XXI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
XI Congreso de Matemática Aplicada
Ciudad Real, 21-25 septiembre 2009
(pp. 1–8)

Estudio de una ecuación del calor semilineal en dominios no-cilíndricos

P. E. Kloeden[1], P. Marín-Rubio[2], J. Real[2]

[1] *Institut für Mathematatik, Johann Wolfgang Goethe-Universität, D-60054 Frankfurt am Main, Germany. E-mail:* kloeden@math.uni-frankfurt.de.
[2] *Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico., Universidad de Sevilla, Apdo. Correos 1160, 41080, Sevilla. E-mails:* pmr@us.es, jreal@us.es.

Palabras clave: ecuación del calor semilineal, dominios no-cilíndricos, sistemas dinámicos no-autónomos, atractores pullback.

Resumen

En esta comunicación presentaremos resultados de existencia y unicidad de soluciones que verifican una igualdad de energía para una ecuación semilineal en dominios no-cilíndricos (cf. [3]) basándonos en algunas ideas de [1, 2]. En la prueba se usa un método de penalización para un problema más regular y paso al límite. Tras ello, y con hipótesis adicionales, se consiguen estimaciones uniformes que permiten estudiar el comportamiento asintótico del problema.

1. Introducción y planteamiento del problema

El desarrollo en las últimas décadas del comportamiento asintótico de sistemas dinámicos infinito-dimensionales asociados a problemas sobre dominios cilíndricos ha sido amplio, tanto en dominios acotados como no acotados, así como considerando teoría de atractores autónomos o diversas versiones no-autónomas. Durante el mismo periodo se han tratado en profundidad también problemas en dominios no-cilíndricos (esto es, donde el dominio espacial varía a lo largo del tiempo). Sin embargo, la mayoría de resultados en este último ámbito tratan el problema de la existencia y unicidad de solución, pero no su comportamiento asintótico (algo en parte lógico si se tiene en cuenta que estos sistemas son intrínsecamente no-autónomos, siendo algunos resultados sobre dinámica no-autónoma y sus atractores relativamente recientes).

En particular, el caso de dominios encajados ha sido particularmente fructífero (así como otros casos más generales –no crecientes o decrecientes estrictamente, sino fluctuantes en ambos sentidos– pero en los que se imponen otras condiciones sobre dicha variación). También es reseñable que, hasta donde conocemos, igualdades de energía (y no sólo desigualdades) para dichos problemas se han obtenido sólo en casos lineales.

En estas notas tratamos una ecuación del calor semilineal en un dominio no cilíndrico con secciones espaciales crecientes con el tiempo. Obtenemos existencia y unicidad de solución satisfaciendo una igualdad de energía, basándonos en un método de penalización similar a [1]. Finalmente, bajo una hipótesis adicional sobre la fuerza externa, obtendremos acotaciones suficientes para asegurar la existencia de atractor pullback para el sistema dinámico no-autónomo asociado.

Sea $\{\mathcal{O}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ una familia de subconjuntos acotados no vacíos de $\mathbb{R}^N$ tales que

$$s < t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O}_s \subset \mathcal{O}_t, \tag{1}$$

y

$$Q_{\tau,T} := \bigcup_{t\in(\tau,T)} \mathcal{O}_t \times \{t\} \quad \text{es un subconjunto abierto de } \mathbb{R}^{N+1} \text{ para cualquier } T > \tau. \tag{2}$$

Además, denotamos

$$Q_\tau := \bigcup_{t\in(\tau,+\infty)} \mathcal{O}_t \times \{t\}, \quad \forall\, \tau \in \mathbb{R},$$

$$\Sigma_{\tau,T} := \bigcup_{t\in(\tau,T)} \partial\mathcal{O}_t \times \{t\}, \qquad \Sigma_\tau := \bigcup_{t\in(\tau,+\infty)} \partial\mathcal{O}_t \times \{t\}, \quad \forall\, \tau < T.$$

