PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ANÁLISIS DEL LIBRO OFICIAL DE TEXTO DE MATEMÁTICA DE CUARTO AÑO DE SECUNDARIA EN RELACIÓN CON EL OBJETO MATEMÁTICO FRACCIONES ALGEBRAICAS DESDE LA PERSPECTIVA DEL EOS

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

MARIBEL AYMA MEDINA

ASESOR:

NORMA VIOLETA RUBIO GOYCOCHEA

Diciembre, 2018

DEDICATORIA

A mi querida madre quien con sus consejos y apoyo incondicional en mi vida espiritual y personal, supo darme una buena educación a pesar de sus limitaciones. Sin ella no hubiera podido lograr mis metas en la vida.

A mi hermana Hipólita por el apoyo moral, ánimo y estímulo de superación en la docencia; a mis hermanos(as) Germán, Máximo, Julia, César, Ana y Carmen por su tolerancia y comprensión en el proceso del desarrollo de la tesis, pues, muchas veces estuve ausente en las reuniones familiares.

A mi amigo Elías, quien me motivó a estudiar en esta prestigiosa Universidad, al Pst. Julio, por sus palabras sabias y motivadoras, y a mi gran amiga Daniela, quien con sus palabras de ánimo alegraban siempre mis días.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios quien siempre estuvo renovando mis fuerzas y dándome oportunidades en la vida para desarrollarme profesionalmente. Él es, quien guía mis pasos y mi fortaleza.

A la Dra. Norma Rubio por su amabilidad, paciencia, dirección y ayuda en la elaboración de esta tesis.

A los miembros del jurado, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar y Mg. Carolina Rita Reaño Paredes, por las observaciones, revisiones, valiosas sugerencias y aportes en las versiones finales de la presente tesis.

A los profesores de la Maestría, quienes contribuyeron en mi formación académica durante los años en la PUCP.

RESUMEN

El presente trabajo tiene por objetivo analizar las tareas desarrolladas y propuestas en el texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria de 2012, en relación con el objeto matemático fracciones algebraicas, objeto de estudio establecido en el Diseño Curricular Nacional (2009), que se enseñó en el nivel VII de educación secundaria en las instituciones públicas del país y es usado en diversos contenidos matemáticos a nivel superior.

Para hacer el análisis de nuestro objeto de estudio, fracciones algebraicas, es necesario trabajar con las herramientas de análisis que ofrece la teoría Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, más conocido como EOS, las cuales, ayudan a identificar los objetos activados en la práctica matemática de nuestro estudio.

El análisis de las configuraciones epistémicas elaboradas, en las cuales se presentan los objetos matemáticos primarios: conceptos, lenguajes, problemas, proposiciones, procedimientos y argumentos; sirven tanto para determinar los significados institucionales, como para identificar los conceptos y procedimientos usados al resolver tareas sobre fracciones algebraicas. Además, al identificar los procesos y conceptos de las tareas propuestas y desarrolladas en el material de texto, se realiza la categoría de tareas simples y complejas de acuerdo a la demanda cognitiva propuesta por Stein. Asimismo, es necesario apoyarnos en los descriptores del sentido estructural, enfoque procedimental y estructural, para determinar el nivel de exigencia cognitiva que presentan las tareas del texto oficial de matemática 2012.

Finalmente, después del análisis respectivo, hemos concluido que las tareas matemáticas de fracciones algebraicas que se propusieron a los alumnos de educación secundaria pública, tienen baja idoneidad epistémica, lo cual nos permite reflexionar acerca de cómo se vienen proponiendo las tareas en el texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria.

ABSTRACT

The objective of this paper is to analyze the tasks developed and proposed in the official text of mathematics in the fourth year of secondary school in 2012, related to the mathematical object algebraic fractions, object of study established in the National Curricular Design (2009), which was taught in the level VII of secondary education in the public institutions of the country and is used in diverse mathematical contents at a superior level.

To make the analysis of our object of study, algebraic fractions, it is necessary to work with the analysis tools offered by the Ontosemiótico Approach of Cognition and Mathematical Instruction, better known as EOS, which help to identify the objects activated in the mathematical practice of our study.

The analysis of elaborate epistemic configurations, in which the primary mathematical objects are presented: concepts, languages, problems, propositions, procedures and arguments; they serve both to determine institutional meanings, and to identify the concepts and procedures used in solving tasks on algebraic fractions. In addition, by identifying the processes and concepts of the tasks proposed and developed in the text material, the category of simple and complex tasks is performed according to the cognitive demand proposed by Stein. Likewise, it is necessary to rely on the descriptors of the structural sense, procedural and structural approach, to determine the level of cognitive requirement presented by the tasks of the official text of mathematics 2012.

Finally, after the respective analysis, we have concluded that the mathematical tasks of algebraic fractions that were proposed to students of public secondary education, have low epistemic suitability, which allows us to reflect on how the tasks are being proposed in the official text of Mathematics of fourth year of secondary school.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El libro de texto escolar es un recurso didáctico común e importante en la enseñanza y aprendizaje, que constituye una herramienta de trabajo tanto para el docente como para el alumno.

En esta investigación se estudia el tema matemático específico fracciones algebraicas tratado en el texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012, e incluido en las programaciones curriculares de las diversas instituciones educativas del Perú en el grado señalado. Sobre este objeto matemático existen diversas investigaciones (Subramaniam y Benerjee (2004), Castro (2012), Vega-Castro, Molina y Castro (2011), Vega-Castro (2010), entre otros) que han estudiado las dificultades que presentan los estudiantes al desarrollar las tareas sobre este tema matemático. Además, es usado al definir u operar con diversos contenidos matemáticos a nivel de educación superior como límites, derivadas de suma, producto y cociente de funciones, derivada de una función compuesta, función racional, dominio y rango de funciones definidas, aplicación en ecuación diferencial en la física, integración por partes, aplicaciones en la economía, aplicación al análisis en la administración, entre otros temas a nivel universitario.

Para el análisis de texto en estudio, se usó como herramienta el análisis didáctico propuesto por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática – EOS, con el fin de identificar los significados y objetos matemáticos que intervienen en las tareas sobre fracciones algebraicas. Además, los descriptores del sentido estructural, los enfoques estructurales y procedimentales, y la demanda cognitiva, ayudaron a describir y señalar el nivel de exigencia de las tareas matemáticas que se pide a los estudiantes al desarrollar las tareas y a la vez identificar si se hizo uso de estrategias para resolver dichas tareas.

La presente investigación se ha estructurado de la siguiente manera:

En el capítulo 1, se presenta el planteamiento del problema de investigación, los antecedentes, justificación, pregunta y objetivos de la investigación.

En el capítulo 2, se presentan el marco teórico y metodológico de la investigación.

En el capítulo 3, se presenta el significado institucional del objeto matemático: el de referencia y pretendido.

En el capítulo 4, se presentan el análisis de objetos y procesos matemáticos del estudio.

Luego, en el capítulo 5 se desarrolla la propuesta de categorización de las tareas matemáticas. Finalmente, se menciona las conclusiones y referencias de la investigación.

CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En esta primera parte del trabajo, se presenta una síntesis de las investigaciones que abarcan desde la importancia de los textos escolares, como recursos didácticos que ayudan en el proceso de enseñanza-aprendizaje a los alumnos y profesores, así como el análisis de textos de un determinado objeto matemático que servirá como antecedente para justificar nuestra investigación. Además, se presenta algunas de las dificultades que tienen los estudiantes al resolver las tareas matemáticas, respecto al álgebra, sobre todo al trabajar con expresiones algebraicas, según estudios realizados. Luego, se formula el problema de investigación, se enuncia el objetivo general y los objetivos específicos que ayudarán a encaminar la presente investigación.

1.1 Antecedentes

Godino, Batanero y Font (2003) señalan que los libros de textos son recursos o material didáctico que se usa en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los propios libros de textos, cuadernos de ejercicios, pizarra, papel e instrumentos de dibujo y calculadoras, son recursos didácticos que ayudan al estudiante en su aprendizaje; pero el recurso didáctico común en la enseñanza de cualquier tema, es el libro de texto porque "conserva y transmite" de alguna forma el conocimiento matemático, ayudando al alumno (cuando lo usa como referencia) al resolver un problema o recordar una definición o propiedad en su aprendizaje. Además, los libros de textos ayudan también al profesor en la enseñanza durante las sesiones de clases programadas de un determinado objeto matemático, siendo una fuente inmediata para la experiencia práctica según manifiestan en sus investigaciones: Godino, Font y Wilhelmi (2006), Cockcrofd (1985, citado en Ceballos y Blanco, 2008) y Romberg y Carpenter (1986, citados en Godino, Batanero y Font, 2003). También, Ceballos y Blanco (2008) y González (2010) indican que los textos educativos presentan una estructura materializada de conocimientos, convirtiéndose en los mediadores entre el currículo y el aula, tomando en cuenta la función comunicativa desde el punto de vista del autor como del lector.

Como señalan Godino, Batanero y Font (2003) las matemáticas que se presentan en un libro de texto educativo y que está orientada a los alumnos, son diferentes de las matemáticas que usan los matemáticos (por ejemplo, el texto universitario, monografías de investigación, revistas, etc.). Además Radford (2012, citado en Castro, 2012) y Malara y Navarra (2012, citados en Castro, 2012) indican que hoy en día una de las crisis en la enseñanza del álgebra es por causa didáctica, y esto se debe por la forma como se presenta el objeto de estudio en los materiales de texto, que enfatizan en gran parte el desarrollo manipulativo mecanizado del objeto centrándose en aspectos de cálculo. Mientras que en los textos de referencia, como es el caso de los textos universitarios, contienen conocimientos matemáticos que tienen que ser adaptados como un objeto de enseñanza al nivel escolar en que se enseñe. El cambio que sufre el conocimiento matemático usando la formalización y el uso del lenguaje adecuado para los estudiantes se le llama transposición didáctica, donde es necesario hacer comprensible los objetos matemáticos al llevar a cabo en la enseñanza, según Godino, Batanero y Font (2003).

Hay que mencionar, además, que los libros de textos son herramientas importantes en el proceso de aprendizaje de los alumnos, como indican Godino, Batanero y Font (2003) pero no todos ellos son igualmente valiosos, porque por más que presentan ejercicios y problemas interesantes se deben tomar en cuenta que el contenido sea adecuado y que el significado respecto de las matemáticas sea coherente, es más, el docente deber tener cuidado al hacer un uso particular del material de texto para la enseñanza, considerando que la propiedad de las matemáticas se apoya en los autores del libro y no en el docente.

Una forma de analizar textos, es a través del análisis didáctico propuesto por el Enfoque Ontosemiótico EOS y que está orientado para desarrollar un análisis completo de las tareas matemáticas permitiendo describir, explicar y valorar los procesos de instrucción de las tareas tomadas de los libros de textos educativos, tal como han sido usados en los trabajos de Godino, Font y Wilhelmi (2006), Font y Godino (2006), Gaita et al., (2009) y Garcés (2013) en lecciones sobre la suma y la resta de un libro de quinto año de educación primaria, la noción de la configuración epistémica como herramienta de análisis de texto matemáticos, la noción de función en libros de textos y tareas sobre ecuaciones lineales de los libros de educación secundaria y educación superior tecnológica, donde al finalizar las investigaciones se concluye con el análisis de tipo valorativo sobre las tareas matemáticas y los objetos de estudios mencionados.

Por otro lado, autores como Castro (2012), Molina (2010), Palarea y Socas (1994), Subramaniam y Banerjee (2004) y Balacheff (2001, citado en Castro, 2012) afirman que las dificultades que muestran los estudiantes de educación primaria/secundaria al desarrollar tareas matemáticas, en el proceso de aprendizaje en el álgebra son de varios tipos: intrínsecos al objeto, al sujeto o al propio proceso de instrucción. Es decir, las dificultades se dan por la falta de corrección en los problemas de la aritmética ya que en el camino de la aritmética al álgebra existen obstáculos pedagógicos que frenan el progreso de conocimientos de los estudiantes. También, otra de las dificultades que se da es por la falta de atención a la expresión con la que se trabaja (expresiones aritméticas, resolución de ecuaciones algebraicas y simplificación de expresiones algebraicas), no toman en cuenta las particularidades y estructuras del objeto matemático. Y por último puede deberse a diferentes factores, entre ellos a los recursos utilizados por el docente como es el caso de los libros de textos de matemática.

Finalmente, en la investigación de Vega-Castro, Molina y Castro (2011) establecen que el estudio exploratorio en las tareas matemáticas de simplificación de las fracciones algebraicas, se desarrolló para identificar y clasificar las estrategias que emplearon los estudiantes al trabajar con expresiones algebraicas, evidenciando diferentes niveles de sentido estructural. Este estudio, nos permite diferenciar y distinguir los tres modos de actuación de los niveles del sentido estructural que, en este estudio, ayuda a identificar el nivel de exigencia de las tareas matemáticas de fracciones algebraicas en el material de texto de cuarto año de secundaria 2012.

En las investigaciones, artículos y publicaciones revisadas, se evidencian tanto estudios dirigidos a estudiantes de diferentes grados de instrucción sobre las expresiones algebraicas, como también, estudios que presentan un análisis didáctico bajo la perspectiva del EOS, marco teórico en el que se desarrolla este estudio. Estas investigaciones están relacionadas directa o indirectamente con el objeto matemático fracciones algebraicas, y sirven como referentes para analizar las tareas matemáticas desarrolladas y propuestas en el texto de matemática de cuarto año de secundaria, relacionado con las fracciones algebraicas.

1.2 Justificación

Las fracciones algebraicas, es un tema de estudio necesario en el curso de matemáticas en el nivel secundario, utilizada en el desarrollo de otros contenidos matemáticos tales como: ecuaciones lineales con una incógnita, factorización, mínimo común múltiplo (m.c.m.) y máximo común divisor (m.c.d.) de expresiones algebraicas, operaciones con adición, sustracción, multiplicación y división de polinomios, productos notables, temas de estudios importantes para simplificar y resolver tareas escolares. También, es relevante su uso en tareas de nivel superior al trabajar con: límites, derivadas de suma, producto y cociente de funciones, derivada de una función compuesta, función racional, dominio y rango de funciones definidas, aplicación en ecuación diferencial en la física, integración por partes, aplicaciones en la economía, aplicación al análisis en la administración, entre otros temas a nivel universitario. Asimismo, el estudio de las fracciones algebraicas permite el logro de objetivos educativos, didácticos y prácticos en la enseñanza de las matemáticas, según manifiestan Malceski, Gogovska y Anevska (2014) pues desarrollan el pensamiento lógico a través de la adopción de los cálculos y transformaciones al aplicar conceptos, proposiciones y algoritmos sobre fracciones algebraicas.

