Darstellungstheorie Drinfeld'scher Modulformen

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultäten
der Universität des Saarlandes

von
Enrico Varela Roldán

Saarbrücken
Mai 2015

Tag des Kolloquiums:	15. Juli 2015
Dekan:	Prof. Dr. Markus Bläser

Prüfungsausschuss:

Vorsitzender:	Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Berichterstatter:	Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
	Prof. Dr. Rainer Schulze-Pillot
	Prof. Dr. Gunther Cornelissen
Akademischer Mitarbeiter:	Dr. Robert Knobloch

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Drinfeld'sche Modulformen bilden im Funktionenkörperfall das Analogon zu elliptischen Modulformen über Zahlkörpern. In der vorliegenden Arbeit betrachte ich das bisher nicht untersuchte Zusammenspiel der linearen Darstellungstheorie mit der Theorie Drinfeld'scher Modulformen und beschreibe darstellungstheoretische Eigenschaften der Drinfeld'schen Modulformen zur Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(T)$.

Ich gebe zunächst einen Überblick über die Ausgangssituation für das Studium Drinfeld'scher Modulformen mit einem Schwerpunkt auf Modulformen für $\Gamma(T)$.

Da bekannt ist, dass die Eisenstein-Reihen in dieser speziellen Situation von besonderer Bedeutung sind, beschreibe ich diese genauer und führe insbesondere die neue Klasse der sogenannten modifizierten Eisenstein-Reihen ein. Diese sind besonders gut geeignet, um algebraische Eigenschaften der Modulformen zur Stufe T zu beschreiben. Dies zeige ich am Beispiel der Konstruktion einer Basis des Raums der Spitzenformen, die mit der Filtrierung durch die Ordnung der Spitzenformen verträglich ist.

Auf diese Grundlagen aufbauend widme ich mich der Untersuchung der natürlichen Operation der Gruppe $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$, die als Quotient der vollen Modulgruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q[T])$ nach $\Gamma(T)$ auftritt, auf der Algebra der Modulformen für $\Gamma(T)$.

Die dabei benötigten Konzepte und Ergebnisse aus der modularen Darstellungstheorie werden im mittleren Teil der vorliegenden Arbeit zur Verfügung gestellt.

Als Hauptergebnis identifiziere ich in der Drinfeld-Situation auftretende G-Moduln, d.h. $\mathcal{C}_\infty$-Vektorräume mit einer Struktur als Modul für die Gruppenalgebra $\mathcal{C}_\infty[G]$, mit klassischen G-Moduln aus der Darstellungstheorie. Konkret zeige ich, dass die G-Moduln M_k^n der n-fachen Spitzenformen des Gewichts k (einschließlich des Falls $n = 0$) isomorph zu Determinantentwists von symmetrischen Potenzen des natürlichen G-Moduls sind, und dass ihre sukzessiven Quotienten isomorph zu durch Charaktere der Borel-Untergruppe von G induzierten Darstellungen sind.

Bei den Beweisen dieser Aussagen spielt die Arithmetik der modifizierten Eisenstein-Reihen eine entscheidende Rolle.

Mit Hilfe von Ergebnissen aus der Darstellungstheorie ist es damit möglich, unter anderem die Kompositionsfaktoren der genannten Moduln Drinfeld'scher Modulformen zu bestimmen. Umgekehrt können Konzepte aus der Theorie Drinfeld'scher Modulformen auf die Darstellungstheorie symmetrischer Potenzen übertragen werden.

Als Anwendungsbeispiel beschreibe ich abschließend einen Algorithmus, der die Vielfachheiten der Kompositionsfaktoren von Moduln des Typs M_k^n bestimmt.

Abstract

In the function field case Drinfeld modular forms are the analogue to elliptic modular forms over number fields. In the presented thesis I examine the interaction between linear representation theory and the theory of Drinfeld modular forms. To date these concepts have not been studied in connection with each other. I describe representation theoretical properties of Drinfeld modular forms for the principal congruence subgroup $\Gamma(T)$.

First I give an overview of the classical Drinfeld setting in which I focus on Drinfeld modular forms for $\Gamma(T)$.

As it is known that Eisenstein series play an important role in this particular situation I describe them in further detail. In particular, I introduce the new class of so-called modified Eisenstein series, which are well suited to the description of algebraic properties of modular forms of level T. The usefulness of the modified Eisenstein series is illustrated by the construction of a basis of the space of cusp forms which is compatible with the filtration given by the order of cusp forms.

In this setting I examine the natural action by the group $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ on the algebra of modular forms for $\Gamma(T)$, the group G acting naturally as the quotient of the full modular group $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q[T])$ by $\Gamma(T)$.

The necessary concepts and results from the field of modular representation theory are provided in the middle section of this thesis.

My main result is the identification of G-modules (meaning $\mathcal{C}_\infty$-vector spaces with a structure as a module for the group algebra $\mathcal{C}_\infty[G]$) that occur in the Drinfeld setting with classical G-modules. I show that the G-modules M_k^n of n-fold cusp forms (including the case $n = 0$) are isomorphic to determinant twists of symmetric powers of the natural G-module. I also prove that the successive quotients of these modules are isomorphic to G-modules which are induced by characters of the Borel subgroup of G.

The arithmetic of the modified Eisenstein series plays a central part in proving these statements.

Applying known results from representation theory I determine, inter alia, the composition factors of the modules of Drinfeld modular forms described above. Conversely, concepts that originate on the Drinfeld side can be transferred to the representation theory of symmetric powers.

As a final example of the application of my results I provide an algorithm that determines the multiplicities of the composition factors for modules of type M_k^n.

Vorwort

Einleitung

Mit der vorliegenden Arbeit beschreibe ich Wechselwirkungen zwischen zwei mathematischen Gebieten, die bisher nicht zusammen betrachtet worden sind. Es handelt sich dabei um die Theorie der Drinfeld'schen Modulformen auf der einen Seite und die lineare Darstellungstheorie endlicher Gruppen auf der anderen.

Mein ursprünglicher Ausgangspunkt ist die zuerst genannte Theorie Drinfeld'scher Modulformen, die ihren Ursprung bei V.G. Drinfeld und den in seiner 1974 veröffentlichten Arbeit [Dri74] eingeführten *elliptischen Moduln* (heute bekannt als *Drinfeld-Moduln*) hat. In dieser Arbeit und darauf aufbauenden Werken wie zum Beispiel [DH87], [Gek86], [Gos80a], [Gos80b] wurde für Funktionenkörper in einer Variablen über endlichen Körpern ein Analogon zu klassischen elliptischen Kurven und elliptischen Modulformen etabliert.

Während Parallelen zwischen dem Zahlkörper- und dem Funktionenkörperfall grundsätzlich bereits lange bekannt waren (Beispiele aus dem Bereich der algebraischen Zahlentheorie sind etwa die Struktur der Ganzheitsringe, die Verzweigungstheorie und die Klassenkörpertheorie), gelang es erst mit Hilfe von Drinfelds Arbeit, die funktionentheoretische Untersuchung klassischer Modulformen auf Funktionenkörper zu übertragen.

Wie in Arbeiten üblich, die sich mit der Drinfeld-Situation befassen, beschreibe ich im Folgenden kurz die Grundzüge der Theorie der klassischen sowie der Drinfeld'schen Modulformen. Vergleichbare Einführungen mit einem etwas ausführlicheren Vergleich beider Fälle sind etwa in [Gek99a] oder [Gek99b] zu finden.

Allgemein ist zu den angesprochenen Analogien zwischen klassischer und Drinfeld-Situation zu sagen, dass es sich um sehr tiefgehende Zusammenhänge handelt. Dabei kommt es je nach Einzelfall sowohl vor, dass Resultate aus dem Zahlkörperfall auf Funktionenkörper übertragen werden, als auch, dass umgekehrt Methoden aus der Drinfeld-Situation Anwendung in der klassischen Situation finden. Teilweise entsprechen einem Konzept auf der einen Seite simultan mehrere Konzepte auf der anderen Seite.

Als Einführung in die klassische Situation eignet sich zum Beispiel [Ser73]. Stark vereinfacht wird einerseits einem $\mathbb{Z}$-Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ mit Hilfe der Weierstraß-Funktion eine elliptische Kurve (eine algebraische Kurve mit einer Struktur als abelsche Varietät) zugeordnet. Zwei Kurven zu Gittern Λ, Λ' sind dabei genau dann isomorph, wenn die Gitter ähnlich sind, d.h., wenn $c \in \mathbb{C}^\times$ existiert mit $\Lambda' = c\Lambda$. Andererseits kann dem

Gitter Λ eine Eisenstein-Reihe

$$E_k(\Lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda}{}' \frac{1}{\lambda^k}$$

zugeordnet werden, die für $k > 2$ konvergiert und für ungerades k verschwindet. Die Funktionalgleichung für Eisenstein-Reihen zu ähnlichen Gittern motiviert die Definition elliptischer Modulformen für die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ auf der oberen Halbebene.

Mögliche Fragestellungen funktionentheoretischer Natur sind etwa die Bestimmung von Eigenschaften der Fourier-Koeffizienten ausgewählter Modulformen. Vom algebraischen Standpunkt interessiert man sich beispielsweise für Relationen zwischen Modulformen und die Bestimmung von Erzeugendensystemen.

In der Drinfeld-Situation betrachtet man im einfachsten Fall anstelle der klassischen Objekte $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ den Polynomring $A = \mathbb{F}_q[T]$ über einem endlichen Körper, den rationalen Funktionenkörper $K = \mathbb{F}_q(T)$ sowie die Komplettierung von K an ∞ bezüglich der Grad-Bewertung $K_\infty = \mathbb{F}_q[[T^{-1}]]$, den Körper der formalen Laurent-Reihen in der Uniformisierenden T^{-1}. Dem Körper der komplexen Zahlen aus der Zahlkörpersituation entspricht $\mathcal{C}_\infty = \widehat{\overline{K}}_\infty$, die Komplettierung des algebraischen Abschlusses von K_∞ bezüglich der eindeutigen Fortsetzung der Grad-Bewertung. Für den Körper $\mathcal{C}_\infty$ können funktionentheoretische Konzepte mit Hilfe der rigiden Analysis formuliert werden.

Drinfeld-Moduln werden analog zur klassischen Situation durch A-Gitter in $\mathcal{C}_\infty$ definiert. Jedem Gitter ist dabei als Entsprechung zur Weierstraß-Funktion eine Exponentialfunktion zugeordnet. Neben dieser analytischen Herangehensweise können Drinfeld-Moduln auch als Modulstruktur auf der additiven Gruppe von $\mathcal{C}_\infty$ interpretiert werden.

Besonders deutlich wird die Analogie zu elliptischen Kurven für Drinfeld-Moduln vom Rang 2. Hier operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(2,A)$ durch Möbius-Transformation auf der Drinfeld'schen oberen Halbebene $\Omega = \mathcal{C}_\infty \setminus K_\infty$.

Dies ist die Ausgangssituation, die ich im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit beschreibe. Dort finden sich auch Literaturverweise zu weitergehenden Ausführungen.

In der Drinfeld-Situation natürlich auftretende Gruppenoperationen bestimmter Untergruppen der vollen Modulgruppe $\mathrm{GL}(2,A)$ auf Vektorräumen Drinfeld'scher Modulformen stellen die Verbindung mit dem zweiten eingangs erwähnten Konzept, der Darstellungstheorie endlicher Gruppen, her.

Die lineare Darstellungstheorie befasst sich in ihrer abstrakten Form mit Vektorräumen, auf denen mit Hilfe einer Gruppenoperation eine Struktur als Modul bezüglich der Gruppenalgebra definiert ist. Für gewöhnlich beschränkt man sich dabei auf endlichdimensionale Vektorräume über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sowie auf endliche Gruppen.

Die grundlegenden Eigenschaften von Darstellungen hängen darüber hinaus entscheidend von der Charakteristik des Grundkörpers ab. Der Satz von Maschke besagt, dass in der beschriebenen Situation die Gruppenalgebra, und damit auch jeder Modul über dieser, genau dann halbeinfach ist, wenn die Charakteristik des Grundkörpers teilerfremd zur Gruppenordnung ist. Es werden daher drei Fälle unterschieden:

Der klassische Fall in Charakteristik 0 behandelt Darstellungen über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Alle Darstellungen sind halbeinfach und werden durch ihre Charaktere vollständig beschrieben. Eine umfassende Beschreibung dieser Situation ist etwa in [Ser77] zu finden.

Der Fall endlicher, aber zur Gruppenordnung teilerfremder Charakteristik weist Parallelen zum ersten Fall auf. Auch hier spielen Charaktere von Darstellungen eine wesentliche Rolle.

In dieser Arbeit beschäftige ich mich jedoch ausschließlich mit dem verbleibendem Fall der modularen Darstellungstheorie, in dem die Charakteristik p des Grundkörpers ein Teiler der Gruppenordnung ist. Da die Situation nicht halbeinfach ist, unterscheiden sich die hier verwendeten Methoden grundlegend von denen aus den ersten beiden Fällen. Ein Beispiel dafür sind Kompositionsreihen, die anstelle von direkten Summenzerlegungen betrachtet werden müssen.

Besonders wichtig sind für mich Darstellungen der Gruppe $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$, die auch als G-Moduln bezeichnet werden. Da diese Gruppe selbst in Charakteristik p definiert ist, spricht man in diesem Fall von modularer Darstellungstheorie in definierender Charakteristik.

Ich greife auf bekannte Resultate wie die Klassifikation einfacher G-Moduln nach Wack [Wac96] oder Bonnafé [Bon11] (Ergebnisse für $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ sind leicht auf G übertragbar) zurück. Ferner verwende ich von Bardoe und Sin in [BS00] angegebene Beschreibungen bestimmter G-Moduln.

Verwandte Fragestellungen wurden beispielsweise von Doty oder Rust untersucht. Ersterer beschreibt in [Dot85] unter anderem die symmetrischen Potenzen der natürlichen Darstellung im Fall der algebraischen Gruppe $\mathrm{GL}(2, \overline{\mathbb{F}}_q)$. Letztere hat in [Rus95] unter anderem Darstellungen von G über Körpern der Charakteristik 0 beschrieben. In beiden Fällen lassen sich die Ergebnisse aber nicht ohne weiteres auf die Situation der vorliegenden Arbeit übertragen.

Die Zusammenhänge beziehungsweise Unterschiede zwischen den Fällen zur Charakteristik teilerfremder oder nicht teilerfremder Gruppenordnung sind teilweise subtiler Natur. So treten beispielsweise bei der Beschreibung der Struktur von symmetrischen Potenzen des natürlichen G-Moduls universelle Formeln auf, die ganzzahlige Koeffizienten besitzen und von der Charakteristik unabhängig sind. Die konkrete Interpretation dieser Formeln hängt jedoch davon ab, welcher der genannten Fälle betrachtet wird. Insbesondere das Verschwinden von Binomialkoeffizienten in endlicher Charakteristik spielt hier eine entscheidende Rolle und führt unter anderem dazu, dass symmetrische Potenzen, die in Charakteristik 0 als Moduln irreduzibel sind, in endlicher Charakteristik nichttriviale Untermoduln besitzen.

Konkret betrachte ich in der vorliegenden Arbeit Drinfeld'sche Modulformen zur Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(T)$ unter der natürlich Operation der Gruppe G, die als Quotient der vollen Modulgruppe nach $\Gamma(T)$ auftritt, und untersuche in diesem Kontext Fragestellungen aus der Darstellungstheorie. Gleichzeitig eröffnet diese Verknüpfung der beiden Gebiete die Möglichkeit, umgekehrt Eigenschaften Drinfeld'scher Modulformen vor dem Hintergrund allgemeiner Darstellungstheorie neu zu interpretieren.

Die Aufgabe, die Notationen aus der Theorie Drinfeld'scher Modulformen und der

Darstellungstheorie miteinander in Einklang zu bringen, hat dabei einen nicht zu vernachlässigenden Anteil meiner Arbeit ausgemacht. Insbesondere muss auf Konsistenz bei der Orientierung der verschiedenen betrachteten Gruppenoperationen geachtet werden.

Ergebnisse

Ein zentrales Ergebnis der vorliegenden Arbeit ist die Identifikation von G-Moduln Drinfeld'scher Modulformen zur Gruppe $\Gamma(T)$ mit klassischen G-Moduln. Dabei habe ich sowohl die Moduln M_k^n von Spitzenformen n-ter Ordnung des Gewichts k (einschließlich des Falls $n = 0$) als auch die sukzessiven Quotienten dieser Moduln beschrieben. Von besonderem Interesse ist dabei der Untermodul $M_k^1 \subseteq M_k = M_k^0$, der als G-Modul durch den von den Eisenstein-Reihen des Gewichts k zur Stufe T erzeugten Modul komplementiert wird.

Ich zeige, dass die Moduln der Spitzenformen isomorph zu Determinantentwists von symmetrischen Potenzen des natürlichen zweidimensionalen G-Moduls sind. Die sukzessiven Quotienten sind isomorph zu von Charakteren der Borel-Gruppe induzierten Moduln. Da die Darstellungstheorie letztgenannter Moduln (bis auf technische Details) durch die Arbeit [BS00] vollständig beschrieben ist, kann ich damit zahlreiche Fragen zur Darstellungstheorie Drinfeld'scher Modulformen für $\Gamma(T)$ beantworten.

Insbesondere gebe ich ein Verfahren an, mit dem die Vielfachheiten der Kompositionsfaktoren eines beliebigen Moduls vom Typ M_k^n bestimmt werden können. Gleichzeitig ist dieses Verfahren auch für symmetrische Potenzen anwendbar.

Der angesprochene Transfer von Erkenntnissen aus der Drinfeld-Situation in die allgemeinere Darstellungstheorie ist entscheidend bei Fragen der Komplementierbarkeit bestimmter Untermoduln symmetrischer Potenzen.

Ein wichtiges Hilfsmittel sind die in dieser Arbeit neu eingeführten *modifizierten Eisenstein-Reihen* zur Gruppe $\Gamma(T)$. Durch ihre bemerkenswerten arithmetischen Eigenschaften spielen sie in all meinen Ausführungen eine zentrale Rolle und dürften neben ihrer Bedeutung für die Darstellungstheorie Drinfeld'scher Modulformen auch als Gegenstand selbständiger Untersuchungen von weiterem Interesse sein.

Mit Hilfe dieser besonderen Modulformen ist der überwiegende Anteil der Aussagen konstruktiv bewiesen, also durch Angabe konkreter Basen beziehungsweise Abbildungsvorschriften.

Aufbau

Die vorliegende Arbeit ist grob in drei Teile und einen Anhang gegliedert.

Der erste Teil, bestehend aus den ersten vier Kapiteln, befasst sich mit Drinfeld'schen Modulformen, ohne Darstellungstheorie zu verwenden.

Im ersten Kapitel gebe ich kurz die wichtigsten Grundlagen aus der Theorie Drinfeld'scher Modulformen wieder. Da es sich um wohlbekannte Konzepte handelt, verzichte ich auf Beweise und gebe Literaturverweise für eine tiefergehende Beschäftigung mit der beschriebenen Situation an. Nach einem allgemeinen Beginn beschränke ich mich im Laufe des Kapitels auf den auch später ausschließlich betrachteten Fall von Modulformen zur Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(T)$.

Das zweite Kapitel befasst sich mit den Eisenstein-Reihen zur Gruppe $\Gamma(T)$ und enthält neben bereits bekannten Ergebnissen auch neue Aussagen. Ich betrachte hier zwei verschiedene Klassen von Eisenstein-Reihen. Die bereits bekannten *gewöhnlichen* Eisenstein-Reihen sind analog zu den Eisenstein-Reihen im Zahlkörperfall definiert. Ich greife hier insbesondere auf Ergebnisse von Cornelissen [Cor97b] zurück, der die zentrale Bedeutung der Eisenstein-Reihen in der Situation für $\Gamma(T)$ gezeigt hat, und orientiere mich auch an der dort verwendeten Notation. Als wichtige Ergänzung definiere ich in diesem Kapitel die Klasse der *modifizierten* Eisenstein-Reihen und beschreibe deren grundlegende Eigenschaften sowie ihr Verhältnis zu den gewöhnlichen Eisenstein-Reihen. Die unterschiedlichen Eigenschaften der beiden Klassen von Eisenstein-Reihen haben zur Folge, dass sie für verschiedene Anwendungen unterschiedlich geeignet sind, ohne dass es einen klar zu bevorzugenden Typ gäbe. Besonders das jeweilige Verhalten an den Spitzen von $\Gamma(T)$ ist dabei relevant.

Im dritten Kapitel untersuche ich die Filtrierung, die auf dem Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k durch die Ordnung der Spitzenformen gegeben ist. Ich konstruiere mit Hilfe der zuvor beschriebenen Eisenstein-Reihen eine Basis von M_k^1, die mit dieser Filtrierung verträglich ist. Die Basis wird im weiteren Verlauf der Arbeit bei darstellungstheoretischen Fragestellungen erneut aufgegriffen werden. Abgeschlossen wird das dritte Kapitel mit Rechenregeln zum Kongruenzverhalten von Spitzenformen.

Im vierten Kapitel betrachte ich Gruppenoperationen auf den Drinfeld'schen Modulformen. Der Zweck des Kapitels ist, durch einige technische Ausführungen zu grundsätzlich bekannten Sachverhalten die später zu untersuchenden G-Modulstrukturen zu etablieren.

Der zweite Teil der vorliegenden Arbeit besteht aus den Kapiteln 5 und 6 und befasst sich mit der Darstellungstheorie unabhängig von Drinfeld'schen Modulformen.

In Kapitel 5 lege ich die im weiteren Verlauf der Arbeit verwendeten Sprechweisen aus der Darstellungstheorie fest. Es handelt sich dabei um eine kompakte Zusammenstellung bekannter Konzepte und Aussagen ohne Anspruch auf Vollständigkeit. Ich beginne mit den grundlegenden Begriffen der abstrakten Darstellungstheorie, bevor ich näher auf Besonderheiten der modularen Darstellungstheorie eingehe. Dabei betrachte ich zum Teil ausdrücklich eine im Vergleich zum Rest der vorliegenden Arbeit allgemeinere Situation. Das Kapitel schließt mit einer Beschreibung der Darstellungstheorie der Gruppe G in definierender Charakteristik und greift dabei auf Resultate aus [Bon11] und [Wac96] zurück.

Im sechsten Kapitel betrachte ich eine Klasse von G-Moduln, die als induzierte Darstellungen zu bestimmten Charakteren der Borel-Gruppe $B \leq G$ definiert sind. Nach einer allgemeinen Beschreibung der gewählten Realisierung und der Angabe konkreter Basen folgt ein Abschnitt mit technischen Ausführungen im Hinblick auf die Parametrisierung bestimmter Eigenschaften der betrachteten Moduln. Es handelt sich dabei um Konzepte, die auf [BS00] zurückgehen, von mir an dieser Stelle jedoch systematisch aufbereitet und ergänzt werden. Daraus resultierende kompaktere Schreibweisen verwende ich im folgenden Abschnitt bei der Beschreibung der G-Modulstruktur der betrachteten Moduln. Es handelt sich dabei um eine angepasste Variante von Ergebnissen aus [BS00]. Da die genaue Übertragung dieser Resultate mit einigem technischen Aufwand verbunden ist, verzichte ich an dieser Stelle darauf und habe sie in Anhang B ausgelagert. Zum Abschluss des Kapitels wird ein Spezialfall genauer untersucht.

Der dritte Teil, der aus den Kapiteln 7 bis 11 besteht, führt die zuvor getrennt eingeführten Konzepte zusammen.

In Kapitel 7 bestimme ich das Transformationsverhalten der Eisenstein-Reihen unter der Operation der Gruppe G. Dies erlaubt auf der einen Seite, den Modul der Eisenstein-Reihen vollständig zu beschreiben, auf der anderen Seite ist es wegen der besonderen Rolle der Eisenstein-Reihen in der Situation für die Gruppe $\Gamma(T)$ der Schlüssel für sämtliche weitere Ausführungen zur Darstellungstheorie Drinfeld'scher Modulformen.

In Kapitel 8 betrachte ich den Modul M_k aller Modulformen vom Gewicht k zur Stufe T und identifiziere ihn mit einer symmetrischen Potenz des natürlichen G-Moduls. Außerdem untersuche ich Untermoduln, die sich aus der im vorangegangenen Kapitel bestimmten G-Modulstruktur des Moduls der Eisenstein-Reihen ergeben.

Das neunte Kapitel greift die in Kapitel 3 konstruierte Basis auf, um die Darstellungstheorie der Spitzenfiltrierung zu untersuchen. Ich zeige Zusammenhänge zwischen Spitzenfiltrierungen verschiedener Gewichte und bestimme schließlich die G-Modulstrukturen der sukzessiven Quotienten, indem ich diese auf bekannte G-Moduln zurückführe.

Im zehnten Kapitel wird dieselbe Fragestellung mit einer alternativen Herangehensweise behandelt. Dazu beginne ich zunächst allgemein mit einer Untersuchung der symmetrischen Potenzen des natürlichen G-Moduls. Ich beschreibe eine G-Modulfiltrierung und untersuche den größten nichttrivialen Untermodul dieser Filtrierung auf Komplementierbarkeit. Der in Kapitel 8 gezeigte Zusammenhang zwischen den Moduln M_k und bestimmten symmetrischen Potenzen ermöglicht es anschließend, diese Resultate auf die Drinfeld-Situation zu übertragen. Neben einem alternativen Beweis für die Identifikation der sukzessiven Quotienten der Spitzenfiltrierung erhalte ich auf diese Weise eine Identifikation der Moduln M_k^n mit Determinantentwists von symmetrischen Potenzen. Das Vorgehen in diesem Kapitel illustriert besonders anschaulich das Zusammenspiel der verschiedenen G-isomorphen Strukturen.

In Kapitel 11 betrachte ich als Beispiel für die Anwendung meiner Ergebnisse die Aufgabe, die Vielfachheiten der Kompositionsfaktoren der Moduln M_k^n zu bestimmen. Ich zerlege diese Moduln unter Jordan-Hölder-Äquivalenz systematisch in Anteile, für die die Vielfachheiten jeweils einfach zu bestimmen sind. Die ersten beiden Abschnitte des Kapitels befassen sich mit den Vielfachheiten in diesen Anteilen, im letzten Abschnitt sind diese theoretischen Überlegungen zu einem Lösungsverfahren zusammengesetzt. Obwohl keine konkrete Implementierung des Verfahrens angegeben ist, lässt sich eine solche bei Bedarf leicht realisieren.

Die Aussagen in den Anhängen tragen zum Verständnis der vorliegenden Arbeit bei, sind im Interesse der Übersichtlichkeit jedoch aus dem Hauptteil ausgelagert.

Anhang A beschäftigt sich mit Binomialkoeffizienten. Wie bereits beschrieben spielt das Verhalten von Binomialkoeffizienten modulo Primzahlen eine entscheidende Rolle in der modularen Darstellungstheorie. Neben einigen elementaren Identitäten für Binomialkoeffizienten gilt mein Augenmerk an dieser Stelle daher insbesondere der Lucas-Kongruenz. Zum Abschluss von Anhang A zeige ich einige weniger bekannte Formeln für Binomialkoeffizienten, die im Hauptteil Verwendung finden, aber rein elementar bewiesen werden und weder in der Darstellungstheorie noch in der Drinfeld-Situation verwurzelt sind.

In Anhang B beschreibe ich ausführlich, wie die Ergebnisse von Bardoe und Sin [BS00] auf die von mir betrachtete Situation übertragen werden können. Neben einigen Anpassungen der Notation, die dem Bezug auf die Drinfeld-Situation im Hauptteil geschuldet sind, spielen hier besonders Fragen der Dualisierung von Darstellungen eine Rolle, weshalb ein kurzer allgemeiner Einschub zu diesem Thema enthalten ist.

Danksagung

An erster Stelle gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler, der mich auf die Theorie der Drinfeld-Moduln im Allgemeinen und die vorliegende Fragestellung im Speziellen aufmerksam gemacht und meine Forschungen zu jeder Zeit mit viel Interesse und Begeisterung begleitet und vorangetrieben hat.

Weiter möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Rainer Schulze-Pillot für die ausgezeichnete Atmosphäre an seinem Lehrstuhl bedanken, an dem ich die letzten Jahre tätig war.

Ich danke Thorsten Paul für die Beantwortung zahlreicher Fragen und die gemeinsame Beschäftigung mit der Mathematik.

Darüber hinaus danke ich meinen Eltern, denen ich es zu verdanken habe, dass ich den Weg in die Wissenschaften gefunden habe, und die mich immer mit Rat und Tat unterstützen.

Schließlich möchte mich auch bei allen anderen bedanken, die mir während der langen Arbeit an dieser Dissertation zur Seite gestanden haben.

1 Ausgangssituation

In diesem Kapitel beschreiben wir die Ausgangssituation für das vorliegende Studium Drinfeld'scher Modulformen.

Wir beginnen mit der Beschreibung der Drinfeld'schen oberen Halbebene und der dafür notwendigen Notation. Anschließend erfolgt eine kurze Einführung Drinfeld'scher Modulkurven für arithmetische Gruppen. Wir können dann Drinfeld'sche Modulformen in dieser allgemeinen Situation definieren. Abschließend beschränken wir uns auf die Betrachtung der Hauptkongruenzuntergruppe zur Stufe T.

Insgesamt interessieren wir uns in diesem Kapitel wie auch im Rest dieser Arbeit weniger für analytische Fragestellungen. Wir nehmen daher die etablierte analytische Struktur der Drinfeld'schen oberen Halbebene als gegeben hin und werden nur auf einzelne Aspekte genauer eingehen, hauptsächlich im Zusammenhang mit dem Verhalten an Spitzen. Für Details zur rigiden Analysis im Allgemeinen siehe zum Beispiel [FvdP04].

Bei diesem Kapitel handelt es sich um eine Zusammenfassung bekannter Resultate ohne Anspruch auf Vollständigkeit. Auf ausführliche Beweise wird in diesem Kapitel daher verzichtet.

Die im Folgenden betrachtete Situation geht zurück auf Drinfeld ([Dri74], vergleiche auch die darauf aufbauenden Ausführungen von Deligne und Husemöller [DH87]). Weitere allgemeine Referenzen für die Drinfeld-Situation sind beispielsweise [Gos96] und [Gek86].

Bezüglich der konkreten Präsentation und Notation in diesem Kapitel orientieren wir uns besonders an [Cor97b] und [GR96].

1.1 Die Drinfeld'sche obere Halbebene

Die folgende Notation gilt im gesamten weiteren Verlauf dieser Arbeit mit Ausnahme der Abschnitte 5.1 und 5.2.

Sei $q = p^r$ eine Primzahlpotenz. Sei $A = \mathbb{F}_q[T]$ der Polynomring in der Variablen T über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$. Sei $K = \mathbb{F}_q(T)$ der Quotientenkörper von A.

Auf K fixieren wir den (nicht-archimedischen) Absolutbetrag $|\cdot|$, der durch die Grad-Bewertung auf A induziert wird:

$$|a| = q^{\deg a}, \quad a \in A.$$

Die Vervollständigung von K bezüglich dieses Absolutbetrags ist $K_\infty = \mathbb{F}_q[[T^{-1}]]$, der Körper der formalen Laurent-Reihen im Parameter T^{-1}.

Der algebraische Abschluss von K_∞ ist selbst nicht vollständig bezüglich der eindeutigen Fortsetzung von $|\cdot|$, allerdings ist die Vervollständigung

$$\mathcal{C}_\infty = \widehat{\overline{K}}_\infty$$

bezüglich dieses Absolutbetrags wieder algebraisch abgeschlossen.

1.1 Definition. Wir nennen

$$\Omega = \mathcal{C}_\infty \setminus K_\infty$$

die *Drinfeld'sche obere Halbebene*.

Auf Ω kann eine rigid analytische Struktur definiert werden. Dabei findet neben dem gewöhnlichen Absolutbetrag $|\cdot|$ der *imaginäre Absolutbetrag* auf Ω Verwendung. Dieser ist gegeben durch die Abbildung

$$z \mapsto |z|_i = \inf\{|z - x| \mid x \in K_\infty\}.$$

1.2 Drinfeld'sche Modulkurven

1.2 Definition. (i) Die Gruppe $\Gamma(1) = \mathrm{GL}(2, A)$ heißt die *volle Modulgruppe*.

(ii) Sei $N \in A$. Die Untergruppe

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1) \mid a \equiv d \equiv 1 \bmod N,\, b \equiv c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

von $\Gamma(1)$ heißt die *Hauptkongruenzuntergruppe* der Stufe N.

(iii) Ist $\Gamma \leq \Gamma(1)$ eine Untergruppe, die ihrerseits eine Untergruppe $\Gamma(N)$ für ein $N \in A$ von minimalem Grad enthält, so nennen wir Γ eine *arithmetische Gruppe* der Stufe N.

1.3 Proposition. *Die Untergruppe $\Gamma(N)$ ist Normalteiler von $\Gamma(1)$.*

Aus der Definition der Hauptkongruenzuntergruppen folgt unmittelbar:

1.4 Lemma. *Ist $N \in A \setminus \mathbb{F}_q$ ein nichtkonstantes Polynom, so gilt*

$$\det \gamma = 1 \quad \textit{für alle } \gamma \in \Gamma(N).$$

Die volle Modulgruppe operiert in klassischer Weise von links auf Ω durch *gebrochen lineare* oder *Möbius-Transformation*:

$$\gamma z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1),\, z \in \Omega.$$

Von nun an bezeichne Γ eine beliebige arithmetische Gruppe. Wie in der klassischen Situation betrachten wir den Quotienten $X_\Gamma := \Gamma \backslash \Omega$ unter der Möbius-Transformation.

Dieser besitzt eine Struktur als analytischer Raum über $\mathcal{C}_\infty$ und ist als solcher glatt von Dimension 1. Tatsächlich ist X_Γ sogar kanonisch isomorph zum zugrunde liegenden analytischen Raum einer geeigneten glatten irreduziblen affinen algebraischen Kurve über $\mathcal{C}_\infty$. Wir unterscheiden daher in unserer Notation im Folgenden nicht zwischen der Kurve und dem analytischen Raum.

1.5 (Spitzen). [Cor97b, I, (2.4)], [GR96, (2.6)] Durch Hinzunahme endlich vieler Punkte, genannt *Spitzen* von Γ, können wir X_Γ zu einer projektiven Kurve $\overline{X}_\Gamma$, der sogenannten *Drinfeld'schen Modulkurve*, kompaktifizieren. Die Spitzen von Γ sind bestimmt durch die endliche Menge $\Gamma\backslash\mathbb{P}^1(K)$, d.h., es gilt

$$\overline{X}_\Gamma = \Gamma\backslash(\Omega \cup \mathbb{P}^1(K)).$$

Dabei operiert Γ auf $\mathbb{P}^1(K)$ entsprechend der natürlichen Operation von $\mathrm{GL}(2,K)$:

$$\gamma(x:y) = (ax+b:cy+d) \quad \text{für } \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2,K).$$

1.6 (Uniformisierende). [Cor97b, I, (2.4)], [GR96, (2.7)] Für die Beschreibung der analytischen Struktur der Drinfeld'schen Modulkurve müssen wir für jede Spitze eine *Uniformisierende* (auch *lokaler Parameter* genannt) angeben.

Bei der Untersuchung von Funktionen können wir das Verhalten an einer beliebigen Spitze auf die Spitze zur Klasse von $\infty \in \mathbb{P}^1(K)$ zurückführen, indem wir zu einer geeignet modifizierten Funktion übergehen. Zur Vereinfachung der Notation unterscheiden wir im Folgenden nicht zwischen Spitzen, d.h. Äquivalenzklassen modulo Γ, und Elementen von $\mathbb{P}^1(K)$, also Repräsentanten dieser Klassen.

Sei $s \in \mathbb{P}^1(K)$ beliebig und $\rho = \rho(s) \in \Gamma(1)$ so, dass $\rho\infty = s$ ist. Der Stabilisator $(\Gamma^\rho)_\infty$ von ∞ in

$$\Gamma^\rho := \rho^{-1}\Gamma\rho$$

enthält eine maximale Untergruppe der Form $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid b \in \mathfrak{b}_s\}$ für ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{b}_s$ von A. Die Matrizen in dieser Untergruppe entsprechen auf Ω den Abbildungen $z \mapsto z+b$, $b \in \mathfrak{b}_s$. Im Allgemeinen enthält Γ^ρ_∞ darüber hinaus eine maximale Untergruppe von Transformationen der Gestalt $z \mapsto az$ für $a \in \mathbb{F}_q^\times$. Sei w_s die Ordnung dieser (zyklischen) Untergruppe.

Wir definieren

$$e_{\mathfrak{b}_s}(z) := z \prod_{0 \neq b \in \mathfrak{b}_s} \left(1 - \frac{z}{b}\right)$$

(hierbei handelt es sich um die Exponentialfunktion zum Ideal $\mathfrak{b}_s$, aufgefasst als A-Gitter, vergleiche [Gek88, Abschnitt 2]).

Für eine geeignete Normalisierung der Uniformisierenden benötigen wir ferner ein Element $\overline{\pi} \in \mathcal{C}_\infty$, so dass $\overline{\pi}A$ das Gitter zum Carlitz-Modul ist (zum Carlitz-Modul allgemein siehe zum Beispiel [Gek88, Abschnitt 4] oder [Gos96, Kapitel 3]). Ein solches Element ist bis auf einen Faktor in $\mathbb{F}_q^\times$ bestimmt durch die Gleichung

$$\overline{\pi}^{q-1} = (T^q - T) \sum_{0 \neq a \in A} \left(\frac{1}{a}\right)^{q-1}.$$

Wir fixieren ein für allemal ein solches Element $\overline{\pi}$.

Damit setzen wir

$$\tau_s = \tau_s(\Gamma^\rho) = \frac{N}{\overline{\pi}} e_{\mathfrak{b}_s}^{-1},$$

wobei N die Stufe der arithmetischen Gruppe Γ ist. Auf diese Weise erhalten wir eine Abbildung $\tau_s : \Omega \to \mathcal{C}_\infty$, die die Menge $\mathfrak{b}_s \backslash \{z \in \Omega \mid |z|_i \geq c\}$ für ausreichend großes c mit einer ausreichend kleinen punktierten Scheibe um 0 identifiziert.

Die gesuchte Uniformisierende für die Spitze s ist nun $\tau_s^{w_s}$.

Bemerkung. Die angegebene Normalisierung der Uniformisierenden entspricht genau der in [Cor97b, I, (2.4)] gewählten mit dem einzigen Unterschied, dass wir τ anstelle von t schreiben.

1.7 Proposition ([Cor97b, I, (2.4)],[GR96, (2.7.6) und (2.7.7)])**.**
Sei $f : \Omega \to \mathcal{C}_\infty$ eine meromorphe, Γ-invariante Funktion. Sei ferner $s \in \mathbb{P}^1(K)$ eine Spitze und $\rho = \rho(s) \in \Gamma(1)$ mit $\rho\infty = s$. Dann ist die Abbildung $f^\rho := f \circ \rho$ invariant unter Γ^ρ und besitzt eine Reihenentwicklung

$$f^\rho(z) = \sum_{i \geq n} a_i \tau_s^{w_s i}(z), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

mit positivem Konvergenzradius.

Wir können nun das Verhalten einer Funktion f an der Spitze s durch das Verhalten von f^ρ an der Spitze ∞ beschreiben:

1.8 Definition ([GR96, (2.7.6) und (2.7.7)])**.** Sei $f : \Omega \to \mathcal{C}_\infty$ eine meromorphe, Γ-invariante Funktion. Sei ferner $s \in \mathbb{P}^1(K)$ eine Spitze und $\rho = \rho(s) \in \Gamma(1)$ mit $\rho\infty = s$.

(i) Gilt in der Reihenentwicklung (1.1) bereits $a_i = 0$ für $i < 0$, so sagen wir, die Abbildung f^ρ sei *holomorph* an der Spitze ∞. In diesem Fall heißt die Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit $a_i = 0$ für $i < n$ und $a_n \neq 0$ die *Nullstellen-* oder *Verschwindungsordnung* von f^ρ an ∞.

(ii) Die Abbildung f heißt *holomorph* an der Spitze s, wenn f^ρ holomorph an der Spitze ∞ ist. Sinngemäß ist die *Nullstellen-* oder *Verschwindungsordnung* von f an s definiert.

Bemerkung. Holomorphie und Verschwindungsordnung von f an der Spitze s hängen nicht von den getroffenen Wahlen des Repräsentanten $s \in \mathbb{P}^1(K)$ beziehungsweise des Elements $\rho \in \Gamma(1)$ mit $\rho\infty = s$ ab; die konkreten Koeffizienten einer Reihenentwicklung in $\tau_s(\Gamma^\rho)$ dagegen schon.

1.9 Beispiel ([Cor97b, I, (2.4)])**.**

(i) Die volle Modulgruppe $\Gamma(1)$ besitzt genau eine Spitze, die wir mit ∞ bezeichnen. Es ist $\mathfrak{b}_\infty = A$ und $w_\infty = q - 1$, der Parameter ist also τ_∞^{q-1}.

(ii) Für eine Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ ist $\mathfrak{b}_s = N$ und $w_s = 1$ für alle Spitzen s. Wir können also an allen Spitzen den gleichen Parameter $\tau_s = \tau_\infty$ wählen.

1.3 Drinfeld'sche Modulformen

Wie in der klassischen Situation liegt der Definition Drinfeld'scher Modulformen die folgende Gruppenoperation zugrunde:

1.10 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $l \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten eine* rechte *Operation von* $\Gamma(1)$ *auf den Funktionen von* Ω *nach* $\mathcal{C}_\infty$*, indem wir für eine Funktion* $f : \Omega \to \mathcal{C}_\infty$ *und eine Matrix* $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$

$$f|_{[\gamma]_{k,l}}(z) := (\det \gamma)^l (cz+d)^{-k} f(\gamma z)$$

setzen. Dabei operiert γ *auf* Ω *durch gebrochen lineare Transformation, also* $\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$*. Ist* $l = 0$*, so schreiben wir auch* $f|_{[\gamma]_k}(z)$*.*

1.11 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $l \in \mathbb{Z}$. Sei* Γ *eine arithmetische Gruppe und* $\sigma \in \Gamma(1)$ *beliebig. Dann gilt: Erfüllt eine Abbildung* $f : \Omega \to \mathcal{C}_\infty$ *die Bedingung*

$$f|_{[\gamma]_{k,l}}(z) = f(z) \quad \textit{für alle } \gamma \in \Gamma,$$

so genügt die Abbildung $f|_{[\sigma]_{k,l}} : \Omega \to \mathcal{C}_\infty$ *der Bedingung*

$$\left(f|_{[\sigma]_{k,l}}\right)|_{[\gamma]_{k,l}}(z) = f|_{[\sigma]_{k,l}}(z) \quad \textit{für alle } \gamma \in \Gamma^\sigma = \sigma^{-1}\Gamma\sigma.$$

Insbesondere ist die Abbildung $f|_{[\sigma]_{k,l}}$ *invariant unter der Operation von* Γ*, wenn* Γ *Normalteiler in* $\Gamma(1)$ *ist.*

Analog zur Theorie klassischer Modulformen definieren wir nun:

1.12 Definition ([GR96, (2.8.2)])**.** Eine *(Drinfeld'sche) Modulform* vom Gewicht $k \in \mathbb{N}_0$ und Typ $l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ zur arithmetischen Gruppe Γ ist eine rigid analytische Funktion $f : \Omega \to \mathcal{C}_\infty$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) Für $\gamma \in \Gamma$ ist $f|_{[\gamma]_{k,l}}(z) = f(z)$.

(ii) Die Funktion f ist auf Ω holomorph.

(iii) Die Funktion f ist holomorph an den Spitzen von Γ.

Bemerkung. (i) Die letzte Bedingung aus Definition 1.12 bedeutet, dass für jede Spitze s bei Wahl von $\rho = \rho(s)$ mit $\rho\infty = s$ die Abbildung $f|_{[\rho]_{k,l}}$ als Potenzreihe in $\tau_s(\Gamma^\rho)$ entwickelt werden kann (nach Lemma 1.11 ist $f|_{[\rho]_{k,l}}$ invariant unter der Gruppe Γ^ρ).

Wir schreiben für eine solche Reihenentwicklung von $f|_{[\rho]_{k,l}}$ auch etwas missbräuchlich $f(s)$ wie in [Cor97b, I, (4.1)], weisen aber noch einmal auf die Abhängigkeit der Koeffizienten von den getroffenen Wahlen hin. Die Verschwindungsordnung von f an einer Spitze s ist in der üblichen Weise über die Potenzreihenentwicklung definiert und unabhängig von den Wahlen.

(ii) Das Auftreten nichttrivialer Determinanten hat zur Folge, dass die betrachteten Abbildungen in der Regel keine Reihenentwicklung in $\tau_s^{w_s}$, sondern nur in τ_s besitzen (siehe [GR96, (2.8.4)]). Da dieser Fall bei Hauptkongruenzgruppen aber nicht auftritt, ist diese Unterscheidung für uns im weiteren Verlauf ohne Bedeutung.

1.4 Modulformen zur Stufe T

Im größeren Kontext Drinfeld'scher Modulformen für arithmetische Gruppen beschränken wir uns nun auf den Spezialfall der Hauptkongruenzuntergruppe zur Stufe T. Die Drinfeld'sche Modulkurve $\overline{X}_{\Gamma(T)}$ hat Geschlecht 0 (siehe [Gek86, VII, Theorem 5.11]), wir haben es also mit einer besonders einfachen Situation zu tun.

Viele der im Folgenden angegebenen Konzepte lassen sich für eine beliebige Stufe $N \in A$ oder sogar für beliebige arithmetische Gruppen formulieren.

1.13 Notation. Wir verzichten ab jetzt in der Regel auf die ausdrückliche Erwähnung der betrachteten Gruppe. Sprechen wir beispielsweise nur von Modulformen oder Spitzen, so sind damit Modulformen zur Gruppe $\Gamma(T)$ beziehungsweise Spitzen von $\Gamma(T)$ gemeint.

Da gemäß Lemma 1.4 in Hauptkongruenzuntergruppen keine nichttrivialen Determinanten auftreten, betrachten wir ausschließlich Modulformen vom Typ 0.

1.14 Proposition ([Cor97b, III, (2.1)],[Gek86, VII, (5.8)])**.**
Die Modulkurve $\overline{X}_{\Gamma(T)}$ besitzt $q+1$ Spitzen. Diese werden parametrisiert durch

$$\Gamma(T)\backslash\mathbb{P}^1(K) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) = \{\infty = (1:0),\ (\alpha:1) \mid \alpha \in \mathbb{F}_q\}.$$

Wir erhalten nach Beispiel 1.9 für alle Spitzen die gemeinsame Uniformisierende

$$\tau := T(\overline{\pi}e_T(z))^{-1}.$$

Ein Beispiel für Modulformen zur Gruppe $\Gamma(T)$ sind die Eisenstein-Reihen:

1.15 Definition ([Cor97b, I, (6.2)],[Gos80b])**.** Sei $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{F}_q^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $k \in \mathbb{N}$. Die *(gewöhnliche) Eisenstein-Reihe $E_\nu^{(k)}$* vom Gewicht k zur Stufe T ist definiert durch

$$E_\nu^{(k)}(z) := \frac{1}{T} \sum_{\substack{(0,0)\neq(a,b)\in K^2 \\ (a,b)\equiv\nu \bmod T}} \left(\frac{1}{az+b}\right)^k.$$

Auf diese Weise erhalten wir q^2-1 verschiedene Modulformen vom Gewicht k zur Gruppe $\Gamma(T)$.

Wir schreiben kurz E_ν für $E_\nu^{(1)}$.

Bemerkung. Wir interessieren uns an dieser Stelle nicht für Konvergenzfragen und halten nur fest, dass die Eisenstein-Reihen tatsächlich konvergieren. Für weitere Details siehe zum Beispiel [Gos80b].

Die Definition der Eisenstein-Reihen lässt sich leicht für beliebige Stufe N verallgemeinern. Im Fall der Gruppe $\Gamma(T)$ sind diese jedoch besonders wichtig: Sowohl bei der Untersuchung algebraischer Erzeuger der Modulformen als auch bei darstellungstheoretischen Fragestellungen spielen die Eisenstein-Reihen der Stufe T eine entscheidende Rolle. Wir werden uns in Kapitel 2 ausführlicher mit dieser besonderen Klasse von Modulformen befassen.

1.16 Definition. Die Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}_0$ zur Gruppe $\Gamma(T)$ bilden einen $\mathcal{C}_\infty$-Vektorraum $M_k = M_k(\Gamma(T))$. Weiter bezeichnen wir mit

$$M = M(\Gamma(T)) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} M_k$$

die graduierte $\mathcal{C}_\infty$-Algebra aller Modulformen zur Gruppe $\Gamma(T)$.

Betrachten wir für $k \in \mathbb{N}_0$ die Modulformen in M_k, die an jeder Spitze mindestens die Nullstellenordnung $n \in \mathbb{N}_0$ besitzen, so bilden diese einen Unterraum

$$M_k^n = M_k^n(\Gamma(T)) \subseteq M_k.$$

Modulformen in M_k^1 heißen *Spitzenformen*, Modulformen in M_k^n, $n \in \mathbb{N}$, nennen wir *n-fache Spitzenformen* oder *Spitzenformen der Ordnung n*.

Wir erhalten eine Filtrierung

$$M_k = M_k^0 \supseteq M_k^1 \supseteq M_k^2 \supseteq \dots,$$

die *Spitzenfiltrierung* von M_k.

Bemerkung. (i) Die in der Definition von M betrachtete Summe der M_k ist tatsächlich direkt als Summe im Vektorraum der holomorphen Funktionen von Ω nach $\mathcal{C}_\infty$. Dies ist nicht von vornherein klar.

(ii) Wir werden die Vektorraumstruktur der Spitzenfiltrierung in Kapitel 3 genauer studieren. Insbesondere existieren zu festem k keine von Null verschiedenen Spitzenformen beliebig hoher Nullstellenordnung. Die oben angegebene Filtrierung bricht nach endlich vielen Schritten ab.

1.17 Notation. Wir verlangen von einer n-fachen Spitzenform (oder Spitzenform n-ter Ordnung) nur, dass sie an jeder Spitze *mindestens* mit Ordnung n verschwindet. Wollen wir zum Ausdruck bringen, dass zusätzlich die Verschwindungsordnung an mindestens einer Spitze genau n ist, so nennen wir die Modulform eine Spitzenform der *genauen* Ordnung n.

1.18 Satz (Gekeler)**.** *Es gibt keine nichttrivialen Spitzenformen vom Gewicht* 1*, d.h., es ist*

$$M_1^1 = \{0\}.$$

Bemerkung. Dieser Satz gilt allgemein für arithmetische Gruppen bei sinngemäßer Definition von Spitzenformen und geht auf Ergebnisse von Gekeler und Teitelbaum zurück. Ein Beweis ist beispielsweise in [Cor97c] zu finden.

Für Stufe T kann die Aussage direkt aus Ergebnissen von Cornelissen gefolgert werden, die wir im zweiten Kapitel betrachten werden.

Wie in der klassischen Situation können auch Drinfeld'sche Modulformen als Schnitte von Linienbündeln aufgefasst werden ([Cor97b, I, (6.6)]).

Im Fall der Gruppe $\Gamma(T)$ hat das Linienbündel der Modulformen vom Gewicht 1 den Grad q (siehe [Gek86, VII, (6.1)]); für Gewicht k ist der Grad damit kq. Da der Satz von Riemann-Roch für Geschlecht 0 exakte Formeln liefert, ergibt sich direkt die folgende Dimensionsformel:

1.19 Proposition. *Für $k \in \mathbb{N}$ ist*

$$\dim M_k = kq + 1.$$

Insbesondere ist $M_0 \cong \mathcal{C}_\infty$.

Der Grad des Linienbündels bestimmt außerdem den Wert der Summe aller Nullstellenordnungen einer Modulform.

1.20 Proposition. *Sei $f \in M_k$ eine von Null verschiedene Modulform vom Gewicht k. Die Nullstellenordnungen von f auf $\Gamma(T)\backslash\Omega$ (*Nullstellen im Inneren*) ergeben zusammen mit den Verschwindungsordnungen von f an den Spitzen von $\Gamma(T)$ stets kq.*

Bemerkung. Es handelt sich bei dieser Proposition um einen (besonders einfachen) Spezialfall einer tiefergehenden Analogie zwischen klassischen Modulformen und Drinfeld'schen Modulformen: In der klassischen Situation meromorpher Modulformen zur Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ verfügt man für eine von Null verschiedene Modulform f vom Gewicht k über die bekannte $\frac{k}{12}$-Formel

$$\sum_z{}^{*}\, v_z(f) + \frac{v_i(f)}{2} + \frac{v_\rho(f)}{3} + v_\infty(f) = \frac{k}{12}$$

(siehe zum Beispiel [FB95, Kapitel 6, Theorem 2.3]). Dabei sind i und ρ die Standardrepräsentanten der beiden elliptischen Äquivalenzklassen (Punkte mit nichttrivialem Stabilisator), v_z bezeichnet die Verschwindungsordnung an einem Punkt z in der oberen Halbebene und v_∞ die Verschwindungsordnung an der Spitze $i\infty$. Die Summe läuft über die nicht-elliptischen $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-Äquivalenzklassen der oberen Halbebene.

Dieser Formel entspricht in der Theorie der Drinfeld'schen Modulformen zur vollen Modulgruppe $\Gamma(1) = \mathrm{GL}(2,A)$ die Formel

$$\sum_z{}^{*}\, v_z(f) + \frac{v_0(f)}{q+1} + \frac{v_\infty(f)}{q-1} = \frac{k}{q^2-1},$$

wobei die Summe über die nicht-elliptischen Äquivalenzklassen in $\Gamma(1)\backslash\Omega$ läuft (elliptische Punkte sind sinngemäß über ihren Stabilisator definiert). Analog zum klassischen Fall bezeichnet v_z die Nullstellenordnung an einem Punkt $z \in \Omega$, v_0 die Nullstellenordnung an den elliptischen Punkten und v_∞ die Verschwindungsordnung an der Spitze von $\Gamma(1)$ bezüglich der Uniformisierenden τ_∞ (siehe [Gek88, (5.14)]).

2 Eisenstein-Reihen zur Stufe T

Wir werden in diesem Kapitel die Eigenschaften der in Definition 1.15 definierten Eisenstein-Reihen zur Stufe T genauer studieren. Wie im ersten Kapitel erwähnt, werden wir dabei sehen, dass die Eisenstein-Reihen in der Situation zur Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(T)$ eine wichtige Rolle spielen.

Zunächst fassen wir bekannte Ergebnisse zu linearen Relationen zwischen Eisenstein-Reihen zusammen. Die dabei verwendete Beschreibung des Transformationsverhaltens unter der Operation von $\Gamma(1)$ bildet im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Grundlage für die Beschreibung der Darstellungstheorie Drinfeld'scher Modulformen.

Im zweiten Abschnitt definieren wir eine neue Klasse von Eisenstein-Reihen, mit deren Hilfe ein Resultat von Cornelissen [Cor97b] zur Erzeugung der Algebra M kompakter formuliert werden kann. Diese *modifizierten* Eisenstein-Reihen sind für die weiteren Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit von großer Bedeutung.

Anschließend sammeln wir im dritten Abschnitt sowohl bekannte als auch neue Eigenschaften der Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1, bevor wir im letzten Abschnitt algebraische Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Typen von Eisenstein-Reihen studieren.

2.1 Lineares Erzeugnis der Eisenstein-Reihen

Die erste bemerkenswerte Eigenschaft der Eisenstein-Reihen ist, dass ihr Verhalten unter der in Lemma 1.10 angegebenen Operation von $\Gamma(1)$ gut zu kontrollieren ist:

2.1 Lemma ([Cor97b, I, (6.3)]). *Sei $k \in \mathbb{N}$. Es gilt für $\gamma \in \Gamma(1)$*

$$E_{\nu}^{(k)}|_{[\gamma]_k}(z) = E_{\nu\gamma}^{(k)}(z)$$

für alle $\nu \in \mathbb{F}_q^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dabei bezeichnet $\nu\gamma$ das gewöhnliche Zeilenvektor-Matrix-Produkt.

Bemerkung. Dieses Lemma ist für unsere spätere Beschreibung der Darstellungstheorie Drinfeld'scher Modulformen wichtig, da wir in Satz 2.11 sehen werden, dass sich beliebige Modulformen zur Gruppe $\Gamma(T)$ als polynomielle Ausdrücke in Eisenstein-Reihen schreiben lassen.

Das Lemma gilt sinngemäß auch für Eisenstein-Reihen zu beliebigen Hauptkongruenzuntergruppen. In der allgemeineren Situation lassen sich Ergebnisse für Eisenstein-Reihen jedoch nicht ohne weiteres auf beliebige Modulformen übertragen.

Wir sehen mit Hilfe des Transformationsverhaltens, dass es zwischen den bisher betrachteten Eisenstein-Reihen lineare Relationen gibt:

2.2 Lemma. *Sei $\nu \in \mathbb{F}_q^2 \setminus \{(0,0)\}$. Für $a \in \mathbb{F}_q^\times$ gilt*

$$E_{a\nu}^{(k)}(z) = a^{-k} E_\nu^k(z).$$

Beweis. Wir betrachten die Operation des Elements $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$. Mit Lemma 2.1 erhalten wir, dass

$$E_\nu^{(k)}|_{\left[\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\right]_k}(z) = E^{(k)}_{\nu\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)}(z) = E_{a\nu}^{(k)}(z)$$

ist. Andererseits gilt aber nach Definition der Operation in Lemma 1.10

$$E_\nu^{(k)}|_{\left[\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\right]_k}(z) = a^{-k} E_\nu^{(k)}\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) z\right) = a^{-k} E_\nu^{(k)}(z).$$

□

Wir beschränken uns bei der Indexmenge für die Eisenstein-Reihen daher auf ein Repräsentantensystem von $(\mathbb{F}_q^2 \setminus \{(0,0)\})/\mathbb{F}_q^\times \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$, um offensichtliche lineare Abhängigkeiten zu vermeiden.

2.3 Notation. Wir zeichnen die Repräsentanten $(1,u)$, $u \in \mathbb{F}_q$, sowie $\infty = (0,1)$ aus und führen in Anlehnung an [Cor97b] folgende Kurzschreibweisen ein:

$$E_u^{(k)} := E_{(1,u)}^{(k)}, \quad u \in \mathbb{F}_q,$$
$$E_\infty^{(k)} := E_{(0,1)}^{(k)}.$$

Sprechen wir im Folgenden von *den* gewöhnlichen Eisenstein-Reihen, so sind damit die hier angegebenen gemeint.

Tatsächlich gibt es keine weiteren linearen Relationen zwischen den ausgezeichneten Eisenstein-Reihen:

2.4 Satz (Cornelissen [Cor97b, IV, Proposition 1.1])**.** *Der $\mathcal{C}_\infty$-Vektorraum*

$$\mathrm{Eis}_k := \left\langle E_\infty^{(k)},\, E_u^{(k)} \mid u \in \mathbb{F}_q \right\rangle$$

hat Dimension $q+1$ und heißt der Raum der Eisenstein-Reihen*. Es gilt*

$$M_k = \mathrm{Eis}_k \oplus M_k^1$$

als direkte Summe von $\mathcal{C}_\infty$-Vektorräumen. Insbesondere ist

$$M_1 = \mathrm{Eis}_1.$$

Bemerkung. Der Satz ist in der angegebenen Quelle sogar für beliebige Hauptkongruenzuntergruppen $\Gamma(N)$ mit nichtkonstantem $N \in A$ bewiesen.

2.5 Korollar. *Der Vektorraum M_k^1 der Spitzenformen vom Gewicht k für $\Gamma(T)$ hat Dimension $(k-1)q$.*

2.2 Die modifizierten Eisenstein-Reihen

Wir konstruieren nun eine neue Klasse von Eisenstein-Reihen auf Grundlage der gewöhnlichen Eisenstein-Reihen.

2.6 Definition. Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren die *modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht k (zur Stufe T)* durch

$$\mathcal{E}_i^{(k)} := \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^i E_u^{(k)}, \qquad 0 \leq i \leq q-1,$$
$$\mathcal{E}_\infty^{(k)} := \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^k E_u^{(k)} + E_\infty^{(k)},$$

mit der Konvention $0^0 = 1$. Im Fall $k = 1$ schreiben wir kürzer $\mathcal{E}_i$ für $\mathcal{E}_i^{(1)}$. Ferner setzen wir in diesem Fall auch

$$\mathcal{E}_q := \mathcal{E}_\infty^{(1)}.$$

Bemerkung. Die Modulformen, die wir hier als modifizierte Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 bezeichnen, treten schon in [Cor97b] auf. Für $1 \leq j \leq q$ stimmen die dort im Beweis von Theorem 3.4 in Kapitel III betrachteten Modulformen Z_j bis auf den Normierungsfaktor $\overline{\pi}$ mit den soeben definierten $\mathcal{E}_j$ überein. Allerdings sind diese Modulformen nicht selbst Gegenstand weitergehender Untersuchungen.

Die Definition der modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 ist dadurch motiviert, dass sie unter Produktbildung einfachen Relationen genügen. Es zeigt sich aber auch, dass diese Modulformen unter der Operation von G ein bemerkenswertes Transformationsverhalten besitzen.

Es ist dann naheliegend, die Definition wie oben angegeben für beliebiges Gewicht k zu formulieren und die resultierenden Objekte genauer zu studieren.

Da bei vielen Eigenschaften Kongruenzen modulo $q-1$ eine Rolle spielen, führen wir die folgenden Schreibweisen ein:

2.7 Notation. Für eine ganze Zahl $x \in \mathbb{Z}$ bezeichne $[x]$ den Repräsentanten der Restklasse von x modulo $q-1$ in $\{1, \dots, q-1\}$. Weiter definieren wir

$$\langle x \rangle := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ [x] & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung. Das Symbol „$\langle \cdot \rangle$“ wird benötigt, da in einigen Formeln unterschieden werden muss, ob eine Zahl tatsächlich Null ist oder nur kongruent zu Null. Vergleiche die Konvention „$0^0 = 1$“ in der Definition der modifizierten Eisenstein-Reihen.

Im Gegensatz zu Rechnungen mit dem Symbol „$[\cdot]$“ muss für „$\langle \cdot \rangle$“ die Sonderrolle der Null berücksichtigt werden, wenn die Zahl im Argument durch einen anderen Repräsentanten modulo $q-1$ ersetzt werden soll.

Das lineare Erzeugnis einer Menge von Vektoren wird ebenfalls mit spitzen Klammern geschrieben, Verwechslungen sind durch den jeweiligen Kontext jedoch ausgeschlossen.

Für konkrete Rechnungen ist es nützlich, die folgende triviale Folgerung aus der Definition der modifizierten Eisenstein-Reihen im Hinterkopf zu behalten:

2.8 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Es gilt*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0^{(k)} &= \mathcal{E}_{q-1}^{(k)} + E_0^{(k)},\\ \mathcal{E}_\infty^{(k)} &= \mathcal{E}_{[k]}^{(k)} + E_\infty^{(k)}.\end{aligned}$$

2.9 Proposition. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Die modifizierten Eisenstein-Reihen*

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_i^{(k)}, \quad 0 \le i \le q-1,\\ &\mathcal{E}_\infty^{(k)},\end{aligned}$$

sind linear unabhängig. Insbesondere gilt

$$\mathrm{Eis}_k = \left\langle \mathcal{E}_i^{(k)}, \mathcal{E}_\infty^{(k)} \mid 0 \le i \le q-1 \right\rangle.$$

Beweis. Schreiben wir die Relationen, durch die die $\mathcal{E}_i^{(k)}$ mit $1 \le i \le q-1$ ausgehend von den gewöhnlichen Eisenstein-Reihen definiert sind, in eine Matrix, so erhalten wir eine Matrix vom Vandermonde-Typ, die somit insbesondere invertierbar ist. Weiter sind die modifizierten Eisenstein-Reihen $\mathcal{E}_0^{(k)}$ und $\mathcal{E}_\infty^{(k)}$ die einzigen, in denen das Basiselement $E_0^{(k)}$ beziehungsweise $E_\infty^{(k)}$ auftritt.

Aus Dimensionsgründen bilden die modifizierten Eisenstein-Reihen eine Basis von Eis_k. □

Wir können also die gewöhnlichen Eisenstein-Reihen vom Gewicht k auch umgekehrt als Linearkombinationen der modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht k schreiben.

2.10 Proposition. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Es gilt*

$$E_0^{(k)} = \mathcal{E}_0^{(k)} - \mathcal{E}_{q-1}^{(k)}$$

sowie

$$E_\infty^{(k)} = \mathcal{E}_\infty^{(k)} - \mathcal{E}_{[k]}^{(k)}.$$

Für $u \in \mathbb{F}_q^\times$ ist ferner

$$E_u^{(k)} = -\sum_{i=1}^{q-1} u^{-i} \mathcal{E}_i^{(k)}.$$

Beweis. Zu zeigen ist nur die Aussage für $E_u^{(k)}$ mit $u \in \mathbb{F}_q^\times$. Wir sehen

$$\begin{aligned}-\sum_{i=1}^{q-1} u^{-i} \mathcal{E}_i^{(k)} &= -\sum_{i=1}^{q-1} u^{-i} \sum_{v \in \mathbb{F}_q^\times} v^i E_v^{(k)}\\ &= -\sum_{v \in \mathbb{F}_q^\times} \left(\sum_{i=1}^{q-1} \left(\frac{v}{u}\right)^i \right) E_v^{(k)}\\ &= E_u^{(k)}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet: Für $w \in \mathbb{F}_q^\times$ gilt

$$\sum_{i=1}^{q-1} w^i = \begin{cases} -1 & w = 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

da w Nullstelle des Polynoms $x^{q-1} - 1 = (x-1)(x^{q-2} + \ldots + x + 1)$ ist. □

Unsere erste Anwendung der modifizierten Eisenstein-Reihen ist die Beschreibung von Erzeugern und Relationen für die Algebra M der Modulformen zur Gruppe $\Gamma(T)$. Das folgende Resultat stammt von Cornelissen, lässt sich jedoch durch die Verwendung der modifizierten Eisenstein-Reihen kompakter formulieren:

2.11 Satz (Cornelissen [Cor97b, III, Theorem 3.4])**.** *Die Algebra M der Modulformen zur Gruppe $\Gamma(T)$ wird erzeugt von den Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 (also auch von den modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1). Dabei gilt*

$$\mathcal{E}_i \mathcal{E}_j = \mathcal{E}_{i-1} \mathcal{E}_{j+1}, \qquad 1 \leq i \leq j \leq q-1. \tag{2.1}$$

Genauer existiert ein Isomorphismus von Algebren

$$\mathcal{C}_\infty [X_i \mid 0 \leq i \leq q]/I \xrightarrow{\cong} M,$$

der gegeben ist durch

$$X_i \mapsto \mathcal{E}_i, \qquad 0 \leq i \leq q,$$

und lineare Fortsetzung. Das Ideal I der Relationen wird dabei erzeugt von den Ausdrücken

$$X_i X_j - X_{i-1} X_{j+1}, \qquad 1 \leq i \leq j \leq q-1.$$

Bemerkung. Eine einfache Rechnung liefert, dass diese Relationen tatsächlich äquivalent zu den in [Cor97b] angegebenen sind. Dazu betrachten wir für $1 \leq i \leq j \leq q-1$ die Relation

$$f_{i,j} := \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{F}_q} \alpha^{i-1} \beta^j (\alpha - \beta) x_\alpha x_\beta - \delta_{j,q-1} \cdot \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_q} \alpha^{i-1} x_\alpha x_\infty$$

aus [Cor97b] unter dem Isomorphismus $x_\beta \mapsto E_\beta$ für $\beta \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{F}_q} \alpha^{i-1} \beta^j (\alpha - \beta) E_\alpha E_\beta - \delta_{j,q-1} \cdot \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_q} \alpha^{i-1} E_\alpha E_\infty \\
&\quad = \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{F}_q} \alpha^i \beta^j E_\alpha E_\beta - \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{F}_q} \alpha^{i-1} \beta^{j+1} E_\alpha E_\beta - \delta_{j,q-1} \mathcal{E}_{i-1} E_\infty \\
&\quad = \Bigg(\sum_{\alpha \in \mathbb{F}_q} \alpha^i E_\alpha \Bigg) \Bigg(\sum_{\beta \in \mathbb{F}_q} \beta^j E_\beta \Bigg) - \mathcal{E}_{i-1} \Bigg(\sum_{\beta \in \mathbb{F}_q} \beta^{j+1} E_\beta + \delta_{j+1,q} E_\infty \Bigg) \\
&\quad = \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j - \mathcal{E}_{i-1} \mathcal{E}_{j+1}.
\end{aligned}$$

Wichtig ist für uns, an dieser Stelle festzuhalten:

2.12 Korollar. *Jede Modulform vom Gewicht k kann als homogenes Polynom vom Grad k in den (gewöhnlichen oder modifizierten) Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 geschrieben werden. Aufgrund der vorhandenen Relationen ist eine solche Darstellung im Allgemeinen nicht eindeutig.*

2.3 Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1

Wir wollen die Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 wegen ihrer Rolle als Erzeuger der Algebra der Modulformen genauer untersuchen. Insbesondere interessieren uns Eigenschaften der bisher noch nicht betrachteten modifizierten Eisenstein-Reihen. Der Übersichtlichkeit halber verzichten wir in diesem Abschnitt darauf, an jeder Stelle ausdrücklich auf die Beschränkung auf Gewicht 1 hinzuweisen.

Relationen und Normalform

Ausgehend von Relation (2.1) können wir weitere explizite Rechenregeln für den Umgang mit Produkten von modifizierten Eisenstein-Reihen angeben. Dies erlaubt uns insbesondere, für Monome eine eindeutige Normalform zu bestimmen.

2.13 Definition. Ein monomialer Ausdruck in den modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 liegt in *Normalform* vor, wenn er höchstens eine Eisenstein-Reihe $\mathcal{E}_b$ mit einem Index $0 < b < q$ enthält, wenn er also von der Form

$$\mathcal{E}_0^m \mathcal{E}_b \mathcal{E}_q^n \quad \text{oder} \quad \mathcal{E}_0^m \mathcal{E}_q^n$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_0$ ist. Wir nennen eine solche Modulform auch selbst eine *Normalform*.

Bemerkung. Je nach Verwendung macht es Sinn, in der obigen Schreibweise auch $b = 0$ zuzulassen und nur Potenzen $\mathcal{E}_q^n$ gesondert aufzuführen. Dies führt lediglich zu abweichenden Fallunterscheidungen und hat keinen Einfluss auf die Wohldefiniertheit der Normalform.

Bevor wir zeigen, dass jedes Produkt modifizierter Eisenstein-Reihen in Normalform überführt werden kann, halten wir das folgende Lemma fest, bei dem es sich um eine unmittelbare Konsequenz von Relation (2.1) handelt.

2.14 Lemma. *Für $0 < i, j < q$ gilt*

$$\mathcal{E}_i \mathcal{E}_j = \begin{cases} \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_{i+j} & i + j \leq q, \\ \mathcal{E}_{i+j-q} \mathcal{E}_q & i + j > q. \end{cases}$$

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $i < j$. Nach Relation (2.1) gilt

$$\mathcal{E}_i \mathcal{E}_j = \mathcal{E}_{i-1} \mathcal{E}_{j+1}.$$

Ist nun $i-1=0$ oder $j+1=q$, so ist der resultierende Ausdruck bereits von der gewünschten Form. Andernfalls können wir Relation (2.1) erneut auf das Produkt $\mathcal{E}_{i-1}\mathcal{E}_{j+1}$ anwenden. Nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen erreichen wir auf diese Weise eine Beschreibung der Modulform $\mathcal{E}_i\mathcal{E}_j$, die von der gesuchten Gestalt ist. □

2.15 Proposition. *Zu einem beliebigen Produkt*

$$\mathcal{E}_{b_1}^{m_1}\cdots\mathcal{E}_{b_s}^{m_s}$$

modifizierter Eisenstein-Reihen mit $0 \leq b_i \leq q$ *und* $m_i \in \mathbb{N}$ *existiert genau ein Monom in Normalform, das die gleiche Modulform beschreibt.*

Setzen wir

$$m := m_1 + \ldots + m_s$$

und

$$\mathfrak{b} := m_1 b_1 + \ldots + m_s b_s$$

mit eindeutiger Zerlegung

$$\mathfrak{b} = cq + b, \quad 0 \leq b \leq q-1,$$

so ist die Normalform von der Gestalt

$$\mathcal{E}_{b_1}^{m_1}\cdots\mathcal{E}_{b_s}^{m_s} = \begin{cases} \mathcal{E}_0^{m-1-c}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^c & b>0 \\ \mathcal{E}_0^{m-c}\mathcal{E}_q^c & b=0. \end{cases}$$

Beweis. Die angegebenen Formeln sind wohldefiniert, da wegen $\mathfrak{b} \leq mq$ in jedem Fall $c \leq m$ ist. Der Fall $c = m$ tritt dabei nur für $b = 0$ auf.

Die Eindeutigkeit der Normalform ist klar, da es nur dann Relationen zwischen Monomen in modifizierten Eisenstein-Reihen gibt, wenn mindestens zwei der auftretenden Indizes von 0 und q verschieden sind.

Zu zeigen ist also, dass die angegebene Normalform tatsächlich mittels Umformungen gemäß Relation (2.1) beziehungsweise Lemma 2.14 aus dem ursprünglichen Produkt hervorgeht.

Enthält das Produkt $\mathcal{E}_{b_1}^{m_1}\cdots\mathcal{E}_{b_s}^{m_s}$ insgesamt höchstens einen Faktor $\mathcal{E}_b$ mit $0<b<q$, so erhalten wir die Normalform durch bloßes Umsortieren. Dabei ist c gerade die Gesamtanzahl von Faktoren $\mathcal{E}_q$ und die Anzahl der Faktoren $\mathcal{E}_0$ ist $m-c$ oder $m-c-1$, je nachdem ob ein solches $\mathcal{E}_b$ vorkommt oder nicht.

Enthält das Monom dagegen zwei Faktoren $\mathcal{E}_{b'}, \mathcal{E}_{b''}$ mit $0 < b', b'' < q$, so können wir deren Produkt gemäß Lemma 2.14 zu einem Produkt zweier modifizierter Eisenstein-Reihen umformen, von denen höchstens eine einen Index besitzt, der sowohl von 0 als auch von q verschieden ist. Wir erreichen durch Hintereinanderausführen entsprechender Umformungen also nach endlich vielen Schritten eine Normalform.

Da die Summe der Indizes unter diesen Umformungen in jedem Schritt konstant bleibt, muss die resultierende Normalform gerade von der angegebenen Gestalt sein. □

Bemerkung. Wir können bei der Angabe der Normalform auf die Fallunterscheidung verzichten, wenn wir (im Fall $\mathfrak{b} = mq$) formal $\mathcal{E}_0^{-1}\mathcal{E}_0 = 1$ setzen.