Consideramos un problema de valor inicial para una ecuación del calor semilineal, con condición Dirichlet homogénea en la frontera:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u) = f(t) \quad \text{en} \;\; Q_\tau, \\ u = 0 \;\; \text{sobre } \Sigma_\tau, \\ u(\tau, x) = u_\tau(x), \quad x \in \mathcal{O}_\tau, \end{cases} \tag{3}$$

y para cada $T > \tau$, consideramos el problema auxiliar

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + g(u) = f(t) \quad \text{en} \;\; Q_{\tau,T}, \\ u = 0 \;\; \text{sobre } \Sigma_{\tau,T}, \\ u(\tau, x) = u_\tau(x), \quad x \in \mathcal{O}_\tau, \end{cases} \tag{4}$$

donde $\tau \in \mathbb{R}$, $u_\tau : \mathcal{O}_\tau \to \mathbb{R}$ y $f : Q_\tau \to \mathbb{R}$ son dados, y siendo $g \in C^1(\mathbb{R})$ otra función dada para la cuál existen constantes no negativas α_1, α_2, β y l, y $p \geq 2$ tales que

$$-\beta + \alpha_1|s|^p \leq g(s)s \leq \beta + \alpha_2|s|^p \quad \forall\, s \in \mathbb{R} \tag{5}$$

y
$$g'(s) \geq -l \quad \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{6}$$
Ello implica que existen constantes no negativas $\widetilde{\alpha}_1$, $\widetilde{\alpha}_2$, $\widetilde{\beta}$ tales que
$$-\widetilde{\beta} + \widetilde{\alpha}_1 |s|^p \leq G(s) \leq \widetilde{\beta} + \widetilde{\alpha}_2 |s|^p \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \tag{7}$$
donde
$$G(s) := \int_0^s g(r)\, \mathrm{d}r.$$

2. Concepto de solución, igualdad de energía y algunos resultados previos

Definimos los espacios $H_r := L^2(\mathcal{O}_r)$ y $V_r := H_0^1(\mathcal{O}_r)$ para cada $r \in \mathbb{R}$ y denotamos por $(\cdot,\cdot)_r$ y $|\cdot|_r$ el producto escalar usual y la norma asociada en H_r y por $((\cdot,\cdot))_r$ y $\|\cdot\|_r$ el producto escalar de los gradientes y la norma asociada en V_r respectivamente. Para cada $s < t$ consideramos V_s como un subespacio cerrado de V_t con las funciones de V_s extendidas trivialmente por cero fuera de $\mathcal{O}_s$. De (1) se tiene que $\{V_t\}_{t \in [\tau,T]}$ es una familia de subespacios cerrados de V_T para cada $T > \tau$ con
$$s < t \quad \Rightarrow \quad V_s \subset V_t. \tag{8}$$
También denotaremos por $(\cdot,\cdot)_r$ la dualidad entre $L^{p/p-1}(\mathcal{O}_r)$ y $L^p(\mathcal{O}_r)$. Además, H_r será identificado con su dual topológico ${H_r}^*$ a través del teorema de Riesz, y V_r será considerado entonces un subespacio de ${H_r}^*$, donde cada $v \in V_r$ es identificado con el elemento $f_v \in {H_r}^*$ definido por
$$f_v(h) = (v,h)_r, \quad h \in H_r.$$
La dualidad entre V_r^* y V_r se denotará por medio de $\langle \cdot,\cdot \rangle_r$.

Finalmente, para cada $T > \tau$, denotamos
$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\tau,T} \;&:=\; \{\phi \in L^2(\tau,T;V_T) \cap L^p(\widetilde{Q}_{\tau,T}) : \phi' \in L^2(\tau,T;H_T), \\ &\qquad \phi(\tau) = \phi(T) = 0,\;\; \phi(t) \in V_t \text{ e.c.t. } (\tau,T)\}, \end{aligned}$$
donde
$$\widetilde{Q}_{\tau,T} := \mathcal{O}_T \times (\tau,T),$$
y suponemos dados $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$ y $f \in L^2(Q_{\tau,T})$, con las extensiones triviales (por cero) cuando sea conveniente.

