (2014). Implications of cognitive load theory for multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 27-42). Cambridge: Cambridge University Press. doi: 10.1017/cbo9781139547369.004

Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding approach*. Oxford: Oxford University Press.

Palmer, S.E. (1978). Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch & B.B. Lloyd (Eds.), *Cognition and categorization* (pp. 259-303). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Parnafes, O., & Disessa, A. (2004). Relations between types of reasoning and computational representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9* (3), 251-280. doi: 10.1007/s10758-004-3794-7

Payne, S. J., & Squibb, H. R. (1990). Algebra mal-rules and cognitive accounts of error. *Cognitive Science, 14*, 445–491. doi: 10.1207/s15516709cog1403_4

Peirce, C.S. (1906). Prolegmena to an apology for pragmaticism. *The Monist,* 492-546.

Peterson, L., & Peterson, M. (1959). Short-term retention of individual verbal items. *Journal of Experimental Psychology, 58* (3), 193-198. doi: 10.1037/h0049234

Plass, J. L., Chun, D. M., Mayer, R. E., & Leutner, D. (1998). Supporting visual and verbal learning preferences in a second-language multimedia learning environment. *Journal of Educational Psychology*, *90*, 25-36. doi: 10.1037/0022-0663.90.1.25

Plass, J. L., Moreno, R., & Brünken, R. (2010). *Cognitive load theory*. New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/cbo9780511844744

Prain, V., & Waldrip, B. (2006). An exploratory study of teachers' and students' use of multi-modal representations of concepts in primary science. International *Journal of Science Education, 28* (15), 1843-1866. doi: 10.1080/09500690600718294

Rasco, R. W., Tennyson, R. D., & Boutwell, R. C. (1975). Imagery instructions and drawings in learning prose. *Journal of Educational Psychology, 67*(2), 188–192. doi:10.1037/h0077014

Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2009). Intelligent tutoring systems with multiple representations and self-explanation prompts support learning of fractions. In V. Dimitrova, R., Mizoguchi, & B. du Boulay (Eds.), *Proceedings of the 14th International Conference on Artificial Intelligence in Education* (pp. 441-448). Amsterdam, the Netherlands: IOS Press.

Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2015). Successful learning with multiple graphical representations and self-explanation prompts. *Journal of Educational Psychology, 107*, 30-46. doi: 10.1037/a0037211

Reed, S.K. (2010). *Thinking visually*. New York: Psychology Press. doi:10.4324/9780203848715

Rehm, M., & Vogel, M. (2013). Sprung in die „Andersweltlichkeit der Atome“. Unanschauliches in Modellen beschreiben und verstehen. *Pädagogik , 65*, 62-65.

Scaife, M., & Rogers, Y. (1996). External cognition: how do graphical representations work?. *International journal of human-computer studies, 45*(2), 185-213. doi: 10.1006/ijhc.1996.0048

Scanlon, E. (1998). How beginning students sure graphs of motion. In M. van Someren, P. Reimann, H. P. A. Boshuizen, & T. de Jong (Eds). *Learning with multiple representations*. (pp. 67-86). Oxford: Elsevier.

Schank, R., & Kozma, R. (2002). Learning chemistry through the use of a representation-based knowledge building environment. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 21 (3), 253-279.

Scheiter, K., Eitel, A., & Schüler, A. (2016). Lernen mit Texten und Bildern. Die frühzeitige wechselseitige Beeinflussung kognitiver Prozesse bei der Konstruktion eines integrierten mentalen Modells. *Psychologie Rundschau, 67*, 87-93. doi: 10.1026/0033-3042/a000300

Schmeck, A., Mayer, R. E., Opfermann, M., Pfeiffer, V., & Leutner, D. (2014). Drawing pictures during learning from scientific text: testing the generative drawing effect and the prognostic drawing effect. *Contemporary Educational Psychology, 39*(4), 275-286. doi: 0.1016/j.cedpsych.2014.07.003

Schmeck, A., Mayer , R. E., Opfermann, M., Pfeiffer, V., Sandmann, A., & Leutner, D. (2012, April). *Fostering generative learning activities during reading: An experimental test of the generative drawing principle and the prognostic drawing principle.* Paper presented at the AERA Conference, Vancouver.

Schnotz, W. (2001). Wissenserwerb mit Multimedia. *Unterrichtswissenschaft*, *29* (4), 292-318.

Schnotz, W. (2005). An integrated model of text and picture comprehension. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 49-69). New York: Cambridge University Press. doi: 10.1017/cbo9780511816819.005

Schnotz, W. (2014). Integrated model of text and picture comprehension. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (2nd edition, pp. 174 – 205). Cambridge: Cambridge University Press. doi: 10.1017/cbo9781139547369.006

Schnotz, W. & Bannert, M. (1999). Einflüsse der Visualisierungsform auf die Konstruktion mentaler Modelle beim Text- und Bildverstehen. *Zeitschrift für experimentelle Psychologie*, *46 (3)*, 217-236. doi: 10.1026//0949-3964.46.3.217

Schnotz, W. & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction, 13 (2)*, 141-156. doi: 10.1016/S0959-4752(02)00017-8

Schoenfeld, A.H., Smith, J.P., & Arcavi, A. (1993). Learning: The micro genetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. In: R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology*, Vol. 4, Hillsdale, NJ: LEA.

Schüler, A., Arndt, J., & Scheiter, K. (2015). Processing multimedia material: Does integration of text and pictures result in a single or two interconnected mental representations? *Learning and Instruction, 35*, 62-72. doi: 10.1016/j.learninstruc.2014.09.005

Schwamborn, A., Mayer, R. E., Thillmann, H., Leopold, C., & Leutner, D. (2010). Drawing as a generative activity and drawing as a prognostic activity. *Journal of Educational Psychology, 102(*4), 872. doi: 10.1037/a0019640

Schwamborn, A., Thillmann, H., Leopold, C., Sumfleth, E., & Leutner, D. (2010). Einsatz von vorgegebenen und selbst generierten Bildern als Textverstehenshilfe beim Lernen aus einem naturwissenschaftlichen Sachtext. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 24* (3-4), 221-233. doi: http://dx.doi.org/10.1024/1010-0652/a000018

Schwamborn, A., Thillmann, H., Opfermann, M., & Leutner, D. (2011). Cognitive load and instructionally supported learning with provided and learner-generated visualizations. *Computers in Human Behavior*, *27*(1), 89-93. doi: 10.1016/j.chb.2010.05.028

Schweppe, J., Eitel, A., & Rummer, R. (2015). The multimedia effect and its stability over time. *Learning and Instruction*, *38*, 24-33. doi: 10.1016/j.learninstruc.2015.03.001

Seufert, T. (2003a). *Wissenserwerb mit multiplen Repräsentationen: Wirksamkeit von Kohärenzbildungshilfen*. Berlin: Logos.

Seufert, T. (2003b). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learning and Instruction*, *13*, 227-237. doi: 10.1016/S0959-4752(02)00022-1

Slof, B., Erkens, G., Kirschner, P. A., & Helms-Lorenz, M. (2013). The effects of inspecting and constructing part-task-specific visualizations on team and individual learning. *Computers & Education*, *60*(1), 221-233. doi: 10.1016/j.compedu.2012.07.019

Spilich, G. J., Vesonder, G. T., Chiesi, H. L., & Voss, J. F. (1979). Text processing of domain-related information for individuals with high and low domain knowledge. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, *18*, 275-290. doi: 10.1016/s0022-5371(79)90155-5

Stenning, K., Cox, R., & Oberlander, J. (1995). Contrasting the cognitive effects of graphical and sentential logic teaching: Reasoning, representation and individual differences. *Language and Cognitive Processes*, 10(3-4), 333–354. doi:10.1080/01690969508407099

Stieff, M., Scopelitis, S., Lira, M. E. and Desutter, D. (2016). Improving representational competence with concrete models. *Science Education*, *100* (2), 344–363. doi:10.1002/sce.21203

Stull, A. T., Hegarty, M., Dixon, B., & Stieff, M. (2012). Representational translation with concrete models in organic chemistry. *Cognition and Instruction, 30* (4), 404-434. doi: 10.1080/07370008.2012.719956

Swan, M. (1985). *The language of functions and graphs.* Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive science*, *12*(2), 257-285. doi: 10.1207/s15516709cog1202_4

Sweller, J. (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educational Psychology Review, 22* (2), 123–138. doi: 10.1007/s10648-010-9128-5

Sweller, J. (2011). Cognitive load theory. In J. Mestre & B. Ross (Eds.), *The psychology of learning and motivation: Cognition in education* (vol. 55, pp. 37-76). Oxford: Academic Press. doi: 10.1016/b978-0-12-387691-1.00002-8

Sweller, J. (2012). Human cognitive architecture: Why some instructional procedures work and others do not. In K. Harris, S. Graham & T. Urdan (Eds.), *APA educational psychology handbook* (vol. 1, pp. 295-325). Washington, DC: American Psychology Association. doi: 10.1037/13273-011

Sweller, J., Ayres, P. I., Kalyuga, S., & Chandler, P.-A. (2003). The expertise reversal effect. *Educational Psychologist, 38*(1), 23-31. doi: 10.1207/s15326985ep3801_4

Sweller, J., Ayres, P. I., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory*. New York: Springer.

Sweller, J., van Merriënboer, J., & Paas, F. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review, 10,* 251-296. doi: 10.1023/A:1022193728205

Tabachneck, H.J.M., Koedinger, K.R., & Nathan, M.J. (1994, July). *Towards a theoretical account of strategy use and sense making in mathematical problem solving.* Paper presented at the 16 annual conference of the Cognitive Science Society, Atlanta, GA.

Tabachneck, H.J.M., & Simon, H.A. (1998). One person, multiple representations: an analysis of a simple, realistic multiple representation learning task. In: van Someren, M., Reimann, P., Boshuizen, H.P.A., & de Jong, T. (Eds), *Learning with multiple representations*. (pp. 67-86), Oxford: Elsevier.

Tapiero, I. (2001). The construction and updating of a spatial mental model from text and map: Effect of imagery and anchor. In: J.-F. Rouet, J.J. Levonen, A. Biardeau (Eds.), *Multimedia learning: Cognitive and instructional issues* (pp. 45-57). Amsterdam: Pergamon.

Tippett, C. D. (2016). What recent research on diagrams suggests about learning with rather than learning from visual representations in science. *International Journal of Science Education*, *38*(5), 725-746. doi: 10.1080/09500693.2016.1158435

Tirre, W.C., Manelis, L., & Leicht, K. (1979). The effects of imaginal and verbal strategies on prose comprehension by adults. *Journal of Reading Behavior, 11* (2), 99-106. doi: 10.1080/10862967909547313

Treagust, D. F., & Tsui, C. Y. (Eds.). (2013). *Multiple representations in biological education.* Springer Science & Business Media. doi:10.1007/978-94-007-4192-8

Tversky, B. (2011). Visualizing thought. *Topics in Cognitive Science*, *3*(3), 499-535. doi: 10.1111/j.1756-8765.2010.01113.x

Van der Meij, J., & de Jong, T. (2006). Supporting students' learning with multiple representations in a dynamic simulation-based learning environment. *Learning and Instruction, 16* (3), 199-212. doi: 10.1016/j.learninstruc.2006.03.007

Van der Meij, J., & de Jong, T. (2011). The effects of directive self-explanation prompts to support active processing of multiple representations in a simulation-based learning environment. *Journal of Computer Assisted Learning, 27* (5), 411-423. doi: 10.1111/j.1365-2729.2011.00411.x

Van Dijk, T. A., & Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension* (pp. 11-12). New York: Academic Press.

Van Meter, P., Aleksic, M., Schwartz, A., & Garner, J. (2006). Learner-generated drawing as a strategy for learning from content area text. *Contemporary Educational Psychology, 31*, 142-166. doi: 10.1016/j.cedpsych.2005.04.001

Van Meter, P., & Garner, J. (2005). The promise and practice of learner-generated drawing: Literature review and synthesis. *Educational Psychology Review, 17* (4), 285-325. doi: 10.1007/s10648-005-8136-3

Van Oostendorp, H., & Goldman, S.R. (Eds.) (1999). *The construction of mental representations during reading.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Van Someren, M.W., Reimann, P., Boshuizen, H.P.A., de Jong, T. (Eds.), *Learning with multiple representations.* Amsterdam: Pergamon.

Vekiri, I. (2002). What is the value of graphical displays in learning? *Educational Psychology Review*, *14*, 261-312. doi:10.1023/A:1016064429161

Vogel, M., & Seufert, T. (2012). *Support of reading graphs using multiple representations.* Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education – ICME-12, Seoul, Korea.

Ware, C. (2008). *Visual thinking for design.* San Francisco: Morgan Kaufmann.

Weaver, C. A., Mannes, S., & Fletcher, C. R. (1995). *Discourse comprehension: Essays in honor of Walter Kintsch. Hillsdale*, NJ: Lawrence Erlbaum. doi: 10.4324/9780203052921

Weidenmann, B. (2011). Multimedia, Multicodierung und Multimodalität beim Online-Lernen. In P. Klimsa,, L.J. Issing, (Eds.), *Online-Lernen. Handbuch für Wissenschaft und Praxis 2* (pp. 73-86).

Wittrock, M. C. (1974). Learning as a generative process 1. *Educational Psychologist*, *11*(2), 87-95. doi: 10.1080/00461527409529129

Wittrock, M. C. (1989). Generative processes of comprehension. *Educational psychologist*, *24*(4), 345-376. doi: 10.1207/s15326985ep2404_2

Yerushalmy, M. (1991). Student perceptions of aspects of algebraic function using multiple representation software. *Journal of Computer Assisted Learning, 7* (1), 42-57. doi: 10.1111/j.1365-2729.1991.tb00223.x

Appendices

Appendix A: Study 1

Table 15
Discrimination index, index of difficulty and phi coefficient for all pretest items

Item	Discrimination Index (overall)	Index of Difficulty (overall)	Phi coefficient (significance) (overall)
01	,050	92.6	-.109 (.122)
02	,178	81.3	.040 (.566)
03	,083	95.6	-.006 (.933)
04	,108	40.4	-.009 (.901)
05	,131	53.2	-.030 (.667)
06	,186	74.4	-.019 (.791)
07a	,201	81.3	.218 (.002)
07b	,299	77.3	.258 (.000)
08a	,283	83.3	.038 (.591)
08b	,218	59.1	.261 (.000)
09a	,217	82.3	.117 (.096)
09b	,157	32.0	.186 (.008)
10	,274	95.1	.202 (.004)
11	,265	56.2	.064 (.360)
12	,291	49.8	.164 (.020)
13	,217	87.2	.121 (.085)

14	,275	92.1	.135 (.055)
15	,306	82.8	.078 (.269)
16a	,306	40.9	.141 (.044)
16b	,298	53.7	.395 (.000)
17a	,373	45.3	.202 (.004)
17b	,216	60.6	.290 (.000)
18a	,240	82.3	.143 (.042)
18b	,424	62.6	.555 (.000)
19a	,333	98.0	.083 (.237)
19b	,275	97.5	.109 (.120)
20a	,230	75.4	.163 (.020)
20b	,176	89.2	.125 (.076)
21a	,406	80.3	.191 (.007)
21b	,302	69.5	.120 (.087)
22a	,492	87.7	.227 (.001)
22b	,102	39.4	-.108 (.123)
23a	,405	91.1	.165 (.018)
23b	,167	45.8	.151 (.032)
24	,436	95.6	.234 (.001)
25	,289	85.2	.174 (.013)
26	,397	85.2	.258 (.000)
27a	,411	86.2	.320 (.000)
27b	,433	84.7	.242 (.001)
28a	,416	93.6	.204 (.004)
28b	,361	56.7	.612 (.000)

29a	,340	73.4	.274 (.000)
29b	,354	89.2	.093 (.186)
30a	,401	35.0	.198 (.005)
30b	,406	69.0	.366 (.000)
31a	,521	60.6	.290 (.000)
31b	,505	70.0	.238 (.001)

Table 16
Descriptive details and significances of conducted t-test of the analysis for both test versions A and B

	Version	***N***	***M***	***SD***	***Significance***
Translation textual to formal	A	119	,57	,21	.004
	B	117	,64	,20	
Translation formal to textual	A	119	,67	,23	.000
	B	117	,57	,20	
Rating textual to formal	A	119	,54	,21	.001
	B	117	,63	,20	
Rating formal to textual	A	119	,63	,22	.000
	B	117	,50	,20	

Appendix B: Study 2

Table 17

Sample of the versions A, B and C used in the test (translated from the original German)

<table>
<tr><th>Version</th><th>Sample</th></tr>
<tr><td>A

(from textual

to formal

writing)</td><td>a) Translate the given expression into formal writing.

b) Rate the given mathematical statement as true (t) or false (f).

<table>
<tr><th>Textual writing</th><th>Formal writing</th><th>t/f</th></tr>
<tr><td>For all natural numbers x and y, the greatest common divisor of the product of the two numbers and y is equal to y.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>For all natural numbers a, there exists a natural number b, which is by 4 smaller than a.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>There exists a natural number z, so that this number multiplied by 7 equals 12.</td><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
</table>

B (from formal to textual writing)	a) Translate the given expression into textual writing. b) Rate the given mathematical statement as true (t) or false (f).

Formal writing	Textual writing	t/f
$\forall_{x,y \in IN} \operatorname{gcd}(y \cdot x, y) = y$		
$\forall_{a \in IN} \exists_{b \in IN} b = a - 4$		
$\exists_{z \in IN} z \cdot 7 = 12$		

C (both repre- sentations given)	a) Rate the given mathematical statement as true (t) or false (f).

Formal writing	Textual writing	t/f
$\forall_{x,y \in IN} \operatorname{gcd}(y \cdot x, y) = y$	For all natural numbers x and y, the greatest common divisor of the product of the two numbers and y is equal to y.	
$\forall_{a \in IN} \exists_{b \in IN} b = a - 4$	For all natural numbers a, there exists a natural number b, which is by 4 smaller than a.	
$\exists_{z \in IN} z \cdot 7 = 12$	There exists a natural number z, so that this number multiplied by 7 equals 12.	

Appendix C: Study 3

Table 18
Discrimination index, index of difficulty and phi coefficient for all pilot study items

Item	Discrimination Index[1]	Index of Difficulty	Phi coefficient (significance)
A1[2]	.32	76.9	.10 (.53)
A2	.22	20.5	.49 (.00)
A3	.44	33.3	.23 (.14)
A4	.44	35.9	-.04 (.82)
A5	.37	5.1	.10 (.55)
B1[2]	.38	9.5	.10 (.53)
B2[2]	.40	14.3	-.02 (.90)
B3[2]	.69	2.4	.21 (.17)
B4[2]	.51	9.5	.27 (.09)
B5[2]	.47	7.1	-.01 (.93)
C1	.67	42.2	.12 (.43)
C2	.45	22.2	.39 (.01)
C3	.71	22.2	.27 (.07)
C4	.35	71.1	.06 (.67)

C5	.46	15.6	.32 (.03)
D1	.55	64.1	.00 (.99)
D2	.11	20.5	.02 (.92)
D3	.61	28.2	.01 (.97)
D4	.36	46.2	.17 (.30)
D5	.70	30.8	-.04 (.82)
E1	.22	31.9	.05 (.72)
E2	.41	14.9	.25 (.09)
E3	.50	31.9	.05 (.72)
E4	.38	25.5	-.06 (.67)
E5	.42	23.4	.19 (.19)

Note: [1]Discrimination indices were conducted for each item subset separately. Internal consistencies: Subset A = .587; B = .694; C=.753; D=.699; E=.624.

[2]Item excluded for main study.

Table 19
Complete sample of the structure of each math problem used in the test

Structure	**Sample**
Instruction	Given is the set M1 containing the points a, b, c, and d, each can be either filled or not filled. Which points have to be filled in order to make the given assertion true? Here P(x) means ‘x is filled’.
Representation of the problem	Single or multiple representations of formula, text and graphic
Multiple-choice answer format	• Only a is filled. • Only c is filled. • Exactly a and b are filled. • Exactly b and c are filled. • Exactly a, b, and c are filled. • Exactly a, b, and d are filled. • None of the points is filled. • Every point is filled.

