

# Trabajo Fin de Grado Ingeniería Aeroespacial

## Estudio del Factor de Intensidad de Tensiones en Fretting con un Contacto Cilíndrico

Autor: Martín Pérez Capote

Tutor: Jesús Vázquez Valeo

**Dpto. Ingeniería Mecánica y Fabricación  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2018





Trabajo Fin de Grado  
Ingeniería Aeroespacial

# **Estudio del Factor de Intensidad de Tensiones en Fretting con un Contacto Cilíndrico**

Autor:  
Martín Pérez Capote

Tutor:  
Jesús Vázquez Valeo

Dpto. de Ingeniería Mecánica y Fabricación  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla  
Sevilla, 2018



Proyecto Fin de Grado: Estudio del Factor de Intensidad de Tensiones en Fretting con un Contacto Cilíndrico

Autor: Martín Pérez Capote

Tutor: Jesús Vázquez Valeo

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El Secretario del Tribunal

*A mi familia*

*A mis maestros*



## Resumen

---

Este trabajo consiste en el estudio del factor de intensidad de tensiones (F.I.T.) en modo I en fretting, para un contacto cilíndrico. Se introducirá brevemente el fenómeno fretting, los efectos que produce en los componentes en que se da, así como una serie de paliativos para combatirlo. Posteriormente, partiendo de la configuración del ensayo de fretting correspondiente para el cálculo de  $K_I$ , y de las tensiones en la superficie de contacto de la probeta dadas por la literatura, se calculará el campo de tensiones interior a ella mediante dos métodos diferentes. Se basarán en las ecuaciones de Flamant y una serie de ecuaciones analíticas que se adaptarán a partir de la literatura para el caso que nos ocupa.

Posteriormente, se calculará la distribución de tensiones axiales  $\sigma_{xx}(s)$  a lo largo de la grieta, la cual permitirá calcular el factor de intensidad de tensiones  $K_I$ . Finalmente se representarán e interpretarán los resultados obtenidos. Para realizar estos cálculos se emplea una serie de funciones programadas en MATLAB y que se encuentran adjuntas en los anexos de la memoria.



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>9</b>
<b>Índice</b>	<b>11</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>13</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>15</b>
1.1. El fenómeno fretting	15
1.2. Fatiga por fretting	16
1.3. Ensayos de fretting	17
<b>2 Distribución de tensiones en la superficie de contacto</b>	<b>19</b>
2.1. Ensayo de fatiga por fretting	19
2.2. Tensiones en la superficie de contacto de la probeta	19
2.2.1. Expresiones de las tensiones normales de compresión $\sigma_{yy}(x, 0)$ sobre la superficie de contacto de la probeta	22
2.2.2. Expresiones de las tensiones tangenciales $\sigma_{xy}^{QG}(x, 0)$ sobre la superficie de contacto de la probeta	23
2.2.3. Expresiones de las tensiones tangenciales $\sigma_{xy}^{QP}(x, 0)$ sobre la superficie de contacto de la probeta	24
<b>3 Cálculo del campo de tensiones interior a la probeta</b>	<b>27</b>
3.1. Ecuaciones de Flamant	27
3.2. Ecuaciones analíticas	29
3.3. Comparativa de los resultados	31
<b>4 Cálculo de factor de intensidad de tensiones</b>	<b>33</b>
4.1. Principio de Bueckner	33
4.2. Funciones de peso	33
4.3. Particularización	34
4.4. Adimensionalización de las expresiones y representación de los resultados	35
4.4.1. $K_I^N$ asociado a $\sigma_{xx}^N$	36
4.4.2. $K_I^{QG}$ asociado a $\sigma_{xy}^{QG}$	37
4.4.3. $K_I^{QP}$ asociado a $\sigma_{xx}^{QP}$ respecto a $\frac{c}{a}$	38
4.4.4. $K_I^Q$ respecto a $\frac{c}{a}$	40
4.4.5. $K_I$ respecto a $\frac{c}{a}$	41
4.4.6. Influencia de la excentricidad y la carga global oscilatoria	42
4.5. Representación de las tensiones axiales $\sigma_{xx}$ a lo largo de la grieta	50
4.5.1. $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0}$ respecto $\frac{s}{a}$	50
4.5.2. $\frac{\sigma_{xx}^{QG}}{\mu \cdot p_0}$ respecto $\frac{s}{a}$	51

4.5.3.	$\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$ respecto $\frac{s}{a}$ para varios $\frac{c}{a}$	52
4.5.4.	$\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$ respecto $\frac{s}{a}$ para varios $\frac{c}{a}$	52
4.5.5.	$\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$ respecto $\frac{s}{a}$ para varios $\frac{c}{a}$	53
4.6.6.	Influencia de $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ en $\sigma_{xx}^{QP}$	54
4.7.7.	Influencia de $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ en $\sigma_{xx}^Q$	57
4.8.8.	Influencia de $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ en $\sigma_{xx}$	59
<b>5</b>	<b>Anexos</b>	<b>61</b>
<b>6</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

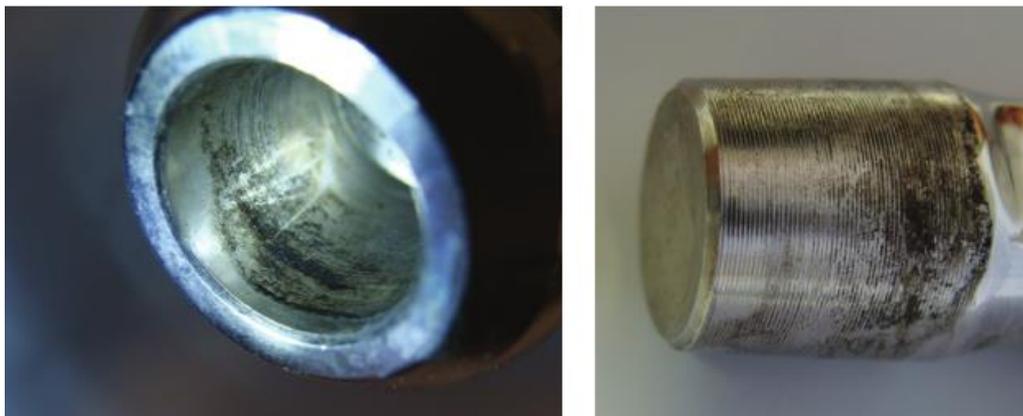
Figura 1.1. Daño debido al fretting y a la corrosión [8]	15
Figura 1.2. Ejemplo de fallo a fatiga por fretting [9]	15
Figura 1.3. Esquema Laser Shock Peening [10]	16
Figura 1.4. Diferencia entre fretting y fatiga por fretting [1]	16
Figura 1.5. Configuración de un ensayo a fatiga por fretting [7]	17
Figura 1.6. Fretting test	18
Figura 1.7. Ensayo de fretting de Nishioka y Hirakawa [1]	18
Figura 2.1. Esquema del ensayo	19
Figura 2.2. Situación para la apertura de la grieta	19
Figura 2.3. Tensiones en la superficie de contacto	20
Figura 2.4. Tensiones tangenciales en la superficie de contacto sin considerar e	21
Figura 2.5. Tensiones tangenciales en la superficie de contacto considerando e	21
Figura 2.6. Dos cilindros en contacto de la misma longitud [4]	21
Figura 2.7. Contacto entre los cuerpos [4]	22
Figura 3.1. Semiplano sometido a una distribución de tensiones normales y tangenciales [5]	27
Figura 4.1. Principio de superposición [6]	33
Figura 4.2. Esquema de la grieta de borde bajo un par de cargas puntuales [6]	34
Figura 4.3. Esquema de la grieta de borde bajo una distribución de tensiones [6]	34
Figura 4.4. Gráfica de $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$	36
Figura 4.5. Gráfica de $\frac{K_I^{QG}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$	37
Figura 4.6. Gráfica de $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$ para varios $\frac{Q}{\mu \cdot N}$	39
Figura 4.7. Gráfica de $\frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$ para varios $\frac{Q}{\mu \cdot N}$	40
Figura 4.8. Gráfica de $\frac{K_I}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$ para varios $\frac{Q}{\mu \cdot N}$	41
Figura 4.9. Gráfica de $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$ para varios $\frac{Q}{\mu \cdot N}$	42
Figura 4.10. Gráfica del máximo valor admisible de $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ frente a $\frac{Q}{\mu \cdot N}$	44
Figura 4.11. Gráfica de $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$ para varios $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ y $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$	44
Figura 4.12. Gráfica de $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$ para varios $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ y $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$	45
Figura 4.13. Gráfica de $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$ para varios $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ y $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$	45
Figura 4.14. Gráfica de $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$ para varios $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ y $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$	46
Figura 4.15. Gráfica de $\frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$ para varios $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ y $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$	46
Figura 4.16. Gráfica de $\frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$ para varios $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ y $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$	47
Figura 4.17. Gráfica de $\frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$ para varios $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ y $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$	47
Figura 4.18. Gráfica de $\frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$ para varios $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ y $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$	48
Figura 4.19. Gráfica de $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ frente $\frac{l}{a}$ para varios $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ y $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$	48

- Figura 4.20. Gráfica de  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente  $\frac{l}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  49
- Figura 4.21. Gráfica de  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente  $\frac{l}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  49
- Figura 4.22. Gráfica de  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente  $\frac{l}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  50
- Figura 4.23. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  51
- Figura 4.24. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^{QG}}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  51
- Figura 4.25. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$  52
- Figura 4.26. Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$  53
- Figura 4.27. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$  53
- Figura 4.28. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$  54
- Figura 4.29. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  55
- Figura 4.30. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  55
- Figura 4.31. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  56
- Figura 4.32. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  56
- Figura 4.33. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  57
- Figura 4.34. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  57
- Figura 4.35. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  58
- Figura 4.36. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  58
- Figura 4.37. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  59
- Figura 4.38. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  59
- Figura 4.39. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  60
- Figura 4.40. Gráfica de  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para varios  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  y  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  60

# 1 INTRODUCCIÓN

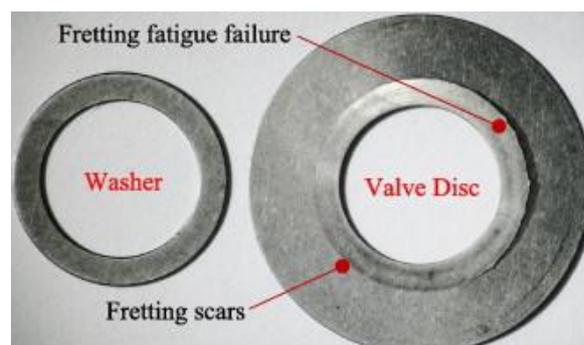
## 1.1 El fenómeno fretting

[2] El fretting es un fenómeno de daño superficial y desgaste que ocurre cuando existen desplazamientos relativos oscilatorios de muy pequeña amplitud entre componentes que se encuentran en contacto bajo presión, usualmente debido a vibraciones. Se trata de un proceso complejo que implica la interacción de varios fenómenos físicos. Esta situación puede producir en las superficies en contacto desgaste, corrosión y formación de grietas, tanto superficiales como interiores.



*Fig 1.1 Daño debido al fretting y la corrosión [8]*

Existe muchos componentes en la industria que, debido a las condiciones en las que trabajan, son susceptibles de sufrir este fenómeno. Algunos ejemplos son: uniones atornilladas, álabes de las turbinas, rotores de generadores, rodamientos, ... El estudio de este fenómeno es de gran importancia, debido a factores económicos y sobre todo a la seguridad. Así, el desarrollo de nuevos recubrimientos, tratamientos o lubricantes capaces de reducir el fenómeno de desgaste por fretting permitirán reducir los costes de mantenimiento.



*Fig 1.2 Ejemplo de fallo a fatiga por fretting [9]*

[3] En la actualidad se dispone de varios tipos de paliativos para combatir los efectos de este fenómeno. Entre estos, destaca el uso de lubricantes, recubrimientos y tratamientos superficiales tales como el Shot Peening y el Laser Peening.

-Los lubricantes son muy utilizados y se encargan de reducir el coeficiente de fricción en las superficies de contacto de los componentes, de modo que reducen las tensiones tangenciales producidas y, consecuentemente, reducen el daño producido.

-Los recubrimientos también son muy utilizados y pueden mejorar tanto el comportamiento frente al desgaste y fatiga simple como frente a fatiga por fretting. Algunos disminuyen el coeficiente de fricción en las superficies de contacto, mientras que otros mejoran el comportamiento de los componentes frente al desgaste.

-También se emplean una serie de técnicas basadas en introducir tensiones residuales de compresión en los componentes en que queremos evitar que se produzca este fenómeno. Entre estas técnicas destacan los tratamientos superficiales Shot Peening y Laser Peening que, además de modificar el estado tensional, pueden introducir modificaciones en la rugosidad superficial.

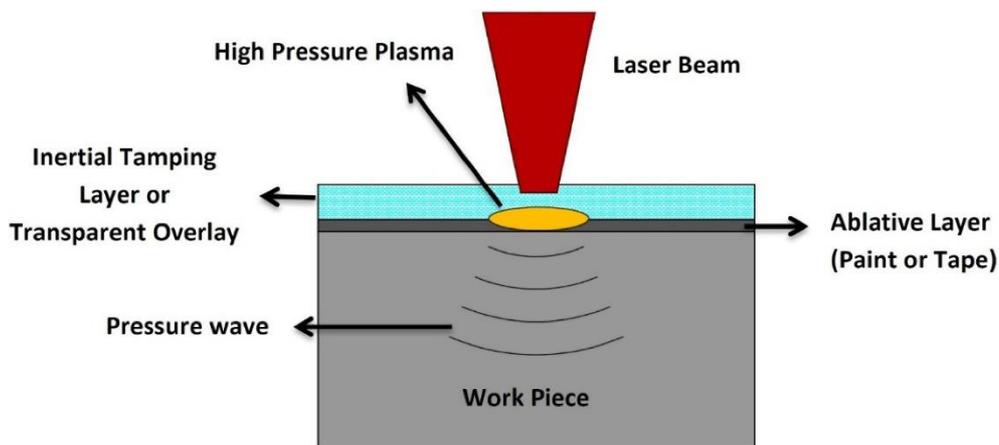


Fig 1.3 Esquema Laser Shock Peening [10]

## 1.2 Fatiga por fretting

[1] El caso que se analizará en este trabajo es el de fatiga por fretting. Se trata de un caso particular de fretting, en el que uno de los componentes se encuentra bajo la acción de una tensión global. En la siguiente figura se muestra la diferencia entre fretting y la fatiga por fretting:

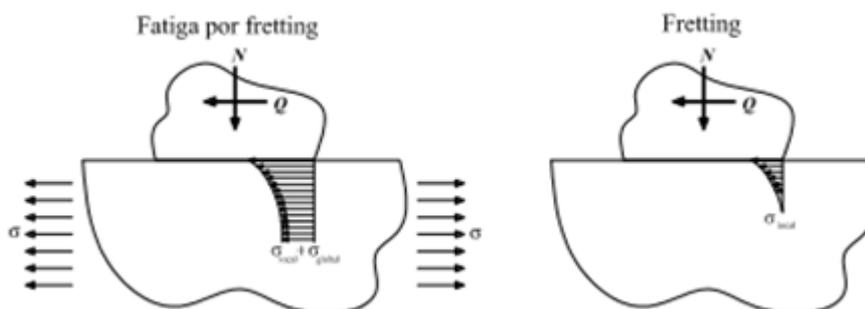
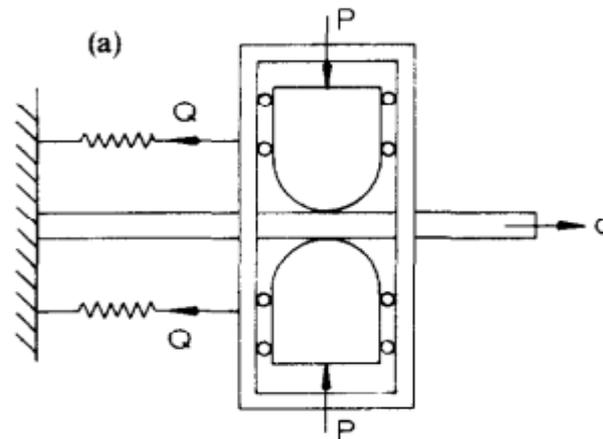


Fig 1.4 Diferencia entre fretting y fatiga por fretting [1]

En el caso de fatiga por fretting, una vez iniciada una grieta debido a unas cargas de contacto normal  $P$  y tangencial  $Q$ , ésta podrá propagarse debido a la acción de una tensión global oscilatoria  $\sigma$ . El principal objetivo de este trabajo será evaluar el factor de intensidad de tensiones  $K_I$  a lo largo de esa grieta, bajo unas condiciones determinadas que se indicarán más adelante.



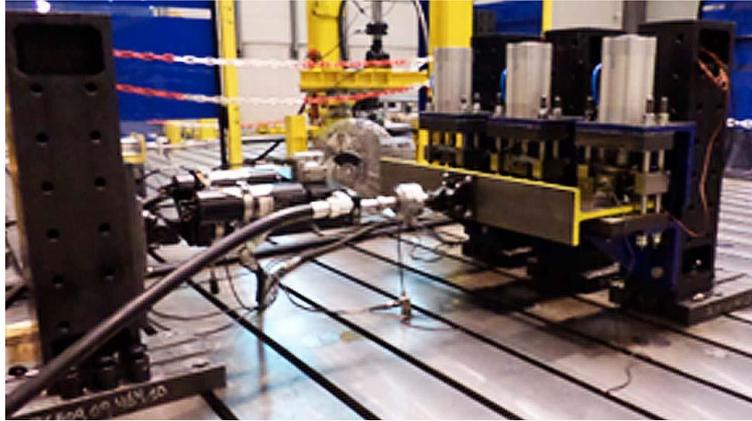
*Fig 1.5 Configuración de un ensayo a fatiga por fretting [7]*

Existen muchas variables que afectan al comportamiento frente a la fatiga por fretting, siendo las más importantes las que afectan a las tensiones producidas en la superficie de contacto, pues determinan la vida a fatiga por fretting de un componente. Entre estas variables se considerarán para el problema a estudiar: la geometría de las zonas de contacto, las propiedades mecánicas de los materiales implicados, el coeficiente de rozamiento en la superficie de contacto, las cargas de contacto  $N$  y  $Q$ , así como la tensión global oscilatoria  $\sigma$ . No se considerarán otros factores igual de importantes tales como la temperatura, las tensiones residuales en los materiales o las condiciones del ambiente.

### 1.3 Ensayos de fretting

[1] Mediante los ensayos de fretting puede averiguarse cómo se comporta cada material frente a este fenómeno, puede analizarse los procesos de iniciación y propagación de grietas, así como el papel que juega cada uno de los factores anteriormente mencionados en la vida a fatiga por fretting. Se pueden distinguir dos tipos de ensayos, los que se realizan con componentes reales y los que se realizan con geometrías sencillas.

-En los ensayos con componentes reales se replica de la forma más fiel posible las condiciones en las que trabajarán estos componentes, para analizar como sería su comportamiento en servicio. Permiten anticipar su comportamiento o analizar las causas de un fallo o mal comportamiento observado durante su vida útil. Entre los inconvenientes que presenta este tipo de ensayos destacan su alto coste económico y el hecho de que solo aportan información para el material y las condiciones del ensayo empleadas. Es muy difícil extrapolar los resultados obtenidos de un caso concreto hacia otros. Además, la geometría de estos componentes suele ser muy complicada, de modo que el empleo de herramientas numéricas requiere de mucho tiempo de procesamiento.

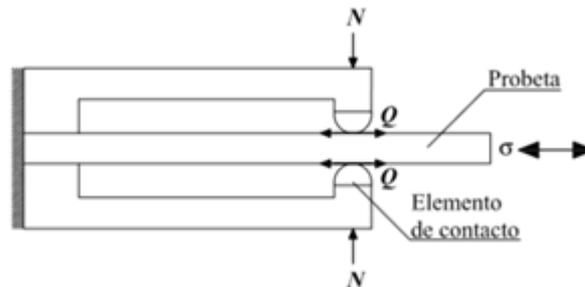


*Fig 1.6 Fretting test*

-En los ensayos con geometrías sencillas, la geometría de los componentes analizados y que intervienen en el ensayo son muy simples. Suele contarse con soluciones analíticas que permiten obtener el estado de tensiones y deformaciones en la superficie de contacto, lo que simplifica enormemente el estudio del comportamiento de estos componentes en este tipo de ensayos.

Este trabajo se centrará en los ensayos con geometrías sencillas, en concreto en el ensayo de contacto cilíndrico. Para el ensayo de contacto cilíndrico se dispone de soluciones analíticas, con la simplificación añadida de que este problema puede ser tratado de forma bidimensional.

El montaje del ensayo que se tratará será muy similar al montaje de fretting realizado por Nishioka y Hirakawa, Hoepfner y Goss, Nowell y Szolwinski. Se trata una máquina de ensayos que consta de un actuador, el cuál somete a una carga cíclica, de tensión o de torsión, a una probeta.



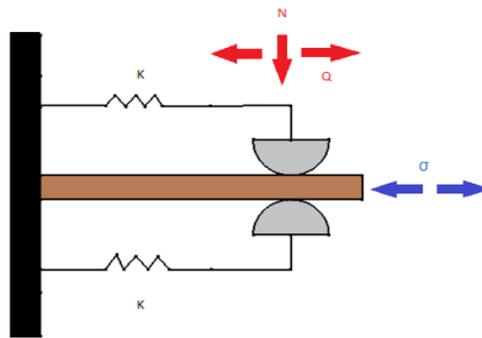
*Fig 1.7 Ensayo de fretting de Nishioka y Hirakawa [1]*

Esta probeta se encuentra cargada lateralmente mediante dos elementos fijos de contacto. Estos elementos de contacto le aplican a la probeta una carga normal constante, de modo que al aplicar el actuador la carga cíclica sobre la probeta, se desarrolla una fuerza tangencial cíclica.

## 2 DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES EN LA SUPERFICIE DE CONTACTO

### 2.1 Ensayo de fatiga por fretting

Se parte del siguiente ensayo de fretting:

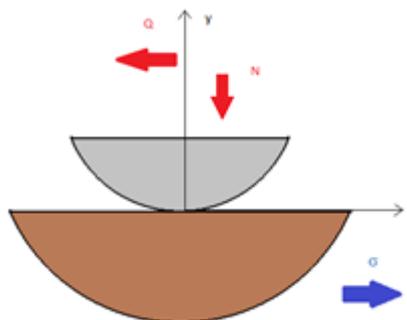


*Fig 2.1 Esquema del ensayo*

Se trata de un ensayo con geometría sencilla, de contacto cilíndrico. Por tanto, es posible obtener soluciones analíticas y tratar el problema de forma bidimensional. Se aplica una carga normal de compresión  $N$  sobre la superficie de contacto. Al mismo tiempo actúa una carga tangencial  $Q$  de sentido variable inducida por la aplicación de una tensión global oscilatoria  $\sigma$ . Por lo tanto, tendremos dos superficies en contacto con desplazamientos relativos entre ellas de pequeña amplitud.

### 2.2 Tensiones en la superficie de contacto de la probeta

[4] El caso a estudiar es el siguiente, de modo que en el borde "a", el límite de la zona de contacto de ambos cilindros, se produzca la apertura de una grieta para posteriormente calcular el f.i.t. Así, una vez iniciada una grieta por efecto de las cargas de contacto  $N$  y  $Q$ , esta podrá propagarse debido a la tensión global oscilatoria  $\sigma$ .



