

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**  
**FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA**



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD**  
**CATÓLICA**  
DEL PERÚ

**MEJORA DE LA ASIGNACIÓN DE TERNAS ARBITRALES  
PARA EL TORNEO DESCENTRALIZADO DEL FÚTBOL  
PERUANO USANDO PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA  
MIXTA**

Tesis para optar el Título de Ingeniero Industrial, que presenta el bachiller:

**Jean Paul Aarón Marmolejo Pablo**

**ASESOR: Wilmer Jhonny Atoche Díaz**

Lima, octubre de 2016

## RESUMEN

El objetivo de la presente investigación es mejorar la asignación de ternas arbitrales para los encuentros del Torneo Descentralizado del Fútbol Peruano mediante la implementación de un modelo matemático de Programación Lineal Entera Mixta.

En el marco teórico se describen investigaciones similares realizadas para resolver problemas relacionadas al fútbol haciendo uso de herramientas matemáticas. Además, se explica la importancia y aplicación de la Programación Deportiva en el fútbol. Por último, se exponen los conceptos de Investigación Operativa que son usados en la presente investigación.

En el diagnóstico del problema se detalla el contexto en el cual se encuentra el problema objeto de estudio. Además, en la definición de los requerimientos se expone la información básica para la elaboración del modelo como condiciones iniciales, información de equipos participantes, ternas arbitrales y categoría de los mismos.

Para el desarrollo del modelo se definen las entradas y salidas, así como los supuestos a considerar. También se definen las partes que conforman el modelo como variables, restricciones y función objetivo. Luego, en la resolución del modelo se definen los parámetros, se presenta el modelo aplicado al fútbol peruano que será resuelto, y los resultados del mismo.

Asimismo, en la validación del modelo se realizan diferentes análisis donde se exponen las mejoras de la asignación propuesta frente a la actual, como disminución de costos en 2%; mejor distribución de los ingresos, cantidad de partidos, coincidencias por equipo y distancia a recorrer por cada terna disminuyendo la desviación en 82%, 83%, 46% y 68% respectivamente; además, se presenta una matriz de asignaciones propuestas, en donde se demuestra el cumplimiento de diferentes restricciones.

Finalmente, se detallan las conclusiones y recomendaciones de la presente investigación.



*A mi mamá y papá; a mis hermanos  
Anghelo, Mhia y Daniel; a mis abuelos  
Teodoro, Alejandra y Teresa; y a Pamela.*

## AGRADECIMIENTOS

Gracias a mis padres por su infinito apoyo en especial durante estos años, a mis hermanos por ser una gran motivación, a mis abuelos por su constante cariño, a mis tíos y tías por estar siempre, y gracias Pamela por tu apoyo incondicional.

Gracias a mis amigos de colegio y universidad por las gratas experiencias que vivimos juntos y por la que vendrán.

Gracias a mi asesor, Wilmer Atoche, por su importante apoyo para el desarrollo del presente trabajo.

Gracias a mis profesores desde primer a último ciclo de esta gran universidad, por sus enseñanzas y consejos que me ayudan a ser mejor persona y profesional.

Gracias a todos los que comparten conmigo esta afición incontrolable por el fútbol, por sus buenos deseos, experiencia y conocimiento.

Gracias a mi equipo, Universitario, por el vaivén de emociones, por los abrazos de gol, siempre serás una gran motivación

## ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS .....	iii
ÍNDICE DE FIGURAS.....	iv
INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO.....	3
1.1.    Antecedentes .....	3
1.1.1.    Referee assignment in the Chilean football league using integer programming and patterns .....	3
1.1.2.    On Assigning Referees to Tournament Schedules .....	8
1.1.3.    Scheduling Major League Baseball Umpires and the Traveling Umpire Problem 10	10
1.2.    Programación deportiva .....	11
1.2.1.    Importancia de la programación deportiva en el fútbol .....	11
1.2.2.    Aplicaciones de la programación deportiva en el fútbol.....	12
1.3.    Investigación de operaciones y la programación .....	16
1.3.1.    Introducción a los modelos .....	16
1.3.2.    Programación Lineal .....	17
1.3.3.    Aplicaciones de la programación lineal .....	20
1.3.4.    Programación entera .....	21
1.3.5.    Aplicaciones de la programación entera .....	22
1.3.6.    Restricciones especiales en programación entera .....	23
1.3.7.    Lenguajes y softwares para resolver modelos de programación lineal .....	24
CAPÍTULO 2. DIAGNÓSTICO DEL PROBLEMA.....	26
2.1.    Contexto .....	26
2.2.    Diagnóstico.....	28
2.2.1.    Problema de la asignación de árbitros.....	33
CAPÍTULO 3. DEFINICIÓN DE REQUERIMIENTOS .....	35
3.1.    Condiciones iniciales.....	36
3.2.    Equipos participantes.....	38
3.3.    Categoría de partidos.....	39
3.4.    Categoría de árbitros .....	42
CAPÍTULO 4. DESARROLLO DEL MODELO.....	45
4.1.    Supuestos .....	45
4.2.    Sets o conjuntos.....	46
4.3.    Atributos .....	46
4.4.    Variables de decisión .....	47
4.5.    Función Objetivo .....	48
4.6.    Restricciones.....	48
CAPÍTULO 5. RESOLUCIÓN DEL MODELO.....	52
5.1.    Definición de parámetros .....	52
5.1.1.    Cantidades máximas y mínimas de partidos que cada terna debe de ser asignada. (MinPTA y MaxPTA) .....	52

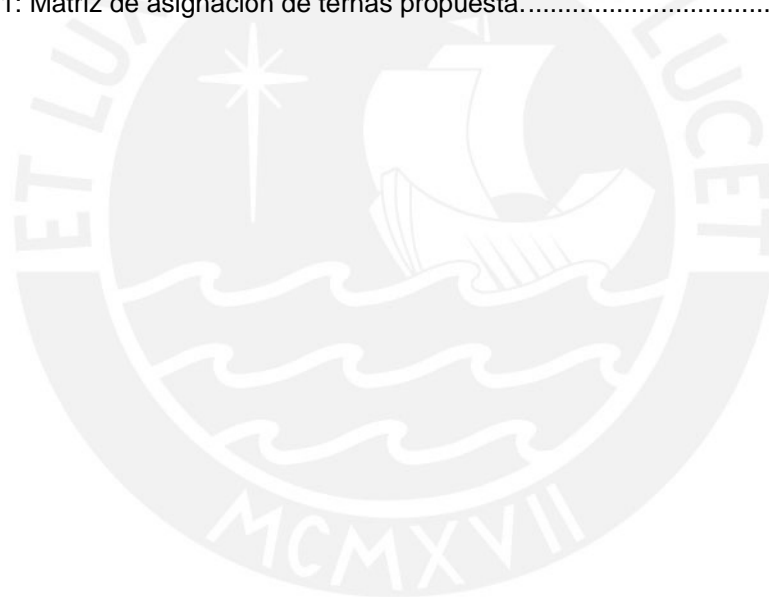
5.1.2.	Cantidades máximas y mínimas de coincidencias entre ternas y equipos (MinTAE y MaxTAE) .....	53
5.1.3.	Cantidad de fechas que deben de transcurrir para que una terna vuelva a dirigir un partido con el mismo equipo (N) .....	53
5.1.4.	Cantidad de fechas como máximo en las que una terna no es asignado a un partido (S) .....	54
5.1.5.	Distancias mínimas y máximas a ser recorrida por los árbitros por viajes realizados durante el campeonato (DMinTA y DMaxTA) .....	54
5.1.6.	Cantidad de Kilómetros como máximo que una terna debe de viajar durante D fechas (KM) .....	55
5.2.	Modelo aplicado a Torneo Descentralizado del fútbol peruano .....	56
5.3.	Resolución del modelo de programación lineal entera .....	60
CAPÍTULO 6. VALIDACIÓN DEL MODELO .....		61
6.1.	Costos de asignación .....	61
6.2.	Partidos asignados a cada terna .....	63
6.3.	Coincidencia de partidos entre una terna y equipo .....	66
6.4.	Distancia recorrida por cada terna .....	68
6.5.	Relación Fecha – Partidos acumulados .....	69
6.6.	Relación Fecha – Distancia Acumulada .....	72
6.7.	Matriz de asignaciones propuestas .....	74
CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....		75
7.1.	Conclusiones .....	75
7.2.	Recomendaciones .....	78
BIBLIOGRAFÍA .....		79

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Entidades responsables del fútbol peruano.....	29
Tabla 2: Costos de árbitros por partido.....	34
Tabla 3: Equipos participantes.....	38
Tabla 4: Distancia de ciudades.....	39
Tabla 5: Partidos de categoría A.....	40
Tabla 6: Equipos de Lima.....	40
Tabla 7: Equipos del Norte.....	41
Tabla 8: Equipos del Centro.....	41
Tabla 9: Equipos del Sur.....	41
Tabla 10: Categorías de árbitros.....	43
Tabla 11: Categorías de ternas.....	44
Tabla 12: Costo de ternas arbitrales.....	44
Tabla 13: Costos reales de asignación.....	61
Tabla 14: Resumen costos reales de asignación.....	62
Tabla 15: Costos de asignación propuestos.....	62
Tabla 16: Resumen costos de asignación propuestos.....	63
Tabla 17: Resumen asignaciones reales a cada terna.....	64
Tabla 18: Resumen asignaciones reales a cada terna.....	65
Tabla 19: Resumen coincidencias Terna - Equipo reales.....	66
Tabla 20: Resumen coincidencias Terna - Equipo propuestas.....	67
Tabla 21: Resumen de distancias totales reales de cada terna.....	68
Tabla 22: Resumen de distancias totales propuestas de cada terna.....	69
Tabla 23: Resumen de relaciones Fecha – Partidos Acumulados reales.....	70
Tabla 24: Resumen de relaciones Fecha – Partidos Acumulados propuesto.....	71
Tabla 25: Resumen de relaciones Fecha – Distancia Acumulada reales.....	72
Tabla 26: Resumen de relaciones Fecha – Distancia Acumulada propuestas.....	73

## ÍNDICE DE FIGURAS.

Figura 1: Asignación real de árbitros por equipo. ....	4
Figura 2: Asignación propuesta de árbitros por equipo. ....	5
Figura 3: Distancia real recorrida por árbitro. ....	5
Figura 4: Distancia promedio real recorrida por árbitro. ....	6
Figura 5: Distancia recorrida por árbitro propuesta por modelo. ....	6
Figura 6: Distancia recorrida promedio por árbitro propuesta por modelo. ....	7
Figura 7: Región factible .....	19
Figura 8: Solución óptima .....	20
Figura 9: Región factible PE y PL relajado. ....	22
Figura 10: Diagrama causa-efecto de la crisis del fútbol peruano.....	30
Figura 11: Cantidad de partidos asignados a cada terna. ....	64
Figura 12: Cantidad de partidos asignados a cada terna propuesto. ....	65
Figura 13: Coincidencia Terna – Equipo reales.....	66
Figura 14: Coincidencia Terna – Equipo propuestas.....	67
Figura 15: Distancias totales reales recorrida por terna. ....	68
Figura 16: Distancias totales propuestas recorrida por terna. ....	69
Figura 17: Relación Fecha – Partidos Acumulados reales.....	70
Figura 18: Relación Fecha – Partidos Acumulados propuesto.....	71
Figura 19: Relación Fecha – Distancia Acumulados real. ....	72
Figura 20: Relación Fecha – Distancia Acumulados propuesta. ....	73
Figura 21: Matriz de asignación de ternas propuesta.....	74





## INTRODUCCIÓN

En el Perú y el mundo, el fútbol está consolidado como el deporte más importante, puesto que es el que más acogida tiene y también el que mayor cantidad de dinero mueve. Sin embargo, en nuestro país este deporte atraviesa una severa crisis, la cual tiene diferentes causas, entre ellas se encuentra el problema de la asignación de árbitros para los principales torneos a disputarse en toda la nación. Por ello el presente estudio hará uso de herramientas de investigación de operaciones para elaborar un modelo que resuelva el problema mencionado.

El primer capítulo consiste en el marco teórico el cual abarca los fundamentos y herramientas a emplear en el presente trabajo como: programación lineal y programación deportiva. Además, se expondrán diferentes trabajos de investigación que hicieron uso de herramientas similares para aplicarlos a problemas relacionados al tema en mención.

En el segundo capítulo se hará un diagnóstico integral del problema de la asignación de ternas arbitrales desde las características más generales hasta las más específicas, para la cual se detallara en primera instancia el contexto de la misma para tener un entendimiento más amplio.

En el tercer capítulo se explicarán los insumos necesarios para la elaboración del modelo a desarrollar tales como condiciones propias del deporte como del torneo específico evaluar.

En el cuarto capítulo, se detallara el desarrollo del modelo, definiendo en primera instancia los supuestos para limitar el alcance del modelo, y los elementos del modelo en sí como: atributos, variables de decisión, restricciones y función objetivo

En el quinto capítulo se definirán y justificaran el valor de los parámetros del modelo, los cuales determinaran directamente a los resultados a obtener; y finalmente se detallara el resultado obtenido del modelo desarrollado.

En el sexto capítulo se analizan los diferentes valores obtenidos para la validación correspondiente del modelo

Y finalmente, en el séptimo capítulo se detallan las conclusiones y recomendaciones del presente estudio.



## CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO.

En el presente capítulo se detallarán los fundamentos teóricos a utilizar en para el presente estudio como programación lineal entera mixta y programación deportiva; además se tomarán en cuenta también diferentes investigaciones como tesis y *papers* que también hicieron uso de los fundamentos teóricos anteriormente mencionados.

### 1.1. Antecedentes

A continuación se describen investigaciones realizadas para resolver problemas de elaboración de fixtures<sup>1</sup> y asignación de árbitros en otros países.

#### 1.1.1. Referee assignment in the Chilean football league using integer programming and patterns

En esta tesis presentada por Fernando Alarcón para optar el grado de magister en gestión de operaciones en la Universidad de Chile el 2009, se hizo un estudio del problema de la asignación de árbitros en la primera división del fútbol chileno (Alarcón 2009). El problema se resuelve mediante un modelo de programación lineal entera tomando en cuenta ciertos elementos a considerar como cantidad mínima de partidos a dirigir por cada árbitro, distancia recorrida a lo largo de campeonato, categorías de árbitro requerido según magnitud de partido, etc. De tal manera busca realizar una asignación más justa, objetiva y transparente. Mediante este modelo se reduce considerablemente el tiempo empleado para realizar la asignación, ya que está actualmente tomó 48 horas por fecha programada.

El autor realizó el modelo en base al fixture del torneo de primera división del fútbol chileno del año 2007, y posteriormente comparó los elementos tomados en cuenta entre la asignación propuesta y la que se realizó en el 2007 en el fútbol chileno.

---

<sup>1</sup> Programación de eventos deportivos para un determinado torneo.

Las variables de decisión que consideró fueron las siguientes:

- $x(a, p)$ : Decisión de asignar a árbitro  $a$  en el partido  $p$ .
- $dif(a)$ : Diferencia entre la meta de partidos asignados y la cantidad de asignaciones reales.

Además la función objetivo planteada fue la de minimiza la sumatoria de todas las variables  $dif(a)$ , es decir, la diferencia entre meta de partidos y partidos asignados.

Para el planteamiento y resolución del modelo, se emplearon todas las normas impuestas por la Asociación Nacional del Fútbol Profesional de Chile, tomando en cuenta la participación de 21 equipos, 16 árbitros, 420 partidos y 10 partidos por fecha. Teniendo en total 6737 variables y 26310 constantes.

De tal manera se realizó una comparación de los resultados obtenidos con la asignación real. Por ejemplo, en la figura 1 se muestra la cantidad de partidos en la que cada árbitro dirigió a cada equipo en el torneo del 2007.

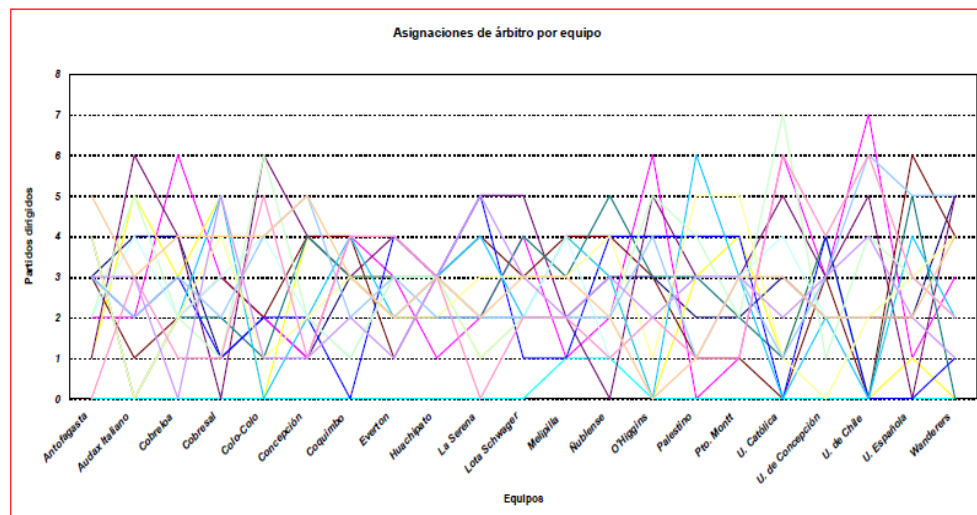


Figura 1: Asignación real de árbitros por equipo.  
Fuente: Alarcón (2009)

Cada línea un color representa a cada árbitro, se puede observar que hay casos donde un árbitro no dirige siquiera un solo partido a un equipo y por otro lado, hay casos donde un mismo árbitro dirige hasta

7 veces a un equipo. Con la resolución del modelo estos resultados cambiaron y se obtuvo una mejor distribución en la asignación de árbitros por equipo como se puede apreciar en la figura 2.

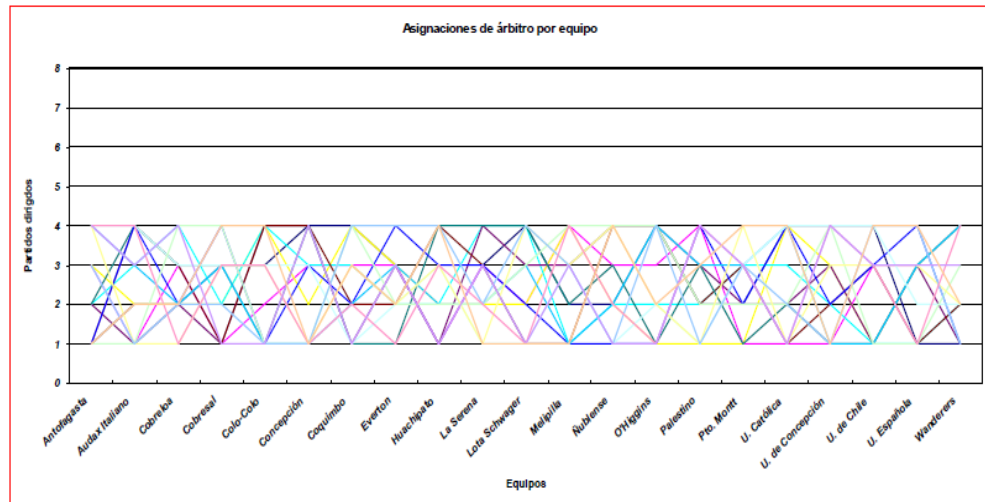


Figura 2: Asignación propuesta de árbitros por equipo.  
Fuente: Alarcón (2009)

Asimismo obtuvo mejores resultados en la cantidad de kilómetros recorridos por árbitro durante el campeonato y en promedio por partido, en las figuras 3 y 4 se muestran los resultados reales.