Table 20
Results of item analysis

	Discrimination index	Index of difficulty
Math problem # 1	.39	73.4
Math problem # 2	.42	71.4
Math problem # 3	.53	49.4
Math problem # 4	.54	31.2
Math problem # 5	.62	60.4
Math problem # 6	.39	39.0
Math problem # 7	.68	68.8
Math problem # 8	.46	68.2
Math problem # 9	.38	87.0
Math problem # 10	.49	70.8
Math problem # 11	.61	49.4
Math problem # 12	.39	64.9
Math problem # 13	.41	77.3
Math problem # 14	.54	42.9
Math problem # 15	.53	79.2
Math problem # 16	.53	54.5

Math problem # 17	.64	58.8
Math problem # 18	.64	73.2
Math problem # 19	.57	59.1

Table 21
Results of paired comparison between all individual groups (Scheffé test)

Group	Comparison Group	Significance
Group 1 (formula only)	Group 2 (text only)	,672
	Group 3 (formula and text)	,005
	Group 4 (formula and graphic)	,886
	Group 5 (text and graphic)	,000
	Group 6 (text, formula and graphic)	,003
Group 2 (text only)	Group 1 (formula only)	,672
	Group 3 (formula and text)	,331
	Group 4 (formula and graphic)	,999
	Group 5 (text and graphic)	,008
	Group 6 (text, formula and graphic)	,225
Group 3 (formula and text)	Group 1 (formula only)	,005
	Group 2 (text only)	,331
	Group 4 (formula and graphic)	,170
	Group 5 (text and graphic)	,711
	Group 6 (text, formula and graphic)	1,000

Group 4 (formula and graphic)	Group 1 (formula only)	,886
	Group 2 (text only)	,999
	Group 3 (formula and text)	,170
	Group 5 (text and graphic)	,003
	Group 6 (text, formula and graphic)	,110
Group 5 (text and graphic)	Group 1 (formula only)	,000
	Group 2 (text only)	,008
	Group 3 (formula and text)	,711
	Group 4 (formula and graphic)	,003
	Group 6 (text, formula and graphic)	,902
Group 6 (text, formula and graphic)	Group 1 (formula only)	,003
	Group 2 (text only)	,225
	Group 3 (formula and text)	1,000
	Group 4 (formula and graphic)	,110
	Group 5 (text and graphic)	,902

Appendix D: Complete set of math problems used for study 1 (in German)

Part 1: Pretest math problems

Aufgabe 1

Gegeben sind folgende formale Ausdrücke und ihre Versprachlichung.

Arbeitsauftrag:

Überprüfen Sie, ob die jeweilige Übersetzung dem Sinn nach (d.h. die Übersetzung muss nicht wörtlich sein) richtig ist mit w (= wahr) oder f (= falsch).

a) Gegeben sind folgende Aussagen:
A: Die Sonne geht auf. B: Die Arbeit beginnt. C: Es ist warm.

	Verbal	Formal	Bewertung (w/f)
01	Die Sonne geht nicht auf und die Arbeit beginnt.	$(\neg A) \wedge B$	
02	Die Sonne geht unter.	$\neg A$	
03	Wenn die Arbeit nicht beginnt, dann ist es nicht warm.	$\neg B \Rightarrow \neg C$	

b) Das einfache zweistellige Prädikat xBy soll für „x belügt y“ (x,y seien Elemente aus der Menge Menschen) stehen.

	Formal	Verbal	Bewertung (w/f)
04	$\forall x: xBx$	Alle belügen alle.	
05	$\forall x \exists y: yBx$	Jeder wird von irgendjemandem belogen.	
06	$\exists x \forall y: xBy$	Jemand belügt alle.	

Aufgabe 2

Gegeben sind folgende formale Ausdrücke und ihre Versprachlichung.

(ggT = größter gemeinsamer Teiler; kgV = kleinstes gemeinsames Vielfaches)

Arbeitsauftrag:

a) Überprüfen Sie, ob die jeweilige Übersetzung dem Sinn nach (d.h. die Übersetzung muss nicht wörtlich sein) richtig ist mit w (= wahr) oder f (= falsch).
b) Überprüfen Sie, ob der mathematische Gehalt des formalen Ausdrucks richtig ist mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Formal	Verbal	Bewertung Überset-zung (w/f)	Bewer-tung math. Gehalt (w/f)
07	$\underset{a,b\in IN}{\forall} ggT(a,b)=1 \Rightarrow kgV(a,b)=a\cdot b$	Für alle natürliche Zahlen a und b gilt, dass wenn a und b keinen gemeinsamen Teiler außer 1 haben, daraus folgt, dass sich ihr kgV aus dem Produkt der beiden Zahlen berechnet.		
08	$\underset{a,b\in IN}{\forall} ggT(a,b)\leq kgV(a,b)$	Das kgV zweier beliebiger natürlicher Zahlen a und b ist immer größergleich dem ggT dieser beiden Zahlen a und b.		
09	$\underset{x\in IN}{\exists}\ \underset{y\in IN}{\forall}\ x\leq y$	Es gibt eine größte natürliche Zahl y.		

Aufgabe 3

Das einfache zweistellige Prädikat xGy soll für „x gratuliert y“ (x,y seien Elemente aus der Menge Menschen) stehen.

Arbeitsauftrag:

Ordnen Sie einander entsprechende Ausdrücke richtig zu. Beachten Sie, dass es überzählig viele formale Ausdrücke gibt, aber nur jeweils eine Antwort ist richtig.

	Verbal	Formal
10	Jemand gratuliert sich selbst.	
11	Jeder gratuliert jemandem.	
12	Jemandem wird von allen gratuliert.	

a) $\forall x \exists y: xGy$ b) $\forall x \forall y: yGx$ c) $\forall x \exists y: yGx$ d) $\exists x: xGx$

e) $\exists x \exists y: xGy$ f) $\forall x \forall y: xGy$ g) $\exists x \forall y: yGx$ h) $\exists x \forall y: xGy$

Aufgabe 4

Gegeben sind folgende Aussagen:

A: Der Herbst ist trocken. *B:* Der Wein ist billig.

Übersetzen Sie in umgangssprachliche Formulierungen.

	Formal	Verbal
13	$A \Rightarrow \neg B$	
14	$\neg B \wedge A$	
15	$(\neg A) \vee (\neg B)$	

Aufgabe 5

Gegeben sind folgende Aussagen:

a) Drücken Sie den symbolischen Ausdruck in einem Satz aus.
b) Bewerten Sie die Gesamtaussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Aussage	Sprachlich formuliert	w/f
16	$\underset{x \in IN}{\forall}\ \underset{y \in IN}{\exists}\ x < y$		
17	$\underset{a,b \in IN}{\forall} kgV(a,b) \cdot ggT(a,b) = a \cdot b$		

Aufgabe 6

Gegeben sind folgende Aussagen und ihr Wahrheitsgehalt (wahr (w) bzw. falsch (f)):

A: 2 ist die kleinste Primzahl. (w) *B:* 4^2 ist gleich 15. (f) *C:* 5 ist größer als 3. (w)

a) Drücken Sie den symbolischen Ausdruck in einem Satz aus.
b) Bewerten Sie die Gesamtaussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Gesamtaussage	Sprachliche Formulierung	w / f
18	$A \vee B$		
19	$\neg B$		
20	$A \Rightarrow \neg C$		

Aufgabe 7

In der folgenden Aufgabe stehen die Variablen i, j und k für natürliche Zahlen.

Arbeitsauftrag:

a) Ordnen Sie einander entsprechende Ausdrücke richtig zu. Beachten Sie, dass es überzählig viele verbale Ausdrücke gibt, aber nur jeweils eine Antwort ist richtig.
b) Beurteilen Sie den Wahrheitsgehalt der Aussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Formal	Verbal	w/f
21	$\exists_{i,j\in IN} \exists_{k\in IN} (i<k)\wedge(i+j>k)$		
22	$\exists_{i,j\in IN} \forall_{k\in IN} (i>k)\wedge(i\cdot j>k)$		
23	$\forall_{i,j\in IN} \exists_{k\in IN} (i<k)\wedge(i+j<k)$		

a) Für alle natürliche Zahlen i und j gibt es eine natürliche Zahl k, die größer ist als i oder die kleiner ist als das Produkt von i und j.
b) Für alle natürliche Zahlen i und j gibt es eine natürliche Zahl k, die größer ist als i und die größer ist als die Summe von i und j.
c) Es gibt jeweils eine natürliche Zahl i und j, für die es eine natürliche Zahl k gibt, die größer ist als i und die kleiner ist als die Summe von i und j.
d) Für alle natürliche Zahlen i und j gibt es eine natürliche Zahl k, die kleiner ist als i und die größer ist als das Produkt von i und j.
e) Es gibt jeweils eine natürliche Zahl i und j, für die für alle natürliche Zahlen k gilt, dass k kleiner ist als i und das Produkt von i und j größer ist als k.
f) Es gibt jeweils eine natürliche Zahl i und j, für die für alle natürliche Zahlen k gilt, dass k größer ist als i und die Summe von i und j größer ist als k.
g) Es gibt jeweils eine natürliche Zahl i und j, für die es eine natürliche Zahl k gibt, die kleiner ist als i oder die kleiner ist als die Summe von i und j.

Aufgabe 8

Gegeben sind folgende Aussagen:

A: Er macht den Abwasch. B: Sie entsorgt den Müll.

Übersetzen Sie in symbolische Schreibweise.

	Aussage	Symbolische Schreibweise
24	Er macht den Abwasch und sie entsorgt den Müll.	
25	Wenn sie den Müll entsorgt, dann macht er nicht den Abwasch.	
26	Sie entsorgt nicht den Müll oder er macht den Abwasch.	

Aufgabe 9

Gegeben sind folgende Aussagen und ihr Wahrheitsgehalt (w/f):

A: 5 ist eine ungerade Zahl. (w) B: 7 ist kleiner als 8.(w) C: 1 ist eine Primzahl (f)

a) Übersetzen Sie in symbolische Schreibweise.
b) Bewerten Sie die Gesamtaussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Sprachliche Formulierung	Symbolische Schreibweise	w / f
27	7 ist kleiner als 8 und 1 ist eine Primzahl.		
28	Wenn 1 eine Primzahl ist, dann ist 5 eine ungerade Zahl.		
29	7 ist größergleich 8.		

Aufgabe 10

Gegeben sind folgende Aussagen:

a) Übersetzen Sie in symbolische Schreibweise.
b) Bewerten Sie die Gesamtaussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Sprachlich formuliert	Symbolische Schreibweise	w/f
30	Für alle natürliche Zahlen x gibt es eine natürliche Zahl y, die um 7 größer ist als x.		
31	Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt, dass der ggT von a und b größer ist als die Summe aus a und b.		

Part 2: Main study math problems presented in both versions (A and B)

Version A

Aufgabe 1

Gegeben sind folgende formale bzw. verbale Ausdrücke und ihre jeweilige Übersetzung.
(ggT = größter gemeinsamer Teiler; kgV = kleinstes gemeinsames Vielfaches)

Arbeitsauftrag:

1.1 Überprüfen Sie, ob die jeweilige Übersetzung dem Sinn nach (d.h. die Übersetzung muss nicht wörtlich sein) richtig ist mit w (= wahr) oder f (= falsch).
1.2 Überprüfen Sie, ob der mathematische Gehalt des formalen Ausdrucks richtig ist mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Formal	Verbal	Bewertung Überset-zung (w/f) (1.1)	Bewer-tung math. Gehalt (w/f) (1.2)
01	$\underset{a,b\in IN}{\forall} kgV(a,b)=a\cdot b \Rightarrow ggT(a,b)=1$	Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt, dass wenn sich ihr kgV aus dem Produkt der beiden Zahlen berechnet daraus folgt, dass a und b keinen gemeinsamen Teiler außer 1 haben.		

	Verbal	Formal	Bewertung Überset-zung (w/f)	Bewer-tung math. Gehalt (w/f)
02	Es gibt immer eine natürliche Zahl y die kleiner ist als eine beliebige andere natürliche Zahl x.	$\underset{x\in IN}{\forall}\ \underset{y\in IN}{\exists}\ x>y$		
03	Es gibt natürliche Zahlen a und b, deren ggT nicht ihrem kgV gleicht.	$\underset{a,b\in IN}{\neg\exists}\ ggT(a,b)=kgV$		

Aufgabe 2

Das einfache zweistellige Prädikat xBy soll für „x begrüßt y" (x,y seien Elemente aus der Menge Menschen) stehen.

2.1 Ordnen Sie einander entsprechende Ausdrücke richtig zu. Beachten Sie, dass mehr formale Ausdrücke zur Auswahl stehen, aber nur jeweils eine Antwort richtig ist.

	Verbal	Formal
04	Jeder wird von jemandem begrüßt.	

a) $\forall x \exists y: xBy$ b) $\forall x \forall y: yBx$ c) $\forall x \exists y: yBx$ d) $\exists x \exists y: yBx$

e) $\exists x \exists y: xBy$ f) $\forall x \forall y: xBy$ g) $\exists x \forall y: yBx$ h) $\exists x \forall y: xBy$

2.2 Ordnen Sie einander entsprechende Ausdrücke richtig zu. Beachten Sie, dass mehr verbale Ausdrücke zur Auswahl stehen, aber nur jeweils eine Antwort richtig ist.

	Formal	Verbal
05	$\exists x \exists y: yBx$	
06	$\exists x \forall y: xBy$	
07	$\forall x \forall y: xBy$	

a) Jeder begrüßt jemanden.
b) Jeder wird von jedem begrüßt.
c) Jeder wird von jemandem begrüßt.
d) Jemand wird von jemandem begrüßt.
e) Jemand begrüßt jemanden.
f) Jeder begrüßt jeden.
g) Jemand wird von allen begrüßt.
h) Jemand begrüßt alle.

Aufgabe 3

Gegeben sind folgende Aussagen:

A: Die Klasse ist leise. *B:* Der Lehrer ist gut gelaunt.

3.1 Versprachlichen Sie die formalen Aussagen.

	Formal	Verbal
08	$B \Leftrightarrow A$	

3.2Übersetzen Sie in symbolische Schreibweise.

	Verbal	Formal
09	Die Klasse ist nicht leise und der Lehrer ist nicht gut gelaunt.	

Aufgabe 4

4.1 Ordnen Sie einander entsprechende Ausdrücke richtig zu. Beachten Sie, dass es mehr verbale Ausdrücke gibt, aber nur jeweils eine Antwort ist richtig.

4.2 Beurteilen Sie den Wahrheitsgehalt der Aussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Formal	Verbal	w/f
10	$\neg \underset{i,j \in IN}{\exists} \underset{k \in IN}{\exists} (i < k) \wedge (i + j > k)$		
11	$\underset{i,j \in IN}{\exists} \underset{k \in IN}{\forall} (i < k) \wedge (i \cdot j > k)$		

h) Für alle natürliche Zahlen i und j gibt es keine natürliche Zahl k, die kleiner ist als i und die kleiner ist als das Produkt von i und j.

i) Für alle natürliche Zahlen i und j gibt es eine natürliche Zahl k, die kleiner ist als i und die größer ist als das Produkt von i und j.

j) Es gibt keine natürlichen Zahlen i und j, für die es eine natürliche Zahl k gibt, die größer ist als i und die kleiner ist als die Summe von i und j.

k) Für alle natürliche Zahlen i und j gibt es keine natürliche Zahl k, die kleiner ist als i und die größer ist als das Produkt von i und j.

l) Es gibt jeweils eine natürliche Zahl i und j, für die für alle natürliche Zahlen k gilt, dass k größer ist als i und das Produkt von i und j größer ist als k.

m) Es gibt jeweils eine natürliche Zahl i und j, für die für alle natürliche Zahlen k gilt, dass k größer ist als i und die Summe von i und j größer ist als k.

n) Es gibt jeweils eine natürliche Zahl i und j, für die es keine natürliche Zahl k gibt, die kleiner ist als i oder die kleiner ist als die Summe von i und j.

Aufgabe 5

5.1 Ordnen Sie einander entsprechende Ausdrücke richtig zu. Beachten Sie, dass es mehr formale Ausdrücke gibt, aber nur jeweils eine Antwort ist richtig.
5.2 Beurteilen Sie den Wahrheitsgehalt der Aussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Verbal	Formal	w/f
12	Für alle natürliche Zahlen i und j gibt es keine natürliche Zahl k, die kleiner ist als i und die größer ist als das Produkt von i und j		

a) $\underset{i,j\in IN}{\forall}\ \neg\underset{k\in IN}{\exists}(i>k)\wedge(i\cdot j>k)$

b) $\underset{i,j\in IN}{\forall}\ \underset{k\in IN}{\exists}(i>k)\wedge(i\cdot j<k)$

c) $\neg\underset{i,j\in IN}{\exists}\ \underset{k\in IN}{\exists}(i<k)\wedge(i+j>k)$

d) $\underset{i,j\in IN}{\forall}\ \neg\underset{k\in IN}{\exists}(i>k)\wedge(i\cdot j>k)$

e) $\underset{i,j\in IN}{\exists}\ \underset{k\in IN}{\forall}(i<k)\wedge(i\cdot j>k)$

f) $\underset{i,j\in IN}{\exists}\ \underset{k\in IN}{\forall}(i<k)\wedge(i+j>k)$

g) $\underset{i,j\in IN}{\exists}\ \neg\underset{k\in IN}{\exists}(i>k)\vee(i+j>k)$

Aufgabe 6

6.1 Übersetzen Sie in symbolische Schreibweise.
6.2 Bewerten Sie die Gesamtaussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Sprachlich formuliert	Symbolische Schreibweise	w/f
13	Für alle natürlichen Zahlen x und y gilt, dass der ggT vom Produkt dieser beiden Zahlen und y gleich y ist.		
14	Für alle natürlichen Zahlen a gibt es eine natürliche Zahl b, die um 4 kleiner ist als a.		
15	Es gibt eine natürliche Zahl z für die gilt, dass das Siebenfache dieser Zahl 12 ergibt.		

Aufgabe 7

Gegeben sind folgende Aussagen und ihr Wahrheitsgehalt (w/f):

A: 0 teilt jede Zahl (f) B: 5 ist größer als 6 (f) C: 14 ist eine gerade Zahl (w)

7.1 Übersetzen Sie in sprachliche Formulierung.
7.2 Bewerten Sie die Gesamtaussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Formal	Verbal	w / f
16	$\neg A \wedge B$		
17	$(\neg C) \wedge A \wedge (\neg B)$		

7.3 Übersetzen Sie in symbolische Schreibweise.
7.4 Bewerten Sie die Gesamtaussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Verbal	Formal	w / f
18	Wenn 14 eine gerade Zahl ist und 5 größer als 6 ist, dann teilt 0 nicht jede Zahl.		
19	14 ist eine ungerade Zahl.		

Version B

Aufgabe 1

Gegeben sind folgende verbale bzw. formale Ausdrücke und ihre jeweilige Übersetzung.

(ggT = größter gemeinsamer Teiler; kgV = kleinstes gemeinsames Vielfaches)

Arbeitsauftrag:

1.1 Überprüfen Sie, ob die jeweilige Übersetzung dem Sinn nach richtig ist mit w (= wahr) oder f (= falsch).

1.2 Überprüfen Sie, ob der mathematische Gehalt des formalen Ausdrucks richtig ist mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Verbal	Formale Übersetzung	Bewertung Überset-zung (w/f) (1.1)	Bewer-tung math. Gehalt (w/f) (1.2)
01	Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt, dass wenn sich ihr kgV aus dem Produkt der beiden Zahlen berechnet daraus folgt, dass a und b keinen gemeinsamen Teiler außer 1 haben.	$\underset{a,b\in IN}{\forall} kgV(a,b) = a \cdot b \Rightarrow ggT(a,b) = 1$		

	Formal	Verbale Übersetzung	Bewertung Überset-zung (w/f) (1.1)	Bewer-tung math. Gehalt (w/f) (1.2)
02	$\underset{x\in IN}{\forall} \underset{y\in IN}{\exists} x > y$	Es gibt immer eine natürliche Zahl y die kleiner ist als eine beliebige andere natürliche Zahl x.		
03	$\underset{a,b\in IN}{\neg\exists} ggT(a,b) = kgV(a,b)$	Es gibt natürliche Zahlen a und b, deren ggT nicht ihrem kgV gleicht.		

Aufgabe 2

Das einfache zweistellige Prädikat xBy soll für „x begrüßt y" (x,y seien Elemente aus der Menge Menschen) stehen.

2.1 Ordnen Sie einander entsprechende Ausdrücke richtig zu. Beachten Sie, dass mehr verbale Ausdrücke zur Auswahl stehen, aber nur jeweils eine Antwort richtig ist.

	Formal	Verbal
04	$\forall x \exists y: yBx$	

a) Jeder begrüßt jemanden.
b) Jeder wird von jedem begrüßt.
c) Jeder wird von jemandem begrüßt.
d) Jemand wird von jemandem begrüßt.
e) Jemand begrüßt jemanden.
f) Jeder begrüßt jeden.
g) Jemand wird von allen begrüßt.
h) Jemand begrüßt alle.

2.2 Ordnen Sie einander entsprechende Ausdrücke richtig zu. Beachten Sie, dass mehr formale Ausdrücke zur Auswahl stehen, aber nur jeweils eine Antwort richtig ist.