*Fig 2.2 Situación para la apertura de la grieta*

Las tensiones en la superficie de contacto de la probeta son las siguientes:

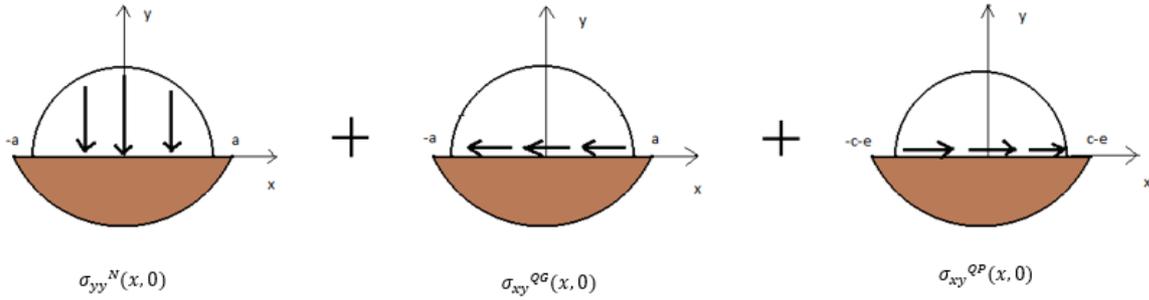


Fig 2.3 Tensiones en la superficie de contacto

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \sigma_{yy}^N(x, 0) = -p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad x \in (-a, a) \quad (1)$$

$$\sigma_{xy}(x, 0) = \begin{cases} \sigma_{xy}^{QG}(x, 0) = -\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, & x \in (-a, a) \\ \sigma_{xy}^{QP}(x, 0) = \mu \cdot p_0 \cdot \frac{c}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x+e}{c}\right)^2}, & x \in (-c-e, c-e) \end{cases} \quad (2)$$

$\sigma_{yy}(x, 0)$  son las tensiones normales de compresión asociadas a la carga normal N, mientras que  $\sigma_{xy}(x, 0)$  son las tensiones tangenciales asociadas a la carga tangencial Q y la tensión global oscilatoria  $\sigma$ , dependiendo además de N. Posteriormente justificaremos estas expresiones para las tensiones superficiales.

La descomposición de las tensiones  $\sigma_{xy}(x, 0)$  en  $\sigma_{xy}^{QG}(x, 0)$  y  $\sigma_{xy}^{QP}(x, 0)$  se debe a considerar el caso de deslizamiento parcial. La superficie de contacto está limitada entre  $-a$  y  $a$ , mientras que la zona adherida está limitada entre  $-c-e$  y  $c-e$ , considerando un desplazamiento “e” debido a la tensión global  $\sigma$ , respecto al caso en que ésta no actúa.

El término  $\sigma_{xy}^{QG}(x, 0)$  representa las tensiones tangenciales producidas sobre la superficie de contacto de la probeta suponiendo el caso deslizamiento global, en que toda la zona de contacto se encuentra deslizando. Para considerar el caso de deslizamiento parcial, en que una parte de la zona de contacto está adherida y otra deslizando, se emplea el término  $\sigma_{xy}^{QP}(x, 0)$ . Esta tensión superficial está orientada en sentido opuesto a la de deslizamiento global, oponiéndose a ella y actuando sobre la zona adherida.

Si no se considera el desplazamiento “e” debido a la tensión global oscilatoria se tendría:

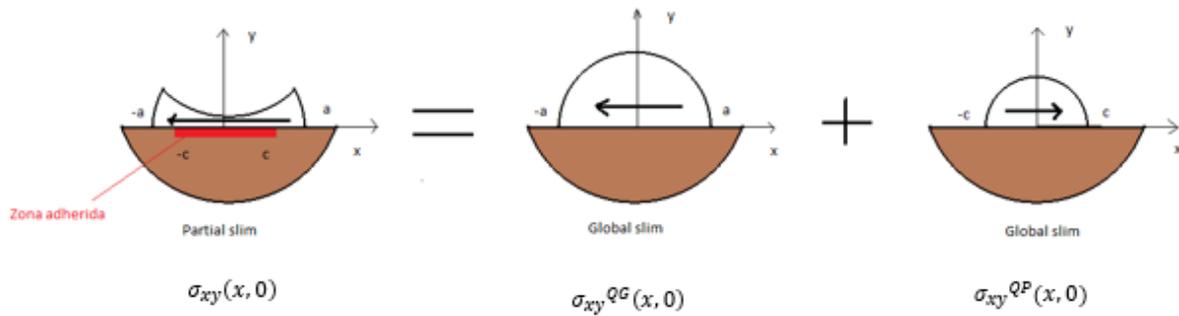


Fig 2.4 Tensiones tangenciales en la superficie de contacto sin considerar e

Si se considera dicho desplazamiento quedará:

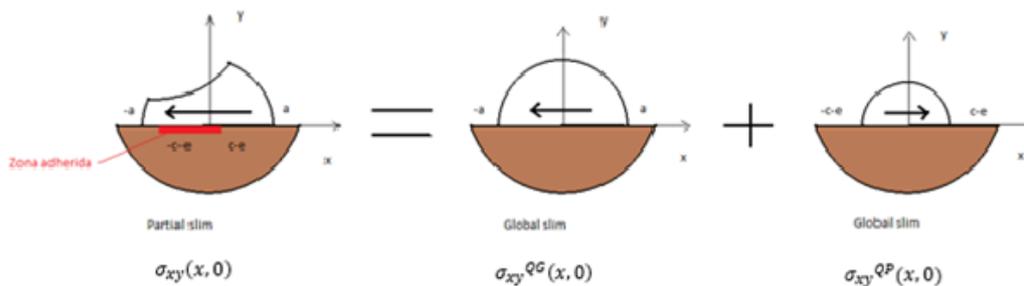


Fig 2.5 Tensiones tangenciales en la superficie de contacto considerando e

[1] Para averiguar si nos encontramos en el caso de deslizamiento global o deslizamiento parcial, y en caso de encontrarnos en el caso de deslizamiento parcial poder cuantificar su severidad, empleamos el término  $Q/N$ .

- Si  $Q/N = \mu$ , estamos en el caso de deslizamiento global.
- Si  $Q/N \leq \mu$ , estamos en el caso de deslizamiento parcial.

Para determinar el desplazamiento “e” de la zona de adhesión debida a la tensión global oscilante  $\sigma$ , en el caso de deslizamiento parcial, respecto a la superficie de contacto, empleamos la siguiente expresión:

$$e = \frac{\sigma \cdot a}{4 \cdot \mu \cdot p_0} \quad (3)$$

[4] Para obtener las expresiones de las tensiones en la superficie de contacto de la probeta se han considerado varios aspectos. En primer lugar, el ensayo que se está analizando es de contacto cilíndrico. Cuando se tienen dos cilindros en contacto de la misma longitud, la parte central se encuentra bajo condiciones de deformación plana, mientras los extremos, al estar libre de acciones de tracción, se encuentran bajo condiciones de tensión plana.

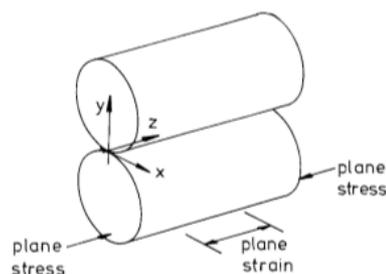


Fig 2.6 Dos cilindros en contacto de la misma longitud [4]

Nos centraremos en la parte central del contacto cilíndrico que se encuentra bajo condiciones de deformación plana, en que la deformación en la dirección  $z$  es despreciable, y la tensión, aplicando la ley de Hooke, puede expresarse como:

$$\sigma_{zz} = \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (4)$$

Por tanto, como se indicó anteriormente, se puede obtener una solución analítica dada la sencillez de la geometría, y trabajar con un problema bidimensional de deformación plana.

### 2.2.1 Expresiones de las tensiones normales de compresión $\sigma_{yy}(x, 0)$ sobre la superficie de contacto de la probeta

[4] Para obtener las expresiones de las tensiones normales en la superficie de contacto de la probeta debido a la carga normal  $N$ ,  $\sigma_{yy}(x, 0)$ , se han tomado 2 hipótesis:

- La carga normal  $N$ , aplicada en la zona de contacto de la probeta de tamaño  $2a$ , es lo suficientemente pequeña para que esta zona de contacto sea menor en comparación con los radios de los cilindros,  $R1$  y  $R2$ . Esta restricción del tamaño de la superficie de contacto también nos permite aproximar los cuerpos en contacto como semiplanos. Además, suponer que el radio de curvatura de la probeta es mucho mayor que la del punzón del ensayo permite expresar la distribución de las tensiones sobre la superficie de contacto de forma parabólica, alcanzándose sus valores máximos en  $x=0$  para el caso de  $\sigma_{yy}(x, 0)$  y  $\sigma_{xy}^{QG}(x, 0)$ , y en  $x=-e$  para el caso  $\sigma_{xy}^{QP}(x, y)$  debido al desplazamiento relativo "e". Estos valores máximos serían respectivamente:  $-p_0$ ,  $-\mu \cdot p_0$ ,  $\mu \cdot p_0 \cdot \frac{c}{a}$ .

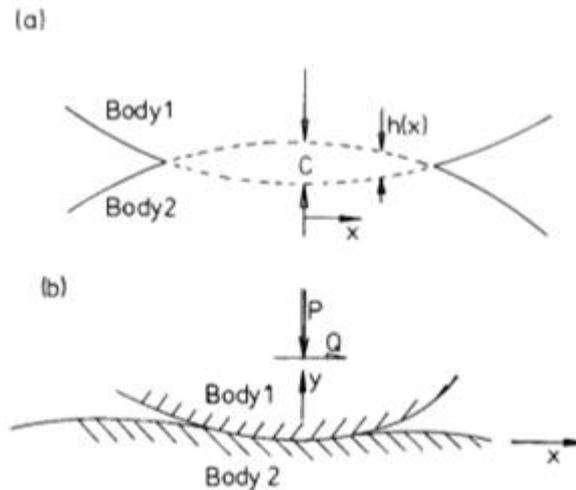


Fig 2.7 Contacto entre los cuerpos [4]

- No deben aparecer tracciones de cizalladura superficial. Esto puede cumplirse de dos modos. O bien ambos cuerpos tienen las mismas constantes elásticas, o bien el coeficiente de fricción debe desaparecer. Se toma la primera opción como verá a continuación.

Operando, se llega a las expresiones:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \sigma_{yy}^N(x, 0) = -p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad x \in (-a, a) \quad (1)$$

$$p_0 = \frac{k \cdot a}{A} \quad (5)$$

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot N \cdot A}{\pi \cdot k}} \quad (6)$$

$$k = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (7)$$

$$A = \frac{1 - \nu_1}{\mu_1} + \frac{1 - \nu_2}{\mu_2} \equiv 2 \cdot \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \quad (8)$$

El signo negativo de la expresión de  $\sigma_{yy}(x, 0)$  se debe a que estas tensiones actúan en sentido opuesto al eje y definido. Para obtener las expresiones de  $k$  y  $A$ , se supondrá que las propiedades mecánicas de los materiales de ambos cilindros son iguales, como se vió que era necesario para el cumplimiento de la segunda hipótesis, y que el radio del cilindro de la probeta sea suficientemente grande, para aproximar el problema al caso degenerado de contacto entre un cilindro y un plano.

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu \quad (9)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu \quad (10)$$

$$E_1 = E_2 = E \quad (11)$$

$$R_2 \gg 1 \quad (12)$$

Finalmente, quedan del siguiente modo:

$$k = \frac{1}{R} \quad (13)$$

$$A = 4 \cdot \left( \frac{1 - \nu^2}{E} \right) \quad (14)$$

Se puede observar como la tensión  $\sigma_{yy}(x, 0)$  depende de la carga normal de compresión aplicada, de las propiedades mecánicas de los materiales y de la geometría de éstos. Además, se puede ver como el tamaño de la superficie de contacto de la probeta depende directamente de la carga aplicada  $N$  y del radio del cilindro de aplicación. De este modo, como se indicó anteriormente, para una carga  $N$  suficientemente pequeña se consigue que esta zona de contacto sea suficientemente pequeña en comparación con los radios de ambos cilindros.

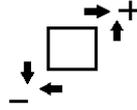
$$\sigma_{yy}(x, 0) = f(N, E, \nu, R, x) \quad (15)$$

## 2.2.2 Expresiones de las tensiones tangenciales $\sigma_{xy}^{QG}(x, 0)$ en la superficie de contacto de la probeta

Sus expresiones son muy similares a las correspondientes a  $\sigma_{yy}(x, 0)$ . A partir de la ley de fricción de Coulomb, que indica que la fuerza de fricción es proporcional a la fuerza normal, e independiente de la velocidad, y que estará aplicada en toda la zona de contacto  $2a$ , para la condición de deslizamiento global, se obtiene:

$$\sigma_{xy}^{QG}(x, 0) = -\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad x \in (-a, a) \quad (2)$$

El signo negativo de esta expresión se debe a la orientación de estas tensiones respecto al sistema de referencia escogido.



### 2.2.3 Expresiones de las tensiones tangenciales $\sigma_{xy}^{QP}(x, y)$ en la superficie de adherida de la probeta

La expresión de las tensiones  $\sigma_{xy}^{QP}(x, 0)$ , cuya contribución junto a  $\sigma_{xy}^{QG}(x, y)$  definen las tensiones tangenciales en la superficie de contacto debido a las cargas Q y N, y la tensión global cíclica  $\sigma$ , bajo condiciones de deslizamiento parcial es la siguiente:

$$\sigma_{xy}^{QP}(x, 0) = \mu \cdot p_0 \cdot \frac{c}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x+e}{c}\right)^2}, \quad x \in (-c-e, c-e) \quad (2)$$

Se puede observar que estas tensiones solo actúan en la zona adherida, de tamaño  $2c$ , que está desplazada una distancia “e” respecto al caso en que no actúa la tensión global  $\sigma$ . Cabe destacar:

- El término  $\frac{c}{a}$  se emplea para que los valores de estas tensiones  $\sigma_{xy}^{QP}(x, y)$  sean proporcionales a la zona adherida de tamaño  $2c$  en la que actúan, respecto a la que le correspondería si actuase sobre toda la zona de contacto de tamaño  $2a$ .
- El término  $x+e$  indica que la distribución parabólica de estas tensiones está desplazada una distancia “e”, alcanzando su valor máximo en  $x=-e$ .
- El signo positivo se debe a que se opone a las tensiones correspondientes al caso de deslizamiento global antes descrito.

Por otro lado, el valor de “c” que caracteriza la zona adherida se obtiene de la siguiente expresión:

$$c = a \cdot \sqrt{1 - \left| \frac{Q}{\mu \cdot N} \right|} \quad (16)$$

Además, como señalamos anteriormente, el desplazamiento “e” debido a la tensión global se puede obtener a partir de:

$$e = \frac{\sigma \cdot a}{4 \cdot \mu \cdot p_0} \quad (3)$$

Como se vió antes, la relación  $Q/(\mu \cdot N)$  determina la condición de deslizamiento global o parcial, y cuantifica la severidad de este último.

- Si  $\frac{Q}{\mu \cdot N} \ll 1 \rightarrow c \approx a$ , de modo que la zona adherida será prácticamente toda la superficie de contacto. Para un valor muy pequeño de la carga tangencial Q, respecto a un valor fijado de la carga normal N, nos encontraríamos en el caso de deslizamiento parcial con una gran superficie adherida.
- Si  $\frac{Q}{\mu \cdot N} \approx 1 \rightarrow c \approx 0$ , de modo que la zona adherida es despreciable, y nos encontraríamos en el caso de deslizamiento global.

Por tanto, un valor alto de Q facilita el deslizamiento, mientras que un valor bajo lo impide. Además, un valor alto del coeficiente de rozamiento y de la carga normal N favorece el caso de deslizamiento parcial.

Por otro lado, el desplazamiento “e” solo depende de la tensión global oscilatoria  $\sigma$  y la carga axial N, no dependiendo de la carga tangencial Q. Este desplazamiento será mayor cuanto más grande sea esta tensión  $\sigma$ .

Por tanto, se llega a la conclusión de que es la relación entre las cargas Q y N las que determinan el deslizamiento, mientras que es la tensión global  $\sigma$  y la carga axial N las que condicionan el desplazamiento “e”.

Además, se puede observar que respecto las cargas Q y N y la tensión  $\sigma$  se cumple lo siguiente:

- La tensión  $\sigma_{yy}(x, 0)$  solo depende de la carga N.
- La tensión  $\sigma_{xy}^{QG}(x, 0)$  solo depende de la carga N.
- La tensión  $\sigma_{xy}^{QP}(x, 0)$  depende de la cargas N y Q, y la tensión  $\sigma$ .

Así pues:

- La carga N determina la magnitud del valor de estas tensiones, la condición de deslizamiento global o parcial, y la severidad de esta última si procede, y el desplazamiento “e” producido.
- La carga Q determina la condición de deslizamiento global y parcial, y la severidad de esta última si procede.
- La tensión global oscilatoria  $\sigma$  determina el desplazamiento “e” producido.



## 3 CÁLCULO DEL CAMPO DE TENSIONES INTERIOR A LA PROBETA

La siguiente tarea será calcular el campo de tensiones interior de la probeta. Se realizará mediante dos métodos diferentes. En primer lugar, se utilizarán las ecuaciones de Flamant y después, se empleará una serie de expresiones analíticas.

Las ecuaciones de Flamant requieren de integración numérica, lo que permite obtener resultados con gran precisión, pero con tiempos de procesamiento muy grandes. Es útil para calcular el campo de tensiones en un punto en concreto del interior de la probeta. Sin embargo, si se emplea este método para calcular el tensor en una serie de puntos, como se necesitará para calcular posteriormente el f.i.t., el tiempo de espera sería demasiado grande.

Para subsanar este problema y reducir el tiempo de procesamiento, se empleará una serie de expresiones analíticas aplicables a nuestro problema.

Por tanto, será el segundo método el que se empleará en las siguientes tareas de nuestro trabajo, empleando los resultados obtenidos con las ecuaciones de Flamant para comprobar que los resultados obtenidos para el tensor de tensiones mediante las expresiones analíticas en un cierto punto interior a la probeta son correctos.

### 3.1 Ecuaciones de Flamant

[5] Este método permite calcular todas las componentes del campo de tensiones interior en los problemas de contacto plano, cuando la distribución de tensiones es conocida en la superficie de contacto. Este método es aplicable cuando los cuerpos en contacto presentan un comportamiento elástico e isotrópico, idénticas propiedades mecánicas y pueden ser modelados como semiplanos elásticos.

Por tanto, se parte de las distribuciones de tensiones normales y tangenciales en la superficie de contacto  $\sigma_{yy}(x, 0)$  y  $\sigma_{xy}(x, 0)$  anteriormente definidas.

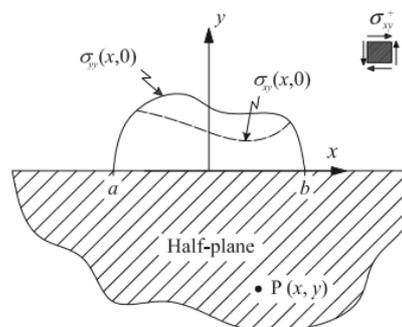


Fig 3.1 Semiplano sometido a una distribución de tensiones normal y tangencial [5]

Estas ecuaciones son:

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{2 \cdot y}{\pi} \cdot \int_{\text{contact}} \frac{\sigma_{yy}(s, 0) \cdot (x-s)^2}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds - \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\text{contact}} \frac{\sigma_{xy}(s, 0) \cdot (x-s)^3}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds \quad (17)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = -\frac{2 \cdot y^3}{\pi} \cdot \int_{\text{contact}} \frac{\sigma_{yy}(s, 0)}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds - \frac{2 \cdot y^2}{\pi} \cdot \int_{\text{contact}} \frac{\sigma_{xy}(s, 0) \cdot (x-s)}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds \quad (18)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = -\frac{2 \cdot y^2}{\pi} \cdot \int_{\text{contact}} \frac{\sigma_{yy}(s, 0) \cdot (x-s)}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds - \frac{2 \cdot y}{\pi} \cdot \int_{\text{contact}} \frac{\sigma_{xy}(s, 0) \cdot (x-s)^2}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds \quad (19)$$

$$\sigma_{zz}(x, y) = \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (20)$$

$$\sigma_{xz}(x, y) = \sigma_{zx}(x, y) = \sigma_{yz}(x, y) = \sigma_{zy}(x, y) = 0 \quad (21)$$

Particularizando estas expresiones para nuestro caso, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) = & -\frac{2 \cdot y}{\pi} \cdot \int_{-a}^a -p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} \cdot \frac{(x-s)^2}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds - \frac{2}{\pi} \\ & \cdot \left\{ \int_{-a}^{-c-e} \left[ -\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} \right] \cdot \frac{(x-s)^3}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds \right. \\ & + \int_{-c-e}^{c-e} \left[ -\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} + \mu \cdot p_0 \cdot \frac{c}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s+e}{c}\right)^2} \right] \cdot \frac{(x-s)^3}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds \\ & \left. + \int_{c-e}^a \left[ -\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} \right] \cdot \frac{(x-s)^3}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, y) = & -\frac{2 \cdot y^3}{\pi} \cdot \int_{-a}^a -p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds - \frac{2 \cdot y^2}{\pi} \\ & \cdot \left\{ \int_{-a}^{-c-e} \left[ -\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} \right] \cdot \frac{(x-s)}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds \right. \\ & + \int_{-c-e}^{c-e} \left[ -\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} + \mu \cdot p_0 \cdot \frac{c}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s+e}{c}\right)^2} \right] \cdot \frac{(x-s)}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds \\ & \left. + \int_{c-e}^a \left[ -\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} \right] \cdot \frac{(x-s)}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}(x, y) = & -\frac{2 \cdot y^2}{\pi} \cdot \int_{-a}^a -p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} \cdot \frac{(x-s)}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds - \frac{2 \cdot y}{\pi} \\
& \cdot \left\{ \int_{-a}^{-c-e} \left[ -\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} \right] \cdot \frac{(x-s)^2}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds \right. \\
& + \int_{-c-e}^{c-e} \left[ -\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} + \mu \cdot p_0 \cdot \frac{c}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s+e}{c}\right)^2} \right] \cdot \frac{(x-s)^2}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds \\
& \left. + \int_{c-e}^a \left[ -\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2} \right] \cdot \frac{(x-s)^2}{((x-s)^2 + y^2)^2} \cdot ds \right\} \quad (24)
\end{aligned}$$

Mediante estas expresiones se elabora un programa de MATLAB (Flamant.m adjunto en los anexos) que permite calcular el campo de tensiones completo en un punto interior P (x, y) a partir de unos valores de entrada de las cargas normal N, tangencial Q y cíclica global  $\sigma$ , el coeficiente de fricción  $\mu$  en la superficie de contacto, las propiedades mecánicas de ambos materiales (El módulo de Young E y el coeficiente de Poisson  $\nu$ ) y la geometría del cilindro (Su radio R).

$$\sigma(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{bmatrix} \quad (25)$$

### 3.2 Ecuaciones analíticas

[4] Conocida la distribución de tensiones en la superficie de contacto, producida bajo el caso de contacto cilíndrico, como es nuestro caso, se puede encontrar una solución para el campo de tensiones interior. Esta solución, alternativa a la dada mediante los potenciales de Muskhelishvili, y basada en el caso general elíptico, fue publicada por Sackfield y Hills en 1983.