Definición 1 *Una solución variacional de* (4) *es una función u que satisface*

C1) $u \in L^2(\tau,T;V_T) \cap L^p(\widetilde{Q}_{\tau,T})$,

C2) para toda $\phi \in \mathcal{U}_{\tau,T}$,
$$\int_\tau^T \left[-(u(t),\phi'(t))_T + ((u(t),\phi(t)))_T + (g(u(t)),\phi(t))_T \right] \mathrm{d}t = \int_\tau^T (f(t),\phi(t))_T \,\mathrm{d}t,$$

C3) $u(t) \in V_t$ *e.c.t.* (τ,T),

C4) $\lim_{t \downarrow \tau} (t-\tau)^{-1} \displaystyle\int_\tau^t |u(r) - u_\tau|_T^2 \,\mathrm{d}r = 0.$

Definimos

$$\widetilde{Q}_\tau := \bigcup_{T>\tau} \widetilde{Q}_{\tau,T}.$$

Definición 2 *Una solución variacional de* (3) *es una función* $u : \widetilde{Q}_\tau \to \mathbb{R}$ *tal que para cada* $T > \tau$ *su restricción a* $\widetilde{Q}_{\tau,T}$ *es una solución variacional de* (4).

Los dos resultados que se enuncian a continuación son pasos previos para obtener una posible igualdad de la energía para la(s) solución(es) del(de los) problema(s).

Lema 3 *Supongamos que* $v \in L^2(\tau, T; V_T) \cap L^p(\widetilde{Q}_{\tau,T})$ *y que existen* $\xi \in L^2(\tau, T; V_T^*)$ *y* $\eta \in L^{p/p-1}(\widetilde{Q}_{\tau,T})$ *tales que*

$$\int_\tau^T (v(t), \phi'(t))_T \,\mathrm{d}t = -\int_\tau^T \langle \xi(t), \phi(t)\rangle_T \,\mathrm{d}t - \int_\tau^T (\eta(t), \phi(t))_T \,\mathrm{d}t$$

para cualquier función $\phi \in \mathcal{U}_{\tau,T}$.

Para cada $0 < h < T - \tau$, *se define* v_h *como*

$$v_h(t) := \begin{cases} h^{-1}(v(t+h) - v(t)) & e.c.t.\ (\tau, T-h); \\ 0 & e.c.t.\ (T-h, T). \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{h\downarrow 0} \int_\tau^T (v_h(t), w(t))_T \,\mathrm{d}t = \int_\tau^T \langle \xi(t), w(t)\rangle_T \,\mathrm{d}t + \int_\tau^T (\eta(t), w(t))_T \,\mathrm{d}t$$

para toda función $w \in L^2(\tau, T; V_T) \cap L^p(\widetilde{Q}_{\tau,T})$ *tal que* $w(t) \in V_t$ *e.c.t.* (τ, T).

Lema 4 *Sean* $v_i \in L^2(\tau, T; V_T) \cap L^p(\widetilde{Q}_{\tau,T})$, $i = 1, 2$, *dos funciones tales que* $v_i(t) \in V_t$ *e.c.t.* (τ, T) *para* $i = 1, 2$. *Supongamos que existen* $\xi_i \in L^2(\tau, T; V_T^*)$, $\eta_i \in L^{p/p-1}(\widetilde{Q}_{\tau,T})$, $i = 1, 2$, *tales que*

$$\int_\tau^T (v_i(t), \phi'(t))_T \,\mathrm{d}t = -\int_\tau^T \langle \xi_i(t), \phi(t)\rangle_T \,\mathrm{d}t - \int_\tau^T (\eta_i(t), \phi(t))_T \,\mathrm{d}t \quad i = 1, 2,$$

para toda función $\phi \in \mathcal{U}_{\tau,T}$.