Además, las fracciones algebraicas han sido consideradas en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular del Perú DCN (2009) en el área de Matemática, en el nivel VII, que corresponde al tercer, cuarto y quinto año de secundaria; mientras que en el nivel VI se desarrolló ampliamente las expresiones algebraicas. Además, las fracciones algebraicas son de interés en el desarrollo del pensamiento matemático (en nuestro caso, nuestro objeto de estudio) con el dominio progresivo de los procesos de Razonamiento y Demostración, Comunicación Matemática y Resolución de problemas sobre expresión algebraica, desde los primeros grados de secundaria, con el fin de que el estudiante desarrolle capacidades para plantear y resolver los problemas de fracción algebraica en su contexto. Para que se desarrolle el pensamiento matemático de los estudiantes, respecto a fracciones algebraicas, ha sido relevante el análisis de procesos particulares, a llevarse a cabo, tales como: diversos métodos de solución, formulación de conjeturas, presentación de argumentos para sustentar su propio resultado, uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar su propio pensamiento matemático, según el DCN (2009).

Por otro lado, existen investigaciones desde una perspectiva cognitiva que muestran interés por el estudio del álgebra, en particular por las expresiones aritméticas y algebraicas, que generan en los alumnos dificultades de naturaleza diferente que tienen que ver con la complejidad de los objetos del álgebra, al no prestar atención a las expresiones, particularidades y estructuras de los problemas, tal como lo mencionan Palarea (1999), Subramaniam, y Benerjee (2004), Molina (2010), Castro (2012), entre otros. También, Socas y Palarea (1994) señalan que las dificultades en el proceso del aprendizaje algebraico se dan por las deficiencias de los estudiantes en la comprensión de las propiedades de la aritmética, reglas o fórmulas conocidas, al extraer de un prototipo o libro de texto y usarla inadecuadamente en las tareas matemáticas, esto también se da, por la forma como se presenta el objeto matemático en el libro de texto. Debemos considerar, que los contenidos y actividades informativas en el texto deben ayudar a comprender mejor los conocimientos matemáticos, para promover el desarrollo de una actitud crítica y reflexiva en los estudiantes, Godino, Batanero y Font (2003).

Al haber presentado los antecedentes y justificación para el presente estudio, y no haber encontrado investigaciones respecto al estudio de fracciones algebraicas bajo la perspectiva del EOS, ni análisis de texto de matemática respecto a las fracciones algebraicas, creemos pertinente, desarrollar este estudio bajo la perspectiva del marco teórico Enfoque Ontosemiótico, más conocido como EOS, el cual brinda las herramientas necesarias y análisis didáctico como las configuraciones epistémicas: lenguaje, situación-problemas, conceptos-definiciones, propiedades-proposiciones, procedimientos y argumentos; para analizar las tareas matemáticas sobre fracciones algebraicas del material de texto de cuarto año de secundaria 2012.

Además, se consideró dos de los objetos primarios del EOS: procedimientos y propiedades-proposiciones; para identificar el uso de conceptos y procesos en las tareas propuestas y desarrolladas que se pide a los estudiantes, y determinar el nivel de exigencia cognitiva de las tareas con la ayuda de la demanda cognitiva, guiados por los descriptores del sentido estructural, enfoques estructurales y procedimentales, que posteriormente sirvió para categorizar las tareas en tareas simples y complejas.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

El docente es el mediador entre el material de texto y los estudiantes; es decir, el alumno no afronta solo el estudio de los contenidos curriculares al usar los libros de texto de manera personal; y si el material presenta una baja idoneidad epistémica y semiótica entonces será una mayor carga para el docente y menor autonomía para los estudiantes, según Godino, Font y Wilhelmi (2006). Los libros de textos escolares constituyen una fuente inmediata de prácticas matemáticas tanto para el docente como para el estudiante en el aula, y nuestro interés es conocer cómo son tratadas las fracciones algebraicas, ya que la recomendación de Molina (2010), Vega-Castro, Molina y Castro (2011), Castro (2012), entre otros, acerca de las tareas que se proponen en el aula, es promover actividades que fomenten la comprensión de conceptos y significados al trabajar con las expresiones aritméticas y algebraicas. Por ello, se plantea la siguiente pregunta: ¿Qué objetos y procesos matemáticos intervienen al desarrollar las tareas con fracciones algebraicas de los libros de textos, en particular en el libro oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012 y cuál es el nivel de exigencia?

Para responder la pregunta, se plantea el siguiente objetivo general:

Analizar las tareas del libro oficial de matemática de cuarto año de educación secundaria 2012 en relación con el tema de fracciones algebraicas.

Para lograr el objetivo general, establecemos los siguientes objetivos específicos:

1) Establecer los significados institucionales del objeto matemático fracción algebraica, en particular el de referencia y el pretendido para valorar su grado de representatividad.

2) Identificar los conceptos y procesos matemáticos que intervienen al desarrollar las tareas matemáticas que involucran el tema de fracciones algebraicas.

3) Determinar el nivel de exigencia cognitiva de las tareas matemáticas fracciones algebraicas del libro de texto en estudio.

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En la primera parte de este capítulo se desarrolla una síntesis de las nociones y herramientas del enfoque teórico que sustenta esta investigación, a saber, el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción matemática – EOS, ofrece la configuración epistémica de objetos primarios como: lenguaje, situación-problemas, conceptos-definiciones, propiedades-proposiciones, procedimientos y argumentos, que a la vez nos ayuda, para hacer el análisis de texto en la presente investigación. Asimismo, se considera la demanda cognitiva, el sentido estructural, enfoque estructural y procedimental, presentes en el proceso de desarrollo de las tareas matemáticas. Esta investigación es de tipo cualitativo descriptivo, que nos ayuda a describir y analizar las tareas matemáticas que se encuentran en el material del texto oficial de cuarto año de secundaria 2012.

2.1 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS)

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas, con el fin de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su aprendizaje y enseñanza (Godino, 2011).

El punto de partida del EOS, según Godino y Font (1994) es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que considera el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, así como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando en cuenta la noción primitiva de situación-problemática, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, con el propósito de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática al cual se alude, y por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia.

El sistema de noción de la cognición matemática, ha sido propuesto en cinco niveles o grupos de análisis que se pueden aplicar en un proceso (planificado o implementado) de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Font y Godino, 2006; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2007; D' Amore, Font y Godino, 2007, citados en Garcés, 2013).

A continuación, Font, Planas y Godino (2010) mencionan los cinco niveles para el análisis de procesos de instrucción:

1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4) Identificación del sistema de normas y metanormas.
5) Valoración de idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Se considera que estos niveles, son el resultado de un trabajo de síntesis de diferentes análisis parciales consolidados en el área de didáctica de la matemática.

Los niveles de análisis propuestos por el enfoque ontosemiótico han sido propuestos para el desarrollo de un análisis completo que permite describir, explicar y valorar procesos de estudio. En nuestra investigación, se hizo uso de los niveles del análisis didáctico 1, 2 y 5, porque estos niveles nos ayudaron a analizar el texto matemático oficial de cuarto año de secundaria 2012 respecto a las fracciones algebraicas y a dar la valoración de la idoneidad epistémica. Es decir, se aplicó el nivel 1 para describir la secuencia de las prácticas matemáticas sobre fracciones algebraicas propuestas en el material de texto oficial del cuarto año de secundaria 2012 para establecer los significados, siendo necesario considerar los objetos y procesos matemáticos con la ayuda del nivel 2, que tiene por finalidad describir la complejidad de las prácticas matemáticas de fracciones algebraicas, y por último el nivel 5 que es de tipo valorativo, nos ayudó a valorar los procesos de instrucción matemática de las fracciones algebraicas en su dimensión epistémica, cognitiva a priori y ecológica a priori.

A continuación, se desarrolla una síntesis del nivel de análisis 1, 2 y 5.

Primer nivel de análisis: Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas

En esta parte se considera la noción de práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, simbólica, gráfica, etc.) elaborada por alguien para resolver problemas matemáticos con el fin de comunicar a otros la solución obtenida, para luego validarla y generalizarla a otros contextos y problemas. En las prácticas matemáticas intervienen objetos, materiales abstractos, que pueden ser representados de manera textual, oral, gráfica o gestos, según Godino y Batanero (1994).

En el estudio de las matemáticas, nos interesa tomar en cuenta los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) que se manifiestan por medio de las personas que actúan ante tipos de situaciones problemáticas, como es en nuestro caso particular las fracciones algebraicas.

Según Godino et al., (2009) respecto a los significados institucionales consideran lo siguiente:

- Implementado: consiste en el sistema de prácticas efectivas del docente durante el proceso de estudio específico.
- Evaluado: consiste en el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes de los estudiantes.
- Pretendido: es el sistema de prácticas incluidas en la planificación de un determinado proceso de estudio.
- Referencial: es el sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza específica este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto matemático estudiado, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto matemático.

Respecto a los significados personales se toma en cuenta lo siguiente:

- Global: está formado por la totalidad del sistema de prácticas personales, relativas a un objeto matemático, que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto.
- Declarado: consiste en todas las prácticas expresadas en los instrumentos de evaluación propuestos institucionalmente, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas por los estudiantes que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un determinado proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

A continuación en la Figura Nº 1, se observa los tipos de significados institucionales y personales.

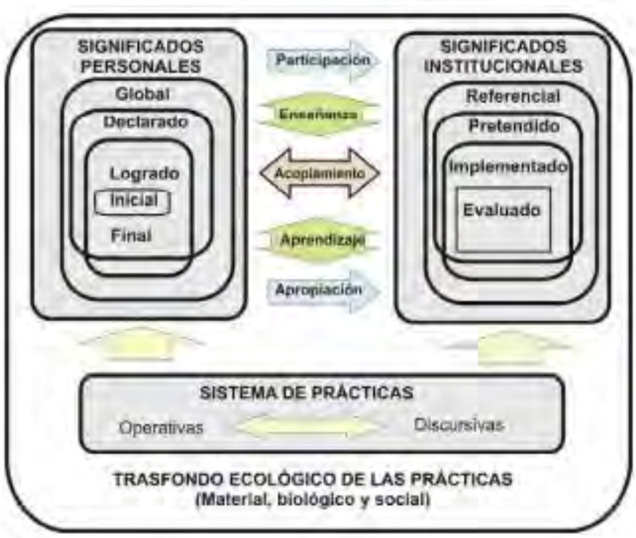


Figura Nº 1: Tipos de Significados institucionales y personales

Fuente: Godino, Batanero y Font (2009)

En la Figura N° 1, Godino et al., (2009) indican que existe una relación dialéctica entre el proceso de enseñanza y aprendizaje, que produce una especie de acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Consideran que la enseñanza implica la participación activa del estudiante en la comunidad de prácticas que sirve de base para los significados institucionales, y por último en el aprendizaje, requiere que el estudiante se apropie de los significados institucionales.

Segundo nivel de análisis: Emergencia de los objetos Matemáticos

Según Chevallard (1991, citado en Godino y Batanero, 1994; p. 6) define un objeto matemático como:

> "un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.); es decir, registro de lo escrito".

En el EOS se asume que los objetos se derivan de las prácticas matemáticas. En conclusión se toma en cuenta que los objetos matemáticos emergen del sistema de prácticas.

Dicha emergencia es un fenómeno complejo, que se debe considerar dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. El primer nivel se refiere a lo observable en un texto matemático (problemas, definiciones, lenguajes, proposiciones, procedimientos y argumentos). En el segundo nivel se tiene una tipología de objetos que emerge de las diferentes maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del anterior nivel. En conclusión, se trata de objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, extensivos o intensivos, expresiones o contenidos.

a) Primer Nivel:

Para realizar una práctica matemática por parte de los estudiantes, necesitan poner en marcha sus conocimientos que servirá para obtener la interpretación de sus resultados como satisfactorios. Por ejemplo, si el estudiante se enfrenta a resolver fracciones algebraicas, deberá plantear y resolver; usando lenguajes verbales y simbólicos. Estos lenguajes representan a la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen para elaborar el argumento con acciones sucesivas en la práctica matemática.

Según Godino, Batanero y Font (2009) cuando el estudiante realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos articulado en la Configuración de la Figura N° 2.

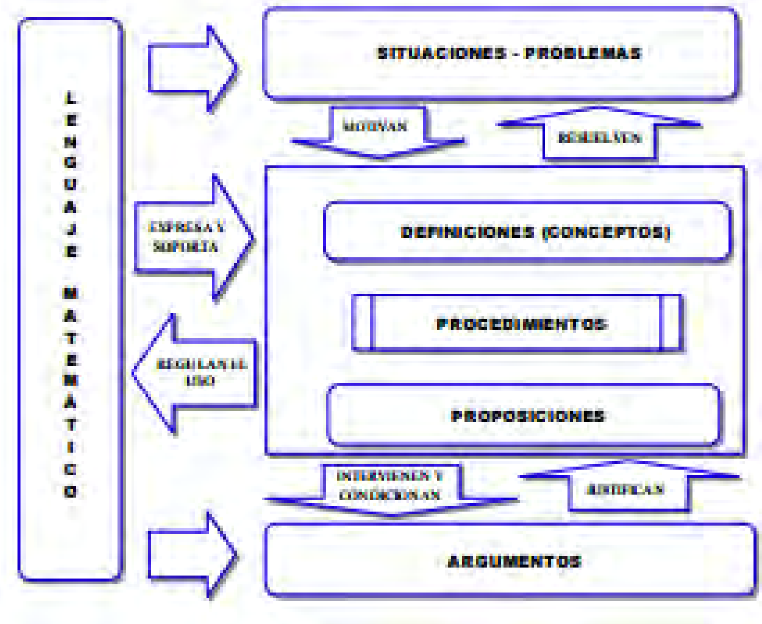


Figura Nº 2: Configuración de objetos primarios

Fuente: Godino, Batanero y Font (2009)

A partir de la Figura Nº 2 se describe los objetos matemáticos:

- Lenguaje: relativo a los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. en sus diversos registros o representaciones (escrito, oral, gestual, etc.)
- Situación-problema: se manifiestan en aplicaciones extra matemáticas, tareas, ejercicios, problemas contextualizados, casos de aplicación.
- Conceptos-definiciones: introducidos a través de definiciones o descriptores (ejemplo: recta, punto, número, media, etc.)
- Proposiciones: son expresados a través de enunciados sobre conceptos y definiciones de un tema matemático específico.
- Procedimientos: referente a algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, formas de proceder propio del quehacer matemático.
- Argumentos: expresados a través de enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo, etc.

b) Segundo Nivel:

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los que emergen de las mismas prácticas, de acuerdo al lenguaje en que participan, se consideran desde las facetas o dimensiones duales (Godino, Batanero y Font, 2009) que a continuación mencionamos:

- Personal-Institucional: si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, entonces los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales".
- Ostensivo-no ostensivo: Se entiende por ostensivo a cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Cualquiera de estos objetos se pueden usar en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, etc.). Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El propósito es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).
- Expresión-contenido: refiere al antecedente y consecuente de cualquier función semiótica. La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos

matemáticos se caracterizan por ser específicamente relacionales. Los objetos distintos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por una persona o institución, de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

- Extensivo-intensivo (ejemplar - tipo): Un objeto matemático que interviene en un juego de lenguaje como en un caso particular, un ejemplo específico es la función $y = 2x + 1$, y una clase más general, por ejemplo, la familia de funciones $y = mx + n$. La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras y Cols., 2005, citados en Godino, Batanero y Font, 2009). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, sin duda, es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático. "La generalización es esencial porque este es el proceso que distingue la creatividad matemática de la conducta mecanizada o algorítmica" según Otte (2003, citados en Godino, Batanero y Font, 2009).
- Unitario-sistémico: los objetos matemáticos en algunas circunstancias participan como entidades unitarias y que deben ser conocidas previamente, mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. Por ejemplo, en el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas, etc.) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

A continuación, observemos la configuración de objetos y procesos (ver Figura N° 3).