Estas ecuaciones particularizadas para nuestro caso quedan:

**Cálculo del tensor  $\bar{\sigma}^N(x, y)$  debido a  $\sigma_{yy}^N(x, 0) = -p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ ;  $x \in [-a, a]$**

$$\bar{x} = \frac{x}{a}; \quad \bar{y} = \frac{y}{a}; \quad \bar{s} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left\{ -(1 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2) + \sqrt{(1 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2)^2 + 4 \cdot \bar{y}^2} \right\}} \quad (26)$$

$$\sigma_{xx}^N(x, y) = \left\{ p_0 \cdot \bar{y} \cdot \left[ 2 - \frac{\bar{s}}{\sqrt{1 + \bar{s}^2}} - \frac{\sqrt{1 + \bar{s}^2}}{\bar{s}} - \frac{\bar{x}^2 \cdot \bar{s}^3}{(1 + \bar{s}^2)^2 \cdot (\bar{s}^4 + \bar{y}^2)} \right] \right\} \cdot (-1) \quad (27)$$

$$\sigma_{yy}^N(x, y) = \left\{ -p_0 \cdot \frac{\bar{y}^3 \cdot \sqrt{1 + \bar{s}^2}}{\bar{s} \cdot (\bar{s}^4 + \bar{y}^2)} \right\} \cdot (-1) \quad (28)$$

$$\sigma_{xy}^N(x, y) = \left\{ -p_0 \cdot \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}^2 \cdot \bar{s}}{\sqrt{1 + \bar{s}^2} \cdot (\bar{s}^4 + \bar{y}^2)} \right\} \cdot (-1) \quad (29)$$

$$\sigma_{zz}^N(x, y) = \left\{ -2 \cdot p_0 \cdot \nu \cdot \bar{y} \cdot \left[ \frac{\sqrt{1 + \bar{s}^2}}{\bar{s}} - 1 \right] \right\} \cdot (-1) = \nu \cdot (\sigma_{xx}^N + \sigma_{yy}^N) \quad (30)$$

$$\sigma_{xz}^N = \sigma_{zx}^N = \sigma_{yz}^N = \sigma_{zy}^N = 0 \quad (31)$$

**Cálculo del tensor  $\bar{\sigma}^{QG}(x, y)$  debido a  $\sigma_{xy}^{QG}(x, 0) = -\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ ;  $x \in [-a, a]$**

$$\bar{x} = \frac{x}{a}; \bar{y} = \frac{y}{a}; \bar{s} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left\{ -(1 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2) + \sqrt{(1 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2)^2 + 4 \cdot \bar{y}^2} \right\}} \quad (32)$$

$$\sigma_{xx}^{QG}(x, y) = \left\{ -2 \cdot \mu \cdot p_0 \cdot \bar{x} \cdot \left[ 1 - \frac{\bar{s}}{\sqrt{1 + \bar{s}^2}} \right] + \mu \cdot p_0 \cdot \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}^2 \cdot \bar{s}}{\sqrt{1 + \bar{s}^2} \cdot (\bar{s}^4 + \bar{y}^2)} \right\} \cdot (-1) \quad (33)$$

$$\sigma_{yy}^{QG}(x, y) = \left\{ -\mu \cdot p_0 \cdot \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}^2 \cdot \bar{s}}{\sqrt{1 + \bar{s}^2} \cdot (\bar{s}^4 + \bar{y}^2)} \right\} \cdot (-1) \quad (34)$$

$$\sigma_{xy}^{QG}(x, y) = \left\{ \mu \cdot p_0 \cdot \bar{y} \cdot \left[ 2 - \frac{\bar{s}}{\sqrt{1 + \bar{s}^2}} - \frac{\sqrt{1 + \bar{s}^2}}{\bar{s}} - \frac{\bar{x}^2 \cdot \bar{s}^3}{(1 + \bar{s}^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (\bar{s}^4 + \bar{y}^2)} \right] \right\} \cdot (-1) \quad (35)$$

$$\sigma_{zz}^{QG}(x, y) = \left\{ -2 \cdot \mu \cdot p_0 \cdot \bar{x} \cdot \left[ 1 - \frac{\bar{s}}{\sqrt{1 + \bar{s}^2}} \right] \right\} \cdot (-1) \quad (36)$$

$$\sigma_{xz}^{QG} = \sigma_{zx}^{QG} = \sigma_{yz}^{QG} = \sigma_{zy}^{QG} = 0 \quad (37)$$

**Cálculo del tensor  $\bar{\sigma}^{QP}(x, y)$  debido a  $\sigma_{xy}^{QP}(x, 0) = \mu \cdot p_0 \cdot \frac{c}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x+e}{c}\right)^2}$ ;  $x \in [-c - e, c - e]$**

$$\tilde{x} = \frac{x+e}{c}; \tilde{y} = \frac{y}{c}; \tilde{s} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left\{ -(1 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2) + \sqrt{(1 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)^2 + 4 \cdot \tilde{y}^2} \right\}} \quad (38)$$

$$\sigma_{xx}^{QP}(x, y) = \left\{ -2 \cdot \tilde{x} \cdot \mu \cdot \left(\frac{-p_0 \cdot c}{a}\right) \cdot \left[ 1 - \frac{\tilde{s}}{\sqrt{1 + \tilde{s}^2}} \right] + \mu \cdot \left(\frac{-p_0 \cdot c}{a}\right) \cdot \frac{\tilde{x} \cdot \tilde{y}^2 \cdot \tilde{s}}{\sqrt{1 + \tilde{s}^2} \cdot (\tilde{s}^4 + \tilde{y}^2)} \right\} \cdot (-1) \quad (39)$$

$$\sigma_{yy}^{QP}(x, y) = \left\{ -\mu \cdot \left(\frac{-p_0 \cdot c}{a}\right) \cdot \frac{\tilde{x} \cdot \tilde{y}^2 \cdot \tilde{s}}{\sqrt{1 + \tilde{s}^2} \cdot (\tilde{s}^4 + \tilde{y}^2)} \right\} \cdot (-1) \quad (40)$$

$$\sigma_{xy}^{QP}(x, y) = \left\{ \mu \cdot \left(\frac{-p_0 \cdot c}{a}\right) \cdot \tilde{y} \cdot \left[ 2 - \frac{\tilde{s}}{\sqrt{1 + \tilde{s}^2}} - \frac{\sqrt{1 + \tilde{s}^2}}{\tilde{s}} - \frac{\tilde{x}^2 \cdot \tilde{s}^3}{(1 + \tilde{s}^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (\tilde{s}^4 + \tilde{y}^2)} \right] \right\} \cdot (-1) \quad (41)$$

$$\sigma_{zz}^{QP}(x, y) = \left\{ -2 \cdot \tilde{x} \cdot \mu \cdot \left(\frac{-p_0 \cdot c}{a}\right) \cdot \left[ 1 - \frac{\tilde{s}}{\sqrt{1 + \tilde{s}^2}} \right] \right\} \cdot (-1) \quad (42)$$

$$\sigma_{xz}^{QP} = \sigma_{zx}^{QP} = \sigma_{yz}^{QP} = \sigma_{zy}^{QP} = 0 \quad (43)$$

El campo de tensiones completo en un punto interior será la suma de estos tensores:

$$\sigma(x, y) = \sigma^N(x, y) + \sigma^{QG}(x, y) + \sigma^{QP}(x, y) \quad (44)$$

Mediante las expresiones obtenidas se elabora un programa en MATLAB (tanalitico.m adjunto en los anexos) que permite calcular el campo de tensiones completo en un punto P (x, y) en el interior, partiendo de unos valores de entrada de las cargas normal N, tangencial Q y cíclica global  $\sigma$ , el coeficiente de fricción  $\mu$  en la superficie de contacto, las propiedades mecánicas de los materiales (El coeficiente de Young E y el coeficiente de Poisson  $\nu$ ) y la geometría (El radio R del cilindro).

### 3.3 Comparativa de los resultados

Se han empleado los dos programas para calcular todas las componentes del campo de tensiones en un mismo punto interior a la probeta, bajo las mismas condiciones de cargas, propiedades mecánicas de los materiales y superficies de contacto y geometría, obteniendo unos valores muy aproximados. Cuanto menores son los incrementos tomados en los intervalos de integración en las ecuaciones de Flamant, más próximos se encuentran sus resultados con los obtenidos con las ecuaciones analíticas.

Así pues, se empleará para los próximos apartados el método de las ecuaciones analíticas para calcular el campo de tensiones interior a la probeta. Sin embargo, siendo el objetivo final calcular el  $K_I$  (f.i.t.) solo se calculará la componente  $\sigma_{xx}$  del tensor en el límite de la superficie de contacto,  $x=a$ .



## 4 CÁLCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES

El siguiente paso del trabajo será calcular el factor de intensidad de tensiones  $K_I$  en modo I, que caracteriza la intensidad del campo de tensiones en el borde de la grieta. Aporta dos clases de información:

- Si la grieta es estable.
- La velocidad de propagación de la grieta.

### 4.1 Principio de Bueckner

[6] El principio de Bueckner o principio de superposición permite reducir cualquier problema de un sólido elástico sometido a cargas externas  $\sigma(s)$  con una grieta, a uno en el que las cargas aplicadas aparezcan como una distribución de tracciones a lo largo de las caras de la grieta  $\sigma^G(s)$ .

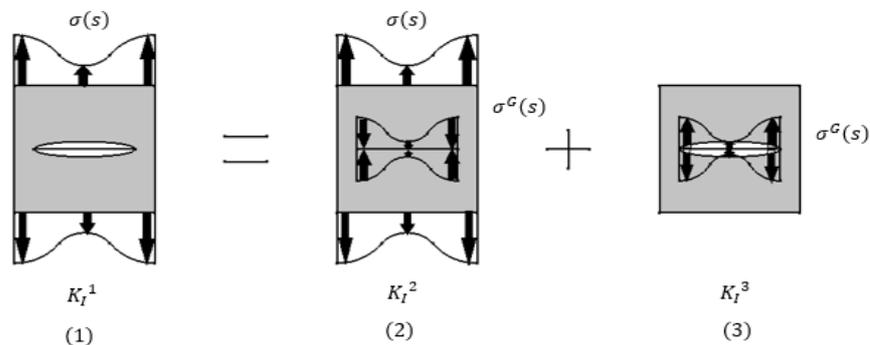


Fig 4.1 Principio de superposición [6]

$$K_I^1 = K_I^2 + K_I^3 \quad (45)$$

El factor de intensidad de tensiones del caso 2 es nulo, pues no hay grieta; por lo que queda:

$$K_I^1 = K_I^3 \quad (46)$$

### 4.2 Funciones de peso

[6] El método de las funciones de peso desarrollado por Bueckner y Rice permite calcular el factor de intensidad de tensiones de un plano con una grieta de longitud “a” bajo un sistema de cargas externo como:

$$K_I = \int_0^a \sigma(s) \cdot h(a, s) \cdot ds \quad (47)$$

Donde  $h(a, s)$  es la función de peso y  $\sigma(s)$  representa la distribución de tensiones en el lugar de la grieta del cuerpo sujeto a un sistema de cargas externo, antes de que se forme la grieta. El principio de Bueckner nos permitiría reducir el problema a estudiar al caso de la grieta sometida a la distribución de tensiones  $\sigma(s)$ .

### 4.3 Particularización

El problema a estudiar es el de una grieta de borde de longitud “ $l$ ” perpendicular al borde de un plano semi-infinito bajo la acción de un par de fuerzas concentradas  $P$ , como puede verse en la siguiente figura:

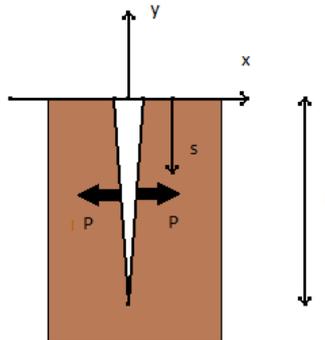


Fig 4.2 Esquema de la grieta de borde bajo un par de cargas puntuales [6]

Bueckner obtuvo la siguiente expresión para el factor de intensidad de tensiones  $K_I$ .

$$K_I = P \cdot \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot (l - s)}} \cdot \left( 1 + 0.6147 \cdot \left( 1 - \frac{s}{l} \right) + 0.2502 \cdot \left( 1 - \frac{s}{l} \right)^2 \right) \right] \quad (48)$$

Sin embargo, realmente estamos interesados en el siguiente caso:

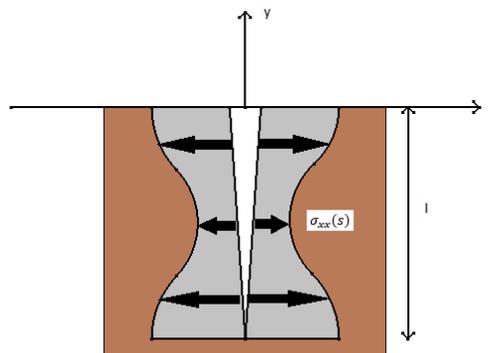


Fig 4.3 Esquema de la grieta de borde bajo una distribución de tensiones [6]

De este modo, la expresión definitiva que se empleará para obtener el factor de intensidad de tensiones será la siguiente:

$$K_I = \int_0^l \sigma_{xx}(a, s) \cdot h(l, s) \cdot ds \quad (49)$$

Donde la componente  $\sigma_{xx}$  del campo de tensiones interior a la probeta es la encargada de abrir la grieta, cuando ésta es evaluada en el límite de la zona de contacto  $x=a$  de los cilindros de nuestro problema, y la función de peso  $h(l, s)$  depende de la longitud de la grieta  $l$  y de la coordenada  $s$  donde se aplica  $\sigma_{xx}(a, s)$ .

$$K_I = \int_0^l \sigma_{xx}(a, s) \cdot \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot (l-s)}} \cdot \left( 1 + 0.6147 \cdot \left( 1 - \frac{s}{l} \right) + 0.2502 \cdot \left( 1 - \frac{s}{l} \right)^2 \right) \right] \cdot ds \quad (50)$$

Esta expresión permite evaluar el valor del  $K_I$  de una grieta de longitud  $l$ , en la que se aplica una distribución de tensiones  $\sigma_{xx}(a, s)$  a lo largo de ella. Sin embargo, se calculará y representará el  $K_I$  para esta grieta cuando la longitud  $l$  varía entre 0 y  $a$ , el valor del límite de la zona de contacto entre ambos cilindros.

Se empleará la función de MATLAB FITgeneral.m adjunta en los anexos para calcular el factor de intensidad de tensiones.

#### 4.4 Adimensionalización de las expresiones y representación de los resultados

A continuación, vamos a adimensionalizar las expresiones que definen el factor de intensidad de tensiones asociado a cada una de las tensiones  $\sigma_{xx}^N$ ,  $\sigma_{xx}^{QG}$  y  $\sigma_{xx}^{QP}$  por separado, obtenidas mediante el método de las ecuaciones analíticas.

##### 1. $K_I^N$ asociado a $\sigma_{xx}^N$ .

$$\sigma_{xx}^N(a, s) = p_0 \cdot f\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} &= \int_0^l \frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} \left(\frac{s}{a}\right) \cdot \frac{w(s)}{\sqrt{a}} \cdot ds \\ \frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} &= \int_0^l \frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} \left(\frac{s}{a}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l-s}} \cdot \left[ 1 + 0.6147 \cdot \left( 1 - \frac{s}{l} \right) + 0.2502 \cdot \left( 1 - \frac{s}{l} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot ds \\ &= \int_0^l \frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} \left(\frac{s}{a}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l-s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{a}{l}\right)^2 \\ &\quad \cdot \left[ \left(\frac{l}{a}\right)^2 + 0.6147 \cdot \left(\frac{l}{a} - \frac{s}{a}\right) \cdot \frac{l}{a} + 0.2502 \cdot \left(\frac{l}{a} - \frac{s}{a}\right)^2 \right] \cdot ds \\ &= \int_0^l \frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} \left(\frac{s}{a}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{l}{a} - \frac{s}{a}}} \\ &\quad \cdot \left[ \left(\frac{l}{a}\right)^2 + 0.6147 \cdot \left(\frac{l}{a} - \frac{s}{a}\right) \cdot \frac{l}{a} + 0.2502 \cdot \left(\frac{l}{a} - \frac{s}{a}\right)^2 \right] \cdot ds \quad (51) \end{aligned}$$

Se realiza el cambio de variable:

$$s' = \frac{s}{a} \rightarrow ds = a \cdot ds' \quad (52)$$

Se obtiene:

$$\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} = \int_0^{l/a} \frac{\sigma_{xx}^N}{p_0}(s') \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{a}{l}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{l}{a} - s'}} \cdot \left[ \left(\frac{l}{a}\right)^2 + 0.6147 \cdot \left(\frac{l}{a} - s'\right) \cdot \frac{l}{a} + 0.2502 \cdot \left(\frac{l}{a} - s'\right)^2 \right] \cdot ds' = f\left(\frac{l}{a}\right) \quad (53)$$

Se representa  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente  $\frac{l}{a}$ , de modo que esta gráfica obtenida para el factor de intensidad de tensiones asociado a las tensiones  $\sigma_{xx}^N$  es única. Se obtiene:

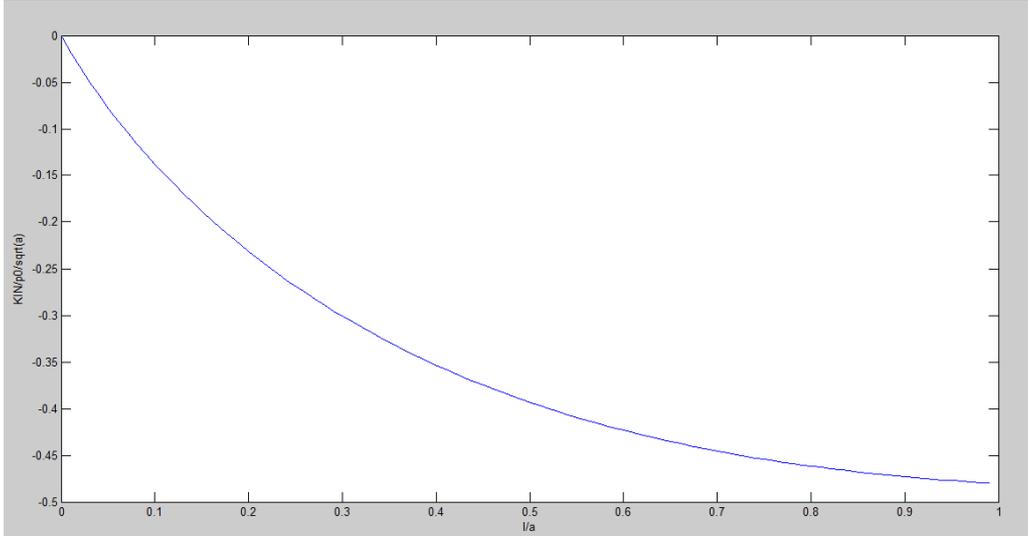


Fig 4.4 Gráfica de  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente  $\frac{l}{a}$

El valor del factor de intensidad de tensiones  $K_I^N$  asociado a  $\sigma_{xx}^N$  se comporta de forma asintótica. Parte de un valor inicial cero, para el caso de que la longitud de la grieta de borde se aproxima a cero. Finalmente, tiende a un valor negativo constante cuando la longitud de la grieta de borde se aproxima al valor de la longitud de la zona de contacto de los cilindros “a”.

$$\begin{cases} \frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} \rightarrow 0 \text{ cuando } l \rightarrow 0 \\ \frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} \rightarrow -0.5 \text{ cuando } l \rightarrow a \\ K_I^N < 0 \end{cases} \quad (54)$$

Que el valor de  $K_I^N$  sea negativo nos indica que la componente  $\sigma_{xx}^N$  tiende a cerrar la grieta.

## 2. $K_I^{QG}$ asociado a $\sigma_{xx}^{QG}$ .

$$\sigma_{xx}^{QG}(a, s) = \mu \cdot p_0 \cdot f\left(\frac{s}{a}\right) \quad (55)$$

$$\frac{K_I^{QG}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} = \int_0^l \frac{\sigma_{xx}^{QG}}{\mu \cdot p_0}\left(\frac{s}{a}\right) \cdot \frac{w(s)}{\sqrt{a}} \cdot ds \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \frac{K_I^N}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} &= \int_0^l \frac{\sigma_{xx}^{QG}}{\mu \cdot p_0} \left(\frac{s}{a}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l-s}} \cdot \left[1 + 0.6147 \cdot \left(1 - \frac{s}{l}\right) + 0.2502 \cdot \left(1 - \frac{s}{l}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot ds \\ &= \int_0^l \frac{\sigma_{xx}^N}{\mu \cdot p_0} \left(\frac{s}{a}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{l}{a} - \frac{s}{a}}} \\ &\quad \cdot \left[\left(\frac{l}{a}\right)^2 + 0.6147 \cdot \left(\frac{l}{a} - \frac{s}{a}\right) \cdot \frac{l}{a} + 0.2502 \cdot \left(\frac{l}{a} - \frac{s}{a}\right)^2\right] \cdot ds \quad (57) \end{aligned}$$

Se realiza el cambio de variable:

$$s' = \frac{s}{a} \rightarrow ds = a \cdot ds' \quad (58)$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{K_I^{QG}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} &= \int_0^{l/a} \frac{\sigma_{xx}^N}{\mu \cdot p_0} (s') \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{a}{l}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{l}{a} - s'}} \\ &\quad \cdot \left[\left(\frac{l}{a}\right)^2 + 0.6147 \cdot \left(\frac{l}{a} - s'\right) \cdot \frac{l}{a} + 0.2502 \cdot \left(\frac{l}{a} - s'\right)^2\right] \cdot ds' = f\left(\frac{l}{a}\right) \quad (59) \end{aligned}$$

Se representa  $\frac{K_I^{QG}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente  $\frac{l}{a}$  de modo que esta gráfica obtenida para el factor de intensidad de tensiones asociado a las tensiones  $\sigma_{xx}^{QG}$  es única. Se obtiene:

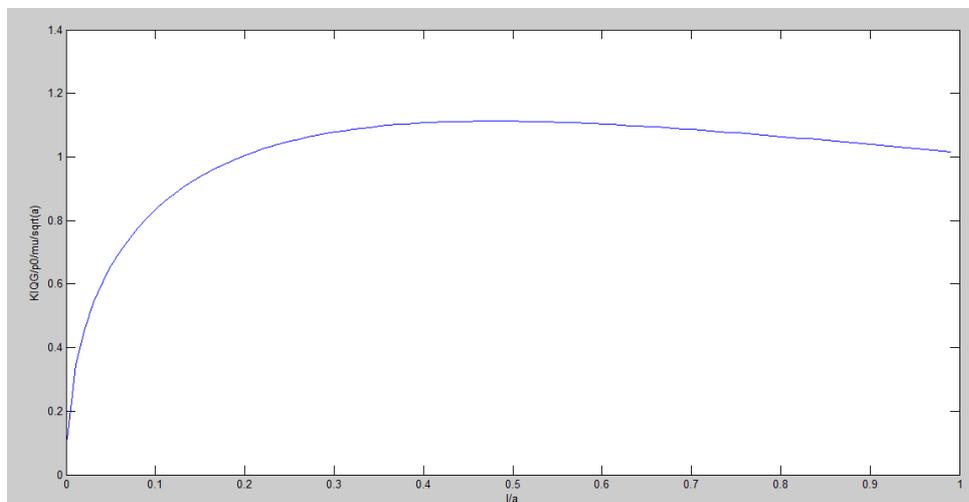


Fig 4.5 Gráfica de  $\frac{K_I^{QG}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente  $\frac{l}{a}$

El valor del factor de intensidad de tensiones  $K_I^{QG}$  asociado a  $\sigma_{xx}^{QG}$  se comporta de forma asintótica, partiendo de un valor inicial nulo para el caso de que la longitud de la grieta de borde se aproxima a cero, tal como ocurría en la gráfica anterior. Sin embargo, ahora tiende a un valor positivo constante de valor unidad cuando la longitud de la grieta de borde se aproxima al valor de la longitud de la zona de contacto de los cilindros a.

$$\begin{cases} \frac{K_I^{QG}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} \rightarrow 0 \text{ cuando } l \rightarrow 0 \\ \frac{K_I^{QG}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} \rightarrow 1 \text{ cuando } l \rightarrow a \\ K_I^{QG} > 0 \end{cases} \quad (60)$$

Que el valor de  $K_I^{QG}$  sea positivo nos indica que la componente  $\sigma_{xx}^{QG}$  tiende a abrir la grieta.