Entonces, para cualquier par $\tau \le s < t \le T$ *de puntos Lebesgue de la función producto escalar* $(v_1, v_2)_T$ *se tiene que*

$$\begin{aligned} & (v_1(t), v_2(t))_T - (v_1(s), v_2(s))_T \\ = \; & \int_s^t \langle \xi_1(r), v_2(r)\rangle_T \,\mathrm{d}r + \int_s^t \langle \xi_2(r), v_1(r)\rangle_T \,\mathrm{d}r \\ & + \int_s^t (\eta_1(r), v_2(r))_T \,\mathrm{d}r + \int_s^t (\eta_2(r), v_1(r))_T \,\mathrm{d}r \\ & + \lim_{h\downarrow 0} h^{-1} \int_s^{t-h} (v_1(r+h) - v_1(r), v_2(r+h) - v_2(r))_T \,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Tras el resultado anterior, obviamente se consigue el siguiente

Corolario 5 *Si u es una solución variacional de* (4)*, entonces para todo punto Lebesgue $t \in (\tau, T)$ de $|u|_T^2$ se tiene que*

$$\begin{aligned} & |u(t)|_T^2 + 2\int_\tau^t \|u(r)\|_T^2 \, \mathrm{d}r + 2\int_\tau^t (g(u(r)), u(r))_T \, \mathrm{d}r \\ = \quad & |u_\tau|_T^2 + 2\int_\tau^t (f(r), u(r))_T \, \mathrm{d}r + \lim_{h\downarrow 0} h^{-1} \int_\tau^{t-h} |u(r+h) - u(r)|_T^2 \, \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

De forma natural, nuestro objetivo es conseguir una solución variacional u de (4) tal que

$$\begin{aligned} & |u(t)|_T^2 + 2\int_\tau^t \|u(r)\|_T^2 \, \mathrm{d}r + 2\int_\tau^t (g(u(r)), u(r))_T \, \mathrm{d}r \\ = \quad & |u_\tau|_T^2 + 2\int_\tau^t (f(r), u(r))_T \, \mathrm{d}r \quad \text{e.c.t. } t \in (\tau, T). \end{aligned} \tag{9}$$

En tal caso diremos que u satisface la igualdad de la energía e.c.t. (τ, T). Análogamente, si u es una solución variacional de (3), diremos que u satisface la igualdad de la energía e.c.t. $(\tau, +\infty)$ si para cada $T > \tau$ la restricción de u a $\widetilde{Q}_{\tau,T}$ satisface la igualdad de la energía (9) e.c.t. (τ, T).

Para cualquier función $v \in L^2(\tau, T; H_T)$ y cualquier $t \in (\tau, T]$ se define

$$\eta_{v,T}(t) := \limsup_{h\downarrow 0} h^{-1} \int_\tau^{t-h} |v(r+h) - v(r)|_T^2 \, \mathrm{d}r.$$

Observación 6 *$\eta_{v,T}$ es una función no decreciente. Por tanto, del* Corolario 5*, se deduce que una solución variacional u de* (4) *satisface la igualdad de la energía e.c.t. (τ, T) si y sólo si $\eta_{u,T}(t) = 0$ para todo $t \in (\tau, T)$. En realidad, usando la continuidad de la aplicación*

$$t \in [\tau, T] \mapsto |u_\tau|_T^2 + 2\int_\tau^t \left[(f(r), u(r))_T - \|u(r)\|_T^2 - (g(u(r)), u(r))_T\right] \, \mathrm{d}r \in \mathbb{R},$$

se tiene que una solución variacional u de (4) *satisface la igualdad de la energía e.c.t. (τ, T) si y sólo si $\eta_{u,T}(T) = 0$.*

El siguiente lema da una condición suficiente para que u satisfaga la igualdad de la energía e.c.t. (τ, T).

Lema 7 *Sea u una solución variacional de* (4) *y supongamos que existe una sucesión $\{t_n\} \subset (\tau, T)$ de puntos Lebesgue de $|u|_T^2$ tal que $t_n \to T$ y*

$$\limsup_{n\uparrow\infty} |u(t_n)|_T^2 \leq |u_\tau|_T^2 + 2\int_\tau^T \left[(f(r), u(r))_T - \|u(r)\|_T^2 - (g(u(r)), u(r))_T\right] \, \mathrm{d}r.$$

Entonces, u satisface la igualdad de la energía e.c.t. (τ, T).