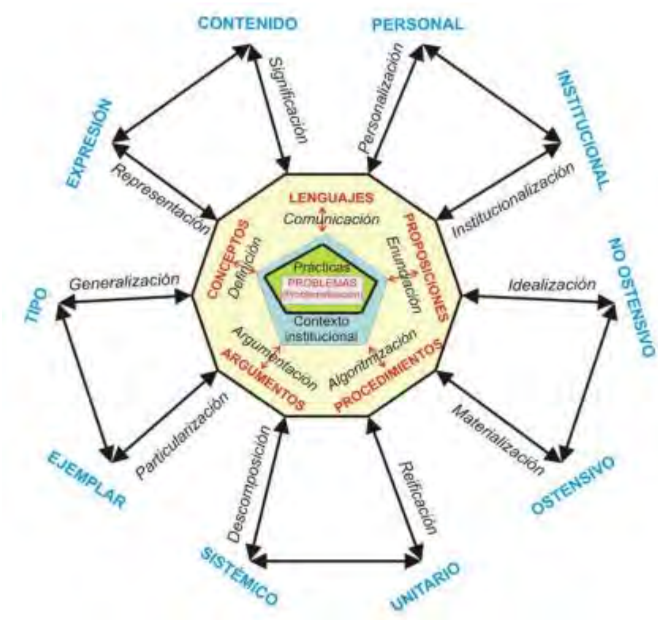


Figura Nº 3: Configuración de objetos y procesos

Fuente: Godino, Batanero y Font (2009)

Observamos que de las facetas que se presentaron agrupadas en parejas, se complementan de manera dual y dialéctica. En el EOS la actividad matemática es el centro de modelización en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas.

Quinto nivel de análisis: Criterios de Idoneidad Didáctica

En esta parte se define a la Idoneidad Didáctica como la articulación coherente y sistémica de seis componentes o criterios (Godino et al., 2009):

- Idoneidad epistémica: es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Por ejemplo, la enseñanza de las operaciones con fracciones algebraicas en secundaria puede limitarse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad), o tener en cuenta los diferentes tipos de situaciones con las operaciones de fracciones algebraicas e incluir la justificación de los algoritmos (alta idoneidad).
- Idoneidad cognitiva: manifiesta el grado en que los significados pretendidos e implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos e implementados. Un proceso de enseñanza y aprendizaje que tiene un alto grado de

idoneidad cognitiva sería, por ejemplo, cuando en el estudio de las operaciones aritméticas con números de tres o más cifras, el profesor realiza una evaluación inicial para saber si la mayoría de los alumnos dominan los números de uno y dos cifras y, en caso de no ser así, se inicia el proceso de instrucción trabajando dichos números.

- Idoneidad interaccional: un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional, si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales, y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción. Por ejemplo, un proceso de estudio realizado de acuerdo con una secuencia de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización, tiene potencialmente mayor idoneidad semiótica que un proceso magistral que no tenga en cuenta las dificultades de los estudiantes.
- Idoneidad mediacional: manifiesta el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, si el profesor y los alumnos tuvieran a su disposición medios informáticos pertinentes al estudio del tema en cuestión (cabri o derive, por ejemplo, para la geometría analítica), el proceso de estudio que se apoye en estos recursos tendría potencialmente mayor idoneidad mediacional frente a otro recurso tradicional utilizando exclusivamente pizarra, lápiz y papel. Asimismo, un ejemplo de un proceso de enseñanza aprendizaje con un alto grado de idoneidad mediacional con relación a los medios temporales sería una clase magistral, donde el profesor se dedica a reproducir de manera íntegra y sin interacción con los estudiantes el significado pretendido.
- Idoneidad emocional: relacionada con el grado de implicación (interés, afecto, motivación, etc.) del alumno en el proceso de estudio. Es así que, la idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su experiencia escolar previa. Por ejemplo, poseen idoneidad emocional alta los procesos basados en el uso de situaciones-problemas que sean de interés para los estudiantes.
- Idoneidad ecológica: expresa el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, a la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

También Godino et al., (2009) consideran que la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos componentes deben ser integrados a través de las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la idoneidad didáctica como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global. Esta idoneidad, se debe interpretar, no obstante, como relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que necesita una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo.

A continuación en el siguiente gráfico se representa los criterios que componen la idoneidad didáctica mediante un hexágono regular, de un proceso de estudio pretendido, donde se presume a priori un grado máximo de las idoneidades parciales. Asimismo, el hexágono irregular inscrito indica las idoneidades logradas en la ejecución de un proceso de estudio implementado.

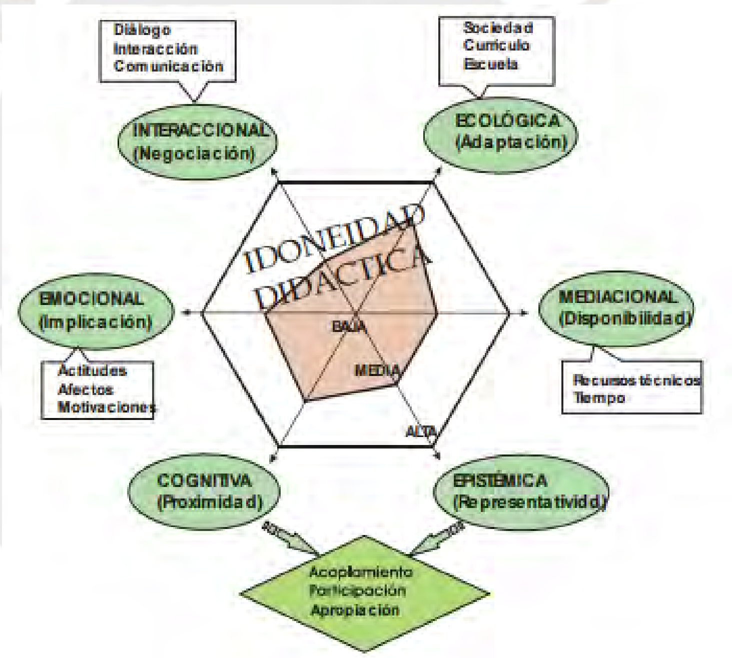


Figura Nº 4: Componentes de la idoneidad didáctica

Fuente: Godino, Batanero y Font (2009)

Las herramientas descritas se pueden emplear en el análisis de un proceso de estudio definido implementado en una sesión de clase, en una planificación o en el desarrollo de una unidad didáctica, o a un nivel más global, como puede ser el desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También pueden ser necesarios para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como por ejemplo: material didáctico, manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o "incidentes didácticos" puntuales.

En esta investigación aplicaremos los niveles 1, 2 y 5 del análisis didáctico que nos permiten el análisis del libro de texto en relación con el tema de fracciones algebraicas, y establecer los significados institucionales (pretendido y referencial), los conceptos y procesos matemáticos que intervienen en la práctica matemática, así como la aplicación de los criterios de idoneidad correspondiente a estos niveles. Los niveles 3 y 4, no son pertinentes en este estudio ya que no se estudia un proceso de instrucción completo, es decir no se observa las clases, no se trabaja con alumnos, ni profesores, etc.

Estructura

La estructura en matemáticas, en términos de Castro, Rico y Romero (1997, p. 363) se refiere a "un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de componer esos números y de unas relaciones, mediante las que se comparan dichos entes". La palabra estructura corresponde a un sistema compuesto por un conjunto de objetos matemáticos, alguna operación u operaciones, así también como ciertas propiedades y relaciones entre estos objetos y operaciones. También, Hoch y Dreyfus (2004, citado en Vega Castro, 2010) señala que la estructura en matemáticas, se refiere a la forma en que una entidad se compone de partes, habiendo conexiones o relaciones entre las partes que componen dicha entidad.

Por último, Molina (2010) indica que el significado de estructura es el más frecuente en matemáticas, y sobre todo se utiliza en expresiones aritméticas y algebraicas para referirse a los términos que componen la expresión, como también a los signos que los relacionan, al orden de los diferentes elementos y a las relaciones existentes entre ellos.

Enfoque procedimental

Tradicionalmente la aritmética está relacionada con las operaciones, entendidas como acciones, predominando en su enseñanza en un enfoque operacional o procedimental; es decir, que está centrado en el cálculo y en la obtención de respuestas numéricas, entendiéndose así a las expresiones aritméticas como procesos. Las operaciones son consideradas sobre todo como procesos; es decir, se sigue una secuencia de pasos aprendidos para obtener la respuesta, como único número, lo que en el EOS sería considerado como un proceso de algoritmización, mecanización (realización repetida de muchos procedimientos diferentes), según Rubio (2012). Asimismo, Molina (2010) señala que el enfoque procedimental es emplear un procedimiento estándar aprendido sin atender a las características particulares de las expresiones con las que se trabaja (resolución de ecuaciones, factorización, cálculo de operaciones aritméticas respectivamente). El estudiante se limita a la resolución de problemas del mismo tipo, de acuerdo a los procedimientos que aprendió, adquiriendo la práctica mecanizada cada vez que identifica el área al que pertenece el problema.

Enfoque estructural

En el álgebra escolar las expresiones algebraicas son consideradas como objetos y al llevar a cabo la actividad se enfoca en simbolizar relaciones numéricas generales, estructuras matemáticas y operar en esas estructuras.

Molina (2010) refiere que el enfoque estructural es prestar atención a las características particulares de las expresiones; es decir, tomar en cuenta a la estructura para acercarse a la resolución de la actividad propuesta. Asimismo, en la actividad desarrollada por el estudiante, se accede a tener mayor comprensión de lo que está trabajando; porque analiza la expresión para identificar su estructura, atiende a toda la expresión, utiliza relaciones entre los elementos que la componen para construir su propia estrategia de resolución.

En este estudio, se toma en cuenta el enfoque estructural para determinar si las tareas propuestas del material de texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012, exigen a los estudiantes utilizar estrategias que ayuden a desarrollar las habilidades que precisa el enfoque estructural.

Sentido estructural

Las autoras Vega-Castro, Molina y Castro (2010) señalan que el término sentido estructural fue utilizado por primera vez por Linchevski y Livneh al referirse a una colección de habilidades que están relacionadas con transformar expresiones algebraicas, y que permite al alumno hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas aprendidas previamente.

La idea de sentido estructural fue desarrollada y refinada por Hoch (2007, citado en Novotná y Hoch, 2008) quien manifiesta que los estudiantes muestran sentido estructural para el álgebra de secundaria si pueden: 1) Reconocer una estructura familiar en su forma más simple, 2) Tratar con términos compuestos como una sola entidad y aplicando sustitución reconocen una estructura en una forma más compleja, y 3) Escoger manipulaciones apropiadas para hacer un mejor uso de la estructura; además el desarrollo del sentido estructural en educación secundaria es un pre-requisito para desarrollar el sentido estructural en contextos algebraicos abstractos necesarios en el nivel superior. A continuación mostramos algunos ejemplos:

1. Reconocer una estructura familiar en su forma más simple.

   Por ejemplo, factorizar la expresión $\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$ (reconocen un trinomio cuadrado perfecto en el numerador y factorizan adecuadamente).

2. Tratar con términos compuestos como una sola entidad y aplicando sustitución reconocen una estructura en una forma más compleja.

   Por ejemplo, factorizar la expresión $\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$ implica tratar con $(4x^2-1)$ como $(2x-1)(2x+1)$ las únicas entidades, reconocer la diferencia de cuadrados de estas entidades y factorizar adecuadamente.

3. Escoger manipulaciones apropiadas para hacer un mejor uso de la estructura.

   Por ejemplo, factorizar $\frac{[5(x+y)^2-1].[5(x+y)^2+1]}{25(x+y)^4+10(x+y)^2+1}$ es encontrar la posibilidad de cuadrado de una suma en el denominador; es decir, al tratar con $25(x+y)^4+10(x+y)^2+1$ podemos sustituir $(x\ +\ y)$ por la variable a, para obtener $25a^4+10a^2+1$ cuya igualdad es $(5a^2+1)(5a^2-1)=(5(x+y)^2+1)(5(x+y)^2+1)$ como únicas entidades, y luego simplificamos adecuadamente.

La característica importante del sentido estructural es el principio de sustitución, el cual establece que la variable o parámetro es reemplazado por un término compuesto (producto o suma) o si el término compuesto es reemplazado por el parámetro, el sentido estructural es el mismo.

El constructo sentido estructural, enfatiza en cierta manera la forma de “poseer” el conocimiento, así señala Vega-Castro (2010) más no sugiere un concepto nuevo. Cuando el estudiante trabaja con expresiones aritméticas y sobre todo con las expresiones algebraicas, pone en manifiesto los signos externos que son producidos por una serie de habilidades y capacidades, tales como: reconocer expresiones que son equivalentes sin necesidad de realizar operaciones, pudiendo ser cambiada una por otra en el caso que sea necesario; conocer qué expresión de las equivalentes es más conveniente utilizar para cada situación; saber qué expresión, entre las demás equivalentes, es la más simple de todas y cuándo es necesario y conveniente reemplazar una por otra; entre otros.