### 3. $K_I^{QP}$ asociado a $\sigma_{xx}^{QP}$ respecto a $\frac{c}{a}$

$$\sigma_{xx}^{QP}(a, s) = \mu \cdot p_0 \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a+e}{c} \cdot f\left(\frac{s}{c}, \frac{a+e}{c}\right) \quad (61)$$

$$\frac{K_I^{QG}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{c}} = \int_0^l \frac{c}{a} \cdot \frac{a+e}{c} \cdot f\left(\frac{s}{c}, \frac{a+e}{c}\right) \cdot \frac{w(s)}{\sqrt{c}} \cdot ds \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{c}} &= \int_0^l \frac{c}{a} \cdot \frac{a+e}{c} \cdot f\left(\frac{s}{c}, \frac{a+e}{c}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l-s}} \cdot \left[1 + 0.6147 \cdot \left(1 - \frac{s}{l}\right) + 0.2502 \cdot \left(1 - \frac{s}{l}\right)^2\right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot ds \\ &= \int_0^l \frac{c}{a} \cdot \frac{a+e}{c} \cdot f\left(\frac{s}{c}, \frac{a+e}{c}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{c}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{l}{c} - \frac{s}{c}}} \\ &\quad \cdot \left[\left(\frac{l}{c}\right)^2 + 0.6147 \cdot \left(\frac{l}{c} - \frac{s}{c}\right) \cdot \frac{l}{c} + 0.2502 \cdot \left(\frac{l}{c} - \frac{s}{c}\right)^2\right] \cdot ds \quad (62) \end{aligned}$$

Se realiza el cambio de variable:

$$s' = \frac{s}{c} \rightarrow ds = c \cdot ds' \quad (63)$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{c}} &= \int_0^{l/c} \frac{c}{a} \cdot \frac{a+e}{c} \cdot f\left(s', \frac{a+e}{c}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{c}{l}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{l}{c} - s'}} \\ &\quad \cdot \left[\left(\frac{l}{c}\right)^2 + 0.6147 \cdot \left(\frac{l}{c} - s'\right) \cdot \frac{l}{c} + 0.2502 \cdot \left(\frac{l}{c} - s'\right)^2\right] \cdot ds' = f\left(\frac{l}{c}, \frac{a}{c}, \frac{a+e}{c}\right) \quad (64) \end{aligned}$$

Para obtener un primer resultado, se supondrá que la excentricidad es nula, cuya contribución a la solución final es pequeña. Ello requerirá que la tensión global oscilatoria también lo sea, según la expresión:

$$e = \frac{\sigma \cdot a}{4 \cdot \mu \cdot p_0} \quad (3)$$

Cabe destacar que la carga tangencial Q debido a  $\sigma$  se está considerando, así como el segmento de superficie adherida comprendida entre  $-c$  y  $c$ . Lo que se está despreciando es el desplazamiento  $e$ , ya que en nuestras ecuaciones partimos de un valor Q de entrada que no es función de  $\sigma$ , aunque se deba a ella, dependiendo solo de la carga global el valor del desplazamiento  $e$ .

De este modo, se simplifica el problema notablemente, obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{c}} &= \int_0^{l/c} f\left(s', \frac{a}{c}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{c}{l}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{l}{c} - s'}} \cdot \left[ \left(\frac{l}{c}\right)^2 + 0.6147 \cdot \left(\frac{l}{c} - s'\right) \cdot \frac{l}{c} + 0.2502 \cdot \left(\frac{l}{c} - s'\right)^2 \right] \cdot ds' \\ &= f\left(\frac{l}{c}, \frac{a}{c}\right) \quad (65) \end{aligned}$$

Por tanto, podemos representar  $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{c}}$  como función de  $\frac{l}{c}$  para varios valores de  $\frac{a}{c}$ , definida ésta última por la expresión:

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left| \frac{Q}{\mu \cdot N} \right|} \quad (16)$$

Operando podemos observar que:

$$\begin{aligned} \frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{c}} &= \frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} \\ \frac{l}{c} &= \frac{l}{a} \cdot \frac{a}{c} \end{aligned}$$

De este modo, al calcular el factor de intensidad de tensiones para varios valores constantes de  $\frac{a}{c}$ , podemos representar  $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para varios valores constantes de  $\frac{a}{c}$ . Así, se obtienen las siguientes gráficas:

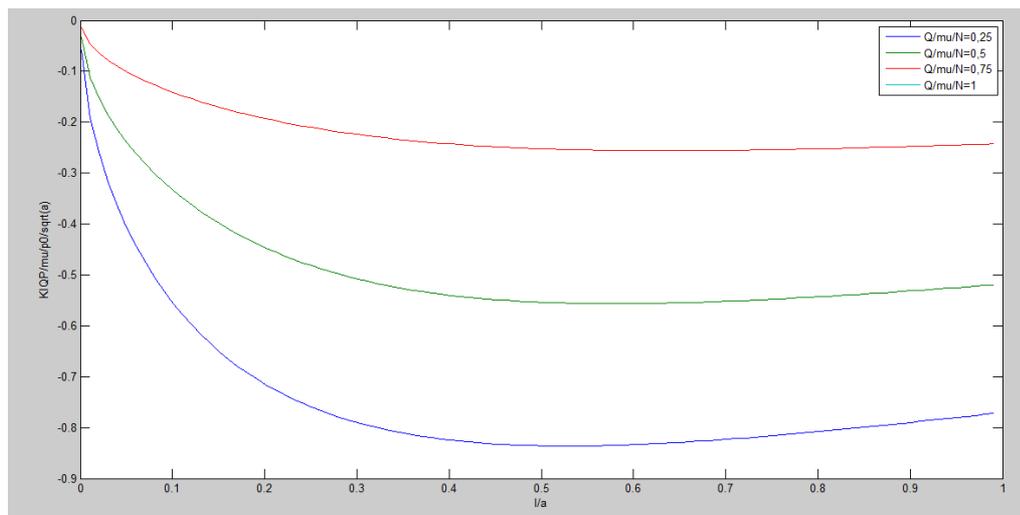


Fig 4.6 Gráfica de  $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25, 0.5, 0.75$  y  $1$

Estos resultados, al igual que los anteriormente presentados, no cambian para modificaciones en las propiedades mecánicas de los materiales ( $E$  y  $\nu$ ) y la geometría ( $R$ ) para unos valores dados de  $\frac{c}{a}$  mientras mantengamos nula la excentricidad, y por tanto la carga global oscilatoria.

Se puede observar como el comportamiento de estas gráficas es distinto al de las dos anteriores. El valor del factor de intensidad de tensiones  $K_I^{QP}$  asociado a las tensiones  $\sigma_{xx}^{QP}$  parte de cero cuando la longitud de la grieta tiende a cero, y finalmente tiende a un valor negativo constante, dependiendo de la relación  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$ , tendiendo a cerrar la grieta. Cuanto mayor es el cociente  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$ , menor es el cociente  $\frac{c}{a}$ . Es decir, que cuanto menor sea el coeficiente de rozamiento de la superficie de contacto, menor será el tamaño de la zona adherida, y por tanto el valor absoluto del factor de intensidad de tensiones asociado al caso de deslizamiento parcial será menor. Por tanto, la curva más alta de la gráfica que corresponde al menor valor del coeficiente de rozamiento tiene una

contribución menor a cerrar la grieta. Los valores alcanzados por  $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  cuando la longitud de la grieta se aproxima a la longitud de la zona de contacto entre cilindros  $a$ , varían entre 0 y -1 para  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$  tendiendo a 1 y a 0 respectivamente (sin zona adherida,  $c=0$ , o con toda la superficie de contacto estando adherida,  $c=a$ ).

A continuación, vamos a representar el factor de intensidad de tensiones asociado a la contribución conjunta de  $\sigma_{xx}^{QG}$ ,  $\sigma_{xx}^{QP}$  y  $\sigma_{xx}^N$ .

#### 4. Representación de $K_I^Q$ respecto a $\frac{c}{a}$

$$K_I^Q = K_I^{QG} + K_I^{QP} \quad (66)$$

Representamos  $\frac{K_I^{QG}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para varios valores de  $\frac{c}{a}$ . Esto es equivalente a representar  $\frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para varios valores de  $\frac{c}{a}$ , estando este último factor de intensidad de tensiones asociado a las tensiones  $\sigma_{xx}^Q = \sigma_{xx}^{QG} + \sigma_{xx}^{QP}$ , cumpliéndose:

$$\frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} = f\left(\frac{l}{a}, \frac{a}{c}\right) \quad (67)$$

Obtenemos:

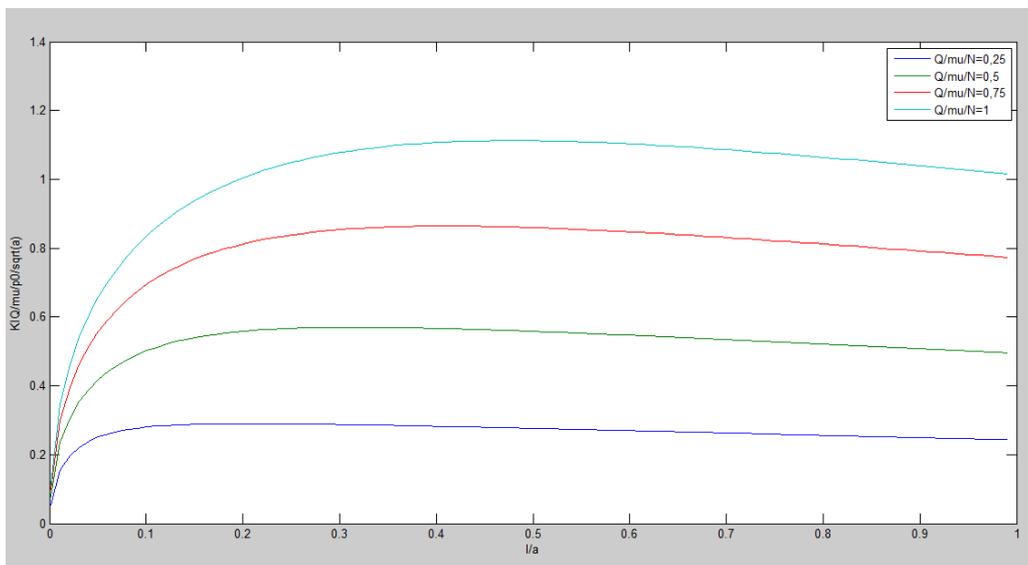


Fig 4.7 Gráfica de  $\frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25, 0.5, 0.75$  y 1

Las gráficas obtenidas son el resultado de la suma de las dos anteriores, correspondientes al caso de deslizamiento global y parcial. Para el caso de que  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$  tienda a cero, la contribución negativa del factor de intensidad de tensiones del caso de deslizamiento parcial es mayor, y por tanto, el valor del factor de intensidades conjuntas  $K_I^Q$  tiende a su menor valor, siendo  $\frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} > 0$  en todo momento.

Por tanto, respecto a la contribución conjunta de  $\sigma_{xx}^Q$ , su factor de intensidad de tensiones asociado  $K_I^Q$  es

siempre positivo, tendiendo a abrir la grieta, siendo mayor su valor cuanto menor es la contribución debida a  $\sigma_{xx}^{QP}$ . Es decir, la apertura de la grieta será mayor cuanto menor sea la zona adherida, y, por tanto, menor sea el coeficiente de rozamiento de la superficie de contacto  $\mu$  o la carga N.

### 5. Representación de $K_I$ respecto a $\frac{c}{a}$

$$K_I = K_I^N + K_I^Q = K_I^N + K_I^{QG} + K_I^{QP} \quad (68)$$

Representamos  $\frac{K_I^N}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^{QG}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para varios valores de  $\frac{c}{a}$ . Esto es equivalente a representar  $\frac{K_I}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para varios valores de  $\frac{c}{a}$ , estando este último factor de intensidad de tensiones asociado a las tensiones  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^N + \sigma_{xx}^{QG} + \sigma_{xx}^{QP}$ . Obtenemos:

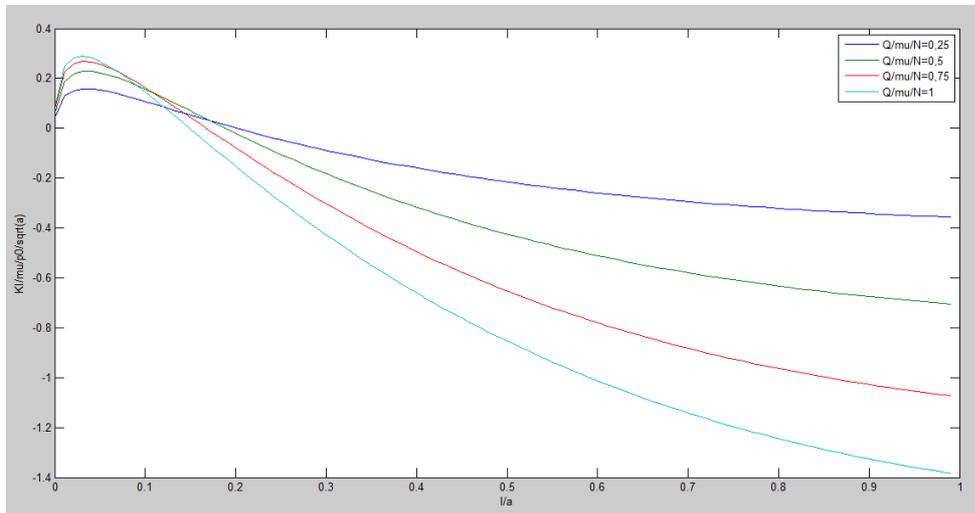


Fig 4.8 Gráfica de  $\frac{K_I}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25, 0.5, 0.75$  y 1

Cabe destacar que variaciones en el coeficiente de fricción  $\mu$  en la superficie de contacto, modifican el término  $\frac{K_I^N}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  aún para un valor constante de  $\frac{c}{a}$ , cumpliéndose:

$$\frac{K_I^N}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} = f(\mu) \quad (69)$$

Por tanto:

$$\frac{K_I}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} = f\left(\mu, \frac{l}{a}, \frac{a}{c}\right) \quad (70)$$

Por ello, vamos a representar  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para varios valores de  $\frac{c}{a}$ , anulándose ahora la dependencia directa con el coeficiente de fricción  $\mu$ .

$$\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} = f\left(\frac{l}{a}, \frac{c}{a}\right) \quad (71)$$

Estas curvas solo dependerán ahora de la relación  $\frac{c}{a}$ . Lo representamos:

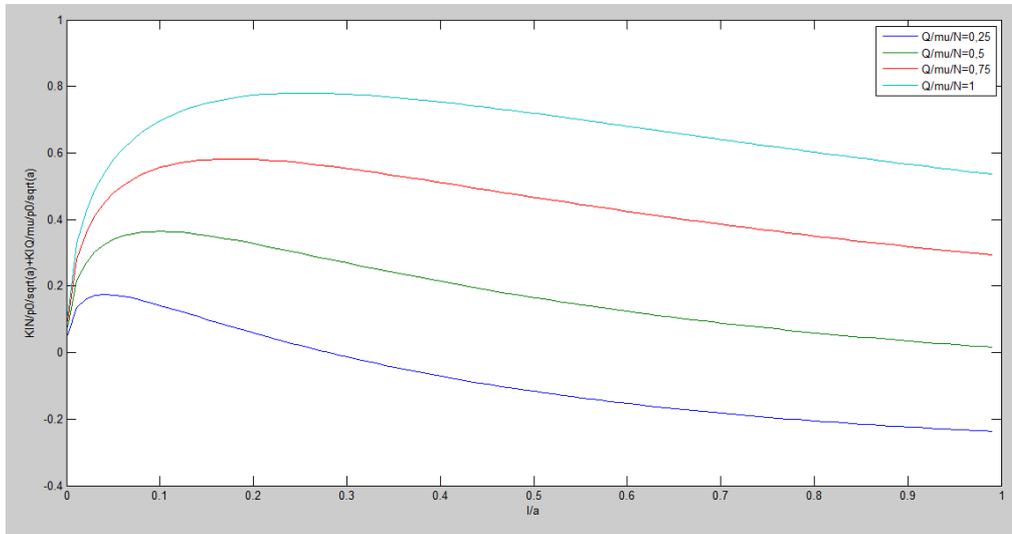


Fig 4.9 Gráfica de  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25, 0.5, 0.75$  y  $1$

Debido a la contribución del factor de intensidad de tensiones asociado a  $\sigma_{xx}^N$  que tomaba valores negativos, el valor del factor de intensidad de tensiones completo  $K_I$  desciende respecto al último que hemos calculado. Se puede observar que a medida que aumenta la longitud de la grieta aumenta el descenso del valor de  $K_I^N$ , y por tanto de  $K_I$ . Así, el comportamiento es el siguiente:

El factor de intensidad de tensiones  $K_I$  parte de cero para una longitud de la grieta nula, y aumenta rápidamente hasta alcanzar su valor máximo para una longitud de la grieta entorno al 20% de  $a$ . A continuación, debido a la mayor contribución negativa de  $K_I^N$ ,  $K_I$  comienza a descender tendiendo a cero para un valor de la longitud de la grieta cercano a  $a$  cuando  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$  es aproximadamente 0.5.

-Para mayores valores de  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$ ,  $K_I$  tiende a un valor positivo cuando la longitud de la grieta tiende a  $a$ , debido a que la contribución negativa de  $K_I^{QP}$  es menor. Por tanto, para valores del coeficiente de rozamiento o la carga  $N$  suficientemente pequeños, la grieta tenderá a abrirse para el rango de valores de la longitud de la grieta comprendidos entre 0 y  $a$ .

-Para menores valores de  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$ ,  $K_I$  tiende a cero antes de alcanzar la longitud de la grieta el valor de  $a$ . Para mayores valores de la longitud de la grieta, ésta tenderá a cerrarse.

## 6) Influencia de la excentricidad y la carga global oscilatoria

Finalmente, se analiza la influencia de la excentricidad y de la carga global oscilatoria. Anteriormente, se llegó a la expresión:

$$\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{c}} = \int_0^{\frac{l}{c}} \frac{c}{a} \cdot \frac{a+e}{c} \cdot f\left(s', \frac{a+e}{c}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{c}{l}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{l}{c} - s'}} \cdot \left[\left(\frac{l}{c}\right)^2 + 0.6147 \cdot \left(\frac{l}{c} - s'\right) \cdot \frac{l}{c} + 0.2502 \cdot \left(\frac{l}{c} - s'\right)^2\right] \cdot ds' = f\left(\frac{l}{c}, \frac{a}{c}, \frac{a+e}{c}\right) \quad (64)$$

Operando:

$$\begin{aligned} \frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{c}} &= f\left(\frac{l}{c}, \frac{a}{c}, \frac{a+e}{c}\right) = f\left(\frac{l}{a} \cdot \frac{a}{c}, \frac{a}{c}, \frac{a+e}{c} + \frac{e}{c}\right) = f\left(\frac{l}{a} \cdot \frac{a}{c}, \frac{a}{c}, \frac{a}{c} + \frac{e}{a} \cdot \frac{a}{c}\right) \\ &= f\left(\frac{l}{a} \cdot \frac{a}{c}, \frac{a}{c}, \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \cdot \frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}\right) = f\left(\frac{l}{a}, \frac{a}{c}, \frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}\right) \quad (65) \end{aligned}$$

Por tanto, si antes se analizó como variaba el factor de intensidad de tensiones de  $K_I$  respecto al tamaño de la superficie adherida a través de  $\frac{c}{a}$  sin la influencia de  $e$ ; a continuación, se analizará como varía  $K_I$  respecto al cociente  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ , para un valor constante dado de  $\frac{c}{a}$ . Cabe destacar que el cociente  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  no puede tomar cualquier valor, sino que éstos están limitados por el cociente  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$ . Debe cumplirse:

$$a > c + e \quad (66)$$

A partir de las expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} &= \sqrt{1 - \frac{Q}{\mu \cdot N}} \quad (16) \\ e &= \frac{a \cdot \sigma}{4 \cdot \mu \cdot p_0} \quad (3) \end{aligned}$$

Se llega a:

$$\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} < 4 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q}{\mu \cdot N}}\right) \quad (67)$$

Por tanto, se va a representar el factor de intensidad de tensiones frente al cociente  $\frac{l}{a}$ , para varios valores de  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  dentro de un rango de valores permitidos para una serie de valores del cociente  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$ . En concreto:

$$\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25 \rightarrow \frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} < 0.535; \text{ Se toma: } \frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.15, 0.3, 0.45 \text{ y } 0.53$$

$$\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5 \rightarrow \frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} < 1.17; \text{ Se toma: } \frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.3, 0.6, 0.9 \text{ y } 1.17$$

$$\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75 \rightarrow \frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} < 2; \text{ Se toma: } \frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.5, 1, 1.5 \text{ y } 2$$

$$\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1 \rightarrow \frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} < 4; \text{ Se toma: } \frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 1, 2, 3 \text{ y } 4$$

Representamos el máximo valor admisible del cociente  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$ . Se obtiene:

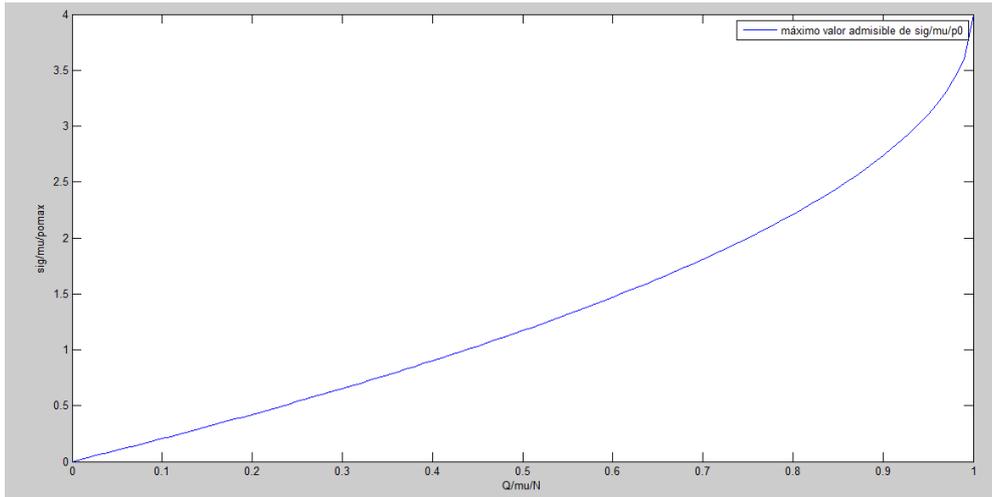


Fig 4.10 Gráfica del máximo valor admisible de  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$

$K_I^{QP}$  asociado a  $\sigma_{xx}^{QP}$  respecto a  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$

Representamos  $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  y varios valores de  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ , en concreto:  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.15, 0.3, 0.45$  y  $0.53$ . Se obtiene:

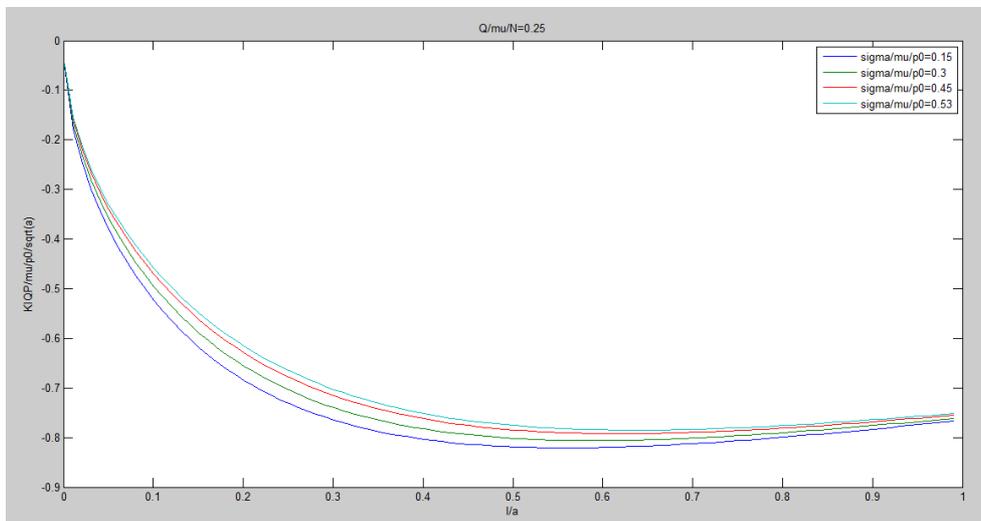


Fig 4.11 Gráfica  $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.15, 0.3, 0.45$  y  $0.53$

Se puede observar como la caída del factor de intensidad de tensiones es menor para mayores valores de la tensión global oscilatoria. Es decir, disminuye la contribución de  $K_I^{QP}$  asociada a  $\sigma_{xx}^{QP}$  para cerrar la grieta.