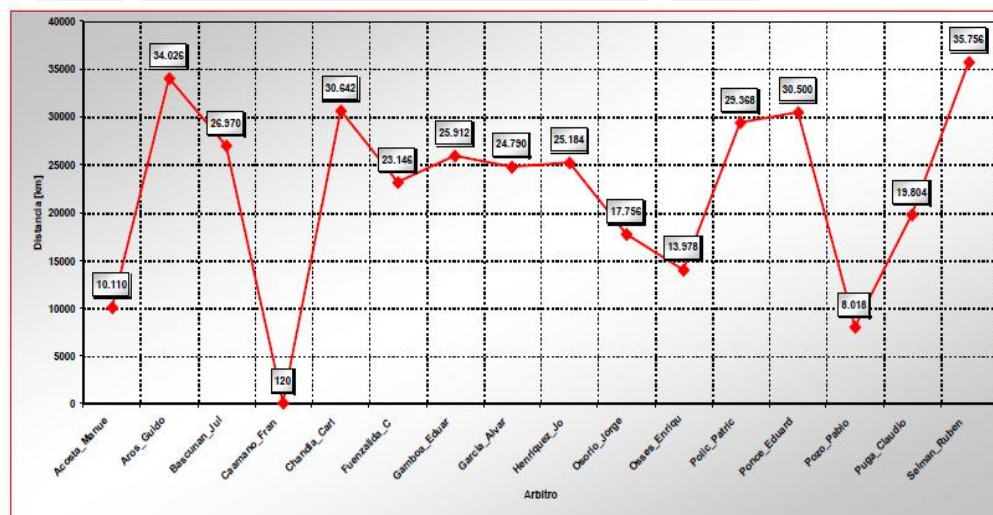


Figura 3: Distancia real recorrida por árbitro.  
Fuente: Alarcón (2009)

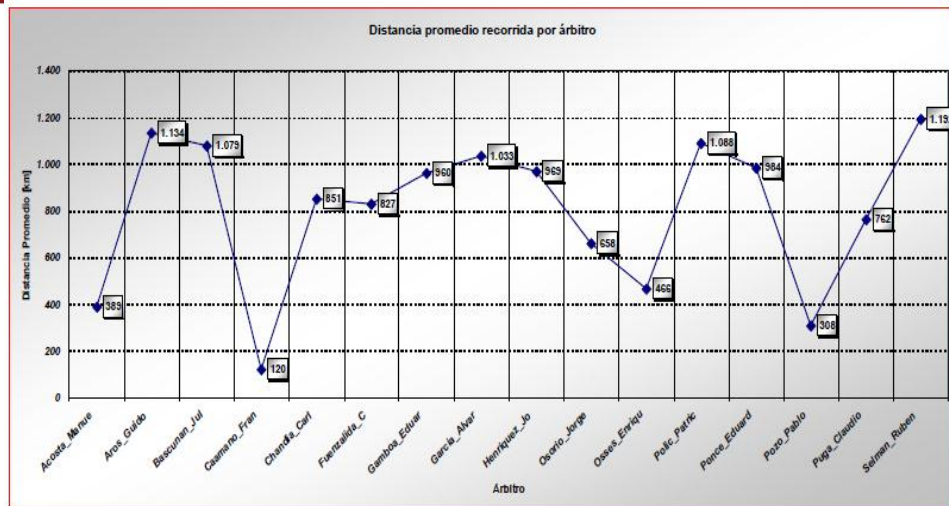


Figura 4: Distancia promedio real recorrida por árbitro.  
Fuente: Alarcón (2009)

Como se puede observar, algunos árbitros recorren hasta 35,000 Km durante el campeonato, mientras algunos ni superan los 10,000 Km; por otro lado, en promedio algunos árbitros superan los 1,100 Km, mientras otros apenas llegan a 400 km en promedio. Lo cual nos indica que existe una desviación alta de distancia recorrida por cada árbitro lo que en términos laborales no es correcto, puesto el desgaste es mayor en algunos árbitros lo cual puede traer consecuencias nada favorables en sus funciones.

Mientras que en las figuras 5 y 6 se muestran los resultados obtenidos mediante la programación lineal entera.

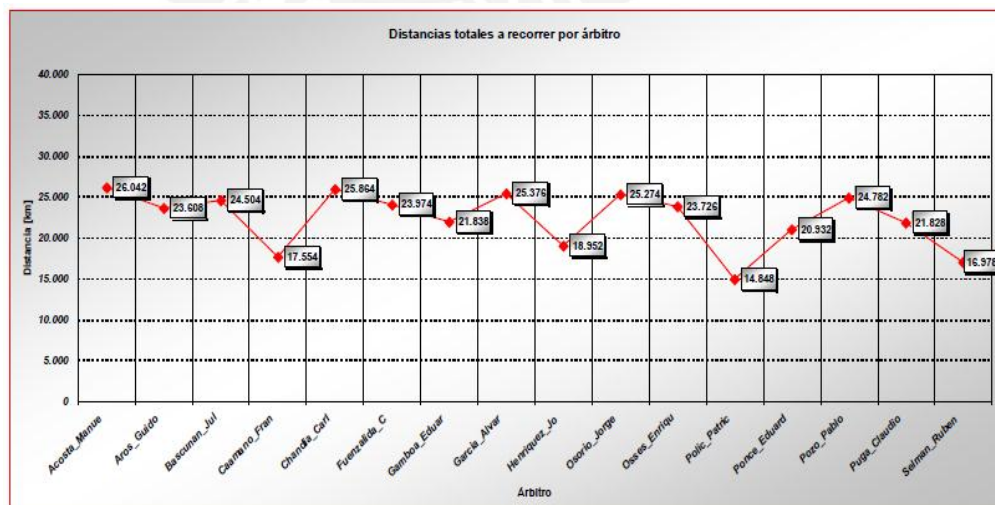


Figura 5: Distancia recorrida por árbitro propuesta por modelo.  
Fuente: Alarcón (2009)

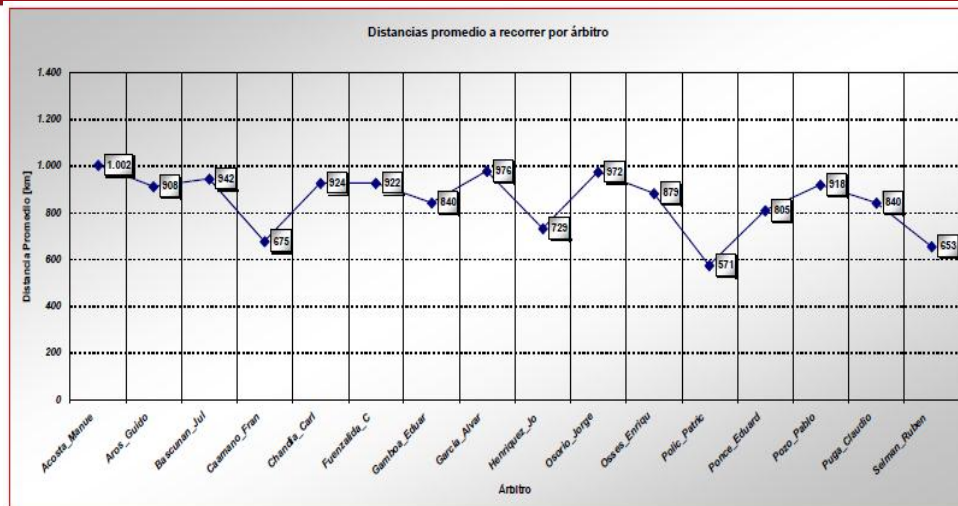


Figura 6: Distancia recorrida promedio por árbitro propuesta por modelo.  
Fuente: Alarcón (2009)

Claramente se puede apreciar una disminución en la desviación de los elementos mencionados, pues las distancias totales propuestas están limitadas entre 15,000 y 26,000 Km, mientras las distancias promedio ahora tienen un rango entre 550 y 1,000 Km, lo cual claramente refleja una mejora, ya que el desgaste por viajes de todos los árbitros será más igualitario.

Además, el autor concluye que el modelo elaborado cumple con todos los requisitos iniciales y propuestos, así también logra obtener un valor de solución óptima igual a 0, lo que significa que la sumatoria de las diferencias entre las metas y partidos asignados a cada árbitro es igual a 0, es decir, todos cumplieron con el objetivo de partidos a dirigir. Así mismo, realizar la asignación de árbitros para el torneo en mención mediante la herramienta propuesta disminuye notablemente la cantidad de tiempo requerido e incluso logra entregar un resultado más neutral y justo en términos deportivos, pues el modelo matemático realizará la asignación de manera mucho más objetiva y eficiente.

### 1.1.2. On Assigning Referees to Tournament Schedules

*Paper* elaborado por Alexandre R. Duarte, Celso C. Ribeiro, Sebastián Urrutia, and Edward H. Haeusler de las universidades Católica de Rio de Janeiro, Federal Fluminense y la Federal de Minas Gerais en el 2007, los autores mencionan que la optimización en los deportes es un campo que viene abarcando mayor interés, pues ya han sido empleadas técnicas de optimización combinatorial para la elaboración de *fixtures* de torneos de diferentes deportes alrededor del mundo.

Indican que un problema muy común en la administración deportiva es la asignación de árbitros a los encuentros previamente programados, pues existen varios objetivos y reglas a seguir. Para ello el problema es formulado a través de un modelo de programación lineal. Por ello los autores para hacer frente a los problemas de asignación de árbitros proponen un enfoque heurístico trifásico basado en un procedimiento constructivo, una heurística de reparación para encontrar soluciones factibles y una heurística de búsqueda para mejora las soluciones factibles.

Consideran que el problema de la asignación de árbitros está principalmente relacionada con el número de posiciones donde son asignados los árbitros y la cantidad de posiciones libre que quedan sin asignar, estas posiciones libres son llamadas *refereeing slot*, pues en muchos deportes se realizan pre-asignaciones para algunos encuentros por razones como requerimiento de algún árbitro con mayores habilidades y experiencia. Ello conlleva a que el modelo propuesto pueda ser aplicado en torneos de deportes donde se tiene una cantidad de árbitros requeridos diferente.

El modelo propuesto tiene como variable decisión binaria  $X_{ij}$  la cual corresponde a la decisión de asignar al árbitro  $i$  a un *refereeing slot*  $j$ . Así mismo, la función objetivo propuesta es de minimizar el total de diferencias entre la cantidad de encuentros que tiene como meta cada árbitro y el actual número de encuentros dirigidos. La solución está



compuesta por una heurística trifásica, donde el primer paso consiste en aplicar una heurística voraz para encontrar una solución inicial que posiblemente viole algunas restricciones; en segundo paso se aplica una heurística de reparación la cual es aplicada siempre que sea necesario para hacer de la solución inicial una solución factible: por último, una vez que se tenga la solución factible esta es mejorada para minimizar cada vez más el resultado de la función objetivo. De tal manera, se logró obtener una solución óptima cumpliendo con todas las restricciones y de igual manera minimizando hasta 0 el valor de la solución.



### 1.1.3. Scheduling Major League Baseball Umpires and the Traveling Umpire Problem

*Paper* presentado por Michael Trick, Hakan Yildiz y Tallys Yunes de Estados Unidos. Los autores presentan el problema de asignación de árbitros que existe en la liga de béisbol más importante de Estados Unidos, la Major League Baseball, la cual está compuesta por 30 equipos que juegan 2,430 juegos y 780 series durante un seis meses. Durante la temporada un árbitro suele dirigir aproximadamente 142 partidos, veinte partidos menos que los jugadores; sin embargo, ellos deben viajar por todo el país para cumplir con sus labores, ello incrementa costos logísticos para la Major League Baseball, asimismo la MLB requiere que para que el torneo sea más limpio, un mismo árbitro no asigne muy frecuentemente a un mismo equipo.

Para ello, los autores propusieron inicialmente un modelo de programación entera, los cuales encontraron soluciones óptimas en muy corto tiempo; sin embargo, fue empleado para un supuesto torneo de 12 hasta 14 equipos, pero a la hora de probarlo con los parámetros de la real MLB ningún modelo fue capaz de encontrar una solución factible para un torneo de 16 equipos. Por ello los autores emplearon un enfoque heurístico, similar al empleado por el *paper* del inciso 1.1.2, que consistía inicialmente en aplicar una heurística voraz para encontrar una solución inicial y a partir de allí mejorarla usando una búsqueda local en un marco de recocido simulado hasta encontrar una solución óptima.

## 1.2. Programación deportiva

La programación deportiva, también llamada *Sports Scheduling*, ha venido desarrollándose en las últimas décadas con el objetivo de resolver los problemas más frecuentes en la programación de ligas y torneos de diferentes deportes. Por ello, existen ciertas instituciones que brindan tal servicio, una de las más importantes es The Sports Scheduling Group de Estados Unidos que según su página web es una colección de distinguidos profesionales talentosos que se dedican a asistir ligas deportivas profesionales y conferencias atléticas intercolegiales para maximizar el valor de sus encuentros. Este grupo asiste a competencias deportivas muy importantes a nivel mundial como a la Major League Baseball, liga profesional de béisbol, y a la National Football League, liga nacional de fútbol americano, ambas de Estados Unidos, las cuales se encuentran entre las competencias deportivas más importantes en el mundo como la Copa Mundial FIFA y los Juegos Olímpicos, tanto por la audiencia, alta competitividad e ingresos económicos.

Asimismo durante los últimos años se han realizado diferentes investigaciones en esta disciplina una de ellas es el Traveling Tournament Problem, la cual consiste en un problema de optimización matemática que ha sido ampliamente estudiado, el problema consiste principalmente es programar un fixture para equipos de algún torneo o competencia el cual minimice la distancia recorrida por cada equipo considerando ciertas restricciones (Brikson, 2008). La programación deportiva en los deportes es de vital importancia, pues no solo tiene como objetivo asegurar un desarrollo eficiente del encuentro o torneo a disputarse, sino también en todos los elementos que derivan y dependen del encuentro y/o torneo disputado, como programación de equipos a enfrentarse, horario del partido, estadio a utilizarse, asignación de árbitros, transmisión del encuentro, etc.

### 1.2.1. Importancia de la programación deportiva en el fútbol

Es importante mencionar que la programación deportiva se encuentra en el fútbol desde sus inicios, pues siempre se tuvo que definir el lugar, horario de juego, alineaciones y árbitros, que en un inicio eran

dos principales uno asignado por cada equipo. Sin embargo, actualmente la Programación Deportiva cada vez viene siendo más compleja según la cantidad de objetivos que se quiera optimizar tales como maximizar la eficiencia de viajes, mantener una competencia justa y de igual manera acomodar los diversos constituyentes del espectáculo que incluye a los clubes, jugadores, árbitros, fans, medios, sponsors, estadios y operadores.

#### 1.2.2. Aplicaciones de la programación deportiva en el fútbol

La Programación Deportiva es esencial para el fútbol, pues incluye muchos factores económicos, logísticos y deportivos que dependen de la misma, prueba de ello es la creciente inversión año a año que se tiene en el fútbol desde la liga más importante hasta las menos populares, por ello las organizaciones responsables de estos eventos se interesan en contar con ciertas herramientas, softwares, que les permita programar el torneo o liga de una manera rápida considerando todos los factores anteriormente mencionados.

- **Clubes:** En primer lugar, los clubes de fútbol anualmente o incluso semestralmente realizan ciertas inversiones para poder cumplir con sus objetivos a corto, mediano y largo plazo los cuales pueden ser obtención de un campeonato nacional o internacional, clasificación a un torneo internacional, ascender o mantener de categoría, etc. Por ello sus inversiones están principalmente dirigidas a compra, venta y préstamo de jugadores, inversión en divisiones menores, inversión en infraestructura, mantenimiento de estadios, negociación con auspiciadores, etc. Por ello, es muy importante tener una programación deportiva adecuada para que no sea vean afectados los intereses de todos los clubes participantes y que se desarrolle una competencia justa para todos.
- **Estadios:** Otro factor muy importante es la programación de los escenarios deportivos donde se realizan los encuentros, pues se tiene que considerar siempre la ubicación del estadio, capacidad del mismo, disponibilidad, cantidad espectadores estimados y la

magnitud del encuentro, también es importante la seguridad del escenario y el resguardo policial o seguridad privada que requiera el encuentro. Muchas veces han ocurrido hechos lamentables dentro y fuera de los estadios, como peleas entre hinchadas rivales o incluso del mismo equipo, robos, daños a viviendas aledañas, etc. Por ello, los encuentros deben realizarse en días donde no existan otros eventos deportivos o no deportivos de gran magnitud en la misma zona o ciudad. Pues se correría un riesgo de no tener el control en la seguridad de los eventos a realizarse en simultáneo o también insatisfacción por los mismos hinchas que posiblemente quieran asistir a ambos eventos, tráfico que pueda generarse en la ciudad, entre otras consecuencias que podrían ser evitadas con una óptima programación deportiva. Todo ello debe ser considerado en la programación deportiva para que no existan inconvenientes en el desarrollo del torneo.

- **Jugadores:** Así mismo otro factor importante son los jugadores, quienes son los protagonistas de este deporte. Si bien, la programación deportiva no se encarga de realizar la alineación de los equipos para cada encuentro, es importante considéralos, pues a pesar de ser deportistas profesionales son seres humanos que como cualquier persona que forma parte del mundo laboral tiene derechos y deberes que deben ser cumplidos. No sería ideal ni justo para ellos que se programen una gran cantidad de partidos en un corto intervalo de tiempo, pues serían más frecuentes las lesiones, fatigas y bajo rendimiento de los futbolistas. Un caso reciente en el fútbol donde los futbolistas decidieron reclamar por sus derechos fue Brasil en el año 2013 donde los jugadores de diferentes equipos aprovecharon en plenos partidos reclamar cambios profundos en el calendario de partidos, pues en los torneos estatales, que se realizan a principios de año entre equipos de un mismo estado que pueden ser desde equipos de primera división hasta equipos de tercera división, en promedio tienen 23 fechas en aproximadamente tres meses y medio, lo que obligaba a

realizarse hasta 3 fechas por semana. De tanta magnitud fue esta protesta que entre los mismos jugadores crearon el movimiento Bom Senso F.C. (Sentido Común Fútbol Club, en su traducción del portugués). Este factor, también es tomando en cuenta en la programación deportiva, pues como se mencionó líneas arriba los jugadores son los protagonistas de este deporte.

- **Medios de comunicación:** Otro factor importante son los medios de comunicación pues gracias a ellos es que los organizadores y clubes obtienen grandes ingresos económicos. Por ejemplo, uno de los partidos más importantes a nivel mundial como los encuentros entre Real Madrid y Barcelona tienen aproximadamente 500 millones de telespectadores en casi 100 países, y por ello reciben grandes cantidades de dinero por el derecho de transmisión de sus partidos. En el Perú, la compañía Movistar, a través del canal CMD, es la que en los últimos años ha tenido los derechos de transmisión de partidos de primera y segunda división del fútbol peruano; sin embargo, hace solo un par de años ya han existido propuestas de otras compañías televisivas como Gol TV para tener los derechos de transmisión de los encuentros. Para que estas y otras compañías sigan invirtiendo en el fútbol peruano, se requiere tener un torneo atractivo y competitivo, lo cual se puede obtener a través de una eficiente programación deportiva.
- **Árbitros:** Además es importante considerar la asignación de ternas arbitrales. Tanto los árbitros como los jueces de líneas tienen una labor muy importante dentro de los partidos la cual es muy sensible pues, de ellos depende mucho la fluidez del juego, la calidad del partido y, en muchos casos, la definición del partido. Además son los responsables de que el juego sea limpio y también en dar luz verde a la realización del encuentro, en resumen son la máxima autoridad dentro de los partidos de fútbol. Al igual que los futbolistas son personas con deberes y derechos que deben ser cumplidos y también suelen errar, ya que errar es humano; sin

embargo, un error por parte de los árbitros puede ser severo, pues puede definir el resultado de un partido mediante la validación de un gol no válido o viceversa, amonestación o expulsión incorrecta a un jugador, error en cobro de off-side y faltas, saque de meta o tiro de esquina, tiro libre o tiro penal entre otros, etc. Estos errores pueden influir directamente al resultado del partido y posteriormente en la obtención de un campeonato, pérdida de categoría o algún otro objetivo establecido por cada club.

Estos errores tienen como causas muchos factores, entre ellos una mala programación deportiva, pues muchas veces se realiza una incorrecta o no óptima asignación de ternas arbitrales, por ejemplo: no se toma en cuenta el trajín de los árbitros, la experiencia de los mismos, cantidad de partidos arbitrados, distancias recorridas por viajes durante el campeonato, estado físico, etc. Todo lo mencionado demuestra lo muy sensible que puede ser este factor para un correcto desarrollo de un partido o torneo de fútbol, lo cual debe ser considerado en la programación deportiva para hacer del fútbol un espectáculo más justo y atractivo.

Una programación deportiva óptima debe considerar todos los factores expuestos para permitir un desarrollo correcto del torneo y en consecuencia se ejerza una competencia de alto nivel, justa y atractiva. De tal manera todos los elementos relacionados al fútbol se verán beneficiados desde los incondicionales hinchas que invierten su tiempo y dinero en seguir a sus equipos, los clubes que tendrán una competencia libre y justa para conseguir sus objetivos, y las compañías como medios de comunicación y sponsors que estarán dispuestas a invertir en el fútbol, inversión que les será retribuida con posicionamiento de sus marcas, mayores ventas, etc.

Así mismo, cabe resaltar que la programación deportiva puede ser aplicada a cualquier deporte que requiera la mayoría de estos elementos tanto en competencias profesionales o amateur.

## 1.3. Investigación de operaciones y la programación

### 1.3.1. Introducción a los modelos

La investigación de operaciones o también llamada ciencia de la administración se define como un enfoque científico para la toma de decisiones que busca el mejor diseño para las operaciones de un sistema, que normalmente requiere la asignación de recursos escasos (Winston 2005).