La demanda cognitiva

La demanda cognitiva es una oportunidad de aprendizaje en matemáticas; es decir, las tareas que se proponen a los estudiantes implican procesos intelectuales cognitivos de resolución.

"La demanda cognitiva es definida por Stein et al., (1996) como los tipos de procesos cognitivos que están implicados en la solución de un problema matemático, tanto en su primera fase de comprensión de la tarea, así como en su etapa de realización" (Cruz, 2009; p. 3).

A partir de la definición, Stein propone la clasificación de las actividades matemáticas en dos niveles: baja demanda cognitiva y alta demanda cognitiva, según Cueto (2003), Cruz (2009) y Salcedo (2012).

a) Nivel de baja demanda cognitiva

Las tareas de baja demanda cognitiva están constituidas por la memorización/evocación de datos, símbolos, terminología, como por la ejecución de los llamados procedimientos sin conexiones. Es decir, son tareas rutinarias que se repiten al aprender, no son necesarios la comprensión de las nociones matemáticas que involucran en las tareas, sólo es necesario aprender el procedimiento para poder ejecutarlas (ver Figura N° 5).

Nivel de Baja Demanda Cognitiva	
Tareas de memorización	**Procedimientos sin conexiones**
• Involucran tanto la reproducción de datos, reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidas como la asignación de datos, reglas, fórmulas o definiciones de memoria.	• Son algoritmos. El uso de procedimientos es igualmente requerido por la tarea o su uso está evidentemente basado en aprendizajes previos, experiencias o dado por la tarea.
• No pueden ser resueltas utilizando procedimientos, ya que el procedimiento no existe o porque el tiempo requerido para la resolución es demasiado corto como para usar un procedimiento.	• Requieren una limitada demanda cognitiva para ser completados exitosamente. Existe una pequeña ambigüedad acerca de lo que se requiere hacer y sobre cómo hacerlo.
• No son ambiguas: p. ej., tareas que incluyen una reproducción exacta de material visto previamente y que es reproducido clara y directamente según el enunciado.	• No tienen conexión con conceptos o significados subyacentes a los procedimientos usados. • Se centran en obtener una respuesta correcta más que en desarrollar la comprensión de las matemáticas.
• No tienen conexiones con conceptos o significados subyacentes a los datos, reglas, fórmulas o definiciones aprendidos o evocados.	• Requieren explicaciones que se enfocan únicamente en descubrir el proceso usado.

Figura Nº 5: Baja demanda cognitiva

Fuente: Stein, et al., (1996), tomado de Cruz (2009)

En la Figura Nº 5, las tareas de baja demanda cognitiva presentan una categoría de tareas rutinarias, memorísticos, etc. En este estudio, las tareas del texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012 respecto a las fracciones algebraicas, son categorizadas en tareas simples, en su gran mayoría, al identificar los conceptos y procesos en el desarrollo de las prácticas matemáticas con baja demanda cognitiva.

b) Nivel de alta demanda cognitiva

Las tareas de alta demanda cognitiva están constituidas por la comprensión de las situaciones propuestas, por parte del estudiante, donde relaciona los aprendizajes nuevos con aprendizajes previos, adapta lo aprendido a situaciones propuestas, evalúa la aplicación de algún procedimiento, etc. Dentro de este tipo de tareas se considera los procedimientos con conexiones; es decir, resuelve problemas no rutinarios, establece y verifica conjeturas, aplica generalización, construye propiedades o definiciones y el hacer matemáticas (usa la matemática en situaciones propuestas, según los propósitos del estudiante, ver Figura Nº 6).

Nivel de Alta Demanda Cognitiva	
Procedimientos con conexiones	**Tareas "Haciendo matemáticas"**
• Enfocan la atención de los estudiantes en el uso de procedimientos destinados a desarrollar niveles más profundos de comprensión de conceptos e ideas matemáticas. • Sugieren vías (explícitas o implícitas) que constituyen una extensión de procedimientos generales con conexiones cercanas a ideas conceptuales subyacentes, en oposición a los limitados algoritmos. • Usualmente se representan de múltiples formas (por ejemplo: diagramas visuales, manipulativos, símbolos, situaciones problemáticas). Hacer conexiones a través de múltiples representaciones ayuda a desarrollar el significado. • Requieren cierto grado de esfuerzo cognitivo. A pesar de que se sigan procesos generales, no pueden ser resueltos descuidadamente. Los estudiantes necesitan conectar las ideas conceptuales que subyacen a los procedimientos, a fin de completar exitosamente la tarea y desarrollar su compresión.	• Requieren un pensamiento complejo y no algorítmico (por ejemplo, no existe una vía predecible, una aproximación bien realizada, una vía dada por la tarea, la instrucción o un ejemplo trabajado). • Llevan a los estudiantes a explorar y entender la naturaleza de los conceptos, procedimientos o relaciones matemáticas. • Demandan que el individuo monitoree y autoregule sus procesos cognitivos. • Llevan a los estudiantes a acceder a conocimientos y experiencias relevantes, y a hacer un uso adecuado de ellos a través de la tarea. • Requieren que los estudiantes analicen la tarea y examinen activamente las demandas que ella plantea a fin de que delimiten las posibles estrategias de solución. • Demandan considerable esfuerzo cognitivo y pueden involucrar cierto nivel de ansiedad para el estudiante, debido a la naturaleza impredecible del proceso de solución que se necesita.

Figura Nº 6: Alta demanda cognitiva

Fuente: Stein, et al., (1996), tomado de Cruz (2009)

En la Figura Nº 6, las tareas de alta demanda cognitiva presentan una categoría de tareas constituidas en la comprensión de conocimientos, procedimientos, estrategias por parte del estudiante. En este estudio, las tareas del texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria respecto a las fracciones algebraicas, son categorizadas en tareas complejas, en su minoría, al identificar los conceptos y procesos en el desarrollo de las prácticas matemáticas con alta demanda cognitiva.

2.2 Metodología

En esta segunda parte del capítulo, para haber ejecutado las actividades planificadas en esta investigación, fue necesario describir la metodología y los pasos a seguir. Se tomó en cuenta las seis fases propuestas por Latorre y Cols., citado en Ibarra (2008) que nos ayudó a alcanzar los objetivos de nuestra investigación.

Metodología empleada en la investigación

Esta investigación es de tipo cualitativo y descriptivo, porque se hizo descripciones detalladas de situaciones, tareas, para especificar los procesos matemáticos que fueron observables, según Hernández, Fernández y Baptista (2010). Se describió la planificación de las tareas propuestas y desarrolladas en el libro de texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012, relacionadas con el objeto de estudio fracciones algebraicas y que fueron propuestos a los estudiantes de las instituciones educativas estatales del Perú. Para ello, se elaboró las configuraciones epistémicas de las fracciones algebraicas presentadas en el libro de texto, que consisten en evaluar la práctica matemática para activar un conglomerado de objetos y procesos matemáticos: situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, propiedades-proposiciones, procedimientos y argumentos (Godino, Batanero y Font, 2009).

El propósito de esta investigación fue analizar las tareas del libro oficial de matemática de cuarto año de educación secundaria 2012 en relación con el tema de fracciones algebraicas, y para el cumplimiento del objetivo, fue necesario aplicar parcialmente los niveles 1, 2 y 5 (p. 20, 22 y 26) y la idoneidad didáctica en su dimensión epistémica, cognitiva (apriori) y ecológica (apriori).

Así también, Latorre y Cols., citado por Ibarra (2008) presenta un esquema que consiste en seis fases de proceso general que debe seguir toda investigación cualitativa, la misma que nos ayudó a llevar a cabo las actividades y metodología en este estudio.

A continuación consideramos cada una de las fases, donde se describe los pasos que se ejecutó para el logro del objetivo de esta investigación en las tareas planteadas.

1. **Fase exploratoria o de reflexión**
   - Se identificó el problema a investigar por las constantes dificultades de los estudiantes al resolver y plantear problemas sobre fracciones algebraicas, así como también por

medio de investigaciones relacionadas con enseñanza y aprendizaje de algunos aspectos del álgebra y aritmética.

- Luego de identificar el problema de investigación, se optó por revisar los contenidos en los libros de texto oficial de matemática de primer a quinto año de secundaria 2012, de donde se llegó a determinar que el objeto fracciones algebraicas se desarrolla en el ciclo VII de Educación Básica Regular.
- Se planteó el problema de investigación de donde parte nuestros objetivos propuestos.
- Se realizó la revisión de artículos científicos de investigación, tesis de maestría, tesis doctorales referentes al objeto de estudio fracciones algebraicas y el marco teórico Enfoque Ontosemiótico, más conocido como EOS, sentido estructural, enfoque estructural, enfoque procedimental y demanda cognitiva.

2. **Fase de planificación**
   - Se seleccionó el material de texto oficial de cuarto año de secundaria 2012, para llevar a cabo el análisis de texto del objeto matemático "fracciones algebraicas" en nuestra investigación y obtener el significado institucional pretendido.
   - Después de elegir el marco teórico para nuestra investigación, se eligió también las herramientas teóricas de análisis del EOS, las configuraciones epistémicas, que nos permitió analizar el problema desde diferentes análisis de procesos de instrucción y criterios de idoneidad didáctica.
   - Se seleccionó la estrategia a seguir en la investigación. Nuestra investigación es de tipo cualitativo y descriptivo, porque analizamos el objeto matemático fracciones algebraicas del texto oficial de cuarto año de secundaria 2012, de donde describimos las situaciones, tareas, etc., que son observables.

3. **Fase de entrada en el escenario**
   - Se realizó el contacto con el profesor de educación primaria de la institución educativa nacional N° 1124, pidiéndole que facilitara los materiales oficiales de textos educativos de matemática de secundaria 2012.
   - Se pidió permiso a la dirección de la institución educativa particular (del cual trabajo) para asistir a la institución educativa estatal mencionada anteriormente y poder revisar los materiales de textos de matemática de secundaria 2012 en la biblioteca.

- Se definió el papel del investigador para obtener información que fue clasificada convenientemente de los materiales de consulta, libros, página web, etc., para los fines de nuestra investigación.

4. **Fase de recogida y análisis de la información**
   - Se revisó el Diseño Curricular Nacional (2009), la programación de unidades del libro oficial de texto de matemática de cuarto año de secundaria 2012, para obtener información sobre nuestro objeto de estudio fracciones algebraicas, y describir las prácticas matemáticas de las tareas resueltas y propuestas para el estudiante del libro, por medio de la configuración epistémica propuesta por el EOS.
   - Se eligió la recolección de información para nuestra investigación, al revisar los libros de educación superior porque en diferentes cursos de matemáticas de las universidades nacionales y particulares el objeto de estudio se encuentra presente, siendo necesario usarlo para reducir expresiones algebraicas en general. Asimismo, se revisó las tesis respecto a la definición de fracciones algebraicas, con el fin de obtener el significado institucional de referencia.
   - Se eligió tres niveles de análisis (1, 2 y 5) de procesos de instrucción del EOS para el estudio de las fracciones algebraicas que sirvió para el análisis de la información. Luego, del análisis 5, se eligió los criterios de idoneidad didáctica (epistémica, cognitiva y ecológica) para valorar el grado de idoneidad de las tareas matemáticas fracciones algebraicas.
   - Se realizó la categorización de las tareas matemáticas fracciones algebraicas del material de texto en estudio, con la ayuda de la demanda cognitiva, enfoque procedimental - estructural y sentido estructural.

5. **Fase de retirada del escenario**
   - Se finalizó la recogida de la información del libro oficial de texto de cuarto año de secundaria de matemática 2012, para el cual se devolvió el libro a la I.E. Nº 1124.
   - Se realizó el análisis del desarrollo del objeto de "fracciones algebraicas" para identificar conceptos y procesos matemáticos que se pide en las tareas matemáticas del texto. Además, se analizó los objetos primarios: procedimientos y propiedades, para determinar el nivel de exigencia cognitiva, que se proponen a los estudiantes en las tareas del libro oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012.

6. **Fase de elaboración del informe**

- Se elaboró la redacción y mejoramiento de la investigación.
- Se redactó la conclusión final de la investigación.

Como ya lo hemos mencionado, nuestra investigación es de carácter cualitativa y lo que nos interesa en esta investigación es analizar las tareas del libro oficial de matemática de cuarto año de educación secundaria 2012 en relación con el tema de fracciones algebraicas, de donde determinaremos si las tareas matemáticas de la unidad tres, son tareas que promueven el desarrollo del pensamiento matemático, uso de procesos y conceptos sobre el objeto de estudio, por medio de la metodología y técnicas usadas en ésta investigación.

CAPITULO III: SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DEL OBJETO MATEMÁTICO FRACCIONES ALGEBRAICAS

En la primera parte de este capítulo se señala lo que las investigaciones y los materiales de textos de matemática de nivel superior refieren acerca del objeto de estudio fracciones algebraicas, para fijar el significado institucional o uso de fracciones algebraicas. Luego, se toma en cuenta el estudio y tratamiento del objeto matemático fracciones algebraicas (significado de referencia y pretendido), conocido también como expresión racional, expresiones algebraicas racionales o expresiones fraccionarias. Asimismo, se presentan las aplicaciones de los usos en otros contenidos matemáticos fracciones algebraicas, el estudio del objeto matemático desde el punto de vista didáctico del material de texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012.

3.1 Significado de referencia de fracciones algebraicas

Vega-Castro (2010) afirma lo siguiente:

> Consideramos dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. Si realizamos una división de estos polinomios, suponiendo $Q(x) \neq 0$, solo se obtiene otro polinomio cuando la división resulte exacta. En el caso de que la división de $P(x)$ entre $Q(x)$ no resulte exacta, el resultado será una fracción algebraica o expresión racional (Barnett, 1984), que podemos expresar como $P(x)/Q(x)$. De esta manera dos fracciones algebraicas son iguales o equivalentes si cumplen la siguiente regla
>
> $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)} \leftrightarrow P(x)S(x) = R(x)Q(x)$$
>
> Esta definición de igualdad nos permite dividir el conjunto de todas las fracciones algebraicas en clases de equivalencias. Dentro de este subconjunto formado por todas aquellas fracciones algebraicas que son equivalentes a una dada, $P(x)/Q(x)$, podemos elegir aquella que sea lo más sencilla posible en un cierto modo. Esta fracción canónica se obtiene descomponiendo los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ en factores irreductibles y eliminando a continuación en $P(x)$ y $Q(x)$ los factores comunes. Este procedimiento recibe el nombre de simplificación (p. 25-26).