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$

Representamos  $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  y varios valores de  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ , en concreto:  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.3, 0.6, 0.9$  y  $1.17$ . Se obtiene:

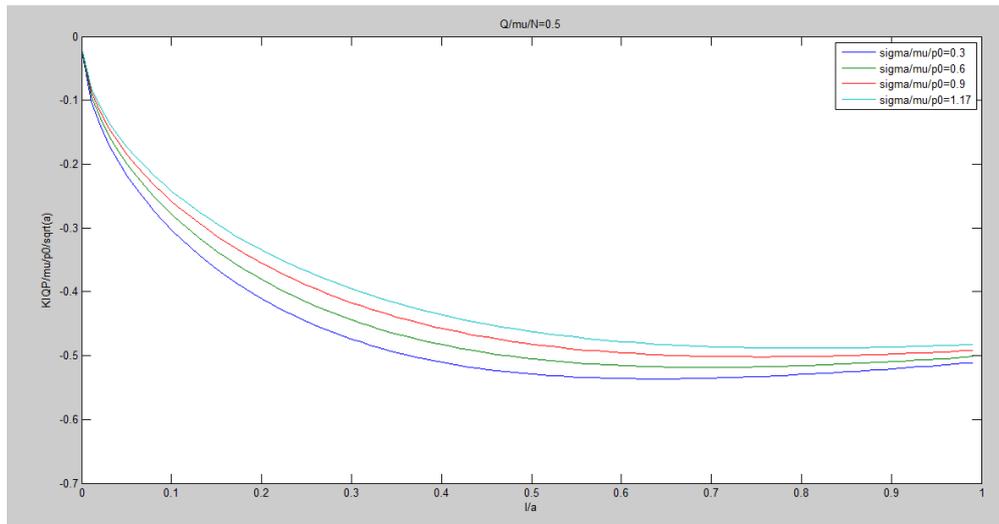


Fig 4.12 Gráfica  $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.3, 0.6, 0.9$  y  $1.17$

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$

Representamos  $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  y varios valores de  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ , en concreto:  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.5, 1, 1.5$  y  $2$ . Se obtiene:

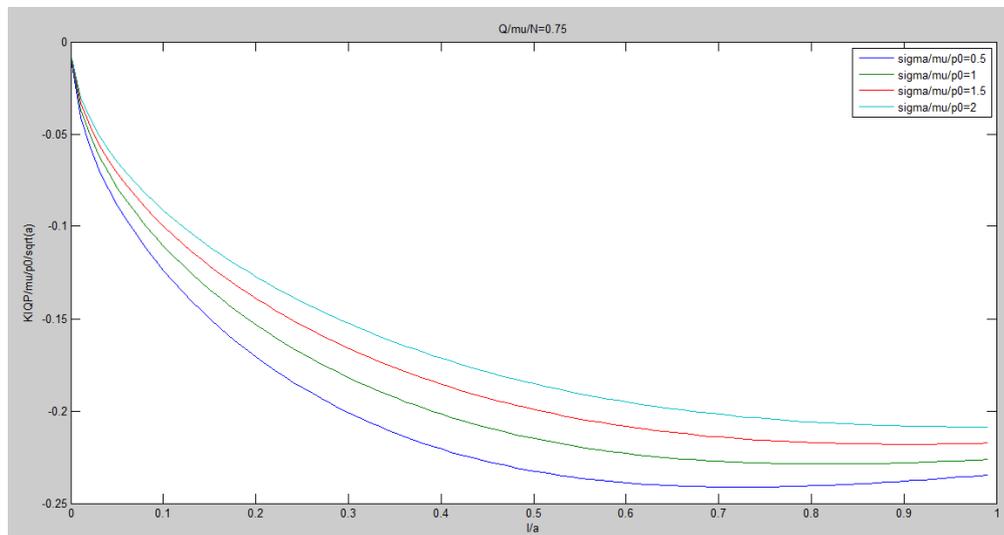


Fig 4.13 Gráfica  $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.5, 1, 1.5$  y  $2$

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$

Representamos  $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  y varios valores de  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ , en concreto:  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 1, 2, 3$  y  $4$ . Se obtiene:

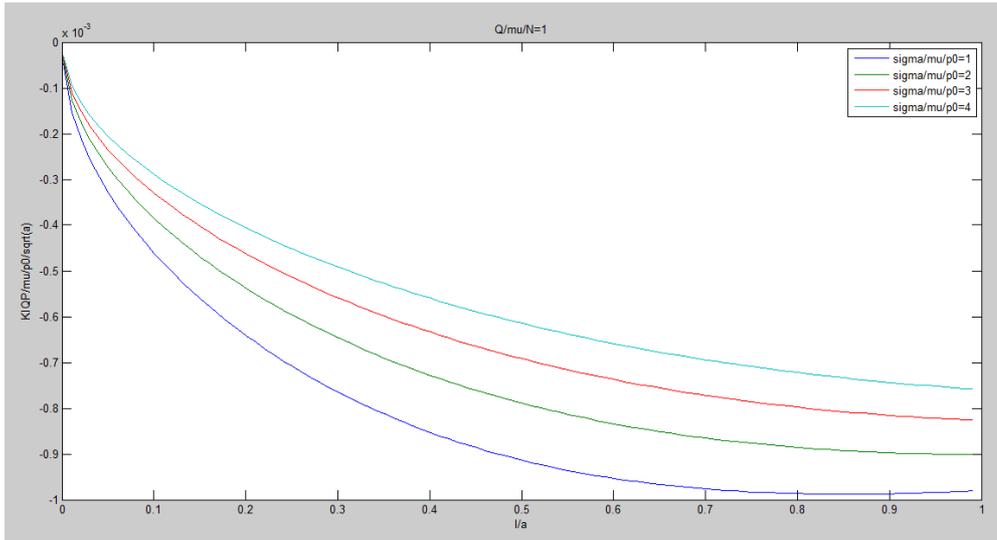


Fig 4.14 Gráfica  $\frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 1, 2, 3$  y  $4$

Se puede observar como el aumento de la tensión global oscilatoria disminuye la contribución negativa de las tensiones asociadas al deslizamiento parcial. Además, se ve como el aumento del cociente  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$  disminuye también esta contribución a impedir la apertura de la grieta.

**Representación de  $K_I^Q$  respecto a  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$**

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$

Representamos  $\frac{K_I^{QG}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^{QP}}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ , o lo que es lo mismo,  $\frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$ , frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.15, 0.3, 0.45$  y  $0.53$ . Se obtiene:

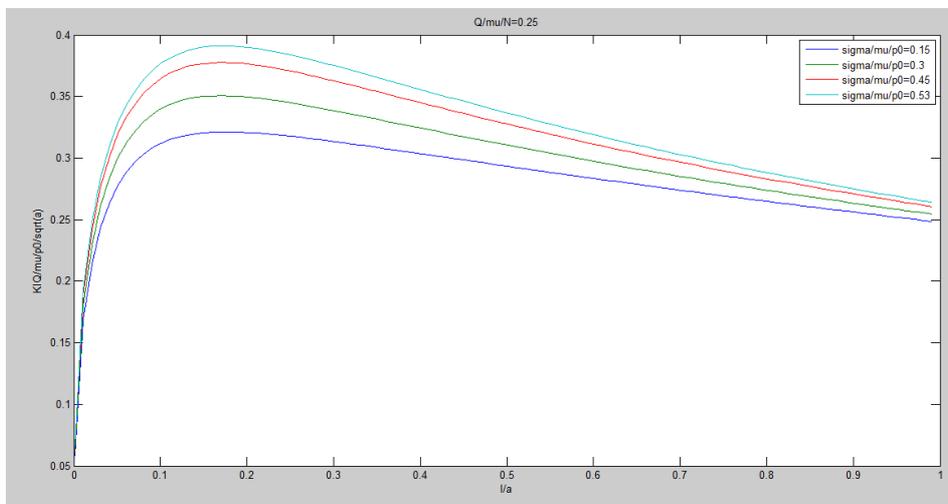


Fig 4.15 Gráfica  $\frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.15, 0.3, 0.45$  y  $0.53$

Se puede observar como la tensión global oscilatoria tiende a aumentar el valor del factor de intensidad de tensiones, de modo que favorece el crecimiento de la grieta.

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$

Representamos  $\frac{K_I Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.3, 0.6, 0.9$  y  $1.17$ . Se obtiene:

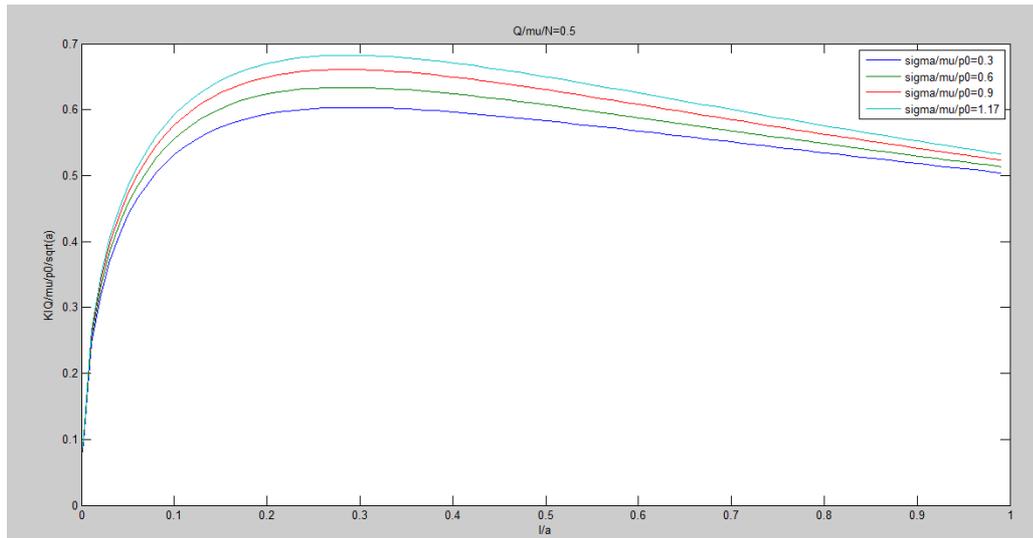


Fig 4.16 Gráfica  $\frac{K_I Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.3, 0.6, 0.9$  y  $1.17$

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$

Representamos  $\frac{K_I Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.5, 1, 1.5$  y  $2$ . Se obtiene:

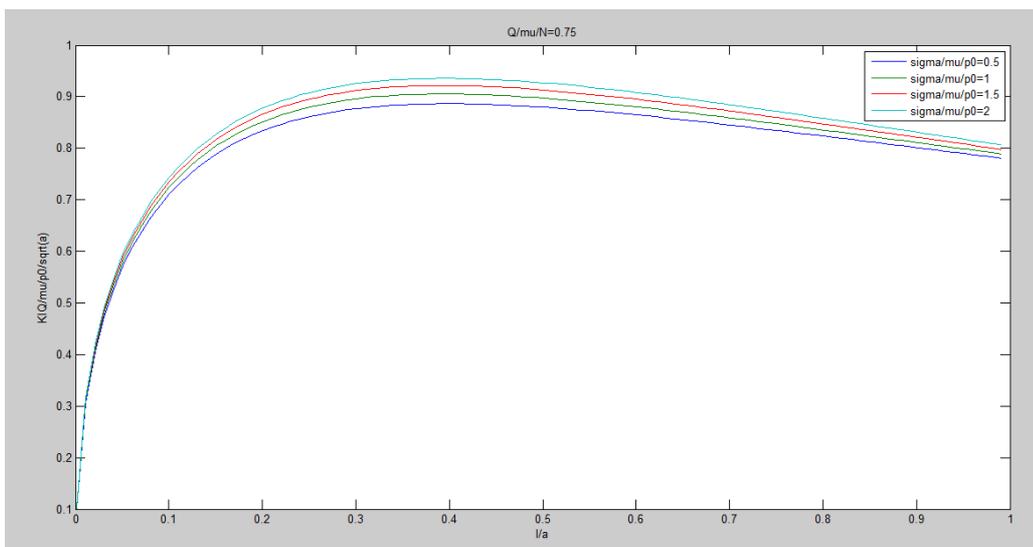


Fig 4.17 Gráfica  $\frac{K_I Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.5, 1, 1.5$  y  $2$

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$

Representamos  $\frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 1, 2, 3$  y  $4$ . Se obtiene:

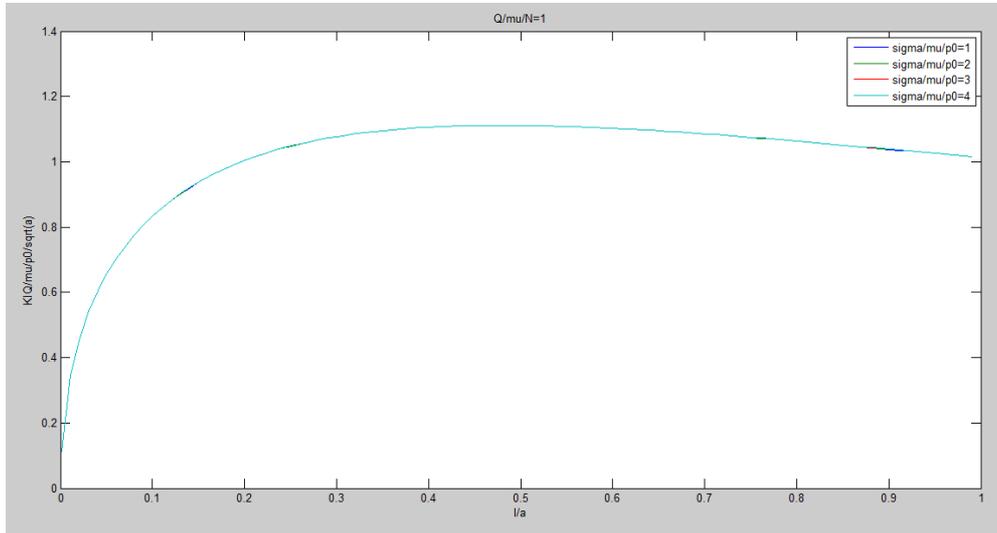


Fig 4.18 Gráfica  $\frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 1, 2, 3$  y  $4$

Al aumentar el cociente  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$  se reduce la contribución a cerrar la grieta de las tensiones asociadas al caso de deslizamiento parcial, es decir, la zona adherida es más pequeña. Por tanto, las diferencias entre las curvas asociadas a  $K_I^Q$  debido a diferentes valores de  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  son menores.

**Representación de  $K_I$  respecto a  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$**

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$

Representamos  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.15, 0.3, 0.45$  y  $0.53$ . Se obtiene:

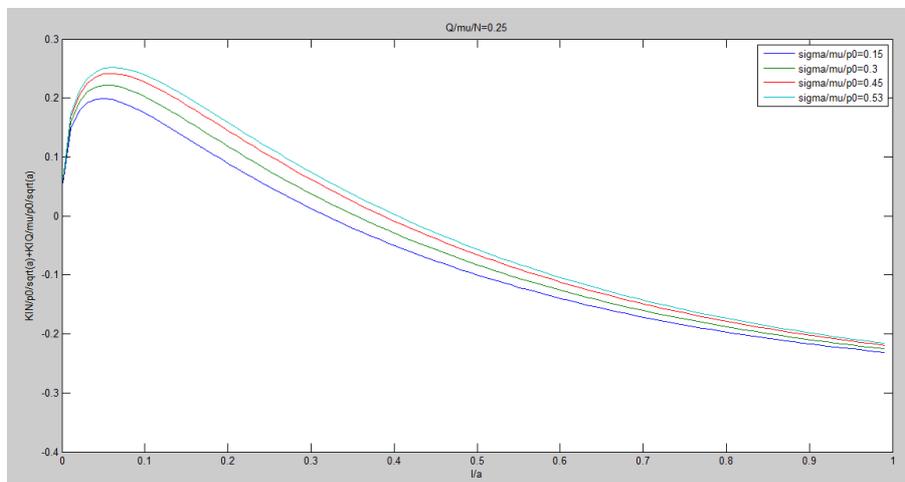


Fig 4.19 Gráfica  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.15, 0.3, 0.45$  y  $0.53$

Al igual que en la gráfica anterior, se puede observar como la tensión global cíclica aumenta el valor del factor de intensidad de tensiones  $K_I$ , favoreciendo la apertura de la grieta. Cabe destacar que, en nuestro modelo, al partir de un valor de la carga tangencial  $Q$  constante de entrada, la carga global cíclica solo afecta al valor de la excentricidad, que solo interviene en la distribución de tensiones  $\sigma_{xx}^{QP}$ . Por tanto, un aumento de la excentricidad debido al incremento de la carga global produce una disminución de la contribución a cerrar la grieta de  $K_I^{QP}$ . No interviene en  $K_I^N$  ni en  $K_I^{QG}$ , de modo que el aumento del factor de tensiones  $K_I$  es debido únicamente a la reducción del valor absoluto de  $K_I^{QP}$ .

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$

Representamos  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.3, 0.6, 0.9$  y  $1.17$ . Se obtiene:

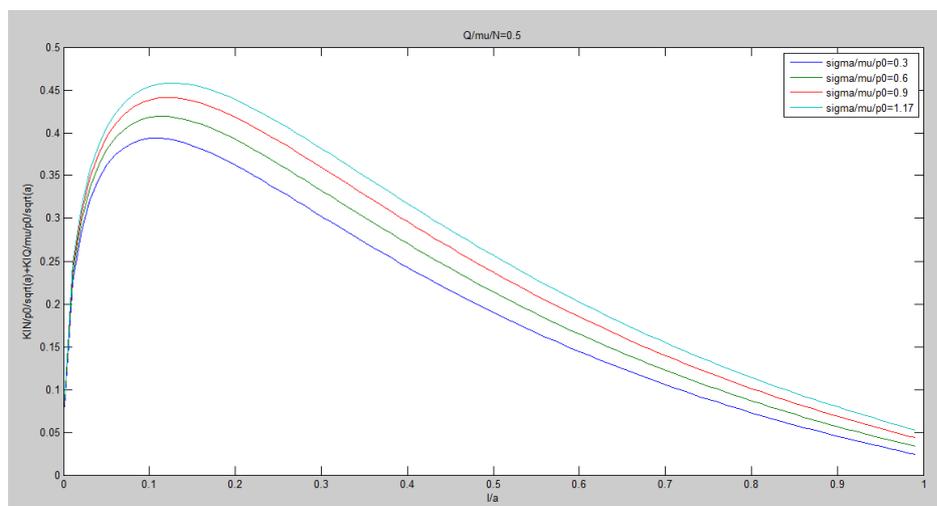


Fig 4.20 Gráfica  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.3, 0.6, 0.9$  y  $1.17$

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$

Representamos  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.5, 1, 1.5$  y  $2$ . Se obtiene:

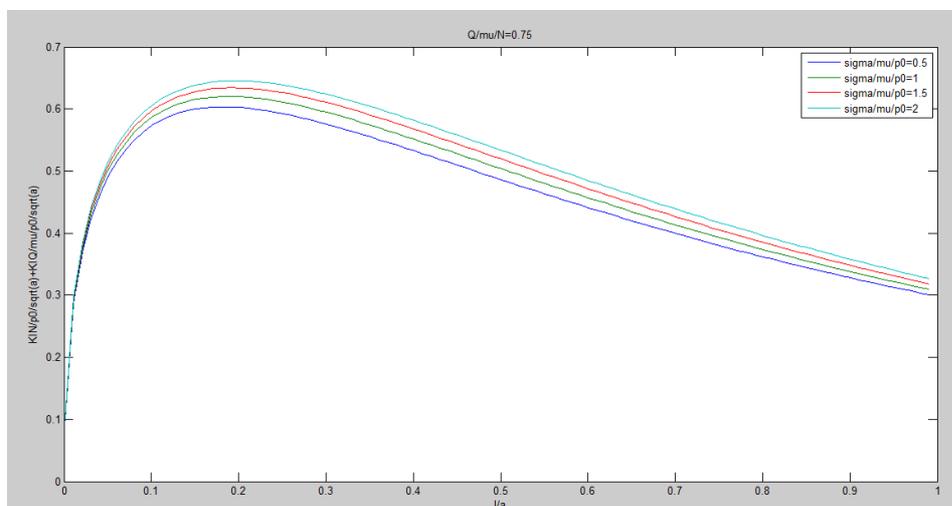


Fig 4.21 Gráfica  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.5, 1, 1.5$  y  $2$

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$

Representamos  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 1, 2, 3$  y  $4$ . Se obtiene:

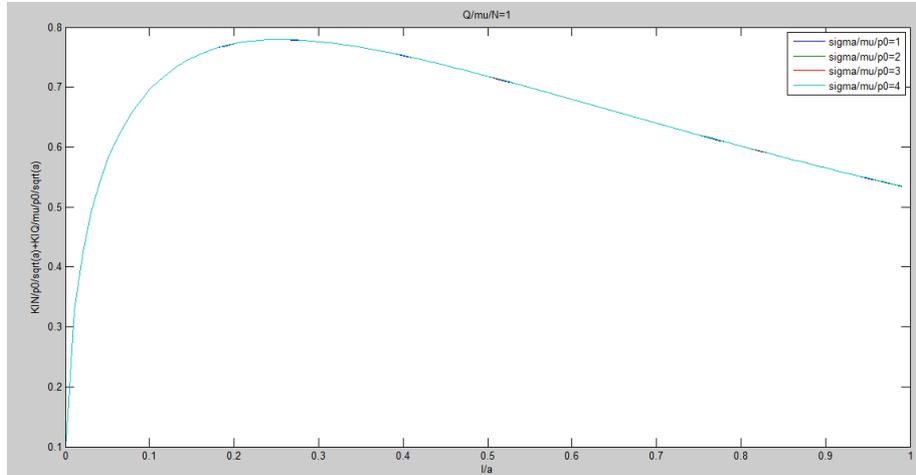


Fig 4.22 Gráfica  $\frac{K_I^N}{p_0 \cdot \sqrt{a}} + \frac{K_I^Q}{\mu \cdot p_0 \cdot \sqrt{a}}$  frente a  $\frac{l}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 1, 2, 3$  y  $4$

El cociente  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$  reduce el tamaño de la zona adherida y, por tanto, la contribución a cerrar la grieta de las tensiones asociadas al caso de deslizamiento parcial. Dado que en el modelo que empleamos la tensión global oscilatoria solo actúa para aumentar el valor de la excentricidad, modificando solo las tensiones del caso de deslizamiento parcial, las diferencias entre las curvas para diferentes valores del cociente  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  son menores.

## 4.5 Representación de las tensiones axiales $\sigma_{xx}$ a lo largo de la grieta

Para poder interpretar de forma adecuada los resultados, se representará de forma adimensional, como en el apartado anterior, las tensiones  $\sigma_{xx}(s)$  a lo largo de la longitud de la grieta. La coordenada “s” representará la profundidad de la grieta en que se calcula  $\sigma_{xx}(s)$ . Se empleará un programa en MATLAB denominado sigxxgrieta.m.

1. Representación de  $\sigma_{xx}^N(s)$  a lo largo de una grieta de longitud  $l=a$ , en el límite de la zona de contacto entre los cilindros  $x=a$ .

$$\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} = f\left(\frac{s}{a}\right) \quad (68)$$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$ . Se obtiene la siguiente gráfica, que es única:

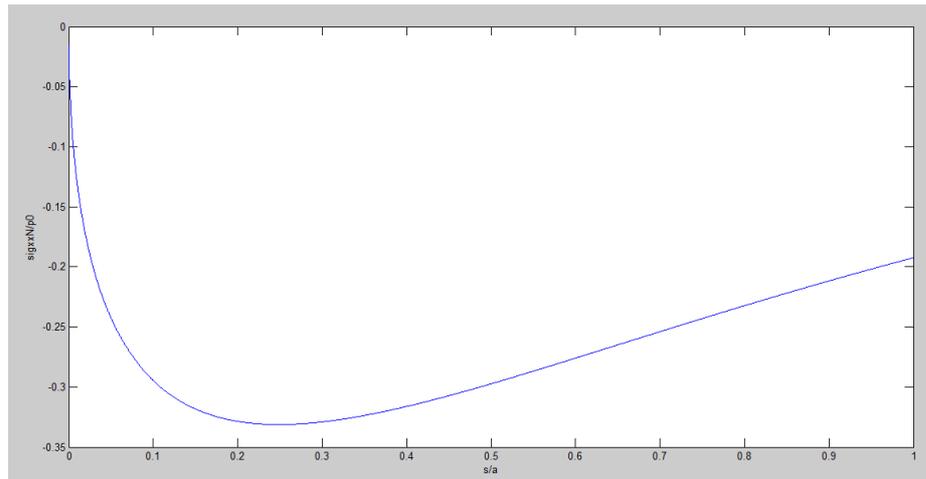


Fig 4.23 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^N(s)}{p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$

Las tensiones  $\sigma_{xx}^N(s)$  generadas a lo largo de la grieta parten de cero en la superficie de contacto de la probeta ( $s=0$ ). A partir de ahí, se produce un aumento drástico de esta tensión en el sentido de una compresión, alcanzándose su valor máximo en el 25% de la longitud de la grieta. A partir, el valor de estas tensiones se reduce con una pendiente constante, aunque no llega anularse en el fondo de la grieta de longitud  $a$ , alcanzándose un valor  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} = -0.2$ . Estas tensiones de valor negativo son de compresión a lo largo de toda la grieta, de modo que contribuyen a cerrarla.