Proposición 8 *Sean u y $\overline{u}$ dos soluciones variacionales de* (4) *con datos iniciales u_τ, $\overline{u}_\tau$ $\in L^2(\mathcal{O}_\tau)$ respectivamente, y tales que satisfacen la igualdad de la energía e.c.t.* (τ, T). *Entonces*

$$|u(t) - \overline{u}(t)|_T^2 + 2\int_\tau^t \|u(r) - \overline{u}(r)\|_T^2 \, \mathrm{d}r \le \mathrm{e}^{2l(t-\tau)}|u_\tau - \overline{u}_\tau|_T^2 \qquad e.c.t.\ t \in (\tau, T).$$

Una consecuencia inmediata es el siguiente resultado de unicidad.

Corolario 9 *Dada $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$, existe a lo más una solución variacional de* (4) *satisfaciendo la igualdad de la energía e.c.t.* (τ, T).

3. Solución verificando la igualdad de energía a través de un método de penalización

Consideremos fijado un valor $T > \tau$ y para cada $t \in [\tau, T]$ denotamos

$$V_t^\perp := \{v \in V_T : \ ((v, w))_T = 0 \quad \forall\, w \in V_t\}$$

el subespacio ortogonal de V_t con respecto al producto escalar en V_T y denotamos por $P(t) \in \mathcal{L}(V_T)$ el proyector ortogonal de V_T en $V_t^\perp$, con lo que

$$P(t)v \in V_t^\perp, \quad v - P(t)v \in V_t,$$

para cada $v \in V_T$. Finalmente, se define $P(t) = P(T)$ para todo $t > T$, con lo que obsérvese que $P(T)$ es el cero de $\mathcal{L}(V_T)$.

Aproximaremos $P(t)$ por operadores más regulares en tiempo. Consideremos la familia $p(t; \cdot, \cdot)$ de formas bilineales simétricas sobre V_T dadas por

$$p(t; v, w) := ((P(t)v, w))_T \quad \forall\, v, w \in V_T, \quad \forall\, t \ge \tau.$$

Gracias a (8), se puede probar que la aplicación $[\tau, +\infty) \ni t \mapsto \mathrm{p}(t; v, w) \in \mathbb{R}$ es medible para todo par v, $w \in V_T$. Más aún, $|p(t; v, w)| \le \|v\|_T \|w\|_T$. Para cada entero $k \ge 1$ y cada $t \ge \tau$ se define

$$p_k(t; v, w) := k\int_0^{1/k} p(t + r; v, w) \, \mathrm{d}r \quad \forall\, v, w \in V_T, \quad \forall\, t \ge \tau,$$

y denotamos por $P_k(t) \in \mathcal{L}(V_T)$ el operador asociado definido por

$$((P_k(t)v, w))_T := p_k(t; v, w) \quad \forall\, v, w \in V, \quad \forall\, t \ge \tau.$$

Las funciones $\{p_k\}_k$ y los operadores $\{P_k\}_k$ tienen buenas propiedades (no exponemos todas ellas aquí por brevedad), como por ejemplo, que para cualquier sucesión $v_k \in L^2(\tau, T; V_T)$ débilmente convergente hacia v en $L^2(\tau, T; V_T)$, se tiene que

$$\liminf_{k \to +\infty} \int_\tau^T p_k(t; v_k(t), v_k(t)) \, \mathrm{d}t \ge \int_\tau^T p(t; v(t), v(t)) \, \mathrm{d}t.$$

Sea $J : V_T \to V_T^*$ el isomorfismo de Riesz $\langle Jv, w\rangle_T := ((v,w))_T \quad \forall\, v, w \in V_T$, y para cada entero $k \geq 1$ y cada $t \in [\tau, T]$ denotamos

$$A_k(t) := -\Delta + kJP_k(t).$$

Obviamente, $A_k(t) \in \mathcal{L}(V_T, V_T^*)$, $t \in [\tau, T]$, es una familia de operadores lineales continuos tales que la aplicación $t \in [\tau, T] \mapsto A_k(t) \in \mathcal{L}(V_T, V_T^*)$ es medible y acotada, y satisface

$$\langle A_k(t)v, v\rangle_T \geq \|v\|_T^2 \quad \forall\, v \in V_T \quad \forall\, t \in [\tau, T].$$