En este estudio, tomaremos en cuenta la afirmación de Vega-Castro, quien indica que una fracción algebraica es aquella fracción que contiene polinomios en el numerador y denominador, siempre y cuando el polinomio del denominador sea diferente de cero.

Asimismo, Swokowski (1996) sostiene que como en una expresión racional, no se permite la división entre cero, entonces, el dominio de p/q es todos los números reales, a excepción de los que hacen que el denominador sea cero. El autor propone dos ejemplos, a continuación:

Ejemplo 1: Fracción algebraica de variable "x"

$$\frac{6x^2-5x+4}{x^2-9}, \text{ para toda } x \neq \pm 3;$$

Ejemplo 2: También se tiene una fracción algebraica de varias variables, tal como:

$$\frac{x^3-3x^2y+4y^2}{y-x^3}, \text{ para toda } x \text{ y } y \text{ tales que } y \neq x^3.$$

La mayor parte de los casos de estudio que presenta el autor Swokowski (1996) son expresiones racionales cuyo numerador y denominador son polinomios en una variable.

Reglas o propiedades de los cocientes para el manejo de fracciones algebraicas

Sobel y Lerner (1995) presentan las reglas importantes de manejo de expresiones racionales que también se llaman fracciones algebraicas. Los autores presentan un ejemplo de la regla bajo consideración, en términos de fracciones aritméticas, donde se excluyen los valores de la variable en el denominador que sean iguales a cero. Es decir, las variables en una expresión racional representan números reales, pero reemplazamos las letras a, b, c y d por polinomios.

Regla 1. **Negativo de una fracción**

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}, \text{ Ejemplo: } -\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$$

Regla 2. **Reducción de fracciones**

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, \text{ Ejemplo: } \frac{2.3}{5.3} = \frac{2}{5}$$

Regla 3. **Multiplicación de fracciones**

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \text{ Ejemplo: } \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2.4}{3.5}=\frac{8}{15}$$

Regla 4. **División de fracciones**

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}, \text{ Ejemplo: } \frac{3}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3.3}{5.2}=\frac{9}{10}$$

Regla 5. **Suma de fracciones; denominadores iguales**

$$\frac{a}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{d}, \text{ Ejemplo: } \frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{7}=\frac{5}{7}$$

Regla 6. **Resta de fracciones; denominadores iguales**

$$\frac{a}{d}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{d}, \text{ Ejemplo: } \frac{7}{9}-\frac{2}{9}=\frac{7-2}{9}=\frac{5}{9}$$

Regla 7. **Suma de fracciones; denominadores distintos**

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}, \text{ Ejemplo: } \frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2.4+3.3}{3.4}=\frac{8+9}{12}=\frac{17}{12}$$

Regla 8. **Resta de fracciones; denominadores distintos**

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}, \text{ Ejemplo: } \frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{4.3-2.5}{5.3}=\frac{12-10}{15}=\frac{2}{15}$$

Con todas estas consideraciones de las reglas, en una fracción algebraica se simplifica, o se reduce a sus términos mínimos, si el numerador y el denominador no tienen factores polinomiales comunes de grado positivo y no tienen factores enteros comunes mayores que uno, así lo menciona Swokowski (1996).

3.2 Diversos usos o significados de las fracciones algebraicas

Los usos o significados que se le atribuye a las fracciones algebraicas en los diferentes problemas que presentan en los textos de educación superior, según Sobel y Lerner (1995), Swokowski (1996) y Smith et al., (1998) se determinan en:

Simplificación de fracciones algebraicas

Para simplificar una fracción algebraica, se factorizan tanto el numerador como el denominador en sus factores primos, para después cancelar los factores comunes (considerando que los factores del denominador no sean cero), según Swokowski (1996).

El autor propone el siguiente ejemplo para simplificar fracciones algebraicas:

Sea la fracción algebraica $\frac{3x^2-5x-2}{x^2-4}$, donde $x \neq 2$ y $x \neq -2$; se desarrolla de la siguiente manera: Observamos que en $\frac{3x^2-5x-2}{x^2-4}$, tanto el numerador como el denominador se pueden factorizar de la siguiente forma $\frac{(3x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$, luego como hay términos comunes en el numerador y denominador se procede a simplificarlos para obtener la fracción algebraica irreductible $\frac{3x+1}{x+2}$.

Simplificación en productos y cocientes de fracciones algebraicas

Cuando se simplifica un producto o un cociente de fracciones algebraicas, suelen emplearse las reglas o propiedades de los cocientes para obtener una fracción algebraica, Swokowski (1996).

A continuación, mostramos el siguiente ejemplo de multiplicación de fracciones algebraicas.

Ejemplo: Multiplica y simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

Si $\frac{x^2-6x+9}{x^2-1} \cdot \frac{2x-2}{x-3}$, donde $x \neq 3$, $x \neq 1$ y $x \neq -1$.

Se observa que tanto en el numerador y en el denominador se pueden multiplicar de la siguiente manera: $\frac{(x^2-6x+9).(2x-2)}{(x^2-1).(x-3)}$, luego se factoriza el numerador y denominador $\frac{(x-3)^2.2(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-3)}$ para simplificar expresiones comunes hasta obtener $\frac{2(x-3)}{x+1}$.

Ahora, para poder dividir y simplificar fracciones algebraicas según Smith et al. (1998) afirman que dos expresiones son recíprocas entre sí, si su producto es uno. El recíproco de una fracción p/q es la fracción q/p, considerando que p y q son polinomios.

Swokowski (1996) también presenta el siguiente ejemplo para explicar la división y simplificación de las fracciones algebraicas.

Ejemplo: Divide y simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

$$\frac{x+2}{2x-3} \div \frac{x^2-4}{2x^2-3x}, \text{ donde } x \neq 0 \text{ y } x \neq 3/2.$$

Para desarrollar la división $\frac{x+2}{2x-3} \div \frac{x^2-4}{2x^2-3x}$ se multiplica por su recíproco $\frac{x+2}{2x-3} \cdot \frac{2x^2-3x}{x^2-4}$ luego se factoriza y se multiplica los factores en el numerador y denominador $\frac{(x+2)x(2x-3)}{(2x-3)(x-2)(x+2)}$, para simplificar los factores comunes, hasta obtener la fracción algebraica irreductible $\frac{x}{x-2}$.

Suma y resta de fracciones algebraicas

Para sumar o restar dos fracciones algebraicas, lo conveniente es determinar el denominador común, y luego se utilizan las reglas o propiedades de los cocientes en términos de las expresiones algebraicas ya vistas en las páginas 40 y 41.

Si los denominadores de las expresiones no son iguales, entonces se debe obtener un denominador común al multiplicar por una expresión adecuada en el numerador y en el denominador de cada fracción. Por lo general, se usa el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los dos cocientes (cabe mencionar que el autor Swokowski (1996) expresa el mínimo común múltiplo m.c.m. como mínimo común denominador m.c.d., para no confundirnos con el máximo común divisor m.c.d., en nuestro caso usaremos el término mínimo común múltiplo m.c.m.).

Para determinar el m.c.m. se factoriza cada denominador en sus factores primos, y luego se forma el producto de los factores primos distintos, empleando el mayor exponente que aparezca en cada factor primo.

A continuación, mostramos el siguiente ejemplo tomados de Sobel y Lerner (1995) que determina la suma de fracciones algebraicas: $\frac{3}{x^2+x}+\frac{2}{x^2-1}$ donde $x \neq \pm 1$ y $x \neq 0$.

Lo primero que se hace es hallar el m.c.m., luego se divide entre el primer denominador de la fracción y el cociente se multiplica por el primer numerador, de manera similar con la segunda fracción (este procedimiento se conoce como el producto cruzado), para obtener $\frac{3(x^2-1)+2(x^2+x)}{(x^2+x)(x^2-1)}$.

Luego, se emplea la propiedad distributiva en el numerador y se suma términos semejantes, también se emplea factor común en el denominador obteniendo $\frac{5x^2+2x-3}{x(x+1)(x^2-1)}$ para factorizar en el numerador $\frac{(5x-3)(x+1)}{x(x+1)(x^2-1)}$ y simplificar términos comunes en el numerador y denominador de la fracción algebraica, hasta encontrar $\frac{5x-3}{x(x^2-1)}$.

También, los mismos autores indican que se puede usar un método alternativo que puede ser más cómodo, al emplear el mínimo común múltiplo (m.c.m.) del denominador de las fracciones, presentan el siguiente ejemplo:

En la suma de fracciones algebraicas $\frac{3}{x^2+x}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{3}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}$, se factoriza los denominadores y se hallan fracciones equivalentes en el denominador, para ello se multiplica en ambas fracciones los factores faltantes del otro denominador hasta obtener:

$\frac{3(x-1)}{x(x+1)(x-1)}+\frac{2x}{(x+1)(x-1)x}$, luego de suma los numeradores $\frac{3(x-1)+2x}{x(x+1)(x-1)}$, porque sus denominadores son comunes $\frac{5x-3}{x(x^2-1)}$ y se aplica la propiedad distributiva y suma de términos semejantes, obteniendo así una fracción algebraica irreductible.

También, los autores presentan la resta de las fracciones algebraicas, donde se pide simplificar: $\frac{3}{2}-\frac{4}{3x(x+1)}-\frac{x-5}{3x^2}$ si $x \neq 0$ y $x \neq -1$.

Usando el mismo criterio anterior del uso del método alternativo en la suma de fracciones algebraicas, se multiplican factores y coeficientes en el numerador y denominador de cada fracción, de tal manera que los denominadores sean homogéneos:

$\frac{3.3.x^2(x+1)}{2.3.x^2(x+1)} - \frac{4.2.x}{3.x.(x+1).2x} - \frac{(x-5).2.(x+1)}{3.x^2.2.(x+1)}$, luego se aplica propiedad distributiva en el numerador $\frac{(9x^3+9x^2)-8x-(2x^2-8x-10)}{6x^2(x+1)}$ para restar y sumar términos semejantes, hasta obtener la fracción algebraica $\frac{9x^3+7x^2+10}{6x^2(x+1)}$.

Swokowski (1996) también hace uso del método alternativo ya visto en el ejemplo anterior, en la suma y resta de fracciones algebraicas. Para ello, propone el siguiente ejemplo:

$\frac{6}{x(3x-2)} + \frac{5}{3x-2} - \frac{2}{x^2}$, donde $x \neq 2/3$ y $x \neq 0$; donde se pide simplificar las fracciones algebraicas con sus respectivas operaciones.

Al desarrollar el ejemplo, se determina el m.c.m. en cada fracción de la siguiente manera $\frac{6}{x(3x-2)} . \frac{x}{x} + \frac{5}{3x-2} . \frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} . \frac{3x-2}{3x-2}$, es decir, para obtener tres fracciones que tengan el mismo denominador $x^2(3x-2)$, se multiplican por x en el numerador y denominador del primer cociente, en el segundo, por x^2, y en el tercero, por $3x-2$ Luego se multiplica los términos en el numerador y denominador $\frac{6x}{x^2(3x-2)} + \frac{5x^2}{x^2(3x-2)} - \frac{2(3x-2)}{x^2(3x-2)}$, consiguiendo así fracciones equivalentes en los denominadores, luego se suma y resta las fracciones algebraicas en los numeradores $\frac{6x+5x^2-2(3x-2)}{x^2(3x-2)}$ y se aplica la propiedad distributiva para restar los términos comunes en el numerador $\frac{6x+5x^2-6x+4}{x^2(3x-2)}$, obteniendo así $\frac{5x^2+4}{x^2(3x-2)}$.

Fracciones algebraicas complejas

Una fracción algebraica compleja, es aquella que tiene una expresión racional ya sea en el numerador, en el denominador, o en ambos (Smith et al., 1998).

Las fracciones algebraicas complejas se pueden simplificar. Un método consiste en encontrar el m.c.m. de todos los denominadores que se encuentran en la expresión, y multiplicar tanto el numerador como el denominador por el m.c.m.

A continuación, veremos algunos ejemplos de las fracciones algebraicas complejas.

En el ejemplo $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$, donde $x \neq 0$, se pide simplificar la fracción algebraica compleja.

Para dar solución al ejemplo, se halla el m.c.m. x^2: $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$, por lo que se multiplica en el numerador y denominador por esta expresión. Luego, se aplica la propiedad distributiva $\frac{x^2+\frac{x^2}{x}}{x^2-\frac{x^2}{x^2}}$ y se simplifica términos comunes en el numerador y denominador $\frac{x^2+x}{x^2-1}$ para factorizar $\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$ y simplificar factores comunes, hasta obtener $\frac{x}{x-1}$ con $x \neq 1$.

También, hay otro método para simplificar fracciones algebraicas complejas, y consiste en simplificar por separado el numerador y el denominador, y después tratar el resultado como una división, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: simplifica $\frac{\frac{x^2-9}{x^2+5x+4}}{\frac{x^2+6x+9}{x^2-1}}$, si $x \neq 1$, $x \neq -1$ y $x \neq -4$.

Solución: $\frac{\frac{x^2-9}{x^2+5x+4}}{\frac{x^2+6x+9}{x^2-1}} = \frac{\frac{(x-3)(x+3)}{(x+4)(x+1)}}{\frac{(x+3)(x+3)}{(x-1)(x+1)}}$ se factorizan numeradores y denominadores.

$= \frac{(x+3)(x-3)}{(x+4)(x+1)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)(x+3)}$ se utiliza la regla 4 (p. 41, multiplicación por el recíproco).

$= \frac{(x+3)(x+1)}{(x+3)(x+1)} \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(x+4)(x+3)}$ se factorizan la expresión racional.

$= \frac{(x-1)(x-3)}{(x+4)(x+3)}$ se simplifica.

Estos usos y significados institucionales de referencia del objeto matemático fracción algebraica, han sido señalados en el orden de acuerdo a la estructura de contenidos que presentan en los libros de texto de nivel superior.

Se observó también, que en las prácticas matemáticas según el EOS, presentados en los textos de nivel superior se muestra la resolución y comunicación de los problemas sobre fracciones algebraicas, de donde emergen los objetos matemáticos primarios, y en ellas se observó que en la mayoría de éstas prácticas se requieren de conceptos básicos tanto en la realización como en la interpretación de los resultados obtenidos en cada tarea matemática.

A continuación, se mencionan algunas aplicaciones de los usos y significados institucionales de referencia del objeto matemático fracciones algebraicas, en otros contenidos matemáticos.