**2. Representación de  $\sigma_{xx}^{QG}$  a lo largo de una grieta de longitud  $l=a$ , en el borde de la zona de contacto  $x=a$ .**

$$\frac{\sigma_{xx}^{QG}}{\mu \cdot p_0} = f\left(\frac{s}{a}\right) \quad (69)$$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^{QG}}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$ . Se obtiene la siguiente gráfica, que es única:

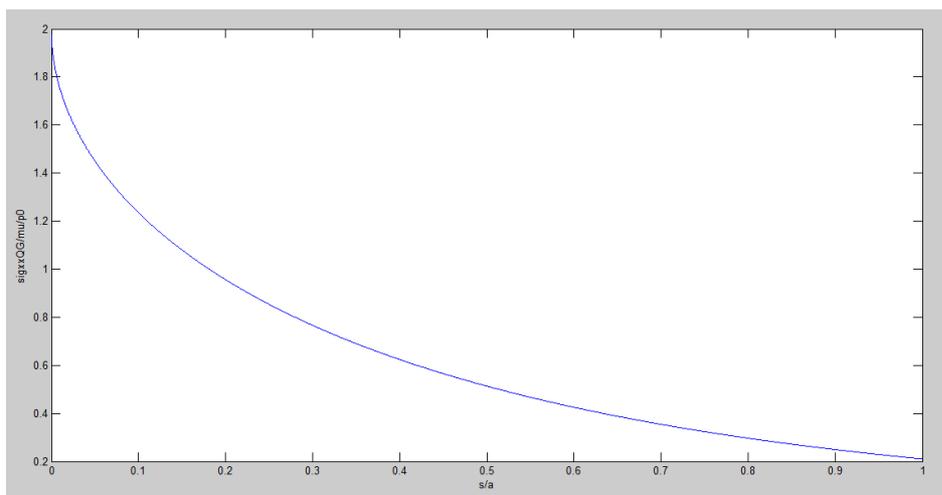


Fig 4.24 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^{QG}(s)}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$

El valor de tensiones  $\sigma_{xx}^N(s)$  a lo largo de la grieta es positivo, de modo que se trata de tensiones de tracción que tienden a abrir la grieta. Esta distribución de tensiones presenta un comportamiento asintótico, que parte de

un valor inicial en la superficie de contacto de la probeta de  $\frac{\sigma_{xx}^{QG}}{\mu \cdot p_0} = 2$ , siendo éste el máximo valor alcanzado a lo largo de la grieta. A partir de ahí, comienza a reducirse el valor de estas tensiones de tracción a medida que se aproxima al fondo de la grieta en  $s=a$ , donde alcanza un valor de  $\frac{\sigma_{xx}^{QG}}{\mu \cdot p_0} = 0.2$  cercano a cero.

### 3. Representación de $\sigma_{xx}^{QP}$ a lo largo de una grieta de longitud $l=a$ , en el borde de la zona de contacto $x=a$ .

Para el caso de excentricidad y carga global oscilatoria nulas:

$$\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0} = f\left(\frac{s}{a}, \frac{a}{c}\right) \quad (70)$$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para varios valores de  $\frac{c}{a}$ , en concreto, para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25, 0.5, 0.75$  y 1. Obtenemos:

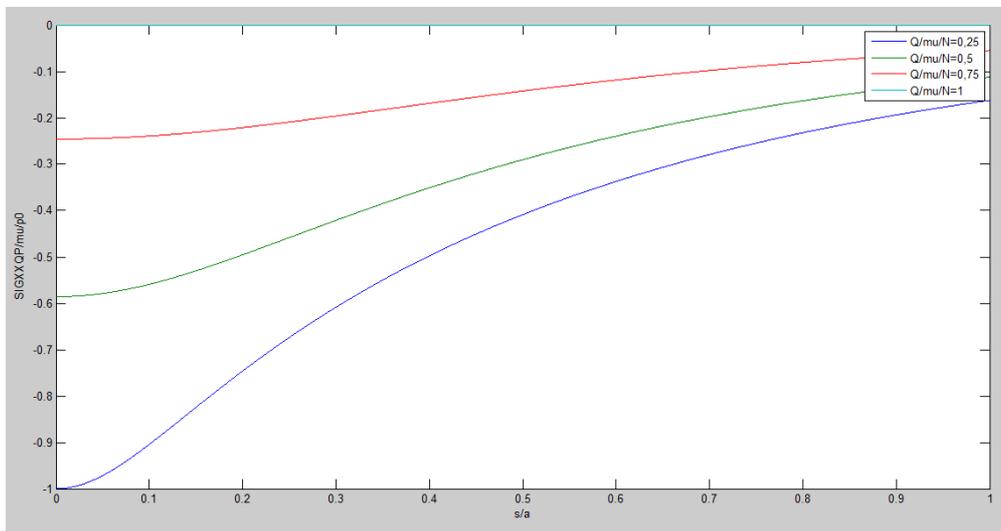


Fig 4.25 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}(s)}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25, 0.5, 0.75$  y 1

El valor de las tensiones  $\sigma_{xx}^{QP}(s)$  es negativo a lo largo de la grieta, de modo que se trata de tensiones de compresión que tienden a cerrar la grieta. El valor de estas tensiones parte de un valor negativo distinto de cero en la superficie de contacto de la probeta, y se reduce su valor en valor absoluto a lo largo de la grieta, tendiendo asintóticamente a valores negativos cercanos a cero en el fondo de la grieta  $s=a$ .

Valores mayores del cociente  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$  reducen la contribución de estas tensiones de compresión. Al aumentar este cociente se reduce la superficie adherida, de modo que se reduce la contribución de estas tensiones.

### 4. Representación de $\sigma_{xx}^Q$ a lo largo de una grieta de longitud $l=a$ , en el borde de zona de contacto $x=a$ para el caso de excentricidad nula.

$$\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0} = \frac{\sigma_{xx}^{QG} + \sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0} = f\left(\frac{s}{a}, \frac{a}{c}\right) \quad (71)$$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para varios valores de  $\frac{c}{a}$ . Se obtiene:

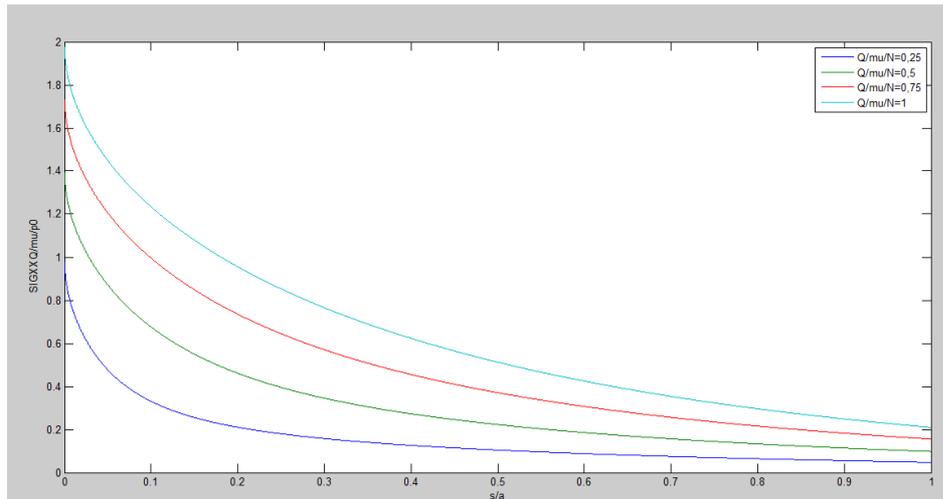


Fig 4.26 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^Q(s)}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25, 0.5, 0.75$  y  $1$

Dado que los valores positivos de las tensiones de tracción  $\sigma_{xx}^{QG}$  son mayores que los valores de compresión asociados a las tensiones  $\sigma_{xx}^{QP}$ , el valor de las tensiones  $\sigma_{xx}^Q$  es positivo a lo largo de toda la grieta, tratándose por tanto de tensiones de tracción que facilitan la apertura de la grieta. Su comportamiento es de nuevo asintótico, partiendo de un valor de  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  positivo en la superficie de contacto de la probeta, siendo éste el valor máximo que alcanza la curva. Posteriormente el valor de estas tensiones de tracción tiende a cero a medida que se aproxima al fondo de la grieta en  $s=a$ .

Por otro lado, se puede observar que un aumento del cociente  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$  produce un aumento de estas tensiones de tracción, debido a que una reducción de la superficie de contacto reduce la contribución de las tensiones de compresión asociadas al caso de deslizamiento parcial.

**5. Representación de  $\sigma_{xx}$  a lo largo de una grieta de longitud  $l=a$ , en el borde de la zona de contacto  $x=a$ , para el caso de excentricidad nula.**

$$\frac{\sigma_{xx}}{\mu \cdot p_0} = \frac{\sigma_{xx}^N + \sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0} = f\left(\frac{s}{a}, \frac{a}{c}, \mu\right) \quad (72)$$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para varios valores de  $\frac{c}{a}$ . Se obtiene:

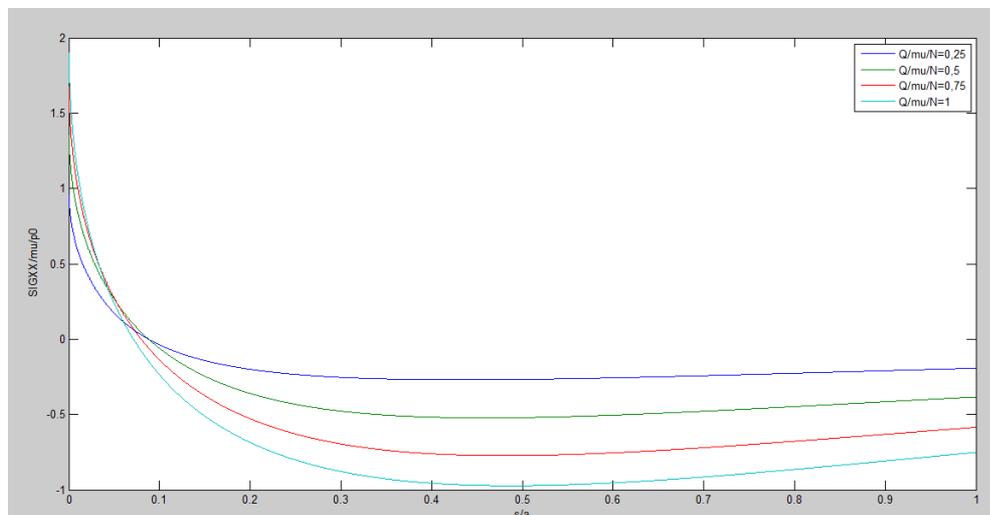


Fig 4.27 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}(s)}{\mu \cdot p_0}$  frente  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25, 0.5, 0.75$  y  $1$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0} = f\left(\frac{s}{a}, \frac{a}{c}\right) \quad (73)$$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para varios valores de  $\frac{c}{a}$ . Se obtiene:

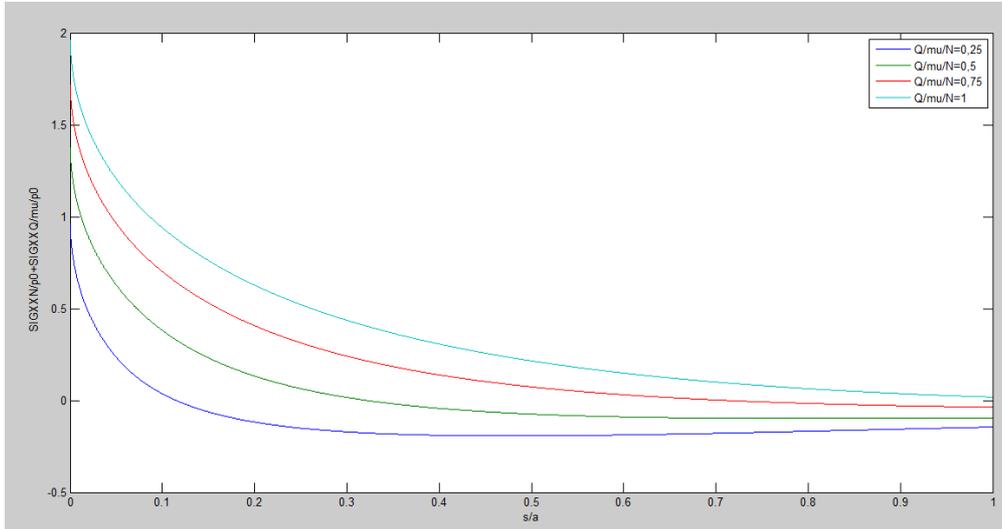


Fig 4.28 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25, 0.5, 0.75$  y  $1$

El comportamiento de las tensiones  $\sigma_{xx}$  es de nuevo asintótico, partiendo de un valor de  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  positivo en la superficie de contacto de la probeta, y reduciéndose su valor hasta aproximarse a cero a media que se aproxima al fondo de la grieta en  $s=a$ . El valor de estas tensiones es positivo a lo largo de toda la grieta para valores del cociente  $\frac{Q}{\mu \cdot N} > 0.5$ , de modo que se trata de tensiones de tracción que tienden a abrir la grieta. Además, de forma similar a como ocurría en el caso anterior, el valor de estas tensiones de tracción es mayor para mayores valores del cociente  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$ , de modo que la reducción de la superficie adherida disminuye la contribución de las tensiones de compresión asociadas a las tensiones del caso de deslizamiento parcial.

Finalmente, vamos a analizar el efecto de la tensión global cíclica  $\sigma$  y la excentricidad  $e$  en estas distribuciones de tensiones.

#### 6. Influencia de $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$ en la distribución de tensiones $\sigma_{xx}^{QP}$ a lo largo de una grieta de longitud $l=a$ , en el borde de la zona de contacto $x=a$ .

Considerando la excentricidad y carga global oscilatoria se tiene:

$$\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0} = f\left(\frac{s}{a}, \frac{a}{c}, \frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}\right) \quad (74)$$

Se representa  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para varios valores de  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$  y de  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  considerando la siguiente restricción, tal como se hizo en el apartado anterior:

$$\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} < 4 \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{Q}{\mu \cdot N}} \right) \quad (67)$$

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$

-Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.15, 0.3, 0.45$  y  $0.53$ . Se obtiene:

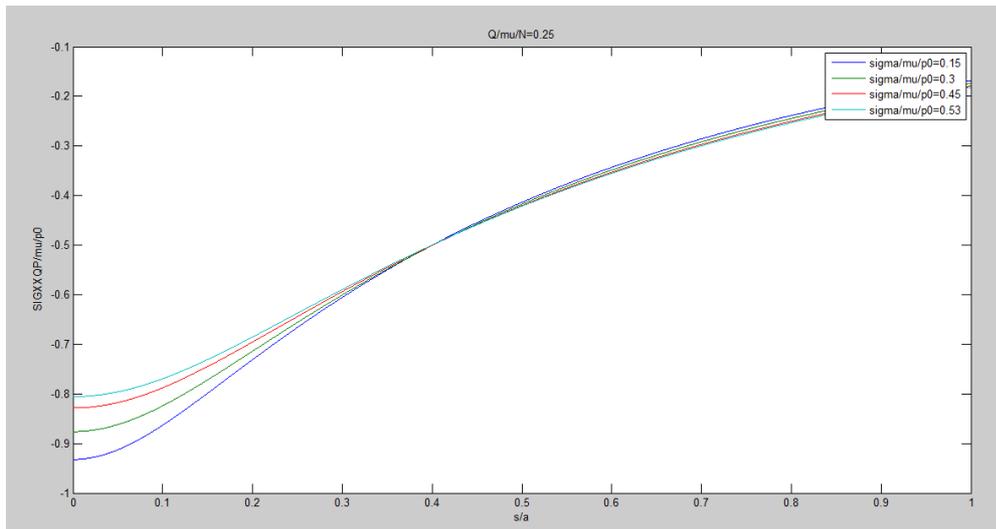


Fig 4.29 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.15, 0.3, 0.45$  y  $0.53$

El incremento de la carga global oscilatoria conlleva el aumento de la excentricidad  $e$ , reduciendo el tamaño de la zona adherida y la contribución de las tensiones de compresión asociadas al caso de deslizamiento parcial.

Además, se puede observar como la pendiente de estas curvas es mayor para menores valores de la tensión global, produciéndose un corte entre las gráficas.

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.3, 0.6, 0.9$  y  $1.17$ . Se obtiene:

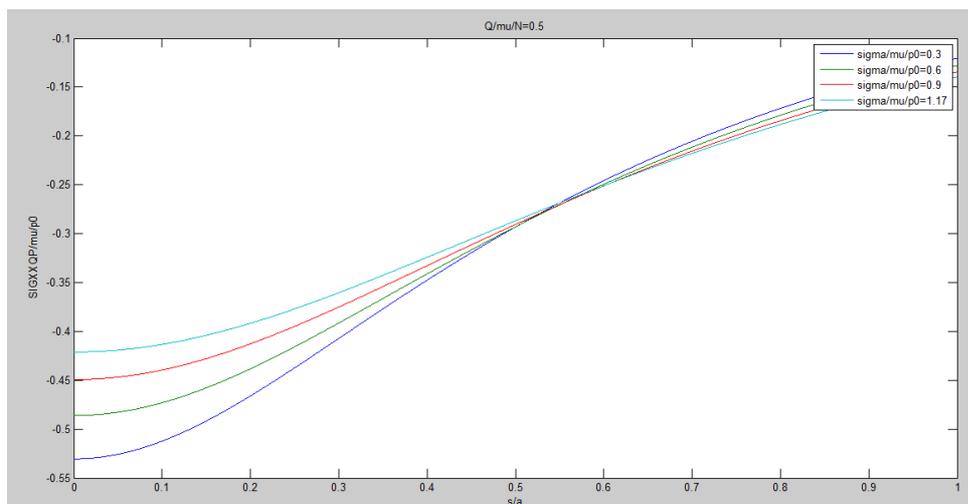


Fig 4.30 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.3, 0.6, 0.9$  y  $1.17$

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.5, 1, 1.5$  y  $2$ . Se obtiene:

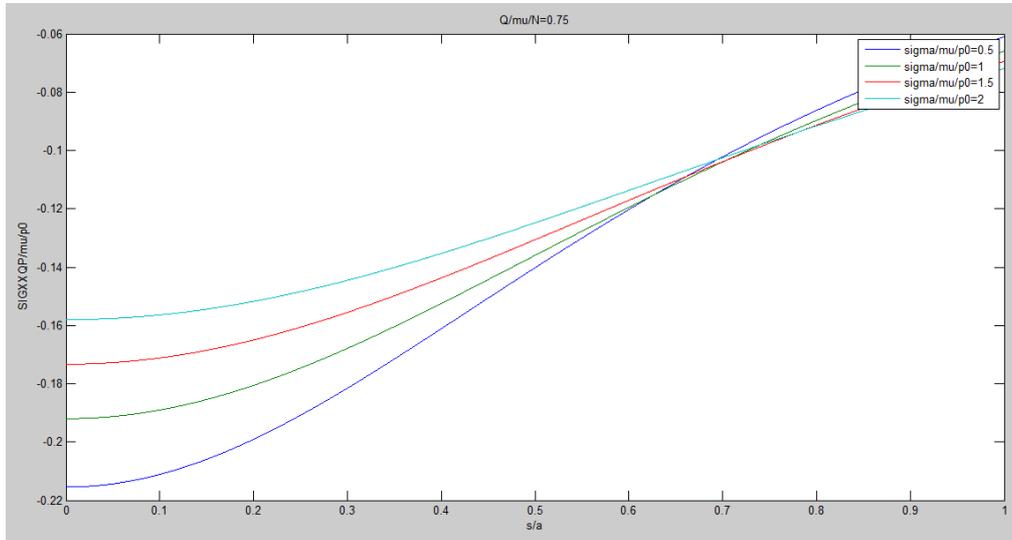


Fig 4.31 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.5, 1, 1.5$  y  $2$

Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 1, 2, 3$  y  $4$ . Se obtiene:

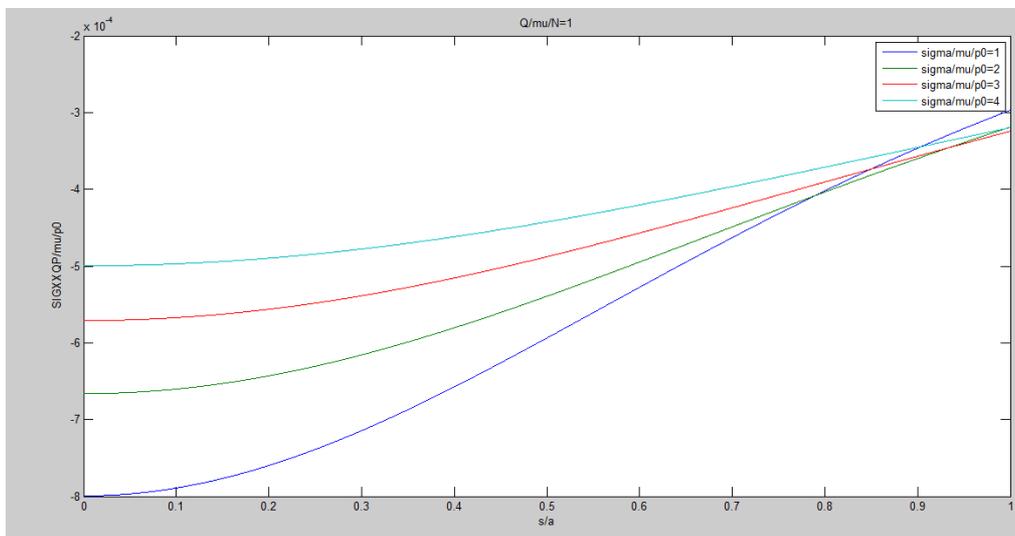


Fig 4.32 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^{QP}}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 1, 2, 3$  y  $4$

Se puede observar como las tensiones de compresión asociadas al caso de deslizamiento parcial disminuyen a medida que aumenta el cociente  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$ , así como estas disminuyen para mayores valores de la carga global oscilatoria.

7. Influencia de  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  en la distribución de tensiones  $\sigma_{xx}^Q$  a lo largo de una grieta de longitud  $l=a$ , en el borde de la zona de contacto  $x=a$ .