	Verbal	Formal
05	Jemand wird von jemandem begrüßt.	
06	Jemand begrüßt alle.	
07	Jeder begrüßt jeden.	

a) $\forall x \exists y: xBy$
b) $\forall x \forall y: yBx$
c) $\forall x \exists y: yBx$
d) $\exists x \exists y: yBx$
e) $\exists x \exists y: xBy$
f) $\forall x \forall y: xBy$
g) $\exists x \forall y: yBx$
h) $\exists x \forall y: xBy$

Aufgabe 3

Gegeben sind folgende Aussagen:

A: Die Klasse ist leise. *B:* Der Lehrer ist gut gelaunt.

3.1 Übersetzen Sie in symbolische Schreibweise.

	Verbal	Formal
08	Genau dann, wenn der Lehrer gut gelaunt ist, ist die Klasse leise.	

3.2 Versprachlichen Sie die formalen Aussagen.

	Formal	Verbal
09	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	

Aufgabe 4

4.1 Ordnen Sie einander entsprechende Ausdrücke richtig zu. Beachten Sie, dass es mehr formale Ausdrücke gibt, aber nur jeweils eine Antwort ist richtig.

4.2 Beurteilen Sie den Wahrheitsgehalt der Aussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Verbal	Formal	w/f
10	Es gibt keine natürlichen Zahlen i und j, für die es eine natürliche Zahl k gibt, die größer ist als i und die kleiner ist als die		
11	Es gibt jeweils eine natürliche Zahl i und j, für die für alle natürliche Zahlen k gilt, dass k größer ist als i und das Produkt von i und j größer ist als k.		

a) $\underset{i,j\in IN}{\forall}\ \neg\underset{k\in IN}{\exists}(i>k)\wedge(i\cdot j>k)$

b) $\underset{i,j\in IN}{\forall}\ \underset{k\in IN}{\exists}(i>k)\wedge(i\cdot j<k)$

c) $\neg\underset{i,j\in IN}{\exists}\ \underset{k\in IN}{\exists}(i<k)\wedge(i+j>k)$

d) $\underset{i,j\in IN}{\forall}\ \neg\underset{k\in IN}{\exists}(i>k)\wedge(i\cdot j>k)$

e) $\underset{i,j\in IN}{\exists}\ \underset{k\in IN}{\forall}(i<k)\wedge(i\cdot j>k)$

f) $\underset{i,j\in IN}{\exists}\ \underset{k\in IN}{\forall}(i<k)\wedge(i+j>k)$

g) $\underset{i,j\in IN}{\exists}\ \neg\underset{k\in IN}{\exists}(i>k)\vee(i+j>k)$

Aufgabe 5

5.1 Ordnen Sie einander entsprechende Ausdrücke richtig zu. Beachten Sie, dass es mehr verbale Ausdrücke gibt, aber nur jeweils eine Antwort ist richtig.
5.2 Beurteilen Sie den Wahrheitsgehalt der Aussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Formal	Verbal	w/f
12	$\underset{i,j\in IN}{\forall}\ \neg\underset{k\in IN}{\exists}(i>k)\wedge(i\cdot j<k)$		

o) Für alle natürliche Zahlen i und j gibt es keine natürliche Zahl k, die kleiner ist als i und die kleiner ist als das Produkt von i und j.
p) Für alle natürliche Zahlen i und j gibt es eine natürliche Zahl k, die kleiner ist als i und die größer ist als das Produkt von i und j.
q) Es gibt keine natürlichen Zahlen i und j, für die es eine natürliche Zahl k gibt, die größer ist als i und die kleiner ist als die Summe von i und j.
r) Für alle natürliche Zahlen i und j gibt es keine natürliche Zahl k, die kleiner ist als i und die größer ist als das Produkt von i und j.
s) Es gibt jeweils eine natürliche Zahl i und j, für die für alle natürliche Zahlen k gilt, dass k größer ist als i und das Produkt von i und j größer ist als k.
t) Es gibt jeweils eine natürliche Zahl i und j, für die für alle natürliche Zahlen k gilt, dass k größer ist als i und die Summe von i und j größer ist als k.
u) Es gibt jeweils eine natürliche Zahl i und j, für die es keine natürliche Zahl k gibt, die kleiner ist als i oder die kleiner ist als die Summe von i und j.

Aufgabe 6

6.1 Übersetzen Sie in sprachliche Formulierung.
6.2 Bewerten Sie die Gesamtaussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Symbolische Schreibweise	Sprachliche Formulierung	w/f
13	$\underset{x,y\in IN}{\forall}\ ggT(y\cdot x,y)=y$		
14	$\underset{a\in IN}{\forall}\ \underset{b\in IN}{\exists}\ b=a-4$		
15	$\underset{z\in IN}{\exists}\ z\cdot 7=12$		

Aufgabe7

Gegeben sind folgende Aussagen und ihr Wahrheitsgehalt (w/f):

A: 0 teilt jede Zahl (f) B: 5 ist größer als 6 (f) C: 14 ist eine gerade Zahl (w)

7.1 Übersetzen Sie in symbolische Schreibweise.
7.2 Bewerten Sie die Gesamtaussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Verbal	Formal	w / f
16	0 teilt nicht jede Zahl und 5 ist größer als 6.		
17	1 ist keine Primzahl und 5 ist eine ungerade Zahl und 7 ist nicht kleiner als 8.		

7.3 Übersetzen Sie in sprachliche Formulierung.
7.4 Bewerten Sie die Gesamtaussage mit w (= wahr) oder f (= falsch).

	Formal	Verbal	w / f
18	$(C \wedge B) \Rightarrow \neg A$		
19	$\neg B$		

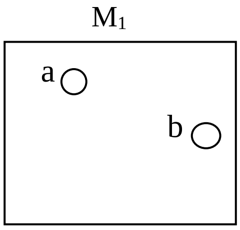
Appendix E: Complete set of math problems used for study 2 (pilot study) (in German)

Itemgruppe A

Malen Sie in den Rechtecken genau die Punkte **aus**, die den gegebenen Ausdruck „wahr“ machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

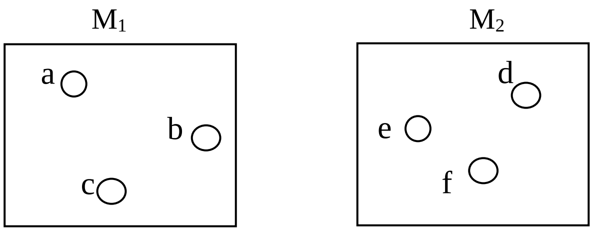
Aufgabe 1

$$\left(\exists x \in M_1 \; : P(x)\right) \wedge \left(\neg P(b)\right)$$



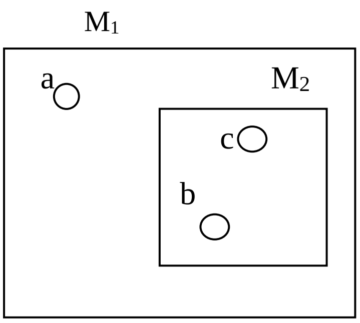
Aufgabe 2

$$(\neg P(e) \vee \neg P(f)) \wedge (P(d) \Rightarrow P(e)) \wedge (\forall x \in M_1 : \neg P(x)) \wedge (\neg P(b) \Rightarrow P(d))$$



Aufgabe 3

$$(\neg \forall x \in M_1 : \neg P(x)) \wedge (\neg \exists x \in M_2 : P(x))$$



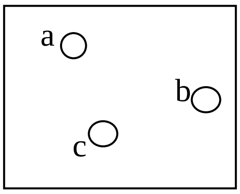
Gehen Sie vor, wie bisher. Beachten Sie jedoch, dass es nun **zusätzlich zu P(x) mit „x ist ausgemalt“ auch noch K(x) mit „x ist angekreuzt“ gibt.** →

Ein Punkt kann also entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Aufgabe 4

$$\big(K(a) \Rightarrow P(c)\big) \wedge \big(P(b)\big) \wedge \big(K(b) \vee K(a)\big)$$

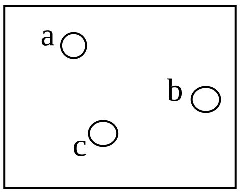
M_1



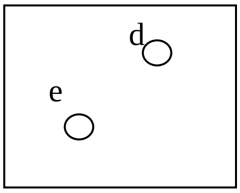
Aufgabe 5

$$\big((\neg P(c)) \Rightarrow \neg K(c)\big) \wedge \big(\forall x \in M_2 : K(x)\big) \wedge (K(c) \vee K(a)) \wedge \big(K(d) \Rightarrow (\neg P(c))\big) \wedge (\exists x \in M_1 : P(x))$$

M_1



M_2

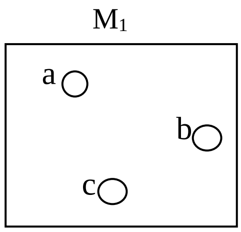


Itemgruppe B

Malen Sie in den Rechtecken genau die Punkte **aus**, die den gegebenen Ausdruck „wahr“ machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

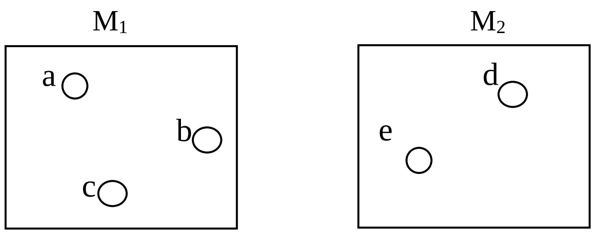
Aufgabe 1

$$(\neg P(a) \Rightarrow (P(b) \Rightarrow P(c))) \wedge (P(b)) \wedge (P(b) \Rightarrow \neg P(c))$$



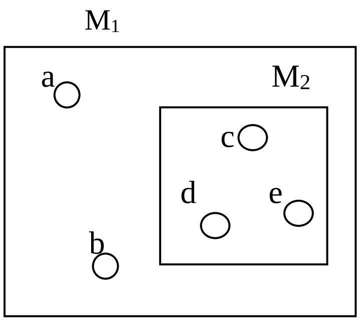
Aufgabe 2

$$(P(c) \Rightarrow \neg P(d)) \wedge (P(a) \Leftrightarrow \neg P(e)) \wedge ((\forall x \in M_1 : P(x)) \vee (\forall x \in M_1 : \neg P(x))) \wedge (\neg P(e))$$



Aufgabe 3

$$(P(d) \Leftrightarrow P(c)) \wedge ((\neg \forall x \in M_1 : P(x)) \Rightarrow (\exists x \in M_2 : \neg P(x)) \wedge (P(d)) \wedge (P(c) \Rightarrow P(e))$$

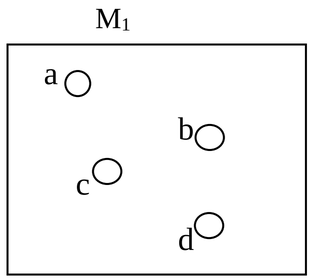


Gehen Sie vor, wie bisher. Beachten Sie jedoch, dass es nun **zusätzlich zu P(x) mit „x ist ausgemalt“ auch noch K(x) mit „x ist angekreuzt“ gibt.** →

Ein Punkt kann also entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

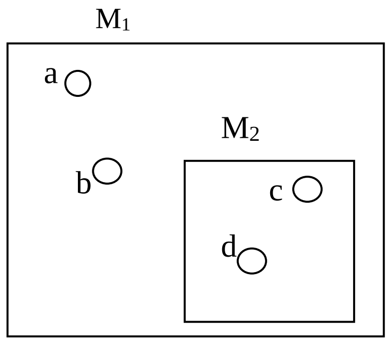
Aufgabe 4

$$((\exists x \in M_1 : K(x)) \Rightarrow P(c)) \wedge (\neg(K(a) \vee P(a))) \wedge (K(a) \vee K(b)) \wedge ((\neg P(d)) \Rightarrow K(c))$$



Aufgabe 5

$$(\forall x \in M_1 : K(x) \vee P(x)) \wedge (K(c)) \wedge (K(d) \Rightarrow \neg(K(b) \vee K(a))) \wedge (K(c) \Leftrightarrow K(d))$$

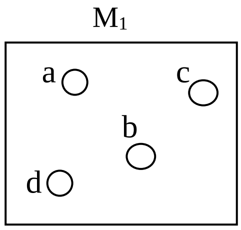


Itemgruppe C

Malen Sie in den Rechtecken genau die Punkte **aus**, die den gegebenen Ausdruck „wahr“ machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

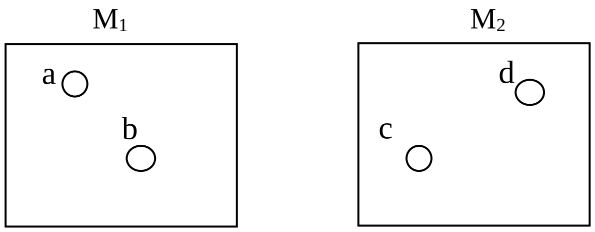
Aufgabe 1

$$(P(c)) \wedge (\neg\forall x \in M_1 : P(x)) \wedge (P(b) \Leftrightarrow P(a)) \wedge (P(c) \Rightarrow P(a))$$



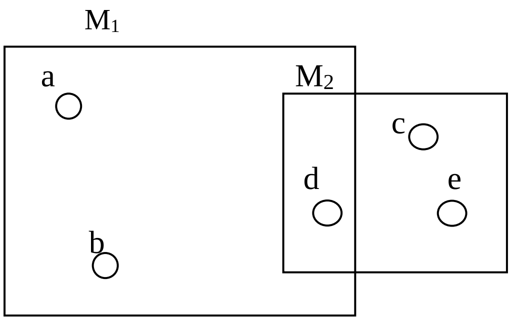
Aufgabe 2

$$(\exists x \in M_2 : P(x)) \wedge (P(b)) \wedge (\neg(P(a) \wedge P(b))) \wedge (\neg P(a) \Rightarrow \neg P(d))$$



Aufgabe 3

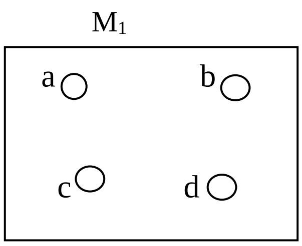
$$(P(d) \Rightarrow P(c)) \wedge (d \in (M_1 \cap M_2) \Rightarrow P(d)) \wedge (\neg P(e) \Rightarrow P(b)) \wedge (\neg\forall x \in M_2 : P(x)) \wedge (\exists x \in M_1 : \neg P(x))$$



Verbinden Sie nun die Punkte (nicht alle Punkte müssen verbunden sein) so, dass der gegebene Ausdruck „wahr“ wird. Ein Punkt kann dabei immer nur mit **genau einem** anderen Punkt verbunden sein. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

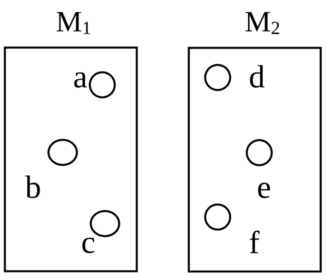
Aufgabe 4

$$(\neg \forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy) \wedge (aVb)$$



Aufgabe 5

$$(aVe) \wedge (\forall x \in M_1 : \exists y \in M_2 : xVy) \wedge (bVe \vee bVd)$$

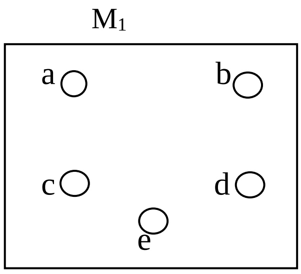


Itemgruppe D

Verbinden Sie die Punkte (nicht alle Punkte müssen verbunden sein) so, dass der gegebene Ausdruck „wahr“ wird. Ein Punkt kann dabei immer nur mit **genau einem** anderen Punkt verbunden sein. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

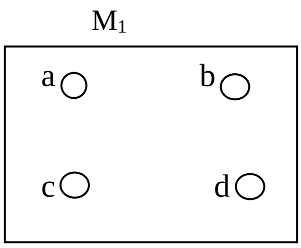
Aufgabe 1

$$(aVb \vee aVc) \wedge (\neg \exists x \in M_1 : xVc) \wedge (aVb \Rightarrow dVe)$$



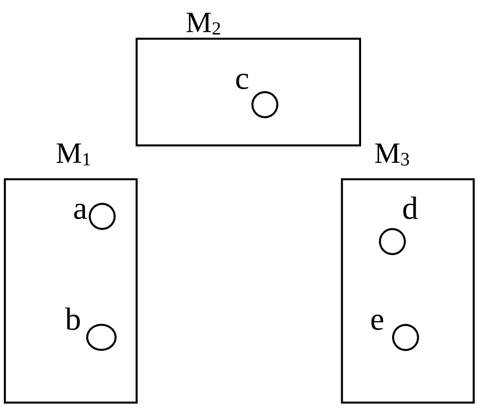
Aufgabe 2

$$(aVb \Rightarrow \forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy) \wedge (\neg(aVb) \Rightarrow \neg \exists x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy) \wedge (\neg \forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy)$$



Aufgabe 3

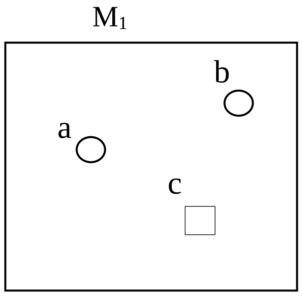
$$(\exists x \in M_3 : aVx) \wedge ((aVc) \vee (dVc)) \wedge (\forall x \in M_2 : \exists y \in M_3 : xVy)$$



Malen Sie nun in den Rechtecken genau die Figuren **aus**, die den gegebenen Ausdruck „wahr“ machen. K steht dabei für alle abgebildeten Kreise, Q für alle abgebildeten Quadrate und D für alle abgebildeten Dreiecke. P(x) steht für „x ist ausgemalt“.

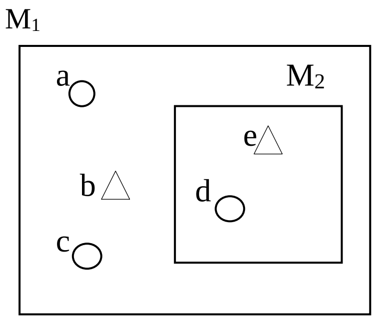
Aufgabe 4

$$\big(P(c) \vee P(b)\big) \wedge \big(\neg P(c)\big) \wedge (\neg \forall x \in K : P(x))$$



Aufgabe 5

$$\big(P(b) \Rightarrow P(a)\big) \wedge \big((\forall x \in D : P(x)) \vee (\forall x \in D : \neg P(x))\big) \wedge (\forall x \in M_2 : P(x)) \wedge (\exists x \in M_1 : \neg P(x))$$

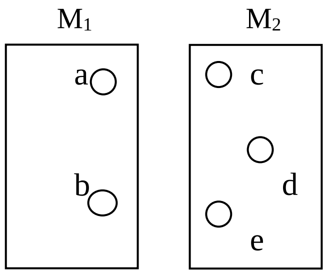


Itemgruppe E

Verbinden Sie die Punkte (nicht alle Punkte müssen verbunden sein) so, dass der gegebene Ausdruck „wahr“ wird. Ein Punkt kann dabei immer nur mit **genau einem** anderen Punkt verbunden sein. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

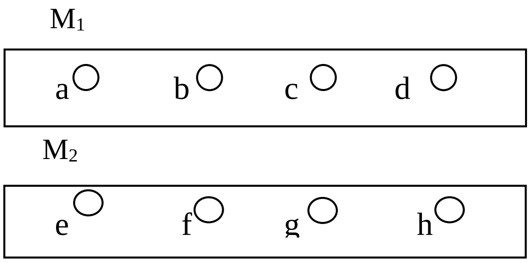
Aufgabe 1

$$\left(\exists x \in M_2 : aVx\right) \wedge \left((cVd) \vee (dVe)\right) \wedge \left(\neg(dVe)\right)$$



Aufgabe 2

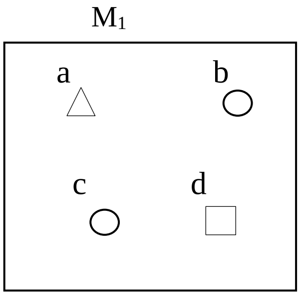
$$\left(\forall x \in M_1 : \exists y \in M_2 : xVy\right) \wedge \left((bVe) \vee (bVf)\right) \wedge \left(bVe \Rightarrow \neg(aVh)\right) \wedge (bVf \Rightarrow dVg) \wedge (aVh)$$



Malen Sie nun in den Rechtecken genau die Figuren **aus**, die den gegebenen Ausdruck „wahr“ machen. K steht dabei für alle abgebildeten Kreise, Q für alle abgebildeten Quadrate und D für alle abgebildeten Dreiecke. P(x) steht für „x ist ausgemalt“.