3.3 Aplicaciones de fracciones algebraicas en otros contenidos matemáticos

En esta parte se muestran algunas de las aplicaciones de las fracciones algebraicas y no algebraicas en educación superior, tomando en cuenta a los autores Stewart (1941), Arya y Ladner (2009) y Vásquez (1962).

Función racional, considerado como una función $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P y Q son polinomios, $Q \neq 0$ y el dominio consiste de todos los valores de x.

Un ejemplo sencillo de una función racional es la función $f(x) = \frac{2x^4 - x^2 - 1}{x^4 - 1}$, con dominio $\{x/x \neq \pm 1\}$, donde podemos expresar en factores tanto el numerador como el denominador para simplificar términos comunes y así obtenemos una expresión reducida tal como

$$f(x) = \frac{(2x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{(2x^2+1)}{(x^2+1)}.$$

Funciones algebraicas, si una función puede construirse usando operaciones algebraicas (sumas, resta, multiplicación y sacar raíces) se le llama función algebraica. Cualquier función racional automáticamente es una función algebraica. Como ejemplo tenemos la siguiente función:

$f(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2).\sqrt[3]{x + 1}$, donde en la teoría de la relatividad surge un ejemplo de funciones algebraicas, la masa de una partícula con velocidad v es:

$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y $c = 3.0 \times 105 km/s$ es la rapidez de la luz en el vacío.

Límites, existe una estrecha relación entre el problema de la tangente y el hallar velocidades. Surgen los límites de una función cuando se halla la tangente a una curva o la velocidad de un objeto. Se expresa como: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, donde los valores de la función $f(x)$ se aproxima cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero

$x \neq a$.

En el cálculo de límites de funciones racionales tenemos al siguiente ejemplo: $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ de donde observamos que la función $\frac{x-1}{x^2-1}$ es una función fracción algebraica (el numerador y denominador son polinomios), cuyo desarrollo es: $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ y al simplificarla obtenemos la expresión $\frac{1}{x+1}$, en donde podemos reemplazar el valor de x y obtener así el límite pedido.

Derivada, se define la derivada de una función como límite de una función real de variable real. El problema del hallazgo de la línea tangente a una curva y el problema del descubrimiento de la velocidad de un objeto, involucran el hallazgo de la misma clase de límite. Esta clase especial de límite se llama derivada y puede ser interpretada como una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o ingeniería. A la derivada como una función se le representa como:

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, donde a $f'(x)$ se le llama derivada de f. La derivada $f'(x)$ es una nueva función cuyo dominio es el conjunto $\{x/f'(x)$ existe$\}$ y puede ser menor que el dominio de f.

Como ejemplo encontramos a f' si $f(x) = \frac{1-x}{2+x}$ (función cociente) con desarrollo:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \frac{1-x}{2+x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1-x-h)(2+x)-(1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(2-x-2h-x^2-xh)-(2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} = \frac{-3}{(2+x)^2}$$

Expresión reducida después de haber simplificado términos comunes en la derivada de f en x (límite del valor del cociente diferencial) al efectuar operaciones con fracciones algebraicas en la función cociente.

De la misma manera se puede reducir las operaciones entre derivadas, la antiderivada al considerar que las funciones son fracciones algebraicas. Objeto de estudio relevante en estos temas de nivel superior.

Integrales, para formular la idea de integral definida de una función es necesario trabajar con el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución. La integral se conecta con la derivación, y la integral indefinida de una función se puede calcular al conocer la anti derivada. Este objeto de estudio, tiene aplicaciones diferentes en la ingeniería y la ciencia.

A continuación como ejemplo, se evalúa la integral definida de una función cociente en: $\int_1^9 \frac{2t^2+t^2\sqrt{t}-1}{t^2} dt$; donde t es una función y se requiere integrar en una forma más sencilla, al llevar a cabo la siguiente división:

$$\int_1^9 \frac{2t^2+t^2\sqrt{t}-1}{t^2} dt = \int_1^9 \left(2+t^{\frac{1}{2}}-t^{-2}\right) dt = 2t+\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}-\frac{t^{-1}}{-1}\Bigg]_1^9 = 2t+\frac{2}{3}t^{3/2}+\frac{1}{t}\Bigg]_1^9$$

Se observa que el denominador t^2 divide a la función $2t^2+t^2\sqrt{t}-1$ para luego agrupar y simplificar términos comunes en la función cociente de fracciones algebraicas y expresarla en una fracción reducida. Luego se integra hasta obtener de la función el valor de: $\left[2.9+\frac{2}{9}(9)^{3/2}+\frac{1}{9}\right]-\left[2.1+\frac{2}{3}.1^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{1}\right]=32^{4/9}$.

Observamos también que nuestro objeto de estudio es aplicado en integrales definidas para reducir las tareas y obtener el valor evaluado.

En el campo de la **física** también se presentan **problemas de temperatura y dilatación**, donde se hace evidente el tratamiento del objeto matemático de estudio fracciones algebraicas.

Se observa la propiedad que permite calcular la variación del período de una varilla cuando se eleva la temperatura y oscila como un péndulo. La propiedad es sintetizada al simplificar previamente los términos comunes.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL_0^2}{mg\frac{L_0}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L_0}{3g}}$$

Se considera que en las tareas matemáticas sobre física (con raíces cuadradas de fracciones algebraicas), antes de ser utilizada la propiedad previamente se hace el tratamiento del objeto fracciones algebraicas, reduciéndola para ser expresada como $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L_0}{3g}}$.

Una vez más observamos que el objeto de estudio en nuestra investigación se hace evidente y útil en operaciones y propiedades expresadas de manera reducida según las condiciones de los problemas.

3.4 Estudio del objeto matemático fracciones algebraicas desde el punto de vista didáctico

En esta parte del capítulo, presentamos los contenidos matemáticos del Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (2009) desde el primer año hasta el quinto año de secundaria y los contenidos matemáticos de los Campos temáticos del Marco Curricular, ya que han sido desarrollados en la educación básica regular.

Las fracciones algebraicas y el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular (2009)

Al revisar los contenidos de la Programación Curricular de Matemática del DCN (2009) del ciclo VI que corresponde a primer y segundo año de secundaria, y del Ciclo VII que corresponde a tercero, cuarto y quinto de secundaria; nos percatamos que los contenidos en Número, relaciones y funciones de cada grado escolar están estructurados de la siguiente manera (ver Tabla Nº 1):

Tabla N° 1: Contenidos de matemática del primer y segundo año de secundaria

	CONTENIDO: CICLO VI	
	PRIMERO	**SEGUNDO**
NÚMERO, RELACIONES Y FUNCIONES	**Sistemas numéricos** • Representación, orden y operaciones con números naturales. • Representación, orden y operaciones con números enteros. • Divisibilidad, propiedades de números primos y compuestos. • Representación, orden y operaciones con números racionales. Operaciones con fracciones y decimales. **Álgebra** • Patrones numéricos. • Ecuaciones lineales con una incógnita. • Valor numérico de expresiones algebraicas. **Funciones** • Noción de dependencia, función, variables dependientes e independientes. • Representación tabular y gráfica de funciones. • Dominio y rango de funciones lineales. • Proporcionalidad directa e inversa. **Relaciones lógicas y conjuntos** • Noción de conjunto. Determinación de conjuntos. • Relaciones y operaciones entre conjuntos. • Diagramas de clasificación y organización de información cuantitativa (Venn, Carroll, cuadros numéricos, etc.)	**Sistemas numéricos** • Representación, orden, densidad y operaciones con números racionales. • Potenciación con exponentes enteros. • Radicación exacta. **Álgebra** • Variable y simbolización de enunciados verbales mediante el lenguaje algebraico. • Teoría básica de exponentes. • Reducción de términos semejantes. • Operaciones de adición, multiplicación y división de polinomios. • Factorización de expresiones algebraicas por el factor común. **Funciones** • Función lineal. • Función lineal afín. • Dominio y rango de una función lineal. • Modelos lineales. • Representación verbal, tabular y gráfica de funciones lineales. • Proporcionalidad directa e inversa. **Relaciones lógicas y conjuntos** • Enunciado y proposición. • Conectivos lógicos. • Cuadros y esquemas de organización de relaciones lógicas.

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (DCN, 2009; p. 319-328)

Observamos en la Tabla Nº 1 que en la programación del primer año de Secundaria se considera al objeto matemático valor numérico de las expresiones algebraicas, mientras que en el segundo año de secundaria se desarrolla la reducción de términos semejantes en polinomios por medio de operaciones de la adición, sustracción, multiplicación y división; y la factorización de expresiones algebraicas (polinomios). Estos conocimientos se desarrollan, previamente antes de tratar con fracciones algebraicas que requieren la aplicación de definiciones y propiedades estudiadas con anterioridad. A continuación, en la tabla Nº 2 se presentan los contenidos matemáticos de secundaria del ciclo VII (ver Tabla Nº 2):

Tabla N° 2: Contenidos de matemática del tercer, cuarto y quinto año de secundaria.

	CONTENIDO: CICLO VII		
	TERCERO	**CUARTO**	**QUINTO**
NÚMERO, RELACIONES Y FUNCIONES	**Sistemas numéricos** • Representación, orden, operaciones con números reales. • Radicación con números reales. • Intervalos. Representación y operaciones. • Valor absoluto. **Álgebra** • Grado de expresiones algebraicas. • Método clásico y Ruffini para la división de polinomios. Teorema del residuo. • Productos y cocientes notables. • Ecuaciones cuadráticas. • Modelos cuadráticos. • Factorización por el método del aspa simple. **Funciones** • Dominio y rango de funciones cuadráticas. • Gráfica de funciones cuadráticas. • Modelación de fenómenos del mundo real con funciones. • Análisis de funciones cuadráticas completando cuadrados. • Dominio y rango de las funciones, valor absoluto y raíz cuadrada. • Gráfica de las funciones, valor absoluto, cuadrática y raíz cuadrada. **Relaciones lógicas y conjuntos** • Enunciado y proposición. • Conectivos lógicos. • Tablas de verdad. • Cuadros y esquemas de organización de relaciones lógicas.	**Sistemas numéricos** • Construcción axiomática de los números reales. • Densidad y completitud de los números reales. Operaciones. • Progresiones aritméticas y geométricas. • Interés simple y compuesto. • Modelos financieros. **Álgebra** • Transformación de expresiones que involucran fracciones algebraicas. • Inecuaciones lineales y cuadráticas con una incógnita. • Teoría avanzada de exponentes. • Sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas. • Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. **Funciones** • Funciones trigonométricas. • Periodo y amplitud de funciones sinusoidales y cosenoidales. • Modelos con funciones trigonométricas. **Relaciones lógicas y conjuntos** • Operaciones básicas con conjuntos. • Relación entre la lógica y los conjuntos. • Proposiciones lógicas compuestas. • Tablas de verdad. • Cuantificadores: Existencial y universal.	**Sistemas numéricos** • Relaciones entre los sistemas numéricos: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ y\ \mathbb{R}$. **Álgebra** • Método gráfico y método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones. • Inecuaciones lineales de dos incógnitas. • Introducción a la programación lineal. • Ecuaciones trigonométricas. **Funciones:** • Función inyectiva, suryectiva y biyectiva. • Función inversa. • Función logarítmica. • Función exponencial. • Modelos exponenciales. • Modelos logarítmicos. **Relaciones lógicas y conjuntos** • Tablas de verdad de proposiciones compuestas. • Cuadros y esquemas de organización de relaciones lógicas. • Los argumentos y su estructura. • Argumentos deductivos e inductivos.

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (DCN, 2009; p. 329-339)

En la Tabla N° 2, se observa que el objeto de estudio fracciones algebraicas se desarrolla sólo en cuarto año de secundaria; más no está explícito el tema en los años de tercero y quinto de secundaria. Solo presenta el desarrollo de expresiones algebraicas como valor numérico, operaciones con polinomios, ecuación de primer grado y productos notables.

La estructura de los contenidos mostrados, nos ayuda a definir y tomar en cuenta el grado escolar, como también, el objeto de estudio fracciones algebraicas para describir las tareas matemáticas propuestas en el material de texto.

Para relacionar la programación curricular de secundaria en matemática del DCN (2009) y los contenidos de los libros de matemática de secundaria, se tomó en cuenta la estructura de contenidos de dichos textos educativos proporcionados por el Ministerio de Educación a las instituciones públicas del país de primero a quinto año de secundaria y que éstas han sido operativos y trabajados en clase; se considera también que el libro oficial de texto de matemática de cuarto año de educación secundaria del Ministerio de Educación, respecto al objeto de estudio fracciones algebraicas, han sido editados en el 2012.

Estructura de contenidos matemáticos en los libros de textos oficiales de matemática de secundaria 2012

En la siguiente Tabla Nº 3, se muestra los contenidos matemáticos del nivel secundario de cada grado académico, siendo distribuidos en unidades respectivas en los libros de texto oficial de matemática 2012.

Tabla N° 3: Contenidos por Unidades de primer a quinto año de secundaria de los libros de texto del MINEDU.

GRADO	UNIDADES	CONTENIDOS
1°	5	Funciones Proporcionalidad Ecuaciones
2°	3	Introducción al álgebra. Operaciones con polinomios. Factorización.
3°	2 y 3	Polinomios en $\mathbb{R}$. Productos notables de binomios. Productos notables de trinomios. Productos notables de binomios por trinomios. División y cocientes notables. Factorización. Dominio, rango y representación. Función valor absoluto.

		Función raíz cuadrada.
4°	3	Fracciones algebraicas. Transformación de fracciones por simplificación. Operaciones. Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Sistemas de ecuaciones con tres incógnitas. Inecuaciones lineales con una incógnita. Inecuaciones cuadráticas con una incógnita. Teoría avanzada de exponentes. Ecuaciones exponenciales. Ecuaciones logarítmicas.
5°	2 y 3	Métodos de solución de un sistema de Ecuaciones lineales: método gráfico, de reducción, de sustitución, de igualación, y de Gauss-Jordan. Inecuaciones lineales con dos incógnitas. Sistema de Inecuaciones lineales con dos incógnitas. Introducción a la programación lineal. Métodos de optimización lineal. Tipos de soluciones. Funciones

Fuente: Propia

El DCN (2009) en Álgebra, Números, Relaciones y Funciones presentan contenidos que están estructurados en los niveles VI y VII, pero solo en cuarto año de secundaria en la unidad 3 llamada Álgebra, las fracciones algebraicas (objeto de estudio para la presente investigación) son desarrolladas, mientras que en los otros años de secundaria, no fue explícito el tema de estudio; solo se consideró una breve descripción y definición de las expresiones algebraicas.