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.15, 0.3, 0.45$  y  $0.53$ . Se obtiene:

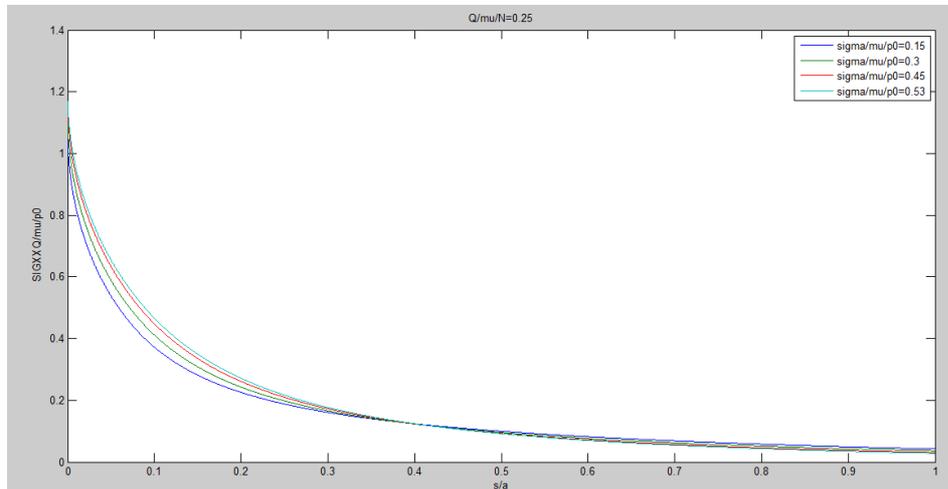


Fig 4.33 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.15, 0.3, 0.45$  y  $0.53$

Las curvas están muy próximas entre sí y se cruzan en torno al 40% de la longitud de la grieta. Las curvas parten de un valor inicial y tienden a cero de forma asintótica hacia el fondo de la grieta. El valor de estas tensiones es positivo siempre, tratándose por tanto de tensiones de tracción. Para mayores valores de la carga global oscilatoria estas tensiones parten de un mayor valor inicial y tienen una pendiente negativa más acusada.

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.3, 0.6, 0.9$  y  $1.17$ . Se obtiene:

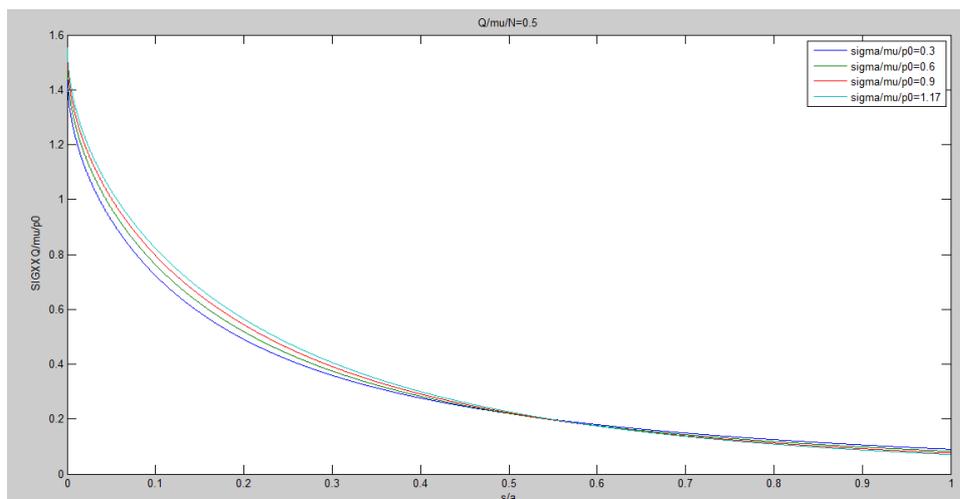
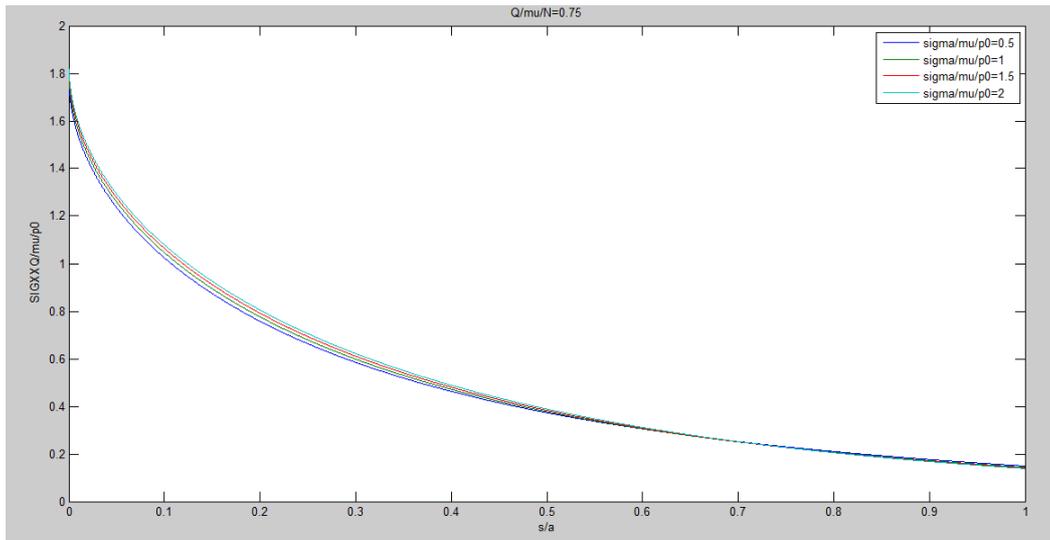


Fig 4.34 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.3, 0.6, 0.9$  y  $1.17$

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$

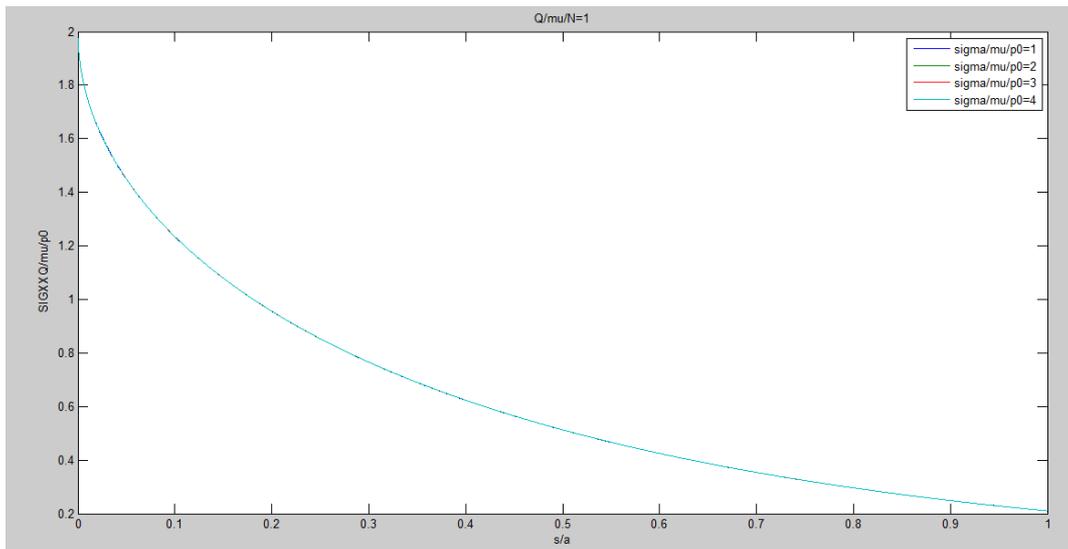
Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.5, 1, 1.5$  y  $2$ . Se obtiene:



**Fig 4.35 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.5, 1, 1.5$  y  $2$**

Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 1, 2, 3$  y  $4$ . Se obtiene:



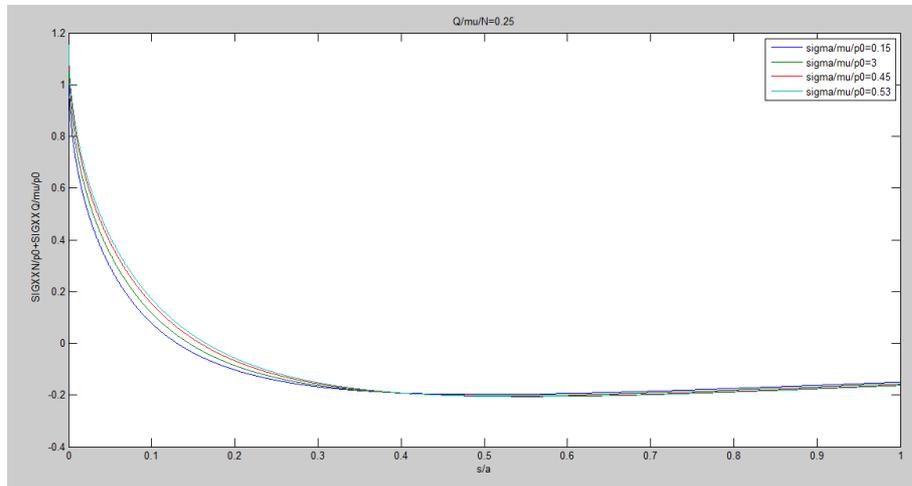
**Fig 4.36 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 1, 2, 3$  y  $4$**

Al aumentar el cociente  $\frac{Q}{\mu \cdot N}$  disminuye la contribución de las tensiones de compresión debido al rozamiento y, por tanto, las diferencias entre las curvas correspondientes a las tensiones  $\sigma_{xx}^Q$  son menores.

**8. Influencia de  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0}$  en la distribución de tensiones  $\sigma_{xx}$  a lo largo de una grieta de longitud  $l=a$ , en el borde de la zona de contacto  $x=a$ .**

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.15, 0.3, 0.45$  y  $0.53$ . Se obtiene:

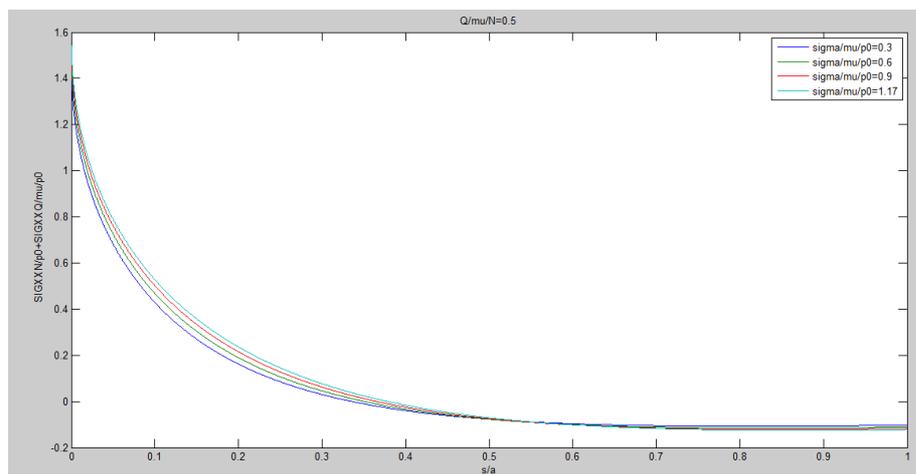


**Fig 4.37 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.25$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.15, 0.3, 0.45$  y  $0.53$**

Se puede observar como los valores de la distribución de tensiones  $\sigma_{xx}$  son mayores para valores más altos de la carga global en gran parte de la longitud de grieta. De nuevo, la pendiente negativa para el caso de mayor tensión global es más acentuada, de modo que se cortan las gráficas entorno al 40% de la longitud de la grieta.

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.3, 0.6, 0.9$  y  $1.17$ . Se obtiene:



**Fig 4.38 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.5$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.3, 0.6, 0.9$  y  $1.17$**

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.5, 1, 1.5$  y  $2$ . Se obtiene:

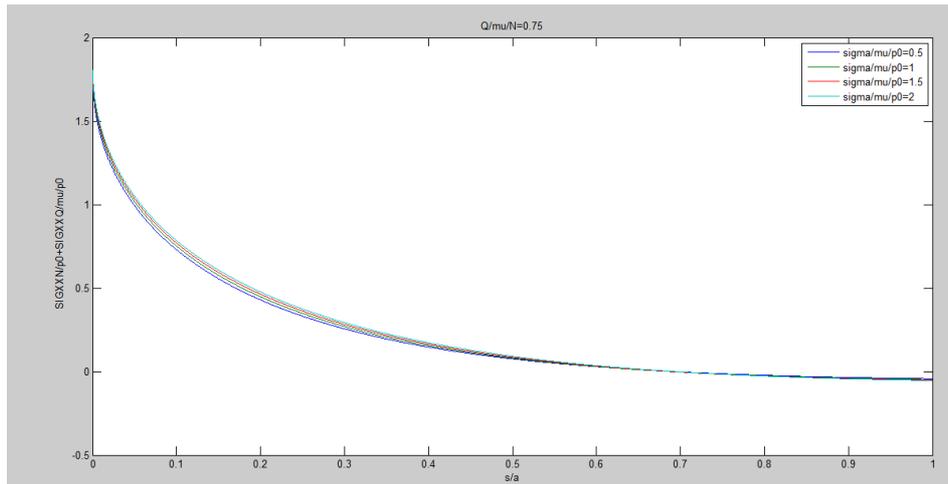


Fig 4.39 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 0.75$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 0.5, 1, 1.5$  y  $2$

-Caso:  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$

Representamos  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 1, 2, 3$  y  $4$ . Se obtiene:

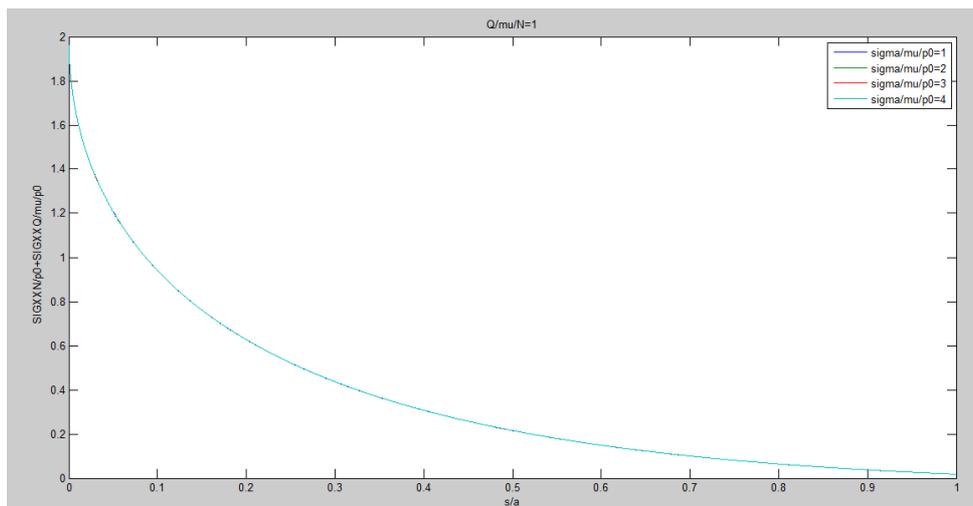


Fig 4.40 Gráfica  $\frac{\sigma_{xx}^N}{p_0} + \frac{\sigma_{xx}^Q}{\mu \cdot p_0}$  frente a  $\frac{s}{a}$  para  $\frac{Q}{\mu \cdot N} = 1$  y  $\frac{\sigma}{\mu \cdot p_0} = 1, 2, 3$  y  $4$

## 5 ANEXOS

### 5.1 Función Flamant.m

```
function[TF, a, c, p0, e]=Flamant(N, Q, mu, ps, E, R, sigtrac, x, y)

A=4*(1-ps^2)/E;
k=1/R;
a=sqrt((2*N*A)/(pi*k));
c=a*sqrt(1-abs(Q/(mu*N)));
p0=k*a/A;
e=sigtrac*a/mu/p0/4;

a1=[-a:a/20000000:a];
A1=trapz(a1, -p0*sqrt(1-(a1/a).^2).*(x-a1).^2./[(x-a1).^2+y^2].^2);
b1=[-a:a/20000000:-c-e];
B1=trapz(b1, -mu*p0*sqrt(1-(b1/a).^2).*(x-b1).^3./[(x-b1).^2+y^2].^2);
c1=[-c-e:a/20000000:c-e];
C1=trapz(c1, (-mu*p0*sqrt(1-(c1/a).^2)+mu*p0*c/a*sqrt(1-((c1+e)/c).^2)).*(x-c1).^3./[(x-c1).^2+y^2].^2);
d1=[c-e:a/20000000:a];
D1=trapz(d1, -mu*p0*sqrt(1-(d1/a).^2).*(x-d1).^3./[(x-d1).^2+y^2].^2);

SIGXX=-2*y/pi*A1-2/pi*(B1+C1+D1);

a2=[-a:a/20000000:a];
A2=trapz(a2, -p0*sqrt(1-(a2/a).^2)./[(x-a2).^2+y^2].^2);
b2=[-a:a/20000000:-c-e];
B2=trapz(b2, -mu*p0*sqrt(1-(b2/a).^2).*(x-b2)./[(x-b2).^2+y^2].^2);
c2=[-c-e:a/20000000:c-e];
C2=trapz(c2, (-mu*p0*sqrt(1-(c2/a).^2)+mu*p0*c/a*sqrt(1-((c2+e)/c).^2)).*(x-c2)./[(x-c2).^2+y^2].^2);
d2=[c-e:a/20000000:a];
D2=trapz(d2, -mu*p0*sqrt(1-(d2/a).^2).*(x-d2)./[(x-d2).^2+y^2].^2);

SIGYY=-2*y^3/pi*A2-2*y^2/pi*(B2+C2+D2);

a3=[-a:a/20000000:a];
A3=trapz(a3, -p0*sqrt(1-(a3/a).^2).*(x-a3)./[(x-a3).^2+y^2].^2);
b3=[-a:a/20000000:-c-e];
B3=trapz(b3, -mu*p0*sqrt(1-(b3/a).^2).*(x-b3).^2./[(x-b3).^2+y^2].^2);
c3=[-c-e:a/20000000:c-e];
C3=trapz(c3, (-mu*p0*sqrt(1-(c3/a).^2)+mu*p0*c/a*sqrt(1-((c3+e)/c).^2)).*(x-c3).^2./[(x-c3).^2+y^2].^2);
d3=[c-e:a/20000000:a];
D3=trapz(d3, -mu*p0*sqrt(1-(d3/a).^2).*(x-d3).^2./[(x-d3).^2+y^2].^2);

SIGXY=-2*y^2/pi*A3-2*y/pi*(B3+C3+D3);
```

```

SIGZZ=ps*(SIGXX+SIGYY);

TF(1,1)=SIGXX; TF(2,2)=SIGYY; TF(3,3)=SIGZZ;
TF(1,2)=SIGXY; TF(2,1)=SIGXY; TF(1,3)=0;
TF(3,1)=0; TF(2,3)=0; TF(3,2)=0;
format long;

```

## 5.2 Función tanalítico .m

```

function[TA,SN,SQ1,SQ2,p0,a,c,e]=tanalitico(mu,ps,E,R,N,Q,sigtrac,y)

A=4*((1-ps^2)/E);
k=1/R;
a=sqrt((2*N*A)/(pi*k));
c=a*sqrt(1-abs(Q/(mu*N)));
p0=k*a/A;
e=sigtrac*a/mu/p0/4;
x=a;

xl=x/a; yl=y/a; s=sqrt(0.5*(-(1-xl^2-yl^2)+sqrt((1-xl^2-yl^2)^2+4*yl^2)));
xr=(x+e)/c; yr=(y)/c; sr=sqrt(0.5*(-(1-xr^2-yr^2)+sqrt((1-xr^2-
yr^2)^2+4*yr^2)));

%Tensor de tensiones interior debido a sigmayy sup
SN(1,1)=-[p0*yl*(2-(s/sqrt(1+s^2))-(sqrt(1+s^2)/s)-
(xl^2*s^3)/(1+s^2)^(3/2)/(s^4+yl^2))];
SN(2,2)=-[-p0*(yl^3*sqrt(1+s^2))/(s*(s^4+yl^2))]; SN(3,3)=-[-
2*p0*ps*yl*(sqrt(1+s^2)/s-1)];
SN(1,2)=-[-p0*xl*yl^2*s/(sqrt(1+s^2)*(s^4+yl^2))]; SN(2,1)=SN(1,2);
SN(1,3)=0; SN(3,1)=0; SN(2,3)=0; SN(3,2)=0;

%Tensor de tensiones interior debido a sigxy sup deslizamiento global
SQ1(1,1)=-[-2*mu*p0*xl*(1-
s/sqrt(1+s^2))+xl*yl^2*s*mu*p0/(sqrt(1+s^2)*(s^4+yl^2))];
SQ1(2,2)=-[-mu*p0*xl*yl^2*s/(sqrt(1+s^2)*(s^4+yl^2))];
SQ1(3,3)=-[-mu*p0*2*ps*xl*(1-s/sqrt(1+s^2))];
SQ1(1,2)=-[mu*p0*yl*(2-(s/sqrt(1+s^2))-(sqrt(1+s^2)/s)-
xl^2*s^3/(((1+s^2)^(3/2))*(s^4+yl^2)))]];
SQ1(2,1)=SQ1(1,2);
SQ1(1,3)=0; SQ1(3,1)=0; SQ1(2,3)=0; SQ1(3,2)=0;

%Tensor de tensiones interior debido a sigxy sup deslizamiento parcial con
%excentricidad
SQ2(1,1)=-[2*mu*c/a*p0*xr*(1-sr/sqrt(1+sr^2))-
xr*yr^2*sr*mu*c/a*p0/(sqrt(1+sr^2)*(sr^4+yr^2))];
SQ2(2,2)=-[mu*c/a*p0*xr*yr^2*sr/(sqrt(1+sr^2)*(sr^4+yr^2))];
SQ2(3,3)=-[mu*c/a*p0*2*ps*xr*(1-sr/sqrt(1+sr^2))];
SQ2(1,2)=-[-mu*c/a*p0*yr*(2-(sr/sqrt(1+sr^2))-(sqrt(1+sr^2)/sr)-
xr^2*sr^3/(((1+sr^2)^(3/2))*(sr^4+yr^2)))]];
SQ2(2,1)=SQ2(1,2);
SQ2(1,3)=0; SQ2(3,1)=0; SQ2(2,3)=0; SQ2(3,2)=0;

TA=SN+SQ1+SQ2;
end

```

### 5.3 Función sigxxinterior .m

```
function[sigxx,p0,sigxxN,sigxxQ,sigxxQG,sigxxQP]=sigxxinterior(N,Q,mu,ps,E
,R,sigtrac,y)

A=4*((1-ps^2)/E);
k=1/R;
a=sqrt((2*N*A)/(pi*k));
c=a*sqrt(1-abs(Q/(mu*N)));
p0=k*a/A;
e=sigtrac*a/mu/p0/4;

x=a;

xl=x/a; yl=y/a; s=sqrt(0.5*(-(1-xl^2-yl^2)+sqrt((1-xl^2-yl^2)^2+4*yl^2)));
xr=(x+e)/c; yr=(y)/c; sr=sqrt(0.5*(-(1-xr^2-yr^2)+sqrt((1-xr^2-
yr^2)^2+4*yr^2)));

%sigxx interior debido a sigmayy sup
sigxxN=-[p0*yl*(2-(s/sqrt(1+s^2))-(sqrt(1+s^2)/s)-
(xl^2*s^3)/(1+s^2)^(3/2)/(s^4+yl^2))];

%sigxx interior debido a sigxy sup deslizamiento global
sigxxQG=-[-2*mu*p0*xl*(1-
s/sqrt(1+s^2))+xl*yl^2*s*mu*p0/(sqrt(1+s^2)*(s^4+yl^2))];

%sigxx interior debido a sigxy sup deslizamiento parcial con excentricidad
sigxxQP=-[2*mu*c/a*p0*xr*(1-sr/sqrt(1+sr^2))-
xr*yr^2*sr*mu*c/a*p0/(sqrt(1+sr^2)*(sr^4+yr^2))];

sigxx=sigxxN+sigxxQG+sigxxQP;
sigxxQ=sigxxQG+sigxxQP;

end
```