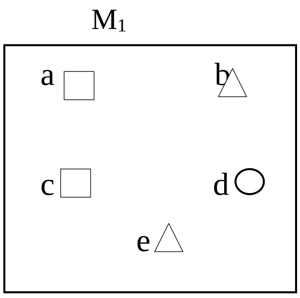
Aufgabe 3

$$(\neg\forall x \in M_1 : P(x)) \wedge (\forall x \in K : P(x)) \wedge (P(b) \Leftrightarrow P(d))$$



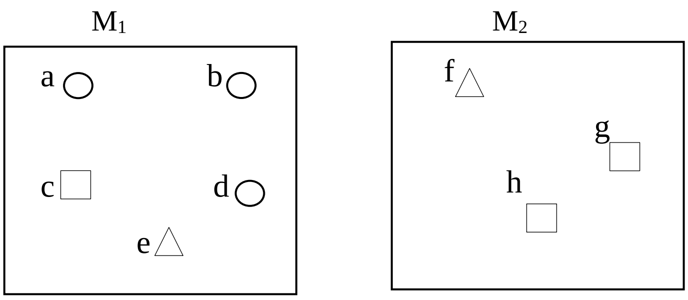
Aufgabe 4

$$\big(P(d) \Rightarrow P(b)\big) \wedge \big(\exists x \in K : P(x)\big) \wedge (\neg\forall x \in D : P(x)) \wedge (\neg P(e) \Rightarrow P(c)) \wedge (P(a) \Leftrightarrow P(c))$$



Aufgabe 5

$$\big(\exists x \in M_2 : P(x)\big) \wedge (P(f) \Rightarrow P(e)) \wedge (\forall x \in K : P(x)) \wedge (\neg\exists x \in Q : P(x) \Leftrightarrow P(d))$$



Appendix F: Complete set of math problems used for study 2 (main study) (in German)

Formelversion

Aufgabe 1

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c, und d. Jeder dieser Punkte kann entweder ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

$$(P(c)) \wedge (\neg \forall x \in M_1 : P(x)) \wedge (P(b) \Leftrightarrow P(a)) \wedge (P(c) \Rightarrow P(a))$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur a ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Genau a, b und c sind ausgemalt.
- Genau a, b und d sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 2

Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c, die Menge M2 besteht aus den Punkten d, e und f. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

$$(\neg P(e) \vee \neg P(f)) \wedge (P(d) \Rightarrow P(e)) \wedge (\forall x \in M_1 : \neg P(x)) \wedge (\neg P(b) \Rightarrow P(d))$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur d ist ausgemalt.
- Nur e ist ausgemalt.
- Nur f ist ausgemalt.
- Genau d und e sind ausgemalt.
- Genau e und f sind ausgemalt.
- Genau d und f sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Punkte a, b und c, sowie die Mengen M1 und M2. M1 beinhaltet genau die Punkte a, b und c, und M2 beinhaltet genau die Punkte b und c. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

$$\left(\neg\forall x \in M_1 : \neg P(x)\right) \wedge \left(\neg\exists x \in M_2 : P(x)\right)$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und c sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Menge M1 bestehend aus den Punkten a, b und c. Jeder Punkt kann entweder ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

$$\left(\neg P(a) \Rightarrow \left(P(b) \Rightarrow P(c)\right)\right) \wedge \left(P(b)\right) \wedge \left(P(b) \Rightarrow \neg P(c)\right)$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und c sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 5

Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c. Die Menge M2 besteht aus den zwei Punkten d und e. Jeder Punkt kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt".

$$\left(P(c)\Rightarrow\neg P(d)\right)\wedge\left(P(a)\Leftrightarrow\neg P(e)\right)\wedge\left((\forall x\in M_1 : P(x))\vee(\forall x\in M_1 : \neg P(x))\right)\wedge\left(\neg P(e)\right)$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur b ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Genau a und c sind ausgemalt.
- Genau c und d sind ausgemalt.
- Genau a, b und c sind ausgemalt.
- Genau a, b und d sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Punkte a, b, c, d und e, sowie die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 beinhaltet genau die Punkte a, b, c, d und e, und M2 beinhaltet genau die Punkte c, d und e. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt".

$$\left(P(d)\Leftrightarrow P(c)\right)\wedge\left(\left(\neg\forall x\in M_1 : P(x)\right)\Rightarrow\left(\exists x\in M_2 : \neg P(x)\right)\right)\wedge\left(P(d)\right)\wedge\left(P(c)\Rightarrow P(e)\right)$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur a ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Nur e ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Genau d und e sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 7

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den Punkten a und b. Die Menge M2 besteht aus den Punkten c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

$$(\exists x \in M_2 : P(x)) \wedge (P(b)) \wedge (\neg(P(a) \wedge P(b))) \wedge (\neg P(a) \Rightarrow \neg P(d))$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Nur d ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und d sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Keiner der Punkte ist ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 8

Gegeben sind die Punkte a, b, c, d und e, sowie die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 beinhaltet genau die Punkte a, b und d. Die Menge M2 beinhaltet genau die Punkte d, c und e. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

$$(P(d) \Rightarrow P(c)) \wedge (d \in (M_1 \cap M_2) \Rightarrow P(d)) \wedge (\neg P(e) \Rightarrow P(b)) \wedge (\neg \forall x \in M_2 : P(x)) \wedge (\exists x \in M_1 : \neg P(x))$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur d ist ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Genau c und d sind ausgemalt.
- o Genau a, c und d sind ausgemalt.
- o Genau b, c und d sind ausgemalt.
- o Keiner der Punkte ist ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 9 – <u>Neuer Aufgabenblock!</u>

Gegeben ist die Menge M1. Sie besteht aus den drei Punkten a, b und c. Jeder Punkt kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“ und K(x) für „x ist angekreuzt“.

$$\left(K(a) \Rightarrow P(c)\right) \wedge \left(P(b)\right) \wedge \left(K(b) \vee K(a)\right)$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und c sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt und c ist angekreuzt.
- o Genau b und c sind ausgemalt und a ist angekreuzt.
- o Genau a und c sind ausgemalt und b ist angekreuzt.
- o Alle Punkte sind angekreuzt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 10

Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c, die Menge M2 besteht aus den zwei Punkten d und e. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“ und K(x) für „x ist angekreuzt“.

$$\left((\neg P(c)) \Rightarrow \neg K(c)\right) \wedge \left(\forall x \in M_2 : K(x)\right) \wedge (K(c) \vee K(a)) \wedge \left(K(d) \Rightarrow (\neg P(c))\right) \wedge (\exists x \in M_1 : P(x))$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau c und d sind ausgemalt.
- o Genau d und e sind ausgemalt.
- o Genau a ist ausgemalt und b, c, d und e sind angekreuzt.
- o Genau b ist ausgemalt und a, d und e sind angekreuzt.
- o Genau d ist ausgemalt und a und b sind angekreuzt.

Aufgabe 11

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“ und K(x) für „x ist angekreuzt“.

$$\left((\exists x \in M_1 : K(x)) \Rightarrow P(c)\right) \wedge \left(\neg\left(K(a) \vee P(a)\right)\right) \wedge \left(K(a) \vee K(b)\right) \wedge ((\neg P(d)) \Rightarrow K(c))$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a ist angekreuzt und c und d sind ausgemalt.
- Genau b ist angekreuzt und c und d sind ausgemalt.
- Genau a ist ausgemalt und c und d sind angekreuzt.
- Genau b ist ausgemalt und c und d sind angekreuzt.
- Genau d ist ausgemalt und a und c sind angekreuzt.
- Keiner der Punkte ist angekreuzt oder ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind angekreuzt.

Aufgabe 12

Gegeben sind die Punkte a, b, c und d, sowie die Mengen M1 und M2. M1 beinhaltet genau die Punkte a, b, c und d. M2 beinhaltet genau die Punkte c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“ und K(x) für „x ist angekreuzt“.

$$\left(\forall x \in M_1 : K(x) \vee P(x)\right) \wedge (K(c)) \wedge (K(d) \Rightarrow \neg(K(b) \vee K(a))) \wedge \left(K(c) \Leftrightarrow K(d)\right)$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt, c und d sind angekreuzt.
- Genau c und d sind ausgemalt, a und b sind angekreuzt.
- Genau a und c sind ausgemalt, b und d sind angekreuzt.
- Genau a und d sind ausgemalt, b und c sind angekreuzt.
- Keiner der Punkte ist ausgemalt oder angekreuzt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind angekreuzt.

Aufgabe 13 – <u>Neuer Aufgabenblock!</u>

Gegeben ist die Menge M1. Sie besteht aus den Punkten a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt <u>verbunden</u> sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b".

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

$$\left(\neg\forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy\right) \wedge \left(aVb\right)$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a ist mit b verbunden.
- o Genau a ist mit c verbunden.
- o Genau a ist mit d verbunden.
- o Genau b ist mit c verbunden.
- o Genau b ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- o Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 14

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a, b und c. Die Menge M2 enthält die Punkte d, e und f. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b".

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

$$\left(aVe\right) \wedge \left(\forall x \in M_1 : \exists y \in M_2 : xVy\right) \wedge \left(bVe \vee bVd\right)$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind verbunden.
- o Genau a und e sind verbunden.
- o Genau c und d sind verbunden.
- o Genau c und f sind verbunden.
- o Genau a ist mit e verbunden und b ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit b verbunden, c ist mit d verbunden und e ist mit f verbunden.
- o Genau a ist mit e verbunden, b ist mit d verbunden und c ist mit f verbunden.
- o Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 15

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkt a, b, c, d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

$$\left(aVb \vee aVc\right) \wedge \left(\neg\exists x \in M_1 : xVc\right) \wedge \left(aVb \Rightarrow dVe\right)$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau d und e sind verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und d ist mit e verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit d verbunden und c ist mit e verbunden.
- Genau a ist mit e verbunden und b ist mit c verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 16

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

$$\left(aVb \Rightarrow \forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy\right) \wedge \left(\neg(aVb) \Rightarrow \neg\exists x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy\right) \wedge \left(\neg\forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy\right)$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau a und c sind verbunden.
- Genau b und d sind verbunden.
- Genau b und c sind verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit d verbunden und b ist mit c verbunden.
- Kein Punkt ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 17

Gegeben sind die Mengen M1, M2 und M3. Die Menge M1 enthält die Punkt a und b, die Menge M2 enthält den Punkt c und die Menge M3 enthält die Punkte d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

$$(\exists x \in M_3 : aVx) \wedge ((aVc) \vee (dVc)) \wedge (\forall x \in M_2 : \exists y \in M_3 : xVy)$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau a und e sind verbunden.
- Genau c und d sind verbunden.
- Genau a ist verbunden mit b und d ist verbunden mit e.
- Genau a ist verbunden mit e und c ist verbunden mit d.
- Genau b ist verbunden mit c und a ist verbunden mit e.
- Genau b ist verbunden mit d und c ist verbunden mit e.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 18

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a und b. Die Menge M2 enthält die Punkte c, d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

$$(\exists x \in M_2 : aVx) \wedge ((cVd) \vee (dVe)) \wedge (\neg(dVe))$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau b und c sind verbunden.
- Genau c und e sind verbunden.
- Genau d und e sind verbunden.
- Genau a ist verbunden mit d und c ist verbunden mit e.
- Genau a ist verbunden mit e und c ist verbunden mit d.
- Genau d ist verbunden mit e und a ist verbunden mit c.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 19

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a, b, c und d. Die Menge M2 enthält die Punkte e, f, g und h. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

$$(\forall x \in M_1 : \exists y \in M_2 : xVy) \wedge ((bVe) \vee (bVf)) \wedge (bVe \Rightarrow \neg(aVh)) \wedge (bVf \Rightarrow dVg) \wedge (aVh)$$

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a ist mit c verbunden.
- Genau a ist mit h verbunden.
- Genau d ist mit g verbunden.
- Genau b ist mit f verbunden und c ist mit e verbunden.
- Genau b ist mit f verbunden und d ist mit e verbunden.
- Genau a ist mit b, c ist mit g, e mit f und h ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit h, b mit f, c mit e und d ist mit g verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Textversion

Aufgabe 1

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c, und d. Jeder dieser Punkte kann entweder ausgemalt oder nicht ausgemalt sein. Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck:

c ist ausgemalt. Und: Es gilt nicht für alle Elemente x der Menge M1: x ist ausgemalt. Und: b ist genau dann ausgemalt, wenn a ausgemalt ist. Und: Wenn c ausgemalt ist, dann ist a ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur a ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Genau a, b und c sind ausgemalt.
- Genau a, b und d sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 2

Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c, die Menge M2 besteht aus den Punkten d, e und f. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck:

e ist nicht ausgemalt oder f ist nicht ausgemalt. Und: Wenn d ausgemalt ist, dann ist e ausgemalt. Und: Für alle Punkte der Menge M1 gilt, sie sind nicht ausgemalt. Und: Wenn b nicht ausgemalt ist, dann ist d ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur d ist ausgemalt.
- Nur e ist ausgemalt.
- Nur f ist ausgemalt.
- Genau d und e sind ausgemalt.
- Genau e und f sind ausgemalt.
- Genau d und f sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Punkte a, b und c, sowie die Mengen M1 und M2. M1 beinhaltet genau die Punkte a, b und c, und M2 beinhaltet genau die Punkte b und c. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein. Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck:

Es gilt nicht, dass für alle Elemente x der Menge M1 gilt: x ist nicht ausgemalt. Und: Es gilt nicht, dass es ein Element x in der Menge M2 gibt, für das gilt: x ist ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur a ist ausgemalt.
- Nur b ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau a und c sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Menge M1 bestehend aus den Punkten a, b und c. Jeder Punkt kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein. Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck:

Wenn a nicht ausgemalt ist, dann gilt, dass wenn b ausgemalt ist, dann ist c ausgemalt. Und: b ist ausgemalt. Und: Wenn b ausgemalt ist, dann ist c nicht ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur a ist ausgemalt.
- Nur b ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau a und c sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 5

Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c. Die Menge M2 besteht aus den zwei Punkten d und e. Jeder Punkt kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein. Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck:

Wenn c ausgemalt ist, dann ist d nicht ausgemalt. Und: a ist genau dann ausgemalt, wenn e nicht ausgemalt ist. Und: Es gilt für alle Elemente der Menge M1, dass sie ausgemalt sind, oder es gilt für alle Elemente der Menge M1, dass sie nicht ausgemalt sind. Und: e ist nicht ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur b ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Genau a und c sind ausgemalt.
- Genau c und d sind ausgemalt.
- Genau a, b und c sind ausgemalt.
- Genau a, b und d sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Punkte a, b, c, d und e, sowie die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 beinhaltet genau die Punkte a, b, c, d und e, und M2 beinhaltet genau die Punkte c, d und e. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein. Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck:

d ist ausgemalt genau dann, wenn c ausgemalt ist. Und: Wenn nicht für alle Elemente der Menge M1 gilt, dass sie ausgemalt sind, dann gibt es mindestens einen Punkt der Menge M2 für den gilt, er ist nicht ausgemalt. Und: d ist ausgemalt. Und: Wenn c ausgemalt ist, dann ist e ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur a ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Nur e ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Genau d und e sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 7

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den Punkten a und b. Die Menge M2 besteht aus den Punkten c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder ausgemalt oder nicht ausgemalt sein. Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck:

Es gibt mindestens einen Punkt der Menge M2, für den gilt: Dieser Punkt ist ausgemalt. Und: b ist ausgemalt. Und: Es gilt nicht: a ist ausgemalt und b ist ausgemalt. Und: Wenn a nicht ausgemalt ist, dann ist d nicht ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur a ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Nur d ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau a und d sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Keiner der Punkte ist ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 8

Gegeben sind die Punkte a, b, c, d und e, sowie die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 beinhaltet genau die Punkte a, b und d. Die Menge M2 beinhaltet genau die Punkte d, c und e. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein. Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck:

Wenn d ausgemalt ist, dann ist c ausgemalt. Und: Wenn d Element der Schnittmenge von M1 und M2 ist, dann ist d ausgemalt. Und: Wenn e nicht ausgemalt ist, dann ist b ausgemalt. Und: Es gilt nicht für alle Elemente der Menge M2, dass sie ausgemalt sind. Und: Es gibt mindestens einen Punkt in der Menge M1, für den gilt, er ist nicht ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur b ist ausgemalt.
- Nur d ist ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Genau c und d sind ausgemalt.
- Genau a, c und d sind ausgemalt.
- Genau b, c und d sind ausgemalt.
- Keiner der Punkte ist ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 9 – Neuer Aufgabenblock!

Gegeben ist die Menge M1. Sie besteht aus den drei Punkten a, b und c. Jeder Punkt kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich. Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck:

Wenn a angekreuzt ist, dann ist c ausgemalt. Und: b ist ausgemalt. Und: b ist angekreuzt oder a ist angekreuzt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau a und c sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt und c ist angekreuzt.
- Genau b und c sind ausgemalt und a ist angekreuzt.
- Genau a und c sind ausgemalt und b ist angekreuzt.
- Alle Punkte sind angekreuzt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 10

Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c, die Menge M2 besteht aus den zwei Punkten d und e. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich. Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck:

Wenn c nicht ausgemalt ist, dann ist c nicht angekreuzt. Und: Für alle Elemente der Menge 2 gilt: Sie sind angekreuzt. Und: c ist angekreuzt oder a ist angekreuzt. Und: Wenn d angekreuzt ist, dann ist c nicht ausgemalt. Und: Es gibt mindestens ein Element der Menge M1 für das gilt, es ist ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur b ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau c und d sind ausgemalt.
- Genau d und e sind ausgemalt.
- Genau a ist ausgemalt und b, c, d und e sind angekreuzt.
- Genau b ist ausgemalt und a, d und e sind angekreuzt.
- Genau d ist ausgemalt und a und b sind angekreuzt.

Aufgabe 11

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich. Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck:

Wenn es einen Punkt in der Menge M1 gibt, für den gilt, er ist angekreuzt, dann ist c ausgemalt. Und: Es gilt nicht: a ist angekreuzt oder a ist ausgemalt. Und: a ist angekreuzt oder b ist angekreuzt. Und: Wenn d nicht ausgemalt ist, dann ist c angekreuzt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a ist angekreuzt und c und d sind ausgemalt.
- Genau b ist angekreuzt und c und d sind ausgemalt.
- Genau a ist ausgemalt und c und d sind angekreuzt.
- Genau b ist ausgemalt und c und d sind angekreuzt.
- Genau d ist ausgemalt und a und c sind angekreuzt.
- Keiner der Punkte ist angekreuzt oder ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind angekreuzt.

Aufgabe 12

Gegeben sind die Punkte a, b, c und d, sowie die Mengen M1 und M2. M1 beinhaltet genau die Punkte a, b, c und d. M2 beinhaltet genau die Punkte c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich. Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck:

Für alle Elemente x der Menge M1 gilt: x ist angekreuzt oder x ist ausgemalt. Und: c ist angekreuzt. Und: Wenn d angekreuzt ist, dann gilt nicht: b ist angekreuzt oder a ist angekreuzt. Und: c ist genau dann angekreuzt, wenn d angekreuzt ist.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt, c und d sind angekreuzt.
- Genau c und d sind ausgemalt, a und b sind angekreuzt.
- Genau a und c sind ausgemalt, b und d sind angekreuzt.
- Genau a und d sind ausgemalt, b und c sind angekreuzt.
- Keiner der Punkte ist ausgemalt oder angekreuzt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind angekreuzt.

Aufgabe 13 – Neuer Aufgabenblock!

Gegeben ist die Menge M1. Sie besteht aus den Punkten a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein. Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. a ist verbunden mit b ist gleichbedeutend mit b ist verbunden mit a.

Logischer Ausdruck:

Es gilt nicht für alle Elemente x der Menge M1, dass es einen Punkt y der Menge M1 gibt, für den gilt: x ist verbunden mit y. Und: a ist verbunden mit b.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a ist mit b verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden.
- Genau a ist mit d verbunden.
- Genau b ist mit c verbunden.
- Genau b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 14

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a, b und c. Die Menge M2 enthält die Punkte d, e und f. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein. Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. a ist verbunden mit b ist gleichbedeutend mit b ist verbunden mit a.

Logischer Ausdruck:

a ist mit dem Punkt e verbunden. Und: Für alle Elemente x der Menge M1 gilt, es gibt ein Element y der Menge M2, sodass gilt: x ist mit y verbunden. Und: b ist verbunden mit e oder b ist verbunden mit d.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau a und e sind verbunden.
- Genau c und d sind verbunden.
- Genau c und f sind verbunden.
- Genau a ist mit e verbunden und b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden, c ist mit d verbunden und e ist mit f verbunden.
- Genau a ist mit e verbunden, b ist mit d verbunden und c ist mit f verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 15

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkt a, b, c, d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein. Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. a ist verbunden mit b ist gleichbedeutend mit b ist verbunden mit a.