Un modelo de optimización busca encontrar valores dentro los que sean posibles satisfaciendo las restricciones dadas para optimizar una función objetivo. Existen algunos tipos de modelos como:

- **Modelos lineales y no lineales:** Un modelo lineal básicamente es uno en el cual las variables está multiplicadas solo por constantes y se encuentran acotadas en forma de suma o resta, cualquier modelo que no sea de esta manera es considerado un modelo no lineal.
- **Modelos estáticos y dinámicos:** Un modelo estático es el que solo requiere de un intento para resolverse, mientras que uno dinámico requiere de más interacciones para llegar al resultado óptimo
- **Modelos enteros y no enteros:** Básicamente un modelo entero es en el que los valores que toman las variables son enteros, mientras que en uno no entero es en el cual las variables tienen libertad para asumir cualquier valor real.
- **Modelos determinísticos y estocásticos:** Un modelo determinístico es el cual para cualquier valor de las variables se conoce con certeza el resultado final, de no ser así será un modelo estocástico.



### 1.3.2. Programación Lineal

La programación lineal es una herramienta matemática para resolver problemas de optimización mediante un sistema de ecuaciones y/o inecuaciones lineales, la cual es empleada para la toma de decisiones (Winston, 2005). Consiste en maximizar o minimizar una función lineal, conocida como función objetivo, tomando en cuenta que las variables de esta función están limitadas por ciertas restricciones las cuales pueden ser ecuaciones o inecuaciones lineales.

Según Winston (2005): “Una función  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es una función lineal si y solo sí para algún conjunto de constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$   $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ ”.

Las partes de la programación lineal están compuestas por:

- **Función objetivo:** Corresponde a la función que se desea maximizar o minimizar, esta función está compuesta por las variables de decisión y sus respectivos coeficientes.

Ejemplo:

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

- **Variables de decisión:** Se definen las variables pertinentes que deben describir por completo las decisiones que se tienen que tomar. El valor final de estas variables son las que definen el resultado de la función objetivo.

Ejemplo:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n.$$

- **Restricciones funcionales:** En la mayoría de los problemas de programación lineal las variables de decisión siempre estará sujetas a cierta cantidad de recursos limitados por ejemplo tiempo, dinero, espacio. Estos recursos limitados restringen un conjunto de valores que deben tomar las variables de decisión.

Ejemplo:

$$R1: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq A$$

$$R2: b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n \leq B$$

.....

$$Rm: m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n \leq M$$

- **Restricciones de signo:** Básicamente consiste en especificar si las variables de decisión tomarán un valor positivo o cualquier número real.

Ejemplo:

$$RS: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$$

Asimismo según Hillier (2010), implícitamente se tienen ciertos supuestos en la formulación de los modelos de programación lineal. Las suposiciones básicas de la programación lineal son las siguientes:

- **Suposición de proporcionalidad:** Implica que la contribución de cada variable al valor de la función objetivo es proporcional al nivel de cierto valor. Así mismo, la contribución de cada variable al lado izquierdo de cada restricción es proporcional al nivel de la variable.
- **Suposición aditiva:** Indica que el valor de la función objetivo o el lado izquierdo de cierta restricción es la sumatoria de las contribuciones individuales de las variables.
- **Supuesto de divisibilidad:** Indica que las variables de decisión pueden tomar cualquier valor, incluso valores no enteros, siempre y cuando satisfagan las restricciones funcionales y de signo. Ya que cada variable representa el nivel o cantidad de alguna actividad, se supondrá que dicha actividad podrá realizarse en niveles o cantidades fraccionarias.
- **Supuesto de certidumbre:** Supone que los valores dados a los parámetros de las funciones lineales de un modelo de programación lineal son constantes conocidas.

Para resolver los modelos de programación lineal es necesario conocer los tipos de soluciones que puedan existir:

- **Solución factible:** Es cualquier conjunto de valores de las variables de decisión donde se satisfagan todas las restricciones.
- **Solución no factible:** Conjunto de valores en donde no se respeta alguna restricción

Entonces se define como **región factible** a la unión de todas las soluciones factibles, pues de tal manera dentro de esta región todos los conjuntos de valores satisfacen todas las restricciones tanto de signo como funcionales. En la figura 7, se puede observar un ejemplo de una región factible para un modelo de dos variables.

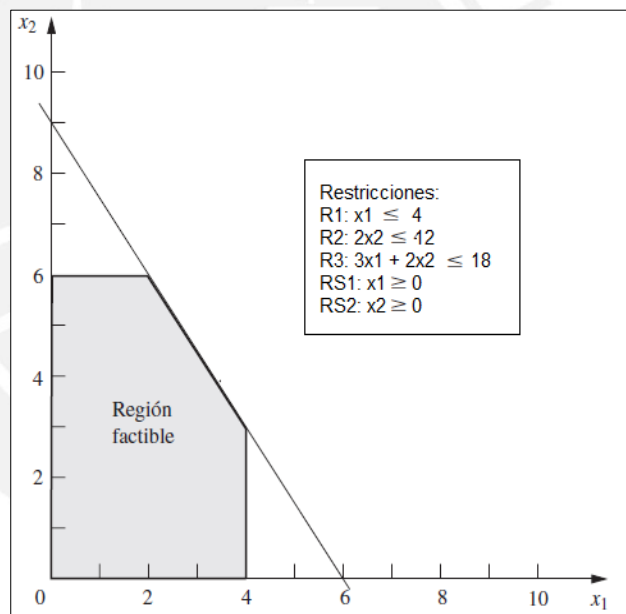


Figura 7: Región factible  
 Fuente: Hillier & Lieberman (2010)  
 Elaboración propia

Dentro de la región factible se encuentra el resultado final del modelo, el cual es la **solución óptima**, la cual suele ser un punto con el valor más grande o pequeño de la función objetivo para un modelo de maximización o minimización respectivamente. En la figura 8 se muestra la solución óptima del ejemplo anterior.

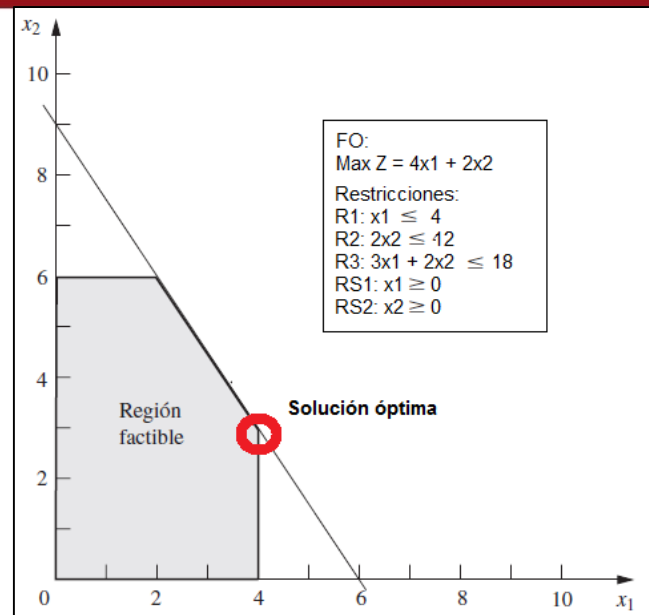


Figura 8: Solución óptima  
 Fuente: Hillier & Lieberman (2010)  
 Elaboración propia

Sin embargo, en algunos modelos existe más de una solución óptima, así como pueden ser soluciones infinitas y en otros casos no hay siquiera una sola solución.

### 1.3.3. Aplicaciones de la programación lineal

Como se menciona, la programación lineal es una herramienta matemática para la toma de decisiones, por ello ha sido empleada tanto en negocios como en la industria donde se requiera optimizar un recurso como tiempo, espacio, cantidad de alguna materia prima, ingresos, costos, etc. (Dantzig, 1998).

- Aplicaciones de la programación lineal en marketing.
- Aplicaciones de la programación lineal en producción.
- Aplicaciones de la programación lineal a la distribución de tareas.
- Aplicaciones de la programación lineal a las finanzas.
- Aplicaciones de la programación lineal a la logística.
- Aplicaciones de la programación lineal a mezclas.
- Aplicaciones en otros campos.

#### 1.3.4. Programación entera

En algunos problemas se tiene la necesidad de contar con variables que no sean decimales, pues muchas veces esas variables pueden referirse a algún elemento que no pueda ser dividido como personas, autos, edificios, etc. Sin embargo, la programación lineal no considera más allá de las restricciones determinadas la acotación en la que se encuentran las variables, por ello surge la programación entera.

Los modelos de programación entera son básicamente lo mismo que los modelos de programación lineal mencionados anteriormente con una restricción adicional que las variables deben tomar valores dentro del conjunto de números enteros y ya no necesariamente reales (Winston, 2005). Sin embargo, en algunos modelos solo será necesario que alguna o algunas de las variables sean enteras y las demás pueden seguir siendo reales, en tal caso el modelo será uno de programación entera mixta. Así mismo, es común que se le añada una restricción extra para que los valores de las variables de decisión sean de 0 o 1, es decir, que sean binarias, comúnmente las variables binarias son empleadas para realizar o no cierta acción la cual puede ser invertir en un proyecto, producir algún producto, elegir algún punto geográfico para operaciones o distribución, etc. en donde el valor 1 indica que sí se realiza la acción y 0 que no se realiza.

Según Winston (2005), se llama relajación de programación lineal de la programación entera al PL obtenido cuando se omiten todas las restricciones de valores enteros y binarios de las variables de decisión de un modelo. Con ello se concluye que la región factible de un modelo de programación entera está incluido dentro de la región factible de un modelo de programación lineal relajado. Como se puede apreciar en la figura 9 las regiones factibles tanto de un PE como de su respectivo PL relajado.

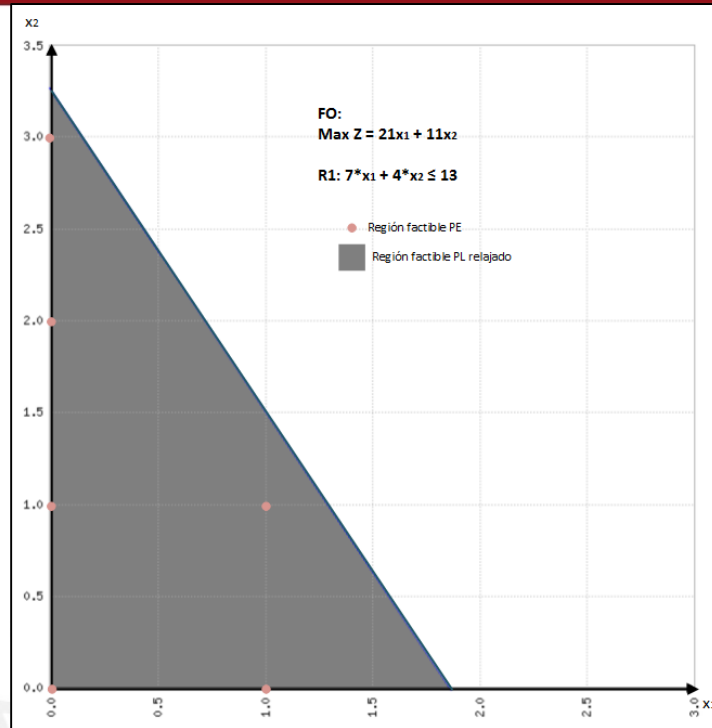


Figura 9: Región factible PE y PL relajado.

Fuente: Winston (2005)

Elaboración propia.

Asimismo Winston concluye que el valor óptimo de  $Z$  de un PL relajado es mayor o igual a valor óptimo de su PE.

### 1.3.5. Aplicaciones de la programación entera

Así como la programación lineal puede ser aplicada en una variedad de problemas de distintos tipo, la programación entera también tiene ciertos campos donde puede ser aplicada. Por ejemplo:

- Aplicación en análisis de inversión:** En muchas ocasiones los modelos de programación lineal tienen como objetivo establecer una determinada cantidad a invertir en algún proyecto o herramienta financiera, con la programación lineal entera es posible determinar si se debe invertir o no en tal asunto, pues las variables binarias permiten que sea de tal manera.
- Aplicaciones para elección de puntos geográficos:** En situaciones donde una compañía vaya a instalar una nueva planta o centro de distribución siempre se buscará el lugar geográfico ideal para minimizar costos, distancias y otros factores, si bien se

utilizan diferentes métodos para realizar tal decisión, la programación lineal entera también permite resolver este tipo de problemas, también mediante las variables binarias y a su vez restricciones de costos, tiempos, entre otros componiendo un modelo de programación lineal entera mixta

- **Despacho de envíos:** Al ya tener definido los lugares donde se instalarán las plantas y/o centros de distribución es importante también tener una determinada ruta o rutas para el envío de productos despachados, por ello es importante considerar que rutas deben tomar los vehículos para minimizar distancias y tráfico, y posteriormente consumo de combustible y costos logísticos.

#### 1.3.6. Restricciones especiales en programación entera

Para resolver ciertos modelos de programación entera es necesario cierto tipo de restricciones especiales, por ejemplo:

- **Restricciones inclusivas o distributivas:** Empleada para asegurar que una o más restricciones de cierta cantidad de restricciones funcionales se cumplan, consiste en sumarle al lado derecho a cada restricción una constante muy grande (M) el cual será multiplicado por una variable binaria, además se debe adicionar otra restricción donde la suma de todas las variables binarias sean menor o igual a la diferencia de la cantidad de restricciones y la cantidad de restricciones que deben cumplirse, de tal manera que se eliminarán la cantidad de restricciones mencionadas; sin embargo, puede ocurrir que por alguna coincidencia ciertas restricciones eliminadas si se cumplan. Esta restricción puede ser empleada para casos donde en caso se toma la decisión de invertir o comprar algo, esta inversión o compra debe ser en un cantidad mínimo.
- **Restricciones si ... entonces:** Consiste que si cierta restricción se satisface, otra restricción debe de satisfacerse también, para ello es necesario añadir valores artificiales y variables binarias similar al de restricciones inclusivas, puede ser aplicado donde en caso de

decidir invertir o comprar algún bien, ya no se tenga que hacer una inversión o compra de otro u otros bienes.

### 1.3.7. Lenguajes y softwares para resolver modelos de programación lineal

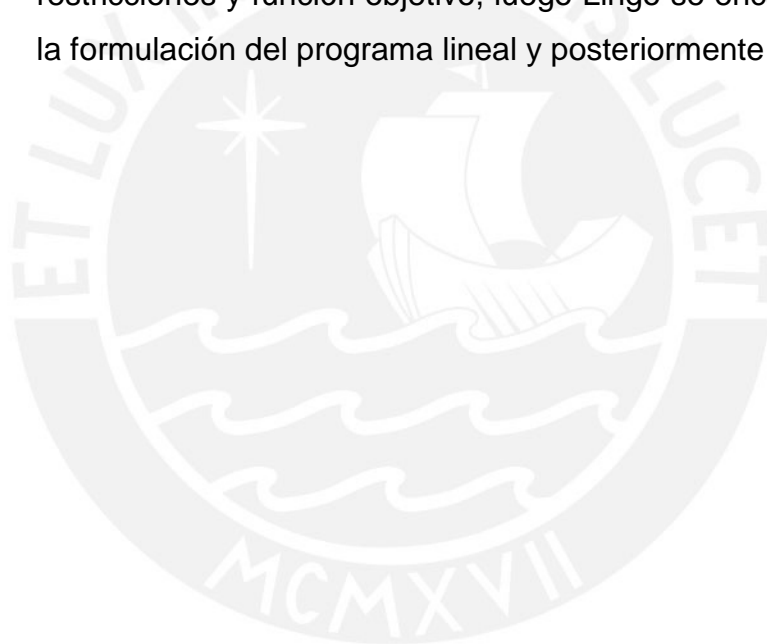
Según la complejidad del modelo, que puede estar sujeto a cantidad de variables, cantidad y tipo de restricciones, la dificultad de resolver el modelo debe seguir algún método, el cual puede ser el método simplex o gráfico, los cuales se realizan de manera manual para modelos con pocas variables y restricciones, pues una mayor cantidad de ello lo hace más complicado. Sin embargo, hoy en día existen diferentes softwares que pueden resolver modelos grandes y complicados en menos tiempo, estos softwares resuelven modelos que están en algún lenguaje establecido, entre ellos:

- **MPL:** Mathematical Programming language, es un lenguaje de modelado algebraico que permite crear modelos de optimización a través de ecuaciones algebraicas. El modelo se emplea como base para generar una matriz matemática que puede ser resuelta directamente en el solucionador. Lenguajes de modelado como el MPL han demostrado ser el método más eficiente de desarrollo y mantenimiento de modelos de optimización, pues son más fáciles de aprender, más rápidos de formular y requieren menos programación.
- **GAMS:** General Algebraic Modeling System es un lenguaje de modelado diseñado para el modelos de programación lineal, no lineal y problemas de optimización mixtos enteros. Este sistema es muy útil para modelos grandes y complejos. GAMS permite al usuario en hacer sencilla la programación, pues se encarga de los detalles que consumen mucho tiempo. Además permite modificar la programación de forma sencilla y rápida.

Para resolver los modelos existen diversos softwares, entre los más importantes y populares:



- **LINDO:** Producto de Lindo Systems Inc., el cual es una herramienta de fácil uso en donde básicamente se tipean la función objetivo y restricciones, luego el software resuelve el modelo presentando el valor de la solución óptima, valor de las variables, holguras y excesos, asimismo existe la opción de presentar el análisis de sensibilidad correspondiente a la solución del modelo.
- **LINGO:** Producto de Lindo Systems Inc., algunos modelos tienen una cantidad considerable de variables y restricciones y por ello sería tedioso tener que introducir cada una a algún software, en cambio Lingo la cual es un generador de matrices que permite al usuario introducir los parámetros necesarios para determinar las restricciones y función objetivo, luego Lingo se encarga de generar la formulación del programa lineal y posteriormente resolverlo.



## CAPÍTULO 2. DIAGNÓSTICO DEL PROBLEMA

En el presente capítulo se detallará el contexto en el cual se encuentra el problema objeto de estudio para tener un mayor entendimiento del mismo. Y finalmente se detallará el diagnóstico del problema desde un panorama más amplio hasta uno más específico.

### 2.1. Contexto

En el fútbol peruano, la entidad más importante es la Federación Peruana de Fútbol (FPF), la cual está afiliada a la FIFA y a la Conmebol. La FPF es la organización responsable del manejo de la Selección Peruana de Fútbol, divisiones menores, fútbol femenino y fustal. Así mismo, se encuentra la Asociación Deportiva de Fútbol Profesional (ADFP), la que se encarga de organizar año tras año los torneos oficiales de los equipos de primera división como el Torneo Descentralizado, Torneo del Inca, entre otros. La ADFP es la encargada de decidir el formato de los torneos a jugarse así como la elaboración del *fixture*, la cual es realizada en los últimos años a través de Eka Sports siguiendo los lineamientos de las bases del Torneo Descentralizado definidas por la ADFP.

Paralelamente, por la Comisión Nacional de Árbitros (CONAR) es la entidad responsable de la asignación de ternas arbitrales, las cuales están conformadas por un árbitro principal, dos jueces de línea y un cuarto árbitro, en todos encuentros de los torneos oficiales mencionados. Esta entidad es una organización auxiliar de la Federación Peruana de Fútbol, la cual está compuesta principalmente por un directorio y departamentos de arbitraje, preparación física, asistencia psicológica, asistencia nutricional, administración y finanzas, entre otros. La CONAR entre sus atribuciones más importante a su cargo tiene la actualización del registro nacional de árbitros de la FPF y la designación de árbitros y sus respectivas ternas para todos los eventos oficiales de la FPF, asimismo cabe resaltar que esta última función se realiza de forma manual; es decir, de una manera subjetiva considerando solo algunos aspectos como: la magnitud del partido, las

características y experiencia del árbitro; dicha labores realizada por la CONAR en un plazo no menor a 48 horas al inicio de la fecha.

Un factor muy importante y sensible para el desarrollo de una competencia deportiva es el arbitraje, en todas las categorías del fútbol peruano es común la crítica hacía los árbitros y sus asistentes por parte de los aficionados, jugadores, comandos técnicos, directivos y periodistas; debido a los constantes errores que se comenten partido tras partido, lo cual genera malestar e insatisfacción para todos los elementos del fútbol. En torneos poco profesionales, pero oficiales para la FPF, como la Copa Perú ha sido una constante las amenazas y actos de violencia dentro de los partidos hacia los árbitros y jugadores cuando el resultado no es el esperado por parte de los aficionados, incluso se cree que existen mafias dentro de este torneo donde se amañan partidos a través del soborno de árbitros, jugadores, entrenadores y hasta directivos. Lo que definitivamente hace menos transparente y atractivo al fútbol, casos como este han ocurrido en diversas partes del mundo, como en la Serie A de Italia donde ocurrió el denominado Calciopoli<sup>2</sup>, campeonatos africanos e incluso en la misma FIFA donde se denunció que algunos directivos de esta entidad fueron sobornados para la elección de una sede para de la Copa Mundial de Fútbol.

---

<sup>2</sup> Escándalo deportivo de fraudes arbitrales en la Seria A del fútbol italiano entre los años 2005 y 2006.