Supongamos ahora dado $u_\tau \in H_T$ y para cada $k \geq 1$ consideremos el problema

$$\begin{aligned}(u_k(t), v)_T &+ \int_\tau^t \langle A_k(r)u_k(r), v\rangle_T \,\mathrm{d}r + \int_\tau^t (g(u_k(r)), v)_T \,\mathrm{d}r \\ &= (u_\tau, v)_T + \int_\tau^t (f(r), v)_T \,\mathrm{d}r \quad \forall\, t \in [\tau, T], \quad \forall\, v \in V_T \cap L^p(\mathcal{O}_T). \qquad (10)\end{aligned}$$

El siguiente resultado se obtiene gracias a la monotonía de los operadores descritos.

Teorema 10 *Supongamos que se satisfacen* (1), (2), (5) *y* (6). *Entonces, para cada* $k \geq 1$, $f \in L^2(\tau, T; H_T)$ *y* $u_\tau \in H_T$ *existe una única solución* $u_k \in L^2(\tau, T; V_T) \cap L^p(\widetilde{Q}_{\tau,T})$ *de* (10). *Más aún,* $u_k \in C([\tau, T]; H_T)$. *Además, si* $u_\tau \in V_T \cap L^p(\mathcal{O}_T)$, *entonces* $u_k \in L^\infty(\tau, T; V_T) \cap L^\infty(\tau, T; L^p(\mathcal{O}_T))$, $u_k' \in L^2(\tau, T; H_T)$, *y*

$$\begin{aligned}&\int_\tau^T |u_k'(t)|_T^2 \,\mathrm{d}t + \|u_k\|^2_{L^\infty(\tau,T;V_T)} \\ &\qquad + k\int_\tau^T ((P_k(t)u_k(t), u_k(t)))_T \,\mathrm{d}t + 2\widetilde{\alpha}_1\|u_k\|^p_{L^\infty(\tau,T;L^p(\mathcal{O}_T))} \\ &\leq (3 + T - \tau)\Big[\|u_\tau\|_T^2 + k((P_k(\tau)u_\tau, u_\tau))_T + 2\widetilde{\alpha}_2\|u_\tau\|^p_{L^p(\mathcal{O}_T)} + 4\widetilde{\beta}|\mathcal{O}_T| + \int_\tau^T |f(r)|_T^2 \,\mathrm{d}r\Big],\end{aligned}$$

donde $\widetilde{\alpha}_1$, $\widetilde{\alpha}_2$ *y* $\widetilde{\beta}$ *son constantes dadas en* (7).

Como consecuencia del resultado anterior, haciendo $k \to +\infty$, se tiene el siguiente

Teorema 11 *Bajo las condiciones* (1), (2), (5) *y* (6), *para cada* $f \in L^2(\tau, T; H_T)$ *y* $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$ *existe una única solución variacional* u *de* (4) *satisfaciendo la igualdad de energía e.c.t.* (τ, T). *Además,* $u \in C([\tau, T]; H_T)$ *y satisface la igualdad de la energía* (9) *para todo* $t \in [\tau, T]$. *Más aún, si* $u_\tau \in V_\tau \cap L^p(\mathcal{O}_\tau)$, *entonces* u *también verifica* $u \in L^\infty(\tau, T; V_T) \cap L^\infty(\tau, T; L^p(\mathcal{O}_T))$, $u' \in L^2(\tau, T; H_T)$.

4. Existencia de $\mathcal{D}_{\lambda_1}$−atractor pullback

Por brevedad en estas notas sólo damos esquemáticamente algunas indicaciones de nuestro resultado sobre existencia de atractor (para los detalles, véase [3]).