2.16 Korollar. *Zwei Produkte von modifizierten Eisenstein-Reihen beschreiben genau dann dieselbe Modulform, wenn die Summen (mit Vielfachheiten) ihrer Indizes übereinstimmen.*

Mit Hilfe der Normalformen lassen sich Standardbasen definieren.

2.17 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Normalformen vom Gewicht k*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_0^{k-1-l}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^l, \quad 0 \leq b \leq q-1,\, 0 \leq l \leq k-1,\\
&\mathcal{E}_q^k,
\end{aligned}$$

bilden eine Basis des Vektorraums M_k der Modulformen vom Gewicht k.

Beweis. Gemäß Satz 2.11 wird der Vektorraum M_k von Monomen vom Grad k in den $\mathcal{E}_i$ mit $0 \leq i \leq q$ erzeugt. Nach Proposition 2.15 existiert zu jedem solchen Monom aber eine eindeutige Normalform, die die gleiche Modulform in M_k beschreibt. Die angegebenen Normalformen bilden somit ein Erzeugendensystem von M_k. Aus Dimensionsgründen muss es sich dabei sogar um eine Basis handeln. □

Auch bei gemischten Produkten von gewöhnlichen und modifizierten Eisenstein-Reihen gibt es Relationen, wie etwa die folgende:

2.18 Lemma. *Für $1 \leq i \leq q$ gilt die Relation*

$$\mathcal{E}_iE_0 = -\mathcal{E}_{i-1}E_\infty.$$

Beweis. Wegen $E_0 = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{q-1}$ ist

$$\mathcal{E}_iE_0 = \mathcal{E}_i(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{q-1}) = \mathcal{E}_0\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i-1}\mathcal{E}_q.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt Lemma 2.14 benutzt. Andererseits ist aber auch $\mathcal{E}_q = \mathcal{E}_1 + E_\infty$, so dass wir

$$\mathcal{E}_0\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i-1}\mathcal{E}_q = \mathcal{E}_0\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i-1}(\mathcal{E}_1 + E_\infty) = \mathcal{E}_0\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_0\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i-1}E_\infty = -\mathcal{E}_{i-1}E_\infty$$

erhalten. □

Wiederholtes Anwenden liefert die folgende Version für höhere Potenzen:

2.19 Lemma. *Sei $k \leq i \leq q$. Dann gilt*

$$\mathcal{E}_iE_0^k = (-1)^k\mathcal{E}_{i-k}E_\infty^k.$$

Verhalten an den Spitzen

Wir wollen nun das Verhalten der Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 an den Spitzen betrachten. Dabei rufen wir uns zunächst ein Ergebnis von Cornelissen für die gewöhnlichen Eisenstein-Reihen in Erinnerung.

2.20 Proposition (Cornelissen [Cor97b, III, Proposition 2.2])**.** *Es existiert $\zeta \in \mathcal{C}_\infty^\times$, so dass die Eisenstein-Reihen vom Gewicht* 1 *an den Spitzen Reihenentwicklungen der folgenden Gestalt besitzen:*

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}^{-1}E_\infty(\infty) &= \zeta + o(\tau^2) \\
\overline{\pi}^{-1}E_u(\infty) &= \tau + o(\tau^2), \quad u \in \mathbb{F}_q \\
\overline{\pi}^{-1}E_\infty((\alpha:1)) &= \tau + o(\tau^2), \quad \alpha \in \mathbb{F}_q \\
\overline{\pi}^{-1}E_u((\alpha:1)) &= (\alpha+u)^{-1}\tau + o(\tau^2), \quad \alpha, u \in \mathbb{F}_q,\ \alpha \neq -u \\
\overline{\pi}^{-1}E_u((\alpha:1)) &= \zeta + o(\tau^2), \quad \alpha = -u \in \mathbb{F}_q.
\end{aligned}$$

Dabei verwenden wir die Uniformisierende τ aus Proposition 1.14 und wählen das Element $\overline{\pi}$ wie in 1.6.

Wir sehen also, dass es zu jeder Spitze genau eine Eisenstein-Reihe E_ν gibt, die an dieser Spitze nicht verschwindet.

Auf diesem Ergebnis aufbauend untersuchen wir nun die modifizierten Eisenstein-Reihen an den Spitzen. Gemäß der Bemerkung zu Definition 2.6 können wir dabei teilweise auf Resultate aus [Cor97b] zurückgreifen.

2.21 Proposition. *Sei $0 \leq i \leq q$. Die modifizierte Eisenstein-Reihe $\mathcal{E}_i$ besitzt*

an der Spitze ∞ Nullstellenordnung $q-i$,

an der Spitze $(0:1)$ Nullstellenordnung i

und verschwindet weder an den Spitzen $(\alpha:1)$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ noch im Inneren, d.h. in $\Gamma(T)\backslash\Omega$. Genauer gilt mit den Bezeichnungen aus Proposition 2.20

$$\overline{\pi}^{-1}\mathcal{E}_i((\alpha:1)) = (-\alpha)^i\zeta + o(\tau), \quad \alpha \in \mathbb{F}_q^\times.$$

Beweis. Zunächst bestimmen wir die Nullstellenordnung an der Spitze ∞. Cornelissen zeigt im Beweis von [Cor97b, III, Theorem 3.4], dass die dort definierte Modulform Z_q (und damit auch $\mathcal{E}_q$) keine Nullstelle an ∞ hat. Gemäß Lemma 2.18 gilt aber

$$\mathcal{E}_q E_0 = -\mathcal{E}_{q-1}E_\infty.$$

Da wir wissen, dass E_0 an der Spitze ∞ eine einfache Nullstelle besitzt, und E_∞ an der Spitze ∞ nicht verschwindet, erhalten wir, dass $\mathcal{E}_{q-1}$ genau Nullstellenordnung 1 an ∞ hat. Wenden wir nun Lemma 2.18 für $i = q-1$ an, erhalten wir

$$\mathcal{E}_{q-1}E_0 = -\mathcal{E}_{q-2}E_\infty$$

und sehen somit, dass $\mathcal{E}_{q-2}$ an ∞ genau von zweiter Ordnung verschwindet. Durch sukzessives Fortführen folgt die Aussage für alle $\mathcal{E}_i$.

Analog gehen wir bei der Spitze $(0:1)$ vor, ausgehend von der Gleichung

$$\mathcal{E}_1 E_0 = -\mathcal{E}_0 E_\infty,$$

die wieder aus Lemma 2.18 folgt. Da $\mathcal{E}_0$ nicht an $(0:1)$ verschwindet (siehe [Cor97b, im zitierten Beweis]), folgt die behauptete Nullstellenordnung.

Für jedes $0 \leq i \leq q$ ergeben die Nullstellenordnungen von $\mathcal{E}_i$ an den Spitzen ∞ und $(0:1)$ damit zusammen bereits q. Nach Proposition 1.20 kann $\mathcal{E}_i$ also weder im Inneren noch an weiteren Spitzen verschwinden.

Die behauptete Gestalt der Reihenentwicklung folgt mit Proposition 2.20 direkt aus der Definition der modifizierten Eisenstein-Reihen und ist für Cornelissens Modulformen Z_j bereits in [Cor97b, im zitierten Beweis] angegeben. □

Für das Verhalten an den Spitzen $(\alpha:1)$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ können wir ferner die folgende Aussage zeigen:

2.22 Lemma. *Es existiert keine nichttriviale Linearkombination $\sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i \mathcal{E}_i$ mit Koeffizienten $\lambda_i \in \mathcal{C}_\infty$, die an allen Spitzen $(\alpha:1)$, $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$, gleichzeitig verschwindet.*

Beweis. Annahme: Die Behauptung sei falsch.

Nach Proposition 2.21 können die Reihenentwicklungen der $\mathcal{E}_i$ für $1 \leq i \leq q-1$ an den Spitzen $(\alpha:1)$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ auf folgende Form gebracht werden:

$$\mathcal{E}_i((\alpha:1)) = (-\alpha)^i \overline{\pi}\zeta + o(\tau).$$

Nach unserer Annahme existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_{q-1}$, nicht alle gleich 0, so dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i \mathcal{E}_i((\alpha:1)) = o(\tau) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{F}_q^\times.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert für den Absolutterm die Gleichung

$$0 = \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i (-\alpha)^i = \lambda_{q-1} + \sum_{i=1}^{q-2} \lambda_i (-\alpha)^i,$$

die für alle $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ erfüllt sein muss. Wir haben also ein von Null verschiedenes Polynom vom Grad $\leq q-2$ mit $q-1$ Nullstellen. Dies ist ein Widerspruch. □

Wir können an Proposition 2.21 direkt ablesen, dass kein Produkt von modifizierten Eisenstein-Reihen des Gewichts 1 eine Spitzenform sein kann. Für Monome in Normalform erhalten wir genauer:

2.23 Proposition. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Modulform $\mathcal{E}_0^{k-1-l} \mathcal{E}_b \mathcal{E}_q^l$ mit $0 \leq b \leq q-1$ und $0 \leq l \leq k-1$ besitzt*

an der Spitze ∞ Verschwindungsordnung $q - b + (k-1-l)q$, *an der Spitze* $(0:1)$ *Verschwindungsordnung* $lq+b$

und verschwindet weder an den Spitzen $(\alpha:1)$ *mit* $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ *noch im Inneren.*

Die Modulform $\mathcal{E}_q^k$ *verschwindet an der Spitze* $(0:1)$ *mit Ordnung* kq *und besitzt keine weiteren Nullstellen.*

Beweis. Um die Verschwindungsordnungen der Normalformen an den Spitzen zu bestimmen, müssen wir nur die Verschwindungsordnungen der modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 in Proposition 2.21 ablesen und mit der korrekten Vielfachheit versehen. Es ergeben sich direkt die behaupteten Formeln.

Da die Ordnungen an den Spitzen zusammen jeweils kq ergeben, kann eine Normalform nach Proposition 1.20 keine Nullstellen im Inneren besitzen. □

Bemerkung. Das Verhalten an den Spitzen kann für einen alternativen Beweis der linearen Unabhängigkeit in Lemma 2.17 verwendet werden: Da beim Durchlaufen aller Normalformen an der Spitze $(0:1)$ keine Verschwindungsordnung mehrfach vorkommt, existiert keine nichttriviale Darstellung der 0 als Linearkombination der angegebenen Normalformen.

Wir werden in Kapitel 3 ähnliche Argumente verwenden, um die Vektorraumstruktur der Spitzenfiltrierung mit Hilfe von Eisenstein-Reihen genauer zu beschreiben.

2.4 Algebraische Zusammenhänge zwischen Eisenstein-Reihen

Durch die bisherigen Ergebnisse ist folgende Fragestellung motiviert: Wir wissen, dass sich beliebige Modulformen vom Gewicht k als homogene polynomielle Ausdrücke des Gewichts k in Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 schreiben lassen. Wie sehen diese Darstellungen aus, wenn wir konkret die gewöhnlichen sowie die modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht k betrachten? Da wir auch für die Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 die Wahl zwischen gewöhnlichen und modifizierten besitzen, kommen wir insgesamt auf vier Fälle.

Bei den gewöhnlichen Eisenstein-Reihen können wir auf bekannte Resultate zurückgreifen. Im einfachsten Fall haben wir:

2.24 Proposition ([Gek12, Korollar 2.8])**.** *Sei* k *von der Form* $k = k'p^n$ *für ein* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $1 \leq k' \leq q$*. Dann gilt*

$$E_\nu^{(k)} = (E_\nu^{(1)})^k = E_\nu^k$$

für alle $\nu \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$.

Bemerkung. Im Allgemeinen werden die Relationen zwischen den Eisenstein-Reihen E_ν vom Gewicht 1 und den Eisenstein-Reihen $E_\nu^{(k)}$ vom Gewicht k mit Hilfe von Goss-Polynomen beschrieben (siehe [Gek12]). Die Proposition deckt dabei besonders einfache Spezialfälle ab. Im Allgemeinen sind die Relationen komplizierter, weshalb wir im Folgenden die zulässigen Gewichte wie in der Proposition einschränken werden.

Proposition 2.24 ist der Schlüssel für die Behandlung der übrigen Fälle. So erhalten wir als unmittelbare Konsequenz:

2.25 Lemma. *Sei $k = k'p^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq k' \leq q$. Dann ist*

$$\mathcal{E}_i^{(k)} = \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^i E_u^{(k)} = \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^i E_u^k, \quad 0 \leq i \leq q-1,$$
$$\mathcal{E}_\infty^{(k)} = \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^k E_u^{(k)} + E_\infty^{(k)} = \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^k E_u^k + E_\infty^k.$$

Wir haben also für Gewichte der obigen Form eine Beschreibung der modifizierten Eisenstein-Reihen als polynomielle Ausdrücke in den gewöhnlichen Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1. Insbesondere müssen wir nicht unterscheiden, ob wir die modifizierten Eisenstein-Reihen wie in der Definition als Linearkombinationen der gewöhnlichen Eisenstein-Reihen vom entsprechenden Gewicht oder als Linearkombinationen von k-ten Potenzen der gewöhnlichen Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 betrachten. Wir werden im Folgenden von dieser Identifikation Gebrauch machen.

Als Nächstes wollen wir eine Beschreibung von modifizierten Eisenstein-Reihen höherer Gewichte in Termen der modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 angeben. Der naive Ansatz, die gewöhnlichen Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 in Lemma 2.25 mit Hilfe von Proposition 2.10 durch Linearkombinationen der modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 zu ersetzen und den resultierenden Ausdruck auszumultiplizieren, erweist sich als nicht zielführend. Das dabei erforderliche Auswerten k-ter Potenzen von Summen mit $q-1$ oder q Summanden führt schnell zu unhandlichen Ausdrücken.

Um dieses Problem zu umgehen, verwenden wir zum einen Relationen zwischen bestimmten Produkten von Eisenstein-Reihen zur Vereinfachung der auftretenden Ausdrücke. Zum anderen führen wir Induktion nach dem Gewicht k durch, so dass wir die wachsende Komplexität in jedem Schritt kontrollieren.

Wir benötigen die folgende alternative, aber zu (2.1) äquivalente Formulierung der Relationen zwischen Produkten von Eisenstein-Reihen. Diese geht auf Cornelissen und Zagier zurück.

2.26 Lemma ([Cor97a, Addendum 6])**.** *Die Relationen* (2.1) *aus Satz 2.11 sind äquivalent zu*

$$(u-v)E_u E_v + (E_u - E_v)E_\infty = 0 \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{F}_q.$$

Aus dieser Formulierung leiten wir eine Version für einen bestimmten Typ von Monomen aus gewöhnlichen Eisenstein-Reihen her:

2.27 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $u \neq v \in \mathbb{F}_q$. Dann gilt*

$$E_u^k E_v = -\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(u-v)^j} E_u^{k+1-j} E_\infty^j + \frac{1}{(u-v)^k} E_v E_\infty^k.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach k. Der Induktionsanfang für $k = 1$ entspricht genau Lemma 2.26.

Sei die Behauptung für $1, \dots, k$ gezeigt. Für den Schritt $1, \dots, k \to k+1$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
E_u^{k+1} E_v &= E_u (E_u^k E_v) \\
&\overset{\text{IV}}{=} E_u \left(-\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(u-v)^j} E_u^{k+1-j} E_\infty^j + \frac{1}{(u-v)^k} E_v E_\infty^k \right) \\
&= -\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(u-v)^j} E_u^{k+2-j} E_\infty^j + \frac{1}{(u-v)^k} E_u E_v E_\infty^k \\
&\overset{\text{IV}}{=} -\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(u-v)^j} E_u^{k+2-j} E_\infty^j + \frac{1}{(u-v)^k} \left(-\frac{1}{u-v} E_u E_\infty + \frac{1}{u-v} E_v E_\infty \right) E_\infty^k \\
&= -\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(u-v)^j} E_u^{k+2-j} E_\infty^j + \frac{1}{(u-v)^{k+1}} E_v E_\infty^{k+1}.
\end{aligned}$$

Bei der ersten Anwendung der Induktionsvoraussetzung haben wir die Gültigkeit der Behauptung für k benutzt, bei der zweiten die Gültigkeit für 1. $\square$

Mit Hilfe dieser Relationen können wir das folgende Lemma beweisen, das uns erlauben wird, die Störterme in späteren Rechnungen zu vereinfachen. Wir verwenden dabei die elementare Identität

$$\sum_{w \in \mathbb{F}_q^\times} w^j = \begin{cases} -1 & q-1 \mid j \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{2.2}$$

die für jede beliebige Primzahlpotenz q gilt.

2.28 Lemma. *Sei $1 \le k \le q-1$ und $0 \le b \le q-1$. Dann gilt für $0 \le i \le k$*

$$\sum_{\substack{u,v \in \mathbb{F}_q \\ u \neq v}} u^i v^b E_u^k E_v = \sum_{j=1}^{k} \binom{b}{j} (-1)^j \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^{i+b-j} E_u^{k+1-j} E_\infty^j - \delta_{i,k} \sum_{v \in \mathbb{F}_q} v^b E_v E_\infty^k.$$

Dabei ist $\delta_{i,k}$ das Kronecker-Delta. Ferner gilt wie zuvor die Konvention $0^0 = 1$.

Im Spezialfall $b = 0$ ist insbesondere

$$\sum_{\substack{u,v \in \mathbb{F}_q \\ u \neq v}} u^i E_u^k E_v = -\delta_{i,k} \sum_{v \in \mathbb{F}_q} E_v E_\infty^k.$$

Beweis. Wir formen den Ausdruck auf der linken Seite zunächst mit Lemma 2.27 um:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{F}_q\\ u\neq v}} u^i v^b E_u^k E_v &= \sum_{\substack{u,v\in\mathbb{F}_q\\ u\neq v}} u^i v^b \left(-\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(u-v)^j} E_u^{k+1-j} E_\infty^j + \frac{1}{(u-v)^k} E_v E_\infty^k\right)\\
&= -\sum_{j=1}^{k}\sum_{u\in\mathbb{F}_q} u^i \underbrace{\left(\sum_{\substack{v\in\mathbb{F}_q\\ v\neq u}} \frac{v^b}{(u-v)^j}\right)}_{=:\lambda_1(b,j)} E_u^{k+1-j} E_\infty^j\\
&\quad + \sum_{v\in\mathbb{F}_q} v^b \underbrace{\left(\sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_q\\ u\neq v}} \frac{u^i}{(u-v)^k}\right)}_{=:\lambda_2(i,k)} E_v E_\infty^k.
\end{aligned}$$

Wir wollen die gekennzeichneten Summen in Abhängigkeit von b und j beziehungsweise von i und k auswerten.

(i) Nach einer kurzen Umformung sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
\lambda_1(b,j) &= \sum_{\substack{v\in\mathbb{F}_q\\ v\neq u}} \frac{v^b}{(u-v)^j} = \sum_{w\in\mathbb{F}_q^\times} \frac{(u-w)^b}{w^j} = \sum_{w\in\mathbb{F}_q^\times}\sum_{m=0}^{b} \tbinom{b}{m} u^{b-m}(-1)^m w^{m-j}\\
&= \sum_{m=0}^{b} \tbinom{b}{m} u^{b-m}(-1)^m \sum_{w\in\mathbb{F}_q^\times} w^{m-j}
\end{aligned}$$

gilt. Die innere Summe können wir mit Hilfe von Identität (2.2) auswerten. Dazu untersuchen wir, für welche Werte von m der Exponent $m-j$ durch $q-1$ teilbar ist.

Da nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}
m-j &\leq b-1 \leq q-2,\\
m-j &\geq -k \geq -(q-1)
\end{aligned}$$

gilt, kommen die Möglichkeiten $m-j=-(q-1)$ sowie $m-j=0$ in Betracht.

Der erste Fall tritt nur für $k=q-1$ auf. Für $j=q-1$ nimmt dann der Summand zu $m=0$ von $\lambda_1(b,j)$ den Wert

$$\binom{b}{0} u^b(-1)^0(-1) = -u^b$$

an.

Der zweite Fall ist dagegen für jedes k möglich. Der Summand von $\lambda_1(b,j)$ zu $m=j$ nimmt den Wert

$$-\binom{b}{j}u^{b-j}(-1)^j$$

an. Da der Binomialkoeffizient für $j>b$ verschwindet, ist die angegebene Formel verträglich mit dem Fall, dass die Summe gar nicht bis j läuft.

In allen übrigen Fällen verschwindet die innere Summe.

Insgesamt erhalten wir also

$$\lambda_1(b,j) = -\binom{b}{j}u^{b-j}(-1)^j - \delta_{k,q-1}\delta_{j,q-1}u^b.$$

(ii) Analog zum ersten Fall schreiben wir

$$\lambda_2(i,k) = \sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_q\\ u\neq v}} \frac{u^i}{(u-v)^k} = \sum_{w\in\mathbb{F}_q^\times} \frac{(v+w)^i}{w^k} = \sum_{m=0}^{i} \tbinom{i}{m} v^{i-m} \sum_{w\in\mathbb{F}_q^\times} w^{m-k}.$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} m-k &\leq i-1 \leq k-1 \leq q-2,\\ m-k &\geq -k \geq -(q-1). \end{aligned}$$

Wir sehen wiederum mit Identität (2.2), dass die innere Summe außer in den Fällen $m=k$ (dies impliziert $i=k$) beziehungsweise $m=0$, $k=q-1$ (für beliebiges i) verschwindet. Wir erhalten

$$\lambda_2(i,k) = -\delta_{i,k} - \delta_{k,q-1}v^i.$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{u,v\in\mathbb{F}_q\\ u\neq v}} u^i v^b E_u^k E_v &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{u\in\mathbb{F}_q} u^i \tbinom{b}{j} u^{b-j}(-1)^j E_u^{k+1-j} E_\infty^j + \delta_{k,q-1} \sum_{u\in\mathbb{F}_q} u^i u^b E_u E_\infty^{q-1}\\ &\quad - \delta_{i,k} \sum_{v\in\mathbb{F}_q} v^b E_v E_\infty^k - \delta_{k,q-1} \sum_{v\in\mathbb{F}_q} v^b v^i E_v E_\infty^{q-1}\\ &= \sum_{j=1}^{k} \tbinom{b}{j}(-1)^j \sum_{u\in\mathbb{F}_q} u^{i+b-j} E_u^{k+1-j} E_\infty^j - \delta_{i,k} \sum_{v\in\mathbb{F}_q} v^b E_v E_\infty^k, \end{aligned}$$

wie behauptet. Die spezielle Form im Fall $b=0$ folgt wegen $\binom{0}{j}=0$ für $1\leq j\leq k$. $\square$

Wir können nun für kleine Gewichte ein erstes Ergebnis für die gewünschte Beschreibung der modifizierten Eisenstein-Reihen von höherem Gewicht in Termen der modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 angeben.

2.29 Satz. *Sei* $1 \leq k \leq q$. *Dann gilt*

$$\mathcal{E}_0^{k-i}\mathcal{E}_q^i = \begin{cases} \mathcal{E}_i^{(k)} & 0 \leq i \leq k-1 \\ \mathcal{E}_\infty^{(k)} & i = k. \end{cases}$$

Beweis. Durch die Beschränkung auf Gewichte $k \leq q$ befinden wir uns in der Situation von Lemma 2.25, können also die modifizierten Eisenstein-Reihen als Potenzen der gewöhnlichen Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 schreiben.

Offenbar ist die Aussage des Satzes für $k = 1$ tautologisch. (Wir erinnern daran, dass $\mathcal{E}_q$ nur eine alternative Schreibweise für $\mathcal{E}_\infty^{(1)}$ ist.)

Wir zeigen nun: Gilt die Aussage für ein $k \in \{1, \ldots, q-1\}$, so gilt sie auch für $k+1$. Da wir uns bereits von ihrer Gültigkeit für $k = 1$ überzeugt haben, erhalten wir induktiv einen vollständigen Beweis des Satzes.

Sei die Behauptung also gezeigt für ein $k \leq q-1$. Für $0 \leq i \leq k$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^{k+1-i}\mathcal{E}_q^i = \mathcal{E}_0(\mathcal{E}_0^{k-i}\mathcal{E}_q^i) &\overset{\text{IV}}{=} \left(\sum_{v\in\mathbb{F}_q} E_v\right)\left(\sum_{u\in\mathbb{F}_q} u^i E_u^k + \delta_{i,k}E_\infty^k\right) \\ &= \sum_{u,v\in\mathbb{F}_q} u^i E_u^k E_v + \delta_{i,k}\sum_{v\in\mathbb{F}_q} E_v E_\infty^k \\ &= \sum_{v\in\mathbb{F}_q} v^i E_v^{k+1} + \sum_{\substack{u,v\in\mathbb{F}_q \\ u\neq v}} u^i E_u^k E_v + \delta_{i,k}\sum_{v\in\mathbb{F}_q} E_v E_\infty^k \\ &= \sum_{v\in\mathbb{F}_q} v^i E_v^{k+1} \\ &= \mathcal{E}_i^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir dabei neben der Induktionsvoraussetzung die Beschreibung der modifizierten Eisenstein-Reihen aus Lemma 2.25 verwendet. Außerdem haben wir ausgenutzt, dass Lemma 2.28 in der betrachteten Situation anwendbar ist und

$$\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{F}_q \\ u\neq v}} u^i E_u^k E_v = -\delta_{i,k}\sum_{v\in\mathbb{F}_q} E_v E_\infty^k$$

liefert.

Sei nun $i = k+1$. In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q^{k+1} = \mathcal{E}_q\mathcal{E}_q^k &\overset{\text{IV}}{=} \left(\sum_{v\in\mathbb{F}_q} vE_v + E_\infty\right)\left(\sum_{u\in\mathbb{F}_q} u^k E_u^k + E_\infty^k\right) \\ &= \sum_{v\in\mathbb{F}_q} v^{k+1}E_v^{k+1} + E_\infty^{k+1} + \sum_{\substack{u,v\in\mathbb{F}_q \\ u\neq v}} u^k v E_u^k E_v + \sum_{u\in\mathbb{F}_q} u^k E_u^k E_\infty + \sum_{v\in\mathbb{F}_q} vE_vE_\infty^k \\ &= \mathcal{E}_\infty^{(k+1)}, \end{aligned}$$

da aus Lemma 2.28 mit $i = k$ und $b = 1$ folgt, dass

$$\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{F}_q\\ u\neq v}} u^k v E_u^k E_v = -\sum_{u\in\mathbb{F}_q} u^k E_u^k E_\infty - \sum_{v\in\mathbb{F}_q} v E_v E_\infty^k$$

gilt. □

Bemerkung. In Abschnitt 8.2 werden wir die Aussage des Satzes darstellungstheoretisch interpretieren. Bereits an dieser Stelle können wir jedoch das folgende analytische Resultat formulieren.

2.30 Proposition. *Sei $1 \le k \le q$ und $0 \le i \le k-1$. Die modifizierte Eisenstein-Reihe $\mathcal{E}_i^{(k)}$ besitzt*

an der Spitze ∞ Nullstellenordnung iq,

an der Spitze $(0:1)$ Nullstellenordnung $(k-i)q$

und verschwindet weder an den übrigen Spitzen $(\alpha : 1)$, $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$, noch im Inneren.

Die Eisenstein-Reihe $\mathcal{E}_\infty^{(k)}$ hat an der Spitze $(0:1)$ Verschwindungsordnung kq und keine weiteren Nullstellen.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der in Satz 2.29 angegebenen Darstellung der betrachteten Eisenstein-Reihen als Monome in $\mathcal{E}_0$ und $\mathcal{E}_q$ zusammen mit der Beschreibung des Nullstellenverhaltens der modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 in Proposition 2.21. □

Um die gesuchte Beschreibung der für $k < q$ noch verbleibenden modifizierten Eisenstein-Reihen $\mathcal{E}_i^{(k)}$ mit $k \le i \le q-1$ zu erhalten, setzen wir zunächst die Untersuchung der Monome in Normalform fort.

2.31 Lemma. *Sei $1 \le k \le q$ und $0 \le l \le k-1$. Für $1 \le b \le q-1$ gilt*

$$\mathcal{E}_0^{k-1-l}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^l = \underbrace{\mathcal{E}_{[b+l]}^{(k)}}_{\in \mathrm{Eis}_k} + \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} \binom{b}{j}(-1)^j \sum_{u\in\mathbb{F}_q} u^{b+l-j} E_u^{k-j} E_\infty^j}_{\in M_k^1}.$$

Dabei verwenden wir die Konvention $0^0 = 1$ und das Symbol „$[\,\cdot\,]$“ aus Notation 2.7.

Beweis. Für $k = 1$ macht das Lemma die tautologische Aussage $\mathcal{E}_b = \mathcal{E}_b$. Sei also im Folgenden $k \ge 2$.

Wir nutzen aus, dass wir den Faktor $\mathcal{E}_0^{k-1-l}\mathcal{E}_q^l$ mit Hilfe von Satz 2.29 zu einer modifizierten Eisenstein-Reihe umformen können, die wir wiederum wie in Lemma 2.25

darstellen. Wir erhalten auf diese Weise für $0 \leq l \leq k-1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0^{k-1-l}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^l &= (\mathcal{E}_0^{k-1-l}\mathcal{E}_q^l)\mathcal{E}_b \\
&= \left(\sum_{u\in\mathbb{F}_q} u^l E_u^{k-1} + \delta_{l,k-1}E_\infty^{k-1}\right)\left(\sum_{v\in\mathbb{F}_q} v^b E_v\right) \\
&= \sum_{u\in\mathbb{F}_q} u^{b+l}E_u^k + \sum_{\substack{u,v\in\mathbb{F}_q\\ u\neq v}} u^l v^b E_u^{k-1}E_v + \delta_{l,k-1}\sum_{v\in\mathbb{F}_q} v^b E_v E_\infty^{k-1}.
\end{aligned}$$

Die erste Summe beschreibt offenbar die modifizierte Eisenstein-Reihe, deren Index durch die Restklasse von $b+l$ modulo $q-1$ gegeben ist. Da in jedem Fall $b+l>0$ gilt, handelt es sich also um $\mathcal{E}_{[b+l]}^{(k)}$.

Ferner können wir wegen $1 \leq k-1 \leq q-1$ Lemma 2.28 anwenden, um die Identität

$$\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{F}_q\\ u\neq v}} u^l v^b E_u^{k-1}E_v = \sum_{j=1}^{k-1}\binom{b}{j}(-1)^j\sum_{u\in\mathbb{F}_q} u^{b+l-j}E_u^{k-j}E_\infty^j - \delta_{l,k-1}\sum_{v\in\mathbb{F}_q} v^b E_v E_\infty^{k-1}$$

zu erhalten.

Zusammen ergibt sich somit tatsächlich

$$\mathcal{E}_0^{k-1-l}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^l = \mathcal{E}_{[b+l]}^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{b}{j}(-1)^j\sum_{u\in\mathbb{F}_q} u^{b+l-j}E_u^{k-j}E_\infty^j.$$

Dabei gilt: Die Modulform

$$\sum_{j=1}^{k-1}\binom{b}{j}(-1)^j\sum_{u\in\mathbb{F}_q} u^{b+l-j}E_u^{k-j}E_\infty^j$$

ist tatsächlich eine Spitzenform, da sie in jedem Summanden mindestens jeweils einen Faktor E_u sowie E_∞ enthält, und somit nach Proposition 2.20 an jeder Spitze verschwindet. □

Bemerkung. Nach Definition der modifizierten Eisenstein-Reihen können wir im Lemma alternativ auch

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0^{k-1-l}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^l &= \mathcal{E}_{[b+l]}^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{b}{j}(-1)^j\mathcal{E}_{\langle b+l-j\rangle}^{(k-j)}E_\infty^j \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{b}{j}(-1)^j\mathcal{E}_{\langle b+l-j\rangle}^{(k-j)}E_\infty^j
\end{aligned}$$

mit dem Symbol „$\langle\cdot\rangle$“ aus Notation 2.7 schreiben. Dabei ist genau dann

$$b+l-j=0 \quad \text{und} \quad \binom{b}{j}\neq 0,$$

wenn $1 \leq b = j \leq k-1$ und $l = 0$ gilt. Andernfalls ist $\langle b+l-j \rangle = [b+l-j] > 0$.

Wir können nun mit Hilfe von Lemma 2.31 die gesuchte Beschreibung der modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht k in den noch offenen Fällen angeben.

2.32 Satz. *Sei $1 \leq k \leq q-1$. Dann ist für $k \leq i \leq q-1$*

$$\mathcal{E}_i^{(k)} = \sum_{l=0}^{k-1} \mu_l^{(i)} \mathcal{E}_0^{k-1-l} \mathcal{E}_{i-l} \mathcal{E}_q^l$$

mit

$$\mu_l^{(i)} := \mu_l^{(i,k)} := (-1)^{k-1}(-1)^l \binom{i-1-l}{k-1-l} \binom{i}{l}.$$

Beweis. Wieder ist die Aussage für $k = 1$ tautologisch: Für $1 \leq i \leq q-1$ ist $\mu_0^{(i,1)} = 1$.

Im allgemeinen Fall wenden wir Lemma 2.31 mit $b = i - l$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^{k-1-l} \mathcal{E}_{i-l} \mathcal{E}_q^l &= \mathcal{E}_{[i-l+l]}^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} \tbinom{i-l}{j} (-1)^j \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^{i-l+l-j} E_u^{k-j} E_\infty^j \\ &= \mathcal{E}_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} \tbinom{i-l}{j} (-1)^j \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^{i-j} E_u^{k-j} E_\infty^j. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{k-1} \mu_l^{(i)} \mathcal{E}_0^{k-1-l} \mathcal{E}_{i-l} \mathcal{E}_q^l &= \sum_{l=0}^{k-1} \mu_l^{(i)} \mathcal{E}_i^{(k)} + \sum_{l=0}^{k-1} \mu_l^{(i)} \sum_{j=1}^{k-1} \tbinom{i-l}{j} (-1)^j \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^{i-j} E_u^{k-j} E_\infty^j \\ &= \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{k-1} \mu_l^{(i)} \right)}_{=1} \mathcal{E}_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{k-1} \mu_l^{(i)} \tbinom{i-l}{j} \right)}_{=0} \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^{i-j} E_u^{k-j} E_\infty^j \\ &= \mathcal{E}_i^{(k)}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Werte von $\sum_{l=0}^{k-1} \mu_l^{(i)} \binom{i-l}{j}$ für $0 \leq j \leq k-1$ mit Hilfe von Proposition A.13 wie folgt bestimmt:

Nach Definition der $\mu_l^{(i)}$ gilt

$$\sum_{l=0}^{k-1} \mu_l^{(i)} \tbinom{i-l}{j} = (-1)^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \binom{i-1-l}{k-1-l} \binom{i}{l} \binom{i-l}{j}.$$

Wir übertragen den resultierenden Ausdruck in die Notation aus Proposition A.13:

Die Rollen von n und m aus der Proposition nehmen in der konkreten Situation $k-1$ beziehungsweise i ein. Da wir $k \leq i$ voraussetzen, ist dabei die Voraussetzung an m aus der Proposition erfüllt. Der Summationsindex heißt nicht k wie in der Proposition, sondern l. Die Zahl j spielt in beiden Notationen die gleiche Rolle.

Als Resultat der zitierten Proposition erhalten wir somit tatsächlich

$$\sum_{l=0}^{k-1} \mu_l^{(i)} \tbinom{i-l}{j} = \begin{cases} (-1)^{k-1}(-1)^{k-1} = 1 & j = 0 \\ 0 & 1 \leq j \leq k-1. \end{cases}$$

□

Für Gewichte $k \leq q$ haben wir damit sämtliche modifizierte Eisenstein-Reihen als polynomielle Ausdrücke in den modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 beschrieben. Die Monome liegen dabei in Normalform vor, so dass die Darstellungen eindeutig sind im Sinne von Proposition 2.15.

Wir können auch die gewöhnlichen Eisenstein-Reihen vom Gewicht k als Polynome in den modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 schreiben. Dazu kombinieren wir die obigen Resultate mit der im zweiten Abschnitt gegebenen Beschreibung der gewöhnlichen Eisenstein-Reihen vom Gewicht k als Linearkombination modifizierter Eisenstein-Reihen vom Gewicht k.

2.33 Proposition. *(i) Sei $1 \leq k \leq q-1$. Für $u \in \mathbb{F}_q^\times$ ist*

$$E_u^{(k)} = -\sum_{i=1}^{k-1} u^{-i} \mathcal{E}_0^{k-i} \mathcal{E}_q^i - \sum_{i=k}^{q-1} u^{-i} \sum_{l=0}^{k-1} \mu_l^{(i,k)} \mathcal{E}_0^{k-1-l} \mathcal{E}_{i-l} \mathcal{E}_q^l.$$

Ferner gelten

$$E_0^{(k)} = \mathcal{E}_0^k - \sum_{l=0}^{k-1} \mu_l^{(q-1,k)} \mathcal{E}_0^{k-1-l} \mathcal{E}_{q-1-l} \mathcal{E}_q^l$$

beziehungsweise

$$E_\infty^{(k)} = \mathcal{E}_q^k - \sum_{l=0}^{k-1} \mu_l^{(k,k)} \mathcal{E}_0^{k-1-l} \mathcal{E}_{k-l} \mathcal{E}_q^l.$$

Die Koeffizienten $\mu_l^{(i,k)}$ sind dabei wie in Satz 2.32 bestimmt.

(ii) Sei $k = q$. Dann gilt für $u \in \mathbb{F}_q^\times$

$$E_u^{(q)} = -\sum_{i=1}^{q-1} u^{-i} \mathcal{E}_0^{q-i} \mathcal{E}_q^i.$$

Darüber hinaus ist

$$E_0^{(q)} = \mathcal{E}_0^q - \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_q^{q-1}$$

sowie

$$E_\infty^{(k)} = \mathcal{E}_q^q - \mathcal{E}_0^{q-1} \mathcal{E}_q.$$

Beweis. Nach Proposition 2.10 gilt für $u \in \mathbb{F}_q^\times$

$$E_u^{(k)} = -\sum_{i=1}^{q-1} u^{-i} \mathcal{E}_i^{(k)}.$$

Außerdem ist

$$E_0^{(k)} = \mathcal{E}_0^{(k)} - \mathcal{E}_{q-1}^{(k)}$$

beziehungsweise

$$E_\infty^{(k)} = \mathcal{E}_\infty^{(k)} - \mathcal{E}_{[k]}^{(k)}.$$

In der letzten Formel ist dabei $[k] = k$ für $k \leq q-1$ und $[k] = 1$ für $k = q$. Einsetzen der Ergebnisse aus Satz 2.29 und Satz 2.32 (letzterer findet nur für $k \leq q-1$ Anwendung) liefert die angegebenen Resultate. □

Bemerkung. Wie eingangs erwähnt, ist das größte Hindernis bei der naiven Herangehensweise, dass unhandliche polynomielle Ausdrücke in den Eisenstein-Reihen ausgewertet werden müssten. Nun wissen wir aber, wie sich die auftretenden Terme zum Teil stark vereinfachen. Beispielsweise haben wir für $1 \leq k \leq q$ gezeigt, dass

$$\left(\sum_{u \in \mathbb{F}_q} E_u \right)^k = \sum_{u \in \mathbb{F}_q} E_u^k$$

gilt. Es ist daher denkbar, dass eine genauere Betrachtung derartiger Gleichungen die Formulierung weiterer interessanter Relationen zulässt.

Darüber hinaus stellt sich die Frage, ob es bei geeigneter Interpretation der auftretenden Koeffizienten sogar Antworten auf allgemeine Fragestellungen kombinatorischer Natur gibt.

2.34 (Zusammenfassung). Die verschiedenen Möglichkeiten, Eisenstein-Reihen vom Gewicht $1 \leq k \leq q$ als polynomielle Ausdrücke in Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 zu beschreiben, sind noch einmal in folgender Tabelle zusammengefasst.

Klasse vom Gewicht k	Klasse vom Gewicht 1	Beschreibung in
gewöhnlich	gewöhnlich	Proposition 2.24
	modifiziert	Proposition 2.33
modifiziert	gewöhnlich	Lemma 2.25
	modifiziert	Satz 2.29, Satz 2.32

Außerdem liefern Definition 2.6 und Proposition 2.10 Vorschriften, um gewöhnliche Eisenstein-Reihen vom Gewicht k als Linearkombination modifizierter Eisenstein-Reihen vom Gewicht k zu schreiben und umgekehrt.

Verallgemeinerung auf höhere Gewichte

Die Aussagen dieses Abschnitts können teilweise auch für höhere Gewichte formuliert werden. Wir erhalten so beispielsweise folgende Variante von Satz 2.29:

2.35 Korollar. *Sei k von der Form $k = k'p^n$ mit $1 \leq k' \leq q$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Sei ferner $0 \leq i' \leq k'$ und $i = i'p^n$. Dann gilt*

$$\mathcal{E}_0^{k-i}\mathcal{E}_q^i = \begin{cases} \mathcal{E}_{\langle i \rangle}^{(k)} & 0 \leq i' \leq k' - 1 \\ \mathcal{E}_\infty^{(k)} & i' = k'. \end{cases}$$

Beweis. Sei zunächst $0 \leq i' \leq k' - 1$. Unter Ausnutzung der Gültigkeit von Satz 2.29 für k' sowie der Charakteristik erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^{k-i}\mathcal{E}_q^i = \left(\mathcal{E}_0^{k'-i'}\mathcal{E}_q^{i'}\right)^{p^n} &= \left(\sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^{i'} E_u^{k'}\right)^{p^n} \\ &= \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^i E_u^k. \end{aligned}$$

Da in der betrachteten Situation Proposition 2.24 anwendbar ist, gilt

$$\sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^i E_u^k = \begin{cases} \mathcal{E}_{[i]}^{(k)} & i \geq 1 \\ \mathcal{E}_0^{(k)} & i = 0. \end{cases}$$

Diese Fallunterscheidung können wir genau durch das Symbol „$\langle \cdot \rangle$“ zusammenfassen.

Analog rechnet man für $i' = k'$ mit Satz 2.29 und Proposition 2.24 nach, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q^k = (\mathcal{E}_q^{k'})^{p^n} &= \left(\sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^{k'} E_u^{k'} + E_\infty^{k'}\right)^{p^n} \\ &= \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^k E_u^k + E_\infty^k = \mathcal{E}_\infty^{(k)} \end{aligned}$$

gilt. □

Wir sehen, dass bei größeren Gewichten zusätzlich die Reduktion modulo $q - 1$ eine Rolle spielt, wenn wir Formeln für Eisenstein-Reihen angeben wollen.

3 Die Spitzenfiltrierung

Wir haben in Kapitel 2 gesehen, dass der Vektorraum M_k der Modulformen vom Gewicht k zur Gruppe $\Gamma(T)$ in eine direkte Summe des Raums Eis_k der Eisenstein-Reihen vom Gewicht k und des Raums M_k^1 der Spitzenformen zerfällt. Wir wollen nun den Vektorraum der Spitzenformen genauer untersuchen.

Im Hinblick auf die Untersuchung darstellungstheoretischer Fragen im späteren Verlauf wird es sich als zweckmäßig erweisen, den Schwerpunkt auf die in Definition 1.16 eingeführte Spitzenfiltrierung

$$M_k^1 \supseteq M_k^2 \supseteq \dots$$

zu legen und nicht etwa auf eine alternativ mögliche Beschreibung von M_k^1 als direkte Summe von Vektorräumen.

Im ersten Abschnitt führen wir zuerst neue Notationen ein und konstruieren anschließend eine Basis von M_k^1. Im zweiten Abschnitt zeigen wir die Verträglichkeit dieser Basis mit der Spitzenfiltrierung in dem Sinne, dass bestimmte geschachtelte Teilmengen der konstruierten Basis ihrerseits Basen der Untermoduln M_k^i von Spitzenformen höherer Ordnung sind. Wir führen diesen Beweis mit Hilfe arithmetischer Eigenschaften der Eisenstein-Reihen durch.

Für die spätere Betrachtung der sukzessiven Quotienten der Spitzenfiltrierung sammeln wir im letzten Abschnitt schließlich einige Reduktionsregeln.

Wir setzen bei den folgenden Argumenten, abgesehen von $\dim M_k^1$, keine Informationen über die Vektorräume M_k^i voraus. Insbesondere benötigen wir weder ihre Dimensionen noch Kenntnis der maximal auftretenden Ordnung von Spitzenformen.

3.1 Konstruktion einer Basis von M_k^1

Die folgende Notation findet im gesamten weiteren Verlauf dieser Arbeit Verwendung.

3.1 Notation. Betrachten wir Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$, so schreiben wir

$$k = \mathfrak{k} + \widehat{\mathfrak{k}}(q+1)$$

mit eindeutig bestimmten Zahlen $1 \leq \mathfrak{k} \leq q+1$ und $\widehat{\mathfrak{k}} \in \mathbb{N}_0$. Ferner setzen wir

$$\mathfrak{m}(k) := \left\lfloor \frac{kq}{q+1} \right\rfloor .$$

Dabei bezeichnet „$\lfloor \cdot \rfloor$“ den ganzzahligen Anteil.

Bemerkung. Bei der Untersuchung von Spitzenformen sind gemäß Satz 1.18 nur Gewichte $k \geq 2$ zu betrachten. Da einige der im Folgenden hergeleiteten Formeln jedoch auch mit der trivialen Situation im Fall $k = 1$ kompatibel sind, lassen wir bei der hier eingeführten Notation ausdrücklich Gewicht 1 zu.

Diese Notation, die auf Division mit Rest durch $q + 1$ basiert, ist verträglich mit dem Zusammenhang zwischen Modulformen vom Gewicht k und Modulformen vom Gewicht $k - (q + 1)$, den wir in Kapitel 9 beschreiben.

Aus der Definition von $\mathfrak{m}(k)$ ergeben sich direkt die folgenden Abschätzungen:

3.2 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Es gilt*

$$0 \leq \mathfrak{m}(k) \leq k - 1.$$

Für $k \geq 2$ ist $\mathfrak{m}(k) \geq 1$.

Für spätere Rechnungen beschreiben wir als Nächstes $\mathfrak{m}(k)$ konkret in Termen der oben angegebenen Zerlegung von k. Anschließend leiten wir Formeln für das Gewicht k sowie für die Dimension von M_k^1 her.

3.3 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$kq = q + 1 - \mathfrak{k} + (\mathfrak{k} - 1 + \widehat{\mathfrak{k}}q)(q + 1).$$

Dabei ist $0 \leq q + 1 - \mathfrak{k} \leq q$, d.h., insbesondere gilt

$$\mathfrak{m}(k) = \mathfrak{k} - 1 + \widehat{\mathfrak{k}}q.$$

Beweis. Mit der Zerlegung von k aus Notation 3.1 erhalten wir für kq die Zerlegung

$$\begin{aligned} kq &= (\mathfrak{k} + \widehat{\mathfrak{k}}(q + 1))q \\ &= \mathfrak{k}q + \widehat{\mathfrak{k}}q(q + 1) \\ &= \mathfrak{k}(q + 1) - \mathfrak{k} + \widehat{\mathfrak{k}}q(q + 1) \\ &= q + 1 - \mathfrak{k} + (\mathfrak{k} - 1)(q + 1) + \widehat{\mathfrak{k}}q(q + 1) \\ &= q + 1 - \mathfrak{k} + (\mathfrak{k} - 1 + \widehat{\mathfrak{k}}q)(q + 1). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus der Definition von $\mathfrak{m}(k)$. □

3.4 Lemma. *Für $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$k = \mathfrak{m}(k) + \widehat{\mathfrak{k}} + 1.$$

Beweis. Aus Lemma 3.3 folgt unmittelbar, dass

$$\mathfrak{m}(k) + \widehat{\mathfrak{k}} + 1 = \mathfrak{k} + \widehat{\mathfrak{k}}(q + 1) = k$$

ist. □

3.5 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\dim M_k^1 = (k-1)q = q + 2 - \mathfrak{k} + (\mathfrak{m}(k) - 1)(q+1)$$

mit $1 \leq q + 2 - \mathfrak{k} \leq q + 1$.

Beweis. Wir wissen aus Korollar 2.5, dass $(k-1)q = \dim M_k^1$ gilt. Die Behauptung folgt unmittelbar durch Modifikation der Zerlegung von kq, die wir in Lemma 3.3 bestimmt haben. □

Bemerkung. Die Bedeutung der angegebenen Zerlegung von $(k-1)q$ für die Struktur von M_k^1 wird im weiteren Verlauf klarer werden.

Vereinfacht ausgedrückt kann der Satz von Riemann-Roch angewendet werden, um den Übergang von einem Vektorraum M_k^i zum Unterraum M_k^{i+1} zu beschreiben. Dabei erhält man an jeder der $q+1$ Spitzen von $\Gamma(T)$ eine zusätzliche Bedingung, was in der Kodimension $q+1$ resultiert. Die Dimensionen, die in der Spitzenfiltrierung auftreten, können somit bestimmt werden, indem die Dimension von M_k^1 mit Rest durch $q+1$ geteilt wird.

Wir wollen nun eine Menge von Modulformen konstruieren, von der wir später beweisen werden, dass sie für $k \geq 2$ eine Basis des Raums der Spitzenformen vom Gewicht k beschreibt.

Für die Konstruktion nutzen wir aus, dass wir gemäß Korollar 2.12 Modulformen vom Gewicht k durch polynomielle Ausdrücke in Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 beschreiben können. Im Gegensatz zu früheren Betrachtungen werden wir diesmal jedoch nicht reine Monome in entweder gewöhnlichen oder modifizierten Eisenstein-Reihen bilden, sondern gemischte Ausdrücke.

3.6 (Konstruktion der Basis). Sei $k \geq 2$. Für $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k) - 1$ bilden wir

$$\mathcal{F}_b^{(i,k)} := \mathcal{E}_0^{k-i-1} \mathcal{E}_b E_\infty^i, \quad 0 \leq b \leq q-1,$$

sowie

$$\mathcal{F}_\infty^{(i,k)} := (-1)^i \mathcal{E}_q^{k-i} E_0^i$$

und definieren die Menge

$$\mathcal{B}_k^i := \left\{ \mathcal{F}_b^{(i,k)}, \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} \mid 0 \leq b \leq q-1 \right\}.$$

Ferner setzen wir

$$\mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k),k)} := \mathcal{E}_0^{\hat{\mathfrak{k}}} \mathcal{E}_b E_\infty^{\mathfrak{m}(k)}, \quad 0 \leq b \leq q+1-\mathfrak{k}$$

und definieren

$$\mathcal{B}_k^{\mathfrak{m}(k)} := \left\{ \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k),k)} \mid 0 \leq b \leq q+1-\mathfrak{k} \right\}.$$

Für $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$ konstruieren wir schließlich die Mengen

$$\mathcal{B}_k^{i,+} := \bigcup_{i \leq j \leq \mathfrak{m}(k)} \mathcal{B}_k^j \qquad \text{(disjunkte Vereinigung).}$$

3.7 Lemma. *Die in Konstruktion 3.6 angegebenen Monome von Eisenstein-Reihen sind wohldefiniert und beschreiben Modulformen vom Gewicht k.*

Beweis. Nach Lemma 3.2 gilt $k - i - 1 \geq 1$ für $i \leq \mathfrak{m}(k) - 1$. Da somit alle in Konstruktion 3.6 auftretenden Exponenten nichtnegativ sind, sind die Monome tatsächlich wohldefiniert.

Dass die zugehörigen Modulformen Gewicht k besitzen, ist für $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k) - 1$ offensichtlich. Das Gewicht der Modulformen $\mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k),k)}$ ist nach Lemma 3.4 bestimmt als $\widehat{\mathfrak{k}} + 1 + \mathfrak{m}(k) = k$. □

Offensichtlich sind die in Konstruktion 3.6 angegebenen Monome paarweise verschieden. Allerdings ist ihnen nicht direkt anzusehen, ob sie sich auch modulo der Relationen (2.1) unterscheiden, d.h., ob verschiedene Monome auch verschiedene Modulformen repräsentieren.

Wir bestimmen daher zunächst ausdrücklich nur die Anzahl der formalen Monome in den Mengen $\mathcal{B}_k^{i,+}$ und werden erst später nachweisen, dass dies tatsächlich der Anzahl der von ihnen beschriebenen Modulformen entspricht.

3.8 Lemma. *Sei $k \geq 2$ und $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$. Fassen wir die Elemente der Menge $\mathcal{B}_k^{i,+}$ als formale Monome von Eisenstein-Reihen auf, so ist ihre Anzahl $kq + 1 - i(q+1)$.*

Beweis. Nach Definition ist $\mathcal{B}_k^{i,+}$ gegeben als disjunkte Vereinigung

$$\mathcal{B}_k^{i,+} = \bigcup_{i \leq j \leq \mathfrak{m}(k)} \mathcal{B}_k^j.$$

Die Menge $\mathcal{B}_k^{\mathfrak{m}(k)}$ besteht dabei aus $q + 2 - \mathfrak{k}$ Monomen.

Jede der Mengen $\mathcal{B}_k^j$ mit $i \leq j \leq \mathfrak{m}(k) - 1$ enthält $q+1$ Monome. Die Anzahl dieser Mengen ist $\mathfrak{m}(k) - i$.

Da die betrachteten Monome paarweise verschieden sind, ist ihre Anzahl insgesamt

$$q + 2 - \mathfrak{k} + (\mathfrak{m}(k) - i)(q+1).$$

Mit Hilfe von Lemma 3.5 können wir dies wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} q + 2 - \mathfrak{k} + (\mathfrak{m}(k) - i)(q+1) &= q + 2 - \mathfrak{k} + (\mathfrak{m}(k) - 1)(q+1) - (i-1)(q+1) \\ &= (k-1)q + q + 1 - i(q+1) \\ &= kq + 1 - i(q+1). \end{aligned}$$

□

Für unsere weiteren Untersuchungen ist das Verhalten der zugehörigen Modulformen an den Spitzen entscheidend.

3.9 Lemma. *Sei $k \geq 2$.*

(i) Ist $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k) - 1$, so gilt für $0 \leq b \leq q - 1$:
Die Modulform $\mathcal{F}_b^{(i,k)}$ hat an ∞ Nullstellenordnung $q - b + (k - i - 1)q$,
an $(0:1)$ Ordnung $b + i$,
an $(\alpha : 1)$, $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$, Ordnung i.
Die Modulform $\mathcal{F}_\infty^{(i,k)}$ hat an ∞ Nullstellenordnung i,
an $(0:1)$ Nullstellenordnung $(k - i)q$,
an $(\alpha : 1)$, $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$, Ordnung i.

(ii) Für $0 \leq b \leq q + 1 - \mathfrak{k}$ gilt:
Die Modulform $\mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k),k)}$ hat an ∞ Nullstellenordnung $q - b + \widehat{\mathfrak{k}}q$,
an $(0:1)$ Nullstellenordnung $b + \mathfrak{m}(k)$,
an $(\alpha : 1)$, $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$, Ordnung $\mathfrak{m}(k)$.

Beweis. Für Modulformen, die als Produkte von Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 gegeben sind, können wir die Verschwindungsordnungen an den Spitzen direkt ablesen, da wir das Verhalten der gewöhnlichen Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 aus Proposition 2.20 und das der modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 aus Proposition 2.21 kennen.

Auf diese Weise ergeben sich wie in Proposition 2.23 die behaupteten Verschwindungsordnungen. Dabei ist zu beachten, dass die Modulform E_∞ an den Spitzen $(\alpha : 1)$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_q$ jeweils eine einfache Nullstelle besitzt im Gegensatz zur Modulform $\mathcal{E}_q$, die an diesen Spitzen nicht verschwindet. □

3.10 Lemma. *Für jede Zahl $1 \leq l \leq (k-1)q$ existiert genau eine Modulform in $\mathcal{B}_k^{1,+}$, die an der Spitze ∞ Nullstellenordnung l besitzt.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass wir für $1 \leq l \leq (k-1)q$ mindestens eine solche Modulform in $\mathcal{B}_k^{1,+}$ finden. Wir führen dazu eine Fallunterscheidung nach l durch.

(i) Ist $1 \leq l \leq \mathfrak{m}(k) - 1$, so besitzt nach Lemma 3.9 die Modulform $\mathcal{F}_\infty^{(l,k)} \in \mathcal{B}_k^l$ an der Spitze ∞ Nullstellenordnung l.

(ii) Falls $\mathfrak{m}(k) \leq l \leq (\widehat{\mathfrak{k}} + 1)q$ gilt, so erfüllt

$$b' := (\widehat{\mathfrak{k}} + 1)q - l$$

die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 0 \leq b' &\leq (\widehat{\mathfrak{k}} + 1)q - \mathfrak{m}(k) \\ &= (\widehat{\mathfrak{k}} + 1)q - \mathfrak{k} + 1 - \widehat{\mathfrak{k}}q \\ &= q + 1 - \mathfrak{k}. \end{aligned}$$

Somit enthält $\mathcal{B}_k^{\mathfrak{m}(k)}$ die Modulform $\mathcal{F}_{b'}^{(\mathfrak{m}(k),k)}$, die nach Lemma 3.9 an ∞ Nullstellenordnung

$$q - ((\widehat{\mathfrak{k}} + 1)q - l) + \widehat{\mathfrak{k}}q = l$$

besitzt.

(iii) Im verbleibenden Fall $1 + (\widehat{\mathfrak{k}} + 1)q \leq l \leq (k-1)q$ finden wir eine Zahl $1 \leq j \leq \mathfrak{m}(k) - 1$ mit
$$1 + (k - j - 1)q \leq l \leq (k - j)q,$$
da wir aus Lemma 3.4 wissen, dass $k - (\mathfrak{m}(k) - 1) - 1 = \widehat{\mathfrak{k}} + 1$ ist. Setzen wir nun
$$b' := (k - j)q - l,$$
so gilt
$$\begin{aligned} 0 \leq b' &\leq (k-j)q - (1 + (k - j - 1)q) \\ &= q - 1. \end{aligned}$$
Wir können folglich die Modulform $\mathcal{F}_{b'}^{(j,k)} \in \mathcal{B}_k^j$ betrachten, die nach Lemma 3.9 an der Spitze ∞ mit Ordnung
$$q - ((k-j)q - l) + (k - j - 1)q = l$$
verschwindet.

Damit ist die Existenz gezeigt. Die Eindeutigkeit folgt nun, da die Modulformen in $\mathcal{B}_k^{1,+}$ gemäß Lemma 3.8 durch $(k-1)q$ verschiedene Monome beschrieben werden. □

Wir haben damit gezeigt, dass die in Konstruktion 3.6 angegebenen Monome paarweise verschiedene Modulformen vom Gewicht k repräsentieren. Die Mächtigkeiten der Mengen $\mathcal{B}_k^{i,+}$ sind damit wie in Lemma 3.8 bestimmt.

3.11 Korollar. *Für $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$ gilt*
$$\#\mathcal{B}_k^{i,+} = kq + 1 - i(q + 1).$$

3.12 Korollar. *Die Modulformen in $\mathcal{B}_k^{1,+}$ sind linear unabhängig.*

Beweis. Da die Elemente von $\mathcal{B}_k^{1,+}$ an der Spitze ∞ paarweise verschiedene Nullstellenordnungen besitzen, lassen sie keine Darstellung der 0 als nichttriviale Linearkombination zu. □

Betrachten wir auch die Nullstellenordnungen an den übrigen Spitzen, so sehen wir, dass es sich bei den Elementen von $\mathcal{B}_k^{1,+}$ um Spitzenformen handelt. Wir können sogar genauer zeigen:

3.13 Lemma. *Sei $k \geq 2$ und $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$. Dann ist*
$$\mathcal{B}_k^i \subseteq M_k^i$$
und keines der Elemente von $\mathcal{B}_k^i$ liegt in einem der Unterräume M_k^j mit $j > i$.

Mit anderen Worten: Der Unterraum M_k^i ist der kleinste Unterraum der Spitzenfiltrierung, der Elemente von $\mathcal{B}_k^i$ enthält.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Elemente von $\mathcal{B}_k^i$ Spitzenformen der genauen Ordnung i sind, d.h., dass sie an jeder Spitze mindestens Nullstellenordnung i haben und an mindestens einer Spitze genau mit Ordnung i verschwinden.

Sei zunächst $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k) - 1$. Betrachten wir eine Modulform $\mathcal{F}_b^{(i,k)}$ mit $0 \leq b \leq q - 1$, so wissen wir bereits, dass ihre Verschwindungsordnung an den Spitzen $(\alpha : 1)$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ genau i ist. An der Spitze $(0 : 1)$ besitzt sie Verschwindungsordnung $b + i \geq i$. Die Nullstellenordnung an ∞ können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} q - b + (k - i - 1)q &\geq 1 + (k - i - 1)q \\ &\geq 1 + (k - (\mathfrak{m}(k) - 1) - 1)q \\ &= 1 + (\widehat{\mathfrak{k}} + 1)q \\ &= q + 1 + \widehat{\mathfrak{k}}q \\ &> \mathfrak{k} - 1 + \widehat{\mathfrak{k}}q \\ &= \mathfrak{m}(k) > i. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dabei haben wir die Beschreibungen von $\mathfrak{m}(k)$ aus Lemma 3.3 beziehungsweise die von k aus Lemma 3.4 verwendet und ausgenutzt, dass nach Definition $\mathfrak{k} \leq q + 1$ gilt.

Es handelt sich bei $\mathcal{F}_b^{(i,k)}$ somit um eine Spitzenform der genauen Ordnung i.

Die Modulform $\mathcal{F}_\infty^{(i,k)}$ besitzt an den Spitzen $(\alpha : 1)$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ sowie an ∞ Nullstellenordnung i. Die Verschwindungsordnung an $(0 : 1)$ genügt der Ungleichung

$$\begin{aligned} (k - i)q &\geq (k - (\mathfrak{m}(k) - 1))q \\ &= (\widehat{\mathfrak{k}} + 2)q \\ &= 2q + \widehat{\mathfrak{k}}q \\ &> \mathfrak{k} - 1 + \widehat{\mathfrak{k}}q \\ &= \mathfrak{m}(k) > i. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Damit ist auch $\mathcal{F}_\infty^{(i,k)}$ eine Spitzenform der genauen Ordnung i.

Wenden wir uns nun dem Fall $i = \mathfrak{m}(k)$ zu. Sei $0 \leq b \leq q + 1 - \mathfrak{k}$. Die Nullstellenordnung von $\mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k),k)}$ an den Spitzen $(\alpha : 1)$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ ist jeweils genau $\mathfrak{m}(k)$. Die Nullstellenordnung an $(0 : 1)$ ist größer oder gleich $\mathfrak{m}(k)$. Die Nullstellenordnung an der Spitze ∞ erfüllt die Ungleichung

$$\begin{aligned} q - b + \widehat{\mathfrak{k}}q &\geq q - (q + 1 - \mathfrak{k}) + \widehat{\mathfrak{k}} \\ &= \mathfrak{k} - 1 + \widehat{\mathfrak{k}}q = \mathfrak{m}(k). \end{aligned}$$

Auch die Elemente von $\mathcal{B}_k^{\mathfrak{m}(k)}$ weisen also das gewünschte Verhalten an den Spitzen auf und die Behauptung ist gezeigt. □

3.14 Korollar. *Sei $k \geq 2$ und $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$. Dann ist*

$$\mathcal{B}_k^{i,+} \subseteq M_k^i.$$

Beweis. Nach Definition ist
$$\mathcal{B}_k^{i,+} = \bigcup_{i \leq j \leq \mathfrak{m}(k)} \mathcal{B}_k^j.$$
Wir erhalten mit Lemma 3.13, dass $\mathcal{B}_k^j \subseteq M_k^j$ ist für $i \leq j \leq \mathfrak{m}(k)$. Jedes solche M_k^j ist aber bereits in M_k^i enthalten und die Behauptung ist gezeigt. □

3.15 Proposition. *Sei $k \geq 2$. Die Menge $\mathcal{B}_k^{1,+}$ ist eine Basis von M_k^1.*

Beweis. Nach Korollar 3.12 und Korollar 3.14 ist $\mathcal{B}_k^{1,+}$ eine linear unabhänige Teilmenge von M_k^1. Gemäß Korollar 3.11 gilt ferner
$$\#\mathcal{B}_k^{1,+} = (k-1)q = \dim M_k^1,$$
und die Behauptung ist gezeigt. □

3.2 Verträglichkeit der Basis mit der Filtrierung

Gemäß der Konstruktion haben wir auf der Basis $\mathcal{B}_k^{1,+}$ von M_k^1 eine Filtrierung
$$\mathcal{B}_k^{1,+} \supseteq \mathcal{B}_k^{2,+} \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{B}_k^{\mathfrak{m}(k),+}.$$
Wir wollen nun zeigen, dass diese Filtrierung der Basis mit der Spitzenfiltrierung von M_k^1 kompatibel ist, d.h., dass $\mathcal{B}_k^{i,+}$ eine Basis von M_k^i ist für alle i.

Hierfür gibt es zwei Vorgehensweisen: Wie in der Bemerkung zu Lemma 3.5 angedeutet, können die Dimensionen der Unterräume M_k^i mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch bestimmt werden. Die obige Fragestellung läuft dann auf ein einfaches Dimensionsargument hinaus. Stattdessen wollen wir die Behauptung direkt mit Hilfe von Eigenschaften der zuvor konstruierten Basiselemente beweisen, um ein Beispiel für die Anwendung der Arithmetik von Eisenstein-Reihen zu sehen.

Nach unseren bisherigen Überlegungen wissen wir: Für $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$ ist die Menge $\mathcal{B}_k^{i,+}$ eine Teilmenge von M_k^i, erzeugt also einen Untervektorraum von M_k^i. Es bleibt zu klären, ob es weitere Spitzenformen der Ordnung i gibt, die nicht bereits im Erzeugnis von $\mathcal{B}_k^{i,+}$ liegen.

Für die Beantwortung dieser Frage ist die folgende Eigenschaft entscheidend:

3.16 Lemma. *Sei $k \geq 2$ und $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$. Dann existiert keine nichttriviale Linearkombination der Elemente von $\mathcal{B}_k^i$, die in M_k^{i+1} liegt.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)-1$. Angenommen, es existiere eine nichttriviale Linearkombination
$$\mathcal{F} := \sum_{b=0}^{q-1} \lambda_b \mathcal{F}_b^{(i,k)} + \lambda_\infty \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} \in M_k^{i+1}$$
mit Koeffizienten in $\mathcal{C}_\infty$. Die Modulform $\mathcal{F}$ habe also an jeder Spitze mindestens Nullstellenordnung $i+1$.

Wir betrachten die in Lemma 3.9 bestimmten Nullstellenordnungen der Elemente von $\mathcal{B}_k^i$ an den Spitzen. Mit Hilfe der Abschätzungen (3.1) und (3.2) sehen wir:

Unter den Elementen von $\mathcal{B}_k^i$ ist $\mathcal{F}_0^{(i,k)}$ die einzige Modulform, die an $(0:1)$ genau mit Nullstellenordnung i verschwindet; die übrigen Modulformen haben an dieser Spitze echt größere Nullstellenordnungen. Ebenso besitzt nur $\mathcal{F}_\infty^{(i,k)}$ an der Spitze ∞ eine genau i-fache Nullstelle. Da aber $\mathcal{F}$ eine $i+1$-te Spitzenform ist, muss bereits

$$\lambda_0 = \lambda_\infty = 0$$

gelten. Wir können also

$$\mathcal{F} = \sum_{b=1}^{q-1} \lambda_b \mathcal{F}_b^{(i,k)} = \sum_{b=1}^{q-1} \lambda_b \mathcal{E}_0^{k-i-1} \mathcal{E}_b E_\infty^i = \mathcal{E}_0^{k-i-1} E_\infty^i \sum_{b=1}^{q-1} \lambda_b \mathcal{E}_b$$

schreiben, wobei nicht alle Koeffizienten λ_b Null sind. Wir wissen: Die Nullstellenordnung des Faktors $\mathcal{E}_0^{k-i-1} E_\infty^i$ an den Spitzen $(\alpha : 1)$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ ist genau i. Da $\mathcal{F}$ aber an allen Spitzen mindestens Nullstellenordnung $i+1$ hat, muss $\sum_{b=1}^{q-1} \lambda_b \mathcal{E}_b$ an allen Spitzen $(\alpha : 1)$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ verschwinden. Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 2.22 und die Annahme ist widerlegt.

Sei nun $i = \mathfrak{m}(k)$. Angenommen, es existiere eine nichttriviale Linearkombination

$$\mathcal{F} := \sum_{b=0}^{q+1-\mathfrak{k}} \lambda_b \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k),k)},$$

die an allen Spitzen mindestens Nullstellenordnung $\mathfrak{m}(k)+1$ habe.

Mit Lemma 3.9 sehen wir, dass $\mathcal{F}_0^{(\mathfrak{m}(k),k)}$ unter den betrachteten Basiselementen das einzige ist, das an der Spitze $(0:1)$ genau mit Ordnung $\mathfrak{m}(k)$ verschwindet; die übrigen Elemente von $\mathcal{B}_k^{\mathfrak{m}(k)}$ haben an dieser Spitze eine echt höhere Verschwindungsordnung. Ferner ist $\mathcal{F}_{q+1-\mathfrak{k}}^{(\mathfrak{m}(k),k)}$ das einzige Basiselement, das an der Spitze ∞ Nullstellenordnung $\mathfrak{m}(k)$ besitzt.

Nach Voraussetzung an $\mathcal{F}$ können wir also wie im ersten Fall

$$\mathcal{F} = \mathcal{E}_0^{\hat{\mathfrak{k}}} E_\infty^{\mathfrak{m}(k)} \sum_{b=1}^{q-\mathfrak{k}} \lambda_b \mathcal{E}_b$$

schreiben, wobei nicht alle λ_b Null sind. Analog zum ersten Fall erhalten wir einen Widerspruch zu Lemma 2.22 (das wegen $q - \mathfrak{k} \leq q-1$ anwendbar ist), wenn wir die Nullstellenordnungen an den Spitzen $(\alpha : 1)$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ betrachten. □

Wir haben damit gezeigt: Nicht nur die Elemente von $\mathcal{B}_k^i$ selbst, sondern auch alle ihre nichttrivialen Linearkombinationen sind Spitzenformen der genauen Ordnung i. Dies liefert direkt:

3.17 Korollar. *Sei $k \geq 2$. Ist $i > \mathfrak{m}(k)$, so gilt*

$$M_k^i = \{0\}.$$

Schreiben wir eine Spitzenform als Linearkombination der Elemente von $\mathcal{B}_k^{1,+}$, so können wir ihre genaue Ordnung direkt ablesen.

3.18 Lemma. *Sei $k \geq 2$. Sei $0 \neq \mathcal{F} \in M_k^1$ und sei $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$ so, dass in der Darstellung von $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_k^{1,+}$ ein Element von $\mathcal{B}_k^i$ mit von Null verschiedenem Koeffizienten auftritt. Dann besitzt $\mathcal{F}$ an mindestens einer Spitze höchstens Nullstellenordnung i.*

Ist i darüber hinaus minimal, so ist die Verschwindungsordnung von $\mathcal{F}$ an mindestens einer Spitze genau i.

Beweis. Wir schreiben $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \ldots + \mathcal{F}_{\mathfrak{m}(k)}$, wobei für $1 \leq j \leq \mathfrak{m}(k)$ der Summand $\mathcal{F}_j$ Linearkombination von Basiselementen aus $\mathcal{B}_k^j$ ist. Diese Darstellung ist eindeutig.

Nach Lemma 3.16 ist jedes dieser $\mathcal{F}_j$, sofern es von Null verschieden ist, eine Spitzenform der genauen Ordnung j. Ist i der kleinste Index mit $\mathcal{F}_i \neq 0$, so sind die Nullstellenordnungen der übrigen nichttrivialen $\mathcal{F}_j$ an allen Spitzen echt größer als i. Es kann somit zu keinen Auslöschungen kommen, und $\mathcal{F}$ besitzt an mindestens einer Spitze Nullstellenordnung genau i. □

Wir können damit das gewünschte Resultat beweisen.

3.19 Satz. *Sei $k \geq 2$ und $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$. Die Menge $\mathcal{B}_k^{i,+}$ ist eine Basis von M_k^i.*

Beweis. Wie eingangs dieses Abschnitts erwähnt, wissen wir bereits, dass $\mathcal{B}_k^{i,+}$ einen Unterraum von M_k^i erzeugt.

Ist nun aber $\mathcal{F}$ eine Spitzenform, die nicht in der linearen Hülle von $\mathcal{B}_k^{i,+}$ liegt, so verschwindet sie nach Lemma 3.18 an mindestens einer Spitze mit einer Ordnung, die echt kleiner als i ist. Somit ist $\mathcal{F}$ kein Element von M_k^i und die Behauptung ist bewiesen. □

Bemerkung. Es ist keineswegs selbstverständlich, dass eine Basis von M_k^1 in dem Sinne mit der Spitzenfiltrierung verträglich ist, dass wir Basen der Unterräume i-facher Spitzenformen angeben können, indem wir unter den Basiselementen alle Spitzenformen der Ordnung i auswählen.

Wir erhalten beispielsweise eine weitere Basis B von M_k^1, indem wir zu allen Elementen von $\mathcal{B}_k^{1,+}$ die Spitzenform $\mathcal{F}_0^{(1,k)}$ addieren. Diese Basis besitzt nicht die gewünschte Eigenschaft, da sie „zu viele“ Spitzenformen erster Ordnung enthält und keine Spitzenformen höherer Ordnung. Insbesondere existieren nichttriviale Linearkombinationen von Basiselementen erster Ordnung, die Spitzenformen echt höherer Ordnung beschreiben.

Wir haben oben gezeigt, dass unsere Basis $\mathcal{B}_k^{1,+}$ zu jeder Nullstellenordnung genau die richtige Anzahl von Elementen besitzt, damit dieses Phänomen nicht auftritt.

Mit Hilfe der Basis $\mathcal{B}_k^{1,+}$ erhalten wir alternativ zur Spitzenfiltrierung die folgende direkte Summenzerlegung von Vektorräumen:

3.20 Korollar. *Sei $k \geq 2$ und $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$. Der Vektorraum M_k^i besitzt eine direkte Summenzerlegung*

$$M_k^i = \widehat{M}_k^i \oplus \widehat{M}_k^2 \oplus \ldots \oplus \widehat{M}_k^{\mathfrak{m}(k)}.$$

Dabei sind die Unterräume $\widehat{M}_k^j$ definiert als lineare Erzeugnisse der Mengen $\mathcal{B}_k^j$ und enthalten (neben der 0) nur Spitzenformen der genauen Ordnung j (aber nicht alle solchen!).

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse zusammen:

3.21 Satz. *Sei $k = \mathfrak{k} + \widehat{\mathfrak{k}}(q+1) \geq 2$ mit $1 \leq \mathfrak{k} \leq q+1$ und sei*

$$\mathfrak{m}(k) = \left\lfloor \frac{kq}{q+1} \right\rfloor = \mathfrak{k} - 1 + \widehat{\mathfrak{k}}q.$$

(i) Es gibt keine Spitzenformen vom Gewicht k, deren Nullstellenordnung an allen Spitzen echt größer ist als $\mathfrak{m}(k)$, d.h., es ist

$$M_k^i = \{0\} \quad \text{für } i > \mathfrak{m}(k).$$

Insbesondere ist $M_k^i = \{0\}$ für $i \geq k$.