## 2.2. Diagnóstico

Los deportes en el Perú al igual que en el mundo están dejando de ser simples competencias atléticas y/o mentales para ser también negocio, un tipo de entretenimiento e incluso en algunos casos un vaivén de sentimientos para los seguidores, pues en los últimos años es común que se hagan transacciones de jugadores por montos millonarios tanto en el fútbol, fútbol americano, básquetbol y béisbol, además de los grandes montos que pagan diferentes empresas para auspiciar algún equipo de algún club o selección nacional, o también por derechos de transmisión.

En el Perú, también se hacen grandes inversiones en deportes de parte del estado y de empresas privadas, incluso se realizan inversiones en deportes mayores a la de otros países de la región como Colombia (Gestión, 2014); sin embargo, el país vecino tiene más logros deportivos que el Perú, prueba de ello son los logros obtenidos por Colombia en los Juegos Olímpicos de Londres 2012, donde Colombia obtuvo ocho medallas en total: una de oro, tres de plata y cuatro de bronce, mientras Perú ninguna (Olimpic.org, 2012); otro ejemplo son los resultados obtenidos en la Copa Mundial de la FIFA 2014 realizada en Brasil donde Colombia quedó entre los 8 primeros y Perú ni si quiera participó por no clasificar previamente. Entonces, queda la duda de por qué Colombia tiene más logros deportivos si en Perú se invierte más en deportes, y ello se debe a que en Perú se invierte más en infraestructura que en gestión deportiva, lo que sí hace Colombia. Lo que significa que en Perú se construyen cada vez más estadios, coliseos y complejos deportivos en lugar de buscar nuevos talentos y brindarles el apoyo necesario.

Como se mencionó líneas arriba, en el Perú se hacen grandes inversiones en deportes por parte del Estado y empresas privadas; sin embargo, la mayor parte de la inversión realizada por la última entidad mencionada se dirige principalmente en el fútbol. Ejemplos claros son los auspicios que tienen algunos clubes como Universitario, Alianza Lima y Sporting Cristal por parte de marcas deportivas importantes a nivel mundial como Umbro, Nike y Adidas respectivamente. Además, la transmisión de partidos de la primera división del fútbol peruano desde hace 15 años son transmitidos por un canal

de paga, CMD, y en el año 2012, incluso, hubo una disputa entre el actual canal y otro canal extranjero, Gol TV, llegando a un conceso para que ambos transmitan todos los partidos del torneo (RPP, 2013). Así mismo, año tras año empresas nacionales y extranjeras se disputan el auspicio a los equipos del descentralizado por montos altos; incluso hasta el mismo torneo tiene auspicio y por ello lleva el nombre de “Copa Movistar”.

Sin embargo, es sabido que el fútbol peruano en los últimos años no ha tenido logros considerables y ello se debe a que se encuentra en una profunda crisis que lo persigue hace ya varios años (Cruz, 2012). Dicha crisis se debe a múltiples entidades que van desde el Estado hasta los jugadores de fútbol. En la siguiente tabla se muestran las entidades responsables de las crisis en las que se encuentra el fútbol peruano.

Tabla 1: Entidades responsables del fútbol peruano

<b>Entidades responsables de la crisis</b>
Estado
Federación Peruano de Fútbol
Clubes
Dirigentes
Comandos técnicos
Jugadores
Árbitros
Afición
Prensa

Elaboración propia

Cada entidad de diferente manera afecta al problema del fútbol peruano, tanto desde un punto de vista deportivo hasta uno extra deportivo. Para ello en la siguiente imagen se muestra un diagrama causa efecto de la crisis que atraviesa el fútbol peruano para un mejor entendimiento.

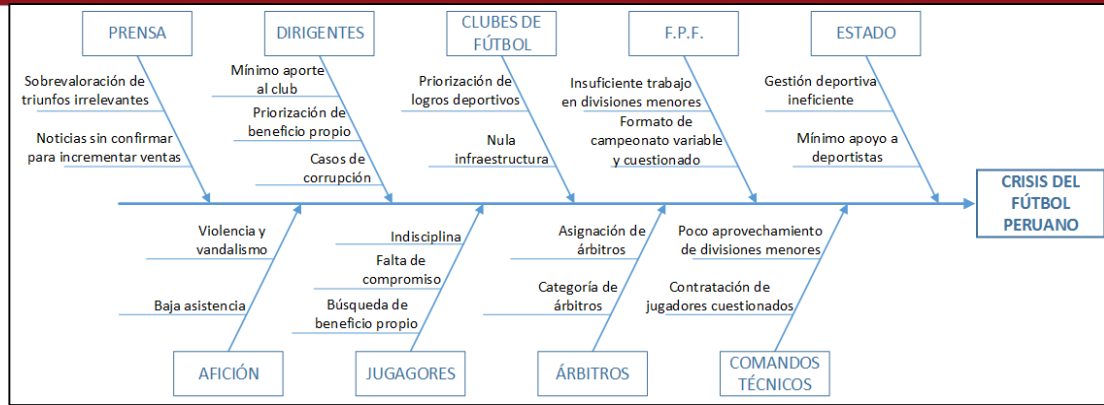


Figura 10: Diagrama causa-efecto de la crisis del fútbol peruano. Elaboración propia.

Según muestra el diagrama causa-efecto, cada entidad responsable tiene diferentes factores que influyen en la crisis del fútbol peruano, a continuación se detallarán dichos factores para cada entidad:

- **Estado:** Como se mencionó líneas arriba, el estado peruano sí invierte una cantidad considerable en deporte, pero la mayor parte del gasto está destinado a la infraestructura y no a la gestión deportiva, lo que agudiza el problema que se tiene en todos los deportes. Además, existe un poco apoyo a los deportistas, pues no se les toma en serio como profesionales cuando en realidad la gran mayoría se dedica a tiempo completo al deporte que realizan.
- **Federación Peruana de Fútbol:** Esta entidad ha sido muy criticada durante los últimos años, ello se debe a los constantes fracasos que ha tenido el fútbol peruano, como la no clasificación de los mundiales de fútbol desde 1982 y las constantes pésimas participaciones de equipos peruanos en torneos internacionales. A pesar, de haber implementado algunos programas para menores estos no son suficientes, pues se requiere de mayor apoyo. Además un factor muy importante, es el diseño de campeonato el cual ha tenido severos cambios en los últimos 6 años, además de tener una calendarización del campeonato desincronizado con torneos internacionales.
- **Clubes de fútbol:** Durante años en el Perú, los clubes más populares como Universitario y Alianza Lima han priorizado la obtención de logros deportivos, para ello han realizado grandes inversiones en

contratación de jugadores y comandos técnicos para lograr dichos logros deportivos al menos a nivel nacional; sin embargo, muchas veces no se planificó el futuro de los clubes a corto y largo plazo, lo que generó deudas y problemas para los clubes, tanto así que actualmente ambos clubes tienen deudas que superan los cien millones de soles (El Comercio, 2014). Además, es importante mencionar que la gran mayoría de los clubes de primera división no tienen infraestructura alguna donde puedan realizar entrenamientos o jugar los partidos correspondientes al campeonato, ello los obliga a alquilar locales donde puedan realizar dichas labores, elevando sus gastos.

- **Dirigentes:** Durante años, en la mayoría de clubes se han encontrado situaciones en donde los dirigentes son los principales responsables de la situación que pueda atravesar algún club, ello muchas veces se debe a que estos personajes en lugar de aportar al club, cumpliendo sus funciones administrativas, buscan algún beneficio con los ingresos que se pueda tener. Asimismo ha habido casos de corrupción dentro de ciertos clubes (Peru.com, 2013), donde hubo enfrentamientos entre socios del mismo club para tener el poder del mismo, con todos estos problemas los únicos afectados han sido los clubes.
- **Prensa:** A pesar de ser solo un medio de comunicación, es importante mencionar el papel que cumplen en el fútbol. Estos medios muchas veces sobrevaloran algunos triunfos irrelevantes que se pueda tener, “inflando” a los jugadores y comandos técnicos. Además, en algunas ocasiones han lanzado ciertas noticias sin confirmar como posibles fichajes o falsas declaraciones que finalmente generan malestar tanto a los jugadores como a los seguidores.
- **Afición:** Lamentablemente, un hecho que cada vez es más constante es la violencia en los partidos de fútbol por parte de los aficionados. Cada vez es más común oír acerca de enfrentamientos entre aficiones de equipos rivales o incluso dentro del mismo equipo, lo que ha traído como consecuencia muerte del algún aficionado. Tanto la violencia

como diversos factores espantan a otros aficionados a asistir a los respectivos encuentros generando una menor taquilla para los clubes.

- **Jugadores:** A pesar de ser los protagonistas principales de este deporte, en el Perú han sido comunes ciertos casos de indisciplina por parte de algunos jugadores de fútbol siendo castigados por sus clubes y por la federación misma. Así mismo, es evidente una falta de compromiso por parte de los jugadores cuando representan a la selección, quizá sea porque no reciben algún pago como en sus clubes y por ello no entreguen todo su esfuerzo cuando representan al país, en pocas palabras, posiblemente consideren que hacen un favor al jugar por la selección en lugar de tomarlo como un premio a su regularidad.
- **Árbitros:** Las ternas arbitrales son constantes puntos de crítica fecha a fecha, pues es común que durante los encuentros comentan ciertos errores que pueden afectar directamente al resultado de algún partido y posteriormente a la obtención de algún campeonato o permanencia de categoría. Por ello, es necesario que tanto los árbitros como sus asistentes tengan la capacidad necesaria para poder dirigir los diversos encuentros durante el campeonato, para ello es necesario que realicen las capacitaciones necesarias para poder cumplir con las exigencias del campeonato. Además, es muy importante considerar la asignación de árbitros que se realiza para los encuentros del campeonato, pues esta asignación se debe realizar de tal manera que sea transparente y justa, tanto para los clubes como para las ternas arbitrales. Pues debe de considerarse el esfuerzo realizado por los árbitros y sus asistentes durante el campeonato tanto por los partidos dirigidos durante el campeonato como los viajes realizados al interior del país para cumplir con sus labores, ya que ellos son seres humanos con un margen de error mayor que el de alguna herramienta tecnológica, y dicho margen puede variar según el estado físico y psicológico que pueda tener cada integrante de la terna arbitral.



### 2.2.1. Problema de la asignación de árbitros

Como se mencionó líneas arriba, la asignación de ternas arbitrales es un punto muy sensible para el desarrollo de una competencia deportiva, en este caso una competencia de fútbol. Pues no solo basta con asignar a los recursos, árbitros y jueces de línea, a los encuentros de todo un campeonato, sino seguir una serie de normas expuestas en las bases del campeonato, y también en algunas restricciones implementadas para lograr una asignación más óptima.

Según una entrevista que se realizó al señor Braulio Cornejo, juez de línea internacional FIFA, actualmente para el Torneo Descentralizado, la asignación de ternas arbitrales de los encuentros de todo el campeonato se realiza de manera manual días antes de iniciar una fecha en una reunión conformada por un grupo directivos aproximadamente, en la que cada uno propone nombres para la asignación de ternas en cada partido, estas reuniones toman entre 2 a 3 horas. Y la única restricción que toman en cuenta a la hora de la asignación es que el árbitro principal no dirija dos fechas consecutivas partidos en donde se repita un mismo equipo. Esto demuestra que no se cuenta con una herramienta informática que colabore con esta labor, y además solo se tiene una condición para dicha tarea.

Además, el señor Braulio Cornejo mencionó que acá en Perú, así como en otros países, se tiene planeado implementar equipos de trabajo; es decir, ternas arbitrales conformadas por los mismos integrantes, un árbitro principal y jueces de línea, a lo largo de todo el campeonato; sin embargo no ha podido ser implementada a su totalidad, ya que se tienen ciertas limitaciones sobre todo para partidos a jugarse en provincias, pues solo se puede enviar a un árbitro principal y un juez de línea, porque el segundo juez de línea es de la ciudad local. Con esto no solo se interrumpe la continuidad de los equipos de trabajo, sino también queda afectada la transparencia de la asignación, pues el segundo juez de línea podría favorecer al equipo de su ciudad local. También comentó que cuando las ternas

arbitrales son enviadas a provincia, los integrantes de la misma regresan siempre a Lima; es decir, por ninguna razón se quedan en dicha ciudad luego del partido asignado para un posible viaje a otra ciudad para dirigir un partido de la fecha próxima.

Adicionalmente, pudo brindar la información de costes por partido de ternas arbitrales, los cuales varían según la categoría del árbitro y el tipo de árbitros. A continuación se presentan los costos mencionados.

Tabla 2: Costos de árbitros por partido.

Tipo de Árbitro	Categoría	
	FIFA	Primera
Árbitro Principal	S/. 1,980.00	S/. 1,650.00
Juez de Línea	S/. 1,320.00	S/. 1,100.00
Cuarto Árbitro	S/. 880.00	S/. 880.00

Elaboración propia

Los costos mostrados en la tabla anterior corresponden solo a la paga a los árbitros; sin embargo, cuando los partidos a dirigir se realizan en ciudades fuera de la ciudad de Lima se paga un adicional de s/.900 por cada integrante de la terna arbitral por conceptos de viáticos y hospedaje, a excepción del cuarto árbitro, pues este último suele ser local de la ciudad en donde se realiza el encuentro.

## CAPÍTULO 3. DEFINICIÓN DE REQUERIMIENTOS

El presente estudio tiene como objetivo realizar una asignación de ternas arbitrales para el campeonato de primera división del fútbol peruano, Torneo Descentralizado, haciendo uso de herramientas matemáticas como la programación lineal. Para ello, es necesario tener un claro panorama de dicha competencia deportiva.

En el Perú, el torneo o campeonato de primera división de fútbol profesional es llamado Torneo Descentralizado, o también Copa Movistar por acuerdos comerciales. El Torneo Descentralizado es organizado por la Asociación Deportiva de Fútbol Profesional (ADFP), la cual es una institución afiliada a la Federación Peruana de Fútbol (FPF). Desde el primer campeonato oficial realizado en 1928 y no oficial desde 1912, han ocurrido diversos cambios al formato del campeonato desde la cantidad de equipos participantes, definición del campeón nacional, clasificados a torneos internacionales y equipos descendidos. Para ser más preciso, en los últimos cinco años (2011-2015) han existido cuatro formatos. Ello puede ser un inconveniente para la realización de este estudio, pues se busca desarrollar un modelo que realice la asignación todos los años; sin embargo, ello también es una oportunidad para que el modelo a realizar sea flexible a las modificaciones de formato y cantidad de equipos principalmente.

Por tal motivo, para el modelo a desarrollar será en base a un formato de campeonato más estándar, el Torneo Descentralizado 2013<sup>3</sup>. Este torneo contó con la participación de dieciséis (16) equipos profesionales, y se dividió en tres etapas, la primera de dos ruedas con treinta partidos de ida y vuelta entre los dieciséis (16) equipos, en la segunda etapa los equipos se dividen en dos grupos o ligullas de ocho equipos entre los cuales se jugarían catorce (14) fechas, y finalmente la última etapa, que define al campeón nacional, tenía como participantes a los equipos que terminaban en primer lugar en sus respectivas ligullas, dichos equipos jugaban dos partidos de ida y vuelta, en caso de empate por puntos se definía un último partido en un recinto neutral para definir al flamante campeón.

---

<sup>3</sup> Bases Torneo Descentralizado 2013: <http://www.adfp.org.pe/pdf/dscntrlzd2013.pdf>

En síntesis, en la primera etapa se juegan treinta (30) fechas con un total de doscientos cuarenta (240) partidos (véase anexo 1), en la segunda catorce (14) fechas con un total de ciento doce (112) partidos y en la última etapa, *play-offs*, dos (2) partidos más con la posibilidad de un tercero en caso de igualdad de puntaje; además cabe resaltar que pueda existir algún partido adicional para definición de descenso. En total se juegan, como mínimo, trescientos cincuenta y cuatro (354) partidos, para la realización de cada uno de los encuentros en necesaria la asignación de una terna arbitral conformada por un árbitro principal, dos jueces de línea y un cuarto árbitro, en algunos casos poco frecuentes es necesaria la participación de un segundo cuarto árbitro y dos asistentes más, los cuales se ubican en las líneas de meta al lado de las porterías. Y según las bases del torneo, un árbitro principal no podrá volver a dirigir un partido en el que juegue un equipo sin que haya pasado al menos una fecha desde que dirigió al mismo equipo en otro encuentro. A continuación se explican ciertos puntos que brindan un panorama más amplio para el diseño del modelo.

### 3.1. Condiciones iniciales

Con lo descrito en el presente capítulo y otros conceptos básicos del fútbol, se definen ciertas condiciones y requerimientos necesarios para la elaboración del modelo:

- Para todo partido disputado es necesaria la participación de una terna arbitral, conformada por un árbitro principal, dos jueces de línea y un cuarto árbitro.
- Según las Bases del torneo, una terna arbitral solo puede volver a ser asignada a un partido que dispute un mismo equipo pasada una fecha.
- Una terna arbitral solo puede ser asignada a lo más a un encuentro por fecha.
- Una terna no debe ser a partidos que conformen una llave: es decir, a los partidos en los que el mismo par de equipos formen parte de los mismos.

- También existen casos en donde se efectúen sanciones a una determinada terna que dicte que no pueda dirigir una cantidad de partidos determinados a algún(os) equipos específicos.
- Se debe mencionar también que los árbitros tienen categorías, desde los que están afiliados a la FIFA a los recién ascendidos para dirigir encuentros de primera división. Este punto es importante, pues en ciertos encuentros será necesaria la participación de árbitros de mayor categoría y en otros no será relevante.<sup>4</sup>
- Adicionalmente, se tiene previsto que exista equidad entre la cantidad de partidos dirigidos por cada árbitro a cada equipo, también que la cantidad de partidos dirigidos de todos los árbitros sea similar, y además, que las distancias recorridas por motivo de viajes para dirigir partidos sean también iguales entre todas las ternas.
- De la misma manera, se debe tener un ingreso total similar entre todas las ternas arbitrales.
- Además, para mantener la equidad de distancia recorrida, se tendrá como supuesto el hecho de que cada equipo juegue en una sola ciudad como local durante todo el torneo.
- Así como el campeonato tiene diferentes etapas, la asignación de ternas se realizará para cada etapa.

---

<sup>4</sup> Existen dos categorías: Árbitros FIFA y árbitros de primera.

### 3.2. Equipos participantes

El Torneo Descentralizado 2013 fue disputado por dieciséis equipos, los cuales están establecidos en distintas ciudades del país, a continuación la lista de equipos, así como la ciudad, región y zona geográfica.

Tabla 3: Equipos participantes

N°	Equipo	Ciudad	Región	Zona <sup>5</sup>
1	Alianza Lima	Lima	Lima Metropolitana	Lima
2	César Vallejo	Trujillo	La Libertad	Norte
3	Cienciano	Cusco	Cusco	Sur
4	Inti Gas	Ayacucho	Ayacucho	Centro
5	José Gálvez	Chimbote	Ancash	Norte
6	Juan Aurich	Chiclayo	Lambayeque	Norte
7	León de Huánuco	Huánuco	Huánuco	Centro
8	Melgar	Arequipa	Arequipa	Sur
9	Pacífico	Callao	Callao	Lima
10	Real Garcilaso	Cusco	Cusco	Sur
11	San Martín	Callao	Callao	Lima
12	Sport Huancayo	Huancayo	Junín	Centro
13	Sporting Cristal	Lima	Lima Metropolitana	Lima
14	Unión Comercio	Moyobamba	San Martín	Norte
15	Universitario	Lima	Lima Metropolitana	Lima
16	UTC	Cajamarca	Cajamarca	Norte

Elaboración propia

Además, se presenta la información correspondiente a las distancias entre cada ciudad y la ciudad de Lima, pues se asume que los integrantes de las ternas arbitrales están establecidos en la ciudad capital.

<sup>5</sup> Zonas geográficas establecidas: Lima, Norte, Centro y Sur.

Tabla 4: Distancia de ciudades.

Ciudad	Distancia (km)
Arequipa	1,009
Ayacucho	543
Cajamarca	861
Callao	0
Chiclayo	770
Chimbote	430
Cusco	1,105
Huancayo	298
Huánuco	410
Lima	0
Moyobamba	1,363
Trujillo	561

Elaboración propia

### 3.3. Categoría de partidos

Asimismo es importante mencionar que cada partido programado en el *fixture* del Torneo Descentralizado 2013 tiene una categoría correspondiente. Esta categoría puede estar definida de tres maneras, la primera de ellas está definida por la rivalidad histórica de los equipos; la segunda por ubicación geográfica de los equipos que disputen el partido, puesto que los partidos en los cuales los equipos pertenezcan a la misma zona geografía tendrán una mayor repercusión; y por último, por el puesto en el que estén ubicados los equipos, pues si al menos uno de los dos equipos está disputando el título, permanencia en primera división o algún cupo para un torneo internacional. Para ello se definirán los partidos de dichas categorías según cada caso.

- Definición de categorías de partidos

Para la elaboración del modelo se definirán categorías para los partidos a disputar, las categorías serán divididas en 3 y se definen a continuación:

- Categoría A

La categoría A será asignada a los partidos que se han dado a lo largo de la historia y tienen una gran audiencia nacional, acá se

encuentran los diversos clásicos en todo el país. Además, también tienen categoría A los partidos de alguna definición; es decir, una final, un partido definitorio para el descenso o un partido para una clasificación a un torneo internacional. A continuación se definen los partidos con categoría A.