En relación con el DCN (2009) y los textos de matemática de secundaria editados en el 2012 y distribuidos por el Ministerio de Educación a los colegios públicos, guardan una estrecha relación en cuanto a la programación de contenidos matemáticos.

Programación de contenidos del libro oficial de texto de matemática de cuarto año de Secundaria 2012

Tal como mencionó Godino (2003) el libro de texto es un recurso didáctico tanto para el docente como para el alumno, es por eso que, para nuestro caso tomaremos en cuenta el libro oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012 distribuidos por el MINEDU a las instituciones públicas del Perú, para desarrollar el estudio del objeto matemático fracciones algebraicas.

El libro de texto contiene una estructura de contenidos que guarda una estrecha relación con la programación curricular del DCN (2009). La unidad tres, tiene como finalidad desarrollar el pensamiento algebraico, dándole significado a notaciones matemáticas no numéricas, identificar patrones y deducir procedimientos y relaciones entre datos dependientes. Esta unidad se estructura de la siguiente manera:

- Fracciones algebraicas
- Sistema de ecuaciones lineales
- Inecuaciones
- Teoría de exponentes
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Para esta investigación, nos enfocaremos en el objeto de estudio fracciones algebraicas. Pero del material de texto se toma en cuenta los conocimientos previos en esta unidad tres, presentando actividades que involucran los siguientes temas:

- Expresión algebraica
- Operaciones con monomios
- Resolución de ecuaciones de primer grado
- Productos notables

3.5 Significado institucional pretendido del objeto matemático fracciones algebraicas del libro de texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012

En esta parte del trabajo, se determina el significado institucional pretendido acerca del objeto matemático fracciones algebraicas que fue presentado y desarrollado en el material de texto (texto oficial de matemática de 4° de secundaria 2012, p. 84) de la siguiente manera:

Fracciones Algebraicas

Una fracción algebraica es una expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $Q(x)$ no idénticamente nulo, y al menos, de primer grado.

Considera que la fracción no idénticamente nula significa que no debe ser igual a cero.

Como primer significado o uso de las fracciones algebraicas se determina el valor numérico en el siguiente ejemplo 1 (ver Figura Nº 7):

EJEMPLO 1

Si $n = 2$, determina el valor numérico de las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{3-2n}{5n} = \frac{3-2(2)}{5(2)} = \frac{3-4}{10} = \frac{-1}{10} = -\frac{1}{10}$

c) $\frac{n^2-1}{2n+7} = \frac{2^2-1}{2(2)+7} = \frac{3}{11}$

d) $\frac{2+n^2}{n^3+1} = \frac{2+2^2}{2^3+1} = \frac{2+4}{8+1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Figura Nº 7: Ejemplo 1 sobre valor numérico

Fuente: Material del texto oficial de matemática 4° año de secundaria 2012

De la Figura Nº 7, observamos que el ejemplo 1 consta de cuatro ejemplos sobre valor numérico en las fracciones algebraicas, y que al ser reemplazada el valor de *n* por el valor 2, se obtiene como resultado una fracción irreductible.

Transformación de fracciones por simplificación

El autor menciona que para simplificar una expresión algebraica será necesaria convertirla en una fracción equivalente donde los términos no tengan factores comunes. La fracción que resulte se conoce como fracción irreductible porque queda reducida a su mínima expresión. El siguiente uso se da en la simplificación de fracción algebraica del ejemplo 2:

EJEMPLO 2

Simplifica la fracción algebraica $\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ si $x \notin \{-1/2; 1\}$

- Factorizamos numerador y denominador y simplificamos los factores comunes:

$$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(2x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{x+1}{2x+1}$$

Como no existen factores comunes en el numerador ni en el denominador, la expresión $\frac{x+1}{2x+1}$ es la fracción irreducible.

Figura Nº 8: Ejemplo 2 sobre simplificación de fracción algebraica.

Fuente: Material del texto oficial de matemática 4° año de secundaria 2012

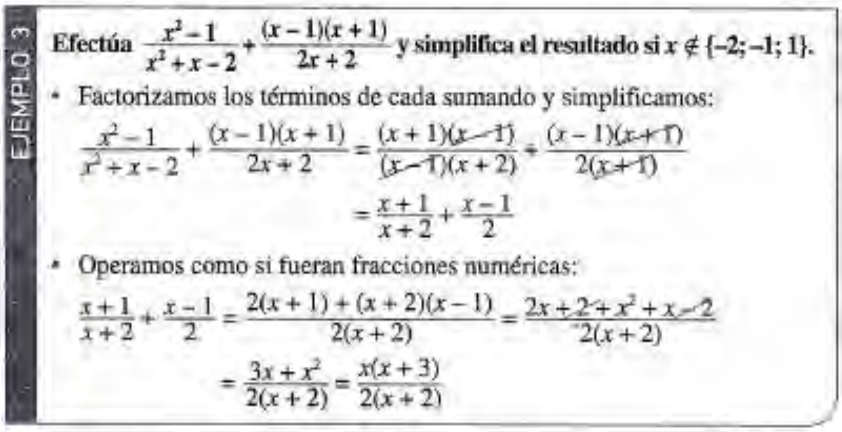
En el ejemplo 2, observamos que la fracción algebraica en su denominador presenta una restricción para x, luego, tanto en el numerador como en el denominador se debe factorizar para simplificar los factores comunes, hasta obtener una fracción irreductible, al final de la página 84 del material de texto, hace referencia que la fracción irreductible es una fracción cuyo numerador y denominador son primos entre sí; es decir, no presentan factores comunes.

Luego en la siguiente página 85 del libro, presenta las operaciones con fracciones algebraicas y actividades.

Operaciones con fracciones algebraicas

El autor indica que el desarrollo de las fracciones algebraicas es de forma similar a las que se realizan con fracciones numéricas.

El siguiente uso se muestra a través de la suma de fracciones, donde se lleva a cabo la simplificación de fracciones algebraicas, como se observa en el ejemplo 3:



EJEMPLO 3

Efectúa $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}+\frac{(x-1)(x+1)}{2x+2}$ **y simplifica el resultado si** $x \notin \{-2;-1;1\}$.

- Factorizamos los términos de cada sumando y simplificamos:

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2}+\frac{(x-1)(x+1)}{2x+2}=\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+2)}+\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{2\cancel{(x+1)}}$$

$$=\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{2}$$

- Operamos como si fueran fracciones numéricas:

$$\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{2}=\frac{2(x+1)+(x+2)(x-1)}{2(x+2)}=\frac{2x+\cancel{2}+x^2+x\cancel{-2}}{2(x+2)}$$

$$=\frac{3x+x^2}{2(x+2)}=\frac{x(x+3)}{2(x+2)}$$

Figura Nº 9: Ejemplo 3 sobre suma de fracción algebraica

Fuente: Material del texto oficial de matemática 4° año de secundaria 2012

Se observa en la Figura Nº 9, que la suma de fracciones algebraicas presenta una restricción para x, y después de factorizar cada fracción algebraica y simplificarlas, se obtienen dos fracciones con denominadores distintos. Para ello, se procede a realizar el producto cruzado para obtener el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de las fracciones que es $2(x+2)$, luego se procede a realizar las operaciones para su simplificación. En la misma página 85, después de presentar las operaciones con fracciones algebraicas en la suma, el autor añade el siguiente uso a través de la división de fracciones, donde también se lleva a cabo la simplificación de fracciones algebraicas, así muestra el ejemplo 4 (ver Figura Nº 10).

EJEMPLO 4

Resuelve $\dfrac{5(x+1)^2}{x^5+x^4} \div \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2}$ **y simplifica el resultado si** $x \notin \{-2; -1; 0\}$.

- Factorizamos cada término y eliminamos los factores comunes:

$$\frac{5(x+1)\cancel{(x+1)}}{x^4\cancel{(x+1)}} \div \frac{(x+1)\cancel{(x+2)}}{x^2\cancel{(x+2)}} = \frac{5(x+1)}{x^4} \div \frac{(x+1)}{x^2}$$

- Expresamos la división como multiplicación, resolvemos y simplificamos:

$$\frac{5(x+1)}{x^4} \div \frac{(x+1)}{x^2} = \frac{5\cancel{(x+1)}}{x^2 \cdot \cancel{x^2}} \cdot \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{(x+1)}} = \frac{5}{x^2}$$

Figura Nº 10: Ejemplo 4 sobre división de fracciones algebraicas.

Fuente: Material del texto oficial de matemática 4° año de secundaria 2012

En el ejemplo 4, se presenta también el desarrollo de la división de fracciones algebraicas, indicando las restricciones en el denominador. Luego, se factoriza cada fracción para simplificar factores comunes en el numerador y denominador. Asimismo, la fracción se multiplica con el recíproco de la segunda fracción, convirtiendo así la división a multiplicación para simplificar nuevamente factores comunes, hasta obtener una fracción irreductible.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS

En esta parte del trabajo se presenta la configuración epistémica de las fracciones algebraicas del libro oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012, que servirá luego para realizar las descripciones más detalladas de las actividades desarrolladas y propuestas en el material de texto y el análisis de los significados pretendidos.

4.1 Configuración epistémica de las fracciones algebraicas de cuarto año de secundaria

Godino y Batanero (1994) señalan que la práctica matemática es toda actuación o expresión verbal, gráfica, algebraica, etc. que es realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otras personas la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros problemas y contextos. De éstas prácticas emergen objetos matemáticos que al articularse forman la configuración epistémica. Dicho de otra manera, la configuración epistémica está relacionada con los objetos que emergen e intervienen en las prácticas matemáticas.

Las prácticas matemáticas sobre fracciones algebraicas, propuestas en el material de texto oficial de matemática del cuarto año de secundaria, distribuidos por el Ministerio de Educación 2012, han sido presentadas a los alumnos a través de las actividades desarrolladas y propuestas. En este estudio, se tomó en cuenta todas las tareas de las páginas 84, 85 y 105, para luego hacer un análisis de los significados pretendidos. A continuación, en la Tabla Nº 4, se señala la configuración epistémica de las fracciones algebraicas de las tareas matemáticas.

Tabla N° 4: Configuración epistémica de fracciones algebraicas de las tareas resueltas y propuestas en el material de texto de cuarto año de secundaria (Minedu, 2012)

LENGUAJE
Verbal: Fracción algebraica, transformación de fracciones por simplificación, fracción equivalente, factores comunes, factorizar numerador y denominador, fracción irreductible, operaciones con fracciones algebraicas definidas en $\mathbb{R}$, operaciones entre fracciones algebraicas, simplificación de expresiones, fracciones numéricas, valor numérico, valor numérico de las fracciones algebraicas, eliminación de factores comunes, división como multiplicación, factorizar cada término, factorizar términos de cada sumando.

<table>
<tr><td colspan="2">

Simbólico:

“–”; “+”; “.” ; “÷”, “x”, $\frac{a}{t}$; $\frac{P(x)}{Q(x)}, Q(x) \neq 0$; $\frac{1}{n+1}$; $\frac{n^2-1}{2n+7}$; $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}+\frac{(x-1)(x+1)}{2x+2}$; $\frac{12+r-r^2}{r^3+3r^2}$;
$\frac{5(x+1)^2}{x^5+x^4} \div \frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2}$; $\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{1-x^2}$; $\frac{8mn}{3m} . \frac{2mn^2}{9n}+\frac{4m^3n}{9mn} \div \frac{3m}{5n^2}$;
$\frac{x+1+\frac{1}{x+3}}{x-\frac{x-4}{x+5}}$; ……..

</td></tr>
<tr><th>SITUACIONES</th><th>CONCEPTO</th></tr>
<tr><td>

Problemas descontextualizados:
- Si $n = 2$, determina el valor numérico de las siguientes fracciones algebraicas…..
- Simplifica la fracción algebraica:
$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, si $x \notin \{-1/2;\ 1\}$
- Efectúa $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}+\frac{(x-1)(x+1)}{2x+2}$ y simplifica el resultado si $x \notin \{-2;\ -1;\ 1\}$.
- Resuelve $\frac{5(x+1)^2}{x^5+x^4} \div \frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2}$ y simplifica el resultado si $x \notin \{-2;\ -1;\ 0\}$.
- Efectúa las operaciones entre fracciones algebraicas si se sabe que están definidas en ℝ:
a) $\frac{6x^2+5x-6}{2x^2+5x+3}-\frac{4x^2-17x+4}{4x^2+3x-1}$
b) $\left(\frac{2x-2}{2x^2-50}\right) \div \left(\frac{3x+3}{x^3-4x-5}\right)$
c) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{1-x^2}$
- Simplifica las siguientes expresiones….
- Determina en valor numérico de las fracciones algebraicas…
- Realiza las siguientes operaciones entre fracciones algebraicas definidas en *R*.
a) $\frac{8mn}{3m} . \frac{2mn^2}{9n}+\frac{4m^3n}{9mn} \div \frac{3m}{5n^2}$
b) $\frac{-9}{x^2+x-50} \div \frac{x-4}{x^2-16}-\frac{4}{x-8}$, ……….

- Determina la veracidad de cada afirmación……

</td><td>

Previos:
- Expresión algebraica.
- Operaciones con monomios.
- Ecuaciones de primer grado.
- Productos notables.
- Mínimo común múltiplo.
- Factorización.
- Signos de colección.
- Propiedad distributiva.

Emergentes:
- Fracciones algebraicas.
- Fracción irreductible.
- Transformaciones de fracciones por simplificación.
- Simplificación de fracciones algebraicas.
- Valor numérico.
- Factorización de términos.
- Operaciones con fracciones algebraicas.
- Suma de fracciones algebraicas.
- División de fracciones algebraicas.
- Diferencia de fracciones algebraicas.
- Multiplicación de fracciones algebraicas.