Logischer Ausdruck:

a ist verbunden mit b oder a ist verbunden mit c. Und: Es existiert kein Punkt in der Menge M1 für den gilt, er ist mit c verbunden. Und: Wenn a mit b verbunden ist, dann ist d mit e verbunden.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau d und e sind verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und d ist mit e verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit d verbunden und c ist mit e verbunden.
- Genau a ist mit e verbunden und b ist mit c verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 16

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein. Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. a ist verbunden mit b ist gleichbedeutend mit b ist verbunden mit a.

Logischer Ausdruck:

Wenn a mit b verbunden ist, dann gilt für alle Elemente x der Menge M1: Es gibt ein Element y der Menge M1, sodass x mit y verbunden ist. Und: Wenn a nicht mit b verbunden ist, dann gibt es kein Element x der Menge M1 für das gilt: Es gibt ein Element y der Menge M1, sodass x mit y verbunden ist. Und: Es gilt nicht für alle Elemente x der Menge M1, dass es ein Element y der Menge M1 gibt, sodass x mit y verbunden ist.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau a und c sind verbunden.
- Genau b und d sind verbunden.
- Genau b und c sind verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit d verbunden und b ist mit c verbunden.
- Kein Punkt ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 17

Gegeben sind die Mengen M1, M2 und M3. Die Menge M1 enthält die Punkt a und b, die Menge M2 enthält den Punkt c und die Menge M3 enthält die Punkte d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. a ist verbunden mit b ist gleichbedeutend mit b ist verbunden mit a.

Logischer Ausdruck:

Es gibt mindestens ein Element x der Menge M3 für das gilt: a ist mit x verbunden. Und: a ist verbunden mit c oder d ist verbunden mit c. Und: Für alle Elemente x der Menge M2 gilt: Es gibt ein Element y der Menge M3, sodass x mit y verbunden ist.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau a und e sind verbunden.
- Genau c und d sind verbunden.
- Genau a ist verbunden mit b und d ist verbunden mit e.
- Genau a ist verbunden mit e und c ist verbunden mit d.
- Genau b ist verbunden mit c und a ist verbunden mit e.
- Genau b ist verbunden mit d und c ist verbunden mit e.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 18

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a und b. Die Menge M2 enthält die Punkte c, d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein. Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. a ist verbunden mit b ist gleichbedeutend mit b ist verbunden mit a.

Logischer Ausdruck:

Es gibt mindestens ein Element x in der Menge M2 für das gilt: a ist verbunden mit x. Und: c ist verbunden mit d, oder d ist verbunden mit e. Und: d ist nicht verbunden mit e.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind verbunden.
- o Genau b und c sind verbunden.
- o Genau c und e sind verbunden.
- o Genau d und e sind verbunden.
- o Genau a ist verbunden mit d und c ist verbunden mit e.
- o Genau a ist verbunden mit e und c ist verbunden mit d.
- o Genau d ist verbunden mit e und a ist verbunden mit c.
- o Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 19

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a, b, c und d. Die Menge M2 enthält die Punkte e, f, g und h. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein. Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. a ist verbunden mit b ist gleichbedeutend mit b ist verbunden mit a.

Logischer Ausdruck:

Für alle Elemente x der Menge M1 gilt: Es gibt ein Element y der Menge M2, sodass x mit y verbunden ist. Und: b ist verbunden mit e, oder b ist verbunden mit f. Und: Wenn b mit e verbunden ist, dann ist a nicht mit h verbunden. Und: Wenn b mit f verbunden ist, dann ist d mit g verbunden. Und: a ist mit h verbunden.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a ist mit c verbunden.
- o Genau a ist mit h verbunden.
- o Genau d ist mit g verbunden.
- o Genau b ist mit f verbunden und c ist mit e verbunden.
- o Genau b ist mit f verbunden und d ist mit e verbunden.
- o Genau a ist mit b, c ist mit g, e mit f und h ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit h, b mit f, c mit e und d ist mit g verbunden.
- o Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Formel-und-Text-Version

Aufgabe 1

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c, und d. Jeder dieser Punkte kann entweder ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(P(c)) \wedge (\neg \forall x \in M_1 : P(x)) \wedge (P(b) \Leftrightarrow P(a)) \wedge (P(c) \Rightarrow P(a))$$

Logischer Ausdruck als Text:

c ist ausgemalt. Und: Es gilt nicht für alle Elemente x der Menge M1: x ist ausgemalt. Und: b ist genau dann ausgemalt, wenn a ausgemalt ist. Und: Wenn c ausgemalt ist, dann ist a ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Genau a, b und c sind ausgemalt.
- o Genau a, b und d sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 2

Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c, die Menge M2 besteht aus den Punkten d, e und f. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein. Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\neg P(e) \vee \neg P(f)) \wedge (P(d) \Rightarrow P(e)) \wedge (\forall x \in M_1 : \neg P(x)) \wedge (\neg P(b) \Rightarrow P(d))$$

Logischer Ausdruck als Text:

e ist nicht ausgemalt oder f ist nicht ausgemalt. Und: Wenn d ausgemalt ist, dann ist e ausgemalt. Und: Für alle Punkte der Menge M1 gilt, sie sind nicht ausgemalt. Und: Wenn b nicht ausgemalt ist, dann ist d ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur d ist ausgemalt.
- o Nur e ist ausgemalt.
- o Nur f ist ausgemalt.
- o Genau d und e sind ausgemalt.
- o Genau e und f sind ausgemalt.
- o Genau d und f sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Punkte a, b und c, sowie die Mengen M1 und M2. M1 beinhaltet genau die Punkte a, b und c, und M2 beinhaltet genau die Punkte b und c. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt".

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\neg\forall x \in M_1 : \neg P(x)) \wedge (\neg\exists x \in M_2 : P(x))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Es gilt nicht, dass für alle Elemente x der Menge M1 gilt: x ist nicht ausgemalt. Und: Es gilt nicht, dass es ein Element x in der Menge M2 gibt, für das gilt: x ist ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur a ist ausgemalt.
- Nur b ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau a und c sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Menge M1 bestehend aus den Punkten a, b und c. Jeder Punkt kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\neg P(a) \Rightarrow (P(b) \Rightarrow P(c))) \wedge (P(b)) \wedge (P(b) \Rightarrow \neg P(c))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn a nicht ausgemalt ist, dann gilt, dass wenn b ausgemalt ist, dann ist c ausgemalt. Und: b ist ausgemalt. Und: Wenn b ausgemalt ist, dann ist c nicht ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur a ist ausgemalt.
- Nur b ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau a und c sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 5

Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c. Die Menge M2 besteht aus den zwei Punkten d und e. Jeder Punkt kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(P(c) \Rightarrow \neg P(d)) \wedge (P(a) \Leftrightarrow \neg P(e)) \wedge ((\forall x \in M_1 : P(x)) \vee (\forall x \in M_1 : \neg P(x))) \wedge (\neg P(e))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn c ausgemalt ist, dann ist d nicht ausgemalt. Und: a ist genau dann ausgemalt, wenn e nicht ausgemalt ist. Und: Es gilt für alle Elemente der Menge M1, dass sie ausgemalt sind, oder es gilt für alle Elemente der Menge M1, dass sie nicht ausgemalt sind. Und: e ist nicht ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur b ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Genau a und c sind ausgemalt.
- Genau c und d sind ausgemalt.
- Genau a, b und c sind ausgemalt.
- Genau a, b und d sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Punkte a, b, c, d und e, sowie die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 beinhaltet genau die Punkte a, b, c, d und e, und M2 beinhaltet genau die Punkte c, d und e. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(P(d) \Leftrightarrow P(c)) \wedge ((\neg \forall x \in M_1 : P(x)) \Rightarrow (\exists x \in M_2 : \neg P(x))) \wedge (P(d)) \wedge (P(c) \Rightarrow P(e))$$

Logischer Ausdruck als Text:

d ist ausgemalt genau dann, wenn c ausgemalt ist. Und: Wenn nicht für alle Elemente der Menge M1 gilt, dass sie ausgemalt sind, dann gibt es mindestens einen Punkt der Menge M2 für den gilt, er ist nicht ausgemalt. Und: d ist ausgemalt. Und: Wenn c ausgemalt ist, dann ist e ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur a ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Nur e ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Genau d und e sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 7

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den Punkten a und b. Die Menge M2 besteht aus den Punkten c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt".

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\exists x \in M_2 : P(x)) \wedge (P(b)) \wedge (\neg(P(a) \wedge P(b))) \wedge (\neg P(a) \Rightarrow \neg P(d))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Es gibt mindestens einen Punkt der Menge M2, für den gilt: Dieser Punkt ist ausgemalt. Und: b ist ausgemalt. Und: Es gilt nicht: a ist ausgemalt und b ist ausgemalt. Und: Wenn a nicht ausgemalt ist, dann ist d nicht ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur a ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Nur d ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau a und d sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Keiner der Punkte ist ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 8

Gegeben sind die Punkte a, b, c, d und e, sowie die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 beinhaltet genau die Punkte a, b und d. Die Menge M2 beinhaltet genau die Punkte d, c und e. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(P(d) \Rightarrow P(c)) \wedge (d \in (M_1 \cap M_2) \Rightarrow P(d)) \wedge (\neg P(e) \Rightarrow P(b)) \wedge (\neg \forall x \in M_2 : P(x)) \wedge (\exists x \in M_1 : \neg P(x))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn d ausgemalt ist, dann ist c ausgemalt. Und: Wenn d Element der Schnittmenge von M1 und M2 ist, dann ist d ausgemalt. Und: Wenn e nicht ausgemalt ist, dann ist b ausgemalt. Und: Es gilt nicht für alle Elemente der Menge M2, dass sie ausgemalt sind. Und: Es gibt mindestens einen Punkt in der Menge M1, für den gilt, er ist nicht ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur b ist ausgemalt.
- Nur d ist ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Genau c und d sind ausgemalt.
- Genau a, c und d sind ausgemalt.
- Genau b, c und d sind ausgemalt.
- Keiner der Punkte ist ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 9 – <u>Neuer Aufgabenblock!</u>

Gegeben ist die Menge M1. Sie besteht aus den drei Punkten a, b und c. Jeder Punkt kann entweder <u>leer, ausgemalt oder angekreuzt</u> sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“ und K(x) für „x ist angekreuzt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(K(a) \Rightarrow P(c)) \wedge (P(b)) \wedge (K(b) \vee K(a))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn a angekreuzt ist, dann ist c ausgemalt. Und: b ist ausgemalt. Und: b ist angekreuzt oder a ist angekreuzt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und c sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt und c ist angekreuzt.
- o Genau b und c sind ausgemalt und a ist angekreuzt.
- o Genau a und c sind ausgemalt und b ist angekreuzt.
- o Alle Punkte sind angekreuzt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 10

Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c, die Menge M2 besteht aus den zwei Punkten d und e. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt" und K(x) für „x ist angekreuzt".

Logischer Ausdruck als Formel:

$$((\neg P(c)) \Rightarrow \neg K(c)) \wedge (\forall x \in M_2 : K(x)) \wedge (K(c) \vee K(a)) \wedge (K(d) \Rightarrow (\neg P(c))) \wedge (\exists x \in M_1 : P(x))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn c nicht ausgemalt ist, dann ist c nicht angekreuzt. Und: Für alle Elemente der Menge 2 gilt: Sie sind angekreuzt. Und: c ist angekreuzt oder a ist angekreuzt. Und: Wenn d angekreuzt ist, dann ist c nicht ausgemalt. Und: Es gibt mindestens ein Element der Menge M1 für das gilt, es ist ausgemalt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur b ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau c und d sind ausgemalt.
- Genau d und e sind ausgemalt.
- Genau a ist ausgemalt und b, c, d und e sind angekreuzt.
- Genau b ist ausgemalt und a, d und e sind angekreuzt.
- Genau d ist ausgemalt und a und b sind angekreuzt.

Aufgabe 11

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“ und K(x) für „x ist angekreuzt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$((\exists x \in M_1 : K(x)) \Rightarrow P(c)) \wedge (\neg(K(a) \vee P(a))) \wedge (K(a) \vee K(b)) \wedge ((\neg P(d)) \Rightarrow K(c))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn es einen Punkt in der Menge M1 gibt, für den gilt, er ist angekreuzt, dann ist c ausgemalt. Und: Es gilt nicht: a ist angekreuzt oder a ist ausgemalt. Und: a ist angekreuzt oder b ist angekreuzt. Und: Wenn d nicht ausgemalt ist, dann ist c angekreuzt.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a ist angekreuzt und c und d sind ausgemalt.
- Genau b ist angekreuzt und c und d sind ausgemalt.
- Genau a ist ausgemalt und c und d sind angekreuzt.
- Genau b ist ausgemalt und c und d sind angekreuzt.
- Genau d ist ausgemalt und a und c sind angekreuzt.
- Keiner der Punkte ist angekreuzt oder ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind angekreuzt.

Aufgabe 12

Gegeben sind die Punkte a, b, c und d, sowie die Mengen M1 und M2. M1 beinhaltet genau die Punkte a, b, c und d. M2 beinhaltet genau die Punkte c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt" und K(x) für „x ist angekreuzt".

Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(\forall x \in M_1 : K(x) \vee P(x)\right) \wedge (K(c)) \wedge (K(d) \Rightarrow \neg(K(b) \vee K(a))) \wedge \left(K(c) \Leftrightarrow K(d)\right)$$

Logischer Ausdruck als Text:

Für alle Elemente x der Menge M1 gilt: x ist angekreuzt oder x ist ausgemalt. Und: c ist angekreuzt. Und: Wenn d angekreuzt ist, dann gilt nicht: b ist angekreuzt oder a ist angekreuzt. Und: c ist genau dann angekreuzt, wenn d angekreuzt ist.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt, c und d sind angekreuzt.
- Genau c und d sind ausgemalt, a und b sind angekreuzt.
- Genau a und c sind ausgemalt, b und d sind angekreuzt.
- Genau a und d sind ausgemalt, b und c sind angekreuzt.
- Keiner der Punkte ist ausgemalt oder angekreuzt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind angekreuzt.

Aufgabe 13 – Neuer Aufgabenblock!

Gegeben ist die Menge M1. Sie besteht aus den Punkten a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b".

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(\neg\forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy\right) \wedge \left(aVb\right)$$

Logischer Ausdruck als Text:

Es gilt nicht für alle Elemente x der Menge M1, dass es einen Punkt y der Menge M1 gibt, für den gilt: x ist verbunden mit y. Und: a ist verbunden mit b.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a ist mit b verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden.
- Genau a ist mit d verbunden.
- Genau b ist mit c verbunden.
- Genau b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 14

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a, b und c. Die Menge M2 enthält die Punkte d, e und f. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(aVe) \wedge (\forall x \in M_1 : \exists y \in M_2 : xVy) \wedge (bVe \vee bVd)$$

Logischer Ausdruck als Text:

a ist mit dem Punkt e verbunden. Und: Für alle Elemente x der Menge M1 gilt, es gibt ein Element y der Menge M2, sodass gilt: x ist mit y verbunden. Und: b ist verbunden mit e oder der Punkt b ist verbunden mit d.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind verbunden.
- o Genau a und e sind verbunden.
- o Genau c und d sind verbunden.
- o Genau c und f sind verbunden.
- o Genau a ist mit e verbunden und b ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit b verbunden, c ist mit d verbunden und e ist mit f verbunden.
- o Genau a ist mit e verbunden, b ist mit d verbunden und c ist mit f verbunden.
- o Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 15

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkt a, b, c, d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(aVb \vee aVc) \wedge (\neg \exists x \in M_1 : xVc) \wedge (aVb \Rightarrow dVe)$$

Logischer Ausdruck als Text:

a ist verbunden mit b oder a ist verbunden mit c. Und: Es existiert kein Punkt in der Menge M1 für den gilt, er ist mit c verbunden. Und: Wenn a mit b verbunden ist, dann ist d mit e verbunden.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau d und e sind verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und d ist mit e verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit d verbunden und c ist mit e verbunden.
- Genau a ist mit e verbunden und b ist mit c verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 16

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(aVb \Rightarrow \forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy\right) \wedge \left(\neg(aVb) \Rightarrow \neg\exists x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy\right) \wedge \left(\neg\forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy\right)$$

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn a mit b verbunden ist, dann gilt für alle Elemente x der Menge M1: Es gibt ein Element y der Menge M1, sodass x mit y verbunden ist. Und: Wenn a nicht mit b verbunden ist, dann gibt es kein Element x der Menge M1 für das gilt: Es gibt ein Element y der Menge M1, sodass x mit y verbunden ist. Und: Es gilt nicht für alle Elemente x der Menge M1, dass es ein Element y der Menge M1 gibt, sodass x mit y verbunden ist.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau a und c sind verbunden.
- Genau b und d sind verbunden.
- Genau b und c sind verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit d verbunden und b ist mit c verbunden.
- Kein Punkt ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 17

Gegeben sind die Mengen M1, M2 und M3. Die Menge M1 enthält die Punkt a und b, die Menge M2 enthält den Punkt c und die Menge M3 enthält die Punkte d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\exists x \in M_3 : aVx) \wedge ((aVc) \vee (dVc)) \wedge (\forall x \in M_2 : \exists y \in M_3 : xVy)$$

Logischer Ausdruck als Text:

Es gibt mindestens ein Element x der Menge M3 für das gilt: a ist mit x verbunden. Und: a ist verbunden mit c oder d ist verbunden mit c. Und: Für alle Elemente x der Menge M2 gilt: Es gibt ein Element y der Menge M3, sodass x mit y verbunden ist.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau a und e sind verbunden.
- Genau c und d sind verbunden.
- Genau a ist verbunden mit b und d ist verbunden mit e.
- Genau a ist verbunden mit e und c ist verbunden mit d.
- Genau b ist verbunden mit c und a ist verbunden mit e.
- Genau b ist verbunden mit d und c ist verbunden mit e.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 18

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a und b. Die Menge M2 enthält die Punkte c, d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b".

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(\exists x \in M_2 : aVx\right) \wedge \left((cVd) \vee (dVe)\right) \wedge \left(\neg(dVe)\right)$$

Logischer Ausdruck als Text:

Es gibt mindestens ein Element x in der Menge M2 für das gilt: a ist verbunden mit x. Und: c ist verbunden mit d, oder d ist verbunden mit e. Und: d ist nicht verbunden mit e.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau b und c sind verbunden.
- Genau c und e sind verbunden.
- Genau d und e sind verbunden.
- Genau a ist verbunden mit d und c ist verbunden mit e.
- Genau a ist verbunden mit e und c ist verbunden mit d.
- Genau d ist verbunden mit e und a ist verbunden mit c.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 19

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a, b, c und d. Die Menge M2 enthält die Punkte e, f, g und h. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(\forall x \in M_1 : \exists y \in M_2 : xVy\right) \wedge \left(\left(bVe\right) \vee \left(bVf\right)\right) \wedge \left(bVe \Rightarrow \neg(aVh)\right) \wedge (bVf \Rightarrow dVg) \wedge (aVh)$$

Logischer Ausdruck als Text:

Für alle Elemente x der Menge M1 gilt: Es gibt ein Element y der Menge M2, sodass x mit y verbunden ist. Und: b ist verbunden mit e, oder b ist verbunden mit f. Und: Wenn b mit e verbunden ist, dann ist a nicht mit h verbunden. Und: Wenn b mit f verbunden ist, dann ist d mit g verbunden. Und: a ist mit h verbunden.

Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a ist mit c verbunden.
- Genau a ist mit h verbunden.
- Genau d ist mit g verbunden.
- Genau b ist mit f verbunden und c ist mit e verbunden.
- Genau b ist mit f verbunden und d ist mit e verbunden.
- Genau a ist mit b, c ist mit g, e mit f und h ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit h, b mit f, c mit e und d ist mit g verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Formel-und-Graphik-Version

Aufgabe 1

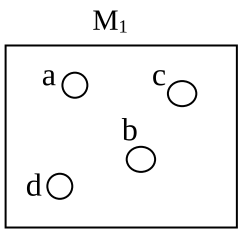
Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c, und d. Jeder dieser Punkte kann entweder ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(P(c)) \wedge (\neg \forall x \in M_1 : P(x)) \wedge (P(b) \Leftrightarrow P(a)) \wedge (P(c) \Rightarrow P(a))$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Genau a, b und c sind ausgemalt.
- o Genau a, b und d sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 2

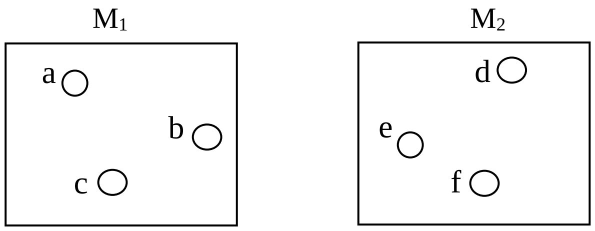
Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c, die Menge M2 besteht aus den Punkten d, e und f. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt".