Tabla 5: Partidos de categoría A.

N° partido	Local	Visita
4	Melgar	Cienciano
38	Sporting Cristal	Alianza Lima
41	Alianza Lima	Universitario
89	Sporting Cristal	Universitario
124	Cienciano	Melgar
158	Alianza Lima	Sporting Cristal
161	Universitario	Alianza Lima
209	Universitario	Sporting Cristal

Elaboración propia

Es importante mencionar, que en las últimas fechas del torneo según la situación de los equipos, podrían agregarse más partidos a esta categoría.

○ Categoría B

La categoría B será asignada a partidos que son disputados por equipos de la misma zona geográfica, y también a partidos que se jueguen en las últimas fechas en los cuales al menos uno de los equipos participantes se encuentren en zona de clasificación o descenso sin estar definido aún los cupos. Las zonas distribución de equipos por zonas geográficas están dividida de la siguiente manera:

Tabla 6: Equipos de Lima

N°	Lima
1	Alianza Lima
9	Pacífico
11	San Martín
13	Sporting Cristal
15	Universitario

Elaboración propia



Tabla 7: Equipos del Norte

N°	Norte
2	César Vallejo
5	José Gálvez
6	Juan Aurich
14	Unión Comercio
16	UTC

Elaboración propia

Tabla 8: Equipos del Centro

N°	Centro
4	Inti Gas
7	León de Huánuco
12	Sport Huancayo

Elaboración propia

Tabla 9: Equipos del Sur

N°	Sur
3	Cienciano
8	Melgar
10	Real Garcilaso

Elaboración propia

Entonces, todos los partidos a disputarse entre los equipos de una misma zona tendrán asignada la categoría B. Y al igual que a los partidos de categoría A, también serán asignados otros partidos conforme se desarrolle el torneo.

- Categoría C

La categoría C será asignada a partidos que no se encuentran definidos ni en la categoría A ni B. (Véase anexo 1)

### 3.4. Categoría de árbitros

Los integrantes de las ternas arbitrales, tanto árbitros principales como jueces de línea, tienen distintas categorías oficiales, las cuales les permiten ser asignados a partidos de diferentes repercusiones tanto a nivel nacional como internacional. Las categorías de los árbitros y jueces de línea son las siguientes:

- Árbitros FIFA: Los árbitros y jueces de línea que cuentan con esta categoría están aptos para dirigir cualquier encuentro de competencias tanto a nivel nacional como internacional, pues son certificados por la misma FIFA.
- Árbitros de Primera: Esta categoría es certificada por la Federación Peruana de Fútbol, los árbitros que cuentan con esta categoría están aptos para dirigir cualquier encuentro entre clubes de primera división y ligas inferiores.
- Árbitros de Segunda y Tercera: Esta categoría también es certificada por la Federación Peruana de Fútbol y los árbitros que la ostenten pueden dirigir partidos de Segunda División, Copa Perú y ligas menores.

A continuación se la lista de los árbitros principales que fueron tomados en cuenta para las asignaciones reales de los encuentros del Torneo Descentralizado 2013, adicionalmente se indica la categoría con la que cuenta cada uno.

Tabla 10: Categorías de árbitros.

N°	Árbitro Principal	Categoría
1	David Morales	Primera
2	Diego Haro	FIFA
3	Eduardo Chirinos	Primera
4	Fernando Legario	Primera
5	Fredy Arellanos	Primera
6	Giuliano Rodríguez	Primera
7	Henry Gambeta	FIFA
8	Iván Chang	Primera
9	José Martínez	Primera
10	Julio Álvarez	Primera
11	Luis Garay	Primera
12	Luis Seminario	FIFA
13	Manuel Garay	FIFA
14	Michael Espinoza	Primera
15	Miguel Ángel Santivañez	FIFA
16	Ramón Blanco	Primera
17	Renzo Castañeda	Primera
18	Robert Rafael	Primera
19	Roberto Mauro	Primera
20	Romel López	Primera
21	Víctor Hugo Carrillo	FIFA
22	Víctor Hugo Rivera	FIFA
23	Yovanny Quevedo	FIFA

Fuente: Asociación Peruana de Árbitros de Fútbol  
Elaboración propia

Para la conformación de ternas arbitrales se consideraran diferentes categorías (véase anexo 2), las cuales estarán definidas por la categoría de los integrantes de cada terna, las cuales están divididas en: A, B y C, al igual que los partidos. Dichas categorías tienen las siguientes características:

- **Categoría A:** Es la categoría más alta de las tres y está conformada por un árbitro principal y dos jueces de línea de categoría FIFA, y dos cuartos árbitros de cualquier categoría.
- **Categoría B:** Esta categoría está conformada por un árbitro principal de categoría FIFA, dos jueces de línea de Primera y un cuarto árbitro de cualquier categoría.

- Categoría C: Esta categoría está conformada por un árbitro principal de Primera, dos jueces de línea de Primera y un cuarto árbitro de cualquier categoría.

Entonces, las categorías de ternas arbitrales estarían conformadas de la siguiente manera.

Tabla 11: Categorías de ternas.

	Árbitro Principal	Juez de Línea	Cuarto Árbitro
Categoría A	1 (FIFA)	2 (FIFA)	2 (F/P)
Categoría B	1 (FIFA)	2 (Primera)	1 (F/P)
Categoría C	1 (Primera)	2 (Primera)	1 (F/P)

Elaboración propia

Y según los costos por tipo y categoría de árbitros mencionados en el apartado 2.2.1, los costos para las distintas ternas según su categoría son las siguientes.

Tabla 12: Costo de ternas arbitrales.

	Árbitro Principal	Jueces de Línea	Cuarto Árbitro	Total	
				Lima	Provincias
<b>Categoría A</b>	S/.1,980.00	S/.2,640.00	S/.1,760.00	S/.6,380.00	S/.9,080.00
<b>Categoría B</b>	S/.1,980.00	S/.2,200.00	S/.880.00	S/.5,060.00	S/.7,760.00
<b>Categoría C</b>	S/.1,650.00	S/.2,200.00	S/.880.00	S/.4,730.00	S/.7,430.00

Elaboración propia

## CAPÍTULO 4. DESARROLLO DEL MODELO

Con los requerimientos definidos en el capítulo previo, se definirán las partes que conforman el modelo a desarrollar como variables de decisión, función objetivo, restricciones, parámetros y sets o conjuntos.

El presente modelo tendrá como inputs:

- Cantidad de equipos que disputen el torneo.
- Cantidad de partidos a disputar en el campeonato.
- Cantidad de fechas a disputar en el campeonato.
- Distancias de las ciudades donde juega de local cada equipo con la ciudad de Lima.
- Cruce de partido – equipo.
- Cruce de fecha – partido.
- Categoría requerida para cada partido.
- Categoría de ternas.
- Costos de ternas.

Asimismo el modelo arrojará como resultado:

- Partidos a los que ha sido asignada cada árbitro durante el torneo.
- Distancias recorridas en promedio por cada árbitro.
- Costos totales por terna.

### 4.1. Supuestos

Para la elaboración del modelo mencionado, se tendrán una serie de supuestos que son descritos a continuación:

- Se asumirá que se tienen equipos de trabajo, ternas arbitrales fijas; es decir, un mismo árbitro principal dirigirá siempre con el mismo par de jueces de línea y cuarto árbitro.

- Se asume también que los equipos participantes disputarán todos sus encuentros de local en una sola ciudad.
- Se asume que no existirán suspensiones de partidos ni postergaciones, pues todos deben de jugarse en la fecha establecida.

#### 4.2. Sets o conjuntos

Los sets o conjuntos son grupos de valores similares, los cuales pueden ser primitivos o derivados, que depende de los anteriores, a continuación se presentan los Sets a ser usados en el modelo:

- Equipos (e) = {1...NE}
- Ternas arbitrales (ta): = {1... NTA}
- Fechas (f): = {1... NF}
- Partidos (p): = {1... NP}

#### 4.3. Atributos

A continuación se definen los atributos asociados a los sets o conjuntos definidos anteriormente.

- |  |              |
|--|--------------|
| • Categoría de terna arbitral ta:                        | CatTA(ta)    |
| • Categoría de partido:                                  | CatP(p)      |
| • Distancia de ciudad de partido p a Lima <sup>6</sup> : | DistP(p)     |
| • Partido p se juega en Lima Metropolitana:              | LimP(p)      |
| • Partido p se juega en Provincias:                      | ProvP(p)     |
| • Partido p se juega en fecha f:                         | PartFec(p,f) |
| • Equipo e juega en partido p:                           | EQP(p,e)     |
| • Partido p forma llave con otro partido p:              | Llave(p,p)   |
| • Paga a terna arbitral ta por partido en Lima:          | PagaLTA(ta)  |

<sup>6</sup> Se toma como referencia la ciudad de Lima, ya que la sede de la CONAR se encuentra en tal ciudad.

- Paga a terna arbitral  $t_a$  por dirigir en Provincias: PagaPTA( $t_a$ )
- Mínima cantidad de partidos asignados a ternas: MinpTA
- Máxima cantidad de partidos asignados a ternas: MaxpTA
- Máximas coincidencias entre un equipo y terna: MaxTAE
- Mínimas coincidencias entre un equipo y terna: MinTAE
- Mínima distancia a recorrer por terna: DMinTA
- Máxima distancia a recorrer por terna: DMaxTA
- Partido  $p$  debe de ser dirigido por terna  $t_a$ : SAT( $t_a, p$ )
- Partido  $p$  no debe de ser dirigido por terna  $t_a$ : NAT( $t_a, p$ )
- Cantidad de Equipos  $e$ : NE
- Cantidad de ternas arbitrales  $t_a$ : NAP
- Cantidad de partidos  $p$ : NP
- Cantidad de fechas  $f$ : NF
- Cantidad de fechas como mínimo para coincidencia entre una terna y equipo: N
- Cantidad máxima de fechas sin ser asignado una terna: S
- Cantidad de kilómetros recorridos como máximo entre  $D$  fechas por viajes: KM

#### 4.4. Variables de decisión

Las variables que determinaran la función objetivo y que están delimitadas por las restricciones del modelo desarrollado son las siguientes:

- Asignación de terna arbitral  $t_a$  a partido  $p$ :  $X(t_a, p)$ : {0 si no es asignado, 1 si es asignado}
- Paga total a cada Terna arbitral  $t_a$ : PagaTotal( $t_a$ )

#### 4.5. Función Objetivo

Para el presente modelo se tendrá como función objetivo minimizar los costos de asignación, por tanto la variable de decisión será  $PagaTotal(ta)$ , que corresponde a la paga total a cada terna durante el campeonato.

$$Min Z = \sum_{ta=1}^{NTA} PagaTotal(ta)$$

#### 4.6. Restricciones

A continuación, las restricciones que condicionaran el modelo para obtener un resultado más ajustado y óptimo:

- Cada partido  $p$  debe ser dirigido por una terna arbitral.

- Restricción 1

$$\sum_{ta=1}^{NTA} X(ta, p) = 1 \quad p = \{1, \dots, NP\}$$

- Cada terna arbitral solo puede ser asignada a lo más a un partido por fecha.

- Restricción 2

$$\sum_{p=1}^{NP} PartFech(p, f) \times X(ta, p) \leq 1 \quad ta = \{1, \dots, NTA\}; \quad f = \{1, \dots, NF\}$$

- Cada terna arbitral debe de ser asignado a una cantidad total de partidos mayor o igual al mínimo permitido, y menor o igual al máximo permitido.

- Restricción 3

$$Min_{pTA} \leq \sum_{p=1}^{NP} X(ta, p) \quad ta = \{1, \dots, NTA\}$$



- Restricción 4

$$\sum_{p=1}^{NP} X(ta, p) \leq MaxpTA \quad ta = \{1, \dots, NTA\}$$

- Cada terna arbitral debe de recorrer una determinada cantidad de kilómetros por concepto de viajes a las distintas ciudades en donde sean asignados como mínimo y máximo.

- Restricción 5

$$DMinTA \leq \sum_{p=1}^{NP} DistP(p) \times 2 \times X(ta, p) \quad ta = \{1, \dots, NTA\}$$

- Restricción 6

$$\sum_{p=1}^{NP} DistP(p) \times 2 \times X(ta, p) \leq DMaxTA \quad ta = \{1, \dots, NTA\}$$

- La cantidad de coincidencias entre una terna arbitral  $ta$  y equipo  $e$  debe ser mayor o igual al mínimo y menor o igual al máximo permitido.

- Restricción 7

$$MinTAE \leq \sum_{p=1}^{NP} EQP(p, e) \times X(ta, p) \quad ta = \{1, \dots, NTA\}; e = \{1, \dots, NE\}$$

- Restricción 8

$$\sum_{p=1}^{NP} EQP(p, e) \times X(ta, p) \leq MaxTAE \quad ta = \{1, \dots, NTA\}; e = \{1, \dots, NE\}$$

- La paga total recibida por cada uno de las ternas arbitrales está determinada en la siguiente restricción, cabe resaltar que la paga varía según la categoría de la terna, así como la ubicación de la ciudad en donde se juega el partido.

- Restricción 9

$$\sum_{p=1}^{np} X(ta, p) \times [LimP(p) \times PagaLT(ta) + ProvP(p) \times PagaPTA(ta)]$$

$$= PagaTotal(ta) \quad ta = \{1, \dots, NTA\}$$

- Cada partido debe de tener asignado una terna de la misma o mayor categoría.

- Restricción 10

$$X(ta, p) \times CatP(p) \leq CatTA(ta)$$

$$p = \{1, \dots, NP\}; ta = \{1, \dots, NTA\}$$

- En una determinada cantidad de partidos (N) un árbitro a lo más debe de arbitrar una vez a un mismo equipo.

- Restricción 11

$$\sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^{NP} EQP(p, e) \times PartFec(p, f + n - 1) \times X(ta, p) \leq 1$$

$$ta = \{1, \dots, NTA\}; e = \{1, \dots, NE\}; f = \{1, \dots, NF - N + 1\}$$

- Además, existe también una cantidad de partidos (S) como máximo que una terna arbitral puede estar sin arbitrar.

- Restricción 12

$$\sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^{NP} PartFech(p, f + s - 1) \times X(ta, p) \geq 1;$$

$$ta = \{1, \dots, NTA\}; f = \{1, \dots, NF - S + 1\}$$

- En D fechas seguidas una terna arbitral no debe de superar la cantidad de KM kilómetros en viajes.

- Restricción 13

$$\sum_{d=1}^D \sum_{p=1}^{NP} PartFech(p, f + d - 1) \times 2 \times DistP(p) \times X(ta, p) \leq KM;$$

$$ta = \{1, \dots, NTA\}; f = \{1, \dots, NF - D + 1\}$$

- Una terna no debe de ser asignada a una llave completa; es decir, a partidos de ida y vuelta con los mismos equipos.

- Restricción 14

$$llave(p, q) \times [X(ta, p) \times +X(ta, q)] \leq 1; \quad ta = \{1, \dots, NTA\}; p, q \in \{1, \dots, NP\}$$

- Una terna arbitral puede no ser asignado a un partido por sanción u otro caso.

- Restricción 15

$$X(ta, p) = 0; \quad (ta, p) \in NAT$$

- Una terna arbitral debe de ser asignado a un partido específico.

- Restricción 16

$$X(ta, p) = 1; \quad (ta, p) \in SAT$$

## CAPÍTULO 5. RESOLUCIÓN DEL MODELO

Como se mencionó en el capítulo 3, el Torneo Descentralizado a ser evaluado por el modelo será el Torneo Descentralizado 2013. A continuación se describen y explican los parámetros para su resolución.

### 5.1. Definición de parámetros

En el presente inciso, se definirán los parámetros de ciertos atributos descritos en el apartado 4.3. Estos parámetros serán definidos según las características del Torneo a evaluar.

#### 5.1.1. Cantidades máximas y mínimas de partidos que cada terna debe de ser asignada. (MinPTA y MaxPTA)

Para la primera fase del torneo descentralizado se juegan en total treinta (30) fechas, lo que corresponde a un total de doscientos cuarenta (240) partidos, y para dicho torneo se tuvo veintitrés (23) ternas arbitrales a disposición. Por lo tanto, entre esas 23 ternas se dividirían los 240 partidos, lo que sería 10.43 partidos por terna.

$$\frac{\#Partidos}{\#Ternas} = \frac{240}{23} = 10.43$$

Entonces los valores de MinPTA y MaxPTA sería el entero inferior y superior de 10,43 respectivamente, es decir, 10 y 11 partidos; sin embargo, se tendría una restricción muy ajustada, para ello se tendrá se le disminuirá y aumentará respectivamente un factor está dado por el valor de cantidad de fechas entre cantidad de ternas; es decir 30 entre 23, que es igual a 1.30, aproximadamente 2. Entonces los valores para los atributos serán los siguientes.

$$MinPTA = \frac{\#Partidos}{\#Ternas} - \frac{\#Fechas}{\#Ternas} \approx 10 - 2 = 8$$

$$MaxPTA = \frac{\#Partidos}{\#Ternas} + \frac{\#Fechas}{\#Ternas} \approx 11 + 2 = 13$$

### 5.1.2. Cantidades máximas y mínimas de coincidencias entre ternas y equipos (MinTAE y MaxTAE).

El Torneo Descentralizado 2013, como se mencionó anteriormente, contó con la participación de dieciséis equipos (16). Entonces para definir la cantidad de coincidencias máximas y mínimas se tendrá en consideración, la cantidad de partidos jugados por cada equipo entre la cantidad de ternas disponibles; es decir 30 entre 23, 1.3 coincidencias entre terna y equipo, aproximadamente 2 partidos.

$$\frac{\#Partidos\ por\ Equipo}{\#Ternas} = \frac{30}{23} = 1.30 \approx 2$$

Pero al igual que los parámetros de mínima y máxima cantidad de partidos por terna, se les aumentará y disminuirá un valor respectivamente. Dicho valor estará determinado por la cantidad de equipos entre cantidad ternas arbitrales disponibles; es decir, 16 entre 23, lo que da un valor de 0.69, aproximadamente un (1) equipo por terna. Entonces el rango de coincidencias Terna – Equipo estará delimitado por la siguiente expresión.

$$Rango = \frac{\#Partidos\ por\ Equipo}{\#Ternas} \pm \frac{\#Equipos}{\#Ternas} \approx 2 \pm 1 = \{1; 3\}$$

Entonces, los valores de los atributos de mínimas y máximas coincidencias, MinTAE y MaxTAE respectivamente, serán los siguientes

$$MinTAE = 1$$

$$MaxTAE = 3$$

### 5.1.3. Cantidad de fechas que deben de transcurrir para que una terna vuelva a dirigir un partido con el mismo equipo (N).

Según las bases del Torneo Descentralizado, recién pasadas dos fechas una terna puede volver a dirigir a un equipo en específico; es decir si cierta terna dirigió un partido en la fecha t, en el cual jugaba el equipo A, recién podría volver a dirigir un partido en el que juegue

el mismo equipo en la fecha  $t+2$ . Entonces, el valor de  $N$  será igual al definido por las bases del campeonato.

$$N = 2$$

#### 5.1.4. Cantidad de fechas como máximo en las que una terna no es asignado a un partido ( $S$ )

En el inciso 5.1.1. se definieron las cantidades mínimas y máximas de partidos a las que un árbitro debe ser asignado; sin embargo, esto no asegura a que las ternas sean asignadas de manera consecutiva o muy dispersamente para cumplir dichas restricciones, por ello se propuso el parámetro  $S$ , el cual define la cantidad máxima de fechas en las que una terna no es asignada a un partido. El valor de  $S$  será definido por la frecuencia de fechas en las que una terna debe de cumplir su máxima cantidad de partidos a las que puede ser asignada; es decir 30 fechas entre 13 partidos, lo que da un valor de 2.31, lo que aproximadamente corresponde a 3 fechas como máximo.

$$S = \frac{\#Fechas}{\#MaxPTA} = \frac{30}{13} = 2.31 \approx 3$$

#### 5.1.5. Distancias mínimas y máximas a ser recorrida por los árbitros por viajes realizados durante el campeonato ( $D_{MinTA}$ y $D_{MaxTA}$ )

Los atributos  $MinPTA$  y  $MaxPTA$  delimitan la cantidad de partidos que las ternas pueden dirigir; sin embargo, esto no asegura que una terna dirija todos sus partidos en Lima o en ciudades de provincias. Por ello se propone estos atributos. Según las estadísticas del Torneo en total las distancias de ida y vuelta recorridas por todas las ternas durante los 240 partidos es igual a 253,650 kilómetros, lo que en promedio da 11,029 kilómetros por terna, 8,455 kilómetros por fecha y 1,057 kilómetros por partido aproximadamente. Entonces los atributos mencionados estarán delimitados por el promedio de kilómetros por terna (11,029 Km) más la mitad de la distancia promedio por fecha para el máximo, y menos para el mínimo respectivamente.

$$D_{MinTA} = \frac{\#DistTotal}{\#Ternas} - \frac{\#DistTotal}{\#Fechas \times 2} = 11,029 - 4,228 \approx 6,801Km$$

$$D_{MaxTA} = \frac{\#DistTotal}{\#Ternas} + \frac{\#DistTotal}{\#Fechas \times 2} = 11,029 + 4,228 = 15,256Km$$

$$D_{MinTA} \approx 6,800Km$$

$$D_{MaxTA} \approx 15,250Km$$

#### 5.1.6. Cantidad de Kilómetros como máximo que una terna debe de viajar durante D fechas (KM)

Así como se definió la cantidad máxima de partidos a la que una terna puede ser asignada (MaxPTA) y la distancia máxima que una terna puede recorrer como máximo por conceptos de viajes por el campeonato a disputarse (DMaxTA); también es necesario una distancia máxima determinada que un árbitro puede recorrer en una determinada cantidad de fechas. Pues, las dos primeras restricciones no aseguran que una terna recorra la cantidad máxima total en los primeros partidos o en los últimos a los cuales fue asignado. Por ello, el parámetro D será definido para dos fechas consecutivas, y el parámetro KM será definido por la cantidad máxima de distancia a recorrer (DMaxTA) entre la cantidad máxima de partidos (MaxPTA) más el promedio de distancia por viajes a las ciudades de provincia que participan en el torneo.

$$KM = \frac{D_{MaxTA}}{MaxPTA} + PromViajes = \frac{15,250}{13} + 1,691 \approx 2,875 Km$$

## 5.2. Modelo aplicado a Torneo Descentralizado del fútbol peruano

Con el modelo planteado en el capítulo anterior, así como la definición de requerimientos y parámetros se obtiene el siguiente modelo, el cual es aplicable directamente al Torneo Descentralizado de primera división del fútbol peruano.