Supongamos que $T > \tau + 1$ y $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{N+1})$ satisface

$$C_{f,T} := \sup_{t \leq T} \int_{t-1}^t |f(r)|_T^2 \,\mathrm{d}r < +\infty. \qquad (11)$$

Entonces, para cualquier $u_\tau \in L^2(\mathcal{O}_\tau)$ la correspondiente solución variacional u de (4) satisfaciendo la igualdad de la energía en (τ, T) también cumple que $u(t) \in V_T \quad \forall \tau + 1 \leq t \leq T$, y

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_T^2 \quad &\leq \quad \alpha_3 |u_\tau|_\tau^2 e^{\lambda_{1,T}(\tau - t + 2)} + [4\widetilde{\beta} + 2\alpha_3 \beta(1 + \lambda_{1,T}^{-1})]|\mathcal{O}_T| \\ &\qquad + \left(1 + 2\alpha_3 \lambda_{1,T}^{-1}(1 - e^{-\lambda_{1,T}})^{-1}\right) C_{f,T}, \end{aligned} \tag{12}$$

para todo $\tau + 1 \leq t \leq T$, donde $\alpha_3 := (1 + \widetilde{\alpha}_2 \alpha_1^{-1})$, y siendo $\lambda_{1,T}$ el primer autovalor del operador $-\Delta$ en $\mathcal{O}_T$ con condiciones de Dirichlet homogéneas.

Definimos entonces la aplicación

$$U(t,\tau)u_\tau := u(t;\tau,u_\tau), \quad -\infty < \tau \leq t < +\infty, \quad u_\tau \in H_\tau,$$

que gracias a los resultados previos, genera un proceso $U(\cdot,\cdot)$ para la familia de espacios de Hilbert $\{H_t;\ t \in \mathbb{R}\}$, i.e. $U(t,\tau) : H_\tau \to H_t$ es continuo para todo par $\tau \leq t$, $U(\tau,\tau) =$Id, para todo $\tau \in \mathbb{R}$, y se cumple que $U(t,\tau) = U(t,r)U(r,\tau)$ para toda terna $\tau \leq r \leq t$. Entonces, la teoría de $\mathcal{D}-$atractores pullback puede ser adaptada a este marco no-cilíndrico siendo el universo $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\lambda_1}$ definido como la clase de todas las familias $\widehat{D} = \{D(t);\ D(t) \subset H_t,\ D(t) \neq \emptyset,\ t \in \mathbb{R}\}$ tales que $D(t) \subset \overline{B}(0, r_{\widehat{D}}(t))$ para algún $r_{\widehat{D}} \in \mathcal{R}_{\lambda_1}$, donde $\overline{B}(0, r_{\widehat{D}}(t))$ es la bola cerrada de H_t de centro el origen y radio $r_{\widehat{D}}(t)$, y donde $\mathcal{R}_{\lambda_1}$ es el conjunto de todas las funciones $r : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ tales que

$$\lim_{t \to -\infty} e^{t\lambda_{1,t}} r^2(t) = 0,$$

siendo $\lambda_{1,t}$ el primer autovalor del operador $-\Delta$ en $\mathcal{O}_t$ con condición Dirichlet homogénea en la frontera.

La acotación (12) implica que existe una familia pullback absorbente formada por "acotados de V_t" y por tanto "compactos de H_t", de donde

Teorema 12 *Supongamos que se satisfacen las hipótesis del* Teorema 11 *y que* $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{N+1})$ *verifica* (11)*. Entonces existe un único* $\mathcal{D}_{\lambda_1}-$*atractor pullback para el proceso* U*, y pertenece a* $\mathcal{D}_{\lambda_1}$.

Agradecimientos

Trabajo parcialmente subvencionado por el Ministerio de Educación y Ciencia, proyecto MTM2005-01412. Peter Kloeden también fue parcialmente sufragado por el mismo Ministerio dentro del Programa de Movilidad del Profesorado universitario español y extranjero, ayuda SAB2004-0146.

Referencias

[1] M. L. Bernardi, G. A. Pozzi and G. Savaré, Variational equations of Schroedinger-type in non-cylindrical domains, *J. Differential Equations* **171** (2001), 63–87.

[2] S. Bonaccorsi and G. Guatteri, A variational approach to evolution problems with variable domains, *J. Differential Equations* **175** (2001), 51–70.

[3] P. E. Kloeden, P. Marín-Rubio and J. Real, Pullback attractors for a semilinear heat equation in a non-cylindrical domain, *J. Differential Equations* **244** (2008), 2062–2090.