(ii) Die Spitzenfiltrierung hat die Gestalt

$$M_k^1 \supseteq M_k^2 \supseteq \ldots \supseteq M_k^{\mathfrak{m}(k)} \supsetneq \{0\}.$$

(iii) Für $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$ ist $\mathcal{B}_k^{i,+}$ eine Basis von M_k^i. Es gilt

$$\dim M_k^i = kq + 1 - i(q+1).$$

Insbesondere ist $\dim M_k^1 = (k-1)q$ und $\dim M_k^{\mathfrak{m}(k)} = q + 2 - \mathfrak{k}$.

(iv) Für $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k) - 1$ kann eine Basis von M_k^{i+1} durch Hinzunahme der Elemente von $\mathcal{B}_k^i$ zu einer Basis von M_k^i ergänzt werden. Es gilt

$$\operatorname{codim}_{M_k^i}(M_k^{i+1}) = q + 1.$$

Bemerkung. Wir stellen einige Parallelen fest zur Situation für Gewicht 1, in der es keine Spitzenformen gibt. So gilt die Formel

$$M_k^i = \{0\} \quad \text{für } i > \mathfrak{m}(k)$$

auch für $k = 1$, da $\mathfrak{m}(1) = 0$ ist.

Definieren wir darüber hinaus analog zu den Vorschriften in Konstruktion 3.6 die Menge $\mathcal{B}_1^0 = \mathcal{B}_1^{\mathfrak{m}(1)}$, bestehend aus den Modulformen

$$\mathcal{F}_b^{(0,1)} := \mathcal{E}_b, \qquad 0 \leq b \leq q,$$

so wissen wir, dass es sich dabei um eine Basis von

$$M_1^{\mathfrak{m}(1)} = M_1 = \mathrm{Eis}_1$$

handelt.

3.3 Kongruenzen von Spitzenformen

Zur Vorbereitung der Untersuchung der sukzessiven Quotienten der Spitzenfiltrierung wollen wir für bestimmte Spitzenformen i-ter Ordnung möglichst einfache Repräsentanten modulo M_k^{i+1} bestimmen. Konkret interessieren wir uns dabei für Monome in gewöhnlichen und modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1, wie sie auch in der oben betrachteten Basis der Spitzenfiltrierung auftreten.

Die Verträglichkeit der multiplikativen Struktur auf M mit dem Nullstellenverhalten an den Spitzen erlaubt es uns, Aussagen, die wir für kleinere Gewichte bewiesen haben, zu liften. Genauer verwenden wir:

3.22 Lemma. *Seien $j, m, n \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$. Sei $\mathcal{G} \in M_{n-m}$.*

(i) Ist $\mathcal{F} \in M_m^j$, dann gilt auch
$$\mathcal{G}\mathcal{F} \in M_n^j.$$

(ii) Sind $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in M_m$ mit
$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}' \mod M_m^j,$$
so ist auch
$$\mathcal{G}\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}\mathcal{F}' \mod M_n^j.$$

Beweis. Die erste Aussage ist klar, da die Nullstellenordnung von $\mathcal{G}\mathcal{F}$ an allen Spitzen größer oder gleich der von $\mathcal{F}$ ist (Modulformen besitzen keine Pole an den Spitzen).

Die zweite Aussage folgt, indem die erste auf die Modulform $\mathcal{F} - \mathcal{F}' \in M_m^j$ angewendet wird. □

Allen Umformungen in diesem Kapitel liegt die folgende spezielle Kongruenz zugrunde, die es erlaubt, in bestimmten Monomen Faktoren $\mathcal{E}_q$ durch Faktoren $\mathcal{E}_1$ zu ersetzen, wenn wir modulo höherer Spitzenformen reduzieren. Dieses Resultat werden wir nach und nach verallgemeinern.

3.23 Lemma. *Sei $1 \leq i \leq q-1$ und $0 \leq m < q-i$. Für beliebiges $l \in \mathbb{N}$ gilt*
$$\mathcal{E}_q^l \mathcal{E}_m E_\infty^i \equiv \mathcal{E}_1^l \mathcal{E}_m E_\infty^i \mod M_{i+l+1}^{i+1}.$$

Beweis. Nach Definition der modifizierten Eisenstein-Reihen können wir schreiben
$$\mathcal{E}_q^l \mathcal{E}_m E_\infty^i = (\mathcal{E}_1 + E_\infty)^l \mathcal{E}_m E_\infty^i = \mathcal{E}_1^l \mathcal{E}_m E_\infty^i + \sum_{j=1}^{l} \binom{l}{j} \mathcal{E}_1^{l-j} \mathcal{E}_m E_\infty^{i+j}.$$

Wir betrachten nun für $1 \leq j \leq l$ die Modulform $\mathcal{E}_1^{l-j} \mathcal{E}_m E_\infty^{i+j}$ und bestimmen mit Hilfe von Proposition 2.20 und Proposition 2.21 ihre Nullstellenordnungen an den Spitzen. Wir sehen so, dass diese Modulform an den Spitzen $(\alpha : 1)$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ genau Nullstellenordnung
$$i + j \geq i + 1$$

hat. An der Spitze $(0:1)$ beträgt die Nullstellenordnung

$$l - j + m + i + j = i + m + l \geq i + 1,$$

da $l \geq 1$ gilt. Die Nullstellenordnung an ∞ erfüllt nach Voraussetzung an m die Ungleichung

$$q - m + (l - j)(q - 1) \geq q - m > i.$$

Für $1 \leq j \leq l$ gilt somit

$$\mathcal{E}_1^{l-j} \mathcal{E}_m E_\infty^{i+j} \in M_{i+l+1}^{i+1},$$

und die Behauptung ist gezeigt. □

Bemerkung. Die Voraussetzung an den Index der Eisenstein-Reihe $\mathcal{E}_m$ dient dazu, die notwendige Verschwindungsordnung an der Spitze ∞ zu garantieren.

Insbesondere ist das Lemma für alle $1 \leq i \leq q-1$ im Spezialfall $m = 0$ gültig.

Wir wollen als Nächstes für ein Monom der Form $\mathcal{E}_1^l \mathcal{E}_m E_\infty^i$ einen möglichst einfachen Repräsentanten seiner Klasse modulo Spitzenformen $i+1$-ter Ordnung finden. Dabei ist unser Ziel kein Monom in Normalform im Sinne von Definition 2.13, sondern ein gemischtes Monom der Form

$$\mathcal{E}_0^l \mathcal{E}_b E_\infty^i$$

mit $l \in \mathbb{N}$ und $0 \leq b \leq q-1$ (vergleiche Konstruktion 3.6).

Die Grundidee ist, den Anteil $\mathcal{E}_1^l \mathcal{E}_m$ zunächst dennoch wie üblich in Normalform zu überführen, und daraus resultierende Faktoren $\mathcal{E}_q$ anschließend durch erneute Anwendung von Lemma 3.23 zu eliminieren.

Wir müssen zeigen, dass endlich viele Wiederholungen dieser Schritte tatsächlich zum gewünschten Ergebnis führen. Dazu schauen wir uns als Erstes die Struktur der auftretenden Normalformen genauer an.

3.24 Lemma. *Sei $c \in \mathbb{N}$ und $0 \leq b \leq q-1$. Schreiben wir $c + b = c'q + b'$ mit $0 \leq b' \leq q-1$, so gilt*

$$\mathcal{E}_1^c \mathcal{E}_b = \mathcal{E}_0^{c-c'} \mathcal{E}_{b'} \mathcal{E}_q^{c'}.$$

Dabei ist $c' \leq c$ und Gleichheit impliziert $b' = 0$. Die resultierende Normalform enthält also stets mindestens einen Faktor $\mathcal{E}_0$.

Beweis. Da $b \leq q-1$ ist, gilt

$$b \leq c(q-1) + b',$$

was äquivalent ist zu

$$c'q + b' = c + b \leq cq + b'.$$

Es gilt also tatsächlich $c' \leq c$, und Gleichheit ist nur möglich für $c = 1$, $b = q-1$ und $b' = 0$.

Die Identität der Modulformen

$$\mathcal{E}_1^c \mathcal{E}_b = \mathcal{E}_0^{c-c'} \mathcal{E}_{b'} \mathcal{E}_q^{c'}$$

folgt unmittelbar mit Proposition 2.15. □

Das Auftreten von $\mathcal{E}_0$ ist deswegen von besonderem Interesse, weil wir oben festgestellt haben, dass $m = 0$ die in Lemma 3.23 verlangte Bedingung $m < q - i$ für alle in Frage kommenden i erfüllt.

3.25 Lemma. *Sei $1 \leq i \leq q-1$. Ferner sei $c \in \mathbb{N}$ und $0 \leq b \leq q-1$. Schreiben wir $c + b = c'q + b'$ mit $0 \leq b' \leq q-1$, so gilt*

$$\mathcal{E}_1^c \mathcal{E}_b E_\infty^i \equiv \mathcal{E}_0^{c-c'} \mathcal{E}_1^{c'} \mathcal{E}_{b'} E_\infty^i \mod M_{i+1+c}^{i+1}.$$

Beweis. Gemäß Lemma 3.24 ist

$$\mathcal{E}_1^c \mathcal{E}_b E_\infty^i = \mathcal{E}_0^{c-c'} \mathcal{E}_{b'} \mathcal{E}_q^{c'} E_\infty^i,$$

wobei wir wissen, dass das Produkt $\mathcal{E}_0^{c-c'} \mathcal{E}_{b'}$ mindestens einen Faktor $\mathcal{E}_0$ enthält. Insbesondere können wir auf der rechten Seite der Gleichung den Faktor $\mathcal{E}_q^{c'} \mathcal{E}_0 E_\infty^i$ abspalten.

Da wir uns im Fall „$m = 0$“ befinden, ist Lemma 3.23 auf diesen Faktor anwendbar und liefert die Kongruenz

$$\mathcal{E}_q^{c'} \mathcal{E}_0 E_\infty^i \equiv \mathcal{E}_1^{c'} \mathcal{E}_0 E_\infty^i \mod M_{i+c'+1}^{i+1}.$$

Wie in Lemma 3.22 beschrieben, können wir diese Kongruenz eines Faktors zu einer Kongruenz von $\mathcal{E}_0^{c-c'} \mathcal{E}_{b'} \mathcal{E}_q^{c'} E_\infty^i$ fortsetzen und erhalten auf diese Weise

$$\mathcal{E}_0^{c-c'} \mathcal{E}_{b'} \mathcal{E}_q^{c'} E_\infty^i \equiv \mathcal{E}_0^{c-c'} \mathcal{E}_1^{c'} \mathcal{E}_{b'} E_\infty^i \mod M_{i+c+1}^{i+1}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Wiederholtes Anwenden dieses Lemmas liefert die folgende, stärkere Version:

3.26 Lemma. *Sei $1 \leq i \leq q-1$. Dann gilt für $c \in \mathbb{N}$ und $0 \leq b \leq q-1$*

$$\mathcal{E}_1^c \mathcal{E}_b E_\infty^i \equiv \mathcal{E}_0^c \mathcal{E}_{[b+c]} E_\infty^i \mod M_{i+1+c}^{i+1}$$

mit dem Symbol „$[\,\cdot\,]$“ aus Notation 2.7.

Beweis. Wir definieren Zahlen $c_j \in \mathbb{N}_0$, $b_j \in \{0, \ldots, q-1\}$ mit $j \in \mathbb{N}_0$ durch

$$\begin{aligned} &c_0 = c > 0,\ b_0 = b \\ &c_{j-1} + b_{j-1} = c_j q + b_j \quad \text{für } j \geq 1. \end{aligned}$$

Offenbar gilt: Ist $c_j > 0$, so ist

$$c_j + b_j < c_j q + b_j = c_{j-1} + b_{j-1}.$$

Da die c_j, b_j aber nichtnegative ganze Zahlen sind, existiert also ein minimales $n \in \mathbb{N}$ mit

$$c_j = 0,\ b_j = b_n \quad \text{für alle } j \geq n.$$

Nach Konstruktion gilt

$$b_n \equiv c_{n-1} + b_{n-1} \equiv \ldots \equiv c_0 + b_0 \mod q-1.$$

Außerdem ist

$$b_n > 0,$$

denn andernfalls wäre

$$c_{n-1} + b_{n-1} = b_n = 0,$$

und es müsste schon $c_{n-1} = 0$ gelten im Widerspruch zur Minimalität von n. Insbesondere ist

$$b_n = [b_0 + c_0] = [b + c].$$

Für $1 \leq j \leq n$ erhalten wir mit Hilfe von Lemma 3.25 ein System von Kongruenzen

$$\mathcal{E}_1^{c_{j-1}} \mathcal{E}_{b_{j-1}} E_\infty^i \equiv \mathcal{E}_0^{c_{j-1}-c_j} \mathcal{E}_1^{c_j} \mathcal{E}_{b_j} E_\infty^i \mod M_{i+1+c_{j-1}}^{i+1}.$$

Wir können damit schrittweise die folgenden Umformungen durchführen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1^{c_0} \mathcal{E}_{b_0} E_\infty^i &\equiv \mathcal{E}_0^{c_0-c_1} \mathcal{E}_1^{c_1} \mathcal{E}_{b_1} E_\infty^i \mod M_{i+1+c_0}^{i+1} \\
&\equiv \mathcal{E}_0^{c_0-c_1} \mathcal{E}_0^{c_1-c_2} \mathcal{E}_1^{c_2} \mathcal{E}_{b_2} E_\infty^i \mod M_{i+1+c_0}^{i+1} \\
&\vdots \\
&\equiv \mathcal{E}_0^{c_0-c_n} \mathcal{E}_1^{c_n} \mathcal{E}_{b_n} E_\infty^i \mod M_{i+1+c_0}^{i+1} \\
&\equiv \mathcal{E}_0^{c} \mathcal{E}_{[b+c]} E_\infty^i \mod M_{i+1+c_0}^{i+1}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass $c_0 = c$ und $c_n = 0$ ist, und die Behauptung ist gezeigt. □

Wir können nun eine stärkere Version von Lemma 3.23 formulieren, bei der der resultierende Repräsentant weiter vereinfacht ist.

3.27 Lemma. *Sei $1 \leq i \leq q-1$ und $0 \leq m < q-i$. Dann gilt für $l \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}_q^l \mathcal{E}_m E_\infty^i \equiv \mathcal{E}_0^l \mathcal{E}_{[l+m]} E_\infty^i \mod M_{i+l+1}^{i+1}.$$

Beweis. Unter den angegebenen Voraussetzungen ist Lemma 3.23 anwendbar. Den resultierenden Repräsentanten vereinfachen wir mit Lemma 3.26. Insgesamt erhalten wir auf diese Weise also wie verlangt

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_q^l \mathcal{E}_m E_\infty^i &\equiv \mathcal{E}_1^l \mathcal{E}_m E_\infty^i \mod M_{i+1+l}^{i+1} \\
&\equiv \mathcal{E}_0^l \mathcal{E}_{[l+m]} E_\infty^i \mod M_{i+1+l}^{i+1}.
\end{aligned}$$

□

Um technische Fallunterscheidungen zu vermeiden, ist es sinnvoll, die Aussage des Lemmas auf den trivialen Fall $l = 0$ auszuweiten.

3.28 Lemma. *Die Aussage von Lemma 3.27 gilt auch für $l = 0$, wenn der Index $[l+m]$ durch den Index $\langle l+m \rangle$ ersetzt wird.*

Beweis. Nach Definition der Symbole „$[\cdot]$“ und „$\langle \cdot \rangle$“ in Notation 2.7 gilt

$$[l+m] = \langle l+m \rangle \quad \text{für} \quad l+m > 0.$$

Ist also $l > 0$ oder $m > 0$, so hat die angegebene Modifikation von Lemma 3.27 keine Auswirkungen auf die Gültigkeit der Aussage. Im verbleibenden Fall $l = m = 0$ gilt

$$\langle l+m \rangle = \langle 0 \rangle = 0,$$

und die Behauptung ist eine Tautologie. □

Bemerkung. Der Übergang zum Symbol „$\langle \cdot \rangle$“ ist tatsächlich notwendig, um den trivialen Fall abzudecken. Es gilt nämlich

$$\mathcal{E}_0^j \mathcal{E}_0 E_\infty^i \not\equiv \mathcal{E}_0^j \mathcal{E}_{[0]} E_\infty^i \mod M_{i+j+1}^{i+1},$$

da die Modulform

$$\mathcal{E}_0^j \mathcal{E}_0 E_\infty^i - \mathcal{E}_0^j \mathcal{E}_{[0]} E_\infty^i = (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{q-1}) \mathcal{E}_0^j E_\infty^i = E_0 \mathcal{E}_0^j E_\infty^i$$

an der Spitze $(0:1)$ Nullstellenordnung genau i hat.

Wir müssen bei den in diesem Abschnitt beschriebenen Umformungen also darauf achten, ob die Summe der Indizes der auftretenden modifizierten Eisenstein-Reihen tatsächlich gleich 0 ist oder lediglich kongruent zu 0 modulo $q-1$. Dies liegt daran, dass die Reduktion im Index von einem Schritt „$\mathcal{E}_q \mapsto \mathcal{E}_1$“ herrührt, wir aber wie gerade beschrieben nicht $\mathcal{E}_{q-1}$ zu $\mathcal{E}_0$ reduzieren können.

Vergleiche auch die Bemerkung zu Notation 2.7.

Wir können nun eine allgemeinere Umformungsregel herleiten:

3.29 Proposition. *Sei $1 \leq i \leq q-1$ und $0 \leq m < q-i$. Für $l \in \mathbb{N}$ seien beliebige $a_1, \ldots, a_l \in \{0, \ldots, q\}$ gegeben. Dann gilt*

$$\left(\prod_{j=1}^{l} \mathcal{E}_{a_j} \right) \mathcal{E}_m E_\infty^i \equiv \mathcal{E}_0^l \mathcal{E}_{\langle a+m \rangle} E_\infty^i \mod M_{i+1+l}^{i+1}$$

mit $a := a_1 + \ldots + a_l$.

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir

$$\mathcal{F} := \left(\prod_{j=1}^{l} \mathcal{E}_{a_j} \right) \mathcal{E}_m E_\infty^i.$$

Im Fall $a_1 = \ldots = a_l = q$ haben wir die Behauptung in Lemma 3.27 gezeigt. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass mindestens ein a_j echt kleiner als q ist. Damit ist insbesondere $a < lq$. Wir wissen also, dass in der Zerlegung

$$a = c_1 q + b_1 \quad \text{mit} \quad 0 \leq b_1 \leq q-1$$

bereits $c_1 < l$ gilt. Nach Proposition 2.15 ist somit

$$\prod_{j=1}^{l} \mathcal{E}_{a_j} = \mathcal{E}_0^{l-1-c_1} \mathcal{E}_{b_1} \mathcal{E}_q^{c_1}$$

beziehungsweise

$$\mathcal{F} = \mathcal{E}_0^{l-1-c_1} \mathcal{E}_{b_1} \mathcal{E}_q^{c_1} \mathcal{E}_m E_\infty^i.$$

Nach Voraussetzung gilt $m < q - i$, wir können den Faktor $\mathcal{E}_q^{c_1} \mathcal{E}_m E_\infty^i$ von $\mathcal{F}$ somit mit Hilfe unserer zuvor beschriebenen Rechenregeln vereinfachen. Wir greifen dazu auf Lemma 3.28 zurück, da wir den Fall $c_1 = 0$ zulassen, und erhalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\equiv \mathcal{E}_0^{l-1-c_1} \mathcal{E}_{b_1} \mathcal{E}_0^{c_1} \mathcal{E}_{\langle c_1+m \rangle} E_\infty^i \mod M_{i+1+l}^{i+1} \\ &\equiv \mathcal{E}_0^{l-1} \mathcal{E}_{b_1} \mathcal{E}_{\langle c_1+m \rangle} E_\infty^i \mod M_{i+1+l}^{i+1}. \end{aligned}$$

Um zu sehen, wie dieser Ausdruck weiter zu vereinfachen ist, schauen wir uns die Zerlegung

$$b_1 + \langle c_1 + m \rangle = c_2 q + b_2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq b_2 \leq q - 1$$

genauer an. Wir wissen, dass $b_1 \leq q-1$ und $\langle c_1 + m \rangle \leq q-1$ gilt. Folglich ist $c_2 \in \{0, 1\}$ und $c_2 = 1$ impliziert bereits

$$b_2 < \langle c_1 + m \rangle \leq q - 1. \tag{3.3}$$

Wir können also

$$\mathcal{E}_{b_1} \mathcal{E}_{\langle c_1+m \rangle} = \mathcal{E}_0^{1-c_2} \mathcal{E}_{b_2} \mathcal{E}_q^{c_2}$$

schreiben, so dass insgesamt

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{E}_0^{l-c_2} \mathcal{E}_{b_2} \mathcal{E}_q^{c_2} E_\infty^i \mod M_{i+1+l}^{i+1} \tag{3.4}$$

folgt.

Ist nun $c_2 = 0$, so vereinfacht sich Kongruenz (3.4) direkt zu

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{E}_0^l \mathcal{E}_{b_2} E_\infty^i \mod M_{i+1+l}^{i+1}.$$

Dabei ist

$$b_2 = b_1 + \langle c_1 + m \rangle \equiv b_1 + c_1 + m \equiv b_1 + c_1 q + m \equiv a + m \mod q - 1.$$

Damit wir sehen, dass tatsächlich

$$b_2 = \langle a + m \rangle$$

gilt, müssen wir zeigen, dass b_2 genau dann gleich Null ist, wenn auch $a + m$ Null ist.

Wegen der Voraussetzung $c_2 = 0$ ist b_2 genau dann Null, wenn sowohl $b_1 = 0$ als auch $\langle c_1 + m \rangle = 0$ gilt. Die zweite Bedingung ist wiederum äquivalent dazu, dass $c_1 = 0$ und $m = 0$ ist. Zusammen ergibt dies, dass genau dann $b_2 = 0$ gilt, wenn

$$a = c_1 q + b_1 = 0 \quad \text{und} \quad m = 0$$

ist, und die Behauptung ist für $c_2 = 0$ bewiesen.

Sei also $c_2 = 1$. Aus der Definition von c_2, b_2 und c_1, b_1 folgt, dass dann insbesondere $a + m > 0$ gilt.

Wir zeigen, dass auf der rechten Seite von Kongruenz (3.4) ein Eisenstein-Reihen-Faktor auftritt, der zusammen mit $\mathcal{E}_q E_\infty^i$ ein Teilprodukt bildet, das wir gemäß Lemma 3.27 umformen können. Wir unterscheiden erneut zwischen zwei Fällen:

Ist $l \geq 2$, so enthält die rechte Seite von Kongruenz (3.4) mindestens einen Faktor $\mathcal{E}_0$. Wir vereinfachen also das Teilprodukt $\mathcal{E}_q \mathcal{E}_0 E_\infty^i$ und erhalten

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{E}_0^{l-1} \mathcal{E}_{b_2} \mathcal{E}_1 E_\infty^i \mod M_{i+1+l}^{i+1}.$$

Ist dagegen $l = 1$, so gilt $a < q$ und folglich $c_1 = 0$. Ungleichung (3.3) liefert dann

$$b_2 < \langle m \rangle = m.$$

Das Teilprodukt $\mathcal{E}_q \mathcal{E}_{b_2} E_\infty^i$ der rechten Seite von Kongruenz (3.4) genügt damit den Voraussetzungen von Lemma 3.27 und wir erhalten auch im zweiten Fall die Kongruenz

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{E}_0^{l-1} \mathcal{E}_{b_2} \mathcal{E}_1 E_\infty^i \mod M_{i+1+l}^{i+1}.$$

Da nach Ungleichung (3.3) aber in beiden Fällen $b_2 < q - 1$ ist, können wir

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{E}_0^{l} \mathcal{E}_{b_2+1} E_\infty^i \mod M_{i+1+l}^{i+1}$$

schreiben, ohne einen zusätzlichen Faktor $\mathcal{E}_q$ zu erhalten. Dabei ist

$$b_2 + 1 = b_2 + c_2 \equiv b_1 + \langle c_1 + m \rangle \equiv a + m \mod q - 1.$$

Da außerdem sowohl $b_2 + 1 > 0$ als auch $a + m > 0$ gelten, ist tatsächlich

$$b_2 + 1 = \langle a + m \rangle\,,$$

und die Behauptung ist auch für $c_2 = 1$ bewiesen. □

Bemerkung. (i) Die Umformungsregeln erscheinen auf den ersten Blick möglicherweise unnötig kompliziert, da sie doch einfach auf eine Ersetzung von $\mathcal{E}_q$ durch $\mathcal{E}_1$ hinauszulaufen scheinen und damit die Reduktion modulo $q - 1$ im Index naheliegend ist. Allerdings darf diese Ersetzung eben nur dann erfolgen, wenn andere Faktoren ausreichend hohe Verschwindungsordnungen an den Spitzen gewährleisten. Vergleiche dazu die Bemerkung zu Lemma 3.28.

(ii) Da wir keine genaueren Bedingungen an die a_j stellen, ist die Voraussetzung $m < q - i$ nicht notwendig scharf. In Bezug auf diese Bedingung, die eine ausreichend hohe Verschwindungsordnung an der Spitze ∞ sicherstellt, ist der vorher behandelte Fall $\mathcal{E}_q^l$ der schlimmstmögliche. Je stärker das Produkt $\prod_{j=1}^{l} \mathcal{E}_{a_j}$ von dieser reinen Potenz abweicht, desto schwächer kann die Bedingung an m sein. Ist etwa schon $a_1 = 0$, so kann $\mathcal{E}_{a_1}$ im Beweis die Rolle einnehmen, die ursprünglich $\mathcal{E}_m$ zukommt.

Ist sogar $a + m \leq q - 1$, so gilt in der Formulierung des Lemmas nicht nur Kongruenz, sondern Gleichheit: Es treten keine Faktoren $\mathcal{E}_q$ auf, die eine Reduktion gemäß der vorher gezeigten Methoden erforderlich machen.

4 Gruppenoperationen auf Drinfeld'schen Modulformen

Nachdem wir bisher hauptsächlich Eigenschaften bestimmter Modulformen sowie Vektorraumstrukturen untersucht haben, betrachten wir zum Abschluß des ersten Teils der vorliegenden Arbeit Gruppenoperationen auf den Drinfeld'schen Modulformen zur Gruppe $\Gamma(T)$.

Wir beschreiben, wie die volle Modulgruppe in natürlicher Weise auf den Drinfeld'schen Modulformen operiert. Da es sich hierbei um bekannte Sachverhalte handelt, geben wir Beweise verkürzt wieder. Im Hinblick auf die Anwendung in späteren Kapiteln formulieren wir die Ergebnisse anschließend noch einmal für die zugehörige Linksoperation.

4.1 Die natürliche *rechte* Operation

Die in Lemma 1.10 beschriebene Gruppenoperation induziert eine Operation der vollen Modulgruppe auf den Modulformen vom Gewicht k:

4.1 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Der Vektorraum M_k der Modulformen vom Gewicht k ist abgeschlossen unter der* rechten *Operation der vollen Modulgruppe $\Gamma(1)$, die für $\gamma \in \Gamma(1)$ und $f \in M_k$ durch*

$$f|_{[\gamma]_k}(z) = (cz + d)^{-k} f(\gamma z)$$

definiert ist.

Die Operation ist verträglich mit der Vektorraumstruktur von M_k, d.h., für Modulformen $f, g \in M_k$ und $\lambda \in \mathcal{C}_\infty$ ist

$$(f + \lambda g)|_{[\gamma]_k} = f|_{[\gamma]_k} + \lambda g|_{[\gamma]_k} \quad \textit{für alle} \quad \gamma \in \Gamma(1).$$

Beweis. Sei $f \in M_k$ und $\gamma \in \Gamma(1)$. Wir überprüfen für $f|_{[\gamma]_k}$ die drei Bedingungen für Drinfeld'sche Modulformen aus Definition 1.12.

Bedingung (i) gilt nach Lemma 1.11, da $\Gamma(T)$ als Hauptkongruenzuntergruppe ein Normalteiler in $\Gamma(1)$ ist.

Die Holomorphie auf Ω bleibt unter der angegebenen Transformation offenbar erhalten, also ist auch die zweite Bedingung erfüllt.

Betrachten wir schließlich das Verhalten der Modulform $f|_{[\gamma]_k}$ an einer Spitze s, so entspricht dies gemäß Bemerkung (ii) zu Definition 1.12 dem Verhalten von f an der Spitze γs.

Da Holomorphie und Verschwindungsordnung an einer Spitze nicht von der Wahl des Repräsentanten abhängen, bewirkt das Element γ unter der betrachteten Operation insgesamt eine Permutation der Verschwindungsordnungen an den Spitzen. Somit ist auch die dritte Bedingung erfüllt. $\square$

Wir können uns bei der Untersuchung dieser Operation auf eine endliche Untergruppe der vollen Modulgruppe beschränken:

4.2 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Die in Lemma 4.1 beschriebene Operation von $\Gamma(1)$ auf M_k ist bereits vollständig durch die Operation der endlichen Untergruppe*

$$G := \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q) \leq \Gamma(1)$$

bestimmt.

Beweis. Nach Definition operiert die Untergruppe $\Gamma(T)$ trivial auf den Drinfeld'schen Modulformen zur Gruppe $\Gamma(T)$. Es handelt sich bei der in Lemma 4.1 beschriebenen Operation also tatsächlich um eine Operation des Quotienten $\Gamma(T)\backslash\Gamma(1)$, den wir wegen

$$\Gamma(T)\backslash\Gamma(1) \cong \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$$

seinerseits als Untergruppe von $\Gamma(1)$ auffassen können. $\square$

Die Transformationsvorschriften für die verschiedenen Gewichte lassen sich wie folgt miteinander in Beziehung setzen:

4.3 Lemma. *Wir erhalten eine rechte Operation von G auf der graduierten Algebra $M = \bigoplus_{k\geq 0} M_k$, indem die Gruppe G auf den einzelnen direkten Summanden wie in Lemma 4.1 beschrieben operiert.*

Die resultierende Operation ist mit der multiplikativen Struktur auf M verträglich, d.h., für $f \in M_k$ und $g \in M_l$ mit $k, l \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(fg)|_{[\gamma]_{k+l}} = \left(f|_{[\gamma]_k}\right)\left(g|_{[\gamma]_l}\right), \quad \gamma \in G.$$

Viele der bisher betrachteten Vektorräume von Modulformen sind unter dieser Operation abgeschlossen.

4.4 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Der Unterraum $M_k^n \subseteq M_k$ der n-ten Spitzenformen ist stabil unter der betrachteten Operation von G.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Beschreibung des Verhaltens an den Spitzen im Beweis von Lemma 4.1. $\square$

4.5 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Der Vektorraum Eis_k, der von den Eisenstein-Reihen vom Gewicht k erzeugt wird, ist unter der Operation von G abgeschlossen.*

Beweis. Dies folgt direkt mit Lemma 2.1. $\square$

4.2 Beschreibung als *linke* Operation

Vektorräume, die mit einer Gruppenoperation versehen sind, bilden den Gegenstand der Darstellungstheorie. Da diese in der Regel von Linksoperationen ausgeht, definieren wir die folgende linke Variante der in Lemma 4.3 beschriebenen Operation. Dabei bleiben alle wesentlichen Eigenschaften der ursprünglichen Operation sinngemäß unverändert.

4.6 Proposition. *Wir erhalten eine* linke *Operation von G auf der graduierten Algebra $M = \bigoplus_{k\geq 0} M_k$ der Drinfeld'schen Modulformen, indem wir für $\gamma \in G$ auf den direkten Summanden M_k mit $k \in \mathbb{N}_0$ definieren:*

$$\gamma f := f|_{[\gamma^{-1}]_k}, \quad f \in M_k.$$

Die resultierende linke Operation ist mit der Algebrenstruktur verträglich.

4.7 Notation. Sind zwei Modulformen $f \in M_k$, $g \in M_l$ gegeben, so schreiben wir für die linke Operation

$$\gamma(fg) = (\gamma f)(\gamma g), \quad \gamma \in G,$$

ohne die Abhängigkeit vom Gewicht ausdrücklich anzugeben. Aus dem Zusammenhang ist eindeutig bestimmt, für welches Gewicht die Transformationsvorschrift aus Proposition 4.6 jeweils anzuwenden ist.

Bemerkung. Im zweiten Teil dieser Arbeit, der sich mit der abstrakten Darstellungstheorie beschäftigt, werden wir für einen Vektorraum, auf dem eine Gruppe operiert, den Begriff des G-Moduls einführen. Dieser erlaubt die folgende Sprechweise zur Beschreibung der im vorangegangenen Abschnitt gefundenen Strukturen:

Versehen mit der linken Operation von G gemäß Proposition 4.6 handelt es sich bei folgenden Vektorräumen um G-Moduln im Sinne von Definition 5.1:

- Die Algebra M der Drinfeld'schen Modulformen.
- Die Vektorräume M_k der Modulformen vom Gewicht k mit $k \in \mathbb{N}_0$.
- Die Vektorräume M_k^n der n-ten Spitzenformen vom Gewicht $k \geq 2$ für $n \in \mathbb{N}$.
- Die Vektorräume Eis_k, die von den Eisenstein-Reihen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$ erzeugt werden.

Insbesondere ist die direkte Summenzerlegung

$$M_k = \mathrm{Eis}_k \oplus M_k^1, \quad k \in \mathbb{N},$$

aus Satz 2.4 sogar eine direkte Summe von G-Moduln. Die Spitzenfiltrierung

$$M_k^1 \supseteq M_k^2 \supseteq \ldots \supseteq M_k^{\mathtt{m}(k)}$$

ist eine Filtrierung von G-Moduln.

Eine genauere Untersuchung all dieser G-Moduln erfolgt im dritten Teil dieser Arbeit, beginnend mit Kapitel 7.

5 Einführung in modulare Darstellungstheorie

Die in den vorigen Kapiteln eingeführten Drinfeld'schen Modulformen sollen unter Gesichtspunkten der Darstellungstheorie weiter untersucht werden. Das Ziel dieses Kapitels ist, die Begriffe und Notationen, die dazu benötigt werden, kurz und übersichtlich zusammenzufassen. Es handelt sich keineswegs um eine vollständige Übersicht über den Stand der Darstellungstheorie.

Wir definieren Darstellungen zunächst in einer allgemeineren Situation. Dabei stellen wir unter anderem die Konzepte der induzierten Darstellung sowie der dualen Darstellung vor.

Anschließend gehen wir im zweiten Abschnitt auf den Spezialfall der modularen Darstellungstheorie in endlicher Charakteristik ein.

Dies präzisieren wir im dritten Abschnitt weiter, indem wir konkret die Darstellungstheorie der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ betrachten, mit der wir uns im Rest dieser Arbeit beschäftigen werden.

Da wir hier bekannte Sachverhalte wiedergeben, verzichten wir in diesem Kapitel auf Beweise. Details zur abstrakten Darstellungstheorie können beispielsweise bei Alperin [Alp86], Benson [Ben91] oder Feit [Fei82] nachgelesen werden. Weitere Ausführungen zur konkret betrachteten Darstellungstheorie in definierender Charakteristik finden sich etwa bei Wack [Wac96] oder (für die Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$) bei Bonnafé [Bon11].

Bei der Notation ist zu beachten: Wir „vergessen“ in diesem Kapitel (und nur hier) die in den vorigen Kapiteln festgelegte Notation, sofern nicht ausdrücklich Bezug auf diese genommen wird. Beispielsweise steht K in diesem Kapitel zunächst für einen beliebigen Körper und G für eine beliebige Gruppe. In allen folgenden Kapiteln hat die Notation aus dem ersten Teil bei eventuellen Konflikten Vorrang.

Alle in diesem Kapitel auftretenden Moduln sind grundsätzlich als Linksmoduln zu verstehen, ebenso betrachten wir hier nur Operationen von links.

5.1 Abstrakte Definition von Darstellungen

Bei den Definitionen in diesem Abschnitt orientieren wir uns an [Ben91, Kapitel 3] und [Wac96, Kapitel 1].

Sei K ein beliebiger Körper und G eine Gruppe. Wie üblich bilden wir die Gruppenalgebra

$$K[G] = \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in K, \text{ fast alle } \lambda_g = 0 \right\}.$$

Wir definieren zunächst zwei eng miteinander verwandte Begriffe.

5.1 Definition. Sei M ein K-Vektorraum.

(i) Ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(M)$ heißt *Darstellung* von G auf M. Der Vektorraum M heißt *Darstellungsraum* von ρ. Die Dimension von M heißt auch Dimension der Darstellung ρ.

(ii) Ist M versehen mit einer $K[G]$-Modulstruktur, so nennen wir M einen *G-Modul* und sagen, G operiere auf M.

Durch K-lineare Fortsetzung erhalten wir zu einer Darstellung einen eindeutigen Algebrenhomomorphismus $K[G] \to \mathrm{End}_K(M)$. Jeder solche Algebrenhomomorphismus induziert wiederum in offensichtlicher Weise eine $K[G]$-Modulstruktur auf M.

Umgekehrt liefert ein G-Modul M eine Abbildungsvorschrift für einen Algebrenhomomorphismus $K[G] \to \mathrm{End}_K(M)$ und durch Einschränkung einen Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Aut}_K(M)$, also eine Darstellung. Wir können Darstellungen und G-Moduln somit in eindeutiger Weise miteinander identifizieren.

5.2 Notation. Wir verwenden bei fixierter Gruppe G die Begriffe Darstellung und G-Modul synonym. Insbesondere bezeichnen wir auch einen K-Vektorraum selbst als Darstellung, wenn klar ist, wie die Gruppe G auf diesem operiert.

Betrachten wir eine feste Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(M)$, so schreiben wir für die $K[G]$-Modulstruktur auf M auch gx anstelle von $\rho(g)x$.

Auf der anderen Seite kann es Sinn machen, zwischen einem G-Modul M und dem zugrunde liegenden Vektorraum zu unterscheiden, obwohl sie mengentheoretisch übereinstimmen, etwa wenn wir eine neue Operation auf demselben Vektorraum definieren wollen.

5.3 Definition. Eine eindimensionale Darstellung von G heißt auch ein *Charakter* von G.

5.4 Beispiel. Der triviale G-Homomorphismus $G \to K^\times$, $g \mapsto 1$, liefert auf K eine G-Modulstruktur mit

$$gx = x$$

für alle $g \in G$, $x \in K$. Die zugehörige Darstellung heißt *triviale Darstellung*, *Einsdarstellung* oder der *triviale Charakter* von G. Sprechen wir im Folgenden von der Darstellung K, so ist damit stets die triviale Darstellung gemeint.

5.5 Definition. Sei M ein G-Modul. Ist $0 \neq x \in M$ so, dass ein Charakter ρ mit

$$gx = \rho(g)x \quad \text{für alle } g \in G$$

existiert, so heißt x *Eigenvektor* zum Charakter ρ.

5.6 Definition. Seien M und N G-Moduln. Eine lineare Abbildung $\varphi : M \to N$ heißt *G-äquivariant* oder *G-Homomorphismus*, wenn sie für alle $g \in G$, $x \in M$ die Bedingung

$$\varphi(gx) = g\varphi(x)$$

erfüllt. Wir bezeichnen den Vektorraum der G-Homomorphismen von M nach N mit $\mathrm{Hom}_G(M, N)$; sinngemäß ist $\mathrm{End}_G(M)$ definiert.

Ein G-äquivarianter Vektorraumisomorphismus heißt auch *G-Isomorphismus*.

5.7 Definition. Sei M ein G-Modul. Ein *G-Untermodul* von M ist ein Untervektorraum $U \subseteq M$, der unter der Operation von G abgeschlossen ist, d.h., es gilt

$$gx \in U$$

für alle $g \in G$ und alle $x \in U$.

Einer der Vorteile der Identifizierung von Darstellungen mit $K[G]$-Moduln ist, dass wir dadurch den Apparat der Modultheorie zur Verfügung haben. Wir können also beispielsweise von einfachen, freien oder projektiven Darstellungen beziehungsweise G-Moduln sprechen. In dieser Arbeit spielen vor allem einfache G-Moduln eine wichtige Rolle, wir erinnern daher an die übliche Definition:

5.8 Definition. Ein G-Modul M heißt *einfach*, wenn er nur die G-Untermoduln $\{0\}$ und M besitzt. Ein G-Modul heißt *halbeinfach*, wenn er eine direkte Summe einfacher G-Moduln ist.

Wir können durch komponentenweise Operationen in natürlicher Weise die direkte Summe von Darstellungen definieren. Ebenso können wir Tensorprodukte von Darstellungen betrachten.

5.9 Definition/Lemma. Seien M und N G-Moduln. Es existiert eine eindeutige Operation von G auf dem Tensorprodukt $M \otimes_K N$ der zugrunde liegenden Vektorräume, so dass für $g \in G$ gilt:

$$g(x \otimes y) = gx \otimes gy \quad \text{für alle } x \in M,\ y \in N.$$

Wir nennen den resultierenden G-Modul $M \otimes N$ das *Tensorprodukt der G-Moduln M und N*. Die zugehörige Darstellung von G auf $M \otimes N$ nennen wir *Tensorprodukt der Darstellungen* auf M beziehungsweise N.

Bemerkung. Wir verwenden die beim Tensorprodukt von Vektorräumen üblichen Konventionen, zum Beispiel identifizieren wir ohne weiteren Kommentar die G-Moduln $V \otimes W$ und $W \otimes V$.

Die induzierte Darstellung

Als Nächstes befassen wir uns mit der Frage, wie wir uns zu einer Darstellung für eine Untergruppe $H \leq G$ eine Darstellung für die Gruppe G verschaffen können. Wir geben eine mögliche Realisierung der induzierten Darstellung an und beschreiben grundlegende Eigenschaften. Für weitere Details zur hier gewählten Interpretation siehe beispielsweise [Lan02, XVIII, §7]. Eine alternative Beschreibung der induzierten Darstellung ist zum Beispiel in [Ben91, Abschnitt 3.3] angegeben.

5.10 Definition. Sei H eine Untergruppe von G von endlichem Index und sei N ein H-Modul mit zugehöriger Darstellung $\rho : H \to \mathrm{Aut}_K(N)$.

Auf dem Vektorraum W der Funktionen $f : G \to N$, die die Eigenschaft

$$h(f(g)) = f(hg)$$

für alle $h \in H$ und $g \in G$ erfüllen, operiert ein Element $g' \in G$ durch die Vorschrift

$$(g'f)(g) = f(gg') \quad \text{für alle } g \in G.$$

Der dadurch beschriebene G-Modul heißt der von N *induzierte G-Modul*. Wir schreiben dafür $\mathrm{Ind}_H^G(N)$.

Die zugehörige Darstellung heißt *induzierte Darstellung* und wird mit $\mathrm{Ind}_H^G(\rho)$ bezeichnet.

Die Struktur der induzierten Darstellung lässt sich genauer beschreiben. Einige elementare Aussagen haben wir im Folgenden zusammengefasst.

5.11 Proposition. *(i) Eine Funktion $f \in \mathrm{Ind}_H^G(N)$ ist vollständig bestimmt durch Angabe ihrer Werte auf einem Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen $H \backslash G$.*

(ii) Es existiert ein injektiver H-Homomorphismus $N \hookrightarrow \mathrm{Ind}_H^G(N)$, $y \mapsto f^{(y)}$, der gegeben ist durch

$$f^{(y)}(g) = \begin{cases} gy & g \in H \\ 0 & g \notin H. \end{cases}$$

Wir können also N als H-Modul nach $\mathrm{Ind}_H^G(N)$ einbetten und mit dem Untermodul U der Funktionen f mit $f(g) = 0$ für alle $g \notin H$ identifizieren. Dabei schreiben wir $g \notin H$ für $g \in G \setminus H$.

(iii) Es gilt

$$\dim \mathrm{Ind}_H^G(N) = [G : H] \cdot \dim N.$$

Beweis. Aussage (i) ist klar. Die zweite und dritte Aussage folgen aus Proposition 7.1 beziehungsweise Proposition 7.2 aus [Lan02, Kapitel XVIII]. □

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung induzierter Darstellungen liefert der folgende Satz:

5.12 Satz (Frobenius-Reziprozität)**.** *Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von endlichem Index. Sei N ein H-Modul und M ein G-Modul. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G(N), M) \cong \mathrm{Hom}_H(N, \mathrm{Res}_H^G(M)).$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{Res}_H^G(M)$ den H-Modul, den wir durch Einschränkung auf die Operation der Untergruppe $H \leq G$ erhalten.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus der Definition der induzierten Darstellung als universelles Objekt, vergleiche die Herleitung in [Lan02, XVIII, §7]. □

Die duale Darstellung

Ein weiteres grundlegendes Konzept ist die duale Darstellung (siehe [Ben91, Abschnitt 3.1] oder [Lan02, XVIII, §1]). Hier wird einer gegebenen Darstellung in kanonischer Weise eine Darstellung auf dem Dualraum zugeordnet. Dazu halten wir zunächst allgemeiner fest:

5.13 Proposition. *Sind M und N G-Moduln, so wird auf* $\mathrm{Hom}_K(M,N)$ *durch die Vorschrift*

$$(g\varphi)(x) = g\varphi(g^{-1}x) \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathrm{Hom}_K(M,N),\ g \in G$$

eine G-Modulstruktur definiert.

Wählen wir für N den trivialen Modul K, so liefert die angegebene Operation eine Struktur auf dem Dualraum $M^* = \mathrm{Hom}_K(M,K)$ von M.

5.14 Definition. Sei M ein K-Vektorraum und M ein G-Modul. Wir erhalten eine G-Modulstruktur auf dem Dualraum M^* von M, indem wir für $\varphi \in M^*$ und $g \in G$ die Abbildung $g\varphi$ durch

$$(g\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x)$$

definieren. Der resultierende G-Modul heißt der zu M *duale G-Modul*. Die zugehörige Darstellung $\rho^* : G \to \mathrm{Aut}_K(M^*)$ heißt die *duale Darstellung* und wird nach der üblichen Konvention ebenfalls mit M^* bezeichnet.

Bemerkung. Das Gruppenelement g muss bei der Definition der Operation invertiert werden, um eine Linksoperation auf dem Raum der Homomorphismen zu erhalten. Für einen Kommentar zur Orientierung von Gruppenoperationen siehe auch die Bemerkung zur natürlichen Darstellung und der dualen natürlichen Darstellung in Abschnitt B.1 des Anhangs.

5.15 Beispiel. Ist $\rho : G \to K^\times$ ein Charakter, so ist die duale Darstellung durch den inversen Charakter ρ^{-1} gegeben.

Dualisierung vertauscht mit dem Bilden der induzierten Darstellung.

5.16 Proposition ([Lan02, XVIII, Theorem 7.10])**.** *Sei $H \leq G$ eine Untergruppe von endlichem Index und N ein endlichdimensionaler H-Modul. Dann gilt*

$$\mathrm{Ind}_H^G(N^*) \cong (\mathrm{Ind}_H^G(N))^*$$

als Isomorphie von G-Moduln.

5.2 Modulare Darstellungstheorie

Von nun an sei G endlich, K algebraisch abgeschlossen und alle G-Moduln endlichdimensional. Insbesondere ist die Gruppenalgebra $K[G]$ damit sowohl artinsch als auch noethersch. Wir befinden uns damit in der Situation, die in [Alp86, Kapitel I] oder bei [Wac96] in den Abschnitten 1.2 und 1.3 beschrieben wird.

Da wir uns für Darstellungstheorie über Körpern endlicher Charakteristik interessieren, stellt sich die Frage, wann beziehungsweise wie sich diese von der klassischen Darstellungstheorie über den komplexen Zahlen unterscheidet. Hierüber gibt der folgende Satz Auskunft:

5.17 Satz (Maschke [Alp86, I, 3, Theorem 1])**.** *Die Gruppenalgebra $K[G]$ ist genau dann halbeinfach, wenn die Charakteristik von K die Ordnung von G nicht teilt. Insbesondere ist die Gruppenalgebra in Charakteristik 0 stets halbeinfach.*

Die halbeinfache Situation ist leichter zu kontrollieren: Ist $K[G]$ halbeinfach, so ist auch jeder $K[G]$-Modul halbeinfach. Wir verfügen über gute Beschreibungen der Struktur der Gruppenalgebra (etwa das Lemma von Schur) und wissen, dass sich jeder G-Modul als direkte Summe einfacher Moduln schreiben lässt. Auch weitere modultheoretische Eigenschaften vereinfachen sich in dieser Situation, so ist beispielsweise jeder Modul projektiv.

Dies ist, wie im Satz von Maschke erwähnt, der Fall in der klassischen Darstellungstheorie über den komplexen Zahlen. Dortige Ergebnisse und Methoden können teilweise auf die Untersuchung von Darstellungen in endlicher, aber zur Gruppenordnung teilerfremder Charakteristik übertragen werden.

Ist jedoch die Charakteristik des Grundkörpers ein Teiler der Gruppenordnung, so haben wir es mit *modularer Darstellungstheorie* zu tun. Dies ist die Situation, in der wir uns im Fall Drinfeld'scher Modulformen befinden.

Von nun an besitze also K positive Charakteristik p, und p sei ein Teiler der Ordnung von G.

Ergebnisse der klassischen Darstellungstheorie lassen sich nicht notwendig auf diese Situation übertragen, etwa weil die Gruppenordnung oder einige Binomialkoeffizienten nicht invertierbar sind (vergleiche die Bemerkung zu Proposition B.8).

Einer der auffälligsten Unterschiede ist die Existenz nicht-halbeinfacher Moduln. Insbesondere kann nicht jeder Untermodul eines G-Moduls durch einen weiteren G-Untermodul komplementiert werden. Die folgenden verwandten Begriffe messen die Abweichung eines G-Moduls von der Halbeinfachheit:

5.18 Definition/Lemma. Sei M ein G-Modul.

(i) Der *Sockel* von M ist die Summe der einfachen Untermoduln von M. Es handelt sich dabei um den größten halbeinfachen Untermodul von M.

(ii) Das *Radikal* von M ist als Schnitt der maximalen Untermoduln von M definiert und beschreibt den kleinsten Untermodul von M, dessen Quotient mit M halbeinfach ist.

(iii) Der *Deckel* von M ist der größte halbeinfache Quotient von M.

Wir erinnern ferner an das allgemeine Konzept von Kompositions- oder Jordan-Hölder-Reihen (siehe zum Beispiel [Fei82, I, Abschnitt 1]):

5.19 Definition. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Wir nennen eine endliche Filtrierung von Untermoduln

$$M = M_l \supsetneq M_{l-1} \supsetneq \ldots \supsetneq M_0 = \{0\}$$

eine *Kompositions-* oder *Jordan-Hölder-Reihe*, wenn jeder der Quotienten M_i/M_{i-1} einfach ist. Die Quotienten M_i/M_{i-1} mit $1 \leq i \leq l$ heißen *Kompositions-* oder *Jordan-Hölder-Faktoren*. Wir nennen l die *Länge* der Kompositionsreihe; diese gibt zugleich die Anzahl der Kompositionsfaktoren an.

5.20 Satz (Jordan-Hölder [Fei82, I, Theorem 1.7])**.** *Sei R ein Ring und M ein Modul über R. Dann gilt: Je zwei Kompositionsreihen von M sind äquivalent, d.h., sie besitzen die gleiche Länge und bis auf Reihenfolge dieselben Kompositionsfaktoren (mit Vielfachheiten gezählt).*

In der Regel ist die Kompositionsreihe selbst dagegen nicht eindeutig, d.h., es können verschiedene Filtrierungen existieren, in denen die Kompositionsfaktoren an unterschiedlichen Positionen auftreten.

Wir verlangen nun zusätzlich, dass R noethersch und artinsch ist. In diesem Fall besitzt jeder R-Modul eine Kompositionsreihe. Insbesondere gilt dies also für $K[G]$-Moduln in der oben betrachteten Situation.

5.21 Definition/Lemma. Ein R-Modul M heißt *uniserial*, wenn er genau eine Kompositionsreihe besitzt.

Äquivalent zu dieser Charakterisierung ist die Bedingung, dass die Untermoduln von M unter Inklusion total geordnet sind.

5.22 Definition. Ein R-Modul M heißt *multiplizitätsfrei*, wenn jeder Kompositionsfaktor mit einfacher Vielfachheit auftritt.

5.23 Definition. Zwei R-Moduln M und N heißen *Jordan-Hölder-äquivalent*, in Zeichen $M \overset{\mathrm{J-H}}{\sim} N$, wenn sie mit Vielfachheiten gezählt dieselben Kompositionsfaktoren besitzen.

Bemerkung. Jordan-Hölder-Äquivalenz ist eine Vergröberung der durch Isomorphie induzierten Äquivalenzrelation.

Jeder Modul ist definitionsgemäß Jordan-Hölder-äquivalent zur direkten Summe seiner Kompositionsfaktoren (mit Vielfachheiten), im Allgemeinen gilt jedoch keine G-Isomorphie.

5.3 Darstellungen von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ in definierender Charakteristik

Von nun an sei im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit

$$G := \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$$

für eine Primzahlpotenz $q = p^r$. Wir betrachten ab jetzt, auch in späteren Kapiteln, nur noch Darstellungen dieser Gruppe G über dem Körper $\mathcal{C}_\infty$ aus Kapitel 1, nicht wie häufig in der Literatur über dem algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{F}}_q$ von $\mathbb{F}_q$. Entsprechende

Ergebnisse lassen sich jedoch direkt auf unsere Situation übertragen, da der natürliche Isomorphismus

$$\overline{\mathbb{F}}_q[G] \underset{\overline{\mathbb{F}}_q}{\otimes} \mathcal{C}_\infty \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_\infty[G]$$

liefert, dass die Darstellungstheorie in beiden Fällen übereinstimmt. Wir können daher auf die Ergebnisse aus [Wac96] (insbesondere Kapitel 2 und 3) sowie [Bon11, Kapitel 10] zurückgreifen.

Da die Charakteristik p des Grundkörpers $\mathcal{C}_\infty$ nicht nur ein Teiler der Ordnung von G ist, sondern vielmehr die Gruppe G als Matrizengruppe über $\mathbb{F}_q$ selbst in Charakteristik p definiert ist, sprechen wir im vorliegenden Fall von modularer Darstellungstheorie in *definierender Charakteristik*.

Ist im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit von Moduln die Rede, so sind damit stets G-Moduln über $\mathcal{C}_\infty$ gemeint.

Eigenschaften der Gruppe

Elementare Eigenschaften der Gruppe G sind beispielsweise in [Wac96, Satz 2.3] zusammengefasst.

Zunächst stellen wir fest, dass wegen $\#G = (q^2-1)(q^2-q) = q(q-1)(q^2-1)$ tatsächlich $p = \operatorname{char} \mathcal{C}_\infty$ die Gruppenordnung teilt, wir uns also im Fall definierender Charakteristik befinden.

Wenn wir Eigenschaften einer Operation von G zeigen wollen (zum Beispiel die G-Äquivarianz einer gegebenen Abbildung), genügt es, diese für Erzeuger der Gruppe nachzuweisen. Wir zeichnen dazu das folgende Erzeugendensystem aus:

5.24 Proposition. *Die Gruppe G wird erzeugt von den Elementen*

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{F}_q^\times,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{F}_q^\times,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.25 Notation. Sprechen wir im Verlauf der vorliegenden Arbeit von *den* Erzeugern von G, so sind damit immer die in Proposition 5.24 angegebenen Matrizen gemeint.

Bei Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist dabei als Generalvoraussetzung stets $a \in \mathbb{F}_q^\times$ beliebig (analog für Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$), auch wenn wir dies nicht ausdrücklich erwähnen. Insbesondere können wir bei unseren Rechnungen ausnutzen, dass der Wert einer Potenz von a beziehungsweise von t nur von der Klasse des Exponenten modulo $q-1$ abhängt.

Twists von Darstellungen

Im Folgenden beschreiben wir zwei Methoden, die wir benutzen werden, um aus einer gegebenen Darstellung neue Darstellungen zu erzeugen.

5.26 Definition. Sei $\sigma \in \mathbb{Z}$. Die Gruppe G operiert auf $\mathcal{C}_\infty$, indem wir für $\gamma \in G$

$$\gamma x = (\det \gamma)^\sigma x \quad \text{für alle } x \in \mathcal{C}_\infty$$

setzen. Wir nennen die zugehörige eindimensionale Darstellung einen *Determinantencharakter* und schreiben dafür $(\det)^\sigma$.

Ist M ein G-Modul, so bezeichnen wir einen G-Modul der Form $M \otimes (\det)^\sigma$ als *Determinantentwist* von M.

Bemerkung. (i) Der Determinantencharakter $(\det)^\sigma$ hängt nur von der Restklasse von σ modulo $q-1$ ab. Wir können uns also auf den Fall beschränken, dass σ ein Repräsentantensystem modulo $q-1$ durchläuft.

(ii) Für $\sigma \equiv 0 \bmod q-1$ handelt es sich bei $(\det)^\sigma$ um den trivialen G-Modul $\mathcal{C}_\infty$.

(iii) In der Praxis identifizieren wir den zugrunde liegenden Vektorraum eines Determinantentwists $M \otimes (\det)^\sigma$ eines Moduls M via $x \otimes 1 \mapsto x$ mit dem M zugrunde liegenden Vektorraum. Die getwistete Operation einer Matrix $\gamma \in G$ auf diesem Raum ist gegeben durch

$$\gamma \cdot x = (\det \gamma)^\sigma (\gamma x) \quad \text{für } x \in M,$$

wobei die Operation auf der rechten Seite die ursprüngliche Operation auf M ist. Es tritt also lediglich ein zusätzlicher Determinantenfaktor auf.

Wir identifizieren daher Elemente von $M \otimes (\det)^\sigma$ und Elemente von M und müssen nur auf den passenden Determinantenfaktor bei der Gruppenoperation achten. Umgekehrt können wir ein Element von M als Element unterschiedlicher Determinantentwists auffassen, indem wir unterschiedliche getwistete Operationen von G betrachten.

(iv) Eigenschaften eines G-Moduls, die nur von dem zugrunde liegenden Vektorraum abhängen, sind unabhängig vom konkret betrachteten Determinantentwist. Beispiele hierfür sind etwa die Dimension oder die Wohldefiniertheit der linearen Abbildung, die einem G-Homomorphismus zugrunde liegt (nicht aber deren G-Äquivarianz!).

(v) Auch die grundlegenden modultheoretischen Eigenschaften eines G-Moduls bleiben unter Determinantentwists erhalten. So ändert sich beispielsweise (bis auf Twist der Untermoduln) nichts an der Untermodulstruktur. Die Untermodulverbände sind also isomorph. Insbesondere ist ein getwisteter Modul genau dann einfach, wenn der ursprüngliche Modul einfach ist. Ebenfalls verträgt sich der Determinantentwist mit der Bildung von Quotienten. Wir können also Informationen über die Beschaffenheit von Kompositionsreihen eines Moduls auf dessen Determinantentwists übertragen.

Wir halten fest: Aus technischen Gründen ist es zwar wichtig, den korrekten Determinantentwist zu betrachten, der Einfluss des Twists auf die Modulstruktur ist aber gut zu kontrollieren.

5.27 Definition. Sei M ein G-Modul und sei $\theta^j : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$, $x \mapsto x^{p^j}$, für $0 \leq j \leq r-1$ eine Potenz des Frobenius-Automorphismus von $\mathbb{F}_q$. Auf dem M zugrunde liegenden Vektorraum definieren wir eine neue Operation „$\underset{\theta^j}{\cdot}$“, indem wir für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ und $x \in M$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underset{\theta^j}{\cdot} x := \begin{pmatrix} a^{p^j} & b^{p^j} \\ c^{p^j} & d^{p^j} \end{pmatrix} x$$

setzen. Die Operation auf der rechten Seite ist dabei durch die ursprüngliche G-Modulstruktur auf M gegeben. Auf diese Weise erhalten wir auf dem Vektorraum M eine neue G-Modulstruktur. Den resultierenden G-Modul M^{θ^j} nennen wir *Frobenius-Twist* von M.

Bemerkung. (i) Für $j = 0$ stimmt der Frobenius-Twist mit dem ursprünglichen Modul überein.

(ii) Ebenso wie Determinantentwists ändern auch Frobenius-Twists nichts an der grundlegenden Struktur eines Moduls, siehe [Wac96, Lemma 2.10] für weitere Ausführungen dazu.

Symmetrische Potenzen der natürlichen Darstellung

Eine wichtige Rolle bei der Beschreibung von G-Moduln spielen die symmetrische Algebra beziehungsweise die symmetrischen Potenzen des natürlichen G-Moduls. Wir rufen hier die entsprechenden Definitionen ins Gedächtnis. Für eine vollständige Definition der symmetrischen Algebra siehe zum Beispiel [Bou89, III, §6].

5.28 Notation. Von nun an bezeichne V stets den *natürlichen* oder *tautologischen G-Modul* der Dimension 2 beziehungsweise die *natürliche Darstellung von G*. Dabei handelt es sich um den Vektorraum $\mathcal{C}_\infty^2$, auf dem G von links durch gewöhnliche Matrix-Spaltenvektor-Multiplikation operiert.

Die Standardbasis von V bezeichnen wir mit (X, Y).

5.29 Proposition. *Für eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ gilt*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X = aX + cY,$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Y = bX + dY.$$

Beweis. Da es an dieser Stelle leicht zu Missverständnissen kommen kann, etwa Verwechslungen von V mit der dualen Darstellung (siehe dazu auch Abschnitt B.2 im Anhang), überzeugen wir uns kurz von der Richtigkeit dieser Aussage. Es gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = aX + cY.$$

Die zweite Aussage folgt analog. □

5.30 Notation/Lemma. Sei $\mathrm{Sym}(V)$ die symmetrische Algebra von V. Wir bezeichnen für $n \in \mathbb{N}_0$ die n-te symmetrische Potenz von V mit $\mathrm{Sym}^n(V)$, d.h., es ist

$$\mathrm{Sym}(V) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Sym}^n(V).$$

Vermöge der natürlichen Operation von G auf V können wir auch die symmetrische Algebra beziehungsweise die symmetrischen Potenzen von V als G-Moduln auffassen.

Wir erhalten dabei kanonische Isomomorphien von G-Moduln

$$\mathrm{Sym}^0(V) \cong \mathcal{C}_\infty \quad \text{und} \quad \mathrm{Sym}^1(V) \cong V.$$

Allgemein ist

$$\dim \mathrm{Sym}^n(V) = n + 1$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und die Monome $X^{n-i}Y^i$ mit $0 \leq i \leq n$ bilden eine Basis von $\mathrm{Sym}^n(V)$. Eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ operiert auf einem solchen Basiselement durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X^{n-i}Y^i = (aX + cY)^{n-i}(bX + dY)^i. \tag{5.1}$$

Bemerkung. Zur Vereinfachung der Notation verzichten wir auf Klammern, wenn wir Monome unter der Operation von G betrachten. Nur wenn wir ein Monom ausdrücklich als Produkt zerlegen und ein Element von G getrennt auf den Faktoren operieren lassen, setzen wir die entsprechenden Ausdrücke in Klammern.

Die gleiche Konvention gilt in späteren Kapiteln auch für Monome in Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1.

Setzen wir in Formel 5.1 die Erzeuger von G ein, so ist das folgende Transformationsverhalten direkt abzulesen:

5.31 Proposition. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die üblichen Erzeuger von G operieren auf Monomen vom Grad n durch*

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X^{n-i}Y^i &= a^{n-i}X^{n-i}Y^i, \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X^{n-i}Y^i &= \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} t^{i-j} X^{n-j}Y^j, \\ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) X^{n-i}Y^i &= X^iY^{n-i} \end{aligned}$$

für $0 \leq i \leq n$.

Bemerkung. (i) Allgemein ist die Darstellungstheorie der symmetrischen Potenzen $\mathrm{Sym}^n(V)$ mit $n \leq q$ für die Gruppe $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ in [BS00] vollständig beschrieben. Man kennt den Untermodulverband sowie die Kompositionsfaktoren.

Wir geben diese Ergebnisse in Kapitel 6 der vorliegenden Arbeit wieder. In Kapitel 10 zeigen wir darüber hinaus einige Aussagen für den Fall $n \geq q + 1$.

(ii) Der einfache Modul $\mathrm{Sym}^{q-1}(V)$ heißt der *Steinberg-Modul* und ist in der Darstellungstheorie von besonderer Bedeutung. Beispielsweise ist dieser Modul einfach, projektiv und selbstdual. In [Ste67] ist das zugrunde liegende Konzept in einer weit allgemeineren Situation beschrieben.

(iii) Für die algebraische Gruppe $\mathrm{GL}(2, \overline{\mathbb{F}}_q)$ ist die Darstellungstheorie der symmetrischen Potenzen der natürlichen Darstellung für beliebiges n bekannt (siehe [Dot85]). Dies lässt sich jedoch nicht unmittelbar auf unsere Situation übertragen.

Die einfachen $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$-Moduln

In der modularen Darstellungstheorie kann zwar nicht jeder G-Modul als direkte Summe einfacher G-Moduln geschrieben werden, dennoch sind die einfachen G-Moduln für die Untersuchung beliebiger G-Moduln von Bedeutung, zum Beispiel durch ihr Auftreten als Kompositionsfaktoren.

Für die hier betrachtete Gruppe $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ wurden die einfachen Moduln bereits in [Ste67] klassifiziert. Da dort jedoch eine deutlich allgemeinere Situation betrachtet wird, greifen wir an dieser Stelle auf die expliziteren Beschreibungen in [Wac96] beziehungsweise in [Bon11] zurück.

5.32 Notation. Sei $0 \leq s \leq q-1$ gegeben mit p-adischer Entwicklung $s = \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i$, $0 \leq s_i \leq p-1$. Der G-Modul $\mathfrak{S}(s)$ ist definiert als

$$\mathfrak{S}(s) := \bigotimes_{i=0}^{r-1} \left(\mathrm{Sym}^{s_i}(V)\right)^{\theta^i}.$$

Für $\sigma \in \mathbb{Z}$ definieren wir weiter

$$\mathfrak{S}(s, \sigma) := \mathfrak{S}(s) \otimes (\det)^{\sigma}.$$

Bemerkung. Wir haben bereits in der Bemerkung zu Definition 5.26 festgehalten, dass der Determinantentwist nur von der Restklasse von σ modulo $q-1$ abhängt. Wir identifizieren daher

$$\mathfrak{S}(s, \sigma) = \mathfrak{S}(s, \sigma') \quad \text{für } \sigma \equiv \sigma' \bmod q-1.$$

Insbesondere ist $\mathfrak{S}(s, 0) = \mathfrak{S}(s, q-1) = \mathfrak{S}(s)$ für alle $0 \leq s \leq q-1$. Darüber hinaus ist $\mathfrak{S}(0, \sigma) = (\det)^{\sigma}$ für alle σ.

5.33 Satz. *Sei $0 \leq s \leq q-1$ und σ durchlaufe ein vollständiges Repräsentantensystem modulo $q-1$. Die G-Moduln $\mathfrak{S}(s, \sigma)$ bilden ein vollständiges Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher G-Moduln.*

Beweis. Die Klassifikation der einfachen $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$-Moduln ist bei Bonnafé [Bon11, Theorem 10.1.8] sowie bei Wack [Wac96, Korollar 3.11] zu finden.

In der Notation von [Bon11] entsprechen unsere Moduln $\mathfrak{S}(s)$ den Untermoduln $L(n)$ (siehe Aussage (c) des zitierten Theorems). Bei [Wac96] entsprechen sie den Moduln $H_{\underline{r}}$ aus der dortigen Definition 3.1.

Der Schritt von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$-Moduln hin zu G-Moduln ist in [Wac96, Abschnitt 3.3] beschrieben und läuft auf die Hinzunahme von Determinantentwists hinaus. □

Die Moduln $\mathfrak{S}(s)$ treten bei der Untersuchung der G-Modulstruktur der symmetrischen Potenzen auf. Es gilt nämlich:

5.34 Proposition. *Sei* $0 \leq n \leq q-1$*. Der* G*-Modul* $\mathfrak{S}(n)$ *ist der eindeutige einfache Untermodul (und damit der Sockel) von* $\mathrm{Sym}^n(V)$*.*

Insbesondere ist der Modul $\mathrm{Sym}^n(V)$ *genau dann einfach, wenn* $0 \leq n \leq p-1$ *oder* $n = p^j - 1$ *mit* $1 \leq j \leq r$ *gilt.*

Beweis. Für die Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ ist dies in [Bon11, Theorem 10.1.8] gezeigt. Daraus folgt unmittelbar die Gültigkeit für die Gruppe G. □

Bemerkung. Wir sehen also: Anders als in Charakteristik 0 sind die symmetrischen Potenzen nur in Spezialfällen einfach.

6 Die Moduln $N[\delta]$

In diesem Kapitel betrachten wir eine allgemeine Klasse von G-Moduln, die verwandt mit den symmetrischen Potenzen ist. Diese Moduln werden später für die Beschreibung der Darstellungstheorie von Moduln Drinfeld'scher Modulformen verwendet. Sämtliche Definitionen und Beweise in diesem Kapitel sind jedoch unabhängig von der Drinfeld-Situation, abgesehen von der Verwendung des Körpers $\mathcal{C}_\infty$.

Im ersten Abschnitt werden die Moduln $N[\delta]$ als induzierte Darstellungen zu bestimmten Charakteren der Borel-Gruppe definiert. Darüber hinaus beschreiben wir einige grundlegende Eigenschaften, die sich aus der Definition als induzierte Darstellungen ergeben.

Die G-Modulstruktur der $N[\delta]$ kann mit Hilfe von [BS00] bestimmt werden. Wir führen dazu im zweiten Abschnitt neue Notation ein, die an die zitierte Arbeit angelehnt ist, aber auch neue Ansätze enthält, etwa im Hinblick auf eine gleichzeitige Beschreibung von Kompositionsfaktoren verschiedener $N[\delta]$.

Im dritten Abschnitt geben wir die Resultate von [BS00] in der für uns relevanten Form wieder und ergänzen einige Aussagen. Die ausführliche Beschreibung, wie die Ergebnisse aus [BS00] auf die betrachtete Situation übertragen werden können, ist in Anhang B zu finden.

Abschließend wird im vierten Abschnitt der später wichtige Spezialfall $N[1]$ betrachtet.

6.1 Realisierung als induzierte Darstellungen

Definition und Basen

Wie üblich sei $q = p^r$ eine Primzahlpotenz und $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$. Wir bezeichnen mit B die Standard-Borel-Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen von G.

6.1 Proposition. *Die Borel-Untergruppe B wird erzeugt von den Matrizen der Form*

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad a, d \in \mathbb{F}_q^\times,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{F}_q^\times.$$

Wir werden uns in diesem Kapitel mit Charakteren, d.h. eindimensionalen Darstellungen, von B beschäftigen. Dabei nutzen wir aus, dass Charaktere von B durch Paare von Charakteren von $\mathbb{F}_q^\times$ gegeben sind (siehe zum Beispiel [Rus95, Abschnitt 1.2.2]).

6.2 Notation. Für $1 \leq i \leq q-1$ sei $\omega_i : \mathbb{F}_q^\times \to \mathcal{C}_\infty^\times$ der Charakter von $\mathbb{F}_q^\times$, der durch

$$\omega_i(x) = x^i \quad \text{für } x \in \mathbb{F}_q^\times$$

gegeben ist. Insbesondere ist ω_{q-1} der Einheitscharakter von $\mathbb{F}_q^\times$.

Wir konstruieren damit Charaktere von B und betrachten die korrespondierenden induzierten Darstellungen von G.

6.3 Notation. Sei $1 \leq \delta \leq q-1$. Wir definieren den Charakter

$$\chi_\delta := (\omega_{q-1}, \omega_\delta) : B \to \mathcal{C}_\infty^\times$$

durch

$$\chi_\delta \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \omega_{q-1}(a)\omega_\delta(d) = d^\delta$$

und bilden damit den G-Modul

$$N[\delta] := \operatorname{Ind}_B^G \chi_\delta.$$

Bemerkung. (i) Wir lassen im Folgenden für den Parameter δ auch beliebige ganzzahlige Werte zu. Gemeint ist dann stets der Modul, der eindeutig durch den Repräsentanten modulo $q-1$ von δ in $\{1, \ldots, q-1\}$ bestimmt ist.

(ii) Für Determinantentwists $N[\delta] \otimes (\det)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, führen wir die Kurzschreibweise $N[\delta, n]$ ein. Der Modul $N[\delta, n]$ hängt dann in beiden Parametern nur von der jeweiligen Klasse modulo $q-1$ ab. Es handelt sich bei diesen Determinantentwists um induzierte Darstellungen zu Charakteren der allgemeinen Form (ω_i, ω_j).

Da Determinantentwists nichts an der grundlegenden Struktur des Moduls ändern (siehe die Bemerkung zu Definition 5.26), genügt es, in diesem Kapitel die Moduln $N[\delta]$ zu untersuchen.

Aus der Dimensionsformel in Proposition 5.11 folgt unmittelbar:

6.4 Proposition. *Für $1 \leq \delta \leq q-1$ gilt*

$$\dim N[\delta] = [G : B] = q + 1.$$

6.5 (Realisierung). Wir verwenden die in Definition 5.10 angegebene Realisierung der induzierten Darstellung, d.h., für $1 \leq \delta \leq q-1$ betrachten wir den Vektorraum

$$N[\delta] = \{f : G \to \mathcal{C}_\infty \mid f(\beta g) = \chi_\delta(\beta) f(g) \text{ für alle } \beta \in B, g \in G\}$$

und versehen diesen mit der Operation von G, die für $\gamma \in G$ gegeben ist durch

$$(\gamma f)(g) = f(g\gamma) \quad \text{für alle } g \in G. \tag{6.1}$$

Eine Funktion $f \in N[\delta]$ ist gemäß Proposition 5.11 vollständig durch ihre Werte auf einem Repräsentantensystem R von $B \backslash G$ bestimmt; umgekehrt existiert zu jeder Vorgabe von Werten auf R genau eine Abbildung in $N[\delta]$.

6.6 Notation. Gemäß der Bruhat-Zerlegung

$$G = B \mathbin{\dot\cup} B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U$$

mit $U = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{F}_q\}$ können wir als Repräsentantensystem

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{pmatrix} \mid v \in \mathbb{F}_q \right\}$$

wählen.

Durch direktes Nachrechnen erhalten wir die folgenden Regeln, die beschreiben, wie das Produkt eines nichttrivialen Repräsentanten mit einem Erzeuger von G so umgeformt werden kann, dass als rechter Faktor erneut ein Repräsentant aus R auftritt.

6.7 Lemma. *Sei $v \in \mathbb{F}_q$. Für die üblichen Erzeuger von G gilt:*

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & va^{-1} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v+t \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{cases} \begin{pmatrix} -v^{-1} & 1 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v^{-1} \end{pmatrix} & v \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & v = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dabei ist a invertierbar, da für die Erzeuger von G nach Generalvoraussetzung $a \in \mathbb{F}_q^\times$ ist.