- Sets:
  - Equipos ( $e$ ) =  $\{1 \dots 16\}$
  - Ternas arbitrales ( $ta$ ): =  $\{1 \dots 23\}$
  - Fechas ( $f$ ): =  $\{1 \dots 30\}$
  - Partidos ( $p$ ): =  $\{1 \dots 240\}$
- Variables:
  - $X(ta,p)$
- Atributos:
  - $CatTA(ta)$ : =  $\{1;2;3\}$
  - $CatP(p)$  =  $\{1;2;3\}$
  - $DistP(p)$
  - $LimP(p)$  =  $\{0;1\}$
  - $ProvP(p)$  =  $\{0;1\}$
  - $PartFec(p,f)$  =  $\{0;1\}$
  - $EQP(p,e)$  =  $\{0;1\}$
  - $Llave(p,p)$  =  $\{0;1\}$
  - $PagaLTA(ta)$
  - $PagaPTA(ta)$
  - $MinpTA$  = 8
  - $MaxpTA$  = 13
  - $MaxTAE$  = 3



- MinTAE = 1
- SAT(ta,p) = {0;1}
- NAT(ta,p) = {0;1}
- NE = 16
- NAP = 23
- NP = 240
- NF = 30
- N = 2
- S = 3
- D = 2
- KM = 2,875
- Función Objetivo:

$$\text{Min } Z = \sum_{ta=1}^{23} \text{PagaTotal}(ta)$$

- Restricciones:
- Restricción 17

$$\sum_{ta=1}^{23} X(ta, p) = 1; \quad p = \{1, \dots, 240\}$$

- Restricción 2

$$\sum_{p=1}^{240} \text{PartFech}(p, f) \times X(ta, p) \leq 1; \quad ta = \{1, \dots, 23\}; \quad f = \{1, \dots, 30\}$$

- Restricción 3

$$8 \leq \sum_{p=1}^{240} X(ta, p); \quad ta = \{1, \dots, 23\}$$

- Restricción 4

$$\sum_{p=1}^{240} X(ta, p) \leq 13; \quad ta = \{1, \dots, 23\}$$

- Restricción 5

$$6,800 \leq \sum_{p=1}^{240} DistP(p) \times 2 \times X(ta, p); \quad ta = \{1, \dots, 23\}$$

- Restricción 6

$$\sum_{p=1}^{240} DistP(p) \times 2 \times X(ta, p) \leq 15,250 \quad ta = \{1, \dots, 23\}$$

- Restricción 7

$$1 \leq \sum_{p=1}^{240} EQP(p, e) \times X(ta, p) \quad ta = \{1, \dots, 23\}; e = \{1, \dots, 16\}$$

- Restricción 8

$$\sum_{p=1}^{240} EQP(p, e) \times X(ta, p) \leq 3 \quad ta = \{1, \dots, 23\}; e = \{1, \dots, 16\}$$

- Restricción 9

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{240} X(ta, p) \times [LimP(p) \times PagaLT(ta) + ProvP(p) \times PagaPTA(ta)] \\ = PagaTotal(ta) \quad ta = \{1, \dots, 23\} \end{aligned}$$

- Restricción 10

$$X(ta, p) \times CatP(p) \leq CatTA(ta)$$

$$p = \{1, \dots, 240\}; ta = \{1, \dots, 23\}$$

- Restricción 11

$$\sum_{n=1}^2 \sum_{p=1}^{240} EQP(p, e) \times PartFec(p, f + n - 1) \times X(ta, p) \leq 1$$

$$ta = \{1, \dots, 23\}; e = \{1, \dots, 16\}; f = \{1, \dots, 29\}$$

- Restricción 12

$$\sum_{s=1}^3 \sum_{p=1}^{240} PartFech(p, f + s - 1) \times X(ta, p) \geq 1;$$

$$ta = \{1, \dots, 23\}; f = \{1, \dots, 28\}$$

- Restricción 13

$$\sum_{d=1}^2 \sum_{p=1}^{240} PartFech(p, f + d - 1) \times 2 \times DistP(p) \times X(ta, p) \leq 2,875;$$

$$ta = \{1, \dots, 23\}; f = \{1, \dots, 29\}$$

- Restricción 14

$$llave(p, q) \times [X(ta, p) \times +X(ta, q)] \leq 1 \quad ta = \{1, \dots, 23\}; p, q \in \{1, \dots, 240\}$$

- Restricción 15

$$X(ta, p) = 0 \quad (ta, p) \in NAT$$

- Restricción 16

$$X(ta, p) = 1 \quad (ta, p) \in SAT$$

### 5.3. Resolución del modelo de programación lineal entera

Para el diseño y resolución del modelo matemático se hizo uso de una versión con licencia completa del Software Lingo 15 de la compañía Lindo Systems.

El modelo planteado y desarrollado anteriormente contó con 5,543 variables, de las cuales 5,520 fueron variables enteras binarias correspondientes a la variable  $X$  (terna, Partido); y 23 las restantes, fueron variables no enteras correspondientes a la variable  $PagaTotal(ta)$ . Además, se tuvo en total 22,022 restricciones en total y el valor de la función objetivo fue igual a 1'646,370 nuevos soles, la cual corresponde a costo total de asignaciones de ternas arbitrales a los partidos del Torneo Descentralizado 2013.

En el anexo 4 se presenta la matriz de las asignaciones propuestas ( $N^\circ$  de Terna Vs  $N^\circ$  de Partido) la cual presenta la asignación de partidos para cada terna, en donde el valor 1 corresponde a la asignación de una terna a un partido, y el valor 0 la no asignación de una terna a un partido.

## CAPÍTULO 6. VALIDACIÓN DEL MODELO

Como se mencionó en el apartado 5.3, se tuvo un resultado de la función objetivo igual a S/.1'646,370.00, el cual representa el valor mínimo de dicha función para el modelo planteado. En el presente modelo se evaluarán los resultados obtenidos en el modelo en contraste con los reales.

### 6.1. Costos de asignación

La función objetivo del modelo corresponde a la minimización de los costos totales de asignación por terna, pues ello generaría una disminución de costos. Para el Torneo Descentralizado 2013, los costos totales de asignación fueron un total de S/.1'678,710.00, en la tabla 13 se presentan los costos reales mencionados.

Tabla 13: Costos reales de asignación.

N° Terna	Lima	Provincias	Total
1	S/. -	S/. 37,150.00	S/. 37,150.00
2	S/. 20,240.00	S/. 46,560.00	S/. 66,800.00
3	S/. 18,920.00	S/. 81,730.00	S/. 100,650.00
4	S/. 28,380.00	S/. 44,580.00	S/. 72,960.00
5	S/. 28,380.00	S/. 59,440.00	S/. 87,820.00
6	S/. 4,730.00	S/. 29,720.00	S/. 34,450.00
7	S/. 38,280.00	S/. 90,800.00	S/. 129,080.00
8	S/. 4,730.00	S/. 89,160.00	S/. 93,890.00
9	S/. -	S/. 29,720.00	S/. 29,720.00
10	S/. 23,650.00	S/. 37,150.00	S/. 60,800.00
11	S/. 28,380.00	S/. 66,870.00	S/. 95,250.00
12	S/. 20,240.00	S/. 69,840.00	S/. 90,080.00
13	S/. 15,180.00	S/. 77,600.00	S/. 92,780.00
14	S/. 14,190.00	S/. 59,440.00	S/. 73,630.00
15	S/. 25,520.00	S/.145,280.00	S/. 170,800.00
16	S/. 9,460.00	S/. 29,720.00	S/. 39,180.00
17	S/. 4,730.00	S/. 29,720.00	S/. 34,450.00
18	S/. 4,730.00	S/. 59,440.00	S/. 64,170.00
19	S/. 14,190.00	S/. 29,720.00	S/. 43,910.00
20	S/. 18,920.00	S/. 59,440.00	S/. 78,360.00
21	S/. 44,660.00	S/. 63,560.00	S/. 108,220.00
22	S/. -	S/. 7,760.00	S/. 7,760.00
23	S/. 20,240.00	S/. 46,560.00	S/. 66,800.00
<b>Total</b>	<b>S/. 387,750.00</b>	<b>S/. 1'290,960.00</b>	<b>S/. 1'678,710.00</b>

Fuente: Asociación Peruana de Árbitros de Fútbol.

Elaboración propia

En la tabla 14 se presenta un resumen de los costos de asignación del torneo 2013, según los resultados de la tabla 13.

Tabla 14: Resumen costos reales de asignación.

<b>Total</b>	S/. 1'678,710.00
<b>Media</b>	S/. 72,987.39
<b>Desviación</b>	S/. 35,666.64
<b>Mínimo</b>	S/. 7,760.00
<b>Máximo</b>	S/. 170,800.00

Elaboración propia

Mientras que según el modelo desarrollado, los costos de asignación fueron en total S/. 1'646,370.00. En la tabla 15 se presentan los costos totales obtenido para cada terna según el modelo de programación lineal entera mixta.

Tabla 15: Costos de asignación propuestos.

<b>N° Terna</b>	<b>Lima</b>	<b>Provincias</b>	<b>Total</b>
1	S/. 23,650.00	S/. 52,010.00	S/. 75,660.00
2	S/. 15,180.00	S/. 62,080.00	S/. 77,260.00
3	S/. 4,730.00	S/. 66,870.00	S/. 71,600.00
4	S/. 18,920.00	S/. 37,150.00	S/. 56,070.00
5	S/. 18,920.00	S/. 52,010.00	S/. 70,930.00
6	S/. 18,920.00	S/. 52,010.00	S/. 70,930.00
7	S/. 19,140.00	S/. 63,560.00	S/. 82,700.00
8	S/. 23,650.00	S/. 37,150.00	S/. 60,800.00
9	S/. 9,460.00	S/. 66,870.00	S/. 76,330.00
10	S/. 14,190.00	S/. 52,010.00	S/. 66,200.00
11	S/. 23,650.00	S/. 44,580.00	S/. 68,230.00
12	S/. 10,120.00	S/. 62,080.00	S/. 72,200.00
13	S/. 20,240.00	S/. 54,320.00	S/. 74,560.00
14	S/. 9,460.00	S/. 59,440.00	S/. 68,900.00
15	S/. 31,900.00	S/. 45,400.00	S/. 77,300.00
16	S/. 9,460.00	S/. 59,440.00	S/. 68,900.00
17	S/. 23,650.00	S/. 37,150.00	S/. 60,800.00
18	S/. 9,460.00	S/. 59,440.00	S/. 68,900.00
19	S/. 9,460.00	S/. 59,440.00	S/. 68,900.00
20	S/. 18,920.00	S/. 59,440.00	S/. 78,360.00
21	S/. 19,140.00	S/. 54,480.00	S/. 73,620.00
22	S/. 15,180.00	S/. 62,080.00	S/. 77,260.00
23	S/. 10,120.00	S/. 69,840.00	S/. 79,960.00
<b>Total</b>	<b>S/. 377,520.00</b>	<b>S/. 1'268,850.00</b>	<b>S/. 1'646,370.00</b>

Elaboración propia

En la tabla 16 se presenta un resumen de los costos de asignación propuestos por el modelo desarrollado, según los resultados de la tabla 15.

Tabla 16: Resumen costos de asignación propuestos.

<b>Total</b>	S/. 1'646,370.00
<b>Media</b>	S/. 71,581.30
<b>Desviación</b>	S/. 6,367.19
<b>Mínimo</b>	S/. 56,070.00
<b>Máximo</b>	S/. 82,700.00

Elaboración propia

Como se puede observar, existen diferencias muy relevantes entre la tabla 14 y la tabla 16, pues no solo se disminuyó en un 2% los costos totales de asignación, sino también se disminuyó considerablemente la desviación de costos entre ternas en un 82%, y la brecha entre las ternas con máximo y mínimo ingreso disminuyó en un 84%, lo cual indica que esta propuesta de asignación permite que las diferentes ternas obtengan ingresos similares y no existen grandes diferencias como en la asignación real.

## 6.2. Partidos asignados a cada terna

Según las restricciones 3 y 4, y a sus parámetros correspondientes, la cantidad de partidos de partidos a los cuales como mínimo y máximo puede ser asignada una terna arbitral son 8 y 13 encuentros respectivamente. Sin embargo, para la asignación de ternas arbitrales llevada a cabo por las autoridades correspondientes para el Torneo Descentralizado 2013 no se tuvo ninguna restricción similar, lo cual no permitió restringir las cantidades máximas y mínimas de partidos asignadas a cada terna. En la figura 11 se pueden observar la cantidad de asignaciones reales del torneo en mención.

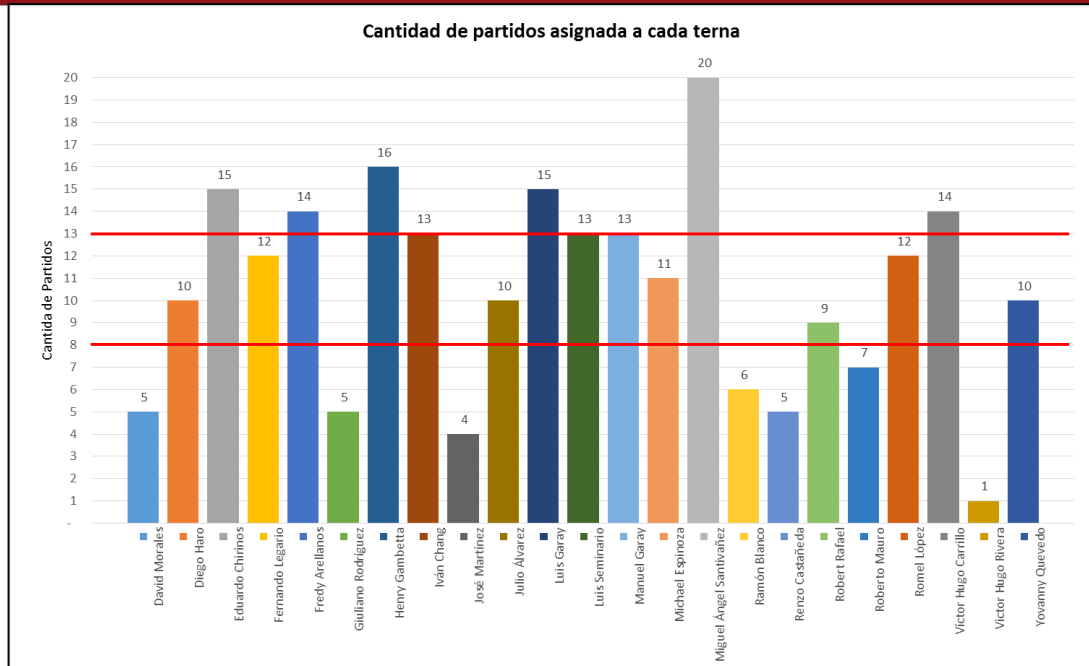


Figura 11: Cantidad de partidos asignados a cada terna.  
Fuente: Asociación Deportiva Fútbol Profesional (ADFP)  
Elaboración propia.

Y además los valores relevantes para la cantidad de partidos asignados para dicho torneo se muestran en la tabla 17.

Tabla 17: Resumen asignaciones reales a cada terna.

<b>Media</b>	10.44
<b>Desviación</b>	4.59
<b>Mínimo</b>	1
<b>Máximo</b>	20

Elaboración propia.

Luego de implementar las restricciones de máxima y mínima cantidad de partidos por terna arbitral en el modelo propuesto, se obtienen los resultados mostrados en la figura 12.



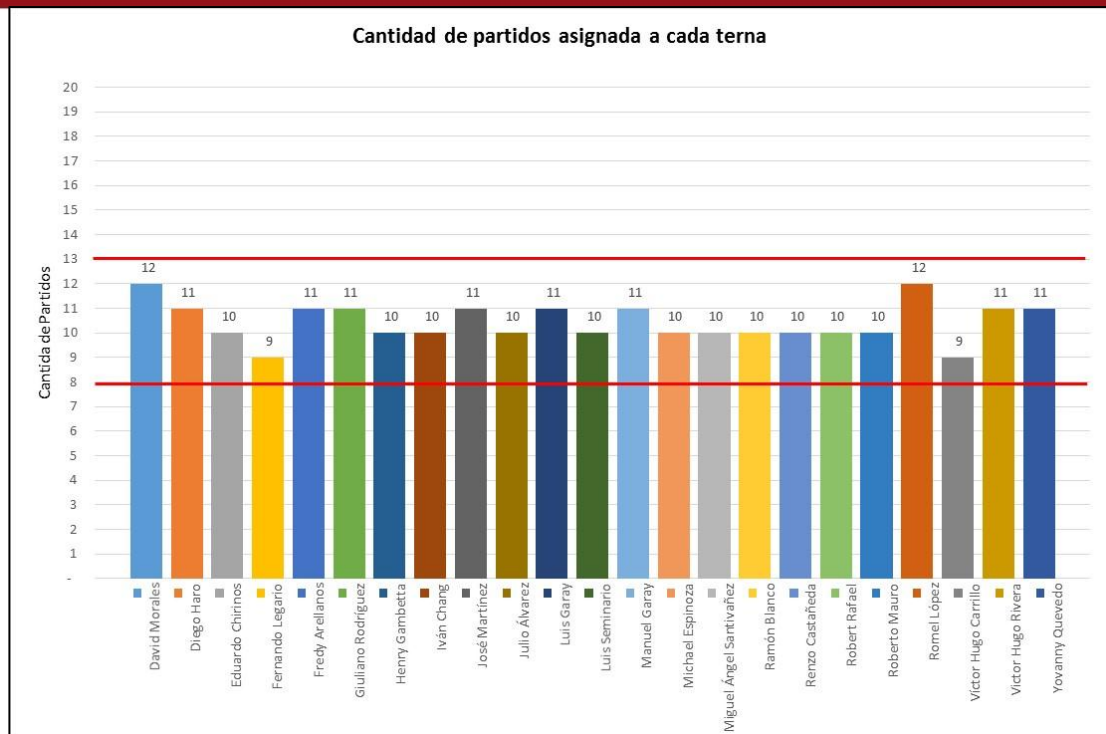


Figura 12: Cantidad de partidos asignados a cada terna propuesta.  
Elaboración propia.

Y además los valores relevantes para la cantidad de partidos asignados según los resultados obtenidos en el modelo se muestran en la tabla 18.

Tabla 18: Resumen asignaciones reales a cada terna.

<b>Media</b>	10.44
<b>Desviación</b>	0.77
<b>Mínimo</b>	9
<b>Máximo</b>	12

Elaboración propia.

Como se puede observar en las tablas 17 y 18, no solo se cumple con la restricción de cantidad de asignaciones mínimas y máximas, sino también que con el modelo propuesto se tiene una menor desviación de las asignaciones entre ternas, la cual disminuyó en un 83%, y la brecha entre las ternas con máxima y mínima cantidad de asignaciones disminuyó un 84%. Ello contribuye con una asignación más justa para las diferentes ternas, y además promueve un campeonato más transparente. En los anexos 5 y 6 se muestran las asignaciones reales y propuestas de partidos a cada terna durante el campeonato respectivamente.