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\neg P(e) \vee \neg P(f)) \wedge (P(d) \Rightarrow P(e)) \wedge (\forall x \in M_1 : \neg P(x)) \wedge (\neg P(b) \Rightarrow P(d))$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur d ist ausgemalt.
- o Nur e ist ausgemalt.
- o Nur f ist ausgemalt.
- o Genau d und e sind ausgemalt.
- o Genau e und f sind ausgemalt.
- o Genau d und f sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 3

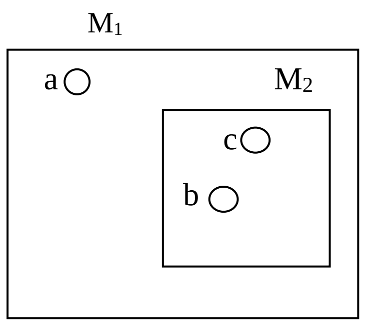
Gegeben sind die Punkte a, b und c, sowie die Mengen M1 und M2. M1 beinhaltet genau die Punkte a, b und c, und M2 beinhaltet genau die Punkte b und c. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\neg \forall x \in M_1 : \neg P(x)) \wedge (\neg \exists x \in M_2 : P(x))$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und c sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 4

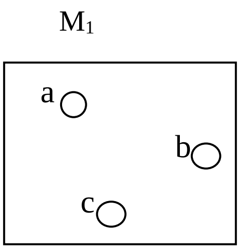
Gegeben ist die Menge M1 bestehend aus den Punkten a, b und c. Jeder Punkt kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\neg P(a) \Rightarrow (P(b) \Rightarrow P(c))) \wedge (P(b)) \wedge (P(b) \Rightarrow \neg P(c))$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und c sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 5

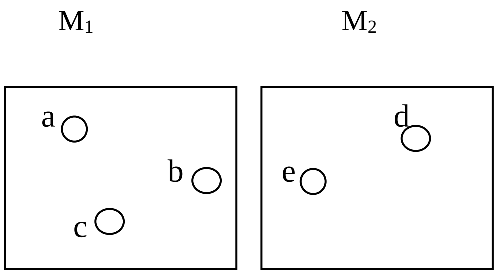
Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c. Die Menge M2 besteht aus den zwei Punkten d und e. Jeder Punkt kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(P(c) \Rightarrow \neg P(d)) \wedge (P(a) \Leftrightarrow \neg P(e)) \wedge ((\forall x \in M_1 : P(x)) \vee (\forall x \in M_1 : \neg P(x))) \wedge (\neg P(e))$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und c sind ausgemalt.
- o Genau c und d sind ausgemalt.
- o Genau a, b und c sind ausgemalt.
- o Genau a, b und d sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 6

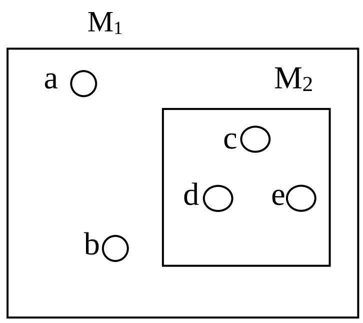
Gegeben sind die Punkte a, b, c, d und e, sowie die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 beinhaltet genau die Punkte a, b, c, d und e, und M2 beinhaltet genau die Punkte c, d und e. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(P(d) \Leftrightarrow P(c)\right) \wedge \left(\left(\neg \forall x \in M_1 : P(x)\right) \Rightarrow \left(\exists x \in M_2 : \neg P(x)\right)\right) \wedge \left(P(d)\right) \wedge \left(P(c) \Rightarrow P(e)\right)$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur a ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Nur e ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Genau d und e sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 7

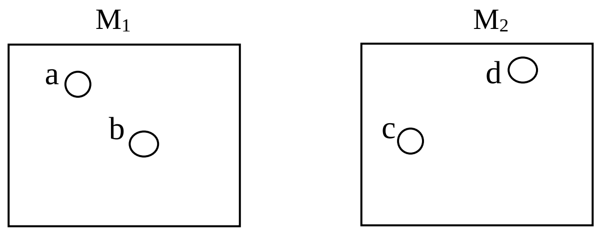
Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den Punkten a und b. Die Menge M2 besteht aus den Punkten c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt".

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\exists x \in M_2 : P(x)) \wedge \left(P(b)\right) \wedge \left(\neg(P(a) \wedge P(b))\right) \wedge \left(\neg P(a) \Rightarrow \neg P(d)\right)$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Nur d ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und d sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Keiner der Punkte ist ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 8

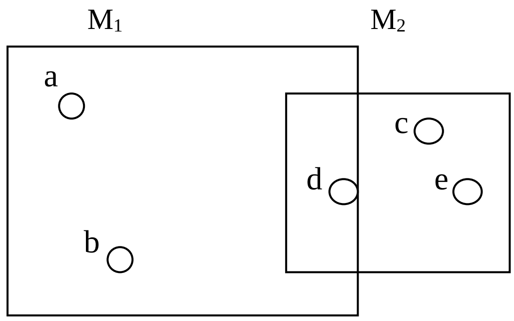
Gegeben sind die Punkte a, b, c, d und e, sowie die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 beinhaltet genau die Punkte a, b und d. Die Menge M2 beinhaltet genau die Punkte d, c und e. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(P(d) \Rightarrow P(c)) \wedge (d \in (M_1 \cap M_2) \Rightarrow P(d)) \wedge (\neg P(e) \Rightarrow P(b)) \wedge (\neg \forall x \in M_2 : P(x)) \wedge (\exists x \in M_1 : \neg P(x))$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur b ist ausgemalt.
- Nur d ist ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Genau c und d sind ausgemalt.
- Genau a, c und d sind ausgemalt.
- Genau b, c und d sind ausgemalt.
- Keiner der Punkte ist ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 9 – <u>Neuer Aufgabenblock!</u>

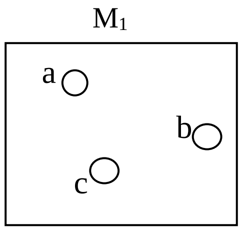
Gegeben ist die Menge M1. Sie besteht aus den drei Punkten a, b und c. Jeder Punkt kann entweder <u>leer, ausgemalt oder angekreuzt</u> sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“ und K(x) für „x ist angekreuzt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(K(a) \Rightarrow P(c)\right) \wedge \left(P(b)\right) \wedge \left(K(b) \vee K(a)\right)$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und c sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt und c ist angekreuzt.
- o Genau b und c sind ausgemalt und a ist angekreuzt.
- o Genau a und c sind ausgemalt und b ist angekreuzt.
- o Alle Punkte sind angekreuzt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 10

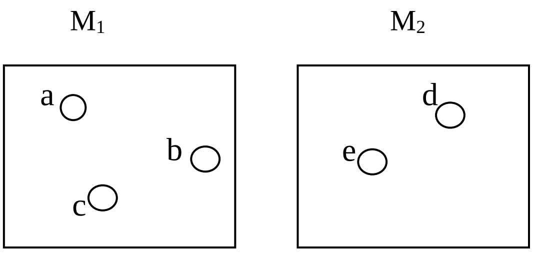
Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c, die Menge M2 besteht aus den zwei Punkten d und e. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt" und K(x) für „x ist angekreuzt".

Logischer Ausdruck als Formel:

$$\big((\neg P(c)) \Rightarrow \neg K(c)\big) \wedge \big(\forall x \in M_2 : K(x)\big) \wedge (K(c) \vee K(a)) \wedge \big(K(d) \Rightarrow (\neg P(c))\big) \wedge (\exists x \in M_1 : P(x))$$

Logischer Ausdruck als Grafik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau c und d sind ausgemalt.
- o Genau d und e sind ausgemalt.
- o Genau a ist ausgemalt und b, c, d und e sind angekreuzt.
- o Genau b ist ausgemalt und a, d und e sind angekreuzt.
- o Genau d ist ausgemalt und a und b sind angekreuzt.

Aufgabe 11

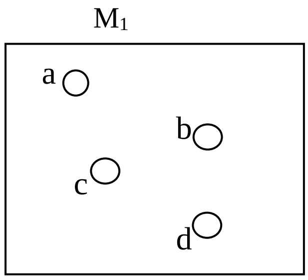
Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“ und K(x) für „x ist angekreuzt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$\big((\exists x \in M_1 : K(x)) \Rightarrow P(c)\big) \wedge \big(\neg\big(K(a) \vee P(a)\big)\big) \wedge \big(K(a) \vee K(b)\big) \wedge ((\neg P(d)) \Rightarrow K(c))$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a ist angekreuzt und c und d sind ausgemalt.
- o Genau b ist angekreuzt und c und d sind ausgemalt.
- o Genau a ist ausgemalt und c und d sind angekreuzt.
- o Genau b ist ausgemalt und c und d sind angekreuzt.
- o Genau d ist ausgemalt und a und c sind angekreuzt.
- o Keiner der Punkte ist angekreuzt oder ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind angekreuzt.

Aufgabe 12

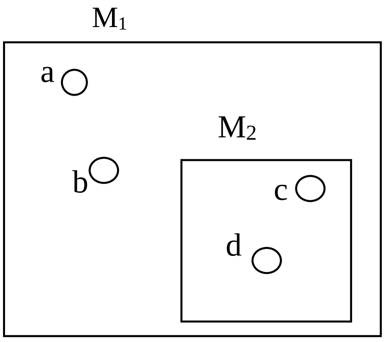
Gegeben sind die Punkte a, b, c und d, sowie die Mengen M1 und M2. M1 beinhaltet genau die Punkte a, b, c und d. M2 beinhaltet genau die Punkte c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“ und K(x) für „x ist angekreuzt“.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(\forall x \in M_1 : K(x) \vee P(x)\right) \wedge (K(c)) \wedge (K(d) \Rightarrow \neg(K(b) \vee K(a))) \wedge \left(K(c) \Leftrightarrow K(d)\right)$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt, c und d sind angekreuzt.
- Genau c und d sind ausgemalt, a und b sind angekreuzt.
- Genau a und c sind ausgemalt, b und d sind angekreuzt.
- Genau a und d sind ausgemalt, b und c sind angekreuzt.
- Keiner der Punkte ist ausgemalt oder angekreuzt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind angekreuzt.

Aufgabe 13 – <u>Neuer Aufgabenblock!</u>

Gegeben ist die Menge M1. Sie besteht aus den Punkten a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt <u>verbunden</u> sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

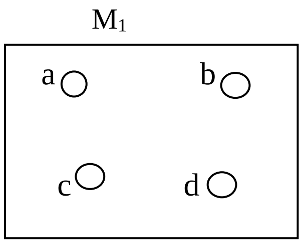
Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(\neg\forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy\right) \wedge \left(aVb\right)$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a ist mit b verbunden.
- o Genau a ist mit c verbunden.
- o Genau a ist mit d verbunden.
- o Genau b ist mit c verbunden.
- o Genau b ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- o Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 14

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a, b und c. Die Menge M2 enthält die Punkte d, e und f. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

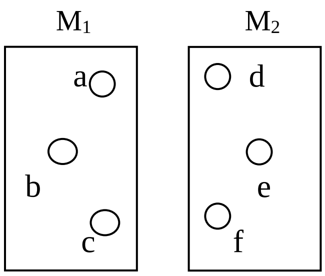
Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(aVe) \wedge (\forall x \in M_1 : \exists y \in M_2 : xVy) \wedge (bVe \vee bVd)$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau a und e sind verbunden.
- Genau c und d sind verbunden.
- Genau c und f sind verbunden.
- Genau a ist mit e verbunden und b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden, c ist mit d verbunden und e ist mit f verbunden.
- Genau a ist mit e verbunden, b ist mit d verbunden und c ist mit f verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 15

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkt a, b, c, d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

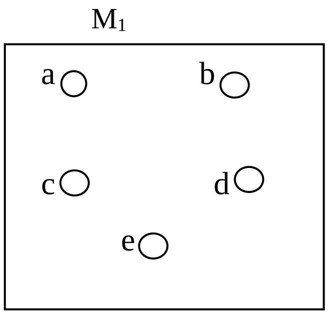
Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(aVb \vee aVc) \wedge (\neg \exists x \in M_1 : xVc) \wedge (aVb \Rightarrow dVe)$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau d und e sind verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und d ist mit e verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit d verbunden und c ist mit e verbunden.
- Genau a ist mit e verbunden und b ist mit c verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 16

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

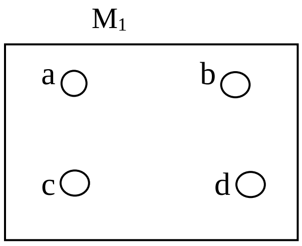
Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(aVb \Rightarrow \forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy\right) \wedge \left(\neg(aVb) \Rightarrow \neg\exists x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy\right) \wedge \left(\neg\forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy\right)$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau a und c sind verbunden.
- Genau b und d sind verbunden.
- Genau b und c sind verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit d verbunden und b ist mit c verbunden.
- Kein Punkt ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 17

Gegeben sind die Mengen M1, M2 und M3. Die Menge M1 enthält die Punkt a und b, die Menge M2 enthält den Punkt c und die Menge M3 enthält die Punkte d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

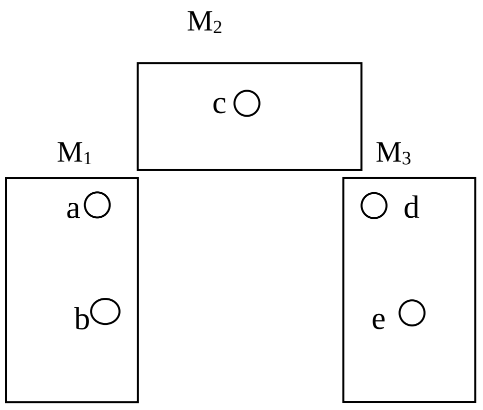
Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\exists x \in M_3 : aVx) \wedge ((aVc) \vee (dVc)) \wedge (\forall x \in M_2 : \exists y \in M_3 : xVy)$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind verbunden.
- o Genau a und e sind verbunden.
- o Genau c und d sind verbunden.
- o Genau a ist verbunden mit b und d ist verbunden mit e.
- o Genau a ist verbunden mit e und c ist verbunden mit d.
- o Genau b ist verbunden mit c und a ist verbunden mit e.
- o Genau b ist verbunden mit d und c ist verbunden mit e.
- o Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 18

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a und b. Die Menge M2 enthält die Punkte c, d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

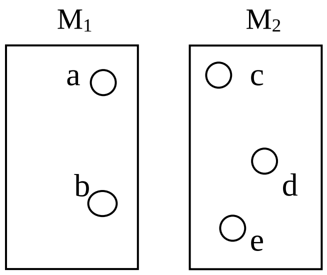
Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(\exists x \in M_2 : aVx\right) \wedge \left((cVd) \vee (dVe)\right) \wedge \left(\neg(dVe)\right)$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind verbunden.
- o Genau b und c sind verbunden.
- o Genau c und e sind verbunden.
- o Genau d und e sind verbunden.
- o Genau a ist verbunden mit d und c ist verbunden mit e.
- o Genau a ist verbunden mit e und c ist verbunden mit d.
- o Genau d ist verbunden mit e und a ist verbunden mit c.
- o Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 19

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a, b, c und d. Die Menge M2 enthält die Punkte e, f, g und h. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

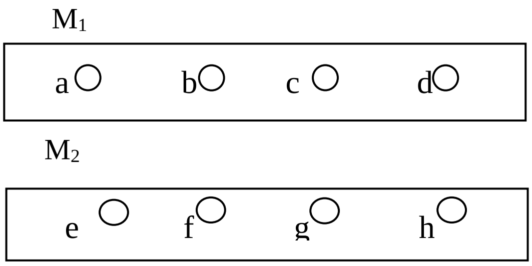
Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(\forall x \in M_1 : \exists y \in M_2 : xVy\right) \wedge \left(\left(bVe\right) \vee \left(bVf\right)\right) \wedge \left(bVe \Rightarrow \neg(aVh)\right) \wedge (bVf \Rightarrow dVg) \wedge (aVh)$$

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a ist mit c verbunden.
- Genau a ist mit h verbunden.
- Genau d ist mit g verbunden.
- Genau b ist mit f verbunden und c ist mit e verbunden.
- Genau b ist mit f verbunden und d ist mit e verbunden.
- Genau a ist mit b, c ist mit g, e mit f und h ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit h, b mit f, c mit e und d ist mit g verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Text-und-Graphik-Version

Aufgabe 1

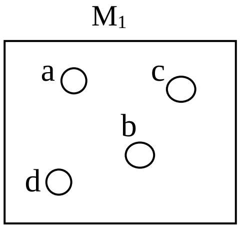
Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c, und d. Jeder dieser Punkte kann entweder ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck als Text:

c ist ausgemalt. Und: Es gilt nicht für alle Elemente x der Menge M1: x ist ausgemalt. Und: b ist genau dann ausgemalt, wenn a ausgemalt ist. Und: Wenn c ausgemalt ist, dann ist a ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Genau a, b und c sind ausgemalt.
- o Genau a, b und d sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 2

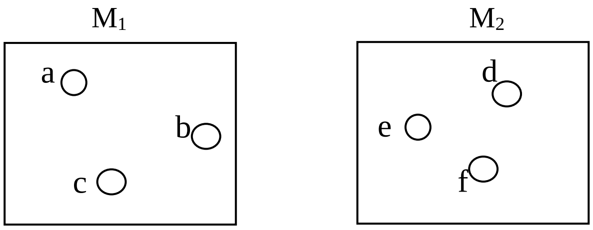
Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c, die Menge M2 besteht aus den Punkten d, e und f. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck als Text:

e ist nicht ausgemalt oder f ist nicht ausgemalt. Und: Wenn d ausgemalt ist, dann ist e ausgemalt. Und: Für alle Punkte der Menge M1 gilt, sie sind nicht ausgemalt. Und: Wenn b nicht ausgemalt ist, dann ist d ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur d ist ausgemalt.
- o Nur e ist ausgemalt.
- o Nur f ist ausgemalt.
- o Genau d und e sind ausgemalt.
- o Genau e und f sind ausgemalt.
- o Genau d und f sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 3

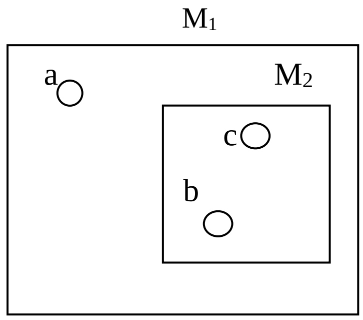
Gegeben sind die Punkte a, b und c, sowie die Mengen M1 und M2. M1 beinhaltet genau die Punkte a, b und c, und M2 beinhaltet genau die Punkte b und c. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck als Text:

Es gilt nicht, dass für alle Elemente x der Menge M1 gilt: x ist nicht ausgemalt. Und: Es gilt nicht, dass es ein Element x in der Menge M2 gibt, für das gilt: x ist ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und c sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 4

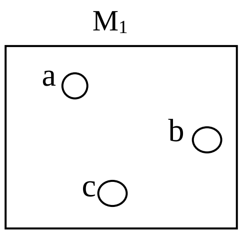
Gegeben ist die Menge M1 bestehend aus den Punkten a, b und c. Jeder Punkt kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn a nicht ausgemalt ist, dann gilt, dass wenn b ausgemalt ist, dann ist c ausgemalt. Und: b ist ausgemalt. Und: Wenn b ausgemalt ist, dann ist c nicht ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und c sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 5

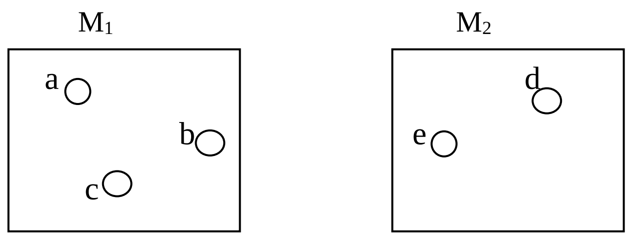
Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c. Die Menge M2 besteht aus den zwei Punkten d und e. Jeder Punkt kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn c ausgemalt ist, dann ist d nicht ausgemalt. Und: a ist genau dann ausgemalt, wenn e nicht ausgemalt ist. Und: Es gilt für alle Elemente der Menge M1, dass sie ausgemalt sind, oder es gilt für alle Elemente der Menge M1, dass sie nicht ausgemalt sind. Und: e ist nicht ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur b ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Genau a und c sind ausgemalt.
- Genau c und d sind ausgemalt.
- Genau a, b und c sind ausgemalt.
- Genau a, b und d sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 6