### 5.4 Función FITgeneral.m

```
function[D,a,p0,KIG,KIN,KIQ,KIQG,KIQP]=FITgeneral(N,Q,mu,ps,E,R,sigtrac)

A=4*((1-ps^2)/E);
k=1/R;
a=sqrt((2*N*A)/(pi*k));
c=a*sqrt(1-abs(Q/(mu*N)));
p0=k*a/A;
e=sigtrac*a/mu/p0/4;
x=a;

j=1;
for l=a/1000:a/100:a;
    i=1;
    for s=1/100:1/100:1-1/100;
        yc(i,l)=s;
```

```

[sigxx,p0,sigxxN,sigxxQ,sigxxQG,sigxxQP]=sigxxinterior(N,Q,mu,ps,E,R,sigtr
ac,-s);
    SIGXX(i,1)=sigxx;
    SIGXXN(i,1)=sigxxN;
    SIGXXQ(i,1)=sigxxQ;
    SIGXXQG(i,1)=sigxxQG;
    SIGXXQP(i,1)=sigxxQP;
    SIGXXNyQG(i,1)=sigxxN+sigxxQG;
    i=i+1;
end

    GG=SIGXX.*(sqrt(2./(pi*(1-yc)))).*(1+0.6147*(1-yc./l)+0.2502*(1-
yc./l).^2));
    KIG(j,1)=trapz(yc,GG);
    GN=SIGXXN.*(sqrt(2./(pi*(1-yc)))).*(1+0.6147*(1-yc./l)+0.2502*(1-
yc./l).^2));
    KIN(j,1)=trapz(yc,GN);
    GQ=SIGXXQ.*(sqrt(2./(pi*(1-yc)))).*(1+0.6147*(1-yc./l)+0.2502*(1-
yc./l).^2));
    KIQ(j,1)=trapz(yc,GQ);
    GQG=SIGXXQG.*(sqrt(2./(pi*(1-yc)))).*(1+0.6147*(1-yc./l)+0.2502*(1-
yc./l).^2));
    KIQG(j,1)=trapz(yc,GQG);
    GQP=SIGXXQP.*(sqrt(2./(pi*(1-yc)))).*(1+0.6147*(1-yc./l)+0.2502*(1-
yc./l).^2));
    KIQP(j,1)=trapz(yc,GQP);
    GNYQG=SIGXXNyQG.*(sqrt(2./(pi*(1-yc)))).*(1+0.6147*(1-yc./l)+0.2502*(1-
yc./l).^2));
    KINyQG(j,1)=trapz(yc,GNYQG);
    D(j,1)=1;
    j=j+1;
end

figure(1);
grid;
plot(D./a,KIN./p0./sqrt(a));
xlabel('l/a');
ylabel('KIN/p0/sqrt(a)');

figure(2);
grid;
plot(D./a,KIQG./p0./mu./sqrt(a));
xlabel('l/a');
ylabel('KIQG/p0/mu/sqrt(a)');

end

```

## 5.5 Programa QmuN.m

```

clear all; close all; clc;
[D,a,p0,KIG,KIN,KIQ,KIQG,KIQP]=FITgeneral(100,20,0.8,0.8,100,100,0);
mu1=0.8;
D1=D;
a1=a;
p01=p0;
KIG1=KIG;
KIQ1=KIQ;
KIQP1=KIQP;
KIQG1=KIQG;
KIN1=KIN;
[D,a,p0,KIG,KIN,KIQ,KIQG,KIQP]=FITgeneral(100,20,0.4,0.7,500,5,0);
mu2=0.4;
D2=D;
a2=a;
p02=p0;
KIG2=KIG;
KIQ2=KIQ;
KIQP2=KIQP;
KIQG2=KIQG;
KIN2=KIN;
[D,a,p0,KIG,KIN,KIQ,KIQG,KIQP]=FITgeneral(100,20,0.26,0.5,20,4,0);
mu3=0.26;
D3=D;
a3=a;
p03=p0;
KIG3=KIG;
KIQ3=KIQ;
KIQP3=KIQP;
KIQG3=KIQG;
KIN3=KIN;

[D,a,p0,KIG,KIN,KIQ,KIQG,KIQP]=FITgeneral(100,20,0.2000000001,0.5,20,4,0);
mu4=0.2000000001;
D4=D;
a4=a;
p04=p0;
KIG4=KIG;
KIQ4=KIQ;
KIQP4=KIQP;
KIQG4=KIQG;
KIN4=KIN;

figure(1);
plot(D1./a1,KIG1./mu1./p01./sqrt(a1),D2./a2,KIG2./mu2./p02./sqrt(a2),D3./a3,KIG3./mu3./p03./sqrt(a3),D4./a4,KIG4./mu4./p04./sqrt(a4));
legend('Q/mu/N=0,25','Q/mu/N=0,5','Q/mu/N=0,75','Q/mu/N=1');
xlabel('l/a');
ylabel('KI/mu/p0/sqrt(a)');

figure(2);
plot(D1./a1,KIQP1./mu1./p01./sqrt(a1),D2./a2,KIQP2./mu2./p02./sqrt(a2),D3./a3,KIQP3./mu3./p03./sqrt(a3),D4./a4,KIQP4./mu4./p04./sqrt(a4));
legend('Q/mu/N=0,25','Q/mu/N=0,5','Q/mu/N=0,75','Q/mu/N=1');
xlabel('l/a');
ylabel('KIQP/mu/p0/sqrt(a)');

```

```

figure(3);
plot(D1./a1,KIQ1./mu1./p01./sqrt(a1),D2./a2,KIQ2./mu2./p02./sqrt(a2),D3./a3,KIQ3./mu3./p03./sqrt(a3),D4./a4,KIQ4./mu4./p04./sqrt(a4));
legend('Q/mu/N=0,25','Q/mu/N=0,5','Q/mu/N=0,75','Q/mu/N=1');
xlabel('l/a');
ylabel('KIQ/mu/p0/sqrt(a)');

figure(4);
plot(D1./a1,(KIN1+KIQG1+KIQP1)./mu1./p01./sqrt(a1),D2./a2,(KIN2+KIQG2+KIQP2)./mu2./p02./sqrt(a2),D3./a3,(KIN3+KIQG3+KIQP3)./mu3./p03./sqrt(a3),D4./a4,(KIN4+KIQG4+KIQP4)./mu4./p04./sqrt(a4));
legend('Q/mu/N=0,25','Q/mu/N=0,5','Q/mu/N=0,75','Q/mu/N=1');
xlabel('l/a');
ylabel('KI/mu/p0/sqrt(a)');

figure(5);
plot(D1./a1,(KIN1)./p01./sqrt(a1)+(KIQG1+KIQP1)./mu1./p01./sqrt(a1),D2./a2,(KIN2)./p02./sqrt(a2)+(KIQG2+KIQP2)./mu2./p02./sqrt(a2),D3./a3,(KIN3)./p03./sqrt(a3)+(KIQG3+KIQP3)./mu3./p03./sqrt(a3),D4./a4,(KIN4)./p04./sqrt(a4)+(KIQG4+KIQP4)./mu4./p04./sqrt(a4));
legend('Q/mu/N=0,25','Q/mu/N=0,5','Q/mu/N=0,75','Q/mu/N=1');
xlabel('l/a');
ylabel('KIN/p0/sqrt(a)+KIQ/mu/p0/sqrt(a)');

```

## 5.6 Programa excentricidad.m

```

clear all; close all; clc;
[D,a,p0,KIG,KIN,KIQ,KIQG,KIQP]=FITgeneral(100,20,0.2002,0.5,100,1,9.22);
mu1=0.2002;
D1=D;
a1=a;
p01=p0;
KIG1=KIG;
KIQ1=KIQ;
KIQP1=KIQP;
KIQG1=KIQG;
KIN1=KIN;

[D,a,p0,KIG,KIN,KIQ,KIQG,KIQP]=FITgeneral(100,20,0.2002,0.5,100,1,18.44);
mu2=0.2002;
D2=D;
a2=a;
p02=p0;
KIG2=KIG;
KIQ2=KIQ;
KIQP2=KIQP;
KIQG2=KIQG;
KIN2=KIN;

[D,a,p0,KIG,KIN,KIQ,KIQG,KIQP]=FITgeneral(100,20,0.2002,0.5,100,1,27.663);
mu3=0.2002;
D3=D;
a3=a;

```

```

p03=p0;
KIG3=KIG;
KIQ3=KIQ;
KIQP3=KIQP;
KIQG3=KIQG;
KIN3=KIN;

[D,a,p0,KIG,KIN,KIQ,KIQG,KIQP]=FITgeneral(100,20,0.2002,0.5,100,1,36.88);
mu4=0.2002;
D4=D;
a4=a;
p04=p0;
KIG4=KIG;
KIQ4=KIQ;
KIQP4=KIQP;
KIQG4=KIQG;
KIN4=KIN;

figure(1);
plot(D1./a1,KIQP1./mu1./p01./sqrt(a1),D2./a2,KIQP2./mu2./p02./sqrt(a2),D3./a3,KIQP3./mu3./p03./sqrt(a3),D4./a4,KIQP4./mu4./p04./sqrt(a4));
legend('sigma/mu/p0=0.15','sigma/mu/p0=0.3','sigma/mu/p0=0.45','sigma/mu/p0=0.53');
xlabel('l/a');
ylabel('KIQP/mu/p0/sqrt(a)');
title('Q/mu/N=0.25');

figure(2);
plot(D1./a1,KIQ1./mu1./p01./sqrt(a1),D2./a2,KIQ2./mu2./p02./sqrt(a2),D3./a3,KIQ3./mu3./p03./sqrt(a3),D4./a4,KIQ4./mu4./p04./sqrt(a4));
legend('sigma/mu/p0=1','sigma/mu/p0=2','sigma/mu/p0=3','sigma/mu/p0=4');
xlabel('l/a');
ylabel('KIQ/mu/p0/sqrt(a)');
title('Q/mu/N=1');

figure(3);
plot(D1./a1,KIN1/p01/sqrt(a1)+KIQ1/mu1/p01/sqrt(a1),D2./a2,KIN2/p02/sqrt(a2)+KIQ2/mu2/p02/sqrt(a2),D3./a3,KIN3/p03/sqrt(a3)+KIQ3/mu3/p03/sqrt(a3),D4./a4,KIN4/p04/sqrt(a4)+KIQ4/mu4/p04/sqrt(a4));
legend('sigma/mu/p0=1','sigma/mu/p0=2','sigma/mu/p0=3','sigma/mu/p0=4');
xlabel('l/a');
ylabel('KIN/p0/sqrt(a)+KIQ/mu/p0/sqrt(a)');
title('Q/mu/N=1');

```

## 5.7 Función sigxxgrieta.m

```

function[SIGXXG,SIGXXN,SIGXXQ,SIGXXQG,SIGXXQP,YG,p0,a]=sigxxgrieta(N,Q,mu,ps,E,R,sigtrac);

A=4*((1-ps^2)/E);
k=1/R;
a=sqrt((2*N*A)/(pi*k));
c=a*sqrt(1-abs(Q/(mu*N)));

```

```

p0=k*a/A;
e=sigtrac*a/mu/p0/4;
x=a;
l=a;
i=1;
for y=1/10000:1/10000:1

[sigxx,p0,sigxxN,sigxxQ,sigxxQG,sigxxQP]=sigxxinterior(N,Q,mu,ps,E,R,sigtrac,-y);
    SIGXXG(i,1)=sigxx;
    SIGXXN(i,1)=sigxxN;
    SIGXXQ(i,1)=sigxxQ;
    SIGXXQG(i,1)=sigxxQG;
    SIGXXQP(i,1)=sigxxQP;
    YG(i,1)=y;
    i=i+1;
end

%figure(1);
%plot(YG,SIGXXG);

%figure(2);
%plot(YG/a,SIGXXG/mu/p0);
%xlabel('l/a');
%ylabel('sigxx/mu/p0');

%w=interp1(YG,SIGXXG,YG,'linear');
%figure(3);
%plot(YG,w);

figure(1);
plot(YG/a,SIGXXN/p0);
xlabel('s/a');
ylabel('sigxxN/p0');

figure(2);
plot(YG/a,SIGXXQG/mu/p0);
xlabel('s/a');
ylabel('sigxxQG/mu/p0');

figure(3);
plot(YG/a,SIGXXQP/mu/p0);
xlabel('l/a');
ylabel('sigxxQP/mu/p0');

```

## 5.8 Programa QmuNgrieta.m

```

clear all; close all; clc;
[SIGXX,SIGXXN,SIGXXQ,SIGXXQG,SIGXXQP,YG,p0,a]=sigxxgrieta(100,20,0.8,0.5,100,1,0);
mu1=0.8;
YG1=YG;
a1=a;
p01=p0;
SIGXXQP1=SIGXXQP;
SIGXXQ1=SIGXXQ;

```

```

SIGXX1=SIGXX;
SIGXXN1=SIGXXN;
[SIGXX,SIGXXN,SIGXXQ,SIGXXQG,SIGXXQP,YG,p0,a]=sigxxgrieta(100,20,0.4,0.5,1
00,1,0);
mu2=0.4;
YG2=YG;
a2=a;
p02=p0;
SIGXXQP2=SIGXXQP;
SIGXXQ2=SIGXXQ;
SIGXX2=SIGXX;
SIGXXN2=SIGXXN;
[SIGXX,SIGXXN,SIGXXQ,SIGXXQG,SIGXXQP,YG,p0,a]=sigxxgrieta(100,20,0.26,0.5,
100,1,0);
mu3=0.26;
YG3=YG;
a3=a;
p03=p0;
SIGXXQP3=SIGXXQP;
SIGXXQ3=SIGXXQ;
SIGXX3=SIGXX;
SIGXXN3=SIGXXN;

[SIGXX,SIGXXN,SIGXXQ,SIGXXQG,SIGXXQP,YG,p0,a]=sigxxgrieta(100,20,0.2002,0.
5,100,1,0);
mu4=0.2002;
YG4=YG;
a4=a;
p04=p0;
SIGXXQP4=SIGXXQP;
SIGXXQ4=SIGXXQ;
SIGXX4=SIGXX;
SIGXXN4=SIGXXN;

figure(1);
plot(YG1./a1,SIGXXQP1./mu1./p01,YG2./a2,SIGXXQP2./mu2./p02,YG3./a3,SIGXXQP
3./mu3./p03,YG4./a4,SIGXXQP4./mu4./p04);
legend('Q/mu/N=0,25','Q/mu/N=0,5','Q/mu/N=0,75','Q/mu/N=1');
xlabel('s/a');
ylabel('SIGXXQP/mu/p0');

figure(2);
plot(YG1./a1,SIGXXQ1./mu1./p01,YG2./a2,SIGXXQ2./mu2./p02,YG3./a3,SIGXXQ3./
mu3./p03,YG4./a4,SIGXXQ4./mu4./p04);
legend('Q/mu/N=0,25','Q/mu/N=0,5','Q/mu/N=0,75','Q/mu/N=1');
xlabel('s/a');
ylabel('SIGXXQ/mu/p0');

figure(3);
plot(YG1./a1,SIGXX1./mu1./p01,YG2./a2,SIGXX2./mu2./p02,YG3./a3,SIGXX3./mu3
./p03,YG4./a4,SIGXX4./mu4./p04);
legend('Q/mu/N=0,25','Q/mu/N=0,5','Q/mu/N=0,75','Q/mu/N=1');
xlabel('s/a');
ylabel('SIGXX/mu/p0');

figure(4);
plot(YG1./a1,SIGXXN1./p01+SIGXXQ1./mu1./p01,YG2./a2,SIGXXN2./p02+SIGXXQ2./
mu2./p02,YG3./a3,SIGXXN3./p03+SIGXXQ3./mu3./p03,YG4./a4,SIGXXN4./p04+SIGXX
Q4./mu4./p04);

```

```

legend('Q/mu/N=0,25','Q/mu/N=0,5','Q/mu/N=0,75','Q/mu/N=1');
xlabel('s/a');
ylabel('SIGXXN/p0+SIGXXQ/mu/p0');

```

## 5.9 Programa excentricidadgrieta.m

```

clear all; close all; clc;
[SIGXX,SIGXXN,SIGXXQ,SIGXXQG,SIGXXQP,YG,p0,a]=sigxxgrieta(100,20,0.2002,0.
5,100,1,9.22);
mu1=0.2002;
YG1=YG;
a1=a;
p01=p0;
SIGXXQP1=SIGXXQP;
SIGXXQ1=SIGXXQ;
SIGXX1=SIGXX;
SIGXXN1=SIGXXN;
[SIGXX,SIGXXN,SIGXXQ,SIGXXQG,SIGXXQP,YG,p0,a]=sigxxgrieta(100,20,0.2002,0.
5,100,1,18.44);
mu2=0.2002;
YG2=YG;
a2=a;
p02=p0;
SIGXXQP2=SIGXXQP;
SIGXXQ2=SIGXXQ;
SIGXX2=SIGXX;
SIGXXN2=SIGXXN;
[SIGXX,SIGXXN,SIGXXQ,SIGXXQG,SIGXXQP,YG,p0,a]=sigxxgrieta(100,20,0.2002,0.
5,100,1,27.863);
mu3=0.2002;
YG3=YG;
a3=a;
p03=p0;
SIGXXQP3=SIGXXQP;
SIGXXQ3=SIGXXQ;
SIGXX3=SIGXX;
SIGXXN3=SIGXXN;
[SIGXX,SIGXXN,SIGXXQ,SIGXXQG,SIGXXQP,YG,p0,a]=sigxxgrieta(100,20,0.2002,0.
5,100,1,36.88);
mu4=0.2002;
YG4=YG;
a4=a;
p04=p0;
SIGXXQP4=SIGXXQP;
SIGXXQ4=SIGXXQ;
SIGXX4=SIGXX;
SIGXXN4=SIGXXN;

figure(1);
plot(YG1./a1,SIGXXQP1./mu1./p01,YG2./a2,SIGXXQP2./mu2./p02,YG3./a3,SIGXXQP
3./mu3./p03,YG4./a4,SIGXXQP4./mu4./p04);
legend('sigma/mu/p0=1','sigma/mu/p0=2','sigma/mu/p0=3','sigma/mu/p0=4');
xlabel('s/a');
ylabel('SIGXXQP/mu/p0');
title('Q/mu/N=1');

```

```

figure(2);
plot(YG1./a1,SIGXXQ1./mu1./p01,YG2./a2,SIGXXQ2./mu2./p02,YG3./a3,SIGXXQ3./
mu3./p03,YG4./a4,SIGXXQ4./mu4./p04);
legend('sigma/mu/p0=1','sigma/mu/p0=2','sigma/mu/p0=3','sigma/mu/p0=4');
xlabel('s/a');
ylabel('SIGXXQ/mu/p0');
title('Q/mu/N=1');

```

```

figure(3);
plot(YG1./a1,SIGXXN1./p01+SIGXXQ1./mu1./p01,YG2./a2,SIGXXN2./p02+SIGXXQ2./
mu2./p02,YG3./a3,SIGXXN3./p03+SIGXXQ3./mu3./p03,YG4./a4,SIGXXN4./p04+SIGXX
Q4./mu4./p04);
legend('sigma/mu/p0=1','sigma/mu/p0=2','sigma/mu/p0=3','sigma/mu/p0=4');
xlabel('s/a');
ylabel('SIGXXN/p0+SIGXXQ/mu/p0');
title('Q/mu/N=1');

```

## 5.10 Programa sigmafrenteQmuN.m

```

clear all; close all; clc;
[SIGXX,SIGXXN,SIGXXQ,SIGXXQG,SIGXXQP,YG,p0,a]=sigxxgrieta(100,20,0.2002,0.
5,100,1,9.22);
mu1=0.2002;
YG1=YG;
a1=a;
p01=p0;
SIGXXQP1=SIGXXQP;
SIGXXQ1=SIGXXQ;
SIGXX1=SIGXX;
SIGXXN1=SIGXXN;
[SIGXX,SIGXXN,SIGXXQ,SIGXXQG,SIGXXQP,YG,p0,a]=sigxxgrieta(100,20,0.2002,0.
5,100,1,18.44);
mu2=0.2002;
YG2=YG;
a2=a;
p02=p0;
SIGXXQP2=SIGXXQP;
SIGXXQ2=SIGXXQ;
SIGXX2=SIGXX;
SIGXXN2=SIGXXN;
[SIGXX,SIGXXN,SIGXXQ,SIGXXQG,SIGXXQP,YG,p0,a]=sigxxgrieta(100,20,0.2002,0.
5,100,1,27.863);
mu3=0.2002;
YG3=YG;
a3=a;
p03=p0;
SIGXXQP3=SIGXXQP;
SIGXXQ3=SIGXXQ;
SIGXX3=SIGXX;
SIGXXN3=SIGXXN;
[SIGXX,SIGXXN,SIGXXQ,SIGXXQG,SIGXXQP,YG,p0,a]=sigxxgrieta(100,20,0.2002,0.
5,100,1,36.88);
mu4=0.2002;
YG4=YG;
a4=a;
p04=p0;

```

```

SIGXXQP4=SIGXXQP;
SIGXXQ4=SIGXXQ;
SIGXX4=SIGXX;
SIGXXN4=SIGXXN;

```

```

figure(1);
plot(YG1./a1,SIGXXQP1./mu1./p01,YG2./a2,SIGXXQP2./mu2./p02,YG3./a3,SIGXXQP
3./mu3./p03,YG4./a4,SIGXXQP4./mu4./p04);
legend('sigma/mu/p0=1','sigma/mu/p0=2','sigma/mu/p0=3','sigma/mu/p0=4');
xlabel('s/a');
ylabel('SIGXXQP/mu/p0');
title('Q/mu/N=1');

```

```

figure(2);
plot(YG1./a1,SIGXXQ1./mu1./p01,YG2./a2,SIGXXQ2./mu2./p02,YG3./a3,SIGXXQ3./
mu3./p03,YG4./a4,SIGXXQ4./mu4./p04);
legend('sigma/mu/p0=1','sigma/mu/p0=2','sigma/mu/p0=3','sigma/mu/p0=4');
xlabel('s/a');
ylabel('SIGXXQ/mu/p0');
title('Q/mu/N=1');

```

```

figure(3);
plot(YG1./a1,SIGXXN1./p01+SIGXXQ1./mu1./p01,YG2./a2,SIGXXN2./p02+SIGXXQ2./
mu2./p02,YG3./a3,SIGXXN3./p03+SIGXXQ3./mu3./p03,YG4./a4,SIGXXN4./p04+SIGXX
Q4./mu4./p04);
legend('sigma/mu/p0=1','sigma/mu/p0=2','sigma/mu/p0=3','sigma/mu/p0=4');
xlabel('s/a');
ylabel('SIGXXN/p0+SIGXXQ/mu/p0');
title('Q/mu/N=1');

```

## 6 BIBLIOGRAFÍA

---

1. Vázquez Valeo, Jesús. Efecto de las Tensiones Residuales en la Fatiga por Fretting. Escuela Técnica Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. 2009.
2. Muñoz S, Navarro C, Domínguez J. Influencia de algunos recubrimientos sobre la resistencia a fatiga por fretting. *Análisis de Mecánica de la Fractura*. Vol. 22. 2005.
3. E. T. Moreno, E. J. Carrasquero, Y. Y. Santana, J. G. La Barbera-Sosa, Eli. S. Puchi-Cabrera, M. H. Staia. Estudio de desgaste por fretting de un recubrimiento tipo dúplex depositado sobre una aleación de aluminio 7075-T6. *Revista Latinoamericana de Metalurgia y Materiales*. Vol. 33. nº22. Caracas. 2013.
4. D.A.Hills. *Mechanics of Elastic Contacts*. Butterworth-Heinemann Ltd. 1993.
5. Vázquez J, Navarro C, Domínguez J. Explicit equations for sub-surface stress field in plane contacts. *Internal Journal of Mechanical Sciences* 67 (2013) 53-58. Universidad de Sevilla.
6. E.E.Gdouts. *Fracture Mechanics criteria and Applications*. Kluwer Academic Publishers. 1990.
7. D. Nowell, D. A. Hills. *Mechanics of fretting fatigue tests*. Pergamon Journals Ltd. 1987.
8. Kosuge D, Solomon L. B, Howie D.W, Oskouei R. H. *Head-Neck Taper Corrosion in Hip Arthroplasty*. Hindawi Publishing Corporation. 2015
9. Reza Hojjati-Talemi, Ali Zahedi, Magd Abdel Wahab, Patrick De Baets. Fretting fatigue failure mechanism of automotive shock absorber valve. *Internal Journal of Fatigue*. Volume 73, April 2015, Pages 58-65. 2016.
10. Abdullahi K. Gujba, Mamoun Medraj. Laser Peening Process and Its Impact on Materials Properties in Comparison with Shot Peening and Ultrasonic Impact Peening. *Materials* 2014, 7, 7925-7974.