Wir wollen nun Basen der Moduln $N[\delta]$ angeben und das Transformationsverhalten der Basiselemente unter G untersuchen.

6.8 Notation. Sei $1 \leq \delta \leq q-1$. Für $u \in \mathbb{F}_q$ sei $F_u^{(\delta)} \in N[\delta]$ die Funktion, die auf den Repräsentanten $\sigma \in R$ die Werte

$$F_u^{(\delta)}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & u \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \sigma \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & u \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$$

annimmt. Ferner sei die Funktion $F_\infty^{(\delta)} \in N[\delta]$ für $\sigma \in R$ durch

$$F_\infty^{(\delta)}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \sigma \neq \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$$

bestimmt.

6.9 Lemma. *Für $1 \leq \delta \leq q-1$ bilden die Funktionen $F_\nu^{(\delta)} \in N[\delta]$ mit $\nu \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ eine Basis von $N[\delta]$.*

Beweis. Die betrachteten Abbildungen sind offensichtlich linear unabhängig und bilden somit aus Dimensionsgründen eine Basis von $N[\delta]$. □

6.10 Lemma. *Sei $1 \leq \delta \leq q-1$. Das Transformationsverhalten der Funktionen $F_\nu^{(\delta)} \in N[\delta]$ mit $\nu \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ unter den Erzeugern von G ist wie folgt bestimmt:*

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)} &= a^\delta F_{ua}^{(\delta)}, \quad u \in \mathbb{F}_q, \\
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)} &= F_\infty^{(\delta)}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)} &= F_{u-t}^{(\delta)}, \quad u \in \mathbb{F}_q, \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)} &= F_\infty^{(\delta)}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)} &= u^{-\delta} F_{u^{-1}}^{(\delta)}, \quad u \in \mathbb{F}_q^\times, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) F_0^{(\delta)} &= F_\infty^{(\delta)}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)} &= F_0^{(\delta)}.
\end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen jeweils Gleichheit der beiden angegebenen Funktionen, indem wir ihre Werte auf dem Repräsentantensystem R vergleichen. Die Funktion auf der linken Seite werten wir dabei mit Hilfe von Formel (6.1) und den in Lemma 6.7 gesammelten Regeln zur Umformung der auftretenden Matrizenprodukte aus. Für die Funktion auf der rechten Seite können die Werte auf den Repräsentanten direkt aus der Definition abgelesen werden

Nach Formel (6.1) ist die Funktion $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}$ mit $u \in \mathbb{F}_q$ bestimmt durch

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}\right)(g) = F_u^{(\delta)}\left(g \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) \quad \text{für alle } g \in G.$$

Setzen wir nun für g den Repräsentanten $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in R$ ein, so erhalten wir nach Konstruktion von $F_u^{(\delta)}$

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = F_u^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \chi_\delta\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 0.$$

Für die Repräsentanten der Form $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{smallmatrix}\right)$ mit $v \in \mathbb{F}_q$ ist

$$\begin{aligned}
\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{smallmatrix}\right) &= F_u^{(\delta)}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = F_u^{(\delta)}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & va^{-1} \end{smallmatrix}\right)\right) \\
&= \chi_\delta\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & va^{-1} \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} a^\delta & v = ua \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Funktion $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}$ auf R tatsächlich genau den Abbildungsvorschriften genügt, durch die die Funktion $a^\delta F_{ua}^{(\delta)}$ definiert ist. Somit stimmen beide Funktionen überein.

Analog erhalten wir für die Abbildung $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)}$ die Gleichungen

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \chi_\delta\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1$$

und

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{smallmatrix}\right) = \chi_\delta\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & va^{-1} \end{smallmatrix}\right) = 0$$

für $v \in \mathbb{F}_q$. Diese beschreiben aber gerade die Funktion $F_\infty^{(\delta)}$.

Betrachten wir die Funktion $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}$, $u \in \mathbb{F}_q$, so gilt

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = F_u^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \chi_\delta\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 0$$

beziehungsweise für $v \in \mathbb{F}_q$

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{smallmatrix}\right) = F_u^{(\delta)}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = F_u^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v+t \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} 1 & v = u - t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir sehen also die Übereinstimmung der Funktionen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}$ und $F_{u-t}^{(\delta)}$ für $u \in \mathbb{F}_q$.

Analog haben wir für die Funktion $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)}$ die Werte

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \chi_\delta\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1$$

sowie

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{smallmatrix}\right) = F_\infty^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v+t \end{smallmatrix}\right) = 0$$

für $v \in \mathbb{F}_q$. Nach Definition wird dadurch die Funktion $F_\infty^{(\delta)}$ beschrieben.

Als Nächstes werten wir die Funktion $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}$ mit $u \in \mathbb{F}_q^\times$ auf R aus. Es gilt

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = F_u^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$$

und

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = F_u^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 0.$$

Für Repräsentanten $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{smallmatrix}\right)$ mit $v \in \mathbb{F}_q^\times$ erhalten wir schließlich

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{smallmatrix}\right) = F_u^{(\delta)}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \chi_\delta\left(\begin{smallmatrix} -v^{-1} & 1 \\ 0 & v \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v^{-1} \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} v^\delta & v = u^{-1} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)} = u^{-\delta} F_{u^{-1}}^{(\delta)}$ für $u \in \mathbb{F}_q^\times$.

Für die Funktion $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) F_0^{(\delta)}$ haben wir

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) F_0^{(\delta)}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = F_0^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 1$$

und

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) F_0^{(\delta)}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = F_0^{(\delta)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 0.$$

Für $v \in \mathbb{F}_q^\times$ ist ferner

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) F_0^{(\delta)}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v \end{smallmatrix}\right) = \chi_\delta\left(\begin{smallmatrix} -v^{-1} & 1 \\ 0 & v \end{smallmatrix}\right) F_0^{(\delta)}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v^{-1} \end{smallmatrix}\right)\right) = 0.$$

Wir sehen also, dass tatsächlich $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) F_0^{(\delta)} = F_\infty^{(\delta)}$ gilt. Da die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ selbstinvers ist, ist dies äquivalent zu $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)} = F_0^{(\delta)}$. □

Bemerkung. Die Invarianz der Funktion $F_\infty^{(\delta)}$ unter den Erzeugern der Typen $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sowie $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ lässt sich auch dadurch begründen, dass es sich bei dieser Funktion um das Bild des Charakters χ_δ unter der Einbettung $\chi_\delta \hookrightarrow \operatorname{Ind}_B^G \chi_\delta$ aus Proposition 5.11 handelt. Nach Definition gilt nämlich

$$F_\infty^{(\delta)}(g) = \begin{cases} \chi_\delta(g) & g \in B \\ 0 & g \in G \setminus B. \end{cases}$$

Wir konstruieren eine zweite Basis aus der bisher betrachteten:

6.11 Notation. Sei $1 \leq \delta \leq q-1$. Wir setzen für $0 \leq i \leq q-1$

$$f_i^{(\delta)} := \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^i F_u^{(\delta)}$$

mit der Konvention $0^0 = 1$. Ferner definieren wir

$$\begin{aligned} f_\infty^{(\delta)} &:= \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^\delta F_u^{(\delta)} + F_\infty^{(\delta)} \\ &= f_\delta^{(\delta)} + F_\infty^{(\delta)}. \end{aligned}$$

Ist $\delta = 1$, so schreiben wir auch $f_q^{(1)}$ für $f_\infty^{(1)}$.

Bemerkung. Die Konstruktion folgt demselben Muster, nach dem die modifizierten Eisenstein-Reihen von den gewöhnlichen hergeleitet wurden. Wir werden diesen Zusammenhang in Kapitel 7 wieder aufgreifen.

6.12 Lemma. *Sei $1 \leq \delta \leq q-1$. Dann gilt: Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} &f_i^{(\delta)}, \quad 0 \leq i \leq q-1, \\ &f_\infty^{(\delta)} \end{aligned}$$

bilden eine Basis von $N[\delta]$.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Proposition 2.9. □

Wir wollen auch das Transformationsverhalten dieser zweiten Basis unter G beschreiben.

6.13 Lemma. *Sei $1 \leq \delta \leq q-1$. Betrachten wir die üblichen Erzeuger von G, so gilt:*

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_i^{(\delta)} &= a^{\delta-i} f_i^{(\delta)}, \quad 0 \leq i \leq q-1, \\
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_\infty^{(\delta)} &= f_\infty^{(\delta)}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_i^{(\delta)} &= \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} t^{i-j} f_j^{(\delta)}, \quad 0 \leq i \leq q-1, \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_\infty^{(\delta)} &= \sum_{j=0}^{\delta-1} \tbinom{\delta}{j} t^{\delta-j} f_j^{(\delta)} + f_\infty^{(\delta)}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) f_i^{(\delta)} &= f_{\delta-i}^{(\delta)}, \quad 1 \leq i \leq \delta-1, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) f_i^{(\delta)} &= f_{q-1+\delta-i}^{(\delta)}, \quad \delta \leq i \leq q-1, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) f_0^{(\delta)} &= f_\infty^{(\delta)}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) f_\infty^{(\delta)} &= f_0^{(\delta)}.
\end{aligned}
$$

Beweis. Gemäß ihrer Definition läßt sich das Transformationsverhalten der Funktionen $f_i^{(\delta)}$ beziehungsweise $f_\infty^{(\delta)}$ auf das in Lemma 6.10 bestimmte Transformationsverhalten der Funktionen $F_\nu^{(\delta)}$ mit $\nu \in \mathbb{F}_q^\times \cup \{\infty\}$ zurückführen.

So erhalten wir für $0 \leq i \leq q-1$

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_i^{(\delta)} &= \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^i F_u^{(\delta)} = \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^i \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_u^{(\delta)} \\
&= \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^i a^\delta F_{ua}^{(\delta)} = \sum_{u \in \mathbb{F}_q} a^{\delta-i} (ua)^i F_{ua}^{(\delta)} \\
&= a^{\delta-i} f_i^{(\delta)}.
\end{aligned}
$$

Da nach Konstruktion

$$
f_\infty^{(\delta)} = f_\delta^{(\delta)} + F_\infty^{(\delta)}
$$

ist, sehen wir damit auch, dass

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_\infty^{(\delta)} &= \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_\delta^{(\delta)} + \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)} \\
&= f_\delta^{(\delta)} + F_\infty^{(\delta)} = f_\infty^{(\delta)}
\end{aligned}
$$

gilt. Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_i^{(\delta)} &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^i F_u^{(\delta)} = \sum_{u \in \mathbb{F}_q} u^i F_{u-t}^{(\delta)} \\
&= \sum_{v := u-t \in \mathbb{F}_q} (v+t)^i F_v^{(\delta)} = \sum_{v \in \mathbb{F}_q} \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} t^{i-j} v^j F_v^{(\delta)} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} t^{i-j} \sum_{v \in \mathbb{F}_q} v^j F_v^{(\delta)} = \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} t^{i-j} f_j^{(\delta)}.
\end{aligned}$$

Wie oben liefert dies

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_\infty^{(\delta)} &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_\delta^{(\delta)} + \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F_\infty^{(\delta)} \\
&= \sum_{j=0}^{\delta} \tbinom{\delta}{j} t^{\delta-j} f_j^{(\delta)} + F_\infty^{(\delta)} \\
&= \sum_{j=0}^{\delta-1} \tbinom{\delta}{j} t^{\delta-j} f_j^{(\delta)} + f_\delta^{(\delta)} + F_\infty^{(\delta)} \\
&= \sum_{j=0}^{\delta-1} \tbinom{\delta}{j} t^{\delta-j} f_j^{(\delta)} + f_\infty^{(\delta)}.
\end{aligned}$$

Für $i \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) f_i^{(\delta)} &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \sum_{u \in \mathbb{F}_q^\times} u^i F_u^{(\delta)} \\
&= \sum_{u \in \mathbb{F}_q^\times} u^i u^{-\delta} F_{u^{-1}}^{(\delta)} = \sum_{v := u^{-1} \in \mathbb{F}_q^\times} v^{\delta-i} F_v^{(k)} \\
&= \begin{cases} f_{\delta-i}^{(\delta)} & 1 \leq i \leq \delta - 1 \\ f_{q-1+\delta-i}^{(\delta)} & \delta \leq i \leq q-1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Im Fall $i = 0$ ist schließlich

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) f_0^{(\delta)} &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) (f_{q-1}^{(\delta)} + F_0^{(\delta)}) \\
&= f_\delta^{(\delta)} + F_\infty^{(\delta)} = f_\infty^{(\delta)}.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich auch die verbleibende Aussage, da die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ selbstinvers ist. $\square$

Bemerkung. Wir können die Fallunterscheidung bei der Operation des Elements $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ durch die Formulierung

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) f_i^{(\delta)} = f_{[\delta-i]}^{(\delta)}, \quad 1 \leq i \leq q-1,$$

vermeiden.

Vergleichen wir die Formeln aus Lemma 6.13 mit Proposition 5.31, so sehen wir direkt den folgenden Zusammenhang zwischen symmetrischen Potenzen und den Moduln $N[\delta]$, den wir in Abschnitt 6.3 wieder aufgreifen werden.

6.14 Korollar. *Für $1 \leq \delta \leq q-1$ existiert eine Einbettung von G-Moduln*

$$\mathrm{Sym}^{\delta}(V) \hookrightarrow N[\delta],$$

die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} X^{\delta-i}Y^{i} &\mapsto f_i^{(\delta)}, \quad 0 \leq i \leq \delta-1, \\ Y^{\delta} &\mapsto f_{\infty}^{(\delta)} \end{aligned}$$

und lineare Fortsetzung.

Frobenius-Reziprozität

Für $1 \leq \delta, \delta' \leq q-1$ können wir die G-Isomorphismen zwischen den Moduln $N[\delta]$ und $N[\delta']$ mit Hilfe der Frobenius-Reziprozität beschreiben. In dieser Situation liefert Satz 5.12 nämlich einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_G(N[\delta], N[\delta']) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_B(\chi_\delta, \mathrm{Res}_B^G N[\delta']).$$

Dabei bezeichnet wie zuvor χ_δ den Charakter $(\omega_{q-1}, \omega_\delta)$ von B und Res_B^G die Restriktion einer Darstellung von G auf B.

Um die G-Homomorphismen zwischen $N[\delta]$ und $N[\delta']$ zu beschreiben, genügt es also, die B-Homomorphismen zwischen χ_δ und $\mathrm{Res}_B^G N[\delta']$ anzugeben. Dies gestaltet sich durch die Eindimensionalität von χ_δ besonders leicht. Das Bild von χ_δ unter einem nichttrivialen B-Homomorphismus ist ein eindimensionaler Untermodul von $\mathrm{Res}_B^G N[\delta']$ zu demselben Charakter.

Wir bestimmen daher für $1 \leq \delta \leq q-1$ zunächst die Eigenvektoren der Restriktionen $\mathrm{Res}_B^G N[\delta]$ und die zugehörigen Charaktere.

6.15 Lemma. *Sei $1 \leq \delta \leq q-1$. Der B-Modul $\mathrm{Res}_B^G N[\delta]$ enthält genau die beiden Eigenräume erzeugt von den Eigenvektoren*

$$\begin{aligned} f_0^{(\delta)} &\textit{ zum Charakter } \widetilde{\chi}_\delta := (\omega_\delta, \omega_{q-1}), \\ F_\infty^{(\delta)} = f_\infty^{(\delta)} - f_\delta^{(\delta)} &\textit{ zum Charakter } \chi_\delta = (\omega_{q-1}, \omega_\delta). \end{aligned}$$

Für $\delta = q-1$ handelt es sich um zwei Eigenvektoren zu demselben Charakter, in allen anderen Fällen sind die Charaktere verschieden.

Beweis. Wir können ein beliebiges Element $f \in \mathrm{Res}_B^G N[\delta]$ in eindeutiger Weise als Linearkombination

$$f = \sum_{b=0}^{q-1} \lambda_b f_b^{(\delta)} + \lambda_\infty f_\infty^{(\delta)}$$

schreiben mit Koeffizienten $\lambda_\infty, \lambda_b \in \mathcal{C}_\infty$, $0 \leq b \leq q-1$.

Wir wissen, dass Charaktere von B auf Matrizen des Typs $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ trivial operieren und durch ihre Werte auf den Diagonalmatrizen vollständig bestimmt sind (siehe [Rus95, Abschnitt 1.2.2]).

Setzen wir nun voraus, dass f ein Eigenvektor ist, so muss f daher unter den Matrizen vom Typ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ invariant sein, d.h., es gilt

$$f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f = \sum_{b=0}^{q-1} \lambda_b \sum_{j=0}^{b} \tbinom{b}{j} t^{b-j} f_j^{(\delta)} + \lambda_\infty \left(\sum_{j=0}^{\delta-1} \tbinom{\delta}{j} t^{\delta-j} f_j^{(\delta)} + f_\infty^{(\delta)} \right).$$

Wir nutzen aus, dass $\binom{b}{j} = 0$ ist für $j > b$, und erhalten durch Änderung der Summationsreihenfolge die Gleichung

$$f = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{b=j}^{q-1} \tbinom{b}{j} \lambda_b t^{b-j} f_j^{(\delta)} + \sum_{j=0}^{\delta-1} \tbinom{\delta}{j} \lambda_\infty t^{\delta-j} f_j^{(\delta)} + \lambda_\infty f_\infty^{(\delta)}.$$

Der Vergleich der Koeffizienten des Basiselements $f_0^{(\delta)}$ auf beiden Seiten dieser Gleichung liefert die Bedingung

$$\lambda_0 = \sum_{b=0}^{q-1} \lambda_b t^b + \lambda_\infty t^\delta \quad \text{für alle } t \in \mathbb{F}_q^\times.$$

Wegen $\delta \geq 1$ ist dies äquivalent dazu, dass

$$t \left(\sum_{b=1}^{q-1} \lambda_b t^{b-1} + \lambda_\infty t^{\delta-1} \right) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{F}_q^\times$$

gilt. Das bedeutet aber, dass das Polynom

$$\sum_{b=0}^{q-2} \lambda_{b+1} x^b + \lambda_\infty x^{\delta-1}$$

des Grades $\leq q-2$ auf ganz $\mathbb{F}_q^\times$ verschwindet. Es müssen also bereits alle Koeffizienten dieses Polynoms Null sein:

$$\begin{aligned} &\lambda_\delta + \lambda_\infty = 0, \\ &\lambda_b = 0, \qquad 1 \leq b \leq q-1,\, b \neq \delta. \end{aligned}$$

Wir erhalten damit für einen Eigenvektor f von $\mathrm{Res}_B^G N[\delta]$ als notwendige Bedingung, dass f von der Form

$$f = \lambda f_0^{(\delta)} + \mu(f_\infty^{(\delta)} - f_\delta^{(\delta)})$$

mit $\lambda, \mu \in \mathcal{C}_\infty$ ist. Umgekehrt wissen wir bereits aus Lemma 6.10 und Lemma 6.13, dass die Funktionen $f_0^{(\delta)}$ beziehungsweise $F_\infty^{(\delta)} = f_\infty^{(\delta)} - f_\delta^{(\delta)}$ invariant unter Matrizen des Typs $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sind.

Für eine Diagonalmatrix $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in B$ gilt

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) f_0^{(\delta)} &= \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) f_0^{(\delta)} \\
&= \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) f_\infty^{(\delta)} \\
&= \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) f_\infty^{(\delta)} \\
&= \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_0^{(\delta)} \\
&= a^\delta f_0^{(\delta)},
\end{aligned}$$

da wir eine linke Operation betrachten. Durch eine analoge Rechnung erhalten wir

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)(f_\infty^{(\delta)} - f_\delta^{(\delta)}) = d^\delta (f_\infty^{(\delta)} - f_\delta^{(\delta)}).$$

Wir sehen damit, dass es sich bei diesen Elementen um Eigenvektoren zu den angegebenen Charakteren handelt und es bis auf Skalierung keine weiteren Eigenvektoren geben kann. Dass die Charaktere genau dann übereinstimmen, wenn $\delta = q-1$ gilt, ist offensichtlich. □

Wir sind nun in der Lage, zu beschreiben, wann $\mathrm{Res}_B^G N[\delta']$ Eigenvektoren zum Charakter χ_δ enthält. Für die G-Homomorphismen zwischen den betrachteten Moduln ergibt sich damit direkt:

6.16 Proposition. *Für $1 \leq \delta, \delta' \leq q-1$ gilt*

$$\dim \mathrm{Hom}_G(N[\delta], N[\delta']) = \begin{cases} 1 & 1 \leq \delta = \delta' < q-1 \\ 2 & \delta = \delta' = q-1 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung. Wir werden in Proposition 6.43 sehen, dass $N[q-1]$ die direkte Summe zweier nicht-isomorpher einfacher G-Moduln ist.

6.2 Parametrisierung durch Typen

Bevor wir die Beschreibung der Moduln $N[\delta]$ fortsetzen, führen wir zusätzliche Notationen ein. Diese sind motiviert durch die in [BS00] angegebene Parametrisierung von Untermoduln beziehungsweise Kompositionsfaktoren der dort untersuchten Moduln im zweidimensionalen Fall (d.h. für $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$). Bei dem vorliegenden Abschnitt handelt es sich somit um eine Fortführung beziehungsweise Ergänzung von Konzepten aus [BS00].

Da wir in Anhang B auf die hier eingeführten Notationen zurückgreifen, halten wir an dieser Stelle fest, dass alle Aussagen im vorliegenden Abschnitt elementar bewiesen sind, ohne auf darstellungstheoretische Resultate aus [BS00] zurückzugreifen. Für einen Vergleich mit der Notation aus [BS00] siehe Abschnitt B.1 im Anhang.

Sei weiterhin eine Primzahlpotenz $q = p^r$ gegeben. Unser Ausgangspunkt ist die folgende Menge, die in [BS00, Theorem C] betrachtet wird:

6.17 Notation. Sei $1 \leq \delta \leq q-1$ mit p-adischer Entwicklung $\delta = \sum_{i=0}^{r-1} \delta_i p^i$. Die Menge $\mathcal{P}[\delta]$ der *Parameter* zu δ besteht aus den Tupeln $\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_{r-1}) \in \{0,1\}^r$ mit

$$0 \leq \delta_j + t_{j+1}p - t_j \leq 2(p-1) \quad \text{für } 0 \leq j \leq r-1,$$

wobei wir $t_r = t_0$ setzen.

Auf $\mathcal{P}[\delta]$ ist eine partielle Ordnung definiert durch $(t'_0, \ldots, t'_{r-1}) \leq (t_0, \ldots, t_{r-1})$ genau dann, wenn $t'_j \leq t_j$ für alle j gilt.

Bemerkung. Anders als in der entsprechenden Definition in [BS00] ist hier zusätzlich der Fall $\delta = q-1$ erlaubt.

Wir sehen direkt:

6.18 Lemma. *Sei* $1 \leq \delta \leq q-1$. *Die Menge* $\mathcal{P}[\delta]$ *enthält das eindeutige minimale Element* $(0, \ldots, 0)$ *sowie das eindeutige maximale Element* $(1, \ldots, 1)$.

Dem Vorgehen in [BS00, Theorem C] entsprechend definieren wir zu jedem Parameter ein weiteres Tupel auf folgende Weise:

6.19 Notation/Lemma. Wir ordnen für $1 \leq \delta \leq q-1$ einem Parameter $\mathbf{t} \in \mathcal{P}[\delta]$ ein Tupel $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}) \in \{0, \ldots, 2(p-1)\}^r$ zu, indem wir

$$\alpha_j = \delta_j + t_{j+1}p - t_j \quad \text{für } 0 \leq j \leq r-1 \tag{6.2}$$

setzen (mit $t_r = t_0$). Durch diese Vorschrift wird eine injektive Abbildung

$$\mathrm{typ}_\delta : \mathcal{P}[\delta] \to \mathcal{T} := \{0, \ldots, 2(p-1)\}^r \setminus \{(0, \ldots, 0)\},$$

die *Typ-Abbildung*, definiert. Wir schreiben

$$\mathcal{T}[\delta] := \mathrm{typ}_\delta\left(\mathcal{P}[\delta]\right) \subseteq \mathcal{T}$$

und nennen $\mathcal{T}[\delta]$ die Menge der *Typen* zu δ.

Beweis. Unter der Vorschrift aus Formel (6.2) wird keinem Parameter das Nulltupel zugeordnet. Offenbar kann nämlich nur dann $\alpha_j = 0$ für alle j gelten, wenn auch alle t_j Null sind. Dann müssten aber ebenfalls alle $\delta_j = 0$ sein im Widerspruch zu $\delta \geq 1$.

Die Abbildung typ_δ ist damit wohldefiniert und offensichtlich injektiv. □

Bemerkung. (i) Typen treten in [BS00] zuerst bei der Untersuchung bestimmter Monome auf (siehe [BS00, Abschnitt 3.1]). Wir werden diese Interpretation im Folgenden jedoch nicht benötigen. Für uns sind Typen deswegen interessant, da sie es erlauben werden, für alle $1 \leq \delta \leq q-1$ eine gemeinsame Parametrisierung der Kompositionsfaktoren der $N[\delta]$ zu formulieren.

(ii) Die Korrespondenz von Parametern und Typen und ihre Bedeutung für die in diesem Kapitel betrachteten Moduln ist bereits in [BS00, Theorem C] angegeben.

Neu sind an dieser Stelle die Bezeichnungen typ_δ, $\mathcal{T}[\delta]$ sowie $\mathcal{T}$ und auf diesen Konzepten aufbauende Betrachtungen. Darunter fällt insbesondere die spätere

Definition der Parametrisierungsfunktionen e und η (siehe Notation 6.30) sowie die daran anschließende Untersuchung ihrer Eigenschaften. Ebenso handelt es sich bei der gleichzeitigen Betrachtung von Typen zu verschiedenen δ um einen im Vergleich zum Vorgehen in [BS00] neuen Ansatz.

6.20 Notation. Wie bei den Moduln $N[\delta]$ selbst lassen wir bei späteren Anwendungen auch bei den Mengen $\mathcal{P}[\delta]$ und $\mathcal{T}[\delta]$ ganzzahlige Werte für δ zu. Gemeint ist damit stets das zum eindeutigen Repräsentanten modulo $q-1$ in $\{1,\dots,q-1\}$ bestimmte Objekt.

Bemerkung. Die Identifikation $t_r = t_0$ erlaubt es, einen Parameter $\mathbf{t} \in \mathcal{P}[\delta]$ als Folge $(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ aufzufassen, wobei $t_j = t_{j'}$ gilt, wenn $j \equiv j' \bmod r$ ist. Da wir somit auch die Formel (6.2) zur Konstruktion des zugehörigen Typs für $j \in \mathbb{Z}$ formulieren können, lassen sich die Typen ebenfalls als Folgen $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ mit $\alpha_j = \alpha_{j'}$ für $j \equiv j' \bmod r$ interpretieren.

Wir werden Parameter und Typen im Folgenden stets als r-Tupel schreiben, machen aber Gebrauch von der Interpretation als Folgen mit der beschriebenen zyklischen Struktur. Beispielsweise fassen wir t_{r-1} als linken Nachbarn von t_0 auf.

Vor diesem Hintergrund ist die folgende Notation wohldefiniert:

6.21 Notation/Lemma. Ist ein Tupel $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T} \setminus \{(p-1,\dots,p-1)\}$ gegeben, so bezeichnen wir für einen Index $0 \le j \le r-1$ den nächsten von $p-1$ verschiedenen Eintrag in $\boldsymbol{\alpha}$, der links von α_j steht, mit $\alpha_{l(j)}$. Dabei durchlaufen wir das Tupel $\boldsymbol{\alpha}$ unter Umständen zyklisch im oben beschriebenen Sinne.

Diese Vorschrift induziert eine von $\boldsymbol{\alpha}$ abhängige Abbildung

$$l = l_{\boldsymbol{\alpha}} : \{0,\dots,r-1\} \to \{0,\dots,r-1\}.$$

Für $0 \le j \le r-1$ gilt

$$l(j+1) = \begin{cases} l(j) & \alpha_j = p-1 \\ j & \alpha_j \neq p-1. \end{cases}$$

Ist α_j der einzige von $p-1$ verschiedene Eintrag von $\boldsymbol{\alpha}$, so gilt $l(j) = j$.

6.22 Beispiel. Für $r = 7$ betrachten wir

$$\boldsymbol{\alpha} = (p-1, p, 0, p-1, p-1, p, p-1).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &l(0) = l(1) = 5, \\ &l(2) = 1, \\ &l(3) = l(4) = l(5) = 2, \\ &l(6) = 5. \end{aligned}$$

Aus den Einträgen eines Typs in $\mathcal{T}[\delta]$ lässt sich der Wert von δ auf folgende Weise bestimmen:

6.23 Lemma. *Sei* $1 \le \delta \le q-1$ *und sei* $\mathbf{t} \in \mathcal{P}[\delta]$. *Für* $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{typ}_\delta(\mathbf{t}) \in \mathcal{T}$ *gilt*

$$\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i p^i = \delta + t_0(q-1).$$

Beweis. Wir verwenden die Beschreibung der α_j aus Gleichung (6.2) und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j p^j &= \sum_{j=0}^{r-1} (\delta_j + t_{j+1}p - t_j)p^j \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} \delta_j p^j + \sum_{j=0}^{r-1} t_{j+1}p^{j+1} - \sum_{j=0}^{r-1} t_j p^j \\ &= \delta + t_r p^r - t_0 = \delta + t_0(q-1)\end{aligned}$$

unter Ausnutzung von $t_r = t_0$. □

Bemerkung. Der Zusammenhang zwischen δ und der Summe über die α_j ist bereits in [BS00] beschrieben (siehe dort Formeln (64) und (65)). Vergleiche dazu auch den getwisteten Grad eines Basismonoms aus [BS00, Formel (63)], der dort jedoch nur für Typen zu festem δ betrachtet wird.

Der folgenden Definition liegt somit ein bekannter Sachverhalt zugrunde, die Relevanz der konkreten Variante ergibt sich jedoch erst durch die gleichzeitige Betrachtung von Typen zu verschiedenen δ.

6.24 Notation. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathfrak{d} : \mathcal{T} &\to \{1, \ldots, q-1\} \\ \boldsymbol{\alpha} &\mapsto \left[\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i p^i\right].\end{aligned}$$

Dabei bezeichne „$[\,\cdot\,]$“ wie üblich den Repräsentanten modulo $q-1$ in $\{1, \ldots, q-1\}$.

Nach Lemma 6.23 wissen wir:

6.25 Lemma. *Sei* $1 \le \delta \le q-1$ *und* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}[\delta]$. *Dann gilt* $\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha}) = \delta$.

6.26 Korollar. *Die Mengen* $\mathcal{T}[\delta]$ *mit* $1 \le \delta \le q-1$ *sind paarweise disjunkt.*

Um zu zeigen, dass umgekehrt jedes Tupel $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}$ ein Element von $\mathcal{T}[\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha})]$ ist, beschreiben wir einen Algorithmus, mit dessen Hilfe wir ein Urbild von $\boldsymbol{\alpha}$ unter der Abbildung $\mathrm{typ}_{\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha})}$ konstruieren können. Aufgrund der Injektivität von $\mathrm{typ}_{\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha})}$ ist dieses Urbild bereits eindeutig.

6.27 Lemma. *Sei $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}$. Dann ist $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}[\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha})]$.*

Genauer können wir die p-adischen Koeffizienten $\delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})}$, $0 \leq j \leq r-1$, von $\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha})$ und das Urbild $\mathbf{t}^{(\boldsymbol{\alpha})} = (t_0^{(\boldsymbol{\alpha})}, \ldots, t_{r-1}^{(\boldsymbol{\alpha})}) \in \mathcal{P}[\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha})]$ von $\boldsymbol{\alpha}$ unter der Abbildung $\mathrm{typ}_{\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha})}$ mit folgendem Verfahren berechnen:

- *Ist $\boldsymbol{\alpha} = (p-1, \ldots, p-1)$, so setze $t_j^{(\boldsymbol{\alpha})} = 0$ und $\delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})} = p-1$ für alle $0 \leq j \leq r-1$.*
- *Betrachte andernfalls für jeden Index $0 \leq j \leq r-1$ im Tupel $\boldsymbol{\alpha}$ den Eintrag α_j und seinen nächsten von $p-1$ verschiedenen linken Nachbarn $\alpha_{l(j)}$ (siehe Notation/Lemma 6.21). Je nachdem, ob diese Einträge größer, kleiner oder gleich $p-1$ sind, werden $t_j^{(\boldsymbol{\alpha})}$ und $\delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})}$ wie folgt bestimmt:*

$\alpha_{l(j)}$	α_j	$t_j^{(\boldsymbol{\alpha})}$	$\delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})}$
$<$	$=$	0	$p-1$
	$<$	0	α_j
	$>$	0	$\alpha_j - p$
$>$	$=$	1	0
	$<$	1	$\alpha_j + 1$
	$>$	1	$\alpha_j - (p-1)$

Beweis. Im Fall $\boldsymbol{\alpha} = (p-1, \ldots, p-1)$ ist die Behauptung offensichtlich: Es ist $\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha}) = q-1 = \sum_{j=0}^{r-1}(p-1)p^j$ und nach Definition der Typ-Abbildung sehen wir direkt, dass

$$\mathrm{typ}_{q-1}\left((0, \ldots, 0)\right) = (p-1, \ldots, p-1)$$

ist.

Im Rest des Beweises sei also $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}$ von $(p-1, \ldots, p-1)$ verschieden. Entscheidend für die Korrektheit des angegebenen Verfahrens ist, nachzuweisen, dass die konstruierten $\delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})}$ und $t_j^{(\boldsymbol{\alpha})}$ zusammen mit den gegebenen α_j das System von Bedingungen (6.2) erfüllen, dass also für $0 \leq j \leq r-1$ gilt

$$\alpha_j = \delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})} + t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})} p - t_j^{(\boldsymbol{\alpha})},$$

wobei wieder $t_r^{(\boldsymbol{\alpha})} = t_0^{(\boldsymbol{\alpha})}$ ist.

Wir beobachten dazu in obiger Tabelle, dass der Wert von $t_j^{(\boldsymbol{\alpha})}$ nur vom „linken" Eintrag $\alpha_{l(j)}$ und nicht von α_j abhängt. Mit Hilfe der Beschreibung von $l(j+1)$ in Notation/Lemma 6.21 können wir in jedem der Fälle also zusätzlich $t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})}$ bestimmen.

Für einen Index $0 \leq j \leq r-1$ liefert das Verfahren:

(i) Ist $\alpha_{l(j)} < p-1$ und $\alpha_j = p-1$, so gilt $l(j+1) = l(j)$, d.h., es ist $t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})} = 0$. Setzen wir die übrigen im Verfahren bestimmten Werte ein, erhalten wir zusammen

$$\delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})} + t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})} p - t_j^{(\boldsymbol{\alpha})} = p-1+0\cdot p - 0 = p-1 = \alpha_j.$$

(ii) Ist $\alpha_{l(j)} < p-1$ und $\alpha_j < p-1$, so ist $l(j+1) = j$ und folglich wiederum $t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})} = 0$. In diesem Fall erhalten wir

$$\delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})} + t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})} p - t_j^{(\boldsymbol{\alpha})} = \alpha_j + 0 \cdot p - 0 = \alpha_j.$$

(iii) Ist $\alpha_{l(j)} < p-1$ und $\alpha_j > p-1$, so ist $l(j+1) = j$ und es gilt $t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})} = 1$. Wieder ist damit

$$\delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})} + t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})} p - t_j^{(\boldsymbol{\alpha})} = \alpha_j - p + p - 0 = \alpha_j.$$

(iv) Ist $\alpha_{l(j)} > p-1$ und $\alpha_j = p-1$, so ist $l(j+1) = l(j)$ und somit $t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})} = 1$. Dann liefert das angegebene Verfahren

$$\delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})} + t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})} p - t_j^{(\boldsymbol{\alpha})} = 0 + p - 1 = \alpha_j.$$

(v) Ist $\alpha_{l(j)} > p-1$ und $\alpha_j < p-1$, so ist $l(j+1) = j$ und $t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})} = 0$. Folglich gilt

$$\delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})} + t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})} p - t_j^{(\boldsymbol{\alpha})} = \alpha_j + 1 + 0 \cdot p - 1 = \alpha_j.$$

(vi) Ist $\alpha_{l(j)} > p-1$ und $\alpha_j > p-1$, so ist $l(j+1) = l(j)$ und $t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})} = 1$. Dann ist

$$\delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})} + t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})} p - t_j^{(\boldsymbol{\alpha})} = \alpha_j - (p-1) + p - 1 = \alpha_j.$$

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir noch zeigen, dass nicht alle $\delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})}$ Null sind (nach Konstruktion gilt offenbar $0 \le \delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})} \le p-1$ für alle j). Angenommen, dies sei doch der Fall, so gilt nach obiger Überlegung

$$\alpha_j = t_{j+1}^{(\boldsymbol{\alpha})} p - t_j^{(\boldsymbol{\alpha})} \quad \text{für alle } 0 \le j \le r-1.$$

Wegen $\alpha_j \ge 0$ für alle j ist dabei nur $\mathbf{t}^{(\boldsymbol{\alpha})} = (0, \ldots, 0)$ oder $\mathbf{t}^{(\boldsymbol{\alpha})} = (1, \ldots, 1)$ möglich. Im ersten Fall wäre $\boldsymbol{\alpha} = (0, \ldots, 0)$, was aber kein Element von $\mathcal{T}$ ist. Im zweiten Fall wäre $\boldsymbol{\alpha} = (p-1, \ldots, p-1)$, was wir für die aktuelle Betrachtung aber ausgeschlossen haben. Damit ist die Annahme widerlegt.

Wir haben damit gezeigt: Setzen wir $\delta^{(\boldsymbol{\alpha})} := \sum_{j=0}^{r-1} \delta_j^{(\boldsymbol{\alpha})} p^j$, so ist $1 \le \delta^{(\boldsymbol{\alpha})} \le q-1$ und für den Parameter $\mathbf{t}^{(\boldsymbol{\alpha})} \in \mathcal{P}[\delta^{(\boldsymbol{\alpha})}]$ gilt

$$\operatorname{typ}_{\delta^{(\boldsymbol{\alpha})}}(\mathbf{t}^{(\boldsymbol{\alpha})}) = \boldsymbol{\alpha}.$$

Nach Lemma 6.25 ist dann aber $\delta^{(\boldsymbol{\alpha})} = \mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha})$ und die Behauptung ist gezeigt. □

Bemerkung. (i) Die Idee hinter dem Verfahren ist, ein von $(p-1, \ldots, p-1)$ verschiedenes Tupel $\boldsymbol{\alpha}$ durch Teilstücke $(\alpha_m, \ldots, \alpha_{m+n})$ zu überdecken, bei denen genau die Start- und Endeinträge von $p-1$ verschieden sind. Dabei verwenden wir wieder die zyklische Struktur der Tupel. Für das Tupel aus Beispiel 6.22 erhalten wir so die Segmente

$$(\alpha_1, \alpha_2),\ (\alpha_2, \dots, \alpha_5),\ (\alpha_5, \alpha_6, \alpha_0, \alpha_1).$$

Auf einem Segment der beschriebenen Form liefern die Gleichungen (6.2) notwendige Bedingungen an die Einträge $t_m, \dots, t_{m+n}$ und $\delta_{m+1}, \dots, \delta_{m+n}$ der gesuchten Lösung.

Die Einträge t_i zu den Randpunkten der Segmente sind dabei überbestimmt aber widerspruchsfrei, so dass mit Hilfe der gefundenen Bedingungen tatsächlich eine Lösung (wie im obigen Verfahren angegeben) konstruiert werden kann.

(ii) Die Invertierbarkeit der Typ-Abbildung ist, unter Berücksichtigung der geänderten Notationen, bereits in [BS00, Abschnitt 9.1] zu finden, allerdings ohne explizite Konstruktionsvorschriften für die Urbilder sowie ohne die gleichzeitige Bestimmung der p-adischen Koeffizienten von $\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha})$.

Wir können nun die Mengen $\mathcal{T}[\delta]$ der Typen zu δ alternativ charakterisieren, ohne sie als Bilder der Typ-Abbildungen typ_δ zu beschreiben.

6.28 Lemma. *Sei* $1 \leq \delta \leq q-1$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[\delta] &= \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T} \mid \mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha}) = \delta\} \\ &= \left\{ \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T} \mid \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i p^i = \delta \ \textit{oder} \ \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i p^i = \delta + q - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Beweis. Die erste Gleichheit ist unmittelbare Konsequenz von Lemma 6.25 und Lemma 6.27, die zweite folgt daraus mit Lemma 6.23. □

Für die Menge $\mathcal{T}$ erhalten wir die folgende Beschreibung:

6.29 Proposition. *Die Menge $\mathcal{T}$ ist die disjunkte Vereinigung der Mengen $\mathcal{T}[\delta]$ mit $1 \leq \delta \leq q-1$.*

Beweis. Wir wissen bereits aus Korollar 6.26, dass die Teilmengen $\mathcal{T}[\delta] \subseteq \mathcal{T}$ paarweise disjunkt sind. Nach Lemma 6.27 ist ihre Vereinigung aber gleich $\mathcal{T}$. □

Wir bezeichnen $\mathcal{T}$ folglich auch als *Menge der Typen*. Sie fasst Informationen zu den verschiedenen δ zusammen. Dabei haben wir gesehen, dass aus einem Typ $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}$ ohne zusätzliche Information das zugehörige δ rekonstruiert werden kann. Bei den Parametern $\mathbf{t} \in \mathcal{P}[\delta]$ ist dies nicht der Fall, da wir beispielsweise in Lemma 6.18 festgehalten haben, dass jede Menge $\mathcal{P}[\delta]$ die Parameter $(0, \dots, 0)$ und $(1, \dots, 1)$ enthält. Betrachten wir also gleichzeitig verschiedene δ, so ist es sinnvoll, Typen anstelle der Parameter zu verwenden.

Wir definieren nun auf der Menge $\mathcal{T}$ zwei neue Funktionen, mit deren Hilfe wir später die Kompositionsfaktoren der Moduln $N[\delta]$ durch die Typen parametrisieren können.

6.30 Notation. Mit der Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} e^* : \{0,\dots,2(p-1)\} &\to \{0,\dots,p-1\} \\ \alpha &\mapsto \begin{cases} \alpha & 0 \le \alpha \le p-1 \\ 2(p-1)-\alpha & p-1 < \alpha \le 2(p-1), \end{cases} \end{aligned}$$

konstruieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} e : \mathcal{T} &\to \{0,\dots,q-1\} \\ \boldsymbol{\alpha} &\mapsto \sum_{i=0}^{r-1} e^*(\alpha_i)p^i. \end{aligned}$$

Ferner definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \eta : \mathcal{T} &\to \{0,\dots,q-1\} \\ \boldsymbol{\alpha} &\mapsto \sum_{\substack{i=0 \\ \alpha_i > p-1}}^{r-1} (\alpha_i - (p-1))p^i. \end{aligned}$$

Dabei ist wie üblich die leere Summe als Null definiert.
Wir nennen die Abbildungen e und η die *Parametrisierungsfunktionen.*

Offenbar gilt nach Konstruktion:

6.31 Lemma. *Die Abbildungsvorschriften für e und η beschreiben zugleich die (eindeutigen) p-adischen Koeffizienten von $e(\boldsymbol{\alpha})$ und $\eta(\boldsymbol{\alpha})$ für $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}$.*

Bemerkung. Bei den späteren Anwendungen wird es nur auf die Klasse von $\eta(\boldsymbol{\alpha})$ modulo $q-1$ ankommen.
Nach Definition gilt $\eta(\boldsymbol{\alpha}) = q-1$ genau dann, wenn $\boldsymbol{\alpha} = (2(p-1),\dots,2(p-1))$ ist. In allen anderen Fällen ist $0 \le \eta(\boldsymbol{\alpha}) \le q-2$.

Für verschiedene Typen müssen sich die Bilder unter mindestens einer der Parametrisierungsfunktionen unterscheiden.

6.32 Lemma. *Sind $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}' \in \mathcal{T}$ mit*

$$e(\boldsymbol{\alpha}) = e(\boldsymbol{\alpha}') \quad \textit{und} \quad \eta(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \eta(\boldsymbol{\alpha}') \mod q-1,$$

so gilt bereits $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}'$.

Beweis. Wir bezeichnen die Einträge von $\boldsymbol{\alpha}'$ mit α'_j und betrachten zunächst den Fall $\boldsymbol{\alpha} \neq (2(p-1),\dots,2(p-1)) \neq \boldsymbol{\alpha}'$.
In diesem Fall liegen $\eta(\boldsymbol{\alpha})$ und $\eta(\boldsymbol{\alpha}')$ beide in $\{0,\dots,q-2\}$, d.h., die zweite Voraussetzung impliziert bereits die Gleichheit $\eta(\boldsymbol{\alpha}) = \eta(\boldsymbol{\alpha}')$. Für $0 \le j \le r-1$ müssen daher die j-ten p-adischen Koeffizienten von $\eta(\boldsymbol{\alpha})$ und $\eta(\boldsymbol{\alpha}')$ jeweils übereinstimmen.

Sind dabei beide Koeffizienten von Null verschieden, d.h., ist

$$0 < \alpha_j - (p-1) = \alpha'_j - (p-1) \leq p-1,$$

so gilt $\alpha_j = \alpha'_j > p-1$.

Falls dagegen beide Koeffizienten Null sind, wissen wir, dass $\alpha_j \leq p-1$ und $\alpha'_j \leq p-1$ ist. In diesem Fall ist nach Konstruktion α_j der j-te p-adische Koeffizient von $e(\boldsymbol{\alpha})$ und α'_j der j-te p-adische Koeffizient von $e(\boldsymbol{\alpha}')$. Wegen der Gleichheit von $e(\boldsymbol{\alpha})$ und $e(\boldsymbol{\alpha}')$ gilt also auch $\alpha_j = \alpha'_j$.

Sei im verbleibenden Fall ohne Einschränkung $\boldsymbol{\alpha} = (2(p-1), \dots, 2(p-1))$. Es ist also $e(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ und $\eta(\boldsymbol{\alpha}) = q-1 \equiv 0 \bmod q-1$.

Angenommen, es gelte $\boldsymbol{\alpha}' \neq \boldsymbol{\alpha}$. Die zweite Voraussetzung kann dann nur erfüllt sein, wenn $\eta(\boldsymbol{\alpha}') = 0$ ist, d.h., es muss $\alpha'_j \leq p-1$ gelten für alle $0 \leq j \leq r-1$. Nach Definition der Funktion e liefert die erste Voraussetzung dann aber

$$0 = e(\boldsymbol{\alpha}') = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j p^j.$$

Da $(0, \dots, 0)$ kein Element von $\mathcal{T}$ ist, führt dies zu einem Widerspruch. □

Es besteht ein Zusammenhang zwischen der Abbildung $\mathfrak{d}$ und den Parametrisierungsfunktionen.

6.33 Lemma. *Für $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}$ ist*

$$e(\boldsymbol{\alpha}) + 2\eta(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha}) \mod q-1.$$

Genauer gilt: Ist $\mathbf{t} \in \mathcal{P}[\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha})]$ mit $\mathrm{typ}_{\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\alpha}$, so ist

$$e(\boldsymbol{\alpha}) + 2\eta(\boldsymbol{\alpha}) = \mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha}) + t_0(q-1).$$

Beweis. Sei $U \subseteq \{0, \dots, r-1\}$ die Menge der Indizes i, für die $\alpha_i > p-1$ ist. Wir schreiben kurz „$i \notin U$" für $i \in \{0, \dots, r-1\} \setminus U$. Dann ist

$$e^*(\alpha_i) = \begin{cases} \alpha_i & i \notin U \\ 2(p-1) - \alpha_i & i \in U. \end{cases}$$

Nach Definition der Parametrisierungsfunktionen gilt

$$\begin{aligned} e(\boldsymbol{\alpha}) + 2\eta(\boldsymbol{\alpha}) &= \sum_{i \in U} (2(p-1) - \alpha_i)\, p^i + \sum_{i \notin U} \alpha_i p^i + 2 \sum_{i \in U} (\alpha_i - (p-1)) p^i \\ &= \sum_{i \in U} \alpha_i p^i + \sum_{i \notin U} \alpha_i p^i \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i p^i. \end{aligned}$$

Mit Lemma 6.23 und Lemma 6.25 folgt die Behauptung. □

Abschließend betrachten wir ein Problem, das für spätere Anwendungen interessant ist, nämlich die Beschreibung der Fasern von e, d.h. der Urbilder einelementiger Mengen unter e.

Im Folgenden sei stets $0 \leq m \leq q-1$ mit p-adischer Entwicklung $m = \sum_{j=0}^{r-1} m_j p^j$. Gesucht sind alle die $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}$ mit $e(\boldsymbol{\alpha}) = m$.

Nach Definition von e sind dies genau jene $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}$, die für alle $0 \leq j \leq r-1$ der Bedingung

$$e^*(\alpha_j) = m_j$$

genügen. Ist $m_j = p-1$, so muss nach Definition von e^* bereits $\alpha_j = p-1$ gelten. Ist $0 \leq m_j \leq p-2$, so sind genau zwei Werte, nämlich $\alpha_j = m_j < p-1$ beziehungsweise $\alpha_j = 2(p-1) - m_j > p-1$, zulässig.

Wir fassen zunächst die Indizes zusammen, für die dieser Fall eintritt.

6.34 Definition. Sei $0 \leq m \leq q-1$ mit p-adischer Entwicklung $m = \sum_{j=0}^{r-1} m_j p^j$. Der *duale Träger* von m ist definiert als die Menge

$$\operatorname{dsupp}(m) = \{0 \leq j \leq r-1 \mid m_j < p-1\}.$$

6.35 Notation. Motiviert durch die Vorüberlegung ordnen wir einer beliebigen Teilmenge $U \subseteq \operatorname{dsupp}(m)$ (einschließlich der leeren Menge!) ein Tupel

$$\boldsymbol{\alpha}(m,U) = (\alpha_0(m,U), \ldots, \alpha_{r-1}(m,U)) \in \{0, \ldots, 2(p-1)\}^r$$

zu, indem wir setzen

$$\alpha_j(m,U) = \begin{cases} 2(p-1) - m_j & j \in U \\ m_j & j \notin U. \end{cases}$$

Als direkte Konsequenz aus der Konstruktionsvorschrift sehen wir:

6.36 Lemma. *Sei $0 \leq m \leq q-1$ und $U \subseteq \operatorname{dsupp}(m)$. Dann ist*

$$U = \{0 \leq j \leq r-1 \mid \alpha_j(m,U) > p-1\}.$$

Insbesondere ist $\boldsymbol{\alpha}(m,U) \neq \boldsymbol{\alpha}(m,U')$ für $U \neq U'$.

Wir wissen: Jedes Element des Urbilds von m unter e muss ein solches $\boldsymbol{\alpha}(m,U)$ sein. Umgekehrt ist aber bereits jedes der $\boldsymbol{\alpha}(m,U)$ im Urbild enthalten, sofern es in $\mathcal{T}$ liegt, also vom Nulltupel verschieden ist. Dazu stellen wir fest:

6.37 Lemma. *Sei $0 \leq m \leq q-1$ und $U \subseteq \operatorname{dsupp}(m)$. Dann gilt*

$$\boldsymbol{\alpha}(m,U) = (0, \ldots, 0) \notin \mathcal{T}$$

genau dann, wenn $m = 0$ und $U = \emptyset$ ist.

Beweis. Ist U nicht die leere Menge, so existiert mindestens ein Index, an dem der Eintrag von $\boldsymbol{\alpha}(m,U) > p-1$ ist. Ist aber $U = \emptyset$, so ist $\boldsymbol{\alpha}(m,U) = (m_0, \ldots, m_{r-1})$. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Die Fasern der Parametrisierungsfunktion e sind somit wie folgt bestimmt:

6.38 Proposition. *(i) Für $1 \leq m \leq q-1$ ist*

$$\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T} \mid e(\boldsymbol{\alpha}) = m\} = \{\boldsymbol{\alpha}(m, U) \mid U \subseteq \operatorname{dsupp}(m)\}.$$

Die Faser enthält $2^{\# \operatorname{dsupp}(m)}$ Elemente.

(ii) Es gilt

$$\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T} \mid e(\boldsymbol{\alpha}) = 0\} = \{\boldsymbol{\alpha}(0, U) \mid \emptyset \neq U \subseteq \{0, \ldots, r-1\}\}.$$

Die Faser enthält $2^r - 1$ Elemente.

6.39 Korollar. *Die Abbildung $e : \mathcal{T} \to \{0, \ldots, q-1\}$ ist surjektiv.*

Über das Verhalten der zweiten Parametrisierungsfunktion η auf den Fasern wissen wir:

6.40 Lemma. *Die Werte der Abbildung η auf einer Faser von e sind modulo $q-1$ paarweise verschieden.*

Ist für $0 \leq m \leq q-1$ die Faser $\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T} \mid e(\boldsymbol{\alpha}) = m\}$ wie oben parametrisiert durch die Mengen $U \subseteq \operatorname{dsupp}(m)$ (mit $U \neq \emptyset$ für $m = 0$), so gilt

$$\eta(\boldsymbol{\alpha}(m, U)) = \sum_{j \in U} (p - 1 - m_j) p^j.$$

Beweis. Die erste Aussage ist eine triviale Konsequenz von Lemma 6.32.

Die genaue Gestalt der Bilder unter η folgt unter Verwendung von Lemma 6.36 direkt aus den Definitionen von η und $\boldsymbol{\alpha}(m, U)$. □

6.3 Beschreibung der G-Modulstruktur

Wir werden nun die G-Modulstruktur der $N[\delta]$ beschreiben. Im Fall $\delta = q-1$ gelingt dies leicht durch direktes Nachrechnen. Für $1 \leq \delta \leq q-2$ ist die Struktur komplexer und kann mit Hilfe von Ergebnissen aus [BS00] beschrieben werden. Wir geben an dieser Stelle nur die entsprechenden Resultate wieder und verweisen für ihre ausführliche Herleitung auf Anhang B.

Die zentrale Aussage ist die folgende angepasste Variante von Theorem C aus [BS00].

6.41 Satz (Bardoe-Sin)**.** *Sei $1 \leq \delta \leq q-2$. Dann gilt:*

(i) Der Modul $N[\delta]$ ist multiplizitätsfrei.

(ii) Die Kompositionsfaktoren von $N[\delta]$ werden durch die Menge $\mathcal{P}[\delta]$ beziehungsweise durch $\mathcal{T}[\delta]$ parametrisiert. Ist $\mathbf{t} \in \mathcal{P}[\delta]$ mit korrespondierendem Typ $\boldsymbol{\alpha} = \operatorname{typ}_\delta(\mathbf{t}) \in \mathcal{T}[\delta]$, so ist der zugehörige Kompositionsfaktor isomorph zu

$$\mathfrak{S}(e(\boldsymbol{\alpha}), \eta(\boldsymbol{\alpha})). \tag{6.3}$$

(iii) *Für einen Untermodul $U \subseteq N[\delta]$ sei $\mathcal{P}[\delta]_U \subseteq \mathcal{P}[\delta]$ die Menge der Parameter seiner Kompositionsfaktoren. Dann ist $\mathcal{P}[\delta]_U$ ein Ideal von $(\mathcal{P}[\delta], \leq)$, d.h. eine unter der Ordnungsrelation „$\leq$“ aus Notation 6.17 abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{P}[\delta]$.*

(iv) *Die Abbildung $U \mapsto \mathcal{P}[\delta]_U$ beschreibt einen Isomorphismus vom Untermodulverband von $N[\delta]$ in den Verband der Ideale von $(\mathcal{P}[\delta], \leq)$, geordnet nach Inklusion.*

Beweis. Siehe Satz B.15 im Anhang. □

Als direkte Konsequenz aus Lemma 6.18 sehen wir:

6.42 Korollar. *Für $1 \leq \delta \leq q-2$ sind der Sockel sowie der Deckel von $N[\delta]$ einfach. Der eindeutige einfache Untermodul von $N[\delta]$ ist isomorph zu $\mathfrak{S}(\delta)$.*

Für den Modul $N[q-1]$ erhalten wir das folgende Resultat, das wir in eine mit Satz 6.41 vergleichbare Form gebracht haben.

6.43 Proposition. *Der Modul $N[q-1]$ besitzt eine Zerlegung als direkte Summe einfacher G-Moduln*

$$N[q-1] = \underbrace{\left\langle f_0^{(q-1)}, \ldots, f_{q-2}^{(q-1)}, f_\infty^{(q-1)} \right\rangle}_{\cong \mathrm{Sym}^{q-1}(V)} \oplus \underbrace{\left\langle f_0^{(q-1)} - f_{q-1}^{(q-1)} + f_\infty^{(q-1)} \right\rangle}_{\cong \mathcal{C}_\infty}.$$

Die Menge $\mathcal{P}[q-1]$ enthält die beiden Parameter

$$(0, \ldots, 0) \text{ mit zugehörigem Typ } (p-1, \ldots, p-1)$$

sowie

$$(1, \ldots, 1) \text{ mit zugehörigem Typ } (2(p-1), \ldots, 2(p-1)).$$

Die einfachen Untermoduln von $N[q-1]$ werden entsprechend der Vorschrift (6.3) *durch die Typen in $\mathcal{T}[q-1]$ parametrisiert. Dabei liefert der Typ $(p-1, \ldots, p-1)$ den zu* $\mathrm{Sym}^{q-1}(V)$ *isomorphen Untermodul.*

Weitere Aussagen über den Untermodulverband entfallen aufgrund der Halbeinfachheit von $N[q-1]$.

Beweis. Wir haben bereits in Korollar 6.14 festgehalten, dass die Basiselemente

$$f_0^{(q-1)}, \ldots, f_{q-2}^{(q-1)}, f_\infty^{(q-1)}$$

einen zu $\mathrm{Sym}^{q-1}(V)$ isomorphen Untermodul erzeugen. Nach Proposition 5.34 ist dieser einfach.

Die G-Invarianz des Elements $f_0^{(q-1)} - f_{q-1}^{(q-1)} + f_\infty^{(q-1)}$ rechnen wir mit Hilfe des in Lemma 6.13 beschriebenen Transformationsverhaltens der Basiselemente nach. Wir sehen direkt, dass

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(f_0^{(q-1)} - f_{q-1}^{(q-1)} + f_\infty^{(q-1)}\right) = f_0^{(q-1)} - f_{q-1}^{(q-1)} + f_\infty^{(q-1)}$$

gilt. Da im betrachteten Spezialfall die Funktion $f_{q-1}^{(q-1)}$ unter $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ invariant ist, erhalten wir ferner

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(f_0^{(q-1)} - f_{q-1}^{(q-1)} + f_\infty^{(q-1)}\right) = f_0^{(q-1)} - f_{q-1}^{(q-1)} + f_\infty^{(q-1)}.$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(f_0^{(q-1)} - f_{q-1}^{(q-1)} + f_\infty^{(q-1)}\right) &= f_0^{(q-1)} - \sum_{j=0}^{q-1} \tbinom{q-1}{j} t^{q-1-j} f_j^{(q-1)} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{q-2} \tbinom{q-1}{j} t^{q-1-j} f_j^{(q-1)} + f_\infty^{(q-1)} \\ &= f_0^{(q-1)} - f_{q-1}^{(q-1)} + f_\infty^{(q-1)}.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die angegebene direkte Summenzerlegung von $N[q-1]$, da die beiden betrachteten Untermoduln offensichtlich komplementär zueinander sind.

Die angegebene Parametrisierung der einfachen Untermoduln durch die Typen in $\mathcal{T}[q-1]$ folgt wegen

$$e(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{cases} q-1 & \boldsymbol{\alpha} = (p-1, \dots, p-1) \\ 0 & \boldsymbol{\alpha} = (2(p-1), \dots, 2(p-1)) \end{cases}$$

und

$$\eta(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{\alpha} = (p-1, \dots, p-1) \\ q-1 & \boldsymbol{\alpha} = (2(p-1), \dots, 2(p-1)). \end{cases}$$

□

Bemerkung. Der Modul $N[q-1]$ entspricht in der Notation von [BS00] dem Modul k^P, der dort in Theorem A untersucht wird. Der Unterschied zu den übrigen Moduln $N[\delta]$ besteht darin, dass der Modul $N[q-1]$ als einziger halbeinfach ist.

Es macht dennoch Sinn, die Moduln $N[\delta]$ für $1 \leq \delta \leq q-1$ zusammen zu betrachten, da sie einheitlich als induzierte Darstellungen von Charakteren von B definiert sind, und alle bei der Untersuchung der G-Modulstruktur Drinfeld'scher Modulformen eine Rolle spielen.

Die Beschreibung der Typen im vorigen Abschnitt liefert das folgende Resultat:

6.44 Proposition. *Der Modul $\bigoplus_{\delta=1}^{q-1} N[\delta]$ ist multiplizitätsfrei. Seine Kompositionsfaktoren werden parametrisiert durch die Menge $\mathcal{T}$. Ist $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}$, so ist $\mathfrak{S}(e(\boldsymbol{\alpha}), \eta(\boldsymbol{\alpha}))$ Kompositionsfaktor des direkten Summandens $N[\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha})]$.*

Insgesamt besitzt die direkte Summe $\#\mathcal{T} = (2p-1)^r - 1$ verschiedene Kompositionsfaktoren.

Beweis. Da die Menge $\mathcal{T}$ nach Proposition 6.29 disjunkte Vereinigung der $\mathcal{T}[\delta]$ mit $1 \leq \delta \leq q-1$ ist, folgt direkt, dass $\mathcal{T}$ die Kompositionsfaktoren der direkten Summe parametrisiert. Dabei ist $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}$ gemäß Lemma 6.27 Element von $\mathcal{T}[\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha})]$, beschreibt also einen Kompositionsfaktor von $N[\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha})]$.

Aus Lemma 6.32 folgt, dass verschiedene Typen dabei stets zu nicht-isomorphen einfachen Moduln führen. Die direkte Summe ist in der Tat multiplizitätsfrei. □

Bemerkung. Diese Aussage ist bereits bei [BS00] in Form von Lemma 2.1 zu finden. Wichtiger als das eigentliche Resultat ist an dieser Stelle die in unserem Beweis verwendete Methode. Wir werden in Kapitel 11 die Kompositionsfaktoren von direkten Summen bestimmter Determinantentwists der $N[\delta]$ untersuchen und dabei auf die Beschreibung durch Typen und Parametrisierungsfunktionen zurückgreifen.

Die Moduln $N[\delta]$ sind zwar multiplizitätsfrei, im Allgemeinen aber nicht uniserial, wie folgende Klasse von Beispielen zeigt.

6.45 Beispiel. Sei $r \geq 4$ und $\delta = 1 + p^2$. Die Menge $\mathcal{P}[1 + p^2]$ enthält dann unter anderem die Parameter $(1, 0, \dots, 0)$ sowie $(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Damit sind sowohl

$$\{(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0)\}$$

als auch

$$\{(0, \dots, 0), (0, 0, 1, 0, \dots, 0)\}$$

Ideale von $\mathcal{P}[1 + p^2]$. Der Verband der Ideale von $\mathcal{P}[1 + p^2]$ ist folglich nicht total geordnet unter Inklusion, was nach Satz 6.41 bedeutet, dass der Modul $N[1+p^2]$ nicht uniserial ist.

Bemerkung. Im Fall $p > 2$ ist es bereits möglich, nicht-uniseriale $N[\delta]$ für $r = 2$ zu finden. Wählt man δ mit p-adischen Koeffizienten $0 < \delta_i < p-1$, so ist $\mathcal{P}[\delta] = \{0, 1\}^2$.

6.46 Proposition. *(i) Ist $r = 1$ und $1 \leq \delta \leq q-2$, so ist $N[\delta]$ uniserial mit einer Kompositionsreihe der Länge 2.*

(ii) Ist $p = 2$, $r \leq 3$ und $1 \leq \delta \leq q-2$, so ist $N[\delta]$ uniserial mit Länge $r+1$.

Beweis. Im Fall $r = 1$ besteht $\mathcal{P}[\delta]$ nur aus den beiden Elementen 0 und 1. Die Behauptung folgt unmittelbar.

Sei also $p = 2$, d.h., die p-adischen Koeffizienten von δ sind entweder 0 oder 1.

Ist $r = 2$, d.h. $q = 4$, so rechnet man direkt nach, dass $\mathcal{P}[1] = \{(0,0), (1,0), (1,1)\}$ und $\mathcal{P}[2] = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$ gilt. Die Anzahl der Ideale von $\mathcal{P}[\delta]$ ist in beiden Fällen offensichtlich, ebenso ihre totale Ordnung und damit die Eindeutigkeit der Kompositionsreihe.

Sei nun $r = 3$. Wir zeigen zunächst, dass wir nicht alle δ zwischen 1 und $q - 2 = 6$ einzeln betrachten müssen. Da nämlich $r = 3$ gilt und nur p-adische Koeffizienten 0 oder 1 auftreten, unterscheiden sich die Folgen der p-adischen Koeffizienten zweier Zahlen $1 \leq \delta, \delta' \leq 6$ nur um eine zyklische Permutation, wenn sie die gleiche Anzahl von Nullen beziehungsweise Einsen enthalten.

Das bedeutet, dass sich auch die Systeme von Bedingungen

$$0 \leq \delta_j + t_{j+1}p - t_j \leq 2(p-1) \quad \text{für } 0 \leq j \leq r-1,$$

beziehungsweise

$$0 \leq \delta'_j + t_{j+1}p - t_j \leq 2(p-1) \quad \text{für } 0 \leq j \leq r-1,$$

nur um die entsprechende zyklische Permutation unterscheiden. Folglich gehen die Elemente von $\mathcal{P}[\delta']$ durch zyklische Permutation aus den Elementen von $\mathcal{P}[\delta]$ hervor, und der Idealverband von $\mathcal{P}[\delta']$ ist genau dann unter Inklusion total geordnet, wenn dies für den Idealverband von $\mathcal{P}[\delta]$ gilt.

Es genügt also, $\delta = 1$ und $\delta = 1 + 2 = 3$ zu betrachten. Wir bestimmen mit Hilfe der oben angegebenen Bedingungen die jeweiligen Parameter und erhalten so

$$\mathcal{P}[1] = \{(0,0,0), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,1)\}$$

beziehungsweise

$$\mathcal{P}[3] = \{(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

Da die Idealverbände beider Mengen unter Inklusion total geordnet sind, folgt die Behauptung. □

Mit Satz 5.33 und Proposition 6.43 erhalten wir im Spezialfall $q = 2$ das folgende Resultat:

6.47 Proposition. *Ist $q = 2$, so sind $\mathcal{C}_\infty$ und V bis auf Isomorphie die einzigen einfachen G-Moduln. Weiter ist $N[1] = N[q-1]$ der einzige Modul vom hier betrachteten Typ, und es gilt $N[1] \cong \mathcal{C}_\infty \oplus V$ als Isomorphie von G-Moduln.*

Bemerkung. Für unsere spätere Untersuchung von G-Modulstrukturen können wir also festhalten, dass der Fall $r = 1$ (wie zu erwarten) von deutlich geringerer Komplexität ist. Dies gilt insbesondere für den Fall $q = p = 2$, der aus technischen Gründen gelegentlich gesondert behandelt werden muss.

Symmetrische Potenzen

Wir können unsere bisherigen Resultate nutzen, um die G-Modulstruktur bestimmter symmetrischer Potenzen zu beschreiben.

6.48 Proposition. *Sei $1 \leq \delta \leq q-1$. Wird die symmetrische Potenz $\mathrm{Sym}^\delta(V)$ wie in Korollar 6.14 angegeben nach $N[\delta]$ eingebettet, so entspricht sie dem Ideal*

$$\mathcal{P}_0[\delta] := \{\mathbf{t} \in \mathcal{P}[\delta] \mid t_0 = 0\}$$

von $(\mathcal{P}[\delta], \leq)$.

Beweis. Im Fall $1 \leq \delta \leq q-2$ handelt es sich um ein Resultat aus [BS00], siehe Korollar B.16 im Anhang. Für $\delta = q-1$ folgt die Behauptung direkt aus Proposition 6.43. □

6.49 Notation. Wir identifizieren im Allgemeinen den Modul $\mathrm{Sym}^\delta(V)$ mit seinem Bild unter der oben angegebenen Einbettung nach $N[\delta]$.

Die Beschreibung der G-Modulstruktur der $N[\delta]$ in Satz 6.41 beziehungsweise Proposition 6.43 liefert dann direkt:

6.50 Proposition. *Für $1 \leq \delta \leq q-1$ gilt:*

(i) Der Modul $\mathrm{Sym}^\delta(V)$ ist multiplizitätsfrei.

(ii) Der Untermodulverband von $\mathrm{Sym}^\delta(V)$ ist isomorph zum Verband der Ideale in $(\mathcal{P}_0[\delta], \leq)$.

(iii) Die symmetrische Potenz $\mathrm{Sym}^\delta(V)$ besitzt als Kompositionsfaktoren genau jene von $N[\delta]$, die durch die Parameter $\mathbf{t} \in \mathcal{P}_0[\delta]$ parametrisiert werden.

Übersetzt in die Parametrisierung durch Typen $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}[\delta]$ sind die Kompositionsfaktoren von $\mathrm{Sym}^\delta(V)$ wie folgt charakterisiert:

6.51 Lemma. *Sei $1 \leq \delta \leq q-1$. Ein Typ $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}[\delta]$ liefert genau dann einen Kompositionsfaktor von $\mathrm{Sym}^\delta(V)$, wenn*

$$\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i p^i \leq q-1$$

ist. Dies ist äquivalent dazu, dass entweder $\boldsymbol{\alpha} = (p-1, \ldots, p-1)$ ist oder für das größte $0 \leq j \leq r-1$ mit

$$\alpha_j \neq p-1$$

sogar

$$\alpha_j < p-1$$

gilt.

Beweis. Sei $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}[\delta]$ und $\mathbf{t} \in \mathcal{P}[\delta]$ mit $\mathrm{typ}_\delta(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\alpha}$. Wir zeigen, dass beide Bedingungen an $\boldsymbol{\alpha}$ äquivalent dazu sind, dass $\mathbf{t} \in \mathcal{P}_0[\delta]$ gilt, d.h., dass $t_0 = 0$ ist.

Im Fall der ersten Bedingung sehen wir in der Tat mit Lemma 6.23, dass genau dann

$$\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i p^i \leq q-1$$

gilt, wenn $t_0 = 0$ ist.

Für die zweite Bedingung betrachten wir das in Lemma 6.27 beschriebene Verfahren zur Bestimmung des Urbilds $\mathbf{t}$ von $\boldsymbol{\alpha}$ unter typ_δ. Wir sehen dort, dass genau dann $t_0 = 0$ ist, wenn alle $\alpha_i = p-1$ sind oder wenn $\alpha_{l(0)} < p-1$ ist. Dabei ist $l(0)$ nach Definition der größte Index $j \in \{0, \ldots, r-1\}$, so dass α_j von $p-1$ verschieden ist. Wir erhalten somit gerade das angegebene Kriterium. $\square$

6.4 Der Modul $N[1]$

Für beliebiges δ ist es im Allgemeinen schwierig, die Untermodulstruktur und Kompositionsfaktoren von $N[\delta]$ in geschlossener Form anzugeben. Sie können in konkreten Fällen zwar mit Hilfe der angegebenen Formeln berechnet werden, eine allgemeine Beschreibung ist aber durch die Abhängigkeit von der p-adischen Entwicklung von δ und die Vielzahl der hierbei in Frage kommenden Möglichkeiten unhandlich.

Für Wahlen von δ mit einfacher p-adischer Entwicklung können wir dagegen genauere Resultate formulieren. Im Folgenden schauen wir uns den Spezialfall $\delta = 1$ an, der besonders interessant ist, wie der folgende Satz zeigt.

6.52 Satz. *Die Abbildung $N[1] \to \mathrm{Sym}^q(V)$, gegeben durch lineare Fortsetzung von*

$$f_i^{(1)} \mapsto X^{q-i}Y^i, \quad 0 \le i \le q,$$

ist ein Isomorphismus von G-Moduln.

Beweis. Aus Dimensionsgründen ist klar, dass es sich bei der angegebenen Abbildung um einen Vektorraumisomorphismus handelt.

Die G-Äquivarianz folgt unmittelbar durch Vergleich des Transformationsverhaltens der Elemente $f_i^{(1)}$ gemäß Lemma 6.13 mit der in Proposition 5.31 beschriebenen Operation der Erzeuger von G auf den Basiselementen $X^{q-i}Y^i$ von $\mathrm{Sym}^q(V)$. $\square$

Wir wollen nun die Untermodulstruktur sowie die Kompositionsfaktoren von $N[1]$ genauer bestimmen. Im Fall $q = 2$ haben wir bereits im vorigen Abschnitt gesehen:

6.53 Proposition. *Sei $q = 2$. Dann gilt*

$$\mathrm{Sym}^2(V) \cong N[1] = \underbrace{\left\langle f_0^{(1)}, f_2^{(1)} \right\rangle}_{\cong V} \oplus \underbrace{\left\langle f_0^{(1)} + f_1^{(1)} + f_2^{(1)} \right\rangle}_{\cong \mathcal{C}_\infty}$$

als Isomorphie von G-Moduln.

Wir bestimmen für $q > 2$ zunächst die Menge $\mathcal{P}[1]$ der auftretenden Parameter und die Menge $\mathcal{T}[1]$ der auftretenden Typen.

6.54 Lemma. *Sei $q > 2$. Der Modul $N[1]$ besitzt die Parameter*

$$\mathcal{P}[1] = \{\mathbf{t}(0) := (0, \dots, 0),\ \mathbf{t}(i) := (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{r-i \text{ viele}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{i-1 \text{ viele}}) \mid 1 \le i \le r\}$$

sowie die Typen

$$\mathcal{T}[1] = \{\boldsymbol{\alpha}(0) := (1, 0, \dots, 0),\ \boldsymbol{\alpha}(i) := (\underbrace{0, \dots, 0}_{r-i \text{ viele}}, p, \underbrace{p-1, \dots, p-1}_{i-1 \text{ viele}}) \mid 1 \le i \le r\}.$$

Dabei ist

$$\boldsymbol{\alpha}(i) = \mathrm{typ}_1(\mathbf{t}(i)) \quad \textit{für alle } 0 \le i \le r.$$

Beweis. Nach Konstruktion der Parameter $\mathbf{t} \in \mathcal{P}[1]$ müssen diese für $\delta = 1$ die Bedingungen

$$0 \leq 1 + pt_1 - t_0 \leq 2(p-1)$$

beziehungsweise

$$0 \leq pt_{j+1} - t_j \leq 2(p-1) \quad \text{für } 1 \leq j \leq r-1$$

erfüllen.