### 6.3. Coincidencia de partidos entre una terna y equipo

El modelo permite también que exista una cantidad mínima y máxima de coincidencias entre un determinado árbitro y equipo, 1 y 3 respectivamente, esto con el fin de promover un campeonato más transparente y justo tanto para las ternas como para los equipos. Para el Torneo Descentralizado 2013, no se tomó en cuenta alguna limitación para el problema mencionado y los resultados obtenidos fueron los que se muestran en la siguiente figura.

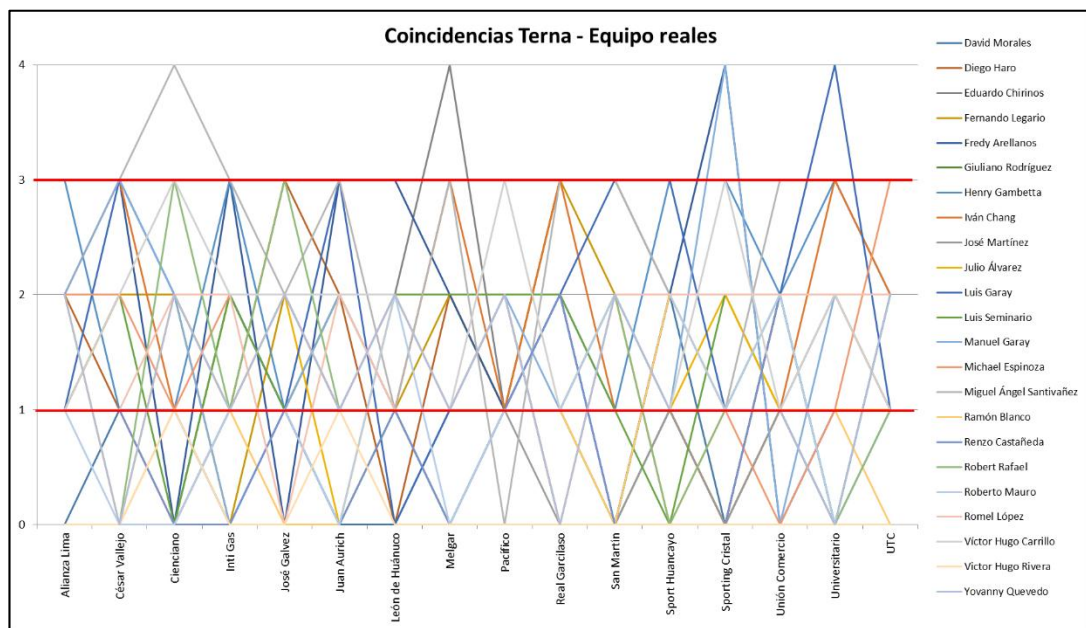


Figura 13: Coincidencia Terna – Equipo reales.  
Fuente: Asociación Deportiva de Fútbol Profesional (ADFP).  
Elaboración propia.

Además, lo valores más relevantes de las coincidencias del Torneo Descentralizado 2013 fueron las que se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 19: Resumen coincidencias Terna - Equipo reales.

<b>Media</b>	1.30
<b>Desviación</b>	0.99
<b>Mínimo</b>	0
<b>Máximo</b>	4

Elaboración propia.

Según el modelo desarrollado de obtuvieron los valores mostrados en la siguiente figura.

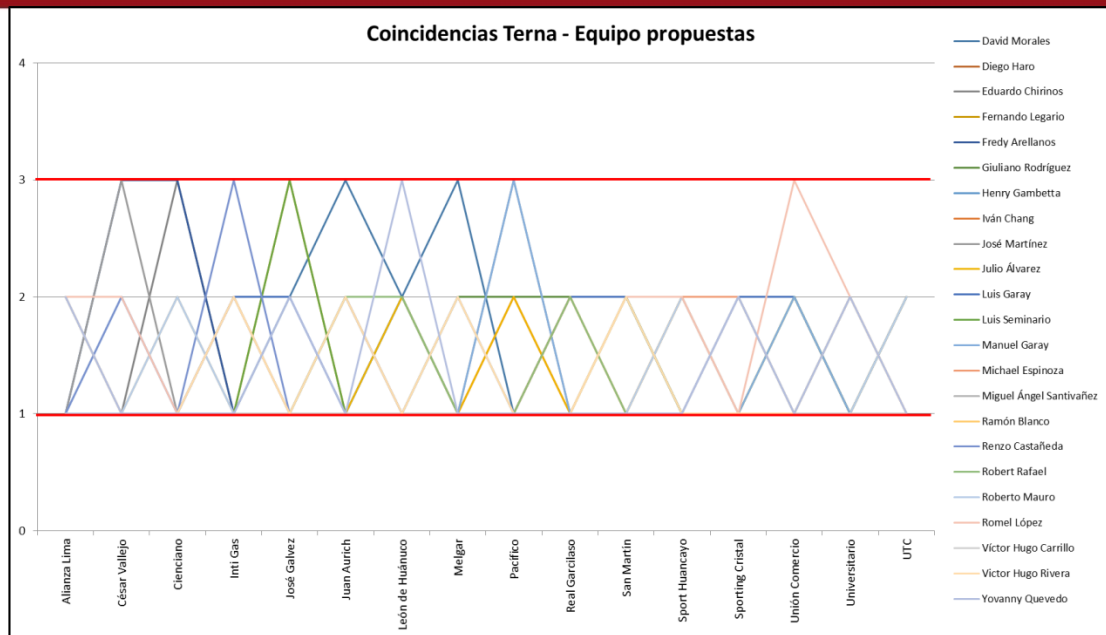


Figura 14: Coincidencia Terna – Equipo propuestas.  
Elaboración propia.

Además, los valores más relevantes de las coincidencias del Torneo Descentralizado 2013 según el modelo desarrollado fueron las que se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 20: Resumen coincidencias Terna – Equipo propuestas.

<b>Media</b>	1.30
<b>Desviación</b>	0.53
<b>Mínimo</b>	1
<b>Máximo</b>	3

Elaboración propia.

Como se puede observar, existe una mejora considerable, pues además de que se limite a una cantidad máxima de partidos a las que una terna puede dirigir a un equipo y también se asegura que al menos una vez una misma terna dirija a un equipo en todo el campeonato; también se disminuyó la variación entre estas coincidencias en un 46% y la brecha entre la máxima y mínima cantidad de coincidencias disminuyó un 50%. En los anexos 7 y 8 se muestran el detalle de las coincidencias Terna – Equipo reales y propuestos respectivamente.

### 6.4. Distancia recorrida por cada terna

Anteriormente, se definió que las distintas ternas también deben de tener limitaciones para las distancias que recorrerán a las distintas ciudades del país durante el campeonato. Los parámetros de estas restricciones fueron 6,800 y 15,250 Km respectivamente. Y así como en los puntos anteriores, en el Torneo Descentralizado 2013 tampoco se establecieron estos límites, en la siguiente figura se muestran las distancias totales reales recorridas por cada terna en el mencionado torneo.

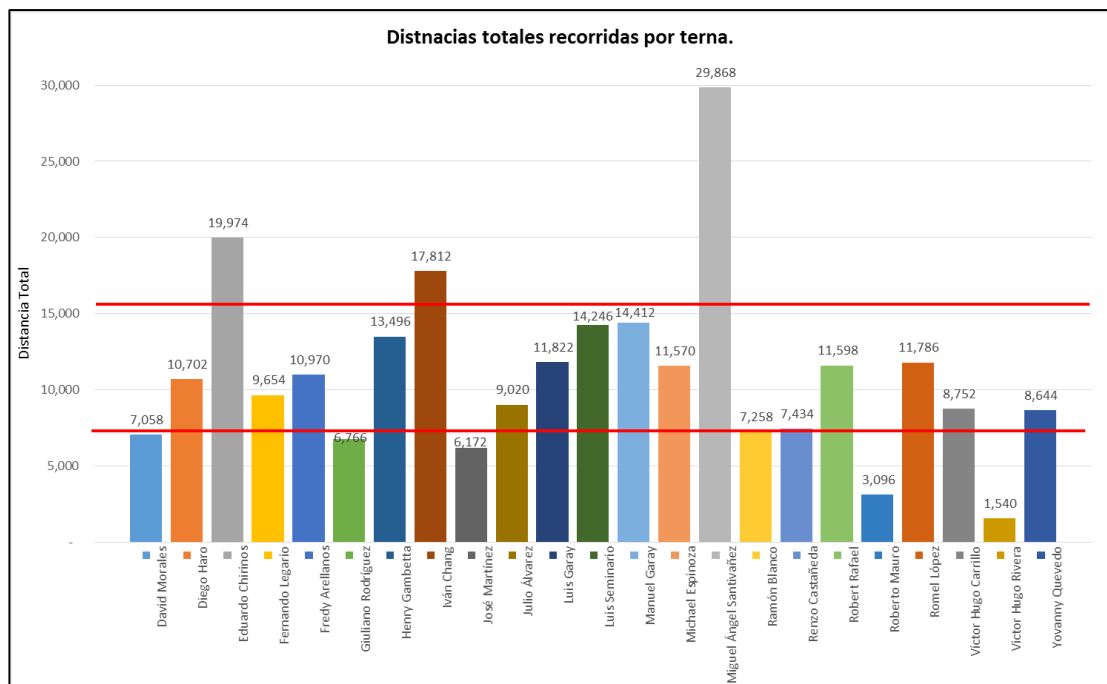


Figura 15: Distancias totales reales recorrida por terna.  
Fuente: Asociación Deportiva de Fútbol Profesional (ADFP).  
Elaboración propia.

En la tabla 21 se muestran los resultados relevantes de las distancias totales recorridas por cada terna en el Torneo Descentralizado 2013.

Tabla 21: Resumen de distancias totales reales de cada terna.

<b>Media</b>	11,028 Km
<b>Desviación</b>	5,768 Km
<b>Mínimo</b>	1,540 Km
<b>Máximo</b>	29,868 Km

Elaboración propia.

Según el modelo desarrollado, los resultados obtenidos para las distancias totales recorridas por árbitro los las que se muestran en la siguiente figura.

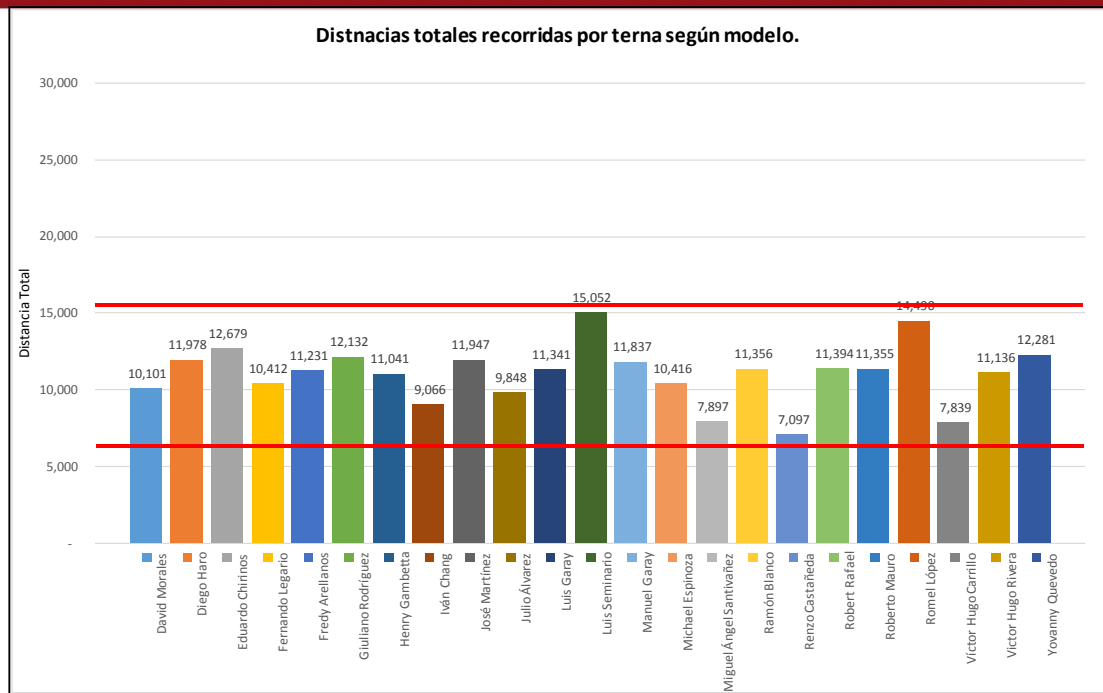


Figura 16: Distancias totales propuestas recorrida por terna.  
Elaboración propia.

En la tabla 22 se muestran los datos relevantes correspondientes a las nuevas distancias recorridas por terna.

Tabla 22: Resumen de distancias totales propuestas de cada terna.

<b>Media</b>	11,028 Km
<b>Desviación</b>	1,853 Km
<b>Mínimo</b>	7,097 Km
<b>Máximo</b>	15,052 Km

Elaboración propia.

Se puede observar que existe un cambio positivo, ya que además de que todas las ternas cumplen con la restricción de distancias totales mínimas y máximas, se redujo la desviación de distancias entre ternas en un 68% y también la brecha entre las ternas que recorrieron más y menos kilómetros durante el campeonato disminuyó un 72%. En los anexos 9 y 10 se muestra el detalle de las distancias recorridas por cada terna durante el campeonato respectivamente.

## 6.5. Relación Fecha – Partidos acumulados

Como se mencionó anteriormente, el Torneo Descentralizado cuenta con 240 partidos divididos en 30 fechas en su etapa inicial, y para tal

campeonato se contó con 23 ternas arbitrales. Lo que aproximadamente corresponde 11 partidos por terna, si bien existen restricciones de cantidad mínimas y máxima por partido, es importante evaluar la relación Fecha-Partidos Acumulados de cada terna, pues se espera que esta relación tenga una tendencia lineal y lo ideal sería que todas las ternas sigan aproximadamente la misma relación. Una ecuación lineal  $Y = mX + B$ , en donde X es el número de fecha, e Y la cantidad de partidos acumulados describe mejor esta relación. Por ello se evaluarán las pendientes “m” para cada terna. A continuación se presentan las relaciones Fecha – Partidos Acumulados en la siguiente figura.

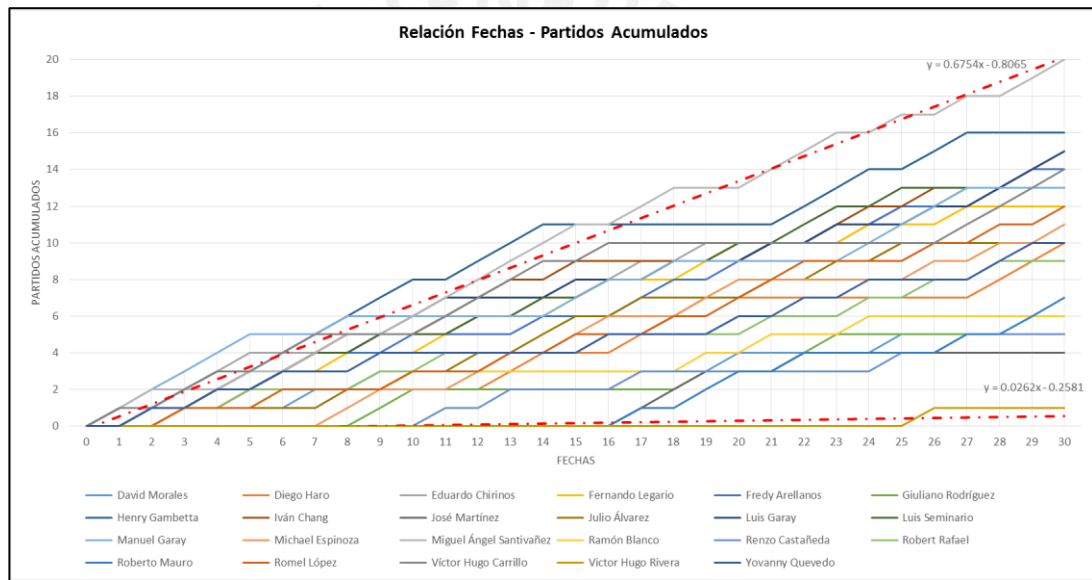


Figura 17: Relación Fecha – Partidos Acumulados reales.  
Fuente: Asociación Deportiva de Fútbol Profesional (ADFP).  
Elaboración propia.

En la tabla 23 se muestran los datos relevantes de las relaciones Fecha – Partidos Acumulados, los valores mostrados corresponde a las pendientes de dichas relaciones.

Tabla 23: Resumen de relaciones Fecha – Partidos Acumulados reales.

<b>Media</b>	0.348
<b>Desviación</b>	0.144
<b>Mínimo</b>	0.026
<b>Máximo</b>	0.675

Elaboración propia.

Para el modelo desarrollado, los valores de las relaciones Fecha – Partidos Acumulados se encuentran en la figura 18.

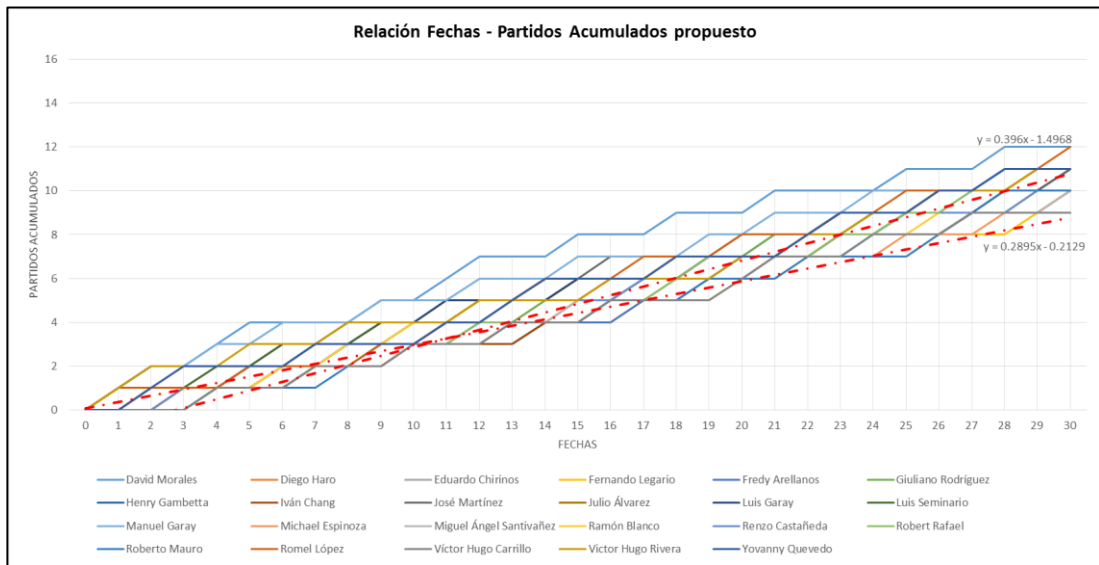


Figura 18: Relación Fecha – Partidos Acumulados propuesto.  
Elaboración propia.

En la tabla 24 se muestran los datos relevantes de las relaciones Fecha – Partidos Acumulados según el modelo desarrollado, los valores mostrados también corresponden a las pendientes de dichas relaciones.

Tabla 24: Resumen de relaciones Fecha – Partidos Acumulados propuesto.

<b>Media</b>	0.348
<b>Desviación</b>	0.027
<b>Mínimo</b>	0.290
<b>Máximo</b>	0.396

Elaboración propia.

Según los resultados mostrados se puede observar que el modelo permite que las relaciones Fecha – Partidos Acumulados entre todas las ternas sigan aproximadamente la misma pendiente, pues la desviación del valor de las pendientes disminuyó un 81% y la brecha entre la mínima y máxima pendiente disminuyó en un 84%. En los anexos 11 y 12 se puede observar el detalle de las relaciones Fecha – Partidos Acumulados para cada terna respectivamente

### 6.6. Relación Fecha – Distancia Acumulada

Así como existe una relación Fecha – Partidos Acumulados, también existe una para la Distancia Acumulada recorrida por cada terna, se presenta en la siguiente figura las relaciones mencionadas para los datos reales del Torneo Descentralizado 2013.