</td></tr>
</table>

Problemas contextualizados: - Luis debe dar 4 vueltas a la pista de atletismo de su localidad. Su desempeño es como sigue: se demora y segundos en dar la primera vuelta, $t - 10$ segundos en la segunda, $t - 5$ segundos en la tercera y $t + 5$ segundos en la cuarta vuelta. Si la distancia recorrida en cada vuelta es a metros, ¿qué expresión permite calcular la velocidad con la que recorrió cada vuelta? - Supón que dispones de una calculadora con una tecla especial que calcula el valor de $\frac{x}{x+1}$. Por ejemplo, si presionas "5" y luego la tecla especial, en pantalla observas $5/6$. ¿Qué fracciones obtendrías en cada caso si presionas los números $3, 5, 7, 9$ y 11? - Cuando Mario simplificó la expresión: $\frac{x^3}{x^2-y^2} + \frac{y^3}{y^2-x^2} + \frac{xy}{x+y}$ obtuvo $(x - y)$ como valor final. Teresa le dijo que había cometido un error y que el resultado era $(x + y)$. ¿Quién de los dos tuvo razón? Fundamenta tu respuesta. - Se pide a Carlos y Rosa que simplifiquen la expresión: $\frac{12x^2-12}{16(x+3)(x+1)}$. Él concluyó lo siguiente: $\frac{12x^2-12}{16(x+3)(x+1)} = \frac{3(x^2-1)}{4(x+3)(x+1)}$. . ¿Es correcto lo que hizo Carlos?, ¿Puedes seguir simplificando la expresión?, ¿Cómo queda dicha expresión? . Rosa simplificó y obtuvo: $\frac{3(x-1)}{4(x+3)}$. ¿Es correcto?, ¿Por qué?	
PROCEDIMIENTOS	**PROPIEDADES – PROPOSICIONES**
- Factorizamos numerador y denominador y simplificamos los factores comunes. - Como no existen factores comunes en el numerador ni en el denominador, la expresión $\frac{x+1}{2x+1}$ es la fracción irreductible.	- Una fracción algebraica es una expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo $Q(x)$ no idénticamente nulo, y al menos de primer grado. - No idénticamente nulo significa que no debe ser igual a cero.

- Se desarrollan de forma similar a las que se realizan con fracciones numéricas. - Factorizamos los términos de cada sumando y simplificamos. - Operamos como si fueran fracciones numéricas. - Factorizamos cada término y eliminamos los factores comunes. - Expresamos la división como multiplicación, resolvemos y simplificamos. - Se aplica diferencia de cuadrados y aspa simple en el numerador y denominador. - Determina el valor numérico de las fracciones algebraicas. - Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas (adición, sustracción, división y multiplicación). - Simplifica fracciones algebraicas. - Determina la veracidad de cada afirmación dada. - Hallar el numerador de la fracción simplificada. - Simplificar la expresión.	- Fracción irreductible es la fracción cuyo numerador y denominador son primos entre sí (no presenta factores comunes). - Mínimo común múltiplo de los denominadores. - Diferencia de cuadrados. - Binomio al cuadrado. - Diferencia de cubos. - Clases de factorización: aspa simple, factor común monomio. - Simplificación de factores comunes.
ARGUMENTOS	
Justificación de los algoritmos a partir de las estrategias y conceptos aplicados para la simplificación de las fracciones algebraicas. Justificación de algunas propiedades de las fracciones algebraicas.	

La Tabla Nº 4, trata de una configuración epistémica en donde el objeto matemático fracciones algebraicas, propuesto en el libro oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012, que presenta una estructura formalista según Font y Godino (2006) quienes manifiestan que los conceptos son los primeros en definirse para luego presentar los ejemplos desarrollados a partir de los conceptos. Asimismo, los conocimientos matemáticos de los libros expositivos, están relacionados con la "acumulación de enunciados, reglas y procedimientos aislados, y relativamente inconexos y desconectados de la realidad, pero que poseen una estructura matemática, típicamente deductiva" (Gonzáles y Sierra, 2004, p. 393) de donde a partir de las definiciones de los conceptos se pueden deducir los teoremas y exponer pocos ejemplos, es una "estructura prescriptiva" que implica una enseñanza expositiva por parte del docente y ejercitación repetitiva, induciendo así al estudiante al aprendizaje memorístico y mecanizado.

El lenguaje verbal y simbólico que presentan las tareas matemáticas, son similares tanto en los problemas planteados y desarrollados en el material de texto de matemática en estudio. A partir de la configuración epistémica de las tareas matemáticas sobre fracciones algebraicas propuestas en el libro oficial de texto de matemática de cuarto año de secundaria 2012, se puede determinar que predomina el lenguaje algebraico (simbólico) haciéndose más evidente en cada tarea planteada y desarrollada.

Las situaciones problemas en las fracciones algebraicas, transformación de fracciones por simplificación y operaciones con fracciones algebraicas, presentan en su gran mayoría problemas descontextualizados enfocados al cálculo algorítmico, con procedimientos repetitivos y rutinarios, donde luego se propone a los estudiantes tareas similares a los problemas desarrollados en el material de texto. Promueven tres aparentemente problemas contextualizados en las tareas sobre fracciones algebraicas, pero que están orientados a procesos algorítmicos.

Se observa también en la configuración epistémica, que a medida que se van proponiendo las actividades, los enunciados de los problemas son similares a los demás ejercicios propuestos y desarrollados pidiéndoles aplicar conceptos y propiedades que no han sido bien definidas o precisas en el texto de estudio; también al desarrollar las prácticas matemáticas sobre fracciones algebraicas los procedimientos que se exigen y presentan en las tareas propuestas y desarrolladas, en su gran mayoría son estrategias repetitivas, exigiendo a los estudiantes una baja demanda cognitiva según Stein et al., (1996, citados en Cruz, 2009) donde las tareas matemáticas se reproducen a través de reglas, fórmulas de memorización y procedimientos sin conexión.

Por último, respecto al argumento apreciamos que a través de los cuatro ejemplos desarrollados en el material de texto, se intenta justificar los procesos de resolución con procesos algorítmicos y la descripción de algunas propiedades para reducir las fracciones algebraicas. También, en las tareas propuestas en el material, 2 de 18 tareas, se piden fundamentar las respuestas, con previo desarrollo algorítmico.

4.2 Análisis del libro oficial de texto de matemática de cuarto año de secundaria 2012 en relación al objeto matemático fracciones algebraicas

En este apartado, se describe la unidad tres de la página 84 y 85 del texto oficial de matemática de cuarto año secundaria que ha sido distribuido en el año 2012 a todas las instituciones educativas nacionales del país y que fueron operativos en las instituciones públicas. En esta unidad, antes de desarrollar "fracciones algebraicas", se presentan ideas o saberes previos de expresiones algebraicas, resolución de ecuaciones de primer grado y producto notables. Se inicia el tema con un ejemplo sobre distancia, tiempo y velocidad, para determinar la velocidad a través de una expresión algebraica, ejemplo: a/t; $a/(t - 10)$; $a/(t - 5)$; $a/(t + 5)$. Luego, se presenta la definición de la fracción algebraica, incluyendo los ejemplos resueltos sobre simplificación y valor numérico de las fracciones algebraicas.

En relación con el anterior párrafo, el autor define a las fracciones algebraicas de la siguiente manera: Una fracción algebraica es una expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $Q(x)$ no idénticamente nulo, y al menos, de primer grado.

En esta definición no indica lo que $P(x)$ y $Q(x)$ representan. Añade que la expresión no idénticamente nula significa que no debe ser igual a cero.

Luego, en el texto oficial de matemática en estudio, presenta cuatro ejemplos desarrollados que antecede a las tareas propuestas para el estudiante.

Para ello, en la página 84 del material de texto presenta como primer ejemplo cuatro tareas sobre valor numérico con su respectiva solución. En esta práctica matemática, no determina el significado de la "variable" simplemente lo presenta como un valor "$n = 2$" para que se reemplace en las fracciones que se proponen.

En seguida en la misma página se desarrolla la transformación de fracciones por simplificación, donde para convertir la expresión algebraica en fracción equivalente, es necesario usar la simplificación de factores comunes en las fracciones algebraicas, factorizando previamente en el numerador y denominador. En el ejemplo dos que se menciona en el libro, se presenta una fracción algebraica con su respectiva restricción, donde es necesario aplicar diferencia de cuadrados en el numerador y aspa simple en el denominador, para expresarlos como productos de factores y al final simplificar los factores comunes para obtener una fracción irreductible. En este ejemplo, el lector puede determinar el tipo de factorización que utilizará en la fracción, ya que no define ni determina los pasos que debe desarrollar para obtener factores en el numerador y denominador.

Respecto a las operaciones con fracciones algebraicas, en la página 85 del texto en estudio, presenta sólo dos ejemplos adicionales sobre suma y división de fracciones algebraicas. El autor hace mención que el desarrollo es de manera similar al que se realiza con fracciones numéricas. En el tercer ejemplo, se pide simplificar la suma de dos fracciones algebraicas dando una restricción al valor "x" en el denominador. Para determinar dicha solución, se aplica la suma de dos fracciones algebraicas sin denominador común. Primero, se factoriza los términos de cada sumando aplicando diferencia de cuadrados, aspa simple, factor común monomio, y luego se simplifica factores comunes. Luego, es necesario aplicar el producto cruzado o mínimo común múltiplo para expresar dicha suma como una sola fracción y así poder reducir la expresión hasta obtener una fracción irreductible.

En el cuarto ejemplo de la misma página, se pide resolver y simplificar la división de dos fracciones algebraicas, indicando también la restricción en "x" para el denominador. Para obtener el resultado, es necesario utilizar las expresiones recíprocas en la división de fracciones algebraicas. El procedimiento para este ejemplo es aplicar factor común monomio, aspa simple para obtener factores y simplificar los términos comunes en el numerador y denominador de cada fracción, luego se invierte la fracción (expresión recíproca) que está ubicada en la parte derecha de la expresión para expresar como una multiplicación de fracciones algebraicas y así continuar simplificando factores comunes hasta obtener una fracción irreductible.

De estos ejemplos, como en el caso anterior del ejemplo dos (ver Figura Nº 8, p. 56) también se generaliza los procedimientos, suponiendo que el estudiante tiene conocimientos sobre los tipos de factorización que utilizará para después simplificarlos. No se presentan ejercicios de resta, multiplicación de fracciones algebraicas ni de fracciones complejas.

En seguida, en esta unidad en la página 85 del texto se presentan tareas matemáticas donde se piden efectuar operaciones entre fracciones algebraicas si se sabe que están definidas en ℝ (aunque en el texto no indica el significado ℝ, creemos pertinente que se refiere a los números reales porque en el texto resalta la letra mayúscula ℝ), a la vez presentan tres ejercicios de fracciones algebraicas de resta y división.

Efectúa las operaciones entre fracciones algebraicas si se sabe que están definidas en ℝ.

a) $\dfrac{6x^2+5x-6}{2x^2+5x+3}-\dfrac{4x^2-17x+4}{4x^2+3x-1}$

b) $\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{1-x^2}$

c) $\left(\dfrac{2x-2}{2x^2-50}\right)\div\left(\dfrac{3x+3}{x^2-4x-5}\right)$

Para desarrollar el pensamiento matemático

Supón que dispones de una calculadora con una tecla especial que calcula el valor de $\dfrac{x}{x+1}$. Por ejemplo, si presionas $\boxed{5}$ y luego la tecla especial, en pantalla observas 5/6. ¿Qué fracciones obtendrías en cada caso si presionas los números 3; 5; 7; 9 y 11?

Figura Nº 11: Ejercicios propuestos sobre fracciones algebraicas

Fuente: Material del texto oficial de matemática 4° año de secundaria 2012

El primer ejercicio consiste en restar dos fracciones, el segundo en restar tres fracciones y el tercero consiste en dividir dos fracciones algebraicas. Estos ejercicios, para ser resueltos, se deben aplicar las mismas propiedades que se usaron en los ejemplos desarrollados; es decir, aspa simple, diferencia de cuadrados, mínimo común múltiplo y factor común monomio.

En la misma página del libro, se propone un ejercicio para desarrollar el pensamiento matemático (pensamiento algebraico, de modo que se pueda dar significado a notaciones matemáticas no numéricas, identificar patrones, deducir procedimientos y relaciones entre datos dependientes, ver Figura N° 11), indicando que si al usar una calculadora que tenga una tecla especial que calcule $\frac{x}{x+1}$, y que al presionar 5 resulta en la pantalla $5/6$, pero hace una pregunta manifestando ¿qué fracciones se obtendría en cada caso, si se presiona los números 3, $5, 7, 9$ y 11?.

También al final de ésta página, se propone tres ejercicios de evaluación al estudiante como se observa en la siguiente figura.

Evaluación

1. **Simplifica** $\dfrac{(x^2-1)(x^2+2x-3)}{(x^2-2x+1)(x^2+4x+3)}$

2. **Determina** el valor numérico de $\dfrac{5x^2+7x+1}{4x^2-9}$ para $x = -2$.

3. Cuando Mario simplificó la expresión $\dfrac{x^3}{x^2-y^2} + \dfrac{y^3}{y^2-x^2} + \dfrac{xy}{x+y}$ obtuvo $(x-y)$ como valor final. Teresa le dijo que había cometido un error y que el resultado era $(x+y)$. ¿Quién de los dos tuvo razón? **Fundamenta tu respuesta**.

Figura Nº 12: Ejercicios de evaluación sobre fracciones algebraicas..
Fuente: Material del texto oficial de matemática 4° año de secundaria 2012

En el primer ejercicio, se pide simplificar la fracción algebraica, en el segundo ejercicio, se pide determinar el valor numérico de la fracción algebraica y en el tercer ejercicio se pide verificar si las respuestas que se proponen de dos personas, después de operar las fracciones algebraicas, son correctas o no, para que luego el estudiante fundamente su respuesta. Para dar solución a estas tareas matemáticas, se consideran procesos algorítmicos, rutinarios y procedimentales, ya que se requiere la aplicación de conceptos y propiedades ya usados en las tareas anteriormente. El texto continúa desarrollando otros temas en esta unidad (ver p. 55). En la página 105 del texto en estudio (ver anexo, p. 106) se vuelve a presentar actividades de fracciones algebraicas. En esta página se propone al estudiante cinco tareas sobre fracciones algebraicas y cinco tareas sobre sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, luego se plantea una tarea para trabajar cooperativamente donde se pide al estudiante explicar sobre los comentarios de dos estudiantes (en la parte inferior de la página 105) a partir de la suma de fracciones algebraicas.

Las cinco actividades que se propone a los estudiantes, piden simplificar las expresiones, determinar el valor numérico, realizar las operaciones entre fracciones algebraicas definidas en $\mathbb{R}$, determinar la veracidad de cada afirmación y responder a las afirmaciones que se indica en la tarea a partir de dos respuestas distintas.

En la actividad 1, se pide simplificar dos tareas, donde la primera consta de una fracción algebraica y para reducirla hay que factorizar y simplificar, mientras que en la segunda tarea se les propone una fracción que contiene un parámetro "*a*" distinto a todos los ejercicios propuestos y desarrollados (es la única tarea que presenta parámetro).

En la actividad 2, se pide determinar el valor numérico de dos fracciones algebraicas, la primera es una fracción, y la segunda tarea es una suma de fracciones algebraicas donde