Das bedeutet: Ist $t_l = 1$ mit $1 \leq l \leq r-1$, so muss schon $t_{l+1} = 1$ gelten. Dieses Argument lässt sich solange anwenden, bis wir

$$t_l = t_{l+1} = \ldots = t_0 = 1$$

erhalten (wir verwenden wieder die zyklische Interpretation mittels $t_r = t_0$). An der ersten Ungleichung sehen wir aber, dass $t_0 = 1$ keine Bedingung an t_1 liefert, da sowohl $t_1 = 1$ als auch $t_1 = 0$ zulässig sind.

Da das Tupel $(0, \ldots, 0)$ in jedem Fall ein zulässiger Parameter ist, besitzt $\mathcal{P}[1]$ genau die angegebene Gestalt.

Der Rest der Behauptung folgt direkt aus der Definition der Abbildung typ_1. $\square$

Da wir uns auf den Fall $q > 2$ beschränken, befinden wir uns für $\delta = 1$ in der Situation von Satz 6.41 und erhalten das folgende Resultat:

6.55 Proposition. *Sei $q > 2$. Der G-Modul $N[1]$ (beziehungsweise $\mathrm{Sym}^q(V)$) ist uniserial und besitzt $r+1$ Kompositionsfaktoren. Diese sind isomorph zu*

$$\begin{aligned} &\mathfrak{S}(e(\boldsymbol{\alpha}(0)), \eta(\boldsymbol{\alpha}(0))) = \mathfrak{S}(1,0) = V, \\ &\mathfrak{S}(e(\boldsymbol{\alpha}(i)), \eta(\boldsymbol{\alpha}(i))) = \mathfrak{S}\left(p^r - 2p^{r-i}, p^{r-i}\right), \quad 1 \leq i \leq r. \end{aligned}$$

Die Kompositionsfaktoren sind durch die Typen $\boldsymbol{\alpha}(i)$ nach aufsteigendem i angeordnet. Der Typ $\boldsymbol{\alpha}(0)$ beschreibt den eindeutigen einfachen Untermodul von $N[1]$, also den Sockel von $N[1]$, der Typ $\boldsymbol{\alpha}(r)$ den Deckel von $N[1]$.

Beweis. Wir erhalten mit Lemma 6.54, dass die Ideale in $\mathcal{P}[1]$ genau durch die Mengen

$$\{\mathbf{t}(i) \mid 0 \leq i \leq n\} \quad \text{für } 0 \leq n \leq r$$

gegeben sind. Diese sind offensichtlich unter Inklusion total geordnet. Aus Satz 6.41 folgt daher die Uniserialität von $N[1]$ und die angegebene Reihenfolge der Kompositionsfaktoren.

Die Auswertung der Parametrisierungsfunktionen liefert die angegebenen Beschreibungen der Kompositionsfaktoren gemäß Parametrisierung (6.3). Es ist $e(\boldsymbol{\alpha}(0)) = 1$ und $\eta(\boldsymbol{\alpha}(0)) = 0$. Für $1 \leq i \leq r$ gilt ferner

$$\begin{aligned} e(\boldsymbol{\alpha}(i)) &= (p-2)p^{r-i} + \sum_{j=r-i+1}^{r-1} (p-1)p^j \\ &= (p-2)p^{r-i} + p^r - p^{r-i+1} = p^r - 2p^{r-i} \end{aligned}$$

und

$$\eta(\boldsymbol{\alpha}(i)) = p^{r-i}.$$

$\square$

Wir kennen damit die Kompositionsfaktoren von $N[1]$ und ihre Positionen in der eindeutig bestimmten Kompositionsreihe von $N[1]$ (beziehungsweise von $\mathrm{Sym}^q(V)$). Wir wollen auch die Untermoduln von $N[1]$ explizit bestimmen.

6.56 Notation. Sei $q > 2$. Wir bilden für $0 \leq i \leq r$ die Vektorräume

$$\widetilde{U}_i := \left\langle f_b^{(1)} \in N[1] \mid 0 \leq b \leq q,\, b \equiv 0 \bmod p^{r-i} \right\rangle \subseteq N[1].$$

6.57 Proposition. *Sei $q > 2$. Für $0 \leq i \leq r$ ist der Vektorraum $\widetilde{U}_i$ ein G-Modul der Dimension*

$$\dim \widetilde{U}_i = p^i + 1.$$

Der Modul $N[1]$ enthält neben diesen keine weiteren von $\{0\}$ verschiedenen Untermoduln. Insbesondere ist $\widetilde{U}_0 = \left\langle f_0^{(1)}, f_q^{(1)} \right\rangle \cong V$ der eindeutige einfache Untermodul von $N[1]$ und $\widetilde{U}_r = N[1]$.

Beweis. Zuerst zeigen wir die Abgeschlossenheit der betrachteten Vektorräume unter der Operation von G. Sei dazu $0 \leq i \leq r$ und $f_b^{(1)} \in N[1]$ mit $0 \leq b \leq q$ und $b \equiv 0 \bmod p^{r-i}$.

Wir beschreiben das Verhalten einer solchen Funktion unter den Erzeugern von G mit Hilfe von Lemma 6.13. Für Erzeuger des Typs $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sehen wir direkt, dass

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_b^{(1)} = a^{q-b} f_b^{(1)} \in \widetilde{U}_i$$

gilt. Ebenso erhalten wir

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) f_b^{(1)} = f_{q-b}^{(1)} \in \widetilde{U}_i,$$

da auch $q - b \equiv 0 \bmod p^{r-i}$ ist. Betrachten wir schließlich

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_b^{(1)} = \sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j} t^{b-j} f_j^{(1)},$$

so treten in der Linearkombination auf der rechten Seite der Gleichung ebenfalls nur Funktionen $f_j^{(1)}$ mit $j \equiv 0 \bmod p^{r-i}$ auf. Da wir nämlich $b \equiv 0 \bmod p^{r-i}$ voraussetzen, gilt $\binom{b}{j} = 0$, sofern j nicht der angegebenen Kongruenz genügt (siehe Kriterium A.9).

Der Vektorraum $\widetilde{U}_i$ ist somit unter der Operation der Erzeuger von G abgeschlossen, also ein G-Modul.

Die Dimension dieses Moduls ist gleich der Anzahl der Indizes $0 \leq b \leq q$ mit $b \equiv 0 \bmod p^{r-i}$. Da $q = p^r$ ist, sind dies genau die $b = p^{r-i} b'$ mit $0 \leq b' \leq p^i$.

Im Beweis von Proposition 6.55 haben wir gesehen, dass die Menge $\mathcal{P}[1]$ genau $r+1$ Ideale besitzt. Gemäß Satz 6.41 ist dies die Anzahl der von $\{0\}$ verschiedenen Untermoduln von $N[1]$. Es kann also neben den $\widetilde{U}_i$ keine weiteren geben. $\square$

Wir können damit die Kompositionsreihe von $N[1]$ konkret angeben:

6.58 Korollar. *Für $q > 2$ ist*

$$\{0\} \subsetneq \widetilde{U}_0 \subsetneq \widetilde{U}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \widetilde{U}_r = N[1]$$

die eindeutige Kompositionsreihe von $N[1]$, und die sukzessiven Quotienten $\widetilde{U}_i/\widetilde{U}_{i-1}$ mit $1 \leq i \leq r$ sind isomorph zu den in Proposition 6.55 angegebenen einfachen Moduln.

Abschließend beschreiben wir, wie die Untermoduln von $N[1]$ beziehungsweise von $\mathrm{Sym}^q(V)$ selbst als (getwistete) symmetrische Potenzen aufgefasst werden können.

6.59 Proposition. *Sei $q > 2$ und $0 \leq i \leq r$. Dann gilt*

$$\widetilde{U}_i \cong \left(\mathrm{Sym}^{p^i}(V)\right)^{\theta^{r-i}}$$

als Isomorphie von G-Moduln.

Beweis. Wir betrachten das Bild U_i' von $\widetilde{U}_i$ in $\mathrm{Sym}^q(V)$ unter dem in Satz 6.52 beschriebenen G-Isomorphismus. Der Untermodul $U_i' \subseteq \mathrm{Sym}^q(V)$ wird erzeugt von den Monomen $X^{q-b}Y^b$ mit $b \equiv 0 \bmod p^{r-i}$.

Sei also $0 \leq b \leq q$ mit $b \equiv 0 \bmod p^{r-i}$, d.h., es existiert $0 \leq b' \leq p^i$, so dass $b = b'p^{r-i}$ ist. Wir schreiben das zugehörige Monom dann als

$$X^{q-b}Y^b = X^{p^r - b'p^{r-i}}Y^{b'p^{r-i}} = \left(X^{p^i-b'}Y^{b'}\right)^{p^{r-i}}.$$

Da wir in Charakteristik p rechnen, können wir den Exponenten p^{r-i} als Frobenius-Twist der natürlichen Operation von G auf dem Element $X^{p^i-b'}Y^{b'}$ von $\mathrm{Sym}^{p^i}(V)$ auffassen.

Wir erhalten auf diese Weise alle Monome des Grades p^i, also eine Basis von $\mathrm{Sym}^{p^i}(V)$. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Bemerkung. Die Aussage der Proposition ist in den Randfällen $i = 0$ beziehungsweise $i = r$ verträglich mit den bereits bekannten Ergebnissen

$$\widetilde{U}_0 \cong V = \left(\mathrm{Sym}^{p^0}(V)\right)^{\theta^r},$$
$$\widetilde{U}_r = N[1] \cong \mathrm{Sym}^q(V) = \left(\mathrm{Sym}^{p^r}(V)\right)^{\theta^0}.$$

7 Darstellungstheorie der Eisenstein-Reihen

Wir betrachten nun wieder konkret die in Proposition 4.6 beschriebene linke Operation von G. Von den in Abschnitt 4.2 beschriebenen G-Moduln von Drinfeld'schen Modulformen werden wir als Erstes den Modul Eis_k, der von den Eisenstein-Reihen vom Gewicht k erzeugt wird, unter darstellungstheoretischen Aspekten untersuchen.

Es gibt zwei Gründe, mit diesem Modul zu beginnen: Zum einen steht mit Lemma 2.1 ein Werkzeug zur Verfügung, das es erlaubt, das Transformationsverhalten von Eisenstein-Reihen unter der Operation von G einfach zu beschreiben. Zum anderen ist dieses Transformationsverhalten für allgemeine Drinfeld'sche Modulformen relevant, da die Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 die gesamte Algebra M der Modulformen zur Stufe T erzeugen.

7.1 Transformationsverhalten der Eisenstein-Reihen

Wir betrachten für $k \in \mathbb{N}$ zuerst die in Satz 2.4 angegebene Basis von Eis_k, die aus den gewöhnlichen Eisenstein-Reihen E_ν mit $\nu \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ besteht, und beschreiben das Transformationsverhalten der Basiselemente unter den in Proposition 5.24 ausgezeichneten Erzeugern von G.

Wie in der Bemerkung zu dieser Proposition angegeben, sind im Folgenden a und t stets beliebige Elemente von $\mathbb{F}_q^\times$. Insbesondere hängt der Wert einer Potenz von a beziehungsweise von t nur von der Klasse des Exponenten modulo $q-1$ ab.

7.1 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Die üblichen Erzeuger von G operieren auf den gewöhnlichen Eisenstein-Reihen vom Gewicht k wie folgt:*

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) E_u^{(k)} &= a^k E_{ua}^{(k)}, \quad u \in \mathbb{F}_q,\\
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) E_\infty^{(k)} &= E_\infty^{(k)},\\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) E_u^{(k)} &= E_{u-t}^{(k)}, \quad u \in \mathbb{F}_q,\\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) E_\infty^{(k)} &= E_\infty^{(k)},\\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) E_u^{(k)} &= u^{-k} E_{u^{-1}}^{(k)}, \quad u \in \mathbb{F}_q^\times,\\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) E_0^{(k)} &= E_\infty^{(k)},\\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) E_\infty^{(k)} &= E_0^{(k)}.
\end{aligned}$$

Beweis. Wir verwenden Lemma 2.1, um das Transformationsverhalten der gewöhnlichen Eisenstein-Reihen auszuwerten. Dabei ist die zusätzliche Inversion in der Definition der linken Operation zu beachten.

Zusätzlich benutzen wir, dass wir die Operation skalarer Matrizen auf den gewöhnlichen Eisenstein-Reihen wie in Lemma 2.2 durch einen skalaren Faktor beschreiben können.

Auf diese Weise sehen wir für $u \in \mathbb{F}_q$, dass

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) E_u^{(k)} = E^{(k)}_{(1,u)\left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} = E^{(k)}_{(a^{-1},u)} = E^{(k)}_{(1,ua)\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}} = a^k E_{ua}^{(k)}$$

gilt. Ebenso ist

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) E_\infty^{(k)} = E^{(k)}_{(0,1)\left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} = E^{(k)}_{(0,1)} = E_\infty^{(k)}.$$

Weiter erhalten wir

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) E_u^{(k)} = E^{(k)}_{(1,u)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} = E^{(k)}_{(1,u-t)} = E_{u-t}^{(k)},$$

für $u \in \mathbb{F}_q$ beziehungsweise

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) E_\infty^{(k)} = E^{(k)}_{(0,1)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} = E^{(k)}_{(0,1)} = E_\infty^{(k)}.$$

Ist $u \neq 0$, so gilt

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) E_u^{(k)} &= E^{(k)}_{(1,u)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} = E^{(k)}_{(u,1)} = E^{(k)}_{(1,u^{-1})\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right)} \\ &= u^{-k} E_{u^{-1}}^{(k)}.\end{aligned}$$

Schließlich haben wir

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) E_0^{(k)} = E^{(k)}_{(1,0)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} = E^{(k)}_{(0,1)} = E_\infty^{(k)}$$

und

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) E_\infty^{(k)} = E^{(k)}_{(0,1)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} = E^{(k)}_{(1,0)} = E_0^{(k)}.$$

□

Wir können an den Formeln für das Transformationsverhalten ablesen, dass die Struktur des Moduls Eis_k nur von der Restklasse von k modulo $q-1$ abhängt.

7.2 Lemma. *Die Abbildung* $\mathrm{Eis}_k \to \mathrm{Eis}_{[k]}$, *gegeben durch*

$$E_\nu^{(k)} \mapsto E_\nu^{([k])} \quad \textit{für } \nu \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$$

und lineare Fortsetzung, definiert einen G-Isomorphismus

$$\mathrm{Eis}_k \xrightarrow{\cong} \mathrm{Eis}_{[k]}.$$

Dabei bezeichnet „$[\,\cdot\,]$*“ wie üblich den Repräsentanten modulo* $q-1$ *in* $\{1, \dots, q-1\}$.

Tatsächlich haben wir sogar gezeigt:

7.3 Satz. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Abbildung* $\mathrm{Eis}_k \to N[k]$*, die gegeben ist durch*

$$E_\nu^{(k)} \mapsto F_\nu^{([k])}, \quad \nu \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\},$$

und lineare Fortsetzung, ist ein G-Isomorphismus.

Beweis. Es ist klar, dass die angegebene Abbildung ein Vektorraumisomorphismus ist. Der Vergleich des oben bestimmten Transformationsverhaltens der gewöhnlichen Eisenstein-Reihen mit dem in Lemma 6.10 beschriebenen Verhalten der $F_\nu^{([k])}$ liefert unmittelbar die G-Äquivarianz dieser Abbildung. □

Da die modifizierten Eisenstein-Reihen nach denselben Vorschriften gebildet werden, wie die in Notation 6.11 festgelegte zweite Basis der $N[\delta]$, können wir ihr Transformationsverhalten unter G direkt angeben.

7.4 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Unter der Operation der Erzeuger von G gilt:*

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_i^{(k)} &= a^{k-i}\mathcal{E}_i^{(k)}, \quad 0 \le i \le q-1, \\
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_\infty^{(k)} &= \mathcal{E}_\infty^{(k)}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_i^{(k)} &= \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} t^{i-j}\mathcal{E}_j^{(k)}, \quad 0 \le i \le q-1, \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_\infty^{(k)} &= \sum_{j=0}^{[k]-1} \tbinom{[k]}{j} t^{[k]-j}\mathcal{E}_j^{(k)} + \mathcal{E}_\infty^{(k)}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_i^{(k)} &= \mathcal{E}_{[k]-i}^{(k)}, \quad 1 \le i \le [k]-1, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_i^{(k)} &= \mathcal{E}_{q-1+[k]-i}^{(k)}, \quad [k] \le i \le q-1, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_0^{(k)} &= \mathcal{E}_\infty^{(k)}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_\infty^{(k)} &= \mathcal{E}_0^{(k)}.
\end{aligned}$$

Dabei ist wie zuvor $[k]$ bestimmt als Repräsentant von k modulo $q-1$ in $\{1, \dots, q-1\}$.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Lemma 6.13 unter Verwendung des Transformationsverhaltens der gewöhnlichen Eisenstein-Reihen. Dabei ist zu beachten, dass

$$\mathcal{E}_\infty^{(k)} = \mathcal{E}_{[k]}^{(k)} + E_\infty^{(k)}$$

gilt. □

Da den modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 eine besondere Rolle als Erzeuger der Algebra M zukommt, halten wir für diesen Fall ausdrücklich fest:

7.5 Korollar. *Es gilt für $0 \leq i \leq q$:*

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_i = a^{q-i} \mathcal{E}_i,$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_i = \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} t^{i-j} \mathcal{E}_j,$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{q-i}.$$

Insbesondere ist

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_q = t\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_q.$$

7.2 Beschreibung der G-Modulstruktur

Für die Beschreibung der Moduln Eis_k mit $k \in \mathbb{N}$ stehen uns nun gemäß Satz 7.3 alle in Kapitel 6 beschriebenen Methoden und Ergebnisse zur Verfügung. Als Hauptergebnis halten wir fest:

7.6 Satz. *Sei $k \in \mathbb{N}$.*

(i) Ist $k \not\equiv 0 \bmod q-1$, so werden der Untermodulverband sowie die Kompositionsfaktoren von Eis_k wie in Satz 6.41 durch die Mengen $\mathcal{P}[k]$ beziehungsweise $\mathcal{T}[k]$ beschrieben.

Insbesondere ist Eis_k multiplizitätsfrei und besitzt einen einfachen Sockel sowie Deckel.

(ii) Für $k \equiv 0 \bmod q-1$ ist der Modul Eis_k halbeinfach und isomorph zur direkten Summe $\mathcal{C}_\infty \oplus \mathrm{Sym}^{q-1}(V)$ einfacher G-Moduln. Der eindimensionale Untermodul wird erzeugt von der Modulform

$$\mathcal{E}_0^{(k)} - \mathcal{E}_{q-1}^{(k)} + \mathcal{E}_\infty^{(k)}.$$

Als direkte Folge der Frobenius-Reziprozität (siehe Proposition 6.16) erhalten wir darüber hinaus:

7.7 Proposition. *Seien $k, l \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Eis}_k, N[l]) = \begin{cases} 1 & k \equiv l \not\equiv 0 \mod q-1 \\ 2 & k \equiv l \equiv 0 \mod q-1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Eis}_k, \mathrm{Eis}_l) = \begin{cases} 1 & k \equiv l \not\equiv 0 \mod q-1 \\ 2 & k \equiv l \equiv 0 \mod q-1 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung. Der Isomorphismus aus Satz 7.3 ist für $k \not\equiv 0 \bmod q-1$ somit eindeutig bestimmt bis auf Multiplikation mit einem Skalar aus $\mathcal{C}_\infty$.

Ist $k \equiv 0 \bmod q-1$, so zerfällt der Isomorphismus aus Satz 7.3 in zwei Isomorphismen zwischen den direkten Summanden, die jeweils ebenfalls bis auf Skalar eindeutig sind.

Abschließend betrachten wir den Spezialfall der Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1. Übertragen wir die Ergebnisse aus Abschnitt 6.4 auf den G-Modul $M_1 = \mathrm{Eis}_1$, so liefert Satz 6.52 zunächst allgemein:

7.8 Proposition. *Die Abbildung* $\mathrm{Eis}_1 \to \mathrm{Sym}^q(V)$*, die gegeben ist durch*

$$\mathcal{E}_i \mapsto X^{q-i}Y^i, \quad 0 \le i \le q,$$

und lineare Fortsetzung, ist ein Isomorphismus von G-Moduln.

Bemerkung. Diese Isomorphie kann auch ohne den Umweg über $N[1]$ direkt aus Korollar 7.5 abgelesen werden.

In Abhängigkeit von q erhalten wir eine der beiden folgenden konkreten Beschreibungen der Untermodulstruktur von Eis_1.

7.9 Satz. *(i) Ist $q = 2$, so besitzt der Modul* $\mathrm{Eis}_1 \cong \mathrm{Sym}^2(V)$ *eine direkte Summenzerlegung*

$$\mathrm{Eis}_1 = \underbrace{\langle \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_2 \rangle}_{\cong V} \oplus \underbrace{\langle \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \rangle}_{\cong \mathcal{C}_\infty}.$$

(ii) Für $q > 2$ ist der G-Modul Eis_1 *uniserial und multiplizitätsfrei und besitzt genau die $r+1$ vielen von $\{0\}$ verschiedenen G-Untermoduln*

$$U_i := \left\langle \mathcal{E}_j \mid 0 \le j \le q,\, j \equiv 0 \bmod p^{r-i} \right\rangle, \quad 0 \le i \le r,$$

mit $\dim U_i = p^i + 1$*. Die eindeutige Kompositionsreihe von* Eis_1 *ist*

$$\{0\} \subsetneq U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \ldots \subsetneq U_r = N[1]$$

mit Kompositionsfaktoren

$$U_0 \cong V$$

beziehungsweise

$$U_i/U_{i-1} \cong \mathfrak{S}\left(p^r - 2p^{r-i}, p^{r-i}\right) \quad \text{für } 1 \le i \le r.$$

Beweis. Die Behauptung für $q = 2$ folgt direkt aus Proposition 6.53.

Sei also $q > 2$. Unter dem Isomorphismus aus Satz 7.3 gilt offenbar

$$\mathcal{E}_b \mapsto f_b^{(1)} \quad \text{für } 0 \le b \le q.$$

Die Mengen U_i sind also die Urbilder der Untermoduln $\widetilde{U}_i \subseteq N[1]$ aus Notation 6.56 unter diesem Isomorphismus.

Die angegebene Beschreibung der G-Modulstruktur von Eis_1 erhalten wir daher durch Zusammenfassen der Resultate aus Proposition 6.55, Proposition 6.57 und Korollar 6.58. $\square$

8 G-Modulstruktur von M_k

In diesem Kapitel untersuchen wir den Modul M_k der Drinfeld'schen Modulformen vom Gewicht k. Dabei schreiben wir Modulformen vom Gewicht k nach Satz 2.11 als polynomielle Ausdrücke in Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 und greifen auf die Resultate für das Transformationsverhalten der Eisenstein-Reihen aus dem vorangegangenen Kapitel zurück.

Wir verfolgen zwei verschiedene Ansätze: Im ersten Abschnitt werden wir den Modul M_k insgesamt mit einer symmetrischen Potenz identifizieren, im zweiten Abschnitt betrachten wir bestimmte Untermoduln von M_k und vergleichen diese mit der Spitzenfiltrierung. Für $q > 2$ erhalten wir auf diese Weise eine zweite G-Modulfiltrierung auf M_k.

8.1 Identifikation als symmetrische Potenz

Da der Fall $k = 0$ wegen $M_0 = \mathcal{C}_\infty$ trivial ist, setzen wir von nun an $k \in \mathbb{N}$ voraus.

In Lemma 2.17 haben wir gezeigt, dass die Normalformen, d.h. die Monome

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i, \quad 0 \le b \le q-1,\, 0 \le i \le k-1,\\
&\mathcal{E}_q^k
\end{aligned}$$

in den modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1, eine Basis des G-Moduls M_k bilden. Wir bestimmen das Transformationsverhalten dieser Monome unter den in Proposition 5.24 angegebenen Erzeugern von G.

Wie in der Bemerkung zu Notation/Lemma 5.30 erwähnt, setzen wir im Folgenden nur dann Klammern, wenn eine Matrix ausdrücklich nur auf einem Faktor und nicht auf dem ganzen betrachteten Monom operiert.

8.1 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Für $0 \le b \le q-1$ und $0 \le i \le k-1$ ist*

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i &= a^{(k-i)q-b}\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i,\\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i &= \sum_{j=0}^{b}\sum_{l=0}^{i}\binom{b}{j}\binom{i}{l}t^{i+b-l-j}\mathcal{E}_0^{k-1-l}\mathcal{E}_j\mathcal{E}_q^l\\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i &= \mathcal{E}_0^i\mathcal{E}_{q-b}\mathcal{E}_\infty^{k-1-i}.
\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_q^k &= \mathcal{E}_q^k, \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_q^k &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} t^{k-l} \mathcal{E}_0^{k-l} \mathcal{E}_q^l, \\ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_q^k &= \mathcal{E}_0^k.\end{aligned}$$

Beweis. Da die betrachtete Operation von G mit der multiplikativen Struktur auf der Algebra M verträglich ist, erhalten wir die angegebenen Formeln unter Ausnutzung des in Korollar 7.5 beschriebenen Transformationsverhaltens der modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1.

Sei also $0 \leq b \leq q-1$ und $0 \leq i \leq k-1$. Für Erzeuger des Typs $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_0^{k-1-i} \mathcal{E}_b \mathcal{E}_q^i &= \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_0\right)^{k-1-i} \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_b\right) \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_q\right)^i \\ &= a^{(k-1-i)q} \mathcal{E}_0^{k-1-i} a^{q-b} \mathcal{E}_b \mathcal{E}_q^i \\ &= a^{(k-i)q-b} \mathcal{E}_0^{k-1-i} \mathcal{E}_b \mathcal{E}_q^i.\end{aligned}$$

Die Erzeuger des Typs $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ operieren durch

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_0^{k-1-i} \mathcal{E}_b \mathcal{E}_q^i &= \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_0\right)^{k-1-i} \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_b\right) \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_q\right)^i \\ &= \mathcal{E}_0^{k-1-i} \left(\sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j} t^{b-j} \mathcal{E}_j\right) (t\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_q)^i \\ &= \mathcal{E}_0^{k-1-i} \left(\sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j} t^{b-j} \mathcal{E}_j\right) \left(\sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} t^{i-l} \mathcal{E}_0^{i-l} \mathcal{E}_q^l\right) \\ &= \sum_{j=0}^{b} \sum_{l=0}^{i} \binom{b}{j} \binom{i}{l} t^{i+b-l-j} \mathcal{E}_0^{k-1-l} \mathcal{E}_j \mathcal{E}_q^l.\end{aligned}$$

Das angegebene Transformationsverhalten unter $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ kann direkt abgelesen werden.

Auf die gleiche Weise sehen wir, dass $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_q^k = \mathcal{E}_q^k$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_q^k = \mathcal{E}_0^k$ gilt. Im verbleibenden Fall haben wir

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_q^k &= (t\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_q)^k \\ &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} t^{k-l} \mathcal{E}_0^{k-l} \mathcal{E}_q^l.\end{aligned}$$

□

8.2 Satz. *(i) Für $k \in \mathbb{N}$ beschreibt die Abbildung $\Phi_k : M_k \to \mathrm{Sym}^{kq}(V)$, die gegeben ist durch*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0^{k-1-i} \mathcal{E}_b \mathcal{E}_q^i &\mapsto X^{kq-iq-b} Y^{iq+b}, \quad 0 \leq b \leq q-1,\ 0 \leq i \leq k-1, \\ \mathcal{E}_q^k &\mapsto Y^{kq}\end{aligned}$$

und lineare Fortsetzung, einen Isomorphismus von G-Moduln.

(ii) Die Isomorphismen aus Teil (i) induzieren einen Isomorphismus graduierter $\mathcal{C}_\infty$-Algebren

$$\Phi : M = \bigoplus_{k \geq 0} M_k \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{k \geq 0} \operatorname{Sym}^{kq}(V) \subsetneq \operatorname{Sym}(V).$$

Beweis. (i) Die angegebene Abbildung Φ_k ist offensichtlich wohldefiniert und surjektiv, aus Dimensionsgründen handelt es sich somit um einen Vektorraumisomorphismus. Es bleibt also die G-Äquivarianz zu zeigen. Hierfür greifen wir auf Lemma 8.1 sowie die Beschreibung der Operation von G auf $\operatorname{Sym}^{kq}(V)$ gemäß Proposition 5.31 zurück.

Wir betrachten als Erstes das Bild einer Normalform $\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i$ mit $0 \leq b \leq q-1$ und $0 \leq i \leq k-1$ unter Φ_k. Für Erzeuger des Typs $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sehen wir dann, dass

$$\begin{aligned}
\Phi_k\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i)\right) &= \Phi_k\left(a^{(k-i)q-b}\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i\right) \\
&= a^{(k-i)q-b}\Phi_k\left(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i\right) \\
&= a^{(k-i)q-b}X^{kq-iq-b}Y^{iq+b} \\
&= \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X^{kq-iq-b}Y^{iq+b} \\
&= \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \Phi_k\left(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i\right)
\end{aligned}$$

gilt. Für Erzeuger des Typs $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}
\Phi_k\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i)\right) &= \sum_{j=0}^{b}\sum_{l=0}^{i} \tbinom{b}{j}\tbinom{i}{l} t^{i+b-l-j}\Phi_k(\mathcal{E}_0^{k-1-l}\mathcal{E}_j\mathcal{E}_q^l) \\
&= \sum_{j=0}^{b}\sum_{l=0}^{i} \tbinom{b}{j}\tbinom{i}{l} t^{iq+b-lq-j}X^{kq-lq-j}Y^{lq+j}.
\end{aligned}$$

Erweitern wir an dieser Stelle den Summationsbereich auf $0 \leq j \leq q-1$, so durchläuft $lq+j$ alle Zahlen von 0 bis $iq+q-1$. Gleichzeitig gilt unter den gegebenen Voraussetzungen in Charakteristik p

$$\binom{b}{j}\binom{i}{l} = \binom{iq+b}{lq+j}$$

(siehe Variante A.8 der Lucas-Kongruenz). Dabei verschwindet dieser Binomialkoeffizient für $j > b$, also insbesondere für $iq+b < lq+j \leq iq+q-1$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\Phi_k\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i)\right) &= \sum_{j=0}^{q-1}\sum_{l=0}^{i}\tbinom{iq+b}{lq+j}t^{iq+b-lq-j}X^{kq-lq-j}Y^{lq+j}\\
&= \sum_{n=0}^{iq+b}\tbinom{iq+b}{n}t^{iq+b-n}X^{kq-n}Y^n\\
&= \left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)X^{kq-iq-b}Y^{iq+b}\\
&= \left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\Phi_k(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i).
\end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}
\Phi_k\left(\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i)\right) &= \Phi_k\left(\mathcal{E}_0^i\mathcal{E}_{q-b}\mathcal{E}_\infty^{k-1-i}\right)\\
&= X^{kq-(k-1-i)q-(q-b)}Y^{(k-1-i)q+q-b}\\
&= X^{iq+b}Y^{kq-iq-b}\\
&= \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)X^{kq-iq-b}Y^{iq+b}\\
&= \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\Phi_k\left(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i\right).
\end{aligned}$$

Abschließend betrachten wir die Normalform $\mathcal{E}_q^k$. Für die Erzeuger $\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ gilt hier

$$\begin{aligned}
\Phi_k\left(\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathcal{E}_q^k\right) &= \Phi_k\left(\mathcal{E}_q^k\right)\\
&= Y^{kq} = \left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)Y^{kq}\\
&= \left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\Phi_k\left(\mathcal{E}_q^k\right).
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\Phi_k\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathcal{E}_q^k\right) &= \Phi_k\left(\sum_{l=0}^{k}\tbinom{k}{l}t^{k-l}\mathcal{E}_0^{k-l}\mathcal{E}_q^l\right)\\
&= \sum_{l=0}^{k}\tbinom{k}{l}t^{k-l}\Phi_k\left(\mathcal{E}_0^{k-l}\mathcal{E}_q^l\right)\\
&= \sum_{l=0}^{k}\tbinom{kq}{lq}t^{kq-lq}X^{kq-lq}Y^{lq}\\
&= \sum_{n=0}^{kq}\tbinom{kq}{n}t^{kq-n}X^{kq-n}Y^n\\
&= \left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)Y^{kq}\\
&= \left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\Phi_k\left(\mathcal{E}_q^k\right),
\end{aligned}$$

wobei wir ausnutzen, dass gemäß Kongruenz A.8 in Charakteristik p

$$\binom{kq}{n} = \begin{cases}\binom{k}{l} & n = lq\\ 0 & n \not\equiv 0 \mod q\end{cases}$$

gilt. Schließlich haben wir

$$\begin{aligned}\Phi_k\left(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\mathcal{E}_q^k\right)&=\Phi_k\left(\mathcal{E}_0^k\right)\\&=X^{kq}=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)Y^{kq}\\&=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\Phi_k\left(\mathcal{E}_q^k\right)\end{aligned}$$

und die G-Äquivarianz von Φ_k ist gezeigt.

(ii) Wir müssen zeigen, dass die in Teil (i) angegebenen Abbildungen verträglich sind mit der multiplikativen Struktur auf M. Die Verträglichkeit mit Gewicht 0 ist wegen

$$M_0\cong\mathcal{C}_\infty\cong\mathrm{Sym}^0(V)$$

trivial. Seien also $k,l\in\mathbb{N}$.

Wir sehen direkt, dass

$$\begin{aligned}\Phi_k\left(\mathcal{E}_q^k\right)\Phi_l\left(\mathcal{E}_q^l\right)&=Y^{kq}Y^{lq}\\&=Y^{(k+l)q}=\Phi_{k+l}\left(\mathcal{E}_q^{k+l}\right)\\&=\Phi_{k+l}\left(\mathcal{E}_q^k\,\mathcal{E}_q^l\right)\end{aligned}$$

gilt. Ebenso erhalten wir für $0\le i\le k-1$ und $0\le b\le q-1$

$$\begin{aligned}\Phi_k\left(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i\right)\Phi_l\left(\mathcal{E}_q^l\right)&=X^{kq-iq-b}Y^{iq+b}Y^{lq}\\&=X^{kq-iq-b}Y^{(i+l)q+b}\\&=X^{(k+l)q-(i+l)q-b}Y^{(i+l)q+b}\\&=\Phi_{k+l}\left(\mathcal{E}_0^{k+l-1-i-l}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^{i+l}\right)\\&=\Phi_{k+l}\left(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i\,\mathcal{E}_q^l\right).\end{aligned}$$

Ist ferner $0\le j\le l-1$ und $0\le c\le q-1$, so haben wir auf der einen Seite

$$\begin{aligned}\Phi_k\left(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i\right)\Phi_l\left(\mathcal{E}_0^{l-1-j}\mathcal{E}_c\mathcal{E}_q^j\right)&=X^{kq-iq-b}Y^{iq+b}X^{lq-jq-c}Y^{jq+c}\\&=X^{(k+l)q-(i+j)q-b-c}Y^{(i+j)q+b+c}.\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite überführen wir zunächst das Produkt

$$\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i\,\mathcal{E}_0^{l-1-j}\mathcal{E}_c\mathcal{E}_q^j=\mathcal{E}_0^{k+l-2-i-j}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_c\mathcal{E}_q^{i+j}$$

in Normalform, um anschließend die Abbildung Φ_{k+l} auf dieser Modulform vom Gewicht $k+l$ auszuwerten. Wir benötigen dazu eine Fallunterscheidung nach dem Wert von $b+c$, da nach Lemma 2.14 gilt:

$$\mathcal{E}_b\mathcal{E}_c=\begin{cases}\mathcal{E}_0\mathcal{E}_{b+c} & b+c\le q\\ \mathcal{E}_{b+c-q}\mathcal{E}_q & b+c>q.\end{cases}$$

Für $b + c \leq q$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\Phi_{k+l}\left(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i\,\mathcal{E}_0^{l-1-j}\mathcal{E}_c\mathcal{E}_q^j\right) &= \Phi_{k+l}\left(\mathcal{E}_0^{k+l-1-i-j}\mathcal{E}_{b+c}\mathcal{E}_q^{i+j}\right)\\ &= X^{(k+l)q-(i+j)q-b-c}Y^{(i+j)q+b+c}.\end{aligned}$$

(Die angegebene Formel ist verträglich mit dem Fall $b + c = q$.)

Ist $q + 1 \leq b + c \leq 2(q - 1)$, d.h. $1 \leq b + c - q \leq q - 2$, so folgt

$$\begin{aligned}\Phi_{k+l}\left(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i\,\mathcal{E}_0^{l-1-j}\mathcal{E}_c\mathcal{E}_q^j\right) &= \Phi_{k+l}\left(\mathcal{E}_0^{k+l-1-i-j-1}\mathcal{E}_{b+c-q}\mathcal{E}_q^{i+j+1}\right)\\ &= X^{(k+l)q-(i+j+1)q-b-c+q}Y^{(i+j+1)q+b+c-q}\\ &= X^{(k+l)q-(i+j)q-b-c}Y^{(i+j)q+b+c}.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass in beiden Fällen tatsächlich

$$\Phi_k\left(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i\right)\Phi_l\left(\mathcal{E}_0^{l-1-j}\mathcal{E}_c\mathcal{E}_q^j\right) = \Phi_{k+l}\left(\mathcal{E}_0^{k-1-i}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^i\,\mathcal{E}_0^{l-1-j}\mathcal{E}_c\mathcal{E}_q^j\right)$$

gilt.

Damit ist die Verträglichkeit der Isomorphismen aus Teil (i) mit der Multiplikation in M gezeigt.

□

Bemerkung. (i) Im Fall $k = 1$ stimmt die Abbildung

$$\Phi_1 : M_1 = \mathrm{Eis}_1 \to \mathrm{Sym}^q(V)$$

mit dem G-Isomorphismus aus Proposition 7.8 überein.

(ii) Da die Darstellungstheorie von symmetrischen Potenzen $\mathrm{Sym}^n(V)$ nur für $n \leq q$ vollständig beschrieben ist, genügt die angegebene Identifikation der M_k mit den symmetrischen Potenzen $\mathrm{Sym}^{kq}(V)$ noch nicht, um beispielsweise die Bestimmung der Kompositionsfaktoren der M_k sowie ihrer Vielfachheiten auf bekannte Ergebnisse zurückführen zu können.

(iii) Konzepte, die in der Theorie Drinfeld'scher Modulformen in natürlicher Weise auftreten, wie etwa Eisenstein-Reihen oder Spitzenformen, können nun allgemein im Kontext der Darstellungstheorie symmetrischer Potenzen betrachtet werden. Dabei ist nicht von vornherein offensichtlich, wie die korrespondierenden Objekte aussehen.

Wir können die in Satz 2.11 gegebene Beschreibung der Algebra M als Erzeugnis der Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 nun in die allgemeine Theorie symmetrischer Potenzen einordnen. Dazu betrachten wir die folgende äquivalente Formulierung von Korollar 2.12:

8.3 Proposition. *Für $k \in \mathbb{N}_0$ existiert eine surjektive Abbildung*

$$\mathrm{Sym}^k(M_1) \twoheadrightarrow M_k.$$

Gemäß Satz 8.2 ist diese Proposition äquivalent zur Existenz einer surjektiven Abbildung

$$\mathrm{Sym}^k(\mathrm{Sym}^q(V)) \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}^{kq}(V)$$

für $k \in \mathbb{N}$. Es handelt sich also um einen Spezialfall der folgenden allgemeinen Situation:

8.4 Proposition. *Sei W ein beliebiger Vektorraum und $m, n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine kanonische surjektive Abbildung von $\mathrm{Sym}^m(\mathrm{Sym}^n(W))$ nach $\mathrm{Sym}^{mn}(W)$.*

Beweis. Für $l \in \mathbb{N}$ sei p_l der kanonische Homomorphismus

$$p_l : T^l(W) \to \mathrm{Sym}^l(W),$$

wobei $T^l(W)$ das l-fache Tensorprodukt von W bezeichnet (vergleiche [Bou89, III, §6, no. 3]).

Sei $x^{(1)} \cdots x^{(m)}$ ein beliebiges Element von $\mathrm{Sym}^m(\mathrm{Sym}^n(W))$, d.h., für $1 \leq i \leq m$ sei $x^{(i)} \in \mathrm{Sym}^n(W)$ beliebig und besitze eine Darstellung

$$x^{(i)} = x_1^{(i)} \cdots x_n^{(i)} = p_n(x_1^{(i)} \otimes \cdots \otimes x_n^{(i)}) \quad \text{mit } x_j^{(i)} \in W.$$

Wir bilden $x^{(1)} \cdots x^{(m)}$ ab auf das Element

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} x_j^{(i)} = p_{mn}(x_1^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_n^{(1)} \otimes x_1^{(2)} \otimes \cdots \otimes x_n^{(2)} \otimes \cdots \otimes x_1^{(m)} \otimes \cdots \otimes x_n^{(m)})$$

von $\mathrm{Sym}^{mn}(W)$.

Die so definierte Abbildung ist wohldefiniert, kanonisch und surjektiv. □

Bemerkung. Die in Proposition 8.4 betrachteten Abbildungen sind nach Definition verträglich mit der natürlichen Operation der Automorphismengruppe $\mathrm{GL}(W)$ auf W und den Fortsetzungen dieser Operation auf das Tensorprodukt sowie die symmetrischen Potenzen.

8.2 Untermoduln von M_k

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Untermoduln von M_k, die sich durch die in Satz 7.9 beschriebene Untermodulstruktur von $M_1 = \mathrm{Eis}_1$ ergeben. Insbesondere interessiert uns das Verhältnis dieser Untermoduln zur Spitzenfiltrierung.

Es sind dabei noch nicht alle offenen Fragen geklärt, einige Teilergebnisse können wir jedoch im Folgenden angeben.

Da sich die Untermodulstruktur von Eis_1 für $q = 2$ stark von der für $q > 2$ unterscheidet, führen wir an dieser Stelle eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1: $q > 2$

Nach Satz 7.9 hat $M_1 = \mathrm{Eis}_1$ in dieser Situation den Untermodulverband

$$\{0\} \subseteq U_0 \subseteq U_1 \subseteq \ldots \subseteq U_r = M_1$$

mit den Untermoduln

$$U_i = \left\langle \mathcal{E}_j \mid 0 \leq j \leq q,\, j \equiv 0 \bmod p^{r-i} \right\rangle, \quad 0 \leq i \leq r.$$

8.5 Notation. Wir betrachten für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ die surjektive Abbildung

$$\mathrm{Sym}^k(M_1) \twoheadrightarrow M_k$$

aus Proposition 8.3. Für $0 \leq i \leq r$ ist das Bild des Untermoduls

$$\mathrm{Sym}^k(U_i) \subseteq \mathrm{Sym}^k(M_1)$$

unter dieser Abbildung (d.h. unter Anwendung der Relationen (2.1)) seinerseits ein Untermodul W_k^i von M_k.

Auf diese Weise erhalten wir eine Filtrierung von M_k:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{Sym}^k(U_0) & \subseteq & \mathrm{Sym}^k(U_1) & \subseteq & \cdots & \subseteq & \mathrm{Sym}^k(U_r) & = & \mathrm{Sym}^k(M_1) \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
W_k^0 & \subseteq & W_k^1 & \subseteq & \cdots & \subseteq & W_k^r & = & M_k
\end{array}$$

Wir wollen die Untermoduln $W_k^i \subseteq M_k$ genauer untersuchen. Im Spezialfall $i = 0$ wissen wir bereits:

8.6 Lemma. *Für $k \in \mathbb{N}$ ist $W_k^0 = \mathrm{Sym}^k(U_0)$.*

Beweis. Da $U_0 = \langle \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_q \rangle$ ist, beschreiben verschiedene Monome in $\mathrm{Sym}^k(U_0)$ stets auch verschiedene Modulformen. □

Um im allgemeinen Fall Basen der Untermoduln W_k^i zu bestimmen, definieren wir die folgenden Mengen:

8.7 Notation/Lemma. Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$B_k^0 := \{\mathcal{E}_0^{k-l}\mathcal{E}_q^l \mid 0 \leq l \leq k\}.$$

Für $1 \leq j \leq r$ setzen wir weiter

$$B_k^j := \{\mathcal{E}_0^{k-1-l}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^l \mid 0 \leq l \leq k-1,\, 1 \leq b \leq q-1,\, p^{r-j} \text{ teilt } b \text{ exakt}\},$$

so dass

$$\bigcup_{j=1}^{i} B_k^j = \{\mathcal{E}_0^{k-1-l}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^l \mid 0 \leq l \leq k-1,\, 1 \leq b \leq q-1,\, b \equiv 0 \bmod p^{r-i}\}$$

gilt.

Die Teilbarkeitsbedingung aus der Definition der B_k^j ist im Fall $j = r$ äquivalent zur Teilerfremdheit von b und p.

8.8 Lemma. *Sei $q > 2$ und sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $0 \leq i \leq r$: Die Menge*

$$B_k^{i,-} := \bigcup_{j=0}^{i} B_k^j \qquad \textit{(disjunkte Vereinigung)}$$

ist eine Basis des Untermoduls $W_k^i \subseteq M_k$.

Beweis. Ein beliebiges Monom in den Eisenstein-Reihen aus U_i kann gemäß Proposition 2.15 in Normalform überführt werden. Die dort beschriebene Formel liefert direkt, dass auch in der resultierenden Normalform nur Eisenstein-Reihen aus U_i auftreten, dass also alle Indizes modulo p^{r-i} kongruent zu Null sind.

Nach Konstruktion ist $B_k^{i,-}$ die Menge all dieser Normalformen, also ein Erzeugendensystem von W_k^i, und sogar eine Basis, da Monome in Normalform nach Lemma 2.17 linear unabhängig sind. □

8.9 Korollar. *Sei $q > 2$ und sei $k \in \mathbb{N}$. Für $0 \leq i \leq r$ ist*

$$\dim W_k^i = kp^i + 1.$$

Ist $i \leq r - 1$, so gilt

$$\operatorname{codim}_{W_k^{i+1}} W_k^i = kp^i(p-1).$$

Beweis. Nach Konstruktion gilt

$$\#B_k^0 = k + 1$$

und

$$\#B_k^j = k(p^j - p^{j-1}) \quad \text{für } 1 \leq j \leq r.$$

□

Die alternative Beschreibung der Untermoduln von $N[1]$ als Frobenius-Twists von symmetrischen Potenzen aus Proposition 6.59 lässt sich auf die betrachteten Moduln übertragen.

8.10 Proposition. *Sei $q > 2$ und sei $k \in \mathbb{N}$. Für $0 \leq i \leq r$ gilt*

$$W_k^i \cong \left(\operatorname{Sym}^{kp^i}(V)\right)^{\theta^{r-i}}$$

als Isomorphie von G-Moduln.

Beweis. Wir verallgemeinern den Beweis von Proposition 6.59, indem wir den Modul W_k^i mit Hilfe des G-Isomorphismus $\Phi_k : M_k \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}^{kq}(V)$ aus Satz 8.2 nach $\mathrm{Sym}^{kq}(V)$ einbetten.

Wir betrachten die Elemente der Basis $B_k^{i,-}$ von W_k^i unter dieser Abbildung.

Ist $0 \leq b \leq q-1$ mit $b \equiv 0 \bmod p^{r-i}$, so existiert $0 \leq b' \leq p^i - 1$ mit $b = p^{r-i}b'$. Für $0 \leq l \leq k-1$ gilt dann

$$\begin{aligned}\Phi_k(\mathcal{E}_0^{k-1-l}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^l) &= X^{kq-lq-b'p^{r-i}}Y^{lq+b'p^{r-i}} \\ &= \left(X^{kp^i-lp^i-b'}Y^{lp^i+b'}\right)^{p^{r-i}}.\end{aligned}$$

Ebenso sehen wir direkt

$$\Phi_k(\mathcal{E}_q^k) = \left(Y^{kp^i}\right)^{p^{r-i}}.$$

Wie im Beweis von Proposition 6.59 folgt damit die Behauptung. □

Es stellt sich die Frage, wie die neue Filtrierung von M_k durch die W_k^i mit der Spitzenfiltrierung (mit zusätzlichem direkten Summanden Eis_k) verträglich ist. Wir untersuchen dazu die Zerlegung der Basiselemente der Untermoduln W_k^i gemäß der direkten Summenzerlegung

$$M_k = \mathrm{Eis}_k \oplus M_k^1,$$

und ferner die Position des Spitzenformenanteils innerhalb der Spitzenfiltrierung

$$M_k^1 \supseteq M_k^2 \supseteq \ldots \supseteq M_k^{\mathtt{m}(k)}.$$

Betrachten wir an dieser Stelle Gewichte $k \leq q$, so erhalten wir erste Ergebnisse mit Hilfe der Resultate aus Abschnitt 2.4.

8.11 Proposition. *Sei* $q > 2$. *Ist* $1 \leq k \leq q$, *so gilt*

$$\mathrm{Sym}^k(U_0) = \left\langle \mathcal{E}_n^{(k)}, \mathcal{E}_\infty^{(k)} \mid 0 \leq n \leq k-1 \right\rangle \subseteq \mathrm{Eis}_k.$$

Insbesondere ist $\mathrm{Sym}^q(U_0) = \mathrm{Eis}_q$.

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen folgt aus Satz 2.29 direkt, dass

$$B_k^0 = \{\mathcal{E}_n^{(k)}, \mathcal{E}_\infty^{(k)} \mid 0 \leq n \leq k-1\}$$

ist. Die Gleichheit im Fall $k = q$ folgt aus Dimensionsgründen. □

Für $k > q$ enthält $\mathrm{Sym}^k(U_0)$ dagegen neben Nicht-Spitzenformen auch Spitzenformen: Die Modulform $\mathcal{E}_0^k$ verschwindet nicht an der Spitze $(0:1)$, andererseits muss es wegen

$$\dim \mathrm{Sym}^k(U_0) = k+1 > q+1 = \dim \mathrm{Eis}_k$$

auch Elemente ohne Eisenstein-Reihenanteil, d.h. Spitzenformen, geben. Allgemeiner erhalten wir mit dem gleichen Dimensionsargument:

8.12 Lemma. *Sei $q > 2$ und $k \in \mathbb{N}$. Ist $0 \leq i \leq r$ so, dass*

$$k > p^{r-i}$$

gilt, dann enthält der Modul W_k^i nichttriviale Spitzenformen.

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist

$$\dim W_k^i = kp^i + 1 > q + 1 = \dim \mathrm{Eis}_k.$$

$\square$

Wir zeigen für $k \leq q$, dass die angegebene Bedingung an i tatsächlich nicht nur notwendig, sondern hinreichend ist. Dazu betrachten wir für die Normalformen in den Mengen B_k^j mit $1 \leq j \leq r$ die eindeutige Zerlegung in einen Eisenstein-Reihen- und einen Spitzenformenanteil, die wir in Lemma 2.31 (beziehungsweise der zugehörigen Bemerkung) bestimmt haben:

Ist $k \leq q$, so gilt für $0 \leq l \leq k-1$ und $1 \leq b \leq q-1$ die Zerlegung

$$\mathcal{E}_0^{k-1-l}\mathcal{E}_b\mathcal{E}_q^l = \underbrace{\mathcal{E}_{[b+l]}^{(k)}}_{\in \mathrm{Eis}_k} + \underbrace{\sum_{n=1}^{k-1} \binom{b}{n}(-1)^n \mathcal{E}_{\langle b+l-n\rangle}^{(k-n)} E_\infty^n}_{\in M_k^1}. \tag{8.1}$$

Erfüllt b nun zusätzlich eine Teilbarkeitsbedingung der Gestalt, wie sie in der Definition der Mengen B_k^j mit $1 \leq j \leq r$ verlangt ist, so können wir den Spitzenformenanteil genauer beschreiben. Dazu zeigen wir zunächst eine Hilfsaussage.

8.13 Lemma. *Sei $q > 2$ und $1 \leq k \leq q$. Ferner seien $0 \leq l \leq k-1$ und $1 \leq b \leq q-1$. Dann gilt für $1 \leq n \leq k-1$: Die Modulform $\mathcal{E}_{\langle b+l-n\rangle}^{(k-n)} E_\infty^n$ verschwindet an der Spitze ∞ mindestens mit Ordnung $q-b$.*

An den Spitzen $(\alpha : 1)$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_q$ besitzt sie mindestens Nullstellenordnung n, und es existiert $\beta \in \mathbb{F}_q$, so dass die Nullstellenordnung an $(\beta : 1)$ genau n ist.

Beweis. Aus Proposition 2.20 wissen wir, dass der Faktor E_∞^n an den Spitzen $(\alpha : 1)$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_q$ genau Nullstellenordnung n besitzt und an der Spitze ∞ nicht verschwindet.

Wir untersuchen als Nächstes die Nullstellenordnung der Modulform $\mathcal{E}_{\langle b+l-n\rangle}^{(k-n)}$ an der Spitze ∞. Dazu unterscheiden wir drei Fälle:

(i) $0 \leq b+l-n \leq k-n-1$

In diesem Fall ist insbesondere $b+l-n \leq q-1$, es gilt also $\mathcal{E}_{\langle b+l-n\rangle}^{(k-n)} = \mathcal{E}_{b+l-n}^{(k-n)}$. Da die Voraussetzungen von Proposition 2.30 erfüllt sind, wissen wir: Die Nullstellenordnung von $\mathcal{E}_{b+l-n}^{(k-n)}$ an ∞ ist

$$(k-n-(b+l-n))q \geq q.$$

(ii) $k - n \leq b + l - n \leq q - 1$

Dann ist ebenfalls $\langle b + l - n \rangle = b + l - n$ und wir erhalten mit Hilfe von Satz 2.32 eine Zerlegung

$$\mathcal{E}_{b+l-n}^{(k-n)} = \sum_{i=0}^{k-n-1} \mu_i^{(b+l-n,k-n)} \mathcal{E}_0^{k-n-1-i} \mathcal{E}_{b+l-n-i} \mathcal{E}_q^i.$$

Dabei gilt: Die Modulformen in den Summanden für $i < k - n - 1$ enthalten mindestens einen Faktor $\mathcal{E}_0$, verschwinden also an ∞ mindestens mit Ordnung q. Für $i = k - n - 1$ erhalten wir die Modulform

$$\mathcal{E}_{b+l-k+1} \mathcal{E}_q^{k-n-1},$$

die an ∞ mit Ordnung

$$q - b - l + k - 1 \geq q - b$$

verschwindet.

(iii) $q \leq b + l - n$

Die Abschätzung $b + l - n \leq q - 1 + k - 1 - n$ liefert

$$\langle b + l - n \rangle = b + l - n - (q - 1) \in \{1, \ldots, k - n - 1\}.$$

Wir erhalten damit wiederum durch Anwendung von Proposition 2.30: Die Nullstellenordnung von $\mathcal{E}_{\langle b+l-n \rangle}^{(k-n)} = \mathcal{E}_{b+l-n-(q-1)}^{(k-n)}$ an der Spitze ∞ ist

$$(k - n - (b + l - n) + (q - 1))q \geq q.$$

In jedem Fall sehen wir, dass die Verschwindungsordnung von $\mathcal{E}_{\langle b+l-n \rangle}^{(k-n)}$ an ∞ größer oder gleich $q - b$ ist.

Damit wissen wir insbesondere, dass $\beta \in \mathbb{F}_q$ existiert, so dass die Eisenstein-Reihe $\mathcal{E}_{\langle b+l-n \rangle}^{(k-n)}$ an $(\beta : 1)$ nicht verschwindet (da eine Eisenstein-Reihe keine Spitzenform sein kann). Folglich ist die Nullstellenordnung von $\mathcal{E}_{\langle b+l-n \rangle}^{(k-n)} E_\infty^n$ an dieser Spitze genau n. $\square$

8.14 Lemma. *Sei $q > 2$ und $1 \leq k \leq q$. Wir betrachten die Zerlegung* (8.1) *einer Normalform $\mathcal{E}_0^{k-1-l} \mathcal{E}_b \mathcal{E}_q^l$ mit $0 \leq l \leq k - 1$ und $1 \leq b \leq q - 1$.*

Ist die Normalform ein Element von B_k^j für $1 \leq j \leq r$, d.h., ist p^{r-j} ein exakter Teiler von b, dann gilt:

(i) Falls $k \leq p^{r-j}$ ist, so verschwindet der Spitzenformenanteil in der Zerlegung.

(ii) Gilt $k > p^{r-j}$, so liegt der Spitzenformenanteil in $M_k^{p^{r-j}}$ und in keinem kleineren Filtrierungsmodul der Spitzenfiltrierung. Insbesondere ist der Spitzenformenanteil von Null verschieden.

Beweis. Die angegebene Gestalt des Spitzenformenanteils ergibt sich aus dem Verschwinden bestimmter Binomialkoeffizienten in endlicher Charakteristik.

Nach Voraussetzung an b ist die Bedingung

$$n \equiv 0 \mod p^{r-j}$$

notwendig dafür, dass der Binomialkoeffizient $\binom{b}{n}$ nicht verschwindet (siehe Kriterium A.9). Betrachten wir dabei nur $n \geq 1$, so muss insbesondere $n \geq p^{r-j}$ gelten.

Da für $k \leq p^{r-j}$ die Summationsindizes n aber der Ungleichung

$$1 \leq n \leq k-1 < p^{r-j}$$

genügen, verschwinden in diesem Fall alle Summanden des Spitzenformenanteils in Zerlegung (8.1).

Im Folgenden gelte also $k > p^{r-j}$.

Für die Modulform $\mathcal{E}^{(k-n)}_{\langle b+l-n\rangle} E^n_\infty$ aus dem n-ten Summanden des Spitzenformenanteils haben wir in Lemma 8.13 Abschätzungen für die Nullstellenordnungen an den Spitzen bestimmt:

Die Nullstellenordnung an ∞ ist mindestens $q-b$. Nach Voraussetzung an b gilt dabei $b \leq q - p^{r-j}$, so dass diese Nullstellenordnung mindestens p^{r-j} ist.

An den Spitzen $(\alpha : 1)$ mit $\alpha \in \mathbb{F}_q$ beträgt die Nullstellenordnung mindestens n. Da zur Bestimmung des Spitzenformenanteils aber nur solche n betrachtet werden müssen, für die der Binomialkoeffizient $\binom{b}{n}$ nicht verschwindet, können wir an dieser Stelle voraussetzen, dass $n \geq p^{r-j}$ gilt.

Wir sehen insgesamt, dass der Spitzenformenanteil aus Zerlegung (8.1) tatsächlich eine Spitzenform der Ordnung p^{r-j} ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass diese Spitzenform an mindestens einer Spitze genau mit Ordnung p^{r-j} verschwindet.

Dazu betrachten wir den Summanden zu $n = p^{r-j}$. Schreiben wir $b = p^{r-j}b'$ mit $b' \not\equiv 0 \bmod p$, so gilt nach Variante A.8 der Lucas-Kongruenz

$$\binom{b}{p^{r-j}} = \binom{b'}{1} = b' \not\equiv 0 \mod p.$$

Die Modulform $\mathcal{E}^{(k-p^{r-j})}_{\langle b+l-p^{r-j}\rangle} E^{p^{r-j}}_\infty$ tritt im Spitzenformenanteil also mit von Null verschiedenem Koeffizienten auf.

Nach Lemma 8.13 existert eine Spitze $(\beta : 1)$ für ein $\beta \in \mathbb{F}_q$, an der diese Modulform Nullstellenordnung p^{r-j} besitzt. Wir haben aber bereits gezeigt, dass die übrigen Modulformen $\mathcal{E}^{(k-n)}_{\langle b+l-n\rangle} E^n_\infty$ mit $n > p^{r-j}$ an dieser Spitze mit einer Nullstellenordnung verschwinden, die echt größer ist als p^{r-j}. Es kann damit zu keiner Auslöschung an dieser Spitze kommen, und die Behauptung ist gezeigt. □

Wir erhalten damit die folgende Verallgemeinerung von Proposition 8.11:

8.15 Proposition. *Sei $q > 2$ und $1 \leq k \leq q$. Ferner sei $0 \leq i \leq r$ so, dass $k \leq p^{r-i}$ gilt. Dann ist*

$$W^i_k = \left\langle \mathcal{E}^{(k)}_n, \mathcal{E}^{(k)}_\infty \mid 0 \leq n \leq q-1,\ n \equiv 0, \ldots, k-1 \bmod p^{r-i} \right\rangle \subseteq \mathrm{Eis}_k.$$

Beweis. Wir haben bereits im Beweis von Proposition 8.11 festgehalten, dass

$$B_k^0 = \{\mathcal{E}_n^{(k)}, \mathcal{E}_\infty^{(k)} \mid 0 \leq n \leq k-1\}$$

gilt. Im Fall $i = 0$ ist der Beweis damit abgeschlossen, andernfalls müssen wir noch die Elemente der Teilmenge $\bigcup_{j=1}^i B_k^j$ der Basis $B_k^{i,-}$ von W_k^i betrachten.

Da in dieser Situation

$$k \leq p^{r-i} \leq p^{r-j}$$

ist, liefert der erste Fall von Lemma 8.14, dass es sich bei diesen Basiselementen um Eisenstein-Reihen handelt.

Genauer treten alle $\mathcal{E}_{[b+l]}^{(k)}$ auf, für die $0 \leq l \leq k-1$ und $1 \leq b \leq q-1$ mit $b \equiv 0 \bmod p^{r-i}$ ist. Nach Voraussetzung ist dabei

$$l \leq p^{r-i} - 1,$$

woraus wir

$$p^{r-i} \leq b + l \leq q - p^{r-i} + p^{r-i} - 1 = q - 1$$

erhalten. Insbesondere ist damit $[b + l] = b + l$.

Wir sehen, dass die Menge $\bigcup_{j=1}^i B_k^j$ also genau aus den Eisenstein-Reihen $\mathcal{E}_n^{(k)}$ mit $p^{r-j} \leq n \leq q-1$ besteht, für die n modulo p^{r-i} einen Rest in $\{0, \dots, k-1\}$ besitzt. Zusammen mit der eingangs gegebenen Beschreibung von B_k^0 folgt die Behauptung. □

Im verbleibenden Fall liefert Lemma 8.14, dass sich die Moduln W_k^i wie folgt in die Spitzenfiltrierung einfügen:

8.16 Proposition. *Sei $q > 2$ und sei $1 \leq k \leq q$. Weiter sei $1 \leq i \leq r$ so, dass $k > p^{r-i}$ gilt. Dann ist*

$$W_k^i \subseteq \mathrm{Eis}_k \oplus M_k^{p^{r-i}},$$

und es existieren Elemente in W_k^i, deren jeweilige Spitzenformenanteile in keinem kleineren Untermodul der Spitzenfiltrierung liegen.

Bemerkung. Bei der Verallgemeinerung der bisherigen Ergebnisse auf den Fall $k > q$ treten vergleichbare Fragestellungen auf wie bei der Verallgemeinerung der Resultate über algebraische Zusammenhänge zwischen Eisenstein-Reihen in Abschnitt 2.4 für Gewichte $k > q$.

Fall 2: $q = 2$

Im Fall $q = 2$ haben wir in Satz 7.9 die direkte Summenzerlegung

$$M_1 = \mathrm{Eis}_1 = \langle \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_2 \rangle \oplus \langle \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \rangle$$

bestimmt. Insbesondere ist das Element

$$\mathcal{F} := \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

invariant unter der Operation von G.

Wir können eine Variante der Relationen (2.1) angeben, die besser mit dieser direkten Summenzerlegung von M_1 verträglich ist:

8.17 Lemma. *Sei $q = 2$. Die Relation*

$$\mathcal{E}_1^2 = \mathcal{E}_0\mathcal{E}_2$$

aus Satz 2.11, die der surjektiven Abbildung $\operatorname{Sym}^k(M_1) \twoheadrightarrow M_k$ *für* $k \in \mathbb{N}$ *zugrunde liegt, ist äquivalent zur Relation*

$$\mathcal{F}^2 = \mathcal{E}_0^2 + \mathcal{E}_0\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_2^2. \tag{8.2}$$

Beweis. Nach Definition ist

$$\mathcal{F}^2 = \mathcal{E}_0^2 + \mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2.$$

Die beiden Relationen sind somit offensichtlich äquivalent. □

Ausgehend von der direkten Summenzerlegung von M_1 können wir nun eine direkte Summenzerlegung von M_k angeben:

8.18 Proposition. *Sei $q = 2$ und $k \in \mathbb{N}$. Der Modul M_k ist eine direkte Summe von G-Moduln*

$$\begin{aligned} M_k &= \operatorname{Sym}^k(\langle \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_2 \rangle) \oplus \mathcal{F} \operatorname{Sym}^{k-1}(\langle \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_2 \rangle) \\ &\cong \operatorname{Sym}^k(V) \oplus \operatorname{Sym}^{k-1}(V). \end{aligned}$$

Beweis. Betrachten wir ein beliebiges Monom vom Grad k in $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_2$ und $\mathcal{F}$, so existiert aufgrund von Relation (8.2) ein homogenes Polynom vom Grad k in $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_2$ und $\mathcal{F}$, das die gleiche Modulform beschreibt, wobei $\mathcal{F}$ in jedem Term maximal mit Exponent 1 auftritt. Wir erhalten somit die angegebene Summenzerlegung von Vektorräumen, die offenbar direkt ist.

Da die Modulform $\mathcal{F}$ aber G-invariant ist, handelt es sich sogar um eine direkte Summe von G-Moduln, die offenbar die angegebene Isomorphie erfüllt. □

Bemerkung. Im Spezialfall $k = 1$ beschreibt die Proposition die ursprüngliche Zerlegung von $M_1 = \mathrm{Eis}_1$ aus Satz 7.9. Im Fall $k = 2$ gilt für den ersten direkten Summanden

$$\operatorname{Sym}^2(\langle \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_2 \rangle) = \mathrm{Eis}_2,$$

vergleiche dazu die entsprechende Aussage für $k = q$ im Fall $q > 2$ in Proposition 8.11. Allerdings entspricht der zweite Summand nicht dem Modul der Spitzenformen, da man nach kurzer Rechnung sieht, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mathcal{E}_0 &= \mathcal{E}_0^2 + \mathcal{E}_0\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0\mathcal{E}_2 = \underbrace{\mathcal{E}_0^2}_{\in \mathrm{Eis}_2} + \underbrace{\mathcal{E}_0 E_\infty}_{\in M_2^1}, \\ \mathcal{F}\mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_0\mathcal{E}_2 = \underbrace{\mathcal{E}_2^2}_{\in \mathrm{Eis}_2} + \underbrace{\mathcal{E}_1 E_\infty}_{\in M_2^1} \end{aligned}$$

gilt.

Für größere Gewichte kann der Zusammenhang zwischen der hier angegebenen Summenzerlegung und der Zerlegung in Eisenstein-Reihen und Spitzenformen (mit Spitzenfiltrierung) weiter untersucht werden.

9 Darstellungstheorie der Spitzenfiltrierung

Wir betrachten in diesem Kapitel den Modul M_k^1 der Spitzenformen vom Gewicht $k \geq 2$. Konkret greifen wir auf die Beschreibung der Vektorraumstruktur der Spitzenfiltrierung aus Kapitel 3 zurück, um die G-Modulstruktur der Spitzenfiltrierung zu untersuchen. Dabei werden wir nicht ein Gewicht isoliert betrachten, sondern vielmehr ausnutzen, dass die multiplikative Struktur der Algebra M Zusammenhänge zwischen Modulformen verschiedener Gewichte liefert.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels konstruieren wir dazu mit Hilfe einer besonderen Modulform Isomorphismen zwischen bestimmten Filtrierungsmoduln unterschiedlicher Gewichte.

Damit können wir im zweiten Abschnitt die G-Modulstruktur des kleinsten Untermoduls der Spitzenfiltrierung für beliebiges Gewicht bestimmen.

Im dritten Abschnitt betrachten wir die übrigen Filtrierungsmoduln, indem wir das Transformationsverhalten ausgewählter Teilmengen $\mathcal{B}_k^i$ der Basis $\mathcal{B}_k^{1,+}$ unter der Operation von G untersuchen. Aufgrund der Komplexität der erforderlichen Rechnungen beschränken wir uns dabei schließlich auf die Untersuchung der sukzessiven Quotienten der Spitzenfiltrierung.

Das Hauptergebnis dieses Kapitels ist eine geschlossene Formel, die die sukzessiven Quotienten der Spitzenfiltrierung mit bekannten G-Moduln identifiziert. Die an dieser Stelle offenbleibende Frage nach einer vergleichbaren Identifikation der Filtrierungsmoduln M_k^i werden wir in Kapitel 10 mit einer alternativen Herangehensweise wieder aufgreifen.

Zusammen mit der Beschreibung des Moduls Eis_k in Kapitel 7 können wir diese Ergebnisse auf den Modul $M_k = \mathrm{Eis}_k \oplus M_k^1$ der Modulformen vom Gewicht k übertragen.

9.1 Identifikation von Filtrierungsmoduln verschiedener Gewichte

Bevor wir mit den eigentlichen Untersuchungen beginnen, erinnern wir an Notationen und Ergebnisse aus Kapitel 3, die wir im Folgenden verwenden werden.

9.1 (Erinnerung). Für beliebiges Gewicht $k \in \mathbb{N}$ schreiben wir

$$k = \mathfrak{k} + \widehat{\mathfrak{k}}(q+1) \quad \text{mit } 1 \leq \mathfrak{k} \leq q+1$$

sowie

$$\mathfrak{m}(k) = \left\lfloor \frac{kq}{q+1} \right\rfloor = \mathfrak{k} - 1 + \widehat{\mathfrak{k}}q.$$

Dann ist $\mathfrak{m}(k)$ die Länge der Spitzenfiltrierung des Moduls M_k^1 für $k \geq 2$.

Weiter haben wir für $k \geq 2$ in Konstruktion 3.6 Basen

$$\mathcal{B}_k^{i,+} = \bigcup_{i \leq j \leq \mathfrak{m}(k)} \mathcal{B}_k^j$$

der Moduln M_k^i mit $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$ bestimmt.

9.2 Notation. Ist $k \geq 2$ gegeben, so nennen wir den kleinsten (nichttrivialen) Modul der Spitzenfiltrierung $M_k^{\mathfrak{m}(k)}$ auch das *Endstück* der Spitzenfiltrierung.

Sprechen wir vom *i-ten Filtrierungsmodul* mit $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$, so ist damit stets der Untermodul M_k^i der Spitzenfiltrierung gemeint.

Wir wissen aus Satz 3.21, dass der Untermodul M_{q+1}^q eindimensional ist, und dass es keinen eindimensionalen Filtrierungsmodul kleineren Gewichts gibt. Dieser Modul wird erzeugt von der Modulform

$$\mathcal{E}_0 E_\infty^q.$$

Die Operation von G auf dieser Modulform ist also durch einen Charakter gegeben, genauer:

9.3 Lemma. *Die Erzeuger von G operieren auf der Modulform $\mathcal{E}_0 E_\infty^q$ wie folgt:*

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_0 E_\infty^q &= a \mathcal{E}_0 E_\infty^q, \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_0 E_\infty^q &= \mathcal{E}_0 E_\infty^q, \\ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_0 E_\infty^q &= -\mathcal{E}_0 E_\infty^q. \end{aligned}$$

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sehen wir direkt mit Lemma 7.1 und Lemma 7.4. Im letzten Fall wenden wir zusätzlich Lemma 2.19 an und erhalten auf diese Weise

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_0 E_\infty^q &= \mathcal{E}_q E_0^q \\ &= (-1)^q \mathcal{E}_0 E_\infty^q \\ &= -\mathcal{E}_0 E_\infty^q. \end{aligned}$$

□

9.4 Korollar. *Es gilt*

$$M_{q+1}^q \cong (\det)^1$$

als Isomorphie von G-Moduln.

Bemerkung. Wir verweisen an dieser Stelle auf die Funktion h, die häufig bei der Untersuchung Drinfeld'scher Modulformen betrachtet wird (zum Beispiel in [Gek88]).

Aufgefasst als Modulform zur Gruppe $\Gamma(T)$ handelt es sich dabei um eine q-te Spitzenform des Gewichts $q+1$. Als Element von M^q_{q+1} ist sie also ein konstantes Vielfaches der hier betrachteten Spitzenform $\mathcal{E}_0 E^q_\infty$.

Das Interessante an dieser Modulform ist vereinfacht ausgedrückt, dass sie die bis auf Skalar eindeutige „kleinste“ (im Sinne des Gewichts) Modulform ist, auf der G „fast trivial“ operiert (nämlich als Charakter).

Wir wollen die Modulform $\mathcal{E}_0 E^q_\infty$ im Zusammenhang mit der multiplikativen Struktur auf der Algebra M der Modulformen untersuchen. Wenn wir die G-Modulstruktur zunächst vernachlässigen, erhalten wir:

9.5 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$. Durch Multiplikation mit $\mathcal{E}_0 E^q_\infty$ ist ein Vektorraumisomorphismus*

$$M^i_k \xrightarrow{\cong} M^{i+q}_{k+q+1}$$

gegeben.

Beweis. Multiplizieren wir eine Modulform $\mathcal{F} \in M^i_k$ mit $\mathcal{E}_0 E^q_\infty$, so erhalten wir offenbar eine Modulform vom Gewicht $k+q+1$, deren Nullstellenordnung an jeder Spitze mindestens um q höher ist als die von $\mathcal{F}$ an derselben Spitze, also ein Element von M^{i+q}_{k+q+1}.

Multiplikation mit $\mathcal{E}_0 E^q_\infty$ beschreibt somit einen Vektorraumhomomorphismus

$$M^i_k \to M^{i+q}_{k+q+1},$$

der wegen der Nullteilerfreiheit von M sogar injektiv ist. Da für die auftretenden Dimensionen aber

$$\begin{aligned} \dim M^i_k &= kq + 1 - i(q+1) \\ &= (k+q+1)q + 1 - (i+q)(q+1) \\ &= \dim M^{i+q}_{k+q+1} \end{aligned}$$

gilt, handelt es sich tatsächlich um einen Vektorraumisomorphismus. □

Um einen Isomorphismus zwischen G-Moduln zu erhalten, müssen wir den durch $\mathcal{E}_0 E^q_\infty$ zusätzlich auftretenden Determinantenfaktor bei der Operation von G geeignet berücksichtigen.

9.6 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$. Multiplikation mit $\mathcal{E}_0 E^q_\infty$ liefert einen G-Isomorphismus*

$$M^i_k \otimes (\det)^1 \xrightarrow{\cong} M^{i+q}_{k+q+1}.$$

Beweis. Wir bezeichnen die angegebene Multiplikationsabbildung für die Dauer des Beweises mit φ.

In Lemma 9.5 haben wir bereits gezeigt, dass die Abbildung φ einen Vektorraumisomorphismus beschreibt (wie üblich identifizieren wir die zugrunde liegenden Vektorräume der G-Moduln M^i_k und $M^i_k \otimes (\det)^1$). Es bleibt somit nur die G-Äquivarianz von φ zu zeigen.

Seien dazu $\gamma \in G$ und $\mathcal{F} \in M_k^i$ beliebig. Sei $\mathcal{G} \in M_k^i$ so, dass $\gamma\mathcal{F} = \mathcal{G}$ gilt unter der gewöhnlichen Operation von G auf M_k^i.