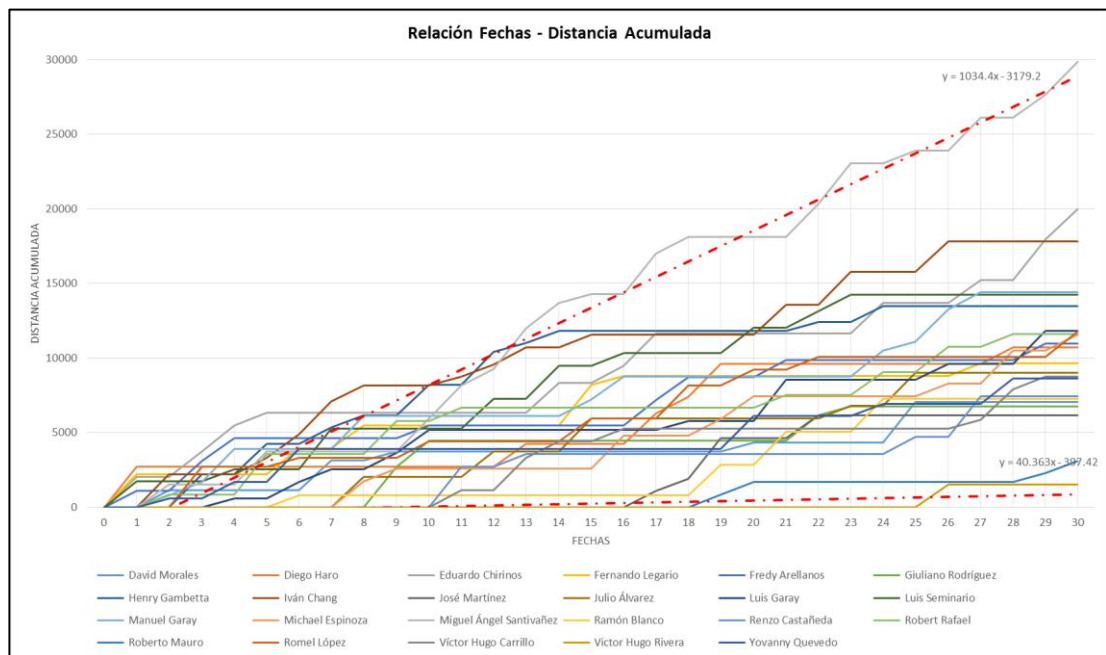


Figura 19: Relación Fecha – Distancia Acumulados real.  
Fuente: Asociación Deportiva de Fútbol Profesional (ADFP).  
Elaboración propia.

En la tabla 25 se muestran los datos relevantes de las relaciones Fecha – Distancia Acumulada, los valores mostrados corresponde a las pendientes de dichas relaciones.

Tabla 25: Resumen de relaciones Fecha – Distancia Acumulada reales.

<b>Media</b>	366 Km
<b>Desviación</b>	189 Km
<b>Mínimo</b>	40 Km
<b>Máximo</b>	1,034 Km

Elaboración propia.

Y según el modelo los resultados obtenidos de dicha relación fueron los que se muestran a continuación.



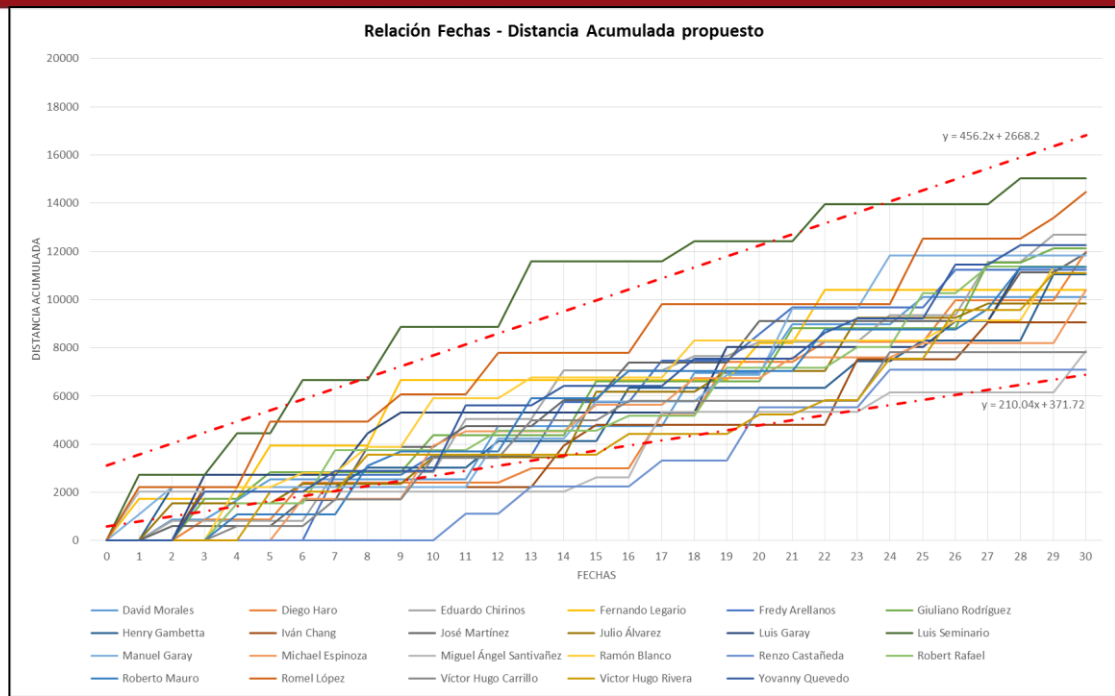


Figura 20: Relación Fecha – Distancia Acumulados propuesta.  
Elaboración propia.

En la tabla 26 se muestran los datos relevantes de las relaciones Fecha – Distancia Acumulada, los valores mostrados corresponde a las pendientes de dichas relaciones.

Tabla 26: Resumen de relaciones Fecha – Distancia Acumulada propuestas.

<b>Media</b>	366 Km
<b>Desviación</b>	57 Km
<b>Mínimo</b>	210 Km
<b>Máximo</b>	456 Km

Elaboración propia.

Se puede observar que el modelo permitió mejores relaciones Fecha – Distancia Acumulada, pues la desviación de dichas relaciones disminuyó un 70% y la brecha entre la mayor y menor pendiente disminuyó un 75%. En los anexos 13 y 14 se pueden observar las relaciones Fecha – Distancia Acumulada tanto para los valores reales como para los obtenidos por el modelo propuesto respectivamente

### 6.7. Matriz de asignaciones propuestas

En los puntos anteriores se mostraron los cumplimientos y mejoras que ofrecen diferentes restricciones, las cuales tienen un objetivo básicamente cuantitativo; por ello es importante mencionar los resultados de las demás restricciones las cuales tienen un objetivo cualitativo. La siguiente matriz muestra una relación de asignaciones propuestas de ternas arbitrales<sup>7</sup> a cada partido de cada fecha, en donde se muestra el cumplimiento de las restricciones más básicas hasta las propuestas.

		# partido - IDA								# partido - VUELTA									
		1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8		
Fecha	1	T	M	D	O	A	V	I	L	R	U	H	G	I	B	S	V	16	Fecha
	2	G	V	A	M	C	J	I	W	B	G	Q	O	E	T	D	L	17	
	3	F	K	W	B	H	N	C	Q	N	R	F	W	P	L	A	C	18	
	4	R	E	U	S	L	A	M	P	S	J	K	H	M	R	B	E	19	
	5	T	V	D	A	F	O	Q	K	Q	E	V	C	T	U	I	D	20	
	6	G	M	L	P	B	N	I	J	O	U	N	E	M	A	F	G	21	
	7	C	E	U	W	R	H	F	Q	K	P	D	L	S	V	B	W	22	
	8	V	S	J	I	G	K	O	P	G	H	R	K	W	E	J	T	23	
	9	S	T	L	A	D	M	R	K	M	I	U	Q	C	B	V	O	24	
	10	U	E	B	J	H	P	N	F	G	A	L	R	T	F	Q	N	25	
	11	A	W	Q	T	N	I	C	K	V	B	K	P	S	D	E	W	26	
	12	O	J	G	T	A	V	M	R	U	R	O	J	F	C	S	H	27	
	13	B	Q	W	L	D	P	S	U	L	I	M	N	S	K	W	A	28	
	14	H	W	I	P	C	F	E	T	P	Q	V	F	D	T	C	G	29	
	15	M	F	J	K	A	N	O	H	O	E	I	T	N	H	B	J	30	

Figura 21: Matriz de asignación de ternas propuesta.  
Elaboración propia.

- Con respecto a la restricción 1, se cumple que a cada partido del torneo se le asigna una terna.
- Con respecto a la restricción 2, se observa que una misma terna no es asignada a más de un partido en una misma fecha.
- Con respecto a la restricciones 3 y 4, se observa que todas las ternas cumplen con las cantidades mínimas y máximas de asignación.
- Con respecto a la restricción 12, se observa que ninguna terna pasa más de 3 fechas sin arbitrar ningún partido.
- Con respecto a la restricción 14, se observa que ninguna terna es asignada a un par de partidos que conforman una llave<sup>8</sup>.

<sup>7</sup> En el gráfico cada letra representa a cada una de las 23 ternas arbitrales, en donde la terna 1 es representada por la A, la 2 por la B,... y la 23 por la W.

<sup>8</sup> En la matriz, los partidos que conforman una llave son aquellos que se encuentran en la misma fila y columna de cada bloque, por ejemplo el partido 1 de la fecha 1 conforma una llave con el partido 1 de la fecha 16. Revisar anexo 1.

## CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 7.1. Conclusiones

Hoy en día en el fútbol, y demás deportes en general, se encuentran en la búsqueda de acciones que generen mejoras para las entidades relacionadas tanto en términos económicos como deportivos. Es por ello, que en las competencias más importantes de los principales deportes del mundo se vienen implementando diferentes herramientas que puedan lograrlo. Entre las más importantes se encuentra la programación lineal, la cual ha sido empleada anteriormente para la elaboración de programación de encuentros de algún torneo en específico. Así mismo, aprovechando la crisis en la que se encuentra el fútbol peruano, se presentó como oportunidad proponer un modelo de programación lineal entera mixta que solucione el problema de la asignación de ternas arbitrales para el torneo más importante del fútbol peruano.

El modelo desarrollado, que tuvo como función objetivo minimizar los costos de asignación de ternas arbitrales, permitió un decremento del 2% anual en relación a los costos reales del torneo, lo cual equivale a poco más de S/ 30,000. A pesar de no obtenerse un ahorro explícito considerable, es de suma importancia mencionar que el presente estudio tiene un impacto positivo en términos deportivos para la competencia, puesto que al obtenerse una asignación más objetiva y transparente se reducirá el riesgo de que se registren ínfimas actuaciones por parte de las ternas arbitrales que en consecuencia afectaría a todas las entidades del fútbol.

Las mejoras conseguidas son producto también de las restricciones planteadas en el modelo desarrollado, pues permitieron mejorar diferentes indicadores tanto económicos como deportivos como por ejemplo: se disminuyó en un 83% la desviación de partidos asignados a cada terna, lo que permite mayor igualdad de oportunidades a cada terna, sin importar la categoría de las mismas; también se redujo en un 82% la desviación de pagos a cada terna, lo cual es una significativa mejora para las diferentes

ternas del torneo, pues permite que tengan ingresos similares, cabe resaltar que esta mejora va de la mano con la antes expuesta; también se redujo la desviación de la distancia recorrida por cada terna en un 68%, lo cual permite que el desgaste por viajes hacia otras ciudades por cada terna sea lo más similar posible; además se disminuyó la desviación de coincidencia entre determinadas ternas arbitrales y equipos en un 46%, lo cual permite tener una asignación más objetiva y transparente, ya que cada terna dirigirá casi la misma cantidad de encuentros a cada uno de los equipos del torneo.

Es importante agregar que se implementaron restricciones adicionales al modelo para permitir una mejor distribución y dispersión de los resultados obtenidos, los cuales mejoraron los siguientes indicadores: se redujo en un 81% la desviación de las pendientes de la relación fechas – partidos acumulados, lo cual permite que a todas las ternas se les asigne encuentros de manera lineal durante todo el torneo para tener una mejor dispersión; también, se redujo en un 70% la desviación de las pendientes de la relación fechas – distancia acumulada, lo cual indica que todas las ternas cumplan con la distancia recorrida al dirigir partidos en provincias de manera lineal durante todo el campeonato.

Cabe resaltar que el modelo propuesto cumple con todas las condiciones iniciales del torneo, puesto que a cada partido del campeonato se le asigna una terna arbitral, cada terna es a lo más asignada a un encuentro por fecha, y que deben pasar al menos una fecha para que una terna vuelva a dirigir a un determinado equipo. El modelo también cumple con las restricciones propuestas como las cantidades mínimas y máximas de partido a ser asignada cada terna, cantidades mínimas y máximas de coincidencia entre equipos y ternas, la distancia mínima y máxima a recorrer por cada terna, cantidad máxima de fechas en la que una terna nos sea asignada a algún partido, que la categoría de la terna corresponda a la categoría del partido, distancia máxima a recorrer durante una determinada cantidad de fechas seguidas y que una terna no puede ser asignada a partidos llave.

Además, es importante mencionar que el presente modelo puede ser implementado en diferentes competencias deportivas, además de un campeonato de fútbol, sin importar el formato de competición, cantidad de equipos, encuentros y ternas, ya que las variables de decisión no requieren que los elementos mencionados sean constantes. Por ejemplo, podría ser implementado en torneos de menor categoría como Segunda División y la infinidad de fases de la Copa Perú, en donde constantemente se han evidenciado diferentes casos de corrupción.

Asimismo al obtenerse un disminución de tiempo para la realización de esta labor y un ahorro económico al implementarse este modelo, las entidades responsables de esta tarea podrán invertir estos recursos en otros aspectos que beneficien a las ternas arbitrales como capacitaciones internacionales, mejora en infraestructura, implementos para la dirección de partidos como sistemas de comunicación, nutrición y salud, entre otros.

En síntesis, el modelo propuesto genera mejoras tanto en el ámbito deportivo, ya que genera una asignación más transparente y objetiva; económica, puesto que la optimización de asignación de recursos genera un ahorro considerable; y laboral, ya que existirán menores diferencias en los ingresos de las diferentes ternas y tendrán las mismas oportunidades de trabajo.

## 7.2. Recomendaciones

Con respecto a la programación de ternas arbitrales se observó que en algunos partidos fueron asignados ternas de categorías mayores cuando no las requerían, ello debido a que existe una mayor cantidad de ternas arbitrales de mayor categoría de las que se necesita. Por ello, es necesario que se realice una redistribución de las ternas, para que esta se acomode a las necesidades de los torneos a disputarse.

Además, será necesario que se nombre a algún encargado de la administración y modificaciones del modelo elaborado, pues durante el torneo pueden existir ciertos cambios como suspensiones de árbitros y jueves de línea por bajo rendimiento, solicitudes por parte de los clubes para que no les asigne determinada terna, licencias para los integrantes de las ternas, entre otros. También existen diversos cambios anuales de formato a los que el torneo está afecto los cuales van desde la cantidad de equipos, nuevas localidades, sistema de competencia, entre otros.

Asimismo es recomendable, que se trabaje paralelamente con algún software o aplicativo mediante el cual los encargados de la asignación, integrantes de las diferentes ternas arbitrales, dirigentes de clubes y demás responsables puedan visualizar las programaciones y modificaciones de las mismas.

Por último, se recomienda trabajar en conjunto con los responsables de la elaboración de la programación de partidos del torneo (fixture) de los torneos a disputarse tanto de primera, segunda y divisiones inferiores, para encontrar mejores soluciones en conjunto que beneficien aún más la situación actual y en consecuencia colaboren con la solución de la crisis del fútbol peruano.

## BIBLIOGRAFÍA

- ALARCÓN LORCA, Fernando Esteban  
2009 Asignación de árbitros para un campeonato de fútbol mediante el uso de programación matemática. Tesis de maestría en Gestión de Operaciones. Santiago de Chile: Universidad de Chile, Facultad de ciencias físicas y matemáticas.
- ASOCIACIÓN DEPORTIVA DE FÚTBOL PROFESIONAL (ADFP).  
2013. Bases del Torneo Descentralizado 2013. Consulta: 03 de noviembre de 2014, de ADFP. Sitio web:  
<http://www.adfp.org.pe/pdf/dscntrlzd2013.pdf>
- ASOCIACIÓN DEPORTIVA DE FÚTBOL PROFESIONAL (ADFP).  
2013. Estadísticas Torneo Descentralizado 2013. Consulta: 04 de setiembre de 2014, de ADFP. Sitio web:  
<http://www.adfp.org.pe/pdf/dscntrlzd2013fecha45.pdf>
- ASOCIACIÓN PROFESIONAL DE ÁRBITROS DE FÚTBOL (APAF).  
2014 Árbitros asociados FIFA. Consulta: 05 de marzo de 2015, de APAF. Sitio web:  
<http://arbitrosperuanos.com/default.asp?action=fifa>
- ASOCIACIÓN PROFESIONAL DE ÁRBITROS DE FÚTBOL (APAF).  
2014 Árbitros asociados Primera División. Consulta: 05 de marzo de 2015, de APAF. Sitio web:  
<http://arbitrosperuanos.com/default.asp?action=fifa>
- ASOCIACIÓN PROFESIONAL DE ÁRBITROS DE FÚTBOL (APAF).  
2015 Información general CONAR. Consulta 05 de agosto de 2015, de APAF. Sitio web:  
<http://apaf.pe/conar/>
- BOM SENSO FC  
2014 O movimento. Bom Senso FC “Por um futebol melhor para todos”. Consulta: 24 de noviembre de 2014.  
<http://www.bomsensofc.org.br/o-movimento>
- BRIKSON, Dirk.  
2008 Sports League Scheduling: Models, Combinational Properties, and Optimization Algorithms. Berlín. Springer.
- CARDEMIL, Andrés  
2002 Optimización de fixtures deportivos: estado del arte y un algoritmo tabú search para el traveling tournament problema. Tesis de licenciatura en Ciencias de la Computación. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

- CRUZ, Jorge Luis  
2012 “La burbuja del fútbol”. Ideele. Lima, número 215. Consulta: 20 de setiembre de 2015.  
<http://revistaideele.com/ideele/content/la-burbuja-del-f%C3%BAtbol>
- DANTZIG, George B.  
1998 Lineal programming and extensions. Décimo primer edición. Princeton: Princeton University Press.
- DUARTE, A. R., RIBEIRO, C. C., URRUTIA, S., & HAEUSLER, E. H.  
2006 Referee assignment in sports leagues. Consulta: 26 de octubre de 2014.  
[http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-540-77345-0\\_11](http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-540-77345-0_11)
- EL COMERCIO  
2014 “¿A quiénes les deben Alianza Lima y Universitario de Deportes?”. El Comercio. Lima, 27 de marzo. Consulta: 21 de agosto de 2014.  
<http://elcomercio.pe/economia/peru/quienes-les-deben-alianza-lima-y-universitario-deportes-noticia-1718753>
- GESTIÓN.  
2014 “Perú invierte en deporte cuatro veces más que Colombia pero no tiene logros”. Gestión. Lima, 1 de marzo. Consulta: 20 de agosto de 2014.  
<http://gestion.pe/economia/peru-invierte-deporte-cuatro-veces-mas-que-colombia-no-tiene-logros-2090467>
- HILLIER, Frederick; LIEBERMAN, Gerald.  
2010 Introducción a la investigación de operaciones. México D.F.: McGraw-Hill.
- KENDALL, G., KNUST, S., RIBEIRO, C. C., & URRUTIA, S.  
2010 Scheduling in sports: An annotated bibliography. Computers and Operations Research, 37(1), 1-19.
- OLYMPIC.ORG  
2012 Colombia medals – London 2012. Consulta: 15 de agosto de 2014.  
<http://www.olympic.org/content/results-and-medalists/searchresultpercountry/?athletename=&country=col&sport2=&games2=2012%2f1&event2=&mengender=true&womengender=true&mixedgender=true&goldmedal=true&silvermedal=true&bronzemedal=true&worldrecord=true&olympicrecord=false&teamclassification=true&individualclassification=true&winter=true&summer=true>



## OLYMPIC.ORG

2012 Peru medals – London 2012. Consulta: 15 de agosto de 2014.  
<http://www.olympic.org/content/results-and-medalists/searchresultpercountry/?athletename=&country=per&sport2=&games2=2012%2f1&event2=&mengender=true&wome ngender=true&mixedgender=true&goldmedal=true&silvermedal =true&bronzemedal=true&worldrecord=true&olympicrecord=fals e&teamclassification=true&individualclassification=true&winter= true&summer=true>

## PERU.COM

2013 “Condenan a cuatro años de prisión efectiva a Guillermo Alarcón”. Peru.com. Lima, 22 de noviembre. Consulta: 21 de agosto de 2014.  
<http://peru.com/futbol/descentralizado/condenan-cuatro-anos-presion-efectiva-guillermo-alarcon-noticia-211075>

## RIBEIRO, C. C.

2012 Sports scheduling: Problems and applications. International Transactions in Operational Research, 19(1-2), 201-226.

## RPP

2013 “Gol TV y Media Networks acuerdan transmitir partidos del descentralizado”. RPP. Lima, 31 de enero. Consulta: 21 de agosto de 2014.  
[http://www.rpp.com.pe/2013-01-31-gol-tv-y-media-networks-acuerdan-transmitir-partidos-de-descentralizado-noticia\\_563268.html](http://www.rpp.com.pe/2013-01-31-gol-tv-y-media-networks-acuerdan-transmitir-partidos-de-descentralizado-noticia_563268.html)

## TRICK, M. A., YILDIZ, H., &amp; YUNES, T.

2012 Scheduling major league baseball umpires and the traveling umpire problem. Interfaces, 42(3), 232-244.

## WINSTON, Wayne L.

2005. Investigación de Operaciones: Algoritmos y aplicaciones. México D.F.: Thomson.