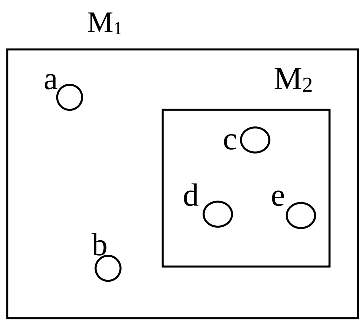
Gegeben sind die Punkte a, b, c, d und e, sowie die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 beinhaltet genau die Punkte a, b, c, d und e, und M2 beinhaltet genau die Punkte c, d und e. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck als Text:

d ist ausgemalt genau dann, wenn c ausgemalt ist. Und: Wenn nicht für alle Elemente der Menge M1 gilt, dass sie ausgemalt sind, dann gibt es mindestens einen Punkt der Menge M2 für den gilt, er ist nicht ausgemalt. Und: d ist ausgemalt. Und: Wenn c ausgemalt ist, dann ist e ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur a ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Nur e ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Genau d und e sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 7

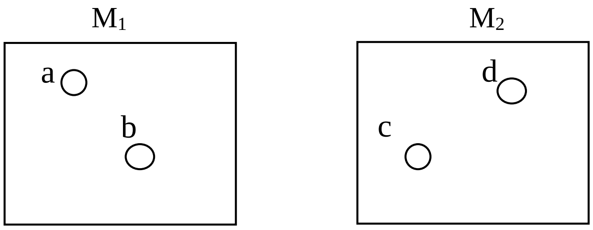
Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den Punkten a und b. Die Menge M2 besteht aus den Punkten c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck als Text:

Es gibt mindestens einen Punkt der Menge M2, für den gilt: Dieser Punkt ist ausgemalt. Und: b ist ausgemalt. Und: Es gilt nicht: a ist ausgemalt und b ist ausgemalt. Und: Wenn a nicht ausgemalt ist, dann ist d nicht ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Nur d ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und d sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Keiner der Punkte ist ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 8

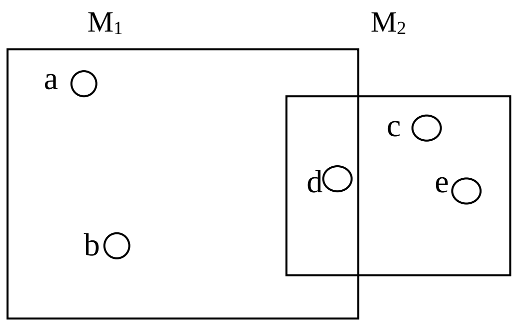
Gegeben sind die Punkte a, b, c, d und e, sowie die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 beinhaltet genau die Punkte a, b und d. Die Menge M2 beinhaltet genau die Punkte d, c und e. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn d ausgemalt ist, dann ist c ausgemalt. Und: Wenn d Element der Schnittmenge von M1 und M2 ist, dann ist d ausgemalt. Und: Wenn e nicht ausgemalt ist, dann ist b ausgemalt. Und: Es gilt nicht für alle Elemente der Menge M2, dass sie ausgemalt sind. Und: Es gibt mindestens einen Punkt in der Menge M1, für den gilt, er ist nicht ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur b ist ausgemalt.
- Nur d ist ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Genau c und d sind ausgemalt.
- Genau a, c und d sind ausgemalt.
- Genau b, c und d sind ausgemalt.
- Keiner der Punkte ist ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 9 – <u>Neuer Aufgabenblock!</u>

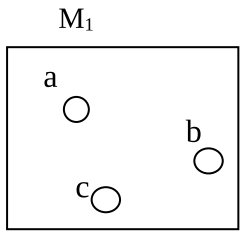
Gegeben ist die Menge M1. Sie besteht aus den drei Punkten a, b und c. Jeder Punkt kann entweder <u>leer, ausgemalt oder angekreuzt</u> sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn a angekreuzt ist, dann ist c ausgemalt. Und: b ist ausgemalt. Und: b ist angekreuzt oder a ist angekreuzt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau a und c sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt und c ist angekreuzt.
- Genau b und c sind ausgemalt und a ist angekreuzt.
- Genau a und c sind ausgemalt und b ist angekreuzt.
- Alle Punkte sind angekreuzt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 10

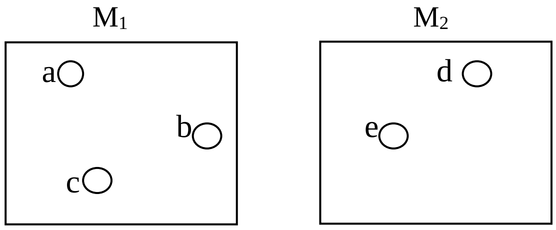
Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c, die Menge M2 besteht aus den zwei Punkten d und e. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn c nicht ausgemalt ist, dann ist c nicht angekreuzt. Und: Für alle Elemente der Menge 2 gilt: Sie sind angekreuzt. Und: c ist angekreuzt oder a ist angekreuzt. Und: Wenn d angekreuzt ist, dann ist c nicht ausgemalt. Und: Es gibt mindestens ein Element der Menge M1 für das gilt, es ist ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau c und d sind ausgemalt.
- o Genau d und e sind ausgemalt.
- o Genau a ist ausgemalt und b, c, d und e sind angekreuzt.
- o Genau b ist ausgemalt und a, d und e sind angekreuzt.
- o Genau d ist ausgemalt und a und b sind angekreuzt.

Aufgabe 11

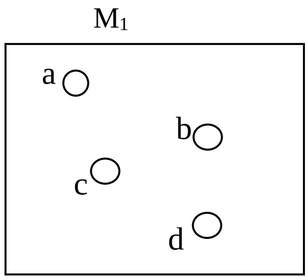
Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen.

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn es einen Punkt in der Menge M1 gibt, für den gilt, er ist angekreuzt, dann ist c ausgemalt. Und: Es gilt nicht: a ist angekreuzt oder a ist ausgemalt. Und: a ist angekreuzt oder b ist angekreuzt. Und: Wenn d nicht ausgemalt ist, dann ist c angekreuzt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a ist angekreuzt und c und d sind ausgemalt.
- Genau b ist angekreuzt und c und d sind ausgemalt.
- Genau a ist ausgemalt und c und d sind angekreuzt.
- Genau b ist ausgemalt und c und d sind angekreuzt.
- Genau d ist ausgemalt und a und c sind angekreuzt.
- Keiner der Punkte ist angekreuzt oder ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind angekreuzt.

Aufgabe 12

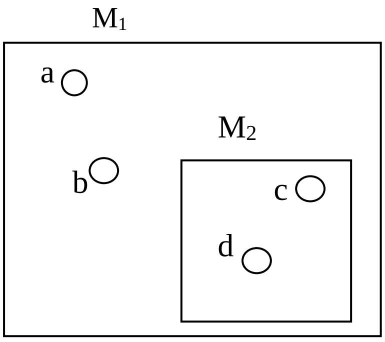
Gegeben sind die Punkte a, b, c und d, sowie die Mengen M1 und M2. M1 beinhaltet genau die Punkte a, b, c und d. M2 beinhaltet genau die Punkte c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkt ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Logischer Ausdruck als Text:

Für alle Elemente x der Menge M1 gilt: x ist angekreuzt oder x ist ausgemalt. Und: c ist angekreuzt. Und: Wenn d angekreuzt ist, dann gilt nicht: b ist angekreuzt oder a ist angekreuzt. Und: c ist genau dann angekreuzt, wenn d angekreuzt ist.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt, c und d sind angekreuzt.
- Genau c und d sind ausgemalt, a und b sind angekreuzt.
- Genau a und c sind ausgemalt, b und d sind angekreuzt.
- Genau a und d sind ausgemalt, b und c sind angekreuzt.
- Keiner der Punkte ist ausgemalt oder angekreuzt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind angekreuzt.

Aufgabe 13 – Neuer Aufgabenblock!

Gegeben ist die Menge M1. Sie besteht aus den Punkten a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

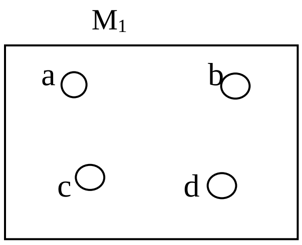
Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. a ist verbunden mit b ist gleichbedeutend mit b ist verbunden mit a.

Logischer Ausdruck als Text:

Es gilt nicht für alle Elemente x der Menge M1, dass es einen Punkt y der Menge M1 gibt, für den gilt: x ist verbunden mit y. Und: a ist verbunden mit b.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a ist mit b verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden.
- Genau a ist mit d verbunden.
- Genau b ist mit c verbunden.
- Genau b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 14

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a, b und c. Die Menge M2 enthält die Punkte d, e und f. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

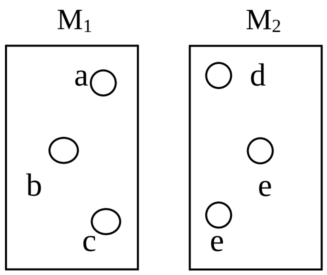
Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. a ist verbunden mit b ist gleichbedeutend mit b ist verbunden mit a.

Logischer Ausdruck als Text:

a ist mit dem Punkt e verbunden. Und: Für alle Elemente x der Menge M1 gilt, es gibt ein Element y der Menge M2, sodass gilt: x ist mit y verbunden. Und: b ist verbunden mit e oder b ist verbunden mit d.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind verbunden.
- o Genau a und e sind verbunden.
- o Genau c und d sind verbunden.
- o Genau c und f sind verbunden.
- o Genau a ist mit e verbunden und b ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit b verbunden, c ist mit d verbunden und e ist mit f verbunden.
- o Genau a ist mit e verbunden, b ist mit d verbunden und c ist mit f verbunden.
- o Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 15

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkt a, b, c, d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

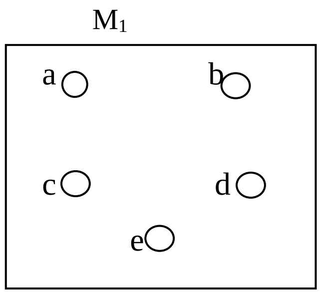
Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. a ist verbunden mit b ist gleichbedeutend mit b ist verbunden mit a.

Logischer Ausdruck als Text:

a ist verbunden mit b oder a ist verbunden mit c. Und: Es existiert kein Punkt in der Menge M1 für den gilt, er ist mit c verbunden. Und: Wenn a mit b verbunden ist, dann ist d mit e verbunden.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind verbunden.
- o Genau d und e sind verbunden.
- o Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit b verbunden und d ist mit e verbunden.
- o Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit d verbunden und c ist mit e verbunden.
- o Genau a ist mit e verbunden und b ist mit c verbunden.
- o Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 16

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

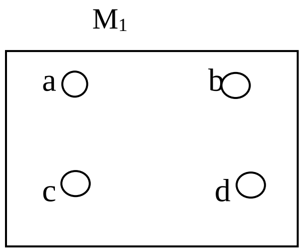
Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. a ist verbunden mit b ist gleichbedeutend mit b ist verbunden mit a.

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn a mit b verbunden ist, dann gilt für alle Elemente x der Menge M1: Es gibt ein Element y der Menge M1, sodass x mit y verbunden ist. Und: Wenn a nicht mit b verbunden ist, dann gibt es kein Element x der Menge M1 für das gilt: Es gibt ein Element y der Menge M1, sodass x mit y verbunden ist. Und: Es gilt nicht für alle Elemente x der Menge M1, dass es ein Element y der Menge M1 gibt, sodass x mit y verbunden ist.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau a und c sind verbunden.
- Genau b und d sind verbunden.
- Genau b und c sind verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit d verbunden und b ist mit c verbunden.
- Kein Punkt ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 17

Gegeben sind die Mengen M1, M2 und M3. Die Menge M1 enthält die Punkt a und b, die Menge M2 enthält den Punkt c und die Menge M3 enthält die Punkte d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

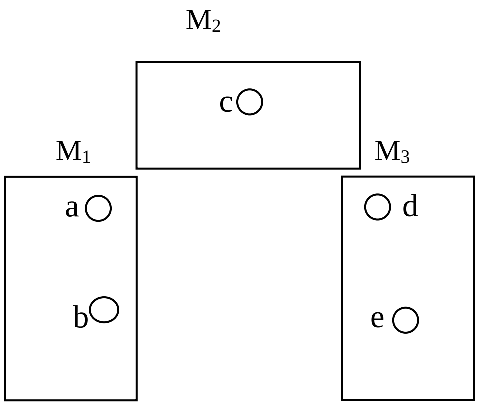
Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. a ist verbunden mit b ist gleichbedeutend mit b ist verbunden mit a.

Logischer Ausdruck als Text:

Es gibt mindestens ein Element x der Menge M3 für das gilt: a ist mit x verbunden. Und: a ist verbunden mit c oder d ist verbunden mit c. Und: Für alle Elemente x der Menge M2 gilt: Es gibt ein Element y der Menge M3, sodass x mit y verbunden ist.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau a und e sind verbunden.
- Genau c und d sind verbunden.
- Genau a ist verbunden mit b und d ist verbunden mit e.
- Genau a ist verbunden mit e und c ist verbunden mit d.
- Genau b ist verbunden mit c und a ist verbunden mit e.
- Genau b ist verbunden mit d und c ist verbunden mit e.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 18

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a und b. Die Menge M2 enthält die Punkte c, d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

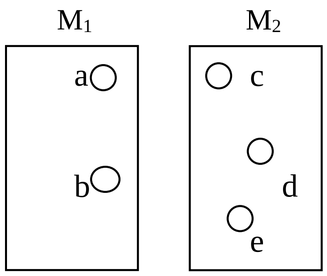
Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. a ist verbunden mit b ist gleichbedeutend mit b ist verbunden mit a.

Logischer Ausdruck als Text:

Es gibt mindestens ein Element x in der Menge M2 für das gilt: a ist verbunden mit x. Und: c ist verbunden mit d, oder d ist verbunden mit e. Und: d ist nicht verbunden mit e.

Logischer Ausdruck als Formel:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind verbunden.
- o Genau b und c sind verbunden.
- o Genau c und e sind verbunden.
- o Genau d und e sind verbunden.
- o Genau a ist verbunden mit d und c ist verbunden mit e.
- o Genau a ist verbunden mit e und c ist verbunden mit d.
- o Genau d ist verbunden mit e und a ist verbunden mit c.
- o Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 19

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a, b, c und d. Die Menge M2 enthält die Punkte e, f, g und h. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

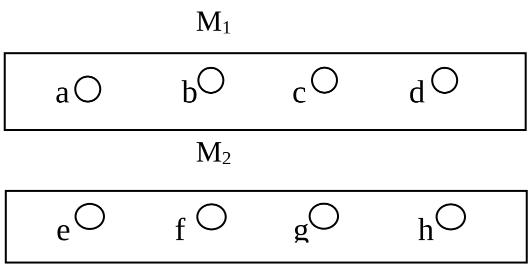
Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. a ist verbunden mit b ist gleichbedeutend mit b ist verbunden mit a.

Logischer Ausdruck als Text:

Für alle Elemente x der Menge M1 gilt: Es gibt ein Element y der Menge M2, sodass x mit y verbunden ist. Und: b ist verbunden mit e, oder b ist verbunden mit f. Und: Wenn b mit e verbunden ist, dann ist a nicht mit h verbunden. Und: Wenn b mit f verbunden ist, dann ist d mit g verbunden. Und: a ist mit h verbunden.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a ist mit c verbunden.
- Genau a ist mit h verbunden.
- Genau d ist mit g verbunden.
- Genau b ist mit f verbunden und c ist mit e verbunden.
- Genau b ist mit f verbunden und d ist mit e verbunden.
- Genau a ist mit b, c ist mit g, e mit f und h ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit h, b mit f, c mit e und d ist mit g verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Formel-Text-und-Graphik-Version

Aufgabe 1

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c, und d. Jeder dieser Punkte kann entweder ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

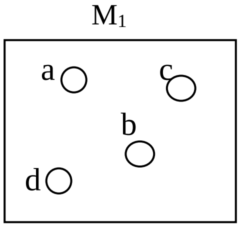
Logischer Ausdruck als Formel:

$$(P(c)) \wedge (\neg \forall x \in M_1 : P(x)) \wedge (P(b) \Leftrightarrow P(a)) \wedge (P(c) \Rightarrow P(a))$$

Logischer Ausdruck als Text:

c ist ausgemalt. Und: Es gilt nicht für alle Elemente x der Menge M1: x ist ausgemalt. Und: b ist genau dann ausgemalt, wenn a ausgemalt ist. Und: Wenn c ausgemalt ist, dann ist a ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur a ist ausgemalt.
- Nur c ist ausgemalt.
- Genau a und b sind ausgemalt.
- Genau b und c sind ausgemalt.
- Genau a, b und c sind ausgemalt.
- Genau a, b und d sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 2

Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c, die Menge M2 besteht aus den Punkten d, e und f. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt".

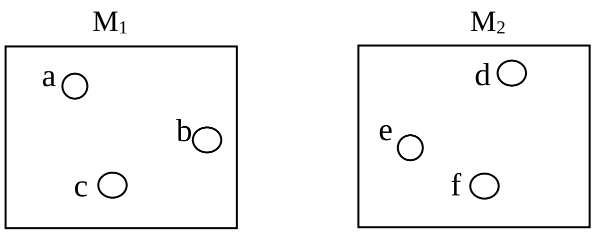
Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\neg P(e) \vee \neg P(f)) \wedge (P(d) \Rightarrow P(e)) \wedge (\forall x \in M_1 : \neg P(x)) \wedge (\neg P(b) \Rightarrow P(d))$$

Logischer Ausdruck als Text:

e ist nicht ausgemalt oder f ist nicht ausgemalt. Und: Wenn d ausgemalt ist, dann ist e ausgemalt. Und: Für alle Punkte der Menge M1 gilt, sie sind nicht ausgemalt. Und: Wenn b nicht ausgemalt ist, dann ist d ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Nur d ist ausgemalt.
- Nur e ist ausgemalt.
- Nur f ist ausgemalt.
- Genau d und e sind ausgemalt.
- Genau e und f sind ausgemalt.
- Genau d und f sind ausgemalt.
- Alle Punkte sind ausgemalt.
- Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Punkte a, b und c, sowie die Mengen M1 und M2. M1 beinhaltet genau die Punkte a, b und c, und M2 beinhaltet genau die Punkte b und c. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

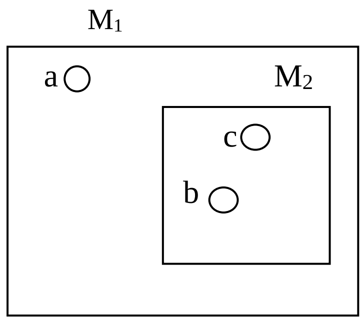
Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\neg \forall x \in M_1 : \neg P(x)) \wedge (\neg \exists x \in M_2 : P(x))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Es gilt nicht, dass für alle Elemente x der Menge M1 gilt: x ist nicht ausgemalt. Und: Es gilt nicht, dass es ein Element x in der Menge M2 gibt, für das gilt: x ist ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und c sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Menge M1 bestehend aus den Punkten a, b und c. Jeder Punkt kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

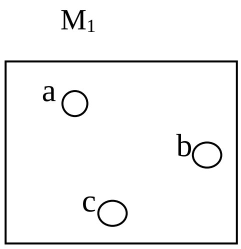
Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\neg P(a) \Rightarrow (P(b) \Rightarrow P(c))) \wedge (P(b)) \wedge (P(b) \Rightarrow \neg P(c))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn a nicht ausgemalt ist, dann gilt, dass wenn b ausgemalt ist, dann ist c ausgemalt. Und: b ist ausgemalt. Und: Wenn b ausgemalt ist, dann ist c nicht ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und c sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 5

Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c. Die Menge M2 besteht aus den zwei Punkten d und e. Jeder Punkt kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

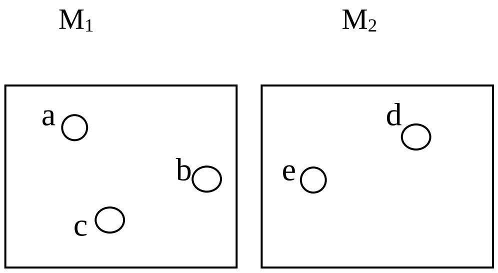
Logischer Ausdruck als Formel:

$$(P(c)\Rightarrow \neg P(d)) \wedge (P(a)\Leftrightarrow \neg P(e)) \wedge ((\forall x\in M_1 : P(x)) \vee (\forall x\in M_1 : \neg P(x))) \wedge (\neg P(e))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn c ausgemalt ist, dann ist d nicht ausgemalt. Und: a ist genau dann ausgemalt, wenn e nicht ausgemalt ist. Und: Es gilt für alle Elemente der Menge M1, dass sie ausgemalt sind, oder es gilt für alle Elemente der Menge M1, dass sie nicht ausgemalt sind. Und: e ist nicht ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und c sind ausgemalt.
- o Genau c und d sind ausgemalt.
- o Genau a, b und c sind ausgemalt.
- o Genau a, b und d sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Punkte a, b, c, d und e, sowie die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 beinhaltet genau die Punkte a, b, c, d und e, und M2 beinhaltet genau die Punkte c, d und e. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegeben Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

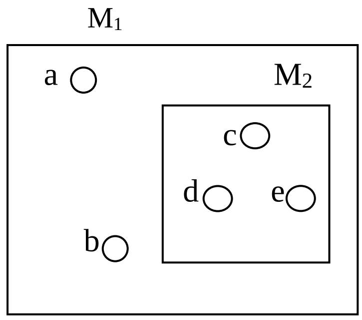
Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(P(d) \Leftrightarrow P(c)\right) \wedge \left(\left(\neg \forall x \in M_1 : P(x)\right) \Rightarrow \left(\exists x \in M_2 : \neg P(x)\right)\right) \wedge \left(P(d)\right) \wedge \left(P(c) \Rightarrow P(e)\right)$$

Logischer Ausdruck als Text:

d ist ausgemalt genau dann, wenn c ausgemalt ist. Und: Wenn nicht für alle Elemente der Menge M1 gilt, dass sie ausgemalt sind, dann gibt es mindestens einen Punkt der Menge M2 für den gilt, er ist nicht ausgemalt. Und: d ist ausgemalt. Und: Wenn c ausgemalt ist, dann ist e ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Nur e ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Genau d und e sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Kein Punkt ist ausgemalt.