Fassen wir $\mathcal{F}$ als Element von $M_k^i \otimes (\det)^1$ auf, so bezeichnen wir dort die Operation von γ auf $\mathcal{F}$ mit $\gamma \cdot \mathcal{F}$. Einerseits ist dann

$$\varphi(\gamma \cdot \mathcal{F}) = \varphi((\det\gamma)(\gamma\mathcal{F})) = (\det\gamma)\varphi(\mathcal{G}) = (\det\gamma)\mathcal{G}\mathcal{E}_0 E_\infty^q.$$

Da andererseits aber

$$\begin{aligned}\gamma\varphi(\mathcal{F}) &= \gamma\left(\mathcal{F}\mathcal{E}_0 E_\infty^q\right) = (\gamma\mathcal{F})(\gamma\mathcal{E}_0 E_\infty^q) = \mathcal{G}\left((\det\gamma)\mathcal{E}_0 E_\infty^q\right) \\ &= (\det\gamma)\mathcal{G}\mathcal{E}_0 E_\infty^q\end{aligned}$$

gilt, folgt die G-Äquivarianz von φ. □

Bemerkung. Wir werden im Folgenden nicht mehr so detailliert auf die Interpretation einer Modulform als Element verschiedener Determinantentwists eingehen. Insbesondere werden wir nicht mehr unterschiedliche Symbole für die getwisteten Operationen verwenden, da aus dem Zusammenhang stets hervorgeht, in welchem Modul gerechnet wird.

Indem wir in Lemma 9.6 die Schrittweite vergrößern, erhalten wir G-Isomorphismen zwischen Filtrierungsmoduln ohne zusätzliche Determinantentwists.

9.7 Korollar. *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$. Multiplikation mit $(\mathcal{E}_0 E_\infty^q)^{q-1}$ liefert einen G-Isomorphismus*

$$M_k^i \xrightarrow{\cong} M_{k+q^2-1}^{i+q(q-1)}.$$

Bevor wir den Zusammenhang zwischen der Spitzenfiltrierung vom Gewicht k und der vom Gewicht $k+q+1$ genauer beschreiben, halten wir zunächst für die Gewichte fest:

9.8 (Vergleich der Gewichte). Besitzt $k \in \mathbb{N}$ die eindeutige Zerlegung aus Erinnerung 9.1, so lautet die entsprechende Zerlegung für Gewicht $k+q+1$ offenbar

$$k+q+1 = \mathfrak{k} + (\widehat{\mathfrak{k}}+1)(q+1).$$

Ferner gilt

$$\mathfrak{m}(k+q+1) = \left\lfloor \frac{(k+q+1)q}{q+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{kq}{q+1} \right\rfloor + q = \mathfrak{m}(k) + q.$$

Wir sehen also, dass wir mit Hilfe von Lemma 9.6 jeden Filtrierungsmodul M_{k+q+1}^j für $q \leq j \leq \mathfrak{m}(k+q+1)$ mit einem getwisteten Filtrierungsmodul vom Gewicht k identifizieren können. Dabei werden nicht nur die Filtrierungsmoduln insgesamt ineinander überführt, sondern auch bestimmte Teilmengen ihrer Basen (vergleiche Erinnerung 9.1).

9.9 Notation. Zur Vereinheitlichung der Notation schreiben wir im Folgenden

$$\mathcal{B}_1^0 := \{\mathcal{F}_b^{(0,1)} := \mathcal{E}_b \mid 0 \leq b \leq q\}$$

für die Basis des Moduls
$$M_1^{\mathfrak{m}(1)} = M_1 = \mathrm{Eis}_1,$$
die aus den modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1 besteht (vergleiche die Bemerkung zu Satz 3.21).

9.10 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Ferner sei*
$$1 \le i \le \mathfrak{m}(k) \quad \textit{für } k \ge 2$$
beziehungsweise
$$i = \mathfrak{m}(k) = 0 \quad \textit{für } k = 1.$$
Dann definiert Multiplikation mit $\mathcal{E}_0 E_\infty^q$ eine bijektive Abbildung
$$\mathcal{B}_k^i \to \mathcal{B}_{k+q+1}^{i+q}.$$
Im Fall $i = \mathfrak{m}(k)$ ist dabei
$$\mathcal{E}_0 E_\infty^q \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k),k)} = \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k+q+1),k+q+1)} \quad \textit{für } 0 \le b \le q+1-\mathfrak{k}.$$
Ist $1 \le i \le \mathfrak{m}(k)-1$, so gilt
$$\mathcal{E}_0 E_\infty^q \mathcal{F}_b^{(i,k)} = \mathcal{F}_b^{(i+q,k+q+1)} \quad \textit{für } 0 \le b \le q-1$$
sowie
$$\mathcal{E}_0 E_\infty^q \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} = \mathcal{F}_\infty^{(i+q,k+q+1)}.$$

Beweis. Zunächst betrachten wir für $k \in \mathbb{N}$ den Spezialfall $i = \mathfrak{m}(k)$. Wir wissen aus dem Vergleich der Gewichte bereits, dass $\mathfrak{m}(k)+q = \mathfrak{m}(k+q+1)$ ist, und dass sowohl die Elemente von $\mathcal{B}_k^{\mathfrak{m}(k)}$ als auch die von $\mathcal{B}_{k+q+1}^{\mathfrak{m}(k+q+1)}$ durch die Indizes $0 \le b \le q+1-\mathfrak{k}$ parametrisiert werden.

Für ein solches b sei das Basiselement $\mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k),k)} \in \mathcal{B}_k^{\mathfrak{m}(k)}$ wie in Konstruktion 3.6 definiert (beziehungsweise im Spezialfall $k=1$ wie in Notation 9.9). Dann ist
$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 E_\infty^q \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k),k)} &= \mathcal{E}_0 E_\infty^q \mathcal{E}_0^{\hat{\mathfrak{k}}} \mathcal{E}_b E_\infty^{\mathfrak{m}(k)} \\ &= \mathcal{E}_0^{\hat{\mathfrak{k}}+1} \mathcal{E}_b E_\infty^{\mathfrak{m}(k)+q} \\ &= \mathcal{E}_0^{\hat{\mathfrak{k}}+1} \mathcal{E}_b E_\infty^{\mathfrak{m}(k+q+1)} \\ &= \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k+q+1),k+q+1)},\end{aligned}$$
und die Behauptung gilt im Spezialfall.

Sei also $k \ge 2$ und $1 \le i \le \mathfrak{m}(k)-1$. Für $0 \le b \le q-1$ haben wir
$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 E_\infty^q \mathcal{F}_b^{(i,k)} &= \mathcal{E}_0 E_\infty^q \mathcal{E}_0^{k-i-1} \mathcal{E}_b E_\infty^i \\ &= \mathcal{E}_0^{k-i} \mathcal{E}_b E_\infty^{i+q} \\ &= \mathcal{E}_0^{k+q+1-(i+q)-1} \mathcal{E}_b E_\infty^{i+q} \\ &= \mathcal{F}_b^{(i+q,k+q+1)}.\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir unter Ausnutzung von Lemma 2.19

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 E_\infty^q \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} &= (-1)^q \mathcal{E}_q E_0^q \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} \\ &= (-1)^q \mathcal{E}_q E_0^q (-1)^i \mathcal{E}_q^{k-i} E_0^i \\ &= (-1)^{i+q} \mathcal{E}_q^{k+q+1-(i+q)-1} E_0^{i+q} \\ &= \mathcal{F}_\infty^{(i+q,k+q+1)}.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung auch in diesem Fall gezeigt. □

Bemerkung. Im obigen Lemma ist zu beachten, dass wir $i = 0$ nur für Gewicht $k = 1$ zulassen. In diesem Fall erreichen wir für Gewicht $k+q+1 = q+2$ das Endstück M_{q+2}^q der Spitzenfiltrierung. Die spezielle Gestalt der Basiselemente des Endstücks ist entscheidend dafür, dass wir $\mathcal{B}_{q+2}^q$ als Bild einer Basis von $M_1 = \mathrm{Eis}_1$ unter Multiplikation mit $\mathcal{E}_0 E_\infty^q$ auffassen können.

Anders verhält es sich dagegen für $k \geq 2$, da in diesem Fall

$$q < \mathfrak{m}(k+q+1)$$

ist. Bei den Teilmengen der Form $\mathcal{B}_{k+q+1}^q$ handelt es sich dann wegen

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_b^{(q,k+q+1)} &= \mathcal{E}_0^k \mathcal{E}_b E_\infty^q \\ &= \mathcal{E}_0 E_\infty^q \mathcal{E}_0^{k-1} \mathcal{E}_b \quad \text{für } 0 \leq b \leq q-1\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\mathcal{F}_\infty^{(q,k)} = \mathcal{E}_0 E_\infty^q \mathcal{E}_q^k$$

nicht etwa um das Bild einer Basis von Eis_k unter Multiplikation mit $\mathcal{E}_0 E_\infty^q$, sondern um das Bild von

$$\widetilde{B} := \{\mathcal{E}_0^{k-1} \mathcal{E}_b \mid 0 \leq b \leq q-1\} \cup \{\mathcal{E}_q^k\}.$$

Zwar ergänzt diese Menge ebenfalls $\mathcal{B}_k^{1,+}$ zu einer Basis von M_k, ihr Erzeugnis ist selbst aber nicht abgeschlossen unter der Operation von G, definiert also keinen zu M_k^1 komplementären G-Untermodul von M_k. Vergleiche dazu für Gewicht $k \leq q$ auch Lemma 2.31, das beschreibt, welche der Modulformen $\mathcal{E}_0^{k-1} \mathcal{E}_b$ einen nichttrivialen Spitzenformenanteil besitzen.

Bei der Betrachtung sukzessiver Quotienten der Spitzenfiltrierung im späteren Verlauf dieses Kapitels können wir die Spitzenformenanteile in $\widetilde{B}$ jedoch vernachlässigen, was uns erlauben wird, den Fall von Verschwindungsordnung q schließlich doch auf die Betrachtung von Eisenstein-Reihen zurückzuführen (siehe Lemma 9.19).

Um Aussagen zu erhalten, die auch ohne Quotientenbildung gültig sind, müssen wir entweder für alle $k > q+2$ zusätzlich das Transformationsverhalten der Elemente von $\mathcal{B}_k^q$ untersuchen oder die Konstruktion der Basis von M_k^1 zum Beispiel so modifizieren, dass die Teilmengen der Form $\mathcal{B}_k^{lq}$ mit $l \in \mathbb{N}$ aus Produkten modifizierter Eisenstein-Reihen von geeignetem Gewicht mit Potenzen von $\mathcal{E}_0 E_\infty^q$ bestehen.

Wir verlieren durch die zweite Methode jedoch die genaue Kontrolle über das Verhalten der Basiselemente an den Spitzen, das die Definition der Basis $\mathcal{B}_k^{1,+}$ in Kapitel 3 motiviert hatte. In Kapitel 10 werden wir darüber hinaus sehen, dass dieses günstige Verhalten an den Spitzen Ausdruck der Verträglichkeit der konstruierten Basis mit bestimmten symmetrischen Potenzen ist.

9.11 (Zusammenhang der Filtrierungen). Sei $k \geq 2$. Wir haben insgesamt gezeigt, dass wir mit Hilfe von Lemma 9.6 einen Teil der Spitzenfiltrierung für Gewicht $k+q+1$ wie folgt auf die (getwistete) Spitzenfiltrierung für Gewicht k zurückführen können:

$$\begin{tikzcd}
M^1_{k+q+1} \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & M^q_{k+q+1} \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & M^{q+1}_{k+q+1} \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & M^{\mathfrak{m}(k+q+1)}_{k+q+1} \\
& & M_k \otimes (\det)^1 \arrow[u, "\cong"', "\cdot\mathcal{E}_0 E^q_\infty"] \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & M^1_k \otimes (\det)^1 \arrow[u, "\cong"', "\cdot\mathcal{E}_0 E^q_\infty"] \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & M^{\mathfrak{m}(k)}_k \otimes (\det)^1 \arrow[u, "\cong"', "\cdot\mathcal{E}_0 E^q_\infty"]
\end{tikzcd}$$

Dabei besteht zwischen den jeweiligen Basen der folgende Zusammenhang:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}^1_{k+q+1} \arrow[r, phantom, "\cup"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\cup"] & \mathcal{B}^q_{k+q+1} \arrow[r, phantom, "\cup"] & \mathcal{B}^{q+1}_{k+q+1} \arrow[r, phantom, "\cup"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\cup"] & \mathcal{B}^{\mathfrak{m}(k+q+1)}_{k+q+1} \\
& & & \mathcal{B}^1_k \arrow[u, "\cdot\mathcal{E}_0 E^q_\infty"'] \arrow[r, phantom, "\cup"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\cup"] & \mathcal{B}^{\mathfrak{m}(k)}_k \arrow[u, "\cdot\mathcal{E}_0 E^q_\infty"']
\end{tikzcd}$$

Diese Beziehungen zwischen verschiedenen Spitzenfiltrierungen liefern die folgende Beschreibung beliebiger, nichttrivialer Filtrierungsmoduln:

9.12 Proposition. *Sei $k \geq 2$ und $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$.*

(i) Im Spezialfall $i = \mathfrak{m}(k)$ wird durch

$$\mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k),k)} \mapsto \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})}, \quad 0 \leq b \leq q+1-\mathfrak{k},$$

und lineare Fortsetzung ein G-Isomorphismus

$$M_k^{\mathfrak{m}(k)} \xrightarrow{\cong} M_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} \otimes (\det)^{\hat{\mathfrak{k}}}$$

definiert.

(ii) Ist $i \leq \mathfrak{m}(k)-1$, so schreiben wir in eindeutiger Weise $i = j + lq$ mit $1 \leq j \leq q$ und $l \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$M_k^i \cong M^j_{k-l(q+1)} \otimes (\det)^l$$

als Isomorphie von G-Moduln. Für die Elemente von $\mathcal{B}^i_k$ gilt

$$\mathcal{F}_b^{(i,k)} = (\mathcal{E}_0 E^q_\infty)^l \mathcal{F}_b^{(j,k-l(q+1))} \quad \textit{für } 0 \leq b \leq q-1$$

sowie

$$\mathcal{F}_\infty^{(i,k)} = (\mathcal{E}_0 E^q_\infty)^l \mathcal{F}_\infty^{(j,k-l(q+1))}.$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die Aussage im Spezialfall $i = \mathfrak{m}(k)$. Betrachten wir den Modul $M_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} \otimes (\det)^{\hat{\mathfrak{k}}}$, so erhalten wir durch $\widehat{\mathfrak{k}}$-faches sukzessives Anwenden von Lemma 9.6 die G-Isomorphie

$$M_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} \otimes (\det)^{\hat{\mathfrak{k}}} \xrightarrow{\cong} M_{\mathfrak{k}+\hat{\mathfrak{k}}(q+1)}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})+\hat{\mathfrak{k}}q} = M_k^{\mathfrak{m}(k)}.$$

Der Isomorphismus ist dabei durch Multiplikation mit $(\mathcal{E}_0 E_\infty^q)^{\hat{\mathfrak{k}}}$ gegeben. Da nach Lemma 9.10 aber

$$\mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k),k)} = (\mathcal{E}_0 E_\infty^q)^{\hat{\mathfrak{k}}} \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})} \quad \text{für } 0 \leq b \leq q+1-\mathfrak{k}$$

gilt, ist die Behauptung im Spezialfall bewiesen.

Sei nun also $i \leq \mathfrak{m}(k) - 1$. Nach Definition der Zerlegung von i ist dann

$$j + lq = i < \mathfrak{m}(k) = \mathfrak{k} - 1 + \widehat{\mathfrak{k}}q \leq (\widehat{\mathfrak{k}} + 1)q.$$

Wegen der Voraussetzung $j \geq 1$ muss bereits $l \leq \widehat{\mathfrak{k}}$ gelten. Damit ist $k - l(q+1) > 0$ und es gilt

$$j = i - lq < \mathfrak{m}(k) - lq = \mathfrak{m}(k - l(q+1)). \tag{9.1}$$

Der Modul $M_{k-l(q+1)}^j \otimes (\det)^l$ und die Menge $\mathcal{B}_{k-l(q+1)}^j$ sind daher wohldefiniert. Die Behauptung folgt analog zum Beweis des Spezialfalls durch l-fache Anwendung von Lemma 9.6 beziehungsweise Lemma 9.10. □

Bemerkung. Die Aussage der Proposition gilt offenbar auch, wenn wir für $i \leq \mathfrak{m}(k) - 1$ auf die Eindeutigkeit der Zerlegung von i verzichten und bloß $j \geq 1$ verlangen, um die Anwendbarkeit von Lemma 9.10 zu erhalten. In diesem Fall ist unter Umständen weitere Reduktion möglich.

Betrachten wir nur die Aussage für die Filtrierungsmoduln, so scheint es auf den ersten Blick kontraproduktiv zu sein, sich auf die Filtrierungsmoduln für kleine Verschwindungsordnungen zu beschränken, da es sich hierbei gerade um die größten Filtrierungsmoduln zum jeweiligen Gewicht handelt.

Entscheidend ist vielmehr, dass Proposition 9.12 darüber hinaus liefert, dass für jedes Gewicht k nur ein Teil der Basiselemente in $\mathcal{B}_k^{1,+}$ untersucht werden muss, da die Gruppe G auf der Modulform $\mathcal{E}_0 E_\infty^q$ durch Multiplikation mit der Determinante operiert.

9.13 Korollar. *Die Operation von G auf den Basiselementen in den Mengen*

$$\mathcal{B}_k^i \qquad \text{für } k \geq 2 \text{ und } 1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$$

ist bereits vollständig durch die Operation auf den Basiselementen in den Mengen

$$\mathcal{B}_k^i \qquad \text{für } k \geq 2 \text{ und } 1 \leq i \leq \min(\mathfrak{m}(k), q)$$

bestimmt.

9.2 Das Endstück der Spitzenfiltrierung

Nach den Vorüberlegungen im vorangegangenen Abschnitt wollen wir nun für beliebiges Gewicht k das Endstück der Spitzenfiltrierung mit einem bekannten G-Modul identifizieren.

Gemäß Proposition 9.12 können wir uns dabei auf Gewichte $k = \mathfrak{k} \in \{1, \dots, q+1\}$ beschränken.

9.14 Lemma. *Sei $1 \leq \mathfrak{k} \leq q+1$. Die Erzeuger von G operieren auf den Elementen $\mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})}$, $0 \leq b \leq q+1-\mathfrak{k}$, der Basis $\mathcal{B}_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})}$ von $M_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})}$ in folgender Weise:*

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})} &= a^{q-b} \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})} &= \sum_{j=0}^{b} \tbinom{b}{j} t^{b-j} \mathcal{F}_j^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})} &= (-1)^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} \mathcal{F}_{q+1-\mathfrak{k}-b}^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})}.
\end{aligned}
$$

Beweis. Nach Definition gilt

$$
\mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})} = \mathcal{E}_b E_\infty^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})}
$$

für $0 \leq b \leq q+1-\mathfrak{k}$. Wir können das Transformationsverhalten dieser Basiselemente also mit Hilfe unserer Resultate für Eisenstein-Reihen aus Lemma 7.1 und Korollar 7.5 bestimmen.

Auf diese Weise erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})} &= \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_b E_\infty^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} = (\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_b) \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) E_\infty^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} \right) \\
&= a^{q-b} \mathcal{E}_b E_\infty^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} = a^{q-b} \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})}.
\end{aligned}
$$

Ebenso sehen wir

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})} &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_b E_\infty^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} = \sum_{j=0}^{b} \tbinom{b}{j} t^{b-j} \mathcal{E}_j E_\infty^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} \\
&= \sum_{j=0}^{b} \tbinom{b}{j} t^{b-j} \mathcal{F}_j^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})}
\end{aligned}
$$

und schließlich

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})} &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_b E_\infty^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} = \mathcal{E}_{q-b} E_0^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} \\
&= (-1)^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} \mathcal{E}_{q-b-\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} E_\infty^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} \\
&= (-1)^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} \mathcal{F}_{q+1-\mathfrak{k}-b}^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})}.
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass nach Voraussetzung an b

$$
q - b \geq \mathfrak{k} - 1 = \mathfrak{m}(\mathfrak{k})
$$

gilt und wir daher Lemma 2.18 anwenden können. $\square$

9.15 Lemma. *Sei* $1 \leq \mathfrak{k} \leq q+1$. *Die Abbildung*

$$M_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} \to \mathrm{Sym}^{q+1-\mathfrak{k}}(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})},$$

gegeben durch

$$\mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(\mathfrak{k}),\mathfrak{k})} \mapsto X^{q+1-\mathfrak{k}-b} Y^b \quad \text{für } 0 \leq b \leq q+1-\mathfrak{k}$$

und lineare Fortsetzung, ist ein G*-Isomorphismus.*

Beweis. Offenbar ist die angegebene Abbildung ein Vektorraumisomorphismus.

Das Transformationsverhalten der Monome in $\mathrm{Sym}^{q+1-\mathfrak{k}}(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})}$ können wir unter Berücksichtigung des Determinantentwists mit Hilfe von Proposition 5.31 ablesen. Da $\mathfrak{m}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k} - 1$ gilt, liefert Vergleich mit Lemma 9.14 unmittelbar die G-Äquivarianz der betrachteten Abbildung. □

9.16 Satz. *Sei* $k \in \mathbb{N}$. *Durch*

$$\mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k),k)} \mapsto X^{q+1-\mathfrak{k}-b} Y^b, \quad 0 \leq b \leq q+1-\mathfrak{k},$$

und lineare Fortsetzung wird ein G*-Isomorphismus*

$$M_k^{\mathfrak{m}(k)} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}^{q+1-\mathfrak{k}}(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(k)}$$

definiert.

Beweis. Wenn wir den G-Isomorphismus

$$M_k^{\mathfrak{m}(k)} \xrightarrow{\cong} M_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} \otimes (\det)^{\hat{\mathfrak{k}}}$$

aus dem ersten Teil von Proposition 9.12 und den G-Isomorphismus

$$M_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}^{q+1-\mathfrak{k}}(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})}$$

aus Lemma 9.15 hintereinander ausführen, erhalten wir insgesamt einen G-Isomorphismus

$$M_k^{\mathfrak{m}(k)} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}^{q+1-\mathfrak{k}}(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})+\hat{\mathfrak{k}}},$$

der auf den Elementen von $\mathcal{B}_k^{\mathfrak{m}(k)}$ der angegebenen Abbildungsvorschrift genügt. Wegen

$$\mathfrak{m}(k) = \mathfrak{m}(\mathfrak{k}) + \widehat{\mathfrak{k}} q \equiv \mathfrak{m}(\mathfrak{k}) + \widehat{\mathfrak{k}} \mod q-1$$

gilt dabei

$$(\det)^{\mathfrak{m}(\mathfrak{k})+\hat{\mathfrak{k}}} = (\det)^{\mathfrak{m}(k)},$$

und die Behauptung ist gezeigt. □

9.3 Übrige Filtrierungsmoduln und sukzessive Quotienten

Wir wollen nun Filtrierungsmoduln betrachten, die echt größer als das Endstück sind. Solche treten nur für $\mathfrak{m}(k) \geq 2$, d.h. $k \geq 3$, auf.

Da wir das Transformationsverhalten der Basiselemente der Endstücke bereits bestimmt haben, genügt es gemäß Korollar 9.13, im Folgenden die Basiselemente in den Mengen

$$\mathcal{B}_k^i \quad \text{mit } k \geq 3 \text{ und } 1 \leq i \leq \min(\mathfrak{m}(k) - 1, q)$$

unter der Operation von G zu untersuchen.

Als Hauptschwierigkeit wird sich dabei herausstellen, dass das Erzeugnis einer einzelnen solchen Menge $\mathcal{B}_k^i$ nicht unter der Operation von G abgeschlossen ist. Bei der Beschreibung des Transformationsverhaltens eines Elements von B_k^i benötigen wir für bestimmte Erzeuger von G zusätzlich Elemente der Basis $\mathcal{B}_k^{i+1,+}$ des Filtrierungsmoduls $M_k^{i+1} \subsetneq M_k^i$.

Zunächst betrachten wir jedoch die Fälle, in denen dieses Problem nicht auftritt. Wir können dabei sogar auf die Einschränkung $i \leq q$ verzichten.

9.17 Lemma. *Sei $k \geq 3$ und sei $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k) - 1$. Für die Elemente von $\mathcal{B}_k^i$ gilt:*

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_b^{(i,k)} &= a^{k-i-1+q-b} \mathcal{F}_b^{(i,k)}, \quad 0 \leq b \leq q-1, \\
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} &= a^i \mathcal{F}_\infty^{(i,k)}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_b^{(i,k)} &= \sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j} t^{b-j} \mathcal{F}_j^{(i,k)}, \quad 0 \leq b \leq q-1, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_0^{(i,k)} &= (-1)^i \mathcal{F}_\infty^{(i,k)}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} &= (-1)^i \mathcal{F}_0^{(i,k)}.
\end{aligned}$$

Beweis. Wir gehen wie im Beweis von Lemma 9.14 vor und verwenden das Transformationsverhalten der Eisenstein-Reihen aus Lemma 7.1 und Korollar 7.5.

Auf diese Weise erhalten wir nach Definition der Basiselemente in Konstruktion 3.6 für $0 \leq b \leq q-1$

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_b^{(i,k)} &= \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_0^{k-i-1}\right) \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{E}_b\right) \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) E_\infty^i\right) \\
&= a^{k-i-1} \mathcal{E}_0^{k-i-1} a^{q-b} \mathcal{E}_b E_\infty^i \\
&= a^{k-i-1+q-b} \mathcal{F}_b^{(i,k)}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathcal{F}_b^{(i,k)} &= \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathcal{E}_0^{k-i-1}\right)\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathcal{E}_b\right)\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)E_\infty^i\right)\\ &= \mathcal{E}_0^{k-i-1}\left(\sum_{j=0}^{b}\binom{b}{j}t^{b-j}\mathcal{E}_j\right)E_\infty^i\\ &= \sum_{j=0}^{b}\binom{b}{j}t^{b-j}\mathcal{F}_j^{(i,k)}.\end{aligned}$$

Für das Basiselement $\mathcal{F}_\infty^{(i,k)}$ sehen wir

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathcal{F}_\infty^{(i,k)} &= (-1)^i\left(\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathcal{E}_q^{k-i}\right)\left(\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)E_0^i\right) = (-1)^i\mathcal{E}_q^{k-i}a^iE_0^i\\ &= a^i\mathcal{F}_\infty^{(i,k)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathcal{F}_\infty^{(i,k)} &= (-1)^i\left(\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathcal{E}_q^{k-i}\right)\left(\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)E_0^i\right) = (-1)^i\mathcal{E}_0^{k-i}E_\infty^i\\ &= (-1)^i\mathcal{F}_0^{(i,k)}.\end{aligned}$$

Da die Matrix $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ selbstinvers ist, folgt daraus die angegebene Formel für $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathcal{F}_0^{(i,k)}$. □

9.18 (Verbleibende Fälle). Es bleiben somit noch die Fälle

$$\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathcal{F}_b^{(i,k)}\quad \text{mit } 1 \le b \le q-1$$

sowie

$$\left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathcal{F}_\infty^{(i,k)}$$

für $k \ge 3$ und $1 \le i \le \min(\mathfrak{m}(k)-1, q)$ zu betrachten. Hier werden die Rechnungen, wie oben erwähnt, durch das Auftreten von Spitzenformenanteilen höherer Ordnung erschwert.

(i) Betrachten wir für $1 \le b \le q-1$ die Modulform

$$\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathcal{F}_b^{(i,k)} = \mathcal{E}_q^{k-i-1}\mathcal{E}_{q-b}E_0^i, \tag{9.2}$$

so ist ihre Beschreibung als Linearkombination der Elemente von $\mathcal{B}_k^{i,+}$ nicht ohne Weiteres abzulesen. Stattdessen müssen wir den resultierenden Ausdruck mit Hilfe der Rechenregeln für Eisenstein-Reihen umformen.

Nach Lemma 3.2 gilt unter den gegebenen Voraussetzungen an i

$$i \le \mathfrak{m}(k) - 1 \le k-2,$$

so dass auf der rechten Seite von Gleichung (9.2) mindestens ein Faktor $\mathcal{E}_q$ auftritt. Gemäß Lemma 2.18 ist für $i \le q$ aber

$$\mathcal{E}_qE_0^i = (-1)^i\mathcal{E}_{q-i}E_\infty^i.$$

Wir erhalten somit

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_b^{(i,k)} = (-1)^i \mathcal{E}_q^{k-i-2} \mathcal{E}_{q-b} \mathcal{E}_{q-i} E_\infty^i. \tag{9.3}$$

Die im Fall $i < k-2$ verbleibende Potenz von $\mathcal{E}_q$ kann unter Ausnutzung der Identität $\mathcal{E}_q = \mathcal{E}_1 + E_\infty$ ersetzt werden. Anschließend sind eine Reihe von Produkten modifizierter Eisenstein-Reihen auszuwerten, die mit Hilfe der Relationen aus Lemma 2.14 vereinfacht werden können. Da dies im erneuten Auftreten von Faktoren $\mathcal{E}_q$ resultieren kann, müssen diese beiden Schritte im Allgemeinen mehrfach wiederholt werden.

Die angegebenen Umformungen sind zwar im Einzelfall durchführbar, eine geschlossene Beschreibung der resultierenden Modulform in Termen der Basis $\mathcal{B}_k^{i,+}$ ist aufgrund der hohen Komplexität aber schwierig. Die Komplexität wächst dabei mit fallendem i.

(ii) Ähnlich verhält es sich, wenn wir die Modulform

$$\mathcal{F}_\infty^{(i,k)} = (-1)^i \mathcal{E}_q^{k-i} E_0^i$$

unter der Operation von $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ betrachten. Wir wenden auch hier zunächst Lemma 2.18 an, was die alternative Beschreibung

$$\mathcal{F}_\infty^{(i,k)} = \mathcal{E}_q^{k-i-1} \mathcal{E}_{q-i} E_\infty^i \tag{9.4}$$

liefert. Diese Gestalt hat den Vorteil, dass die Eisenstein-Reihe E_∞ im Gegensatz zu E_0 invariant ist unter Erzeugern vom Typ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir erhalten damit

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} = (t\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_q)^{k-i-1} \sum_{j=0}^{q-i} \tbinom{q-i}{j} t^{q-i-j} \mathcal{E}_j E_\infty^i. \tag{9.5}$$

Die dabei auftretenden Faktoren $\mathcal{E}_q$ und die Produkte modifizierter Eisenstein-Reihen müssen anschließend analog zum ersten Fall behandelt werden.

Wir können dadurch Abhilfe schaffen, dass wir für $k \geq 3$ und $1 \leq i \leq \min(\mathfrak{m}(k)-1, q)$ in den Fällen 9.18 anstelle des exakten Transformationsverhaltens nur noch Kongruenzen modulo M_k^{i+1} betrachten.

Da wir nach Satz 3.21 wissen, dass die Menge $\mathcal{B}_k^i$ eine Basis des Quotientenmoduls M_k^i / M_k^{i+1} bildet, können wir auf diese Weise dessen G-Modulstruktur bestimmen. Mit Hilfe der Methoden des ersten Abschnitts lassen sich diese Ergebnisse anschließend für beliebige Verschwindungsordnungen verallgemeinern.

Bemerkung. Da wir uns in der nicht-halbeinfachen Situation befinden, können wir die Filtrierungsmoduln im Allgemeinen nicht als direkte Summe der sukzessiven Quotienten schreiben. Allerdings können wir ausgehend von den Quotienten beispielsweise die Kompositionsfaktoren beliebiger Filtrierungsmoduln bestimmen.

Die Quotienten zur Verschwindungsordnung $i = q$ können wir bereits mit Hilfe der Ergebnisse aus dem ersten Abschnitt beschreiben. Dieser Fall tritt nur für $k > q+2$ auf, da genau dann $\mathfrak{m}(k) - 1 \geq q$ ist (für $k = q+1$ und $k = q+2$ handelt es sich bei M_k^q um das Endstück).

9.19 Lemma. *Sei $k > q+2$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} M_k^q &\cong M_{k-(q+1)} \otimes (\det)^1 \\ &\cong \mathrm{Eis}_{k-(q+1)} \otimes (\det)^1 \oplus M^1_{k-(q+1)} \otimes (\det)^1 \end{aligned}$$

als Isomorphie von G-Moduln. Insbesondere ist

$$M_k^q / M_k^{q+1} \cong \mathrm{Eis}_{k-(q+1)} \otimes (\det)^1.$$

Beweis. Gemäß Lemma 9.6 gilt

$$M_k^q \cong M^0_{k-(q+1)} \otimes (\det)^1$$

sowie

$$M_k^{q+1} \cong M^1_{k-(q+1)} \otimes (\det)^1.$$

Die verbleibenden Aussagen folgen unmittelbar aus der bekannten direkten Summenzerlegung von $M_{k-(q+1)}$ in Eisenstein-Reihen- und Spitzenformenanteil. □

Wir müssen also nur noch Quotienten M_k^i / M_k^{i+1} mit $i \leq q-1$ untersuchen. Wir erhalten die gesuchten Kongruenzen mit Hilfe der Reduktionsvorschriften aus Abschnitt 3.3.

9.20 Lemma. *Sei $k \geq 3$ und $1 \leq i \leq \min(\mathfrak{m}(k) - 1, q-1)$. Für $1 \leq b \leq q-1$ gilt*

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_b^{(i,k)} \equiv (-1)^i \mathcal{F}^{(i,k)}_{[k-2i-b]} \mod M_k^{i+1}.$$

Dabei ist das Symbol „$[\,\cdot\,]$“ wie in Notation 2.7 definiert.

Beweis. Gemäß Gleichung (9.3) gilt

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_b^{(i,k)} = (-1)^i \mathcal{E}_q^{k-i-2} \mathcal{E}_{q-b} \mathcal{E}_{q-i} E_\infty^i.$$

Da $q - b \leq q - 1$ ist, können wir die resultierende Modulform wegen Relation (2.1) aber auch als

$$(-1)^i \mathcal{E}_q^{k-i-2} \mathcal{E}_{q-b+1} \mathcal{E}_{q-i-1} E_\infty^i$$

schreiben. Dieses Produkt von Eisenstein-Reihen erfüllt wegen $q - i - 1 < q - i$ die Voraussetzungen von Proposition 3.29. Wir erhalten dadurch die Kongruenz

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_b^{(i,k)} \equiv (-1)^i \mathcal{E}_0^{k-i-1} \mathcal{E}_{\langle (k-i-2)q+q-b+1+q-i-1 \rangle} E_\infty^i.$$

Da aber $q - b + 1 > 0$ gilt, ist

$$\begin{aligned} \langle (k-i-2)q + q - b + 1 + q - i - 1 \rangle &= [(k-i-2)q + q - b + 1 + q - i - 1] \\ &= [k - 2i - b], \end{aligned}$$

und die Behauptung ist gezeigt. □

9.21 Lemma. *Sei $k \geq 3$ und $1 \leq i \leq \min(\mathfrak{m}(k)-1, q-1)$. Es gilt*

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} \equiv \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} + \sum_{m=0}^{[k-2i]-1} \tbinom{[k-2i]}{m} t^{[k-2i]-m} \mathcal{F}_m^{(i,k)} \mod M_k^{i+1}.$$

Beweis. Mit Hilfe von Gleichung (9.5) erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} &= (t\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_q)^{k-i-1} \sum_{j=0}^{q-i} \tbinom{q-i}{j} t^{q-i-j} \mathcal{E}_j E_\infty^i \\ &= \sum_{l=0}^{k-i-1} \sum_{j=0}^{q-i} \tbinom{k-i-1}{l} \tbinom{q-i}{j} t^{q+k-2i-1-l-j} \mathcal{E}_0^{k-i-1-l} \mathcal{E}_q^l \mathcal{E}_j E_\infty^i. \end{aligned}$$

Wir untersuchen die Modulformen in den einzelnen Summanden genauer:

(i) Ist $l = k-i-1$ und $j = q-i$, so handelt es sich bei der zugehörigen Modulform gemäß Gleichung (9.4) gerade um $\mathcal{F}_\infty^{(i,k)}$.

(ii) Ist $l = k-i-1$ und $0 \leq j < q-i$, so ist Proposition 3.29 anwendbar und liefert die Kongruenz

$$\mathcal{E}_q^{k-i-1} \mathcal{E}_j E_\infty^i \equiv \mathcal{E}_0^{k-i-1} \mathcal{E}_{\langle (k-i-1)q+j \rangle} E_\infty^i \mod M_k^{i+1}.$$

Da $k-i-1 > 0$ und $j \geq 0$ ist, gilt dabei

$$\langle (k-i-1)q+j \rangle = [(k-i-1)q+j] = [k-i-1+j] = \langle k-i-1+j \rangle\,.$$

(iii) Ist $0 < l < k-i-1$, so erhalten wir für beliebiges $0 \leq j \leq q-i$ vermöge Proposition 3.29 (die anwendbar ist, da mindestens ein Faktor $\mathcal{E}_0$ auftritt)

$$\mathcal{E}_0^{k-i-1-l} \mathcal{E}_q^l \mathcal{E}_j E_\infty^i \equiv \mathcal{E}_0^{k-i-1} \mathcal{E}_{\langle lq+j \rangle} E_\infty^i \mod M_k^{i+1},$$

wobei wie oben $\langle lq+j \rangle = \langle l+j \rangle$ gilt.

(iv) Für $l = 0$ ist die Modulform im Summanden zu beliebigem $0 \leq j \leq q-i$ gerade

$$\mathcal{E}_0^{k-i-1} \mathcal{E}_j E_\infty^i = \mathcal{E}_0^{k-i-1} \mathcal{E}_{\langle j \rangle} E_\infty^i.$$

Nach Definition der Elemente von $\mathcal{B}_k^i$ erhalten wir somit insgesamt

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} &\equiv \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} + \sum_{l,j} \tbinom{k-i-1}{l} \tbinom{q-i}{j} t^{k-2i-l-j} \mathcal{E}_0^{k-i-1} \mathcal{E}_{\langle l+j \rangle} E_\infty^i \mod M_k^{i+1} \\ &\equiv \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} + \sum_{l,j} \tbinom{k-i-1}{l} \tbinom{q-i}{j} t^{k-2i-l-j} \mathcal{F}_{\langle l+j \rangle}^{(i,k)} \mod M_k^{i+1}, \end{aligned}$$

wobei die Summen jeweils über die $0 \leq l \leq k-i-1$ und $0 \leq j \leq q-i$ laufen mit

$$l + j < k-i-1+q-i = q-1+k-2i.$$

Da aber gemäß Formel A.6 für $0 \leq m \leq q-1+k-2i-1$

$$\sum_{\substack{l,j \\ l+j=m}} \binom{k-i-1}{l}\binom{q-i}{j} = \binom{q-1+k-2i}{m}$$

gilt, können wir die Doppelsumme zu einer einzelnen Summe zusammenfassen und erhalten so

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} &\equiv \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} + \sum_{m=0}^{q-1+k-2i-1} \tbinom{q-1+k-2i}{m} t^{k-2i-m} \mathcal{F}_{\langle m\rangle}^{(i,k)} \mod M_k^{i+1} \\ &\equiv \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} + t^{k-2i}\mathcal{F}_0^{(i,k)} + \sum_{m=1}^{q-1+k-2i-1} \tbinom{q-1+k-2i}{m} t^{k-2i-m} \mathcal{F}_{[m]}^{(i,k)} \mod M_k^{i+1}. \end{aligned}$$

Wir vergleichen die Koeffizienten der Basiselemente aus $\mathcal{B}_k^i$ in dieser Darstellung mit denen in der zu beweisenden Formel.

Da die Modulform $\mathcal{F}_0^{(i,k)}$ wegen $[m] > 0$ in der hinteren Summe nicht auftritt und $t^{k-2i} = t^{[k-2i]}$ ist, sind die Koeffizienten von $\mathcal{F}_\infty^{(i,k)}$ und $\mathcal{F}_0^{(i,k)}$ von der behaupteten Gestalt.

Sei nun $1 \leq b \leq q-1$ beliebig aber fest. Wir wollen den Koeffizienten von $\mathcal{F}_b^{(i,k)}$ in der verbleibenden Summe bestimmen, müssen also die Summationsindizes m betrachten, für die $m \equiv b \bmod q-1$ ist.

Offenbar ist in den zugehörigen Summanden der Faktor

$$t^{k-2i-m} = t^{k-2i-b} = t^{[k-2i]-b}$$

konstant und von der gewünschten Form. Wir können uns also auf die Untersuchung der Summe

$$\lambda_b := \sum_{\substack{m=1 \\ m\equiv b \bmod q-1}}^{q-1+k-2i-1} \tbinom{q-1+k-2i}{m}$$

der auftretenden Binomialkoeffizienten beschränken.

Wir setzen nun $d := [k-2i] > 0$ und schreiben $k-2i = d + h(q-1)$. Wegen

$$k-2i = k-i-i \geq 2-i \geq 2-(q-1)$$

ist dabei $h \geq -1$. Offenbar gilt dann

$$q-1+k-2i-1 = d-1+(h+1)(q-1).$$

Der größte in λ_b auftretende Summationsindex ist $b+(h+1)(q+1)$, falls $b \leq d-1$ ist, oder $b+h(q+1)$, falls $b \geq d$ gilt. Da mit den üblichen Konventionen für Binomialkoeffizienten jedoch

$$\binom{d+(h+1)(q-1)}{b+(h+1)(q-1)} = \begin{cases} 1 & b=d \\ 0 & d<b\leq q-1 \end{cases}$$

gilt, können wir λ_b mit einheitlichen Summationsgrenzen schreiben und erhalten

$$\lambda_b = \sum_{j=0}^{h+1} \tbinom{d+(h+1)(q-1)}{b+j(q+1)} - \delta_{b,d}$$

mit Kronecker-Delta. Gemäß Proposition A.16 gilt in Charakteristik p aber

$$\sum_{j=0}^{h+1} \tbinom{d+(h+1)(q-1)}{b+j(q+1)} = \tbinom{d}{b},$$

d.h., es ist

$$\lambda_b = \begin{cases} \binom{d}{b} & 1 \leq b \leq d-1 \\ 0 & d \leq b \leq q-1. \end{cases}$$

Da nach Definition $d = [k-2i]$ ist, folgt somit

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} \equiv \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} + \sum_{m=0}^{[k-2i]-1} \tbinom{[k-2i]}{m} t^{[k-2i]-m} \mathcal{F}_m^{(i,k)} \quad \bmod M_k^{i+1},$$

wie behauptet. □

Insgesamt verfügen wir nun für beliebiges $k \geq 3$ und $1 \leq i \leq \min(\mathfrak{m}(k)-1, q-1)$ über eine Beschreibung des Transformationsverhaltens der Basiselemente in $\mathcal{B}_k^i$, die den Quotientenmodul M_k^i/M_k^{i+1} erzeugen.

9.22 Lemma. *Sei $k \geq 3$ und $1 \leq i \leq \min(\mathfrak{m}(k)-1, q-1)$. Die Abbildung, die durch*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_b^{(i,k)} &\mapsto f_b^{([k-2i])}, \quad 0 \leq b \leq q-1, \\ \mathcal{F}_\infty^{(i,k)} &\mapsto f_\infty^{([k-2i])} \end{aligned}$$

und lineare Fortsetzung gegeben ist, definiert einen G-Isomorphismus

$$M_k^i/M_k^{i+1} \xrightarrow{\cong} N[k-2i, i].$$

Beweis. Das in Lemma 9.17, Lemma 9.20 und Lemma 9.21 beschriebene Transformationsverhalten der Elemente von $\mathcal{B}_k^i$ entspricht gerade dem Transformationsverhalten der in Lemma 6.13 betrachteten Basis von $N[\delta]$ für $\delta = [k-2i]$ mit einem zusätzlichen Faktor $(\det)^i$. □

Dieses Ergebnis können wir für beliebige Verschwindungsordnungen verallgemeinern.

9.23 Satz. *Sei $k \geq 3$ und $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)-1$. Dann gilt*

$$M_k^i/M_k^{i+1} \cong N[k-2i, i]$$

als Isomorphie von G-Moduln.

Beweis. Wir betrachten für i die eindeutige Zerlegung $i = j + lq$ mit $1 \leq j \leq q$. Proposition 9.12 liefert dann

$$M_k^i \cong M_{k-l(q+1)}^j \otimes (\det)^l,$$

sowie

$$M_k^{i+1} \cong M_{k-l(q+1)}^{j+1} \otimes (\det)^l$$

(dabei zerlegen wir $i+1 = j+1+lq$ ohne notwendig einen Rest $\leq q$ zu verlangen). Es gilt somit

$$M_k^i/M_k^{i+1} \cong M_{k-l(q+1)}^j/M_{k-l(q+1)}^{j+1} \otimes (\det)^l. \tag{9.6}$$

Den Quotienten auf der rechten Seite können wir mit unseren bisherigen Resultaten genauer bestimmen. Mit Hilfe von Ungleichung (9.1) sehen wir nämlich, dass

$$j < \mathfrak{m}(k - l(q+1)) < k - l(q+1)$$

ist.

Im Fall $1 \leq j \leq q-1$ können wir daher Lemma 9.22 für Gewicht $k - l(q+1) > 3$ anwenden und erhalten

$$M_{k-l(q+1)}^j/M_{k-l(q+1)}^{j+1} \cong N[k - l(q+1) - 2j, j].$$

Ist dagegen $j = q$, so gilt gemäß Lemma 9.19 für Gewicht $k - l(q+1) > q+2$

$$M_{k-l(q+1)}^q/M_{k-l(q+1)}^{q+1} \cong \mathrm{Eis}_{k-(l+1)(q+1)} \otimes (\det)^1 \cong N[k - (l+1)(q+1), 1].$$

Da nach Konvention die Parameter der Moduln $N[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ nur von ihrer Klasse modulo $q-1$ abhängen, können wir beide Fälle als

$$M_{k-l(q+1)}^j/M_{k-l(q+1)}^{j+1} \cong N[k - 2(j+l), j]$$

zusammenfassen. Eingesetzt in (9.6) liefert dies die Isomorphie

$$M_k^i/M_k^{i+1} \cong N[k - 2(j+l), j+l].$$

Da

$$j + l \equiv j + lq \equiv i \mod q-1$$

gilt, folgt die Behauptung. □

Bemerkung. (i) Insbesondere wird auch der Quotient

$$M_k/M_k^1,$$

der außerhalb der Spitzenfiltrierung auftritt, durch die gleiche Formel beschrieben. Aus Satz 2.4 und Satz 7.3 folgt nämlich

$$M_k/M_k^1 \cong \mathrm{Eis}_k \cong N[k] = N[k - 2 \cdot 0, 0].$$

(ii) Es besteht ebenfalls ein Zusammenhang mit der Beschreibung des Endstücks der Spitzenfiltrierung in Satz 9.16. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} k - 2\mathfrak{m}(k) &\equiv \mathfrak{k} + 2\widehat{\mathfrak{k}} - 2(\mathfrak{k} - 1 + \widehat{\mathfrak{k}}) \equiv -\mathfrak{k} + 2 \mod q - 1 \\ &\equiv q + 1 - \mathfrak{k} \mod q - 1. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Wir werden diesen Zusammenhang in Abschnitt 11.2 genauer untersuchen.

10 Zur Darstellungstheorie der symmetrischen Potenzen

Motiviert durch den in Satz 8.2 gezeigten Zusammenhang zwischen symmetrischen Potenzen und Drinfeld'schen Modulformen beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit darstellungstheoretischen Eigenschaften der symmetrischen Potenzen.

Die ersten drei Abschnitte sind dabei rein darstellungstheoretischer Natur und können losgelöst von der Drinfeld-Situation betrachtet werden. Zuerst beschreiben wir für $n \in \mathbb{N}$ eine G-Modulfiltrierung von $\mathrm{Sym}^n(V)$. Im zweiten Abschnitt betrachten wir den größten nichttrivialen Untermodul dieser Filtrierung genauer, bevor wir im dritten Abschnitt seine Komplementierbarkeit in $\mathrm{Sym}^n(V)$ untersuchen.

Im vierten und letzten Abschnitt sehen wir, dass wir diese Filtrierung durch den eingangs erwähnten Satz 8.2 zur Beschreibung der Spitzenfiltrierung Drinfeld'scher Modulformen verwenden können. Wir erhalten auf diese Weise nicht nur eine alternative Methode für die Bestimmung der sukzessiven Quotienten der Spitzenfiltrierung, sondern auch die noch fehlende Identifikation der Moduln M_k^i mit klassischen G-Moduln.

10.1 Eine Filtrierung auf den symmetrischen Potenzen

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist der folgende Charakter von G:

10.1 Lemma. *Das Element $XY^q - X^qY \in \mathrm{Sym}^{q+1}(V)$ erzeugt einen eindimensionalen G-Modul*

$$\langle XY^q - X^qY\rangle \cong (\det)^1.$$

Beweis. Man sieht direkt

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(XY^q - X^qY) = aXY^q - a^qX^qY = a(XY^q - X^qY)$$

und

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)(XY^q - X^qY) = X^qY - XY^q = -(XY^q - X^qY).$$

Ebenso liefert eine kurze Rechnung

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(XY^q - X^qY) &= X(tX+Y)^q - X^q(tX+Y) \\ &= t^qX^{q+1} + XY^q - tX^{q+1} - X^qY = XY^q - X^qY.\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Das Element $XY^q - X^qY$ wird unter dem Isomorphismus

$$V \xrightarrow{\cong} \langle \mathcal{E}_0\,, \mathcal{E}_q \rangle$$

aus Satz 7.9 abgebildet auf

$$\mathcal{E}_0\mathcal{E}_q^q - \mathcal{E}_0^q\mathcal{E}_q = \mathcal{E}_0 E_\infty^q,$$

also gerade auf die in Abschnitt 9.1 betrachtete Spitzenform.

Diese Identifikation ist jedoch nicht zu verwechseln mit dem Isomorphismus

$$M_{q+1} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}^{(q+1)q}$$

gemäß Satz 8.2.

Mit Hilfe dieses Elements erhalten wir den folgenden G-Homomorphismus:

10.2 Lemma. *Sei $n \geq q+1$. Die durch Multiplikation mit $XY^q - X^qY$ gegebene Abbildung*

$$\mathrm{Sym}^{n-(q+1)}(V) \otimes (\det)^1 \to \mathrm{Sym}^n(V)$$

ist injektiv und G-äquivariant.

Beweis. Die Injektivität ist klar, da die Abbildung durch Multiplikation mit einem von Null verschiedenen Element definiert ist.

Die G-Äquivarianz folgt mit Lemma 10.1, da der Faktor $XY^q - X^qY$ unter der Operation von G lediglich einen zusätzlichen (einfachen) Determinantenfaktor liefert. Diesen haben wir durch den Determinantentwist in $\mathrm{Sym}^{n-(q+1)}(V) \otimes (\det)^1$ aber bereits kompensiert, vergleiche den Beweis von Lemma 9.6. □

Ist an dieser Stelle $n - (q+1) \geq q+1$, so können wir dasselbe Prinzip erneut anwenden. Wir konstruieren auf diese Weise das folgende System von Abbildungen:

10.3 Proposition. *Sei $n \in \mathbb{N}$ mit eindeutiger Zerlegung $n = \mathfrak{n} + \widehat{\mathfrak{n}}(q+1)$, $0 \leq \mathfrak{n} \leq q$. Für $1 \leq i \leq \widehat{\mathfrak{n}}$ handelt es sich bei den Abbildungen*

$$\begin{aligned} \psi_i : \mathrm{Sym}^{n-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i &\hookrightarrow \mathrm{Sym}^{n-(i-1)(q+1)}(V) \otimes (\det)^{i-1} \\ P &\mapsto P(XY^q - X^qY) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \Psi_i : \mathrm{Sym}^{n-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i &\hookrightarrow \mathrm{Sym}^n(V) \\ P &\mapsto P(XY^q - X^qY)^i \end{aligned}$$

um injektive G-Homomorphismen. Setzen wir zusätzlich $\Psi_0 := \mathrm{Id}_{\mathrm{Sym}^n(V)}$, so genügen die angegebenen Abbildungen den Relationen

$$\Psi_i = \Psi_{i-1} \circ \psi_i \quad \textit{für } 1 \leq i \leq \widehat{\mathfrak{n}}. \tag{10.1}$$

Beweis. Die Injektivität und G-Äquivarianz der Abbildungen ψ_i mit $1 \leq i \leq \widehat{\mathfrak{n}}$ folgt jeweils aus Lemma 10.2 unter Berücksichtigung des korrekten Determinantentwists.

Da nach Definition

$$\Psi_i = \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_i = \Psi_{i-1} \circ \psi_i$$

gilt, ist die Gültigkeit der verbleibenden Aussagen trivial. □

Bemerkung. Schreiben wir in der Situation der Proposition kurz

$$S^{(i)} := S^{(i,n)} := \mathrm{Sym}^{n-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i,$$

so bedeuten die Relationen (10.1) anschaulich, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S^{(\widehat{\mathfrak{n}})} \arrow[r, "\psi_{\widehat{\mathfrak{n}}}"] \arrow[rrrr, bend right=25, "\Psi_{\widehat{\mathfrak{n}}}"'] & S^{(\widehat{\mathfrak{n}}-1)} \arrow[r, "\psi_{\widehat{\mathfrak{n}}-1}"] \arrow[rrr, bend right=15, "\Psi_{\widehat{\mathfrak{n}}-1}"'] & \cdots \arrow[r, "\psi_2"] & S^{(1)} \arrow[r, "\psi_1"] & S^{(0)} = \mathrm{Sym}^n(V)
\end{tikzcd}$$

injektiver G-Homomorphismen kommutativ ist. Wir werden diese Interpretation im Beweis von Satz 10.21 wieder aufgreifen und haben deswegen an dieser Stelle verschiedene Bezeichnungen für die Abbildungen eingeführt, die durch Multiplikation mit Potenzen von $XY^q - X^qY$ gegeben sind.

10.4 Proposition. *Sei $n \in \mathbb{N}$ mit eindeutiger Zerlegung $n = \mathfrak{n} + \widehat{\mathfrak{n}}(q+1)$, $0 \leq \mathfrak{n} \leq q$. Dann besitzt $\mathrm{Sym}^n(V)$ eine Filtrierung von G-Untermoduln*

$$\{0\} \subsetneq L^{(\widehat{\mathfrak{n}},n)} \subsetneq L^{(\widehat{\mathfrak{n}}-1,n)} \subsetneq \cdots \subsetneq L^{(1,n)} \subsetneq L^{(0,n)} = \mathrm{Sym}^n(V)$$

mit

$$L^{(i,n)} \cong \mathrm{Sym}^{n-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i \quad \textit{für } 0 \leq i \leq \widehat{\mathfrak{n}}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt direkt, wenn wir in der Situation von Proposition 10.3 für $0 \leq i \leq \widehat{\mathfrak{n}}$

$$L^{(i,n)} := \Psi_i(\mathrm{Sym}^{n-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i) \subseteq \mathrm{Sym}^n(V)$$

setzen. □

Wir werden in Abschnitt 10.4 die Bilder der Monome in $\mathrm{Sym}^{n-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i$ unter der Einbettung Ψ_i benötigen.

10.5 Lemma. *Sei $n \in \mathbb{N}$ mit eindeutiger Zerlegung $n = \mathfrak{n} + \widehat{\mathfrak{n}}(q+1)$, $0 \leq \mathfrak{n} \leq q$. Sei ferner $1 \leq i \leq \widehat{\mathfrak{n}}$. Dann gilt für $0 \leq b \leq n - i(q+1)$*

$$\Psi_i\left(X^{n-i(q+1)-b}Y^b\right) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}(-1)^{i-j} X^{n-b-i-j(q-1)} Y^{b+i+j(q-1)}.$$

Beweis. Die angegebene Formel folgt unmittelbar aus dem binomischen Lehrsatz, da die Abbildung Ψ_i als Multiplikation mit $(XY^q - X^qY)^i$ definiert ist. □

10.2 Der Untermodul $L(n)$ von $\mathrm{Sym}^n(V)$

Wir wollen die oben bestimmte Filtrierung von $\mathrm{Sym}^n(V)$ näher untersuchen. Offenbar ist sie genau dann nichttrivial, wenn $n \geq q+1$ gilt. Dies ist gerade der Fall, in dem die Darstellungstheorie der symmetrischen Potenzen nicht vollständig beschrieben ist (vergleiche die Bemerkung zu Proposition 5.34).

Wir beginnen unsere Untersuchungen der Filtrierung mit dem größten nichttrivialen Filtrierungsmodul.

Um eine bessere Übersichtlichkeit zu erhalten, führen wir die folgende Kurzschreibweise ein:

10.6 Notation. Für festes $n \geq q+1$ schreiben wir die Monome in $\mathrm{Sym}^n(V)$ als

$$Z_j := X^{n-j}Y^j, \quad 0 \leq j \leq n,$$

und nennen ein solches Element *Monom vom Index j*.

Da es sich nur um eine Umbenennung handelt, kann das Transformationsverhalten der Z_j unter G unmittelbar aus Proposition 5.31 abgelesen werden.

10.7 Notation. Mit der Notation des vorigen Abschnitts zeichnen wir den Untermodul

$$L(n) := L^{(1,n)} = \psi_1\left(\mathrm{Sym}^{n-(q+1)}(V) \otimes (\det)^1\right) \subseteq \mathrm{Sym}^n(V)$$

aus.

10.8 Lemma. *Sei $n \geq q+1$. Die Elemente*

$$\mathfrak{X}_j := Z_{j+q} - Z_{j+1} \qquad \textit{mit } 0 \leq j \leq n-(q+1)$$

bilden eine Basis des Untermoduls $L(n) \subseteq \mathrm{Sym}^n(V)$.

Beweis. Die Behauptung gilt, da es sich bei den Elementen

$$\begin{aligned} X^{n-(q+1)-j}Y^j(XY^q - X^qY) &= X^{n-q-j}Y^{j+q} - X^{n-1-j}Y^{j+1} \\ &= Z_{j+q} - Z_{j+1} \end{aligned}$$

für $0 \leq j \leq n-(q+1)$ um die Bilder einer Basis von $\mathrm{Sym}^{n-(q+1)}(V) \otimes (\det)^1$ unter der injektiven Abbildung ψ_1 handelt. ☐

10.9 Lemma. *Sei $n \geq q+1$. Zwei Monome $Z_i, Z_j \in \mathrm{Sym}^n(V)$ mit $0 \leq i,j \leq n$ sind genau dann kongruent modulo $L(n)$, wenn*

$$1 \leq i,j \leq n-1 \quad \textit{und} \quad i \equiv j \mod q-1$$

ist. Genauer gilt für $1 \leq b \leq q-1$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $b + m(q-1) < n$

$$Z_{b+m(q-1)} = Z_b + \sum_{l=0}^{m-1} \mathfrak{X}_{b-1+l(q-1)}.$$

Beweis. Beide Aussagen folgen unmittelbar aus der Gestalt der in Lemma 10.8 angegebenen Basiselemente von $L(n)$. Bei der Summe über die $\mathfrak{X}_{b-1+l(q-1)}$ handelt es sich um eine einfache Teleskopsumme. □

Wir können damit direkt ablesen:

10.10 Lemma. *Sei $n \geq q+1$. Die Menge*

$$\{Z_j \mid 0 \leq j \leq q-1\} \cup \{Z_n\}$$

bildet eine Basis des Quotientenmoduls $\operatorname{Sym}^n(V)/L(n)$*.*

10.11 Notation. Wir fixieren im Folgenden für n zusätzlich die eindeutige Zerlegung

$$n = \nu + \widehat{\nu}(q-1) \quad \text{mit } 1 \leq \nu \leq q-1.$$

10.12 Proposition. *Sei $n \geq q+1$. Dann gilt: Die Abbildung, die definiert wird durch*

$$\begin{aligned} Z_j &\mapsto f_j^{(\nu)}, \quad 0 \leq j \leq q-1, \\ Z_n &\mapsto f_\infty^{(\nu)} \end{aligned}$$

und lineare Fortsetzung, ist ein G-Isomorphismus

$$\operatorname{Sym}^n(V)/L(n) \xrightarrow{\cong} N[\nu] = N[n].$$

Beweis. Die Abbildung bildet Lemma 10.10 zufolge eine Basis von $\operatorname{Sym}^n(V)/L(n)$ auf eine Basis von $N[\nu]$ ab, ist also in jedem Fall ein Vektorraumisomorphismus.

Für den Nachweis der G-Äquivarianz dieser Abbildung untersuchen wir zunächst die Operation von G auf der betrachteten Basis von $\operatorname{Sym}^n(V)/L(n)$.

Nach Definition der Operation auf $\operatorname{Sym}^n(V)$ erhalten wir direkt

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) Z_j &= a^{n-j} Z_j = a^{\nu-j} Z_j, \quad 0 \leq j \leq q-1, \\ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) Z_n &= Z_n. \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) Z_0 = Z_n$$

und

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) Z_n = Z_0.$$

Für $1 \leq j \leq q-1$ erhalten wir zunächst $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) Z_j = Z_{n-j}$. Gemäß Lemma 10.9 wissen wir jedoch, dass das Basiselement $Z_{[n-j]} = Z_{[\nu-j]}$ ein Repräsentant der Restklasse von Z_{n-j} in $\operatorname{Sym}^n(V)/L(n)$ ist. Es gilt also

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) Z_j \equiv Z_{[\nu-j]} \mod L(n), \quad 1 \leq j \leq q-1.$$

Ferner sehen wir für $0 \leq j \leq q-1$ unmittelbar

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) Z_j = \sum_{l=0}^{j} \tbinom{j}{l} t^{j-l} Z_l.$$

Es bleibt also noch die Darstellung der Restklasse von

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) Z_n = \sum_{l=0}^{n} \tbinom{n}{l} t^{n-l} Z_l$$

bezüglich der gewählten Basis von $\mathrm{Sym}^n(V)/L(n)$ zu bestimmen.

Mit Hilfe von Lemma 10.9 erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) Z_n &\equiv Z_0 + \sum_{b=1}^{q-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \equiv b \bmod q-1}}^{n-1} \tbinom{n}{l} t^{n-l} Z_b + Z_n \mod L(n) \\ &\equiv Z_0 + \sum_{b=1}^{q-1} \underbrace{\left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \equiv b \bmod q-1}}^{n-1} \binom{n}{l} \right)}_{=:\lambda_b} t^{\nu-b} Z_b + Z_n \mod L(n). \end{aligned}$$

Verwenden wir die Zerlegung von n aus Notation 10.11, so ist für $1 \leq b \leq q-1$

$$\lambda_b = \sum_{m=0}^{\hat{\nu}} \tbinom{\nu+\hat{\nu}(q-1)}{b+m(q-1)} - \delta_{\nu,b}$$

mit Kronecker-Delta. Dabei haben wir ausgenutzt, dass

$$\binom{\nu+\hat{\nu}(q-1)}{b+\hat{\nu}(q-1)} = \begin{cases} 1 & b = \nu \\ 0 & \nu < b \leq q-1 \end{cases}$$

gilt, um eine einheitliche Obergrenze der Summe zu erreichen (vergleiche den Beweis von Lemma 9.21).

Mit Hilfe von Proposition A.16 lässt sich λ_b somit vereinfachen zu

$$\lambda_b = \begin{cases} \binom{\nu}{b} & 1 \leq b \leq \nu - 1 \\ 0 & \nu \leq b \leq q-1. \end{cases}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) Z_n \equiv \sum_{l=0}^{\nu-1} \tbinom{\nu}{l} t^{\nu-l} Z_l + Z_n \mod L(n).$$

Damit ist das Transformationsverhalten der gewählten Basis von $\mathrm{Sym}^n(V)/L(n)$ vollständig bestimmt.

Die G-Äquivarianz des betrachteten Vektorraumisomorphismus ergibt sich nun direkt durch Vergleich mit den Resultaten aus Lemma 6.13 für die Basis

$$\{f_j^{(\nu)} \mid 0 \leq j \leq q-1\} \cup \{f_\infty^{(\nu)}\}$$

von $N[\nu]$. □

Bemerkung. Wir können mit Lemma 10.9 genauer bestimmen, dass beispielsweise

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) Z_j = Z_{n-j} = \begin{cases} Z_{\nu-j} + \sum_{l=0}^{\hat{\nu}-1} \mathfrak{X}_{\nu-j-1+l(q-1)} & 1 \leq j \leq \nu - 1 \\ Z_{q-1+\nu-j} + \sum_{l=0}^{\hat{\nu}-2} \mathfrak{X}_{q-1+\nu-j-1+l(q-1)} & \nu \leq j \leq q-1 \end{cases}$$

gilt.

Wir erhalten mit Hilfe dieser Proposition die folgende Beschreibung der sukzessiven Quotienten der Filtrierung von $\mathrm{Sym}^n(V)$ aus Proposition 10.4:

10.13 Proposition. *Sei $n \geq q+1$ mit eindeutiger Zerlegung $n = \mathfrak{n} + \widehat{\mathfrak{n}}(q+1)$, $0 \leq \mathfrak{n} \leq q$. Für $0 \leq i \leq \widehat{\mathfrak{n}} - 1$ gilt*

$$L^{(i,n)}/L^{(i+1,n)} \cong N[n-2i, i].$$

Beweis. Nach Definition gelten

$$L^{(i,n)} \cong \mathrm{Sym}^{n-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i$$

und

$$L^{(i+1,n)} \cong L(n - i(q+1)) \otimes (\det)^i.$$

Wir sehen mit Hilfe von Proposition 10.12 also direkt, dass

$$L^{(i,n)}/L^{(i+1,n)} \cong N[n - i(q+1)] \otimes (\det)^i$$

gilt. Da dieser Modul nur von der Restklasse von $n - i(q+1)$ modulo $q-1$ abhängt, folgt die Behauptung. □

10.3 Komplementierbarkeit von $L(n)$

Als Nächstes befassen wir uns mit der Frage, ob der Untermodul $L(n)$ in $\mathrm{Sym}^n(V)$ als G-Modul komplementierbar ist. Dabei werden wir folgendes Resultat zeigen:

10.14 Satz. *Sei $n \geq q+1$ und sei q kein Teiler von n. Dann existiert in $\mathrm{Sym}^n(V)$ kein zu $L(n)$ komplementärer G-Untermodul.*

Bemerkung. Ist dagegen n ein Vielfaches von q, so ist die Antwort tatsächlich positiv. Der Nachweis allein auf dem Niveau der symmetrischen Potenzen erweist sich allerdings als technisch mühsam. Wesentlich einfacher wird es, wenn wir uns des Zusammenhangs mit Drinfeld'schen Modulformen bedienen, siehe Proposition 10.25.

Der Beweis von Satz 10.14 wird den Rest dieses Abschnitts in Anspruch nehmen. Wir betrachten dazu nur noch solche $n \geq q+1$, die nicht teilbar durch q sind, und fixieren wie zuvor die Zerlegung

$$n = \nu + \widehat{\nu}(q-1) \quad \text{mit } 1 \leq \nu \leq q-1.$$

Aus technischen Gründen behandeln wir den Fall $q = 2$ separat.

Fall 1: $q > 2$

Wir benötigen die folgende Hilfsaussage, die eine notwendige (aber im Allgemeinen nicht hinreichende) Bedingung an Elemente von $\mathrm{Sym}^n(V)$ mit einem bestimmten Transformationsverhalten beschreibt:

10.15 Lemma. *Sei $q > 2$ und sei $n \geq q+1$ nicht durch q teilbar. Dann gilt: Ist ein Element $P \in \mathrm{Sym}^n(V)$ invariant unter den Matrizen der Typen $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sowie $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, so ist P eine Linearkombination von Monomen Z_j mit*

$$0 \leq j \leq n-(q-1) \quad \textit{und} \quad j \equiv n \mod q-1.$$

Beweis. Sei ein Element $P \in \mathrm{Sym}^n(V)$ mit dem angegebenen Transformationsverhalten gegeben. Schreiben wir P als Linearkombination der Monome Z_j mit $0 \leq j \leq n$, so treten wegen

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) Z_j = a^{n-j} Z_j \quad \text{für } 0 \leq j \leq n$$

und der Invarianz von P unter den Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ dabei nur solche Monome Z_j mit

$$j \equiv n \mod q-1$$

auf. Wir können daher

$$P = \lambda Z_n + P'$$

mit $\lambda \in \mathcal{C}_\infty$ schreiben, wobei P' eine Linearkombination von Monomen Z_j mit Indizes $j \leq n-(q-1)$ ist, die dieser Kongruenzbedingung genügen.

Wegen der Invarianz von P unter $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt ferner

$$\begin{aligned} \lambda Z_n + P' = P &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) P \\ &= \lambda \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) Z_n + \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) P' \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j} t^{n-j} Z_j + \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) P', \end{aligned}$$

wobei $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) P'$ wiederum eine Linearkombination von Monomen Z_j mit $j \leq n-(q-1)$ ist. Wir erhalten somit durch Koeffizientenvergleich, dass bereits $\lambda = 0$ gelten muss, wenn wir einen Index l mit

$$n-(q-1) < l < n \tag{10.2}$$

und

$$\binom{n}{l} \neq 0 \tag{10.3}$$

finden (für den also Z_l in $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) Z_n$ mit von Null verschiedenem Koeffizienten auftritt).

Tatsächlich finden wir ein solches l wie folgt: Nach Voraussetzung an n können wir eindeutig

$$n = m + \widehat{m} q \quad \text{mit } 1 \leq m \leq q-1$$

schreiben.

Ist sogar $m < q-1$, so setzen wir $l := n-m$. Bedingung (10.2) ist dann offensichtlich erfüllt. Andererseits ist wegen

$$\binom{n}{l} = \binom{n}{n-m} = \binom{m+\widehat{m}q}{\widehat{m}q} \equiv \binom{m}{0}\binom{\widehat{m}}{\widehat{m}} \equiv 1 \mod p$$

(siehe Kongruenz A.8) auch Bedingung (10.3) erfüllt.

Ist $m = q-1$, so setzen wir $l := n-1$. Da wir $q > 2$ verlangen, genügt auch diese Wahl von l Bedingung (10.2). Wegen

$$\binom{n}{l} = \binom{n}{n-1} = n = q - 1 + \widehat{m}q \equiv -1 \mod p$$

ist darüber hinaus Bedingung (10.3) erfüllt.

In jedem Fall ist also $\lambda = 0$ und die Behauptung ist gezeigt. □

Unser weiteres Vorgehen unterscheidet sich in Abhängigkeit davon, ob $q-1$ ein Teiler von n ist oder nicht.

Fall 1.1: $q > 2$ und $q-1$ kein Teiler von n

Gäbe es einen zu $L(n)$ komplementären Untermodul $W(n)$ von $\mathrm{Sym}^n(V)$, so müsste gemäß Proposition 10.12 insbesondere auch ein G-Isomorphismus

$$N[\nu] \xrightarrow{\cong} W(n) \subseteq \mathrm{Sym}^n(V)$$

existieren. Die folgende Proposition ist in der betrachteten Situation daher äquivalent zu Satz 10.14:

10.16 Proposition. *Sei $q > 2$ und sei $n \geq q+1$ weder durch q noch durch $q-1$ teilbar. Dann gilt: Es gibt keine G-äquivariante Abbildung $N[\nu] \to \mathrm{Sym}^n(V)$, deren Bild komplementär zu $L(n)$ ist.*

Beweis. Sei $\varphi : N[\nu] \to \mathrm{Sym}^n(V)$ eine G-äquivariante Abbildung. Da wir aus Lemma 10.8 wissen, dass keines der Elemente von $L(n)$ das Monom Z_n enthält, ist die Behauptung bewiesen, wenn wir zeigen, dass auch in keinem Element des Bildes von φ das Monom Z_n auftritt.

Wir betrachten dazu die Werte von φ auf der Basis

$$\{f_b^{(\nu)} \mid 0 \leq b \leq q-1\} \cup \{f_\infty^{(\nu)}\}$$

von $N[\nu]$. Mit Hilfe des Transformationsverhaltens der Basiselemente unter der Operation von G aus Lemma 6.13 erhalten wir notwendige Bedingungen an die Bilder der Basiselemente unter φ. Wir wissen nämlich einerseits, dass

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_b^{(\nu)} = a^{\nu-b} f_b^{(\nu)} \quad \text{für } 0 \leq b \leq q-1$$

beziehungsweise

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_\infty^{(\nu)} = f_\infty^{(\nu)}$$

gilt. Da andererseits

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) Z_j = a^{n-j} Z_j = a^{\nu-j} Z_j \quad \text{für } 0 \leq j \leq n$$

ist, liefert die G-Äquivarianz von φ, dass wir

$$\begin{aligned}
\varphi(f_b^{(\nu)}) &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \equiv b \bmod q-1}}^{n} \lambda_j^{(b)} Z_j, \quad 0 \leq b \leq q-1, \\
\varphi(f_\infty^{(\nu)}) &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \equiv \nu \bmod q-1}}^{n} \lambda_j^{(\infty)} Z_j
\end{aligned}$$

mit Koeffizienten in $\mathcal{C}_\infty$ schreiben können.

Wir sehen an dieser Stelle bereits, dass in den Darstellungen der $\varphi(f_b^{(\nu)})$ mit $b \neq \nu$ nur Monome Z_j mit $0 \leq j < n$ auftreten. Da wir voraussetzen, dass $q-1$ kein Teiler von n ist, dass also $\nu < q-1$ gilt, ist dies insbesondere für $\varphi(f_{q-1}^{(\nu)})$ der Fall.

Wir wissen damit einerseits, dass das Monom Z_n in

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \varphi(f_{q-1}^{(\nu)}) &= \varphi(\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_{q-1}^{(\nu)}) \\
&= \varphi\left(\sum_{l=0}^{q-1} \tbinom{q-1}{l} t^{q-1-l} f_l^{(\nu)}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{q-1} \tbinom{q-1}{l} t^{q-1-l} \varphi(f_l^{(\nu)})
\end{aligned}$$

nicht auftritt. Andererseits ist Z_n nach der Vorüberlegung in keinem der Summanden für $l \neq \nu$ enthalten. Da der Koeffizient von $\varphi(f_\nu^{(\nu)})$ im verbleibenden Summanden

$$\binom{q-1}{\nu} t^{-\nu} = (-1)^\nu t^{-\nu} \neq 0$$

ist (siehe Korollar A.15), kann Z_n folglich auch in $\varphi(f_\nu^{(\nu)})$ nicht auftreten.

Um abschließend zu zeigen, dass $\varphi(f_\infty^{(\nu)})$ das Monom Z_n nicht enthält, betrachten wir das Element

$$f_\infty^{(\nu)} - f_\nu^{(\nu)} = F_\infty^{(\nu)} \in N[\nu],$$

das gemäß Lemma 6.10 invariant unter den Matrizen der Typen $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist. Aufgrund der G-Äquivarianz von φ erhalten wir mit Hilfe von Lemma 10.15, dass das Monom Z_n in $\varphi(f_\infty^{(\nu)} - f_\nu^{(\nu)})$ und damit auch in $\varphi(f_\infty^{(\nu)})$ nicht auftritt. $\square$

Fall 1.2: $q > 2$ und $q-1$ ein Teiler von n

Wir führen die Annahme, Satz 10.14 gelte in der vorliegenden Situation nicht, zum Widerspruch, indem wir zeigen, dass es kein G-invariantes Element in $\mathrm{Sym}^n(V)$ gibt, das nicht schon in $L(n)$ liegt.

Ein Komplement von $L(n)$ in $\mathrm{Sym}^n(V)$ wäre nach Proposition 10.12 nämlich isomorph zu

$$N[q-1] \cong \mathcal{C}_\infty \oplus \mathrm{Sym}^{q-1}(V),$$

besäße also einen eindimensionalen Untermodul, der von einem G-invarianten Element in $\mathrm{Sym}^n(V) \setminus L(n)$ erzeugt wird.

10.17 Proposition. *Sei $q > 2$ und sei $n \geq q+1$ ein Vielfaches von $q-1$, aber nicht teilbar durch q. Ist ein Element $P \in \mathrm{Sym}^n(V)$ invariant unter der Operation von G, so gilt bereits $P \in L(n)$.*

Beweis. Sei $P \in \mathrm{Sym}^n(V)$ ein G-invariantes Element. Die Invarianz von P unter den Erzeugern der Typen $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ liefert zusammen mit Lemma 10.15, dass P als Linearkombination von Monomen Z_j mit

$$0 \leq j \leq n-(q-1) \quad \text{und} \quad j \equiv n \equiv 0 \mod q-1$$

geschrieben werden kann. Da P zusätzlich unter der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ invariant ist und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) Z_0 = Z_n$ gilt, tritt das Monom Z_0 dabei nicht auf.

Gemäß Lemma 10.9 sind die übrigen Monome Z_j mit $q-1 \leq j \leq n-(q-1)$ und $j \equiv 0 \bmod q-1$ alle kongruent zu Z_{q-1} modulo $L(n)$. Wir können also

$$P = \lambda Z_{q-1} + P_L$$

mit $\lambda \in \mathcal{C}_\infty$ und $P_L \in L(n)$ schreiben. Aufgrund der Invarianz von P unter $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt dann auch

$$P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) P = \lambda \sum_{j=0}^{q-1} \tbinom{q-1}{j} t^{q-1-j} Z_j + \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) P_L.$$

Der Koeffizient von Z_0 auf der rechten Seite dieser Gleichung ist

$$\lambda \binom{q-1}{0} t^{q-1} = \lambda,$$

da $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) P_L$ als Element von $L(n)$ das Monom Z_0 nicht enthält (siehe Lemma 10.8). Damit gilt aber $\lambda = 0$, wir haben also gezeigt, dass

$$P = P_L \in L(n)$$

ist. $\square$

Fall 2: $q = 2$

In der vorliegenden Situation wäre ein Komplement von $L(n)$ in $\mathrm{Sym}^n(V)$ gemäß Proposition 10.12 isomorph zu

$$N[1] \cong \mathcal{C}_\infty \oplus V.$$

Wie in Fall 1.2 beweisen wir also auch hier Satz 10.14, indem wir zeigen, dass es kein G-invariantes Element in $\mathrm{Sym}^n(V) \setminus L(n)$ gibt. Wir müssen unser Vorgehen jedoch modifizieren, da uns Lemma 10.15 für $q = 2$ nicht zur Verfügung steht.

10.18 Proposition. *Sei $q = 2$ und sei $n \geq 3$ ungerade. Dann gibt es kein Element in $\mathrm{Sym}^n(V) \setminus L(n)$, das invariant unter der Operation von G ist.*

Beweis. Sei $P \in \mathrm{Sym}^n(V)$ ein G-invariantes Element.

Wir schreiben $P = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j Z_j$ mit $\lambda_j \in \mathcal{C}_\infty$ und vergleichen den Koeffizienten von Z_0 auf beiden Seiten der Gleichung $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) P$. Dies liefert die Bedingung

$$\lambda_0 = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j.$$

Darüber hinaus wissen wir, dass auch $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) P = P$ ist. Es gilt also

$$\lambda_j = \lambda_{n-j} \quad \text{für } 0 \leq j \leq n.$$

Da n ungerade ist, erhalten wir in Charakteristik 2

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j = \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} 2\lambda_j = 0.$$

Insbesondere ist damit

$$\lambda_0 = \lambda_n = 0,$$

d.h., wir können

$$P = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_j (Z_j + Z_{n-j}) = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_j (Z_j - Z_{n-j})$$

schreiben. Für $q = 2$ sind gemäß Lemma 10.9 aber alle Monome Z_j mit $1 \leq j \leq n-1$ kongruent modulo $L(n)$. Somit ist auch

$$Z_j - Z_{n-j} \in L(n) \quad \text{für } 1 \leq j \leq \frac{n-1}{2},$$

und es gilt bereits $P \in L(n)$. □

Mit dieser Proposition ist der Beweis von Satz 10.14 vollständig.

10.4 Zusammenhang mit der Spitzenfiltrierung

Wir betrachten nun die Filtrierung von $\mathrm{Sym}^n(V)$ aus Proposition 10.4 im Spezialfall $n = kq$ mit $k \geq 2$ und verwenden Satz 8.2, um den Zusammenhang mit den Drinfeld'schen Modulformen vom Gewicht k zu untersuchen.

Als Erstes übertragen wir die Bezeichnungen, die wir in Abschnitt 3.1 für die Spitzenfiltrierung festgelegt haben, auf die Situation symmetrischer Potenzen im Spezialfall $n = kq$.

10.19 Notation. Wir schreiben für das Gewicht $k \in \mathbb{N}$

$$k = \mathfrak{k} + \widehat{\mathfrak{k}}(q+1) \quad \text{mit } 1 \leq \mathfrak{k} \leq q+1.$$

Dann ist

$$\mathfrak{m}(k) = \mathfrak{k} - 1 + \widehat{\mathfrak{k}}q$$

die maximale Ordnung, zu der Spitzenformen des Gewichts k existieren.

Betrachten wir für $n = kq$ die eindeutige Zerlegung

$$n = \mathfrak{n} + \widehat{\mathfrak{n}}(q+1) \quad \text{mit } 0 \leq \mathfrak{n} \leq q,$$

die wir in den Aussagen aus Abschnitt 10.1 verwenden, so gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} &= q + 1 - \mathfrak{k}, \\ \widehat{\mathfrak{n}} &= \mathfrak{m}(k) \end{aligned}$$

(siehe Lemma 3.3).

Insbesondere verfügen wir gemäß Proposition 10.3 zu gegebenem k für $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$ über injektive G-Homomorphismen

$$\psi_i : \mathrm{Sym}^{kq-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i \hookrightarrow \mathrm{Sym}^{kq-(i-1)(q+1)}(V) \otimes (\det)^{i-1}$$

und

$$\Psi_i : \mathrm{Sym}^{kq-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i \hookrightarrow \mathrm{Sym}^{kq}(V),$$

die durch Multiplikation mit Potenzen von $XY^q - X^qY$ gegeben sind.

Um den Zusammenhang mit der Spitzenfiltrierung herzustellen, betrachten wir nun das System

$$\mathcal{B}_k^{i,+} = \bigcup_{i \leq j \leq \mathfrak{m}(k)} \mathcal{B}_k^j \quad \text{mit } 1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$$

von Basen der Filtrierungsmoduln M_k^i aus Konstruktion 3.6. Genauer studieren wir die Einbettungen dieser Basen nach $\mathrm{Sym}^{kq}(V)$ unter dem G-Isomorphismus

$$\Phi_k : M_k \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}^{kq}(V)$$

aus Satz 8.2.

10.20 Lemma. *Sei $k \geq 2$. Für die Elemente der Mengen $\mathcal{B}_k^i$ mit $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)-1$ gilt*

$$\begin{aligned}\Phi_k\left(\mathcal{F}_b^{(i,k)}\right) &= \Psi_i\left(X^{kq-i(q+1)-b}Y^b\right), \quad 0 \leq b \leq q-1,\\ \Phi_k\left(\mathcal{F}_\infty^{(i,k)}\right) &= \Psi_i\left(Y^{kq-i(q+1)}\right).\end{aligned}$$

Für die Elemente von $\mathcal{B}_k^{\mathfrak{m}(k)}$ ist

$$\begin{aligned}\Phi_k\left(\mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k),k)}\right) &= \Psi_{\mathfrak{m}(k)}\left(X^{kq-\mathfrak{m}(k)(q+1)-b}Y^b\right)\\ &= \Psi_{\mathfrak{m}(k)}\left(X^{q+1-\mathfrak{k}-b}Y^b\right), \quad 0 \leq b \leq q+1-\mathfrak{k}.\end{aligned}$$

Beweis. Gemäß Satz 8.2 ist Φ_k eine Komponente eines Algebrenisomorphismus, also verträglich mit der multiplikativen Struktur auf der Algebra M. Wir können daher die Bilder der Basiselemente unter Φ_k bestimmen, indem wir Produktzerlegungen der Basiselemente betrachten und die Faktoren kleinerer Gewichte zunächst einzeln entsprechend Satz 8.2 nach $\mathrm{Sym}(V)$ einbetten.

Schreiben wir also für $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$ und $0 \leq b \leq q-1$ (beziehungsweise für $0 \leq b \leq q+1-\mathfrak{k}$ im Fall $i = \mathfrak{m}(k)$)

$$\mathcal{F}_b^{(i,k)} = \mathcal{E}_0^{k-i-1}\mathcal{E}_b E_\infty^i = \mathcal{E}_0^{k-i-1}\mathcal{E}_b(\mathcal{E}_q - \mathcal{E}_1)^i,$$

so erhalten wir auf diese Weise

$$\begin{aligned}\Phi_k\left(\mathcal{F}_b^{(j,k)}\right) &= (X^{(k-i-1)q})(X^{q-b}Y^b)(Y^q - X^{q-1}Y)^i\\ &= X^{(k-i)q-b}Y^b\sum_{j=0}^{i}\tbinom{i}{j}(-1)^{i-j}Y^{jq}X^{(i-j)(q-1)}Y^{i-j}\\ &= \sum_{j=0}^{i}\tbinom{i}{j}(-1)^{i-j}X^{kq-i-b-j(q-1)}Y^{b+i+j(q-1)}.\end{aligned}$$

Für $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)-1$ verwenden wir außerdem die Produktschreibweise

$$\mathcal{F}_\infty^{(i,k)} = (-1)^i\mathcal{E}_q^{k-i}E_0^i = (-1)^i\mathcal{E}_q^{k-i}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{q-1})^i$$

und sehen

$$\begin{aligned}\Phi_k\left(\mathcal{F}_\infty^{(i,k)}\right) &= (-1)^iY^{(k-i)q}(X^q - XY^{q-1})^i\\ &= (-1)^iY^{(k-i)q}\sum_{j=0}^{i}\tbinom{i}{j}(-1)^jX^{(i-j)q}X^jY^{j(q-1)}\\ &= \sum_{j=0}^{i}\tbinom{i}{j}(-1)^{i-j}X^{iq-j(q-1)}Y^{(k-i)q+j(q-1)}\\ &= \sum_{j=0}^{i}\tbinom{i}{j}(-1)^{i-j}X^{iq-j(q-1)}Y^{kq-i(q+1)+i+j(q-1)}.\end{aligned}$$

Andererseits liefert Lemma 10.5, dass im Spezialfall $n = kq$ für $1 \le i \le \mathfrak{m}(k)$ und $0 \le b \le kq - i(q+1)$

$$\Psi_i\left(X^{kq-i(q+1)-b}Y^b\right) = \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j}(-1)^{i-j}X^{kq-b-i-j(q-1)}Y^{b+i+j(q-1)}$$

gilt. Durch Vergleich mit den zuvor bestimmten Bildern der Elemente der $\mathcal{B}_k^i$ unter Φ_k folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Die folgende Interpretation von Lemma 10.20 motiviert die Auswahl der Elemente von $\mathcal{B}_k^{1,+}$ in Konstruktion 3.6:

Für $1 \le i \le \mathfrak{m}(k)$ bildet die Menge

$$\{X^{kq-i(q+1)-b}Y^b \mid 0 \le b \le q-1\} \cup \{Y^{kq-i(q+1)}\}$$

gemäß Lemma 10.10 eine Basis des Quotienten

$$\left(\mathrm{Sym}^{kq-i(q+1)}(V)/L(kq-i(q+1))\right) \otimes (\det)^i.$$

Es macht daher Sinn, gerade diese Monome via Ψ_i in den Modul $\mathrm{Sym}^{kq}(V)$ einzubetten. Wir können die Elemente von $\mathcal{B}_k^i$ dann umgekehrt als Urbilder der resultierenden Elemente von $\mathrm{Sym}^{kq}(V)$ unter Φ_k definieren.

Die Basis $\mathcal{B}_k^{1,+}$ ist in diesem Sinne verträglich mit den verschiedenen Einbettungen in die symmetrische Algebra $\mathrm{Sym}(V)$. Diese Verträglichkeit, die sich auf Seiten der Modulformen als gutes Verhalten an den Spitzen äußert, steht in Konkurrenz zur Verträglichkeit mit der Zerlegung in Eisenstein-Reihen und Spitzenformen, wie in der Bemerkung zu Lemma 9.10 erwähnt.

Welche dieser Eigenschaften zu bevorzugen ist, hängt von der beabsichtigten Anwendung ab.

Wir verwenden die in Lemma 10.20 gezeigten Identitäten, um die Elemente von $\mathcal{B}_k^i$ für $1 \le i \le \mathfrak{m}(k)$ in den Modul $\mathrm{Sym}^{kq-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i$ abzubilden, und konstruieren auf diese Weise die folgenden G-Isomorphismen:

10.21 Satz. *Sei $k \ge 2$. Für $1 \le i \le \mathfrak{m}(k)$ existiert ein G-Isomorphismus*

$$\phi_k^{(i)} : M_k^i \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}^{kq-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i,$$

der die Eigenschaft

$$\Psi_i \circ \phi_k^{(i)} = \Phi_k\big|_{M_k^i} \tag{10.4}$$

besitzt.

Beweis. Die Idee dieses Beweises ist, die Aussage für $1 \le i \le \mathfrak{m}(k) - 1$ aus der Gültigkeit der Behauptung für $i+1$ herzuleiten.

Wir etablieren die Behauptung also zunächst im Fall $i = \mathfrak{m}(k)$. Aus Satz 9.16 wissen wir bereits, dass die Vorschrift

$$\mathcal{F}_b^{(\mathfrak{m}(k),k)} \mapsto X^{q+1-\mathfrak{k}-b}Y^b, \quad 0 \leq b \leq q+1-\mathfrak{k},$$

einen G-Isomorphismus

$$M_k^{\mathfrak{m}(k)} \xrightarrow{\cong} \operatorname{Sym}^{q+1-\mathfrak{k}}(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(k)} = \operatorname{Sym}^{kq-\mathfrak{m}(k)(q+1)}(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(k)}$$

beschreibt. Bezeichnen wir diesen Isomorphismus mit $\phi_k^{(\mathfrak{m}(k))}$, so gilt Lemma 10.20 zufolge

$$\Psi_{\mathfrak{m}(k)} \circ \phi_k^{(\mathfrak{m}(k))} = \Phi_k\big|_{M_k^{\mathfrak{m}(k)}}$$

auf einer Basis von $M_k^{\mathfrak{m}(k)}$ und damit auch auf ganz $M_k^{\mathfrak{m}(k)}$, wie verlangt.

Kommen wir nun zum Schritt von $i+1$ nach i für $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)-1$. Wir wollen also mit Hilfe der Existenz der Abbildung $\phi_k^{(i+1)}$ eine Abbildung $\phi_k^{(i)}$ mit den gesuchten Eigenschaften konstruieren. Die Situation stellt sich insgesamt wie folgt dar:

$$\begin{tikzcd}
M_k^{i+1} \arrow[rr, "\phi_k^{(i+1)}"] \arrow[d, hook] & & \operatorname{Sym}^{kq-(i+1)(q+1)}(V) \otimes (\det)^{i+1} \arrow[d, hook, "\psi_{i+1}"] \\
M_k^{i} \arrow[rr, dotted, "\phi_k^{(i)}"] \arrow[dr, hook, "\Phi_k|_{M_k^i}"] & & \operatorname{Sym}^{kq-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^{i} \arrow[dl, hook', "\Psi_i"] \\
& \operatorname{Sym}^{kq}(V) &
\end{tikzcd}$$

Verknüpfen wir den G-Isomorphismus $\phi_k^{(i+1)}$ mit der injektiven Abbildung ψ_{i+1}, so liefert dies eine Abbildung

$$M_k^{i+1} \to \operatorname{Sym}^{kq-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i.$$

Um diese Abbildung auf ganz M_k^i fortzusetzen, nutzen wir aus, dass die Menge $\mathcal{B}_k^i$ eine Basis von M_k^{i+1} zu einer Basis von M_k^i ergänzt. Es genügt also, Abbildungsvorschriften für die zusätzlichen Basiselemente in $\mathcal{B}_k^i$ vorzugeben.

Ist $\mathcal{F}_*^{(i,k)} \in \mathcal{B}_k^i$ ein beliebiges Element dieser Menge, so definieren wir $\phi_k^{(i)}(\mathcal{F}_*^{(i,k)})$ als das Urbild von $\Phi_k(\mathcal{F}_*^{(i,k)})$ unter Ψ_i.

Die Vorschrift ist wohldefiniert, da ein solches Urbild in $\operatorname{Sym}^{kq-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i$ gemäß Lemma 10.20 existiert und aufgrund der Injektivität von Ψ_i eindeutig ist.

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir damit insgesamt eine eindeutige Abbildung

$$\phi_k^{(i)} : M_k^i \to \mathrm{Sym}^{kq-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i.$$

Da nach Konstruktion

$$\phi_k^{(i)}\big|_{M_k^{i+1}} = \psi_{i+1} \circ \phi_k^{(i+1)}$$

ist und die Abbildung $\phi_k^{(i+1)}$ Bedingung (10.4) genügt, sehen wir damit einerseits

$$\begin{aligned}
(\Psi_i \circ \phi_k^{(i)})\big|_{M_k^{i+1}} &= \Psi_i \circ (\phi_k^{(i)}\big|_{M_k^{i+1}}) \\
&= \Psi_i \circ \left(\psi_{i+1} \circ \phi_k^{(i+1)}\right) \\
&= (\Psi_i \circ \psi_{i+1}) \circ \phi_k^{(i+1)} \\
&\overset{(10.1)}{=} \Psi_{i+1} \circ \phi_k^{(i+1)} \\
&\overset{(10.4)}{=} \Phi_k\big|_{M_k^{i+1}}.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt für die Basiselemente $\mathcal{F}_*^{(i,k)} \in \mathcal{B}_k^i$

$$\left(\Psi_i \circ \phi_k^{(i)}\right)\left(\mathcal{F}_*^{(i,k)}\right) = \Phi_k\big|_{M_k^i}\left(\mathcal{F}_*^{(i,k)}\right).$$

Insgesamt erfüllt $\phi_k^{(i)}$ also auf ganz M_k^i die Bedingung

$$\Psi_i \circ \phi_k^{(i)} = \Phi_k\big|_{M_k^i}.$$

Die Injektivität von $\Phi_k\big|_{M_k^i}$ liefert damit die Injektivität der Abbildung $\phi_k^{(i)}$. Aus Dimensionsgründen ist $\phi_k^{(i)}$ dann ein Vektorraumisomorphismus.

Es bleibt die G-Äquivarianz von $\phi_k^{(i)}$ zu zeigen. Sei dazu $\gamma \in G$ und $\mathcal{F} \in M_k^i$. Unter Ausnutzung der G-Äquivarianz von $\Phi_k\big|_{M_k^i}$ und Ψ_i sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
\Psi_i\left(\phi_k^{(i)}(\gamma\mathcal{F})\right) &\overset{(10.4)}{=} \Phi_k\big|_{M_k^i}(\gamma\mathcal{F}) \\
&= \gamma\Phi_k\big|_{M_k^i}(\mathcal{F}) \\
&\overset{(10.4)}{=} \gamma\left(\Psi_i\left(\phi_k^{(i)}(\mathcal{F})\right)\right) \\
&= \Psi_i\left(\gamma\phi_k^{(i)}(\mathcal{F})\right)
\end{aligned}$$

gilt. Aufgrund der Injektivität von Ψ_i ist dann aber bereits

$$\phi_k^{(i)}(\gamma\mathcal{F}) = \gamma\phi_k^{(i)}(\mathcal{F}),$$

und der Beweis ist vollständig. □

Bemerkung. Der im Beweis dieses Satzes verwendete Satz 8.2 kann als Spezialfall für $i = 0$ aufgefasst werden.

Um Eigenschaften beliebiger symmetrischer Potenzen auf Moduln von Spitzenformen zurückzuführen, ist die folgende Umkehrung von Satz 10.21 hilfreich:

10.22 Korollar. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die eindeutigen Zerlegungen*

$$\begin{aligned} n &= \mathfrak{n} + \widehat{\mathfrak{n}}(q+1) \quad \textit{mit } 0 \leq \mathfrak{n} \leq q, \\ \mathfrak{n} + \widehat{\mathfrak{n}} &= l_0 + l_1 q \quad \textit{mit } 0 \leq l_0 \leq q-1 \end{aligned}$$

und setzen

$$\begin{aligned} k &:= q + 1 - \mathfrak{n} + l_1(q+1), \\ i &:= q - l_0. \end{aligned}$$

Dann gilt die Isomorphie von G-Moduln

$$\mathrm{Sym}^n(V) \cong M_k^i \otimes (\det)^{-i}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung an $\mathfrak{n}$ können wir direkt ablesen, dass in Termen der üblichen Zerlegung von k

$$\mathfrak{k} = q + 1 - \mathfrak{n}$$

und

$$\widehat{\mathfrak{k}} = l_1$$

gilt. Somit ist

$$\mathfrak{m}(k) = q - \mathfrak{n} + l_1 q$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(k) - i &= q - \mathfrak{n} + l_1 q - (q - l_0) \\ &= l_0 + l_1 q - \mathfrak{n} \\ &= \widehat{\mathfrak{n}}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Zerlegung von kq aus Lemma 3.3 liefert dies

$$\begin{aligned} kq - i(q+1) &= q + 1 - \mathfrak{k} + (\mathfrak{m}(k) - i)(q+1) \\ &= \mathfrak{n} + \widehat{\mathfrak{n}}(q+1) = n. \end{aligned}$$

Zusätzlich haben unsere Rechnungen gezeigt, dass $1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$ gilt und daher auch $k \geq 2$ ist. Wir können folglich Satz 10.21 anwenden, um die G-Isomorphie

$$M_k^i \otimes (\det)^{-i} \cong \mathrm{Sym}^{kq - i(q+1)}(V) = \mathrm{Sym}^n(V)$$

zu erhalten. □

Bemerkung. Die Wahlen von k und i sind nicht eindeutig, vergleiche Korollar 9.7.

Wir haben mit Satz 10.21 die in Kapitel 9 offen gebliebene Frage nach der Identifikation der Filtrierungsmoduln M_k^i mit klassischen G-Moduln beantwortet.

Darüber hinaus liefern unsere Resultate für die Filtrierung der symmetrischen Potenzen eine alternative Methode, um die Quotienten der Spitzenfiltrierung zu bestimmen.

10.23 Korollar. *Sei $k \geq 2$. Für die Filtrierungsmoduln $L^{(i,kq)}$ mit $0 \leq i \leq \mathfrak{m}(k)$ aus Proposition 10.4 gilt*

$$L^{(i,kq)} \cong M_k^i$$

als Isomorphie von G-Moduln.

Beweis. Dies folgt mit Satz 8.2 und Satz 10.21 direkt aus der in Proposition 10.4 angegebenen Isomorphie der Moduln $L^{(i,kq)}$. □

10.24 Satz (Alternative zu Satz 9.23)**.** *Sei $k \geq 2$ und sei $0 \leq i \leq \mathfrak{m}(k) - 1$. Dann gilt*

$$M_k^i / M_k^{i+1} \cong N[k - 2i, i]$$

als Isomorphie von G-Moduln.

Beweis. Für $0 \leq i \leq \mathfrak{m}(k) - 1$ folgt mit Korollar 10.23 und Proposition 10.13

$$M_k^i / M_k^{i+1} \cong L^{(i,kq)} / L^{(i+1,kq)} \cong N[kq - 2i, i] = N[k - 2i, i].$$

□

Abschließend beweisen wir unter Verwendung Drinfeld'scher Modulformen das noch ausstehende Gegenstück zu Satz 10.14.

10.25 Proposition. *Ist $n \geq q + 1$ durch q teilbar, so existiert ein zu $L(n)$ komplementärer G-Untermodul in* $\mathrm{Sym}^n(V)$*.*

Beweis. Wir schreiben $n = kq$ und wissen, dass $\mathrm{Sym}^{kq}(V) \cong M_k$ ist. Nach der Definition von $L(kq)$ und Korollar 10.23 gilt ferner

$$L(kq) = L^{(1,kq)} \cong M_k^1.$$

Da aber M_k^1 in M_k durch den G-Modul Eis_k komplementierbar ist, folgt die Behauptung. □

11 Vielfachheiten der Kompositionsfaktoren von M_k^n

Unsere Ergebnisse für die sukzessiven Quotienten der Spitzenfiltrierung erlauben uns nun, als Anwendungsbeispiel die Vielfachheiten der Kompositionsfaktoren des Moduls M_k der Modulformen vom Gewicht k sowie allgemeiner von Filtrierungsmoduln M_k^n zu bestimmen.

Im ersten Abschnitt halten wir zunächst fest, wie wir diese Vielfachheiten auf das Zählen von Vielfachheiten in direkten Summen bekannter G-Moduln zurückführen können. Wir zeigen, dass die Struktur im Wesentlichen von einer bestimmten Teilsumme abhängt, und betrachten diese genauer.

Im zweiten Abschnitt verwenden wir diese Resultate, um auch das Endstück und seine Kompositionsfaktoren genauer zu untersuchen.

Als Ergebnis geben wir im dritten Abschnitt ein Verfahren an, das für gegebenes Gewicht k zu jeder Isomorphieklasse einfacher G-Moduln ihre Vielfachheit als Kompositionsfaktor eines beliebigen Filtrierungsmoduls M_k^n zählt.

Gemäß Satz 8.2 und Satz 10.21 ist das Verfahren auch geeignet, die Vielfachheiten der Kompositionsfaktoren von symmetrischen Potenzen $\mathrm{Sym}^n(V)$ zu bestimmen.

11.1 Das Muster des Gewichts k

Wir betrachten Filtrierungsmoduln für das Gewicht $k \in \mathbb{N}$ und schreiben wie üblich

$$k = \mathfrak{k} + \widehat{\mathfrak{k}}(q+1) \quad \text{mit } 1 \leq \mathfrak{k} \leq q+1$$

und setzen

$$\mathfrak{m}(k) = \mathfrak{k} - 1 + \widehat{\mathfrak{k}}q.$$

Die Vielfachheit der Kompositionsfaktoren eines Moduls hängt nur von seiner Äquivalenzklasse unter Jordan-Hölder-Äquivalenz ab (vergleiche Definition 5.23). Wir halten daher für die Untermoduln der Spitzenfiltrierung fest:

11.1 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq n \leq \mathfrak{m}(k)$. Dann ist*

$$M_k^n \overset{\mathrm{J-H}}{\sim} \bigoplus_{i=n}^{\mathfrak{m}(k)-1} N[k-2i, i] \oplus \Big(\mathrm{Sym}^{q+1-\mathfrak{k}}(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(k)}\Big). \tag{11.1}$$

(Im Allgemeinen gilt jedoch keine G-Isomorphie!)

Beweis. Der Modul M_k^n ist Jordan-Hölder-äquivalent zur direkten Summe der sukzessiven Quotienten der Spitzenfiltrierung:

$$M_k^n \overset{\mathrm{J-H}}{\sim} \bigoplus_{i=n}^{\mathfrak{m}(k)-1} \left(M_k^i/M_k^{i+1}\right) \oplus M_k^{\mathfrak{m}(k)}.$$

In Satz 9.23 haben wir gezeigt:

$$M_k^i/M_k^{i+1} \cong N[k-2i, i] \quad \text{für } 1 \leq i \leq \mathfrak{m}(k) - 1.$$

Gemäß der zugehörigen Bemerkung gilt diese Formel auch im Fall $i = 0$.

Aus Satz 9.16 folgt außerdem

$$M_k^{\mathfrak{m}(k)} \cong \mathrm{Sym}^{q+1-\mathfrak{k}}(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(k)}.$$

Da Jordan-Hölder-Äquivalenz eine Vergröberung der durch G-Isomorphie gegebenen Äquivalenzrelation ist, folgt die Behauptung. □

Die in Formel (11.1) auftretenden direkten Summanden $N[k-2i, i]$ hängen nach Definition nur von den Restklassen von k und i modulo $q-1$ ab. Wir wollen zunächst Mehrfachauftreten von Summanden ausschließen und betrachten für jeweils festes Gewicht $k \in \mathbb{N}$ den Fall, dass i ein Repräsentantensystem modulo $q-1$ durchläuft.

Es wird sich herausstellen, dass es sich bei dieser speziellen direkten Summe um den regulären Fall handelt, mit dessen Hilfe anschließend sowohl der allgemeine Fall als auch das Endstück behandelt werden können.

Wir verzichten darauf, auch k durch einen Repräsentanten modulo $q-1$ zu ersetzen, um das Gewicht der Modulformen als Parameter beizubehalten.

11.2 Notation/Lemma. Im ganzen Kapitel bezeichne $\mathcal{R}$ ein beliebiges, aber festes vollständiges Repräsentantensystem modulo $q-1$. Für eine ganze Zahl $x \in \mathbb{Z}$ bezeichne $[x]_{\mathcal{R}}$ den Repräsentanten der Restklasse von x modulo $q-1$ in $\mathcal{R}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist der Modul

$$\bigoplus_{i \in \mathcal{R}} N[k-2i, i]$$

unabhängig von der Wahl des Repräsentantensystems $\mathcal{R}$. Er heißt das *Muster* des Gewichts k und hängt nur von der Klasse von k modulo $q-1$ ab.

Bemerkung. Die Aussagen dieses Kapitels können alternativ auch ohne Auszeichnung eines Repräsentantensystems für Klassen in $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ angegeben werden. Im Hinblick auf eine mögliche Implementierung des Verfahrens ist es jedoch sinnvoll, die Aussagen von vornherein für ein beliebiges, aber festes Repräsentantensystem zu formulieren.

11.3 (Auftretende Parameter). Sei $k \in \mathbb{N}$. Um zu bestimmen, für welche Parameter δ Determinantentwists von $N[\delta]$ als direkte Summanden im Muster des Gewichts k auftreten, betrachten wir die Kongruenz

$$k - 2x \equiv y \mod q-1 \tag{11.2}$$

mit $x, y \in \mathbb{Z}$. Die Gestalt ihrer Lösungsmenge hängt davon ab, ob $q = p^r$ eine gerade oder ungerade Primzahlpotenz ist.

Für $p = 2$ ist 2 invertierbar modulo $q - 1$. Zu jedem $y \in \mathcal{R}$ existiert ein eindeutiges $x \in \mathcal{R}$, bestimmt durch

$$x \equiv 2^{r-1}(k - y) \bmod q - 1,$$

so dass Kongruenz (11.2) erfüllt ist. Insbesondere durchläuft $k - 2x$ ein vollständiges Repräsentantensystem modulo $q - 1$, wenn x durch $\mathcal{R}$ läuft.

Ist $p > 2$, so ist Kongruenz (11.2) für $y \in \mathcal{R}$ genau dann lösbar, wenn k und y die gleiche Parität besitzen. In diesem Fall gibt es genau zwei Lösungen modulo $q - 1$, die gegeben sind durch

$$x \equiv \frac{k-y}{2} \mod q-1 \quad \text{sowie} \quad x \equiv \frac{k-y}{2} + \frac{q-1}{2} \mod q-1.$$

Für das Muster des Gewichts k gilt also:

(i) Ist $p = 2$, so enthält das Muster für jedes $1 \leq \delta \leq q - 1$ genau einen Determinantentwist von $N[\delta]$ als direkten Summanden.

(ii) Für $p > 2$ tritt nur die Hälfte der Moduln $N[\delta]$ als direkte Summanden im Muster auf, dafür aber mit jeweils zwei Determinantentwists, die sich um $\frac{q-1}{2}$ unterscheiden.

11.4 (Erinnerung). Wir verwenden im Folgenden unter anderem

(i) die Menge $\mathcal{T} = \bigcup_{1 \leq \delta \leq q-1} \mathcal{T}[\delta]$ der Typen (siehe Notation/Lemma 6.19),

(ii) die Abbildung $\mathfrak{d} : \mathcal{T} \to \{1, \ldots, q - 1\}$ (siehe Notation 6.24),

(iii) die Parametrisierungsfunktionen e und η (siehe Notation 6.30),

(iv) den dualen Träger dsupp (siehe Definition 6.34),

(v) die Klassifikation der einfachen G-Moduln aus Satz 5.33 mit Notation 5.32.

Mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 6 können wir die Kompositionsfaktoren der einzelnen Summanden $N[k - 2i, i]$ eines Musters wie folgt charakterisieren:

11.5 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Für $i \in \mathcal{R}$ ist der Modul $N[k - 2i, i]$ multiplizitätsfrei. Die Kompositionsfaktoren sind isomorph zu den einfachen Moduln*

$$\mathfrak{S}(e(\boldsymbol{\alpha}), \eta(\boldsymbol{\alpha}) + i)$$

mit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}[k - 2i]$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Parametrisierung der Kompositionsfaktoren von $N[k - 2i]$ gemäß Satz 6.41 und Proposition 6.43, versehen mit dem zusätzlichen Determinantentwist $(\det)^i$. □

Entsprechend erhalten wir für die Kompositionsfaktoren des Musters:

11.6 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Kompositionsfaktoren des Musters des Gewichts k werden parametrisiert durch die Menge*

$$\mathcal{K} := \mathcal{K}(k) := \{(\boldsymbol{\alpha}, i) \in \mathcal{T} \times \mathcal{R} \mid \mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha}) \equiv k - 2i \bmod q - 1\}.$$

Der Kompositionsfaktor zu $(\boldsymbol{\alpha}, i) \in \mathcal{K}$ ist dabei isomorph zu

$$\mathfrak{S}(e(\boldsymbol{\alpha}), \eta(\boldsymbol{\alpha}) + i).$$

Weiter gilt: Für $p = 2$ wird durch die Vorschrift $(\boldsymbol{\alpha}, i) \mapsto \boldsymbol{\alpha}$ eine Bijektion

$$\mathcal{K} \to \mathcal{T}$$

definiert. Ist $p > 2$, so beschreibt $(\boldsymbol{\alpha}, i) \mapsto \boldsymbol{\alpha}$ eine surjektive Abbildung

$$\mathcal{K} \to \bigcup_{\substack{1 \le \delta \le q-1 \\ \delta \equiv k \bmod 2}} \mathcal{T}[\delta],$$

unter der jedes Element der Bildmenge genau zwei Urbilder besitzt.

Beweis. Die Parametrisierung der Kompositionsfaktoren des Musters durch die Menge $\mathcal{K}$ ergibt sich direkt aus Lemma 11.5, da wir in Lemma 6.28 gesehen haben, dass

$$\mathcal{T}[\delta] = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T} \mid \mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha}) = \delta\}$$

gilt. Die weiteren Aussagen über die Struktur der Menge $\mathcal{K}$ folgen aus den Eigenschaften der in 11.3 betrachteten Kongruenz. □

Bemerkung. In Proposition 6.44 konnten wir die Multiplizitätsfreiheit des Moduls $\bigoplus_{\delta=1}^{q-1} N[\delta]$ an Eigenschaften der Parametrisierungsfunktionen e und η ablesen. Im Folgenden werden wir dagegen zeigen, dass das Muster des Gewichts k aufgrund der zusätzlichen Determinantentwists $(\det)^i$ im Allgemeinen nicht multiplizitätsfrei ist. Die Vielfachheiten der Kompositionsfaktoren lassen sich jedoch leicht bestimmen.

Wir wollen nun für eine beliebige Isomorphieklasse einfacher Moduln bestimmen, in welchen der direkten Summanden $N[k-2i, i]$ des Musters ein Kompositionsfaktor auftritt, der in dieser Klasse liegt. Da die Moduln $N[k-2i, i]$ alle multiplizitätsfrei sind, erhalten wir auf diese Weise insbesondere die Vielfachheit des betrachteten einfachen Moduls unter den Kompositionsfaktoren des Musters.

11.7 Notation. Sei $k \in \mathbb{N}$. Für $0 \le m \le q-1$ und $\mu \in \mathcal{R}$ definieren wir

$$I_{m,\mu}(k)$$

als Menge aller $i \in \mathcal{R}$, für die $\mathfrak{S}(m, \mu)$ isomorph zu einem Kompositionsfaktor von $N[k-2i, i]$ ist.

11.8 Satz. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Seien $0 \leq m \leq q-1$ und $\mu \in \mathcal{R}$. Dann gilt: Der einfache Modul $\mathfrak{S}(m,\mu)$ ist genau dann isomorph zu einem Kompositionsfaktor des Musters des Gewichts k, wenn m und μ der Kongruenz*

$$m \equiv k - 2\mu \mod q-1 \tag{11.3}$$

genügen. In diesem Fall gilt genauer:

(i) Für $m > 0$ mit p-adischer Entwicklung $\sum_{j=0}^{r-1} m_j p^j$ ist

$$I_{m,\mu}(k) = \left\{ \left[\mu - \sum_{j \in U} (p-1-m_j) p^j \right]_{\mathcal{R}} \mid U \subseteq \operatorname{dsupp}(m) \right\}.$$

Die Vielfachheit von $\mathfrak{S}(m,\mu)$ unter den Kompositionsfaktoren des Musters des Gewichts k ist $2^{\# \operatorname{dsupp}(m)}$.

(ii) Für $m = 0$ gilt

$$I_{0,\mu}(k) = \left\{ \left[\mu - \sum_{j \in U} (p-1) p^j \right]_{\mathcal{R}} \mid \emptyset \neq U \subseteq \{0, \dots, r-1\} \right\}.$$

Die Isomorphieklasse von $\mathfrak{S}(0,\mu)$ tritt unter den Kompositionsfaktoren des Musters des Gewichts k mit Vielfachheit $2^r - 1$ auf.

Beweis. Zuerst zeigen wir die Notwendigkeit von Bedingung (11.3). Sei also $\mathfrak{S}(m,\mu)$ isomorph zu einem Kompositionsfaktor des Musters. Nach Lemma 11.6 existieren dann $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}$ und $i \in \mathcal{R}$, die dem System von Bedinungen

$$\begin{aligned} m &= e(\boldsymbol{\alpha}), \\ \mu &\equiv \eta(\boldsymbol{\alpha}) + i \mod q-1, \\ \mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha}) &\equiv k - 2i \mod q-1 \end{aligned} \tag{11.4}$$

genügen. Zusammen mit Lemma 6.33 folgt daraus

$$\begin{aligned} m &= e(\boldsymbol{\alpha}) \\ &\equiv \mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha}) - 2\eta(\boldsymbol{\alpha}) \mod q-1 \\ &\equiv k - 2i - 2(\mu - i) \mod q-1 \\ &\equiv k - 2\mu \mod q-1. \end{aligned}$$

Sei also umgekehrt die Kongruenz (11.3) für m und μ erfüllt. Um zu bestimmen, in welchen Moduln $N[k-2i, i]$ ein Kompositionsfaktor auftritt, der isomorph zum einfachen Modul $\mathfrak{S}(m,\mu)$ ist, müssen wir alle Paare $(\boldsymbol{\alpha}, i) \in \mathcal{T} \times \mathcal{R}$ ermitteln, die den Bedingungen (11.4) genügen. Die Menge $I_{m,\mu}(k)$ besteht dann genau aus den dabei auftretenden i.

Aufgrund der ersten Bedingung in (11.4) sehen wir, dass nur die Typen $\boldsymbol{\alpha}$ aus dem Urbild von m unter der Parametrisierungsfunktion e in Frage kommen. Die zweite Bedingung wird für ein solches $\boldsymbol{\alpha}$ nur durch den eindeutigen Repräsentanten

$$i_{\boldsymbol{\alpha}} = [\mu - \eta(\boldsymbol{\alpha})]_{\mathcal{R}}$$

erfüllt. Tatsächlich genügt jedes solche Paar auch der dritten Bedingung von (11.4). Wir erhalten nämlich mit Lemma 6.33

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}(\boldsymbol{\alpha}) &\equiv e(\boldsymbol{\alpha}) + 2\eta(\boldsymbol{\alpha}) \mod q-1\\ &\equiv m + 2(\mu - i_{\boldsymbol{\alpha}}) \mod q-1\\ &\equiv (m+2\mu) - 2i_{\boldsymbol{\alpha}} \mod q-1\\ &\equiv k - 2i_{\boldsymbol{\alpha}} \mod q-1.\end{aligned}$$

Die angegebene Gestalt der Menge $I_{m,\mu}(k)$ erhalten wir durch die Parametrisierung der Fasern von e in Proposition 6.38 zusammen mit der Beschreibung der zweiten Parametrisierungsfunktion η auf diesen Fasern in Lemma 6.40. Insbesondere liefert das zitierte Lemma, dass die oben bestimmten Repräsentanten $i_{\boldsymbol{\alpha}}$ paarweise verschieden sind. Die Mächtigkeit von $I_{m,\mu}(k)$ entspricht damit der bereits bekannten Mächtigkeit der Faser von m unter e. □

Bemerkung. Wie in Punkt 11.3 beschrieben, kann die Überprüfung, ob m und μ der Bedingung (11.3) genügen, genau aufgeschlüsselt werden:

(i) Für $p = 2$ gibt es keine Bedingung an m. Für gegebenes m ist μ jedoch eindeutig bestimmt durch

$$\mu \equiv 2^{r-1}(k-m) \mod q-1.$$

(ii) Für $p > 2$ kommen nur solche m in Frage, die die gleiche Parität wie k besitzen. Allerdings sind dann jeweils zwei Determinantentwists zulässig, bestimmt durch

$$\mu \equiv \frac{k-m}{2} \mod q-1$$

beziehungsweise

$$\mu \equiv \frac{k-m}{2} + \frac{q-1}{2} \mod q-1.$$

Insbesondere sehen wir: Der Sonderfall $m = 0$ tritt in ungerader Charakteristik nur für gerades k auf.

Die explizite Bestimmung der Menge $I_{m,\mu}(k)$, ist dann wichtig, wenn wir Vielfachheiten in einer Teilsumme des Musters betrachten.

11.9 Korollar. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Ferner sei $0 \le m \le q-1$ und $\mu \in \mathcal{R}$. Die Vielfachheit von $\mathfrak{S}(m,\mu)$ unter den Kompositionsfaktoren von $\bigoplus_{i \in J} N[k-2i, i]$ für eine Teilmenge $J \subseteq \mathcal{R}$ ist*

$$\#\left(J \cap I_{m,\mu}(k)\right).$$

11.10 Beispiel. Sei $p > 2$ und $q = p^3$. Für gerades k betrachten wir

$$m = p - 2 + (p-1)p + (p-2)p^2.$$

Da m ebenfalls gerade ist, treten unter den Kompositionsfaktoren des Musters des Gewichts k genau zwei Determinantentwists $\mathfrak{S}(m,\mu)$ des einfachen Moduls $\mathfrak{S}(m)$ auf, nämlich die mit

$$\mu = \left[\frac{k-m}{2}\right]_{\mathcal{R}} \quad \text{und} \quad \mu = \left[\frac{k-m}{2} + \frac{q-1}{2}\right]_{\mathcal{R}}.$$

Es gilt $\operatorname{dsupp}(m) = \{0,2\}$, folglich ist die Vielfachheit in beiden Fällen 4 und es gilt genauer

$$I_{m,\mu}(k) = \left\{[\mu]_{\mathcal{R}}, [\mu-1]_{\mathcal{R}}, [\mu-p^2]_{\mathcal{R}}, [\mu-1-p^2]_{\mathcal{R}}\right\}.$$

11.11 Beispiel (Steinberg-Modul)**.** Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir untersuchen für das Muster des Gewichts k das Auftreten von Kompositionsfaktoren, die isomorph zu Determinantentwists des Steinberg-Moduls

$$\operatorname{Sym}^{q-1}(V) = \mathfrak{S}(q-1)$$

sind. Da $\operatorname{dsupp}(q-1) = \emptyset$ ist, treten diese höchstens mit einfacher Vielfachheit auf.

(i) Für $p = 2$ befindet sich unter den Kompositionsfaktoren des Musters zu k genau ein Twist des Steinberg-Moduls. Es handelt sich um den einfachen Modul

$$\mathfrak{S}(q-1, [2^{r-1}k]_{\mathcal{R}}),$$

der mit Vielfachheit 1 auftritt.

(ii) Für $p > 2$ sind genau dann Determinantentwists des Steinberg-Moduls unter den Kompositionsfaktoren des Musters zu k, wenn k gerade ist. In diesem Fall sind

$$\mathfrak{S}\left(q-1, \left[\frac{k}{2}\right]_{\mathcal{R}}\right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}\left(q-1, \left[\frac{k}{2} + \frac{q-1}{2}\right]_{\mathcal{R}}\right)$$

die einzigen auftretenden Twists und kommen beide mit einfacher Vielfachheit vor.

Um zu bestimmen, wie viele Kompositionsfaktoren das Muster des Gewichts k insgesamt besitzt, sortieren wir die Zahlen $0 \leq m \leq q-1$ nach der Größe ihres dualen Trägers.

11.12 Notation. Für $0 \leq s \leq r$ setzen wir

$$\begin{aligned} n(s) &= \#\{0 \leq m \leq q-1 \mid \#\operatorname{dsupp}(m) = s\}, \\ n_g(s) &= \#\{0 \leq m \leq q-1 \mid \#\operatorname{dsupp}(m) = s,\ m \text{ gerade}\}, \\ n_u(s) &= \#\{0 \leq m \leq q-1 \mid \#\operatorname{dsupp}(m) = s,\ m \text{ ungerade}\}. \end{aligned}$$

11.13 Lemma. *Für $0 \leq s \leq r$ ist*

$$n(s) = \binom{r}{s}(p-1)^s.$$

Ist $p > 2$, so gilt

$$n_g(0) = n(0) = 1, \quad n_u(0) = 0$$

sowie

$$n_g(s) = n_u(s) = \frac{n(s)}{2} \quad \text{für } 1 \leq s \leq r.$$

Beweis. Offenbar gilt die angegebene Formel für $n(s)$, da es $\binom{r}{s}$ mögliche Positionen der von $p-1$ verschiedenen p-adischen Koeffizienten, sowie jeweils $p-1$ mögliche Werte für diese Koeffizienten gibt.

Sei also nun p eine ungerade Primzahl. Da $q-1$ die einzige Zahl mit leerem dualen Träger ist, sind $n_g(0)$ und $n_u(0)$ wie behauptet.

Für $s \geq 1$ können wir eine Bijektion angeben zwischen den geraden und den ungeraden Zahlen in $\{0, \ldots, q-1\}$, deren dualer Träger s Elemente enthält. Dabei nutzen wir aus: Ist $0 \leq m \leq q-1$ mit p-adischen Koeffizienten m_j und $\#\operatorname{dsupp}(m) = s$, so existiert wegen $s \geq 1$ ein minimaler Index $0 \leq l \leq r-1$ mit $m_l < p-1$.

Wir ordnen m die Zahl $0 \leq \varphi(m) \leq q-1$ zu, deren p-adische Koeffizienten bestimmt sind durch

$$\varphi(m)_j := \begin{cases} p-2-m_l & j = l \\ m_j & j \neq l. \end{cases}$$

Wegen

$$\varphi(m)_l \equiv m_l + 1 \mod 2$$

ist $\varphi(m)$ genau dann ungerade, wenn m gerade ist. Da nach Konstruktion darüber hinaus

$$\operatorname{dsupp}(\varphi(m)) = \operatorname{dsupp}(m)$$

und

$$\varphi(\varphi(m)) = m$$

gelten, induziert die Abbildung $m \mapsto \varphi(m)$ die gesuchte Bijektion. □

11.14 Satz. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Das Muster des Gewichts k besitzt insgesamt*

$$(2p-1)^r - 1$$

Kompositionsfaktoren (mit Vielfachheiten gezählt).

Beweis. Wir können die Gesamtvielfachheit v der Kompositionsfaktoren des Musters des Gewichts k schreiben als

$$v = \sum_{m=0}^{q-1} v(m),$$

wobei $v(m)$ für $0 \leq m \leq q-1$ die Vielfachheit der Determinantentwists von $\mathfrak{S}(m)$ unter den Kompositionsfaktoren des Musters zählt.

Im Fall $p = 2$ sehen wir mit Hilfe von Satz 11.8 und der anschließenden Bemerkung, dass

$$v(m) = 2^{\#\,\mathrm{dsupp}(m)} - \delta_{m,0}$$

(mit Kronecker-Delta) gilt. Fassen wir Summanden mit gleich großen dualen Trägern zusammen, erhalten wir also

$$v = \left(\sum_{m=0}^{q-1} 2^{\#\,\mathrm{dsupp}(m)}\right) - 1 = \left(\sum_{s=0}^{r} n(s)2^s\right) - 1.$$

Ist auf der anderen Seite $p > 2$ und m von gleicher Parität wie k, so gibt es unter den Kompositionsfaktoren des Musters zwei verschiedene Determinantentwists von $\mathfrak{S}(m)$ mit jeweils gleicher Vielfachheit. Genauer gilt hier

$$v(m) = \begin{cases} 2(2^{\#\,\mathrm{dsupp}(m)} - \delta_{m,0}) & m \equiv k \bmod 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für gerades k ist dann mit dem zweiten Teil von Lemma 11.13

$$\begin{aligned} v &= \left(\sum_{\substack{m=0 \\ m\equiv 0 \bmod 2}}^{q-1} 2^{\#\,\mathrm{dsupp}(m)+1}\right) - 2 = \left(\sum_{s=0}^{r} n_g(s)2^{s+1}\right) - 2 \\ &= \sum_{s=1}^{r} 2n_g(s)2^s = \left(\sum_{s=0}^{r} n(s)2^s\right) - 1. \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir für ungerades k

$$\begin{aligned} v &= \sum_{\substack{m=0 \\ m\equiv 1 \bmod 2}}^{q-1} 2^{\#\,\mathrm{dsupp}(m)+1} = \sum_{s=0}^{r} n_u(s)2^{s+1} \\ &= \sum_{s=1}^{r} 2n_u(s)2^s = \left(\sum_{s=0}^{r} n(s)2^s\right) - 1. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formel für $n(s)$ aus dem ersten Teil von Lemma 11.13 und des binomischen Lehrsatzes sehen wir, dass in jedem Fall tatsächlich

$$\begin{aligned} v &= \left(\sum_{s=0}^{r} n(s)2^s\right) - 1 = \left(\sum_{s=0}^{r} \tbinom{r}{s}(p-1)^s 2^s\right) - 1 \\ &= (2(p-1)+1)^r - 1 = (2p-1)^r - 1 \end{aligned}$$

gilt. $\square$

Bemerkung. Das Muster zu k besitzt also mit Vielfachheiten gezählt genau so viele Kompositionsfaktoren wie der Modul $\bigoplus_{\delta=1}^{q-1} N[\delta]$, ist aber im Gegensatz zu diesem nicht multiplizitätsfrei.

Für $p = 2$ erhalten wir dieses Ergebnis bereits aus der Bijektion zwischen den Mengen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{T}$ in Lemma 11.6. Der gesonderte Beweis von Satz 11.14 liefert in diesem Fall eine Kontrolle der in Satz 11.8 bestimmten Vielfachheiten.

11.2 Vielfachheit im Endstück

Für unsere beabsichtigte Anwendung, die Vielfachheiten der Kompositionsfaktoren von Untermoduln der Spitzenfiltrierung zu bestimmen, müssen wir neben den im vorigen Abschnitt betrachteten Moduln noch das Endstück der Spitzenfiltrierung untersuchen.

Für das Gewicht $k \in \mathbb{N}$ schreiben wir dabei weiterhin

$$k = \mathfrak{k} + \widehat{\mathfrak{k}}(q+1) \quad \text{mit } 1 \leq \mathfrak{k} \leq q+1$$

und

$$\mathfrak{m}(k) = \mathfrak{k} - 1 + \widehat{\mathfrak{k}}q.$$

Unserem bisherigen Vorgehen entsprechend wollen wir für eine vorgegebene Isomorphieklasse einfacher G-Moduln bestimmen, ob sie unter den Kompositionsfaktoren des Endstücks auftritt. Dazu nutzen wir den folgenden Zusammenhang zwischen dem Endstück und den Moduln der Form $N[k-2i, i]$ aus:

11.15 Proposition. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Das Endstück $M_k^{\mathfrak{m}(k)}$ der Spitzenfiltrierung ist isomorph zu einem Untermodul des multiplizitätsfreien Moduls $N[k-2\mathfrak{m}(k), \mathfrak{m}(k)]$, also selbst multiplizitätsfrei. Genauer haben wir:*

(i) Ist $\mathfrak{k} = 1$, so gilt

$$M_k^{\mathfrak{m}(k)} \cong N[1, \mathfrak{m}(k)] = N[k - 2\mathfrak{m}(k), \mathfrak{m}(k)].$$

Das Endstück hat in diesem Fall also genau die gleichen Kompositionsfaktoren wie der Modul $N[k-2\mathfrak{m}(k), \mathfrak{m}(k)]$.

(ii) Für $2 \leq \mathfrak{k} \leq q$ ist das Endstück isomorph zum Untermodul

$$\mathrm{Sym}^{[k-2\mathfrak{m}(k)]}(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(k)} \subseteq N[k-2\mathfrak{m}(k), \mathfrak{m}(k)]$$

(beachte Notation 6.49). Dabei bezeichnet „$[\,\cdot\,]$“ wie üblich den Repräsentanten modulo $q-1$ in $\{1, \ldots, q-1\}$.

Das Endstück besitzt genau die Kompositionsfaktoren von $N[k-2\mathfrak{m}(k), \mathfrak{m}(k)]$, die durch Typen $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}[k-2\mathfrak{m}(k)]$ parametrisiert werden, für die $\alpha_j < p-1$ gilt, wenn $0 \leq j \leq r-1$ der größte Index mit $\alpha_j \neq p-1$ ist.

(iii) Ist $\mathfrak{k} = q+1$, so ist das Endstück

$$M_k^{\mathfrak{m}(k)} \cong (\det)^{\mathfrak{m}(k)}$$

bereits selbst ein einfacher Modul und isomorph zum eindimensionalen direkten Summanden von $N[q-1, \mathfrak{m}(k)] = N[k - 2\mathfrak{m}(k), \mathfrak{m}(k)]$.

Beweis. Wir haben in Satz 9.16 gesehen, dass

$$M_k^{\mathfrak{m}(k)} \cong \mathrm{Sym}^{q+1-\mathfrak{k}}(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(k)}$$

gilt. Außerdem haben wir in Kongruenz (9.7)

$$k - 2\mathfrak{m}(k) \equiv q + 1 - \mathfrak{k} \mod q-1$$

gezeigt.

Unter Verwendung von Satz 6.52 erhalten wir damit im Fall $\mathfrak{k} = 1$

$$\begin{aligned} M_k^{\mathfrak{m}(k)} &\cong \mathrm{Sym}^q(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(k)} \\ &\cong N[1] \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(k)} \\ &= N[k - 2\mathfrak{m}(k), \mathfrak{m}(k)]. \end{aligned}$$

Für $2 \leq \mathfrak{k} \leq q$ ist das Endstück wegen

$$[k - 2\mathfrak{m}(k)] = q + 1 - \mathfrak{k}$$

isomorph zur symmetrischen Potenz $\mathrm{Sym}^{[k-2\mathfrak{m}(k)]}(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(k)}$, die wir gemäß Notation 6.49 als Untermodul von $N[k - 2\mathfrak{m}(k), \mathfrak{m}(k)]$ auffassen. Die angegebene Parametrisierung der Kompositionsfaktoren folgt aus Lemma 6.51.

Für $\mathfrak{k} = q + 1$ sehen wir direkt

$$\begin{aligned} M_k^{\mathfrak{m}(k)} &\cong \mathrm{Sym}^0(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(k)} \\ &= (\det)^{\mathfrak{m}(k)}. \end{aligned}$$

Da andererseits

$$\begin{aligned} N[k - 2\mathfrak{m}(k), \mathfrak{m}(k)] &= N[q + 1 - \mathfrak{k}, \mathfrak{m}(k)] \\ &= N[q-1, \mathfrak{m}(k)] \\ &\cong (\det)^{\mathfrak{m}(k)} \oplus \left(\mathrm{Sym}^{q-1}(V) \otimes (\det)^{\mathfrak{m}(k)}\right) \end{aligned}$$

gilt, folgt die Behauptung. □

Nach Definition des Musters des Gewichts k wissen wir also, dass gilt:

11.16 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Ein einfacher Modul kann nur dann als Kompositionsfaktor von M_k auftreten, wenn er Kompositionsfaktor des Musters zu k ist.*

Mit den Ergebnissen des vorigen Abschnitts können wir bereits bestimmen, ob ein einfacher Modul als Kompositionsfaktor des Moduls $N[k-2\mathfrak{m}(k), \mathfrak{m}(k)]$ auftritt. Dazu müssen wir nur überprüfen, ob

$$[\mathfrak{m}(k)]_{\mathcal{R}} \in I_{m,\mu}(k)$$

gilt. Sind wir aber speziell am Endstück interessiert, so dürfen wir im Fall $2 \leq \mathfrak{k} \leq q$ stattdessen nur eine geeignete Teilmenge von $I_{m,\mu}(k)$ betrachten.

11.17 Notation. Für $0 \leq m \leq q-1$ und $\mu \in \mathcal{R}$ definieren wir analog zu Notation 11.7 die Menge

$$I^0_{m,\mu}(k) \subseteq I_{m,\mu}(k)$$

der Repräsentanten $i \in \mathcal{R}$, für die $\mathfrak{S}(m,\mu)$ Kompositionsfaktor des Untermoduls $\mathrm{Sym}^{[k-2i]}(V) \otimes (\det)^i$ von $N[k-2i, i]$ ist.

Um diese Menge zu bestimmen, müssen wir die Auswirkungen der zusätzlichen Bedingung an die Typen aus Fall (*ii*) von Proposition 11.15 genauer studieren. Wir erhalten auf diese Weise die folgende Entsprechung zu Satz 11.8:

11.18 Proposition. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Seien $0 \leq m \leq q-1$ und $\mu \in \mathcal{R}$. Dann ist die Bedingung*

$$m \equiv k - 2\mu \mod q-1$$

notwendig dafür, dass die Menge $I^0_{m,\mu}(k)$ nichtleer ist. Genügen m und μ der angegebenen Kongruenz, so gilt genauer:

(i) Für $m > 0$ mit p-adischer Entwicklung $\sum_{j=0}^{r-1} m_j p^j$ ist

$$I^0_{m,\mu}(k) = \left\{ \left[\mu - \sum_{j \in U} (p-1-m_j)p^j\right]_{\mathcal{R}} \mid U \subseteq \mathrm{dsupp}(m) \setminus \{\max \mathrm{dsupp}(m)\} \right\}.$$

(ii) Für $m = 0$ gilt

$$I^0_{0,\mu}(k) = \left\{ \left[\mu - \sum_{j \in U} (p-1)p^j\right]_{\mathcal{R}} \mid \emptyset \neq U \subseteq \{0, \dots, r-2\} \right\}.$$

Dabei ist $I^0_{0,\mu}(k)$ leer für $r = 1$.

Beweis. Da die Menge $I^0_{m,\mu}(k)$ eine Teilmenge von $I_{m,\mu}(k)$ ist, folgt die Notwendigkeit der angegebenen Kongruenzbedingung aus Satz 11.8.

Sei die Bedingung also erfüllt. Für die Beschreibung der Elemente von $I^0_{m,\mu}(k)$ betrachten wir den Beweis des genannten Satzes genauer. Dort haben wir jedem Typ $\boldsymbol{\alpha}$ im Urbild von m unter der Parametrisierungsfunktion e einen Repräsentanten $i_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathcal{R}$ zugeordnet.

Wir können an dieser Stelle genauso vorgehen, dürfen dabei aber gemäß Lemma 6.51 nur solche Typen betrachten, für die $\alpha_j < p-1$ ist, wenn $0 \leq j \leq r-1$ der größte

Index mit $\alpha_j \neq p-1$ ist. Existiert kein solches j, so handelt es sich um den Typ $\boldsymbol{\alpha} = (p-1, \ldots, p-1)$, der ebenfalls zulässig ist.

Wir parametrisieren die Typen im Urbild von m unter e wie in Proposition 6.38 durch die Teilmengen $U \subseteq \mathrm{dsupp}(m)$ (mit $U \neq \emptyset$ für $m = 0$).

Da ein solcher Typ $\boldsymbol{\alpha}(m, U)$ gemäß Lemma 6.36 genau an den Indizes in U Einträge besitzt, die echt größer als $p-1$ sind, ist die vorliegende Einschränkung äquivalent dazu, dass hier keine Teilmengen gewählt werden dürfen, die das Maximum von $\mathrm{dsupp}(m)$ enthalten, sofern dieses existiert.

Insbesondere kommt im Fall $r = 1$ für jedes m nur die leere Menge in Betracht, so dass es für $m = 0$ keine zulässigen Teilmengen beziehungsweise Typen im Urbild gibt.

Der Rest der Behauptung folgt genau wie im Beweis von Satz 11.8. □

Bemerkung. Die Besonderheit für $r = 1$ besteht darin, dass die Moduln $\mathrm{Sym}^{\delta}(V)$ mit $1 \leq \delta \leq p-1$ einfach sind. Aussagen über die Kompositionsfaktoren dieser Moduln sind somit trivial.

Insbesondere handelt es sich bei $r = 1$ und $m = 0$ um den einzigen Fall, in dem die Menge $I^0_{m,\mu}(k)$ leer ist, selbst wenn m und μ die notwendige Kongruenzbedingung erfüllen.

Wir können nun für einen gegebenen einfachen Modul überprüfen, ob er isomorph zu einem Kompositionsfaktor des Endstücks ist, d.h., ob er die jeweils zutreffende Bedingung aus Proposition 11.15 erfüllt.

11.19 Satz. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Sei weiter $0 \leq m \leq q-1$ und $\mu \in \mathcal{R}$. Dann gilt:*

(i) Ist $\mathfrak{k} = 1$, so tritt der einfache Modul $\mathfrak{S}(m, \mu)$ genau dann unter den Kompositionsfaktoren des Endstücks $M_k^{\mathfrak{m}(k)}$ auf, wenn

$$[\mathfrak{m}(k)]_{\mathcal{R}} \in I_{m,\mu}(k)$$

gilt.

(ii) Für $2 \leq \mathfrak{k} \leq q$ ist der einfache Modul $\mathfrak{S}(m, \mu)$ genau dann Kompositionsfaktor des Endstücks $M_k^{\mathfrak{m}(k)}$, wenn

$$[\mathfrak{m}(k)]_{\mathcal{R}} \in I^0_{m,\mu}(k)$$

ist.

(iii) Ist $\mathfrak{k} = q+1$, so ist der einfache Modul $\mathfrak{S}(m, \mu)$ genau dann Kompositionsfaktor des Endstücks $M_k^{\mathfrak{m}(k)}$, wenn

$$m = 0 \quad \textit{und} \quad \mu \equiv \mathfrak{m}(k) \mod q-1$$

gilt.

Beweis. Die Behauptung folgt nach Definition der Mengen $I_{m,\mu}(k)$ und $I^0_{m,\mu}(k)$ unmittelbar aus der Beschreibung der Kompositionsfaktoren des Endstücks in Proposition 11.15. □

Bemerkung. Im Hinblick auf die Implementierung der Kriterien stellen wir fest, dass die Bestimmung der Menge $I^0_{m,\mu}(k)$ keinen Mehraufwand gegenüber der Bestimmung von $I_{m,\mu}(k)$ bedeutet, sondern durch geeignetes Sortieren der durchlaufenen Teilmengen von $\operatorname{dsupp}(m)$ parallel durchgeführt werden kann.

11.3 Verfahren zur Bestimmung der Vielfachheiten

Die Resultate der ersten beiden Abschnitte dieses Kapitels setzen wir nun zu Verfahren zusammen, mit deren Hilfe wir die Vielfachheiten der Kompositionsfaktoren von Filtrierungsmoduln der Spitzenfiltrierung bestimmen können. Dabei verzichten wir darauf, alle technischen Zwischenschritte explizit zu implementieren. Entscheidend ist, zu sehen, dass die beschriebene Aufgabenstellung mit den vorhandenen Ergebnissen algorithmisch gelöst werden kann.

Wir legen weiterhin die Primzahlpotenz $q = p^r$ zugrunde. Des weiteren sei $\mathcal{R}$ ein beliebiges vollständiges Repräsentantensystem modulo $q-1$.

Die Mengen $I_{m,\mu}(k)$ und $I^0_{m,\mu}(k)$, die wir bei der Untersuchung des Musters des Gewichts k benötigen, können bestimmt werden, bevor wir konkrete Filtrierungsmoduln betrachten. Dies geschieht mit dem folgenden Verfahren:

11.20 (Algorithmus: Daten des Musters). Gegeben sei eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Durchlaufe die Paare (m, μ) mit $0 \le m \le q-1$ und $\mu \in \mathcal{R}$, für die

$$m \equiv k - 2\mu \mod q-1$$

gilt. Führe für jedes solche Paar (m, μ) die folgende Prozedur durch:

(i) Initialisiere die Menge

$$I^0 := \begin{cases} \{[\mu]_{\mathcal{R}}\} & m > 0 \\ \emptyset & m = 0. \end{cases}$$

(ii) Falls $m = q-1$ gilt, setze

$$I_{q-1,\mu}(k) := I^0_{q-1,\mu}(k) := I^0$$

und beende die Prozedur für das betrachtete Paar.

(iii) Bestimme andernfalls für $0 \le j \le r-1$ die p-adischen Koeffizienten m_j von m und lese den dualen Träger $\operatorname{dsupp}(m)$ ab. Setze

$$l := \max \operatorname{dsupp}(m)$$

und initialisiere die Menge

$$I^1 := \left\{ [\mu - (p-1-m_l)p^l]_{\mathcal{R}} \right\}.$$

(iv) Durchlaufe mit U alle nichtleeren Teilmengen von $\operatorname{dsupp}(m) \setminus \{l\}$. Definiere

$$i_U := \mu - \sum_{j \in U} (p - 1 - m_j) p^j$$

und setze

$$\begin{aligned} I^0 &:= I^0 \cup \{[i_U]_{\mathcal{R}}\}\,, \\ I^1 &:= I^1 \cup \left\{[i_U - (p-1-m_l)p^l]_{\mathcal{R}}\right\}. \end{aligned}$$

(v) Erhalte als Resultat der Prozedur für das betrachtete Paar

$$\begin{aligned} I^0_{m,\mu}(k) &:= I^0, \\ I_{m,\mu}(k) &:= I^0 \cup I^1. \end{aligned}$$

Beweis (Korrektheit des Verfahrens). Es ist zu zeigen, dass die im Verfahren bestimmten Mengen $I_{m,\mu}(k)$ und $I^0_{m,\mu}(k)$ mit den in Satz 11.8 beziehungsweise Proposition 11.18 angegebenen Mengen übereinstimmen.

Wir wissen, dass die Bedingung

$$m \equiv k - 2\mu \mod q - 1$$

notwendig dafür ist, dass die Mengen $I_{m,\mu}(k)$ und $I^0_{m,\mu}(k)$ nichtleer sind, und können uns daher im Verfahren auf die entsprechenden Paare (m, μ) beschränken.

Das Ergebnis des Verfahrens ist im Fall $m = q - 1$ nach Vergleich mit den zitierten Aussagen offensichtlich korrekt, da

$$\operatorname{dsupp}(q-1) = \emptyset$$

gilt.

Für $0 \leq m \leq q-2$ ist der duale Träger von m nichtleer, besitzt also ein Maximum l. Die im Verfahren gebildete Menge I^0 stimmt offensichtlich mit der Beschreibung von $I^0_{m,\mu}(k)$ in Proposition 11.18 überein. Die Fallunterscheidung bei der Initialisierung entspricht dabei dem Umstand, dass die leere Menge nur für $m > 0$ zulässig ist.

Die Menge I^1 enthält nach Konstruktion genau die Repräsentanten

$$[\mu - \sum_{j \in U'} (p - 1 - m_j) p^j]_{\mathcal{R}}$$

zu den Teilmengen $U' \subseteq \operatorname{dsupp}(m)$, für die $l \in U'$ gilt. Damit ist I^1 nach Satz 11.8 tatsächlich das Komplement von $I^0 = I^0_{m,\mu}(k)$ in $I_{m,\mu}(k)$ und die Korrektheit des Verfahrens ist gezeigt. □

Bemerkung. (i) Welche Paare (m, μ) im Algorithmus durchlaufen werden müssen, haben wir in der Bemerkung zu Satz 11.8 explizit bestimmt.

(ii) Da die Daten des Musters des Gewichts k nur von der Restklasse von k modulo $q-1$ abhängen, muss das obige Verfahren (bei festem q) nur endlich oft durchgeführt werden, um die Mengen $I_{m,\mu}(k)$ und $I^0_{m,\mu}(k)$ für alle Gewichte zur Verfügung zu haben.

Wie bei unseren Untersuchungen von Drinfeld'sche Modulformen üblich, schreiben wir auch in der konkreten Aufgabe für das Gewicht k

$$k = \mathfrak{k} + \widehat{\mathfrak{k}}(q+1) \quad \text{mit } 1 \leq \mathfrak{k} \leq q+1$$

und setzen

$$\mathfrak{m}(k) = \mathfrak{k} - 1 + \widehat{\mathfrak{k}}q.$$

11.21 (Aufgabe). Betrachte den Modul M_k^n der n-fachen Spitzenformen des Gewichts k mit $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq n \leq \mathfrak{m}(k)$. Bestimme für $0 \leq m \leq q-1$ und $\mu \in \mathcal{R}$ die Vielfachheit

$$\lambda(k,n;m,\mu)$$

des einfachen Moduls $\mathfrak{S}(m,\mu)$ unter den Kompositionsfaktoren des Moduls M_k^n.

Diese Aufgabe kann mit dem folgenden Verfahren gelöst werden:

11.22 (Algorithmus: Vielfachheiten in Filtrierungsmoduln).

(Initialisierung) Durchlaufe alle Paare (m,μ) mit $0 \leq m \leq q-1$ und $\mu \in \mathcal{R}$ und setze

$$\lambda(k,n;m,\mu) := 0.$$

(Vorbereitung) Berechne die eindeutige Zerlegung

$$\mathfrak{m}(k) - n = u + v(q-1) \quad \text{mit } 0 \leq u \leq q-2 \text{ und } v \in \mathbb{N}_0.$$

Setze

$$J := \{[\mathfrak{m}(k) - l]_{\mathcal{R}} \mid 1 \leq l \leq u\}.$$

Ist $\mathfrak{k} = 1$, so füge zusätzlich den Repräsentanten $[\mathfrak{m}(k)]_{\mathcal{R}}$ zur Menge J hinzu.

(Hauptschleife) Durchlaufe die Paare (m,μ) mit $0 \leq m \leq q-1$ und $\mu \in \mathcal{R}$, für die

$$m \equiv k - 2\mu \mod q-1$$

gilt. Führe für jedes Paar die folgende Prozedur durch:

(i) (Daten des Musters) Bestimme die Mengen $I_{m,\mu}(k)$ und $I^0_{m,\mu}(k)$ mit Hilfe von Algorithmus 11.20.

(ii) (Endstück) Falls $\mathfrak{k} = 1$ gilt, setze

$$\lambda_E(k;m,\mu) := 0.$$

Für $2 \leq \mathfrak{k} \leq q$ definiere

$$\lambda_E(k; m, \mu) := \begin{cases} 1 & [\mathfrak{m}(k)]_{\mathcal{R}} \in I^0_{m,\mu}(k) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $\mathfrak{k} = q + 1$, so setze

$$\lambda_E(k; m, \mu) := \begin{cases} 1 & m = 0 \text{ und } \mu \equiv \mathfrak{m}(k) \bmod q - 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(iii) (Resultat) Gib für das betrachtete Paar (m, μ) das Resultat

$$\lambda(k, n; m, \mu) := v\,(\#I_{m,\mu}(k)) + \#\,(J \cap I_{m,\mu}(k)) + \lambda_E(k; m, \mu)$$

aus.

Beweis (Korrektheit des Verfahrens). Mit Lemma 11.16 folgt aus der Beschreibung der Kompositionsfaktoren des Musters vom Gewichts k in Satz 11.8, dass in der Hauptschleife in der Tat nur solche Paare (m, μ) betrachtet werden müssen, die der angegebenen Kongruenzbedingung genügen.

Für die Bestimmung der gesuchten Vielfachheit nutzen wir aus, dass der Modul M_k^n wie in Lemma 11.1 gezeigt Jordan-Hölder-äquivalent ist zum Modul

$$\mathfrak{M} := \bigoplus_{i=n}^{\mathfrak{m}(k)-1} N[k-2i, i] \oplus M_k^{\mathfrak{m}(k)}.$$

Geeignetes Sortieren liefert die direkte Summenzerlegung

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_L \oplus \mathfrak{M}_R \oplus M_k^{\mathfrak{m}(k)} \tag{11.5}$$

mit Moduln

$$\mathfrak{M}_L := \bigoplus_{i=n}^{n-1+v(q-1)} N[k-2i, i],$$

$$\mathfrak{M}_R := \bigoplus_{i=\mathfrak{m}(k)-u}^{\mathfrak{m}(k)-1} N[k-2i, i],$$

wobei wir ausnutzen, dass

$$n + v(q-1) = \mathfrak{m}(k) - u$$

gilt gemäß der Definition von u und v im Vorbereitungsschritt.

Nach Konstruktion handelt es sich bei $\mathfrak{M}_L$ um die direkte Summe von v vielen Kopien des Musters zu k. Gemäß Satz 11.8 ist die Vielfachheit von $\mathfrak{S}(m, \mu)$ als Kompositionsfaktor von $\mathfrak{M}_L$ daher

$$v(\#I_{m,\mu}(k)).$$

Das Vorgehen zur Beschreibung des verbleibenden Anteils hängt von $\mathfrak{k}$ ab:

Ist $2 \leq \mathfrak{k} \leq q+1$, so haben wir im Vorbereitungsschritt die Menge

$$J = \{[\mathfrak{m}(k) - l]_{\mathcal{R}} \mid 1 \leq l \leq u\}$$

definiert. Es gilt also

$$\mathfrak{M}_R = \bigoplus_{i \in J} N[k-2i, i].$$

Die Vielfachheit von $\mathfrak{S}(m,\mu)$ als Kompositionsfaktor dieses Moduls haben wir in Korollar 11.9 als

$$\# \left(J \cap I_{m,\mu}(k)\right)$$

bestimmt. Schließlich entspricht die in Schritt (iii) bestimmte Zahl $\lambda_E(k; m, \mu)$ genau der Vielfachheit von $\mathfrak{S}(m,\mu)$ als Kompositionsfaktor des Endstücks $M_k^{\mathfrak{m}}(k)$ gemäß Satz 11.19. Insgesamt liefert das Verfahren also das korrekte Resultat.