Aufgabe 7

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den Punkten a und b. Die Menge M2 besteht aus den Punkten c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

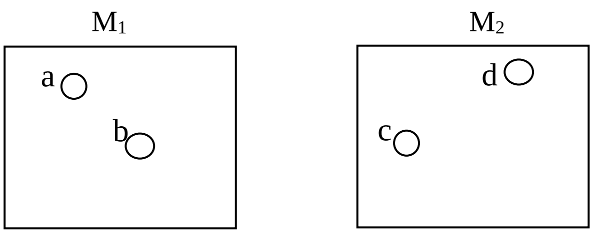
Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\exists x \in M_2 : P(x)) \wedge (P(b)) \wedge (\neg(P(a) \wedge P(b))) \wedge (\neg P(a) \Rightarrow \neg P(d))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Es gibt mindestens einen Punkt der Menge M2, für den gilt: Dieser Punkt ist ausgemalt. Und: b ist ausgemalt. Und: Es gilt nicht: a ist ausgemalt und b ist ausgemalt. Und: Wenn a nicht ausgemalt ist, dann ist d nicht ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur a ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Nur d ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und d sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Keiner der Punkte ist ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 8

Gegeben sind die Punkte a, b, c, d und e, sowie die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 beinhaltet genau die Punkte a, b und d. Die Menge M2 beinhaltet genau die Punkte d, c und e. Jeder dieser Punkte kann ausgemalt oder nicht ausgemalt sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte ausgemalt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“.

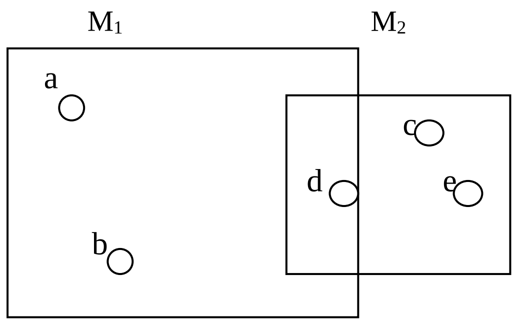
Logischer Ausdruck als Formel:

$$(P(d) \Rightarrow P(c)) \wedge (d \in (M_1 \cap M_2) \Rightarrow P(d)) \wedge (\neg P(e) \Rightarrow P(b)) \wedge (\neg \forall x \in M_2 : P(x)) \wedge (\exists x \in M_1 : \neg P(x))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn d ausgemalt ist, dann ist c ausgemalt. Und: Wenn d Element der Schnittmenge von M1 und M2 ist, dann ist d ausgemalt. Und: Wenn e nicht ausgemalt ist, dann ist b ausgemalt. Und: Es gilt nicht für alle Elemente der Menge M2, dass sie ausgemalt sind. Und: Es gibt mindestens einen Punkt in der Menge M1, für den gilt, er ist nicht ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur d ist ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Genau c und d sind ausgemalt.
- o Genau a, c und d sind ausgemalt.
- o Genau b, c und d sind ausgemalt.
- o Keiner der Punkte ist ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 9 – <u>Neuer Aufgabenblock!</u>

Gegeben ist die Menge M1. Sie besteht aus den drei Punkten a, b und c. Jeder Punkt kann entweder <u>leer, ausgemalt oder angekreuzt</u> sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“ und K(x) für „x ist angekreuzt“.

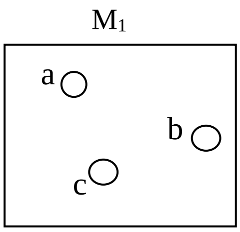
Logischer Ausdruck als Formel:

$$(K(a) \Rightarrow P(c)) \wedge (P(b)) \wedge (K(b) \vee K(a))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn a angekreuzt ist, dann ist c ausgemalt. Und: b ist ausgemalt. Und: b ist angekreuzt oder a ist angekreuzt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und c sind ausgemalt.
- o Genau b und c sind ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt und c ist angekreuzt.
- o Genau b und c sind ausgemalt und a ist angekreuzt.
- o Genau a und c sind ausgemalt und b ist angekreuzt.
- o Alle Punkte sind angekreuzt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.

Aufgabe 10

Gegeben sind zwei Mengen M1 und M2. Die Menge M1 besteht aus den drei Punkten a, b und c, die Menge M2 besteht aus den zwei Punkten d und e. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“ und K(x) für „x ist angekreuzt“.

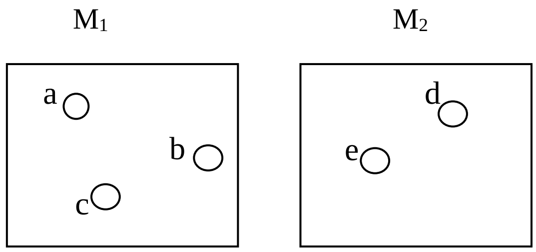
Logischer Ausdruck als Formel:

$$\big((\neg P(c)) \Rightarrow \neg K(c)\big) \wedge \big(\forall x \in M_2 : K(x)\big) \wedge (K(c) \vee K(a)) \wedge \big(K(d) \Rightarrow (\neg P(c))\big) \wedge (\exists x \in M_1 : P(x))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn c nicht ausgemalt ist, dann ist c nicht angekreuzt. Und: Für alle Elemente der Menge 2 gilt: Sie sind angekreuzt. Und: c ist angekreuzt oder a ist angekreuzt. Und: Wenn d angekreuzt ist, dann ist c nicht ausgemalt. Und: Es gibt mindestens ein Element der Menge M1 für das gilt, es ist ausgemalt.

Logischer Ausdruck als Grafik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Nur b ist ausgemalt.
- o Nur c ist ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau c und d sind ausgemalt.
- o Genau d und e sind ausgemalt.
- o Genau a ist ausgemalt und b, c, d und e sind angekreuzt.
- o Genau b ist ausgemalt und a, d und e sind angekreuzt.
- o Genau d ist ausgemalt und a und b sind angekreuzt.

Aufgabe 11

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt“ und K(x) für „x ist angekreuzt“.

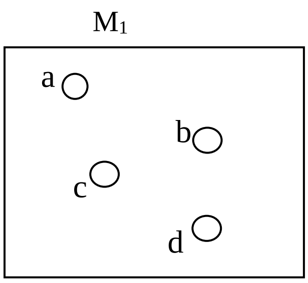
Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left((\exists x \in M_1 : K(x)) \Rightarrow P(c)\right) \wedge \left(\neg\left(K(a) \vee P(a)\right)\right) \wedge \left(K(a) \vee K(b)\right) \wedge ((\neg P(d)) \Rightarrow K(c))$$

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn es einen Punkt in der Menge M1 gibt, für den gilt, er ist angekreuzt, dann ist c ausgemalt. Und: Es gilt nicht: a ist angekreuzt oder a ist ausgemalt. Und: a ist angekreuzt oder b ist angekreuzt. Und: Wenn d nicht ausgemalt ist, dann ist c angekreuzt.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a ist angekreuzt und c und d sind ausgemalt.
- o Genau b ist angekreuzt und c und d sind ausgemalt.
- o Genau a ist ausgemalt und c und d sind angekreuzt.
- o Genau b ist ausgemalt und c und d sind angekreuzt.
- o Genau d ist ausgemalt und a und c sind angekreuzt.
- o Keiner der Punkte ist angekreuzt oder ausgemalt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind angekreuzt.

Aufgabe 12

Gegeben sind die Punkte a, b, c und d, sowie die Mengen M1 und M2. M1 beinhaltet genau die Punkte a, b, c und d. M2 beinhaltet genau die Punkte c und d. Jeder dieser Punkte kann entweder leer, ausgemalt oder angekreuzt sein, jedoch nie mehrere Dinge zugleich.

Überlegen Sie, welche Punkte ausgemalt oder angekreuzt sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht P(x) für „x ist ausgemalt" und K(x) für „x ist angekreuzt".

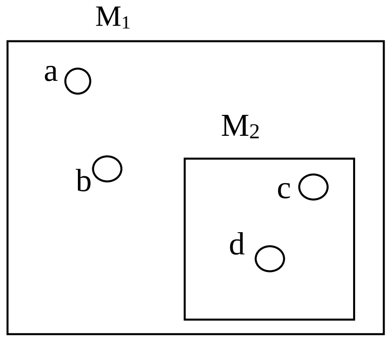
Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(\forall x \in M_1 : K(x) \vee P(x)\right) \wedge (K(c)) \wedge (K(d) \Rightarrow \neg(K(b) \vee K(a))) \wedge \left(K(c) \Leftrightarrow K(d)\right)$$

Logischer Ausdruck als Text:

Für alle Elemente x der Menge M1 gilt: x ist angekreuzt oder x ist ausgemalt. Und: c ist angekreuzt. Und: Wenn d angekreuzt ist, dann gilt nicht: b ist angekreuzt oder a ist angekreuzt. Und: c ist genau dann angekreuzt, wenn d angekreuzt ist.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind ausgemalt.
- o Genau a und b sind ausgemalt, c und d sind angekreuzt.
- o Genau c und d sind ausgemalt, a und b sind angekreuzt.
- o Genau a und c sind ausgemalt, b und d sind angekreuzt.
- o Genau a und d sind ausgemalt, b und c sind angekreuzt.
- o Keiner der Punkte ist ausgemalt oder angekreuzt.
- o Alle Punkte sind ausgemalt.
- o Alle Punkte sind angekreuzt.

Aufgabe 13 – Neuer Aufgabenblock!

Gegeben ist die Menge M1. Sie besteht aus den Punkten a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

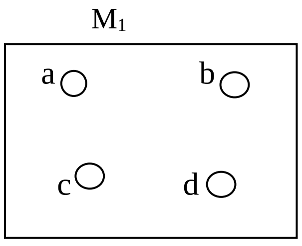
Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(\neg\forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy\right) \wedge \left(aVb\right)$$

Logischer Ausdruck als Text:

Es gilt nicht für alle Elemente x der Menge M1, dass es einen Punkt y der Menge M1 gibt, für den gilt: x ist verbunden mit y. Und: a ist verbunden mit b.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a ist mit b verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden.
- Genau a ist mit d verbunden.
- Genau b ist mit c verbunden.
- Genau b ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 14

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a, b und c. Die Menge M2 enthält die Punkte d, e und f. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

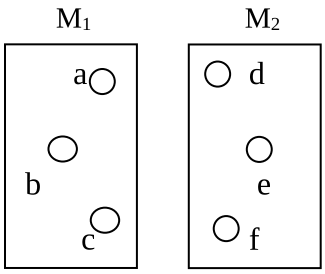
Logischer Ausdruck als Formel:

$$(aVe) \wedge (\forall x \in M_1 : \exists y \in M_2 : xVy) \wedge (bVe \vee bVd)$$

Logischer Ausdruck als Text:

a ist mit dem Punkt e verbunden. Und: Für alle Elemente x der Menge M1 gilt, es gibt ein Element y der Menge M2, sodass gilt: x ist mit y verbunden. Und: b ist verbunden mit e oder b ist verbunden mit d.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind verbunden.
- o Genau a und e sind verbunden.
- o Genau c und d sind verbunden.
- o Genau c und f sind verbunden.
- o Genau a ist mit e verbunden und b ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit b verbunden, c ist mit d verbunden und e ist mit f verbunden.
- o Genau a ist mit e verbunden, b ist mit d verbunden und c ist mit f verbunden.
- o Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 15

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkt a, b, c, d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr" zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b".

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

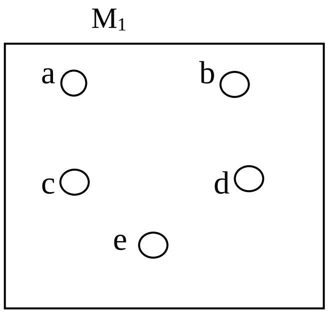
Logischer Ausdruck als Formel:

$$(aVb \vee aVc) \wedge (\neg \exists x \in M_1 : xVc) \wedge (aVb \Rightarrow dVe)$$

Logischer Ausdruck als Text:

a ist verbunden mit b oder a ist verbunden mit c. Und: Es existiert kein Punkt in der Menge M1 für den gilt, er ist mit c verbunden. Und: Wenn a mit b verbunden ist, dann ist d mit e verbunden.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind verbunden.
- o Genau d und e sind verbunden.
- o Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit b verbunden und d ist mit e verbunden.
- o Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit d verbunden und c ist mit e verbunden.
- o Genau a ist mit e verbunden und b ist mit c verbunden.
- o Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 16

Gegeben ist die Menge M1. Sie enthält die Punkte a, b, c und d. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

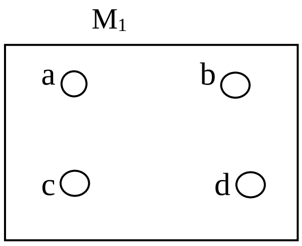
Logischer Ausdruck als Formel:

$$(aVb \Rightarrow \forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy) \wedge (\neg(aVb) \Rightarrow \neg\exists x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy) \wedge (\neg\forall x \in M_1 : \exists y \in M_1 : xVy)$$

Logischer Ausdruck als Text:

Wenn a mit b verbunden ist, dann gilt für alle Elemente x der Menge M1: Es gibt ein Element y der Menge M1, sodass x mit y verbunden ist. Und: Wenn a nicht mit b verbunden ist, dann gibt es kein Element x der Menge M1 für das gilt: Es gibt ein Element y der Menge M1, sodass x mit y verbunden ist. Und: Es gilt nicht für alle Elemente x der Menge M1, dass es ein Element y der Menge M1 gibt, sodass x mit y verbunden ist.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind verbunden.
- o Genau a und c sind verbunden.
- o Genau b und d sind verbunden.
- o Genau b und c sind verbunden.
- o Genau a ist mit b verbunden und c ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit c verbunden und b ist mit d verbunden.
- o Genau a ist mit d verbunden und b ist mit c verbunden.
- o Kein Punkt ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 17

Gegeben sind die Mengen M1, M2 und M3. Die Menge M1 enthält die Punkt a und b, die Menge M2 enthält den Punkt c und die Menge M3 enthält die Punkte d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

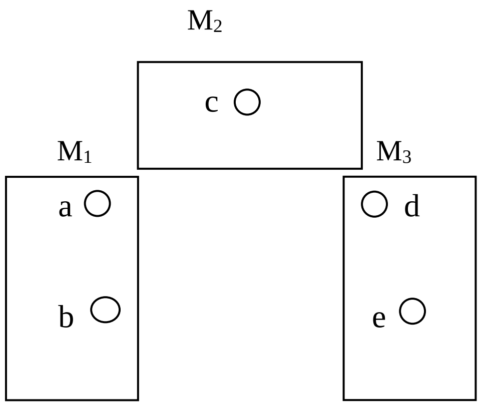
Logischer Ausdruck als Formel:

$$(\exists x \in M_3 : aVx) \wedge ((aVc) \vee (dVc)) \wedge (\forall x \in M_2 : \exists y \in M_3 : xVy)$$

Logischer Ausdruck als Text:

Es gibt mindestens ein Element x der Menge M3 für das gilt: a ist mit x verbunden. Und: a ist verbunden mit c oder d ist verbunden mit c. Und: Für alle Elemente x der Menge M2 gilt: Es gibt ein Element y der Menge M3, sodass x mit y verbunden ist.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a und b sind verbunden.
- Genau a und e sind verbunden.
- Genau c und d sind verbunden.
- Genau a ist verbunden mit b und d ist verbunden mit e.
- Genau a ist verbunden mit e und c ist verbunden mit d.
- Genau b ist verbunden mit c und a ist verbunden mit e.
- Genau b ist verbunden mit d und c ist verbunden mit e.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen verbunden.

Aufgabe 18

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a und b. Die Menge M2 enthält die Punkte c, d und e. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

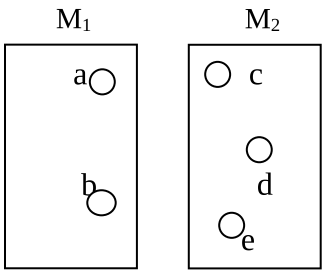
Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(\exists x \in M_2 : aVx\right) \wedge \left((cVd) \vee (dVe)\right) \wedge \left(\neg(dVe)\right)$$

Logischer Ausdruck als Text:

Es gibt mindestens ein Element x in der Menge M2 für das gilt: a ist verbunden mit x. Und: c ist verbunden mit d, oder d ist verbunden mit e. Und: d ist nicht verbunden mit e.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- o Genau a und b sind verbunden.
- o Genau b und c sind verbunden.
- o Genau c und e sind verbunden.
- o Genau d und e sind verbunden.
- o Genau a ist verbunden mit d und c ist verbunden mit e.
- o Genau a ist verbunden mit e und c ist verbunden mit d.
- o Genau d ist verbunden mit e und a ist verbunden mit c.
- o Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.

Aufgabe 19

Gegeben sind die Mengen M1 und M2. Die Menge M1 enthält die Punkte a, b, c und d. Die Menge M2 enthält die Punkte e, f, g und h. Jeder dieser Punkte kann mit genau einem anderen Punkt verbunden sein, nicht alle Punkte müssen jedoch verbunden sein.

Überlegen Sie, welche dieser Punkte verbunden sein müssen, um den gegebenen Ausdruck „wahr“ zu machen. Dabei steht aVb für „a ist verbunden mit b“.

Hinweis: Es geht hier um eine richtungslose Verbindung, d.h. aVb ist gleichbedeutend mit bVa.

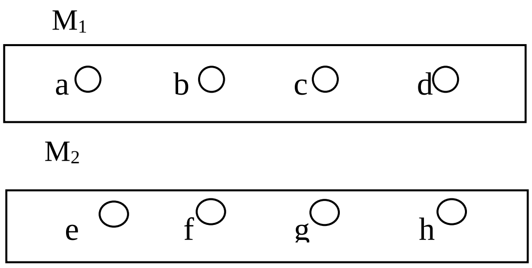
Logischer Ausdruck als Formel:

$$\left(\forall x \in M_1 : \exists y \in M_2 : xVy\right) \wedge \left((bVe) \vee (bVf)\right) \wedge \left(bVe \Rightarrow \neg(aVh)\right) \wedge (bVf \Rightarrow dVg) \wedge (aVh)$$

Logischer Ausdruck als Text:

Für alle Elemente x der Menge M1 gilt: Es gibt ein Element y der Menge M2, sodass x mit y verbunden ist. Und: b ist verbunden mit e, oder b ist verbunden mit f. Und: Wenn b mit e verbunden ist, dann ist a nicht mit h verbunden. Und: Wenn b mit f verbunden ist, dann ist d mit g verbunden. Und: a ist mit h verbunden.

Logischer Ausdruck als Graphik:



Multiple-Choice-Antwortformat:

- Genau a ist mit c verbunden.
- Genau a ist mit h verbunden.
- Genau d ist mit g verbunden.
- Genau b ist mit f verbunden und c ist mit e verbunden.
- Genau b ist mit f verbunden und d ist mit e verbunden.
- Genau a ist mit b, c ist mit g, e mit f und h ist mit d verbunden.
- Genau a ist mit h, b mit f, c mit e und d ist mit g verbunden.
- Keiner der Punkte ist mit einem anderen Punkt verbunden.