Gilt dagegen $\mathfrak{k} = 1$, so ist das Endstück isomorph zu $N[k - 2\mathfrak{m}(k), \mathfrak{m}(k)]$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_R \oplus M_k^{\mathfrak{m}(k)} &\cong \bigoplus_{i=\mathfrak{m}(k)-u}^{\mathfrak{m}(k)} N[k-2i, i] \\
&= \bigoplus_{i \in J} N[k-2i, i],
\end{aligned}$$

da J in diesem Fall zusätzlich den Repräsentanten $[\mathfrak{m}(k)]_{\mathcal{R}}$ enthält. Die Vielfachheit von $\mathfrak{S}(m,\mu)$ als Kompositionsfaktor dieses Moduls kann wiederum durch Anwendung von Korollar 11.9 bestimmt werden. Da das Endstück in diesem Fall nicht separat gezählt wird, erhalten wir mit $\lambda_E(k; m, \mu) = 0$ das korrekte Resultat. □

Bemerkung.

(i) Gilt $n \leq \mathfrak{m}(k) - (q-1)$, so existiert zu jedem Paar (m, μ), das der Kongruenzbedingung genügt, tatsächlich mindestens ein Kompositionsfaktor von M_k^n, der isomorph zu $\mathfrak{S}(m,\mu)$ ist.

(ii) Die Daten des Musters müssen nicht für jeden Filtrierungsmodul erneut bestimmt werden. Stattdessen bietet es sich an, Algorithmus 11.20 vorbereitend auszuführen (möglicherweise sogar für alle k) und die berechneten Mengen für die spätere Verwendung abzuspeichern.

(iii) Die Behandlung des Endstücks in Schritt (iii) der Prozedur hängt zwar von k ab, aber nicht von n. Sind mehrere Filtrierungsmoduln desselben Gewichts zu untersuchen, so kann dieser Schritt daher aus der Hauptschleife ausgelagert werden, um die Laufzeit zu verbessern.

(iv) Der Algorithmus ist ebenfalls geeignet, die entsprechende Fragestellung für symmetrische Potenzen zu beantworten. Bezeichnet nämlich für $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq q-1$ und $\mu \in \mathcal{R}$

$$\lambda_S(n; m, \mu)$$

die Anzahl der Kompositionsfaktoren von $\mathrm{Sym}^n(V)$, die isomorph zum einfachen Modul $\mathfrak{S}(m, \mu)$ sind, so gilt

$$\lambda_S(n; m, \mu) = \lambda(k, i; m, [\mu + i]_{\mathcal{R}}),$$

wenn k und i wie in Korollar 10.22 so bestimmt sind, dass

$$\mathrm{Sym}^n(V) \cong M_k^i \otimes (\det)^{-i}$$

gilt.

A Binomialkoeffizienten

Binomialkoeffizienten spielen im Hauptteil der vorliegenden Arbeit eine wichtige Rolle. Der Zweck dieses Anhangs ist, für entsprechende Rechnungen benötigte Aussagen bereitzustellen.

Im ersten Abschnitt sind dazu elementare Eigenschaften von Binomialkoeffizienten ohne Beweis kurz zusammengefasst. Für detailliertere Ausführungen zu Binomialkoeffizienten im Allgemeinen siehe zum Beispiel [HHM00, Abschnitt 2.2].

Im zweiten Abschnitt gehen wir auf Besonderheiten in endlicher Charakteristik ein.

Mit Hilfe dieser Grundlagen werden im dritten Abschnitt einige nicht-offensichtliche Formeln für Binomialkoeffizienten bewiesen.

A.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Wir verwenden die kombinatorische Definition der Binomialkoeffizienten: Sind $k \leq n$ nichtnegative ganze Zahlen, so ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Wir sammeln einige bekannte Eigenschaften von Binomialkoeffizienten:

A.1 Es gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

A.2 (Konvention). Die Definition der Binomialkoeffizienten lässt sich auf beliebige $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$ ausdehnen, indem wir

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{für} \quad k < 0 \text{ oder } k > n$$

setzen.

A.3 (Symmetrie). Für $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

A.4 (Summenzerlegung). Sei $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

A.5 (Alternierende Summe). Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

A.6 (Vandermonde-Summe). Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}.$$

Bemerkung. Von den Eigenschaften A.1 bis A.3 machen wir Gebrauch, ohne in jedem Einzelfall darauf hinzuweisen. Besonders Konvention A.2 ist für die Wohldefiniertheit anderer Ausdrücke wichtig.

A.2 Binomialkoeffizienten in endlicher Charakteristik

Während Binomialkoeffizienten in Charakteristik 0 nur in den trivialen Fällen aus Konvention A.2 verschwinden, sind in endlicher Charakteristik auch andere Binomialkoeffizienten kongruent zu Null.

Dies hat zur Folge, dass Argumente, die die Invertierbarkeit der Binomialkoeffizienten in Charakteristik 0 ausnutzen, nicht ohne weiteres auf endliche Charakteristik übertragbar sind (vergleiche die Bemerkung zu Proposition B.8).

Wir wollen daher nicht nur allgemein das Reduktionsverhalten von Binomialkoeffizienten beschreiben, sondern insbesondere kontrollieren, wann diese verschwinden.

Sei p eine Primzahl. Entscheidend ist der folgende Zusammenhang zwischen Binomialkoeffizienten modulo p und p-adischen Entwicklungen, der zuerst von Lucas [Luc91, no. 228] gezeigt wurde:

A.7 (Lucas-Kongruenz). Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ gegeben mit p-adischen Entwicklungen $n = \sum_{i=0}^{s} n_i p^i$ beziehungsweise $k = \sum_{i=0}^{s} k_i p^i$. Es gilt

$$\binom{n}{k} \equiv \prod_{i=0}^{s} \binom{n_i}{k_i} \mod p.$$

Oft genügt eine gröbere Variante, die ohne die vollständige p-adische Entwicklung auskommt.

A.8 (Variante). Seien $n, n', k, k' \in \mathbb{N}_0$. Dabei seien $n, k \leq p^j - 1$ für ein $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\binom{n + p^j n'}{k + p^j k'} \equiv \binom{n}{k} \binom{n'}{k'} \mod p.$$

Die Lucas-Kongruenz liefert ein Kriterium für das Verschwinden von Binomialkoeffizienten in endlicher Charakteristik.

A.9 (Kriterium). Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit p-adischen Entwicklungen $n = \sum_{i=0}^{s} n_i p^i$ beziehungsweise $k = \sum_{i=0}^{s} k_i p^i$. Es gilt genau dann

$$\binom{n}{k} \equiv 0 \mod p,$$

wenn ein Index $0 \leq i \leq s$ existiert, so dass $n_i < k_i$ ist.

Insbesondere gilt für $j \in \mathbb{N}$: Ist $n \equiv 0 \bmod p^j$, so ist bereits $\binom{n}{k} \equiv 0 \bmod p$, wenn nicht auch $k \equiv 0 \bmod p^j$ ist.

A.3 Weniger bekannte Aussagen

Bei den Rechnungen im Hauptteil der Arbeit benötigen wir zwei spezielle Identitäten für Binomialkoeffizienten (nämlich Proposition A.13 und Proposition A.16). Da es sich hierbei nicht um klassische Eigenschaften der Binomialkoeffizienten handelt, werden die Propositionen sowie die benötigten Hilfsaussagen in diesem Abschnitt bewiesen.

In Charakteristik 0

Zunächst betrachten wir wieder Gleichungen für Binomialkoeffizienten über den natürlichen Zahlen.

Bei dem folgenden Lemma handelt es sich um eine Verallgemeinerung von Formel A.5 zur alternierenden Summe von Binomialkoeffizienten.

A.10 Lemma. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $j \in \mathbb{N}_0$ und $m > n$*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{m-k}{j} = \binom{m-n}{j-n}.$$

Ist $n \in \mathbb{N}$, so verschwindet die Summe insbesondere für $j = 0$ und beliebiges $m > n$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach n.

Induktionsanfang $n = 0$: Beide Seiten der zu zeigenden Gleichung nehmen für $j \in \mathbb{N}_0$ und $m > 0$ den Wert $\binom{m}{j}$ an.

Induktionsvoraussetzung: Sei die Behauptung gezeigt für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $j \in \mathbb{N}_0$ beliebig und sei $m > n+1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \tbinom{n+1}{k} \tbinom{m-k}{j} &\overset{\text{A.4}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \left(\tbinom{n}{k-1} + \tbinom{n}{k} \right) \tbinom{m-k}{j} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \tbinom{n}{k-1} \tbinom{m-k}{j} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tbinom{n}{k} \tbinom{m-k}{j} \\
&= -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tbinom{n}{k} \tbinom{m-1-k}{j} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tbinom{n}{k} \tbinom{m-k}{j} \\
&\overset{\text{IV}}{=} -\binom{m-1-n}{j-n} + \binom{m-n}{j-n} \\
&\overset{\text{A.4}}{=} \binom{m-(n+1)}{j-(n+1)}.
\end{aligned}$$

Bei der zweiten Gleichheit haben wir dabei benutzt, dass nach Konvention A.2 der 0-te Summand der ersten Summe sowie der $n+1$-te Summand der zweiten Summe verschwinden.

Die Induktionsvoraussetzung ist im vorletzten Schritt anwendbar, da nach Voraussetzung $m > m-1 > n$ ist.

$\square$

A.11 Lemma. *Seien $k \le n \le m$ nichtnegative ganze Zahlen. Dann ist*

$$\binom{m}{n}\binom{n}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}.$$

Beweis. Mit Hilfe der Definition der Binomialkoeffizienten rechnet man direkt nach, dass

$$\begin{aligned}
\binom{m}{n}\binom{n}{k} &= \frac{m!\, n!}{n!\,(m-n)!\,k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{m!}{(m-n)!\,k!\,(n-k)!}\,\frac{(m-k)!}{(m-k)!} \\
&= \frac{m!}{k!\,(m-k!)}\,\frac{(m-k)!}{(n-k)!\,(m-n)!} \\
&= \binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}
\end{aligned}$$

gilt. $\square$

A.12 Lemma. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für $j \in \mathbb{N}$ und $m > n+1$ gilt*

$$\binom{j-1}{n}\binom{m-1}{j} + \binom{j-1}{n+1}\binom{m}{j} = \binom{m-1}{n+1}\binom{m-(n+1)}{j-(n+1)}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\tbinom{j-1}{n}\tbinom{m-1}{j} + \tbinom{j-1}{n+1}\tbinom{m}{j} &\overset{A.4}{=} \tbinom{j-1}{n}\tbinom{m-1}{j} + \tbinom{j-1}{n+1}\left(\tbinom{m-1}{j} + \tbinom{m-1}{j-1}\right)\\
&= \left(\tbinom{j-1}{n} + \tbinom{j-1}{n+1}\right)\tbinom{m-1}{j} + \tbinom{j-1}{n+1}\tbinom{m-1}{j-1}\\
&\overset{A.4}{=} \tbinom{j}{n+1}\tbinom{m-1}{j} + \tbinom{j-1}{n+1}\tbinom{m-1}{j-1}\\
&\overset{A.11}{=} \tbinom{m-1}{n+1}\tbinom{m-1-(n+1)}{j-(n+1)} + \tbinom{m-1}{n+1}\tbinom{m-1-(n+1)}{j-1-(n+1)}\\
&\overset{A.4}{=} \tbinom{m-1}{n+1}\tbinom{m-(n+1)}{j-(n+1)}.
\end{aligned}$$

□

Wir können damit als erstes Hauptergebnis dieses Abschnitts die folgende Summenformel für Produkte bestimmter Binomialkoeffizienten beweisen.

A.13 Proposition. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $j \in \mathbb{N}_0$ und $m > n$*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{m-1-k}{n-k}\binom{m}{k}\binom{m-k}{j} = \begin{cases}(-1)^n & j=0\\ \tbinom{j-1}{n}\tbinom{m}{j} & j \geq 1.\end{cases}$$

Insbesondere nimmt die angegebene Summe für $1 \leq j \leq n$ den Wert 0 an.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n.

Induktionsanfang $n = 0$: Für $j \in \mathbb{N}_0$ und $m > 0$ ist die Summe auf der linken Seite der Behauptung gleich $\binom{m}{j}$. Auf der rechten Seite der Gleichung erhalten wir 1, wenn $j = 0$ ist, und $\binom{m}{j}$ sonst. In jedem Fall gilt tatsächlich Gleichheit.

Induktionsvoraussetzung: Sei die Behauptung gezeigt für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $j \in \mathbb{N}_0$ beliebig und sei $m > n+1$.

Wie im Beweis von Lemma A.10 zerlegen wir die Summe zunächst mit Hilfe von Vorschrift A.4 in zwei Teile

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\tbinom{m-1-k}{n+1-k}\tbinom{m}{k}\tbinom{m-k}{j} &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\tbinom{m-1-k}{n+1-k}\left(\tbinom{m-1}{k-1}+\tbinom{m-1}{k}\right)\tbinom{m-k}{j}\\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\tbinom{m-1-k}{n+1-k}\tbinom{m-1}{k-1}\tbinom{m-k}{j}}_{=:S_1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\tbinom{m-1-k}{n+1-k}\tbinom{m-1}{k}\tbinom{m-k}{j}}_{=:S_2}.
\end{aligned}$$

Die hintere Teilsumme kann mit Hilfe von Lemma A.10 vereinfacht werden. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{m-1-k}{n+1-k} \binom{m-1}{k} \binom{m-k}{j} \\ &\overset{A.11}{=} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{m-1}{n+1} \binom{n+1}{k} \binom{m-k}{j} \\ &= \binom{m-1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \binom{m-k}{j} \right) \\ &\overset{A.10}{=} \binom{m-1}{n+1} \binom{m-(n+1)}{j-(n+1)}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $S_2 = 0$ für $j = 0$.

In der Teilsumme S_1 verschwindet der Summand für $k = 0$. Wir schreiben daher

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{m-1-k}{n+1-k} \binom{m-1}{k-1} \binom{m-k}{j} \\ &= -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m-2-k}{n-k} \binom{m-1}{k} \binom{m-1-k}{j} \end{aligned}$$

und können diesen Ausdruck mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung vereinfachen, da nach Voraussetzung $m - 1 > n$ ist. Folglich gilt

$$S_1 = \begin{cases} -(-1)^n & j = 0 \\ -\binom{j-1}{n}\binom{m-1}{j} & j \geq 1. \end{cases}$$

Setzen wir die Zwischenergebnisse zusammen, so erhalten wir

$$S_1 + S_2 = (-1)^{n+1} \quad \text{für } j = 0$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= -\binom{j-1}{n} \binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{n+1} \binom{m-(n+1)}{j-(n+1)} \\ &\overset{A.12}{=} \binom{j-1}{n+1} \binom{m}{j} \quad \text{für } j \geq 1. \end{aligned}$$

Nach Definition von S_1 und S_2 ist damit die Behauptung gezeigt.

□

Bemerkung. Werden Binomialkoeffizienten für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

definiert, so kann in der Formulierung der Proposition auf die gesonderte Behandlung des Falls $j = 0$ verzichtet werden.

In Charakteristik p

Bei der zweiten zentralen Aussage dieses Abschnitts handelt es sich um eine Summenformel in endlicher Charakteristik. Im Folgenden sei daher wieder p eine Primzahl.

Wir beweisen zunächst ein technisches Lemma.

A.14 Lemma. *Seien $0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}_0$ und sei $j \in \mathbb{N}$ so, dass $n \leq p^j - 1$ ist. Dann gilt*

$$\binom{n}{k} \equiv (-1)^k \binom{p^j - 1 - n + k}{k} \mod p.$$

Beweis. Nach Definition der Binomialkoeffizienten ist einerseits

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{-n\,(-n+1)\,\ldots\,(-n+k-1)}{k!} \\ &\equiv (-1)^k \frac{(p^j-n)\,(p^j-n+1)\,\ldots\,(p^j-n+k-1)}{k!} \mod p. \end{aligned}$$

Andererseits haben wir

$$(-1)^k \binom{p^j - 1 - n + k}{k} = (-1)^k \frac{(p^j-n)\,(p^j-n+1)\,\ldots\,(p^j-n+k-1)}{k!},$$

da nach Voraussetzung $p^j - 1 - n \geq 0$ gilt, und die Behauptung ist bewiesen. □

Im Spezialfall $n = p^j - 1$ erhalten wir ein bekanntes Resultat:

A.15 Korollar. *Ist $j \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq p^j - 1$, so ist*

$$\binom{p^j - 1}{k} \equiv (-1)^k \mod p.$$

Bemerkung. Das Korollar erlaubt uns insbesondere, im Hauptteil der vorliegenden Arbeit Binomialkoeffizienten der Form $\binom{q-1}{k}$ zu vereinfachen.

A.16 Proposition. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $q = p^r$ eine beliebige Primzahlpotenz. Dann gilt für $1 \leq m \leq q-1$ und $0 \leq n \leq q-1$*

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k(q-1)+m}{j(q-1)+n} \equiv \binom{m}{n} \mod p.$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach k.

Induktionsanfang $k = 0$: Die Aussage ist in diesem Fall trivial.

Induktionsvoraussetzung: Sei die Behauptung gezeigt für ein $k \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschritt $k \to k+1$: Wir betrachten zunächst die zu summierenden Binomialkoeffizienten genauer: Mit Hilfe der Vandermonde-Identität A.6 sehen wir für $0 \leq j \leq k+1$, dass

$$\binom{(k+1)(q-1)+m}{j(q-1)+n} = \sum_{l=0}^{j(q-1)+n} \binom{q-1}{l} \binom{k(q-1)+m}{j(q-1)+n-l}$$

gilt. Da in dieser Summe jedoch alle Summanden für $l \geq q$ verschwinden, können wir auch

$$\tbinom{(k+1)(q-1)+m}{j(q-1)+n} = \sum_{l=0}^{n} \tbinom{q-1}{l} \tbinom{k(q-1)+m}{j(q-1)+n-l} + \sum_{l=n+1}^{q-1} \tbinom{q-1}{l} \tbinom{k(q-1)+m}{(j-1)(q-1)+q-1+n-l}$$

schreiben, wobei die hintere Summe für $j = 0$ oder $n = q-1$ leer ist.

Daraus ergibt sich die folgende Zerlegung der zu untersuchenden Summe:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k+1} \tbinom{(k+1)(q-1)+m}{j(q-1)+n} &= \underbrace{\sum_{j=0}^{k+1} \sum_{l=0}^{n} \tbinom{q-1}{l} \tbinom{k(q-1)+m}{j(q-1)+n-l}}_{=:S_1} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{l=n+1}^{q-1} \tbinom{q-1}{l} \tbinom{k(q-1)+m}{(j-1)(q-1)+q-1+n-l}}_{=:S_2}. \end{aligned}$$

Wir formen zunächst den Anteil zu $j = k+1$ in S_1 um. Für $0 \leq l \leq n$ gilt wegen $m \leq q-1$ offenbar

$$\binom{k(q-1)+m}{(k+1)(q-1)+n-l} = \begin{cases} 1 & m = q-1 \text{ und } l = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Bedingung an m lässt sich dabei durch einen Binomialkoeffizienten ausdrücken. Auf diese Weise erhalten wir für $0 \leq l \leq n$ also

$$\binom{k(q-1)+m}{(k+1)(q-1)+n-l} = \begin{cases} \binom{m}{q-1} & l = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich ist

$$\sum_{l=0}^{n} \tbinom{q-1}{l} \tbinom{k(q-1)+m}{(k+1)(q-1)+n-l} = \tbinom{q-1}{n} \tbinom{m}{q-1}.$$

Schreiben wir den verbleibenden Anteil von S_1 in der Form

$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{n} \tbinom{q-1}{l} \tbinom{k(q-1)+m}{j(q-1)+n-l} = \sum_{l=0}^{n} \tbinom{q-1}{l} \sum_{j=0}^{k} \tbinom{k(q-1)+m}{j(q-1)+n-l},$$

so können wir für jedes l die innere Summe mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung vereinfachen, da in der betrachteten Situation $0 \leq n - l \leq q - 1$ ist.

Zusammen mit der vorigen Überlegung ergibt dies

$$S_1 \equiv \tbinom{q-1}{n}\tbinom{m}{q-1} + \sum_{l=0}^{n} \tbinom{q-1}{l}\tbinom{m}{n-l} \mod p.$$

Für die Summe S_2 verfahren wir analog: Nach Änderung der Summationsreihenfolge und einer Indexverschiebung erhalten wir

$$S_2 = \sum_{l=n+1}^{q-1} \tbinom{q-1}{l} \sum_{j=0}^{k} \tbinom{k(q-1)+m}{j(q-1)+q-1+n-l}$$

und können auch hier die Induktionsvoraussetzung auf die innere Summe anwenden, da $0 \leq q - 1 + n - l \leq q - 1$ für alle auftretenden l gilt. Damit ist

$$S_2 \equiv \sum_{l=n+1}^{q-1} \tbinom{q-1}{l}\tbinom{m}{q-1+n-l} \mod p.$$

Setzen wir die Resultate für S_1 und S_2 nun zusammen, so sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
S_1 + S_2 &\equiv \tbinom{q-1}{n}\tbinom{m}{q-1} + \sum_{l=0}^{n} \tbinom{q-1}{l}\tbinom{m}{n-l} + \sum_{l=n+1}^{q-1} \tbinom{q-1}{l}\tbinom{m}{q-1+n-l} \mod p \\
&\equiv \sum_{l=0}^{n} \tbinom{q-1}{l}\tbinom{m}{n-l} + \sum_{l=n}^{q-1} \tbinom{q-1}{l}\tbinom{m}{q-1+n-l} \mod p \\
&\equiv \sum_{l=0}^{n} \tbinom{q-1}{n-l}\tbinom{m}{l} + \sum_{l=n}^{q-1} \tbinom{q-1}{q-1+n-l}\tbinom{m}{l} \mod p \\
&\overset{A.15}{\equiv} \sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\tbinom{m}{l} + \sum_{l=n}^{q-1}(-1)^{n-l}\tbinom{m}{l} \mod p \\
&\equiv \tbinom{m}{n} + (-1)^n \sum_{l=0}^{q-1}(-1)^l\tbinom{m}{l} \mod p
\end{aligned}$$

gilt. Da aber $m \leq q - 1$ ist, verschwindet die alternierende Summe gemäß Identität A.5 und die Behauptung ist gezeigt.

□

Bemerkung. Die in der Bemerkung zu Proposition A.13 beschriebene Definition negativer Binomialkoeffizienten erlaubt es, Identitäten von Binomialkoeffizienten vermöge

$$(1 + X)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} X^k \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

auf Aussagen für Koeffizienten formaler Potenzreihen über $\mathbb{Z}$ beziehungsweise über $\mathbb{F}_p$ zurückzuführen. Beweise mit Hilfe dieses alternativen Vorgehens sind vom Umfang jedoch vergleichbar mit den in diesem Anhang angegebenen direkten Beweisen.

B Darstellungstheorie der Moduln $N[\delta]$

Dieser Anhang beschreibt detailliert, wie wir Ergebnisse von Bardoe und Sin [BS00] übertragen können, um die G-Modulstruktur der Moduln $N[\delta]$, die wir im Hauptteil der vorliegenden Arbeit betrachtet haben, vollständig zu bestimmen. Wir legen dabei stets die in Kapitel 5 eingeführte Notation für allgemeine Darstellungstheorie sowie für die Darstellungstheorie der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ im Speziellen zugrunde.

Wir beginnen, indem wir im ersten Abschnitt den für uns relevanten Teil der Ausgangssituation aus [BS00] beschreiben. Dabei gehen wir insbesondere auf Änderungen der Notation ein, die notwendig sind, um Konflikte mit der Notation der vorliegenden Arbeit zu vermeiden.

Im zweiten Abschnitt betrachten wir den Zusammenhang zwischen der natürlichen zweidimensionalen Darstellung von G und ihrer dualen Darstellung. Es handelt sich dabei um grundlegende, allgemein gültige Aussagen, die im Hauptteil jedoch nicht benötigt werden.

Diese Vorbereitungen ermöglichen schließlich im dritten Abschnitt eine Beschreibung der G-Modulstrukturen der Moduln $N[\delta]$ für $1 \leq \delta \leq q-2$ auf Grundlage von Theorem C aus [BS00].

B.1 Notation

Die für unsere Zwecke zentrale Aussage aus [BS00] ist Theorem C. An dieser Stelle wollen wir zunächst nur beschreiben, für welche Situation das Theorem formuliert ist, und die auftretenden Begriffe klären. Wir beschäftigen uns hier noch nicht mit einer Interpretation der Ergebnisse.

In einigen Fällen betrachten wir im Vergleich zu [BS00] leicht veränderte Objekte oder geben ihnen andere Namen. Diese Änderungen sind der Übersichtlichkeit halber am Ende dieses Abschnitts noch einmal in einer Tabelle zusammengefasst.

Allgemein gilt: Da wir für unsere Anwendungen nur den zweidimensionalen Fall benötigen, setzen wir in der Notation von [BS00] im Folgenden stets $n = 1$ voraus.

B.1 (Ausgangssituation). [BS00, Abschnitt 1.1] Die zugrunde liegende Primzahlpotenz schreiben wir wie im Hauptteil als $q = p^r$, nicht als $q = p^t$ wie in [BS00].

Den in [BS00] verwendeten algebraischen Abschluss k von $\mathbb{F}_q$ ersetzen wir durch den in Kapitel 1 definierten Körper $\mathcal{C}_\infty$. Wie in Abschnitt 5.3 festgehalten, bleiben dabei alle darstellungstheoretischen Aussagen gültig.

In beiden Notationen ist $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ und V der natürliche zweidimensionale G-(Links)modul, wobei wir wie erwähnt $V = k^2$ in unserer Notation durch $V = \mathcal{C}_\infty^2$ ersetzen. Ferner sei $V(q) = \mathbb{F}_q^2$.

Wir bezeichnen mit X_0 und X_1 *Koordinatenfunktionen* auf V (genauer wählen wir die Koordinatenfunktionen zur Standardbasis).

Die $\mathcal{C}_\infty$-Algebra der $\mathcal{C}_\infty$-wertigen Funktionen auf $V(q)$ wird wie in [BS00] identifiziert mit der Algebra

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{C}_\infty[X_0, X_1] / \left\langle X_i^q - X_i \right\rangle_{i=0,1} \\ &= \mathrm{Sym}(V^*) / \left\langle X_i^q - X_i \right\rangle_{i=0,1}. \end{aligned}$$

Die G-Modulstruktur auf V^* lässt sich in natürlicher Weise zu einer G-Modulstruktur auf A fortsetzen.

Versehen mit der natürlichen G-Modulstruktur besitzt A die in [BS00, Formel (60)] angegebene Zerlegung in isotypische Komponenten unter der Operation des Zentrums von G. Statt hier mit Restklassen modulo $q-1$ zu arbeiten, wählen wir Repräsentanten und schreiben

$$A = \bigoplus_{\delta=0}^{q-2} A[\delta].$$

Der Komponente $A[\delta]$ entspricht dabei der Charakter $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \mapsto a^{-\delta}$ auf dem Zentrum.

Bemerkung. (i) Die hier angegebene Definition von A gilt nur innerhalb dieses Anhangs. Im Hauptteil der Arbeit ist stattdessen $A = \mathbb{F}_q[T]$ der Polynomring über $\mathbb{F}_q$ wie in der Drinfeld-Situation üblich.

(ii) Die Koordinatenfunktionen X_0 und X_1 bilden eine Basis des Dualraums V^* von V und dürfen nicht mit der in Notation 5.28 ausgezeichneten Standardbasis (X, Y) von V verwechselt werden. Die beiden Basen sind vielmehr dual zueinander.

Die G-Modulstruktur auf V^* geht wie in Definition 5.14 beschrieben aus der natürlichen G-Modulstruktur auf V hervor. Insbesondere können wir die Moduln $\mathcal{C}_\infty[X_0, X_1]$ und $\mathrm{Sym}(V^*)$ miteinander identifizieren.

Mit dem Vergleich der Darstellungen V und V^* werden wir uns im folgenden Abschnitt genauer befassen.

(iii) An dieser Stelle soll kurz erklärt werden, wieso die Unterscheidung zwischen den Darstellungen V und V^* so nachdrücklich betont wird. Die folgenden Ausführungen gelten in der allgemeinen Situation aus Kapitel 5, nicht nur für die Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$.

Sei M ein G-Linksmodul. Setzen wir für $g \in G$ und $\varphi \in M^*$ naiv

$$(\varphi g)(x) = \varphi(gx),$$

so erhalten wir dadurch eine *rechte* Operation auf M^*. In diesem Sinne ist der duale Modul zu einem Linksmodul also in natürlicher Weise ein Rechtsmodul. Durch Inversenbildung können wir diesen dennoch als Linksmodul auffassen, siehe Definition 5.14.

Der Zusammenhang zwischen einer Darstellung und ihrer dualen Darstellung ist somit eng mit der Wahl der Orientierung der Gruppenoperationen verwandt. Für eine einzelne Gruppenoperation können wir zwar durch Inversenbildung die Richtung der Operation beliebig vorgeben, dadurch sind jedoch die Orientierungen abgeleiteter Operationen festgelegt.

Wir sehen dieses Phänomen auch am Beispiel Drinfeld'scher Modulformen. Die volle Modulgruppe $\Gamma(1)$ operiert durch Möbius-Inversion von links auf der Drinfeldschen oberen Halbebene Ω. Damit ist festgelegt, dass die in Lemma 1.10 definierte Operation auf den Abbildungen $f : \Omega \to \mathcal{C}_\infty$ eine natürliche Rechtsoperation ist. Um Drinfeldsche Modulformen als $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$-Linksmoduln aufzufassen, ist daher die in Kapitel 4 beschriebene zusätzliche Inversenbildung notwendig.

Die Wahl der Orientierung hat zwar keinen qualitativen Einfluss auf die resultierenden G-Modulstrukturen, es ist jedoch wichtig, die Abhängigkeiten verschiedener Operationen voneinander konsistent zu berücksichtigen, da es sonst zu technischen Fehlern (etwa falschen Determinantentwists oder fehlender Inversenbildung) kommt.

Auch bei der Formulierung der Resultate von [BS00, Theorem C] nehmen wir einige Änderungen der Notation vor.

B.2 (Parametrisierung). Anstelle von t-Tupeln $(r_0, \ldots, r_{t-1})$ betrachten wir Tupel $(t_0, \ldots, t_{r-1})$ der Länge r. Die Menge der betrachteten Tupel heißt bei uns $\mathcal{P}[\delta]$ (anstelle von $\mathscr{H}[d]$). Die zugehörigen Typen werden in unserer Notation als Tupel $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1})$ geschrieben und nicht mit Einträgen λ_i.

Bemerkung. Nach der beschriebenen Umbenennung werden die Untermoduln beziehungsweise Kompositionsfaktoren der Moduln $A[\delta]$ mit Hilfe der in Abschnitt 6.2 betrachteten Mengen parametrisiert.

Wir können daher die dort angegebenen zusätzlichen Definitionen und Aussagen verwenden, um die Formulierung der Resultate dieses Anhangs zu vereinfachen. Insbesondere machen wir von den Parametrisierungsfunktionen e und η Gebrauch.

Beachte: Die in [BS00] für Theorem A definierte Menge $\mathscr{H}$ hat nichts mit unserer in Abschnitt 6.2 definierten Vereinigung $\mathcal{T}$ der Mengen $\mathcal{T}[\delta]$ zu tun.

B.3 (Beschreibung der Kompositionsfaktoren). Für die Beschreibung der Kompositionsfaktoren wird in [BS00] die graduierte $\mathcal{C}_\infty$-Algebra $\overline{S}$ eingeführt, die durch

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \mathcal{C}_\infty[X_0, X_1] / \left\langle X_i^p \right\rangle_{i=0,1} \\ &= \mathrm{Sym}(V^*) / \left\langle X_i^p \right\rangle_{i=0,1} \end{aligned}$$

definiert ist. Die G-Modulstruktur auf V^* beschreibt eine G-Modulstruktur auf $\overline{S}$.

B.4 (Frobenius-Twists). Frobenius-Twists eines Moduls beschreiben wir wie in Definition 5.27 mit dem Zeichen $(\,\cdot\,)^{\theta^j}$ und nicht mit $(\,\cdot\,)^{(p^j)}$.

B.5 (Zusammenfassung). Kurz gesagt lesen wir [BS00] mit den folgenden Ersetzungen:

Notation [BS00]	vorliegende Notation
n	1
$q = p^t$	$q = p^r$
k	$\mathcal{C}_\infty$
d	δ
$\mathscr{H}[d]$	$\mathcal{P}[\delta]$
$(r_0, \ldots, r_{t-1})$	$(t_0, \ldots, t_{r-1})$
$(\lambda_0, \ldots, \lambda_{t-1})$	$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1})$
$(\,\cdot\,)^{(p^j)}$	$(\,\cdot\,)^{\theta^j}$

B.2 Die duale natürliche Darstellung

Wir stellen fest, dass die Herangehensweisen in der vorliegenden Arbeit und in [BS00] sich im Wesentlichen dadurch unterscheiden, ob die natürliche zweidimensionale Darstellung V oder deren duale Darstellung betrachtet wird.

Um die beiden Situationen miteinander zu verbinden, beschreiben wir daher zunächst allgemein den Zusammenhang zwischen den Darstellungen V und V^*. Besonders interessieren uns dabei symmetrische Potenzen dieser beiden Darstellungen.

Das Transformationsverhalten der Standardbasis (X, Y) von V unter der Operation von G haben wir bereits in Proposition 5.29 beschrieben. Wir können damit die in Definition 5.14 beschriebene Operation auf dem Dualraum V^* für die Basiselemente X_0 und X_1 auswerten.

B.6 Lemma. *Ist $\gamma \in G$ mit $\gamma^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, so gilt*

$$\begin{aligned} \gamma X_0 &= aX_0 + bX_1, \\ \gamma X_1 &= cX_0 + dX_1. \end{aligned}$$

Beweis. Da die Basis (X_0, X_1) dual zur Basis (X, Y) ist, sehen wir, dass die Abbildung γX_0 durch die Vorschriften

$$\begin{aligned} (\gamma X_0)(X) &= X_0(\gamma^{-1}X) = X_0(aX + cY) = a, \\ (\gamma X_0)(Y) &= X_0(\gamma^{-1}Y) = X_0(bX + dY) = b \end{aligned}$$

definiert wird. Die Aussage für γX_1 folgt analog. □

Setzen wir für γ die üblichen Erzeuger von G aus Proposition 5.24 ein, so ergibt sich (unter Berücksichtigung der Inversenbildung) direkt:

B.7 Lemma. *Die Erzeuger von G operieren in folgender Weise auf der Basis (X_0, X_1) von V^*:*

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X_0 = a^{-1} X_0, \qquad \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X_1 = X_1,$$
$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X_0 = X_0 - tX_1, \qquad \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X_1 = X_1,$$
$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) X_0 = X_1, \qquad \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) X_1 = X_0.$$

Wir erhalten damit den folgenden Zusammenhang zwischen den symmetrischen Potenzen von V und denen von V^*:

B.8 Proposition. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt: Die Abbildung*

$$\mathrm{Sym}^n(V) \to \mathrm{Sym}^n(V^*) \otimes (\det)^n,$$

die gegeben ist durch

$$X^{n-i}Y^i \mapsto (-1)^i X_0^i X_1^{n-i}, \quad 0 \le i \le n,$$

und lineare Fortsetzung, ist ein Isomorphismus von G-Moduln.

Beweis. Offenbar handelt es sich bei der angegebenen Abbildung um einen Isomorphismus von Vektorräumen.

Das Transformationsverhalten der Monome $X^{n-i}Y^i$ in $\mathrm{Sym}^n(V)$ unter der Operation von G haben wir bereits in Proposition 5.31 beschrieben.

Für die Operation auf $\mathrm{Sym}^n(V^*) \otimes (\det)^n$ erhalten wir mit Hilfe von Lemma B.7 unter Beachtung des zusätzlichen Determinantentwists:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) (-1)^i X_0^i X_1^{n-i} &= a^n (-1)^i a^{-i} X_0^i X_1^{n-i} \\
&= a^{n-i} (-1)^i X_0^i X_1^{n-i}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) (-1)^i X_0^i X_1^{n-i} &= (-1)^n (-1)^i X_0^{n-i} X_1^i \\
&= (-1)^{n-i} X_0^{n-i} X_1^i, \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) (-1)^i X_0^i X_1^{n-i} &= (-1)^i (X_0 - tX_1)^i X_1^{n-i} \\
&= (-1)^i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} X_0^j (-1)^{i-j} t^{i-j} X_1^{i-j} X_1^{n-i} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^j X_0^j X_1^{n-j}.
\end{aligned}$$

Der Vergleich der Transformationsvorschriften liefert unmittelbar die G-Äquivarianz der betrachteten Abbildung. □

Bemerkung. Ein analoger Zusammenhang lässt sich auch in Charakteristik 0 formulieren. Grundlegend verschieden ist die Situation allerdings, wenn anstelle der symmetrischen Potenz der dualen Darstellung V^* die duale Darstellung der symmetrischen Potenz von V betrachtet wird.

In Charakteristik 0 sind die symmetrischen Potenzen der natürlichen Darstellung zur Gruppe $G = \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ (oder $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$) einfach, und es existiert ein G-Isomorphismus

$$\mathrm{Sym}^n(V) \xrightarrow{\cong} (\mathrm{Sym}^n(V))^*.$$

Bei der Beschreibung der Bilder der Monome X^iY^{n-i} unter diesem Isomorphismus treten allerdings Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i}$ als Koeffizienten auf. Während diese Binomialkoeffizienten in Charakteristik 0 alle invertierbar sind, lässt sich dieser Isomorphismus im Allgemeinen nicht auf Charakteristik p übertragen.

Nur wenn alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i}$ auch modulo p von Null verschieden sind, gilt die angegebene Isomorphie ebenfalls in endlicher Charakteristik. Dies ist der Fall für $n \leq p-1$ oder $n = p^s-1$ mit $s \in \mathbb{N}$, also insbesondere dann, wenn die symmetrische Potenz $\mathrm{Sym}^n(V)$ einfach ist (vergleiche Proposition 5.34).

B.3 Übertragung der Resultate

Den im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Zusammenhang zwischen den symmetrischen Potenzen von V und V^* können wir nun auf die Moduln $N[\delta]$ und $A[\delta]$ mit $1 \leq \delta \leq q-2$ übertragen.

Wir verschaffen uns dazu zunächst Basen der Moduln $A[\delta]$.

B.9 Lemma ([BS00, Abschnitt 9.1])**.** *Sei z_i das Bild von X_i in*

$$A = \mathrm{Sym}(V^*)/\left\langle X_i^q - X_i \right\rangle_{i=0,1}.$$

Für $1 \leq \delta \leq q-2$ ist eine Basis von $A[\delta]$ gegeben durch die Monome

$$\begin{aligned} &z_0^b z_1^{\delta-b}, \quad 0 \leq b \leq \delta, \\ &z_0^b z_1^{q-1+\delta-b}, \quad \delta \leq b \leq q-1. \end{aligned}$$

Damit können wir explizite G-Isomorphismen konstruieren:

B.10 Proposition. *Sei $1 \leq \delta \leq q-2$. Sei $\{f_i^{(\delta)}, f_\infty^{(\delta)} \mid 0 \leq i \leq q-1\}$ die in Notation 6.11 definierte Basis von $N[\delta]$. Dann gilt: Die Abbildung $N[\delta] \to A[\delta] \otimes (\det)^\delta$, die durch*

$$\begin{aligned} f_i^{(\delta)} &\mapsto (-1)^i z_0^i z_1^{\delta-i}, \quad 0 \leq i \leq \delta-1, \\ f_\infty^{(\delta)} &\mapsto (-1)^\delta z_0^\delta, \\ f_i^{(\delta)} &\mapsto (-1)^i z_0^i z_1^{q-1+\delta-i}, \quad \delta \leq i \leq q-1, \end{aligned}$$

und lineare Fortsetzung gegeben ist, ist ein G-Isomorphismus.

Beweis. Die angegebene Abbildung bildet offenbar eine Basis von $N[\delta]$ auf eine Basis von $A[\delta] \otimes (\det)^\delta$ ab, ist also ein Vektorraumisomorphismus.

Um das Transformationsverhalten der Basiselemente von $A[\delta] \otimes (\det)^{\delta}$ unter den üblichen Erzeugern von G zu bestimmen, gehen wir wie im Beweis von Proposition B.8 vor.

Für $0 \leq i \leq \delta$ erhalten wir so unmittelbar

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(-1)^i z_0^i z_1^{\delta-i} &= a^{\delta-i}(-1)^i z_0^i z_1^{\delta-i}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)(-1)^i z_0^i z_1^{\delta-i} &= (-1)^{\delta-i} z_0^{\delta-i} z_1^i, \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(-1)^i z_0^i z_1^{\delta-i} &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^j z_0^j z_1^{\delta-j}.
\end{aligned}$$

Analog sehen wir für $\delta \leq i \leq q-1$, dass

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(-1)^i z_0^i z_1^{q-1+\delta-i} &= a^{\delta-i}(-1)^i z_0^i z_1^{q-1+\delta-i}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)(-1)^i z_0^i z_1^{q-1+\delta-i} &= (-1)^{q-1+\delta-i} z_0^{q-1+\delta-i} z_1^i, \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(-1)^i z_0^i z_1^{q-1+\delta-i} &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^j z_0^j z_1^{q-1+\delta-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\delta-1} \binom{i}{j} (-1)^j z_0^j z_1^{\delta-j} + \sum_{j=\delta}^{i} \binom{i}{j} (-1)^j z_0^j z_1^{q-1+\delta-j}
\end{aligned}$$

gilt. Dabei haben wir bei der letzten Gleichung ausgenutzt, dass in A nach Definition

$$z_1^q = z_1$$

ist.

Der Vergleich mit dem in Lemma 6.13 beschriebenen Transformationsverhalten der Basis

$$\{f_i^{(\delta)} \mid 0 \leq i \leq q-1\} \cup \{f_\infty^{(\delta)}\}$$

von $N[\delta]$ liefert nun unmittelbar die G-Äquivarianz der betrachteten Abbildung. □

Bemerkung. Die Möglichkeit, die Moduln $A[\delta]$ als induzierte Moduln zu realisieren, wird bereits in Bemerkung (3) zu [BS00, Theorem C] erwähnt.

Wir müssen somit nur einen zusätzlichen Determinantentwist berücksichtigen, um die Ergebnisse aus [BS00, Theorem C] auf die Moduln $N[\delta]$ mit $1 \leq \delta \leq q-2$ zu übertragen. Insbesondere sehen wir auf diese Weise: Die Untermoduln von $N[\delta]$ sind genau die getwisteten Untermoduln von $A[\delta]$. Die Struktur der Untermodulverbände stimmt in beiden Fällen überein. Ebenso sind die Kompositionsfaktoren von $N[\delta]$ als Twists der Kompositionsfaktoren von $A[\delta]$ bestimmt.

Um die in Theorem C angegebene Beschreibung der Kompositionsfaktoren auf unsere in Abschnitt 5.3 gewählte Klassifikation der Isomorphieklassen einfacher G-Moduln zurückzuführen, müssen wir als Erstes für $0 \leq \alpha \leq 2(p-1)$ die homogenen Komponenten $\overline{S}^{\alpha}$ des in Abschnitt B.1 eingeführten Moduls $\overline{S} = \mathrm{Sym}(V^*)/\left\langle X_i^p \right\rangle_{i=0,1}$ genauer untersuchen.

B.11 Lemma. *Sei* $0 \le \alpha \le 2(p-1)$. *Dann gilt*

$$\overline{S}^\alpha \cong \begin{cases} \mathrm{Sym}^\alpha(V^*) & 0 \le \alpha \le p-1 \\ \mathrm{Sym}^{2(p-1)-\alpha}(V^*) \otimes (\det)^{p-1-\alpha} & p-1 < \alpha \le 2(p-1) \end{cases}$$

als Isomorphie von G-Moduln.

Beweis. Für $\alpha \le p-1$ entspricht die homogene Komponente des Grades α von $\overline{S}$ genau der homogenen Komponente des Grades α von $\mathrm{Sym}(V^*)$, da die Reduktion modulo X_i^p für diese Grade keine Anwendung findet.

Sei also $p-1 < \alpha \le 2(p-1)$. Wir wollen einen G-Isomorphismus zwischen den angegebenen Moduln konstruieren. Dazu betrachten wir wie üblich das Transformationsverhalten von Basen beider Moduln unter der Operation von G.

Sei x_i das Bild von X_i in $\overline{S}$. Die Monome

$$x_0^b x_1^{\alpha-b} \quad \text{mit } \alpha-(p-1) \le b \le p-1$$

bilden eine Basis von $\overline{S}^\alpha$, da es sich hierbei genau um die Monome vom Grad α in x_0 und x_1 handelt, in denen kein Exponent $\ge p$ auftritt.

Mit Lemma B.7 sehen wir, dass für $\alpha-(p-1) \le b \le p-1$ unter der Operation der Erzeuger von G gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) x_0^b x_1^{\alpha-b} &= a^{-b} x_0^b x_1^{\alpha-b}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) x_0^b x_1^{\alpha-b} &= x_0^{\alpha-b} x_1^b, \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) x_0^b x_1^{\alpha-b} &= (x_0 - t x_1)^b x_1^{\alpha-b} \\
&= \sum_{j=0}^{b} \tbinom{b}{j} t^{b-j} (-1)^{b-j} x_0^j x_1^{\alpha-j} \\
&= \sum_{j=\alpha-(p-1)}^{b} \tbinom{b}{j} t^{b-j} (-1)^{b-j} x_0^j x_1^{\alpha-j}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt ausgenutzt, dass Summanden, die ein Monom $x_0^j x_1^{\alpha-j}$ mit $\alpha - j \ge p$ enthalten, in $\overline{S}$ nach Definition verschwinden.

Wir passen die Standardbasis von $\mathrm{Sym}^{2(p-1)-\alpha}(V^*) \otimes (\det)^{p-1-\alpha}$ an, indem wir ihre Elemente in der Form

$$X_0^{p-1-\alpha+b} X_1^{p-1-b} \quad \text{mit } \alpha-(p-1) \le b \le p-1$$

schreiben. Für das Transformationsverhalten ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X_0^{p-1-\alpha+b} X_1^{p-1-b} &= a^{p-1-\alpha} a^{-(p-1)+\alpha-b} X_0^{p-1-\alpha+b} X_1^{p-1-b} \\
&= a^{-b} X_0^{p-1-\alpha+b} X_1^{p-1-b}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) X_0^{p-1-\alpha+b} X_1^{p-1-b} &= (-1)^{p-1-\alpha} X_0^{p-1-b} X_1^{p-1-\alpha+b} \\
&= (-1)^{p-1-\alpha} X_0^{p-1-\alpha+(\alpha-b)} X_1^{p-1-(\alpha-b)}, \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X_0^{p-1-\alpha+b} X_1^{p-1-b} &= (X_0 - tX_1)^{p-1-\alpha+b} X_1^{p-1-b} \\
&= \sum_{l=0}^{p-1-\alpha+b} \tbinom{p-1-\alpha+b}{l} t^{p-1-\alpha+b-l} (-1)^{p-1-\alpha+b-l} X_0^l X_1^{2(p-1)-\alpha-l}.
\end{aligned}$$

Wir definieren nun eine Abbildung $\varphi : \overline{S}^\alpha \to \mathrm{Sym}^{2(p-1)-\alpha}(V^*) \otimes (\det)^{p-1-\alpha}$ durch

$$x_0^b x_1^{\alpha-b} \mapsto \tbinom{b}{\alpha-(p-1)} X_0^{p-1-\alpha+b} X_1^{p-1-b}, \qquad \alpha-(p-1) \le b \le p-1,$$

und lineare Fortsetzung. Dabei gilt: Die Binomialkoeffizienten $\binom{b}{\alpha-(p-1)}$ sind für die betrachteten Werte von b alle von Null verschieden modulo p. Die Abbildung φ ist somit in jedem Fall ein Vektorraumisomorphismus.

Wir rechnen nun die G-Äquivarianz von φ mit Hilfe des oben bestimmten Transformationsverhaltens der betrachteten Basen nach. So folgt direkt, dass

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \varphi(x_0^b x_1^{\alpha-b}) &= \tbinom{b}{\alpha-(p-1)} \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X_0^{p-1-\alpha+b} X_1^{p-1-b} \\
&= \tbinom{b}{\alpha-(p-1)} a^{-b} X_0^{p-1-\alpha+b} X_1^{p-1-b} \\
&= a^{-b} \varphi(x_0^b x_1^{\alpha-b}) \\
&= \varphi(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) x_0^b x_1^{\alpha-b})
\end{aligned}$$

gilt. Ferner erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \varphi(x_0^b x_1^{\alpha-b}) &= \tbinom{b}{\alpha-(p-1)} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) X_0^{p-1-\alpha+b} X_1^{p-1-b} \\
&= \tbinom{b}{\alpha-(p-1)} (-1)^{p-1-\alpha} X_0^{p-1-\alpha+(\alpha-b)} X_1^{p-1-(\alpha-b)}.
\end{aligned}$$

Gemäß Lemma A.14 ist aber in Charakteristik p

$$\binom{b}{\alpha-(p-1)} (-1)^{p-1-\alpha} = \binom{\alpha-b}{\alpha-(p-1)},$$

so dass sich zusammen

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \varphi(x_0^b x_1^{\alpha-b}) &= \tbinom{\alpha-b}{\alpha-(p-1)} X_0^{p-1-\alpha+(\alpha-b)} X_1^{p-1-(\alpha-b)} \\
&= \varphi(x_0^{\alpha-b} x_1^b) \\
&= \varphi(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) x_0^b x_1^{\alpha-b})
\end{aligned}$$

ergibt. Schließlich ist

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \varphi(x_0^b x_1^{\alpha-b}) &= \tbinom{b}{\alpha-(p-1)} \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X_0^{p-1-\alpha+b} X_1^{p-1-b} \\
&= \tbinom{b}{\alpha-(p-1)} \sum_{l=0}^{p-1-\alpha+b} \tbinom{p-1-\alpha+b}{l} t^{p-1-\alpha+b-l} (-1)^{p-1-\alpha+b-l} X_0^l X_1^{2(p-1)-\alpha-l} \\
&= \sum_{j=\alpha-(p-1)}^{b} \tbinom{b}{\alpha-(p-1)} \tbinom{b-(\alpha-(p-1))}{j-(\alpha-(p-1))} t^{b-j} (-1)^{b-j} X_0^{p-1-\alpha+j} X_1^{p-1-j},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Indextransformation $l = p-1-\alpha+j$ vorgenommen haben. Nach Lemma A.11 wissen wir jedoch: Für alle $\alpha-(p-1) \leq j \leq b \leq p-1$ ist

$$\binom{b}{\alpha-(p-1)} \binom{b-(\alpha-(p-1))}{j-(\alpha-(p-1))} = \binom{b}{j} \binom{j}{\alpha-(p-1)}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \varphi(x_0^b x_1^{\alpha-b}) &= \sum_{j=\alpha-(p-1)}^{b} t^{b-j} (-1)^{b-j} \tbinom{b}{j} \tbinom{j}{\alpha-(p-1)} X_0^{p-1-\alpha+j} X_1^{p-1-j} \\
&= \sum_{j=\alpha-(p-1)}^{b} \tbinom{b}{j} t^{b-j} (-1)^{b-j} \varphi(x_0^j x_1^{\alpha-j}) \\
&= \varphi(\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) x_0^b x_1^{\alpha-b}).
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt, dass φ tatsächlich ein G-Isomorphismus ist, und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Um eine Beschreibung durch symmetrische Potenzen von V zu erhalten, müssen wir erneut bestimmte Determinantentwists betrachten.

B.12 Lemma. *Sei $0 \leq \alpha \leq 2(p-1)$. Dann gilt*

$$\overline{S}^\alpha \otimes (\det)^\alpha \cong \begin{cases} \mathrm{Sym}^\alpha(V) & 0 \leq \alpha \leq p-1 \\ \mathrm{Sym}^{2(p-1)-\alpha}(V) \otimes (\det)^{\alpha-(p-1)} & p-1 < \alpha \leq 2(p-1) \end{cases}$$

als Isomorphie von G-Moduln.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Lemma B.11, indem wir Proposition B.8 verwenden.

Im Fall $0 \leq \alpha \leq p-1$ kann die angegebene Isomorphie direkt abgelesen werden. Ist $p-1 < \alpha \leq 2(p-1)$, so haben wir

$$\begin{aligned}
\overline{S}^\alpha \otimes (\det)^\alpha &\cong \mathrm{Sym}^{2(p-1)-\alpha}(V^*) \otimes (\det)^{p-1} \\
&\cong \left(\mathrm{Sym}^{2(p-1)-\alpha}(V^*) \otimes (\det)^{2(p-1)-\alpha}\right) \otimes (\det)^{\alpha-(p-1)} \\
&\cong \mathrm{Sym}^{2(p-1)-\alpha}(V) \otimes (\det)^{\alpha-(p-1)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Um nun die gewünschte Isomorphie einfacher G-Moduln zu formulieren, verwenden wir die Notation aus Abschnitt 6.2.

B.13 (Erinnerung). Für $1 \leq \delta \leq q-2$ seien die Typ-Abbildung typ_δ sowie die Mengen $\mathcal{T}[\delta] \subseteq \mathcal{T}$ wie in Notation/Lemma 6.19 definiert.

Ferner seien die Parametrisierungsfunktionen $e, \eta : \mathcal{T} \to \{0, \ldots, q-1\}$ aus Notation 6.30 gegeben.

Darüber hinaus verwenden wir die Charakterisierung der einfachen G-Moduln aus Satz 5.33 mit Notation 5.32.

B.14 Lemma. *Für $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}) \in \mathcal{T}[\delta]$ gilt die Isomorphie einfacher G-Moduln*

$$\bigotimes_{i=0}^{r-1} \left(\overline{S}^{\alpha_i}\right)^{\theta^i} \otimes (\det)^\delta \cong \mathfrak{S}(e(\boldsymbol{\alpha}), \eta(\boldsymbol{\alpha})).$$

Beweis. Wir wissen aus Lemma 6.23, dass

$$\delta \equiv \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i p^i \mod q-1$$

gilt. Dadurch ist der Determinantentwist im folgenden Sinne mit dem Frobenius-Twist verträglich:

$$\begin{aligned}\bigotimes_{i=0}^{r-1} \left(\overline{S}^{\alpha_i}\right)^{\theta^i} \otimes (\det)^\delta &\cong \bigotimes_{i=0}^{r-1} \left(\overline{S}^{\alpha_i}\right)^{\theta^i} \otimes (\det)^{\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i p^i} \\ &\cong \bigotimes_{i=0}^{r-1} \left(\overline{S}^{\alpha_i}\right)^{\theta^i} \otimes \bigotimes_{i=0}^{r-1} ((\det)^{\alpha_i})^{\theta^i} \\ &\cong \bigotimes_{i=0}^{r-1} \left(\overline{S}^{\alpha_i} \otimes (\det)^{\alpha_i}\right)^{\theta^i}.\end{aligned}$$

Nach Lemma B.12 ist dieser Modul wiederum isomorph zu

$$\bigotimes_{\substack{i=0 \\ \alpha_i \leq p-1}}^{r-1} (\mathrm{Sym}^{\alpha_i}(V))^{\theta^i} \otimes \bigotimes_{\substack{i=0 \\ \alpha_i > p-1}}^{r-1} \left(\mathrm{Sym}^{2(p-1)-\alpha_i}(V) \otimes (\det)^{\alpha_i-(p-1)}\right)^{\theta^i}.$$

Indem wir erneut die Verträglichkeit von Determinantentwist und Frobenius-Twist ausnutzen, können wir diesen Modul als

$$\bigotimes_{\substack{i=0 \\ \alpha_i \leq p-1}}^{r-1} (\mathrm{Sym}^{\alpha_i}(V))^{\theta^i} \otimes \bigotimes_{\substack{i=0 \\ \alpha_i > p-1}}^{r-1} \left(\mathrm{Sym}^{2(p-1)-\alpha_i}(V)\right)^{\theta^i} \otimes (\det)^{\sum (\alpha_i-(p-1))p^i}$$

schreiben, wobei die Summe im Exponenten des Determinantentwists über die Indizes $0 \leq i \leq r-1$ mit $\alpha_i > p-1$ läuft. Vergleich mit den Definitionen der Abbildungen e und η liefert, dass es sich dabei tatsächlich um den Modul $\mathfrak{S}(e(\boldsymbol{\alpha}), \eta(\boldsymbol{\alpha}))$ handelt. □

Wir können nun die gesuchte, angepasste Variante von Theorem C für die Moduln $N[\delta]$ mit $1 \le \delta \le q-2$ angeben.

B.15 Satz (Variante von [BS00, Theorem C]). *Sei $1 \le \delta \le q-2$. Dann gilt:*

(i) Der Modul $N[\delta]$ ist multiplizitätsfrei.

(ii) Die Kompositionsfaktoren von $N[\delta]$ werden durch die Menge $\mathcal{P}[\delta]$ (beziehungsweise $\mathcal{T}[\delta]$) parametrisiert. Ist $\mathbf{t} \in \mathcal{P}[\delta]$ mit korrespondierendem Typ $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{typ}_\delta(\mathbf{t})$ in $\mathcal{T}[\delta]$, so ist der zugehörige Kompositionsfaktor isomorph zu

$$\mathfrak{S}(e(\boldsymbol{\alpha}), \eta(\boldsymbol{\alpha})).$$

(iii) Für einen Untermodul $U \subseteq N[\delta]$ sei $\mathcal{P}[\delta]_U \subseteq \mathcal{P}[\delta]$ die Menge der Parameter seiner Kompositionsfaktoren. Dann ist $\mathcal{P}[\delta]_U$ ein Ideal von $(\mathcal{P}[\delta], \le)$, d.h. eine Teilmenge von $\mathcal{P}[\delta]$, die unter der Ordnungsrelation „$\le$“ abgeschlossen ist.

(iv) Die Abbildung $U \mapsto \mathcal{P}[\delta]_U$ beschreibt einen Isomorphismus vom Untermodulverband von $N[\delta]$ in den Verband der Ideale von $(\mathcal{P}[\delta], \le)$, geordnet nach Inklusion.

Beweis. Nach Proposition B.10 gilt

$$N[\delta] \cong A[\delta] \otimes (\det)^\delta.$$

Sämtliche Behauptungen können nun direkt auf Aussagen zurückgeführt werden, die in [BS00, Theorem C] bewiesen sind.

Die erste Behauptung folgt direkt aus Aussage (a) von Theorem C, da mit $A[\delta]$ auch der Twist $A[\delta] \otimes (\det)^\delta$ multiplizitätsfrei ist.

Die Parametrisierung der Kompositionsfaktoren durch die Menge $\mathcal{P}[\delta]$ folgt (unter Beachtung der angepassten Bezeichnungen) ebenfalls aus Aussage (a) von Theorem C, da die Kompositionsfaktoren von $A[\delta] \otimes (\det)^\delta$ genau die mit $(\det)^\delta$ getwisteten Kompositionsfaktoren von $A[\delta]$ sind.

Wir verwenden dann Lemma B.14, um die korrekten Twists der in Aussage (b) von Theorem C angegebenen einfachen Moduln in unsere Klassifikation zu übersetzen. Die in Theorem C definierten λ_j entsprechen dabei genau den Einträgen unseres Tupels $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{typ}_\delta(\mathbf{t})$.

Die Behauptungen (iii) und (iv) folgen unmittelbar aus den Aussagen (c) und (d) von Theorem C, da sich beide Situationen nur um einen Determinantentwist unterscheiden. □

Im Hinblick auf die G-Modulstruktur symmetrischer Potenzen ist der folgende Spezialfall interessant:

B.16 Korollar. *Sei $1 \le \delta \le q-2$. Unter der Einbettung von $\mathrm{Sym}^\delta(V)$ nach $N[\delta]$ (siehe Korollar 6.14) entspricht $\mathrm{Sym}^\delta(V)$ dem Ideal*

$$\{\mathbf{t} \in \mathcal{P}[\delta] \mid t_0 = 0\}$$

von $(\mathcal{P}[\delta], \le)$.

Beweis. Es handelt sich hierbei um die Übertragung von [BS00, Abschnitt 10] auf die vorliegende Situation. □

Bemerkung. Vereinfacht ausgedrückt kann in [BS00] jedes Auftreten der Koordinatenfunktionen X_0, X_1 durch die Elemente X, Y der Standardbasis ersetzt werden, um eine Beschreibung der bei uns betrachteten Situation zu erhalten. Die aus der Dualisierung von V resultierenden Determinantentwists heben sich insgesamt wieder auf.

Wie am Ende des vorangegangenen Abschnitts angedeutet, sind die beiden Situationen jedoch nicht dual zueinander. Stattdessen ist

$$(N[\delta])^* \cong N[q-1-\delta] \quad \text{bzw.} \quad (A[\delta])^* \cong A[q-1-\delta].$$

Dies folgt unmittelbar aus dem Vertauschen der Dualisierung mit der Bildung der induzierten Darstellung (siehe Proposition 5.16) und der Beschreibung dualer Charaktere in Beispiel 5.15. Damit ist also

$$(N[\delta])^* \otimes (\det)^\delta \cong A[q-1-\delta].$$

Index

Symbolverzeichnis

Das Symbolverzeichnis enthält keine Notation, die nur in den Anhängen oder der allgemeinen Situation in Kapitel 5 verwendet wird.

$\boldsymbol{\alpha}$	ein Typ $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1})$ in $\mathcal{T}$, Seite 78
$\boldsymbol{\alpha}(m, U)$	Schreibweise für Elemente einer Faser der Funktion e, Seite 86
Γ	eine arithmetische Gruppe, Seite 2
$\Gamma(1)$	die volle Modulgruppe $\mathrm{GL}(2, A)$, Seite 2
$\Gamma(N)$	die Hauptkongruenzuntergruppe zur Stufe $N \in A$, Seite 2
$\delta_{\cdot,\cdot}$	das Kronecker-Delta
ζ	Koeffizient in den Reihenentwicklungen der Eisenstein-Reihen an den Spitzen, Seite 17
η	eine der Parametrisierungsfunktionen, Seite 84
$\mu_l^{(i)} = \mu_l^{(i,k)}$	Koeffizient in Formeln für Eisenstein-Reihen, Seite 27
$\overline{\pi}$	ein (fixierter) Erzeuger des Gitters zum Carlitz-Modul, Seite 4
τ	eine Uniformisierende an den Spitzen von $\Gamma(T)$, Seite 6
Φ_k	ein G-Isomorphismus $M_k \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}^{kq}(V)$, Seite 104
Φ	der durch die Φ_k induzierte Algebrenisomorphismus, Seite 105
$\phi_k^{(i)}$	ein G-Isomorphismus $M_k^i \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}^{kq-i(q+1)}(V) \otimes (\det)^i$, Seite 153
χ_δ	ein Charakter der Borel-Gruppe B, Seite 68
Ψ_i	ein G-Homomorphismus nach $\mathrm{Sym}^n(V)$, Seite 140
ψ_i	ein G-Homomorphismus nach $\mathrm{Sym}^{n-(i-1)(q+1)}(V) \otimes (\det)^{i-1}$, Seite 140
Ω	die Drinfeld'sche obere Halbebene $\mathcal{C}_\infty \setminus K_\infty$, Seite 2
ω_i	ein Charakter von $\mathbb{F}_q^\times$, Seite 68

A	der Polynomring $\mathbb{F}_q[T]$, Seite 1
B	die Borel-Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen von G, Seite 67
$\mathcal{B}_k^{i,+}$	eine Basis von M_k^i („Basis der Spitzenfiltrierung“), Seite 34
$\mathcal{B}_k^i$	für $k \geq 2$ eine Teilmenge der Basis $\mathcal{B}_k^{1,+}$ von M_k^1, Seite 33
$\mathcal{B}_1^0$	eine alternative Schreibweise für die Menge der modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht 1, Seite 41
$B_k^{i,-}$	eine Basis von W_k^i, Seite 111
B_k^j	eine Teilmenge von $B_k^{i,-}$ bestehend aus Normalformen, Seite 110
$\mathcal{C}_\infty$	die Vervollständigung des algebraischen Abschlusses von K_∞, Seite 2
$\mathfrak{d}$	eine Abbildung auf der Menge $\mathcal{T}$ der Typen, Seite 80
$\det \gamma$	die Determinante einer Matrix γ
$(\det)^\sigma$	ein Determinantencharakter, Seite 61
dsupp	der duale Träger, Seite 86
e	eine der Parametrisierungsfunktionen, Seite 84
$E_u^{(k)}$, $E_\infty^{(k)}$	die gewöhnlichen Eisenstein-Reihen vom Gewicht k für $\Gamma(T)$, Seite 10
E_u, E_∞	Kurzschreibweise für Gewicht 1
$\mathcal{E}_i^{(k)}$, $\mathcal{E}_\infty^{(k)}$	die modifizierten Eisenstein-Reihen vom Gewicht k für $\Gamma(T)$, Seite 11
$\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_q$	Kurzschreibweise für Gewicht 1
Eis_k	der G-Modul der Eisenstein-Reihen vom Gewicht k, Seite 10
$f_i^{(\delta)}$, $f_\infty^{(\delta)}$	Elemente einer Basis von $N[\delta]$, Seite 72
$F_u^{(\delta)}$, $F_\infty^{(\delta)}$	Elemente einer Basis von $N[\delta]$, Seite 69
$\mathcal{F}_*^{(i,k)}$	Elemente der Basis $\mathcal{B}_k^{1,+}$ von M_k^1, Seite 33
$\mathbb{F}_q$	der endliche Körper mit q Elementen, $q = p^r$
G	die Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$, Seite 50
$\mathrm{GL}(2, \cdot\,)$	die Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen
$\mathrm{Hom}_G(\,\cdot\,, \cdot\,)$	der Raum der G-Homomorphismen, Seite 55
$I_{m,\mu}(k)$	eine Indexmenge bei der Untersuchung des Musters, Seite 162

$I^0_{m,\mu}(k)$	eine Indexmenge bei der Untersuchung des Endstücks, Seite 170
$\mathrm{Ind}_H^G(\,\cdot\,)$	der induzierte G-Modul, Seite 56
$\mathfrak{k}$, $\widehat{\mathfrak{k}}$	für $k \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt durch $k = \mathfrak{k} + \widehat{\mathfrak{k}}(q+1)$ mit $1 \leq \mathfrak{k} \leq q+1$, Seite 31
K	der Quotientenkörper $\mathbb{F}_q(T)$ von A, Seite 1
K_∞	die Vervollständigung von K bezüglich der Grad-Bewertung, Seite 1
$L^{(i,n)}$	ein Untermodul einer Filtrierung von $\mathrm{Sym}^n(V)$, Seite 141
$L(n)$	ein Untermodul von $\mathrm{Sym}^n(V)$, Seite 142
$\mathfrak{m}(k)$	der ganzzahlige Anteil von $\frac{kq}{q+1}$, Seite 31
M	die Algebra der Modulformen zur Gruppe $\Gamma(T)$, Seite 7
M_k	der G-Modul der Modulformen vom Gewicht k zur Gruppe $\Gamma(T)$, Seite 7
M_k^n	der G-Modul der n-fachen Spitzenformen vom Gewicht k, Seite 7
$\mathbb{N}$	die natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots$
$\mathbb{N}_0$	die natürlichen Zahlen mit 0
$N[\delta]$	ein durch einen Charakter von B induzierter G-Modul, Seite 68
$o(\tau^n)$	Terme vom Grad $\geq n$ in τ
$\mathcal{P}[\delta]$	die Menge der Parameter zu δ, Seite 78
$\mathbb{P}^n(\,\cdot\,)$	der projektive Raum der Dimension n
q	eine Primzahlpotenz $q = p^r$, Seite 1
$\mathcal{R}$	ein vollständiges Repräsentantensystem modulo $q-1$, Seite 160
$\mathrm{Res}_H^G(\,\cdot\,)$	der durch Einschränkung erhaltene H-Modul, Seite 56
$\mathrm{SL}(2,\,\cdot\,)$	die Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Determinante 1
$\mathfrak{S}(s,\sigma)$	ein Repräsentant einer Isomorphieklasse einfacher G-Moduln, Seite 64
$\mathrm{Sym}^n(V)$	die n-te symmetrische Potenz von V, Seite 63
$\mathbf{t}$	ein Parameter $\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_{r-1}) \in \mathcal{P}[\delta]$, Seite 78
$\mathcal{T}$	die Menge der Typen, Seite 78
$\mathcal{T}[\delta]$	die Menge der Typen zu δ, Seite 78
typ_δ	die Typ-Abbildung zu δ, Seite 78

U_i	ein Untermodul von Eis_1, Seite 101
$\widetilde{U}_i$	ein Untermodul von $N[1]$, Seite 95
V	der natürliche zweidimensionale G-Modul, Seite 62
W_k^i	ein Untermodul von M_k, Seite 110
$\overline{X}_\Gamma$	die Drinfeld'sche Modulkurve, Seite 3
$\mathfrak{X}_j$	ein Element einer Basis von $L(n)$, Seite 142
(X, Y)	die Standardbasis von V, Seite 62
$\mathbb{Z}$	der Ring der ganzen Zahlen
Z_j	bei festem n Kurzschreibweise für $X^{n-j}Y^j \in \mathrm{Sym}^n(V)$, Seite 142
$[\,\cdot\,]$	der Repräsentant modulo $q-1$ in $\{1, \ldots, q-1\}$, Seite 11
$[\,\cdot\,]_{\mathcal{R}}$	der Repräsentant modulo $q-1$ in $\mathcal{R}$, Seite 160
$\langle\,\cdot\,\rangle$	wie $[\,\cdot\,]$ mit $\langle 0\rangle = 0$ (oder: lineares Erzeugnis), Seite 11
$(\,\cdot\,)^{\theta^j}$	der Frobenius-Twist eines G-Moduls, Seite 62
$\vert_{[\,\cdot\,]_{k,l}}$	die rechte Operation von $\Gamma(1)$ auf Funktionen $\Omega \to \mathcal{C}_\infty$, Seite 5
$\overset{\mathrm{J-H}}{\sim}$	Jordan-Hölder-Äquivalenz, Seite 59
$(\,\cdot\,)^\times$	die multiplikative Gruppe eines Rings

Literaturverzeichnis

[Alp86] Alperin, J. L.: *Local representation theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[Ben91] Benson, D. J.: *Representations and cohomology. I.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[Bon11] Bonnafé, Cédric: *Representations of* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.

[Bou89] Bourbaki, Nicolas: *Algebra. I. Chapters 1–3.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[BS00] Bardoe, Matthew und Peter Sin: *The permutation modules for* $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{F}_q)$ *acting on* $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ *and* $\mathbb{F}_q^{n+1}$. J. London Math. Soc. (2), 61(1):58–80, 2000.

[Cor97a] Cornelissen, Gunther: *Drinfeld modular forms of level* T. In: *Drinfeld modules, modular schemes and applications (Alden-Biesen, 1996)*, Seiten 272–281. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.

[Cor97b] Cornelissen, Gunther: *Geometric properties of modular forms over rational function fields.* Dissertation, Universiteit Gent, 1997.

[Cor97c] Cornelissen, Gunther: *A survey of Drinfeld modular forms.* In: *Drinfeld modules, modular schemes and applications (Alden-Biesen, 1996)*, Seiten 167–187. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.

[DH87] Deligne, Pierre und Dale Husemöller: *Survey of Drinfeld modules.* In: *Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985)*, Band 67 der Reihe *Contemp. Math.*, Seiten 25–91. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Dot85] Doty, Stephen R.: *The submodule structure of certain Weyl modules for groups of type* A_n. J. Algebra, 95(2):373–383, 1985.

[Dri74] Drinfeld, V. G.: *Elliptic modules.* Mat. Sb. (N.S.), 94(136):594–627, 656, 1974. Englische Übersetzung: Math. USSR-Sbornik 23 (1976), 561–562.

[FB95] Freitag, Eberhard und Rolf Busam: *Funktionentheorie.* Springer-Verlag, Berlin, zweite Auflage, 1995.

[Fei82] Feit, Walter: *The representation theory of finite groups.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982.

[FvdP04] Fresnel, Jean und Marius van der Put: *Rigid analytic geometry and its applications*, Band 218 der Reihe *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[Gek86] Gekeler, Ernst-Ulrich: *Drinfeld modular curves*, Band 1231 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Gek88] Gekeler, Ernst-Ulrich: *On the coefficients of Drinfeld modular forms*. Invent. Math., 93(3):667–700, 1988.

[Gek99a] Gekeler, Ernst-Ulrich: *Lectures on Drinfeld modular forms*. CICMA, Concordia University, Montréal, Canada, 1999. Monographie CICMA Lecture Notes Concordia-Laval-McGill 1999-04.

[Gek99b] Gekeler, Ernst-Ulrich: *A survey on Drinfeld modular forms*. Turkish J. Math., 23(4):485–518, 1999.

[Gek12] Gekeler, Ernst-Ulrich: *Zeroes of Eisenstein series for principal congruence subgroups over rational function fields*. J. Number Theory, 132(1):127–143, 2012.

[Gos80a] Goss, David: *Modular forms for* $\mathbb{F}_r[T]$. J. Reine Angew. Math., 317:16–39, 1980.

[Gos80b] Goss, David: π*-adic Eisenstein series for function fields*. Compositio Math., 41(1):3–38, 1980.

[Gos96] Goss, David: *Basic structures of function field arithmetic*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[GR96] Gekeler, Ernst-Ulrich und Marc Reversat: *Jacobians of Drinfeld modular curves*. J. Reine Angew. Math., 476:27–93, 1996.

[HHM00] Harris, John M., Jeffry L. Hirst und Michael J. Mossinghoff: *Combinatorics and graph theory*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[Lan02] Lang, Serge: *Algebra*. Springer-Verlag, New York, dritte Auflage, 2002.

[Luc91] Lucas, Edouard: *Théorie des nombres*. Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1891.

[Rus95] Rust, Imke: *Arithmetisch definierte Darstellungen von Gruppen vom Typ* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$. Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, 1995.

[Ser73] Serre, Jean Pierre: *A course in arithmetic*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[Ser77] Serre, Jean Pierre: *Linear representations of finite groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Ste67] Steinberg, Robert: *Lectures on Chevalley groups*. Yale University Lectures, 1967.

[Wac96] Wack, Bodo: *Darstellungen von* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ *und* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ *in definierender Charakteristik*. Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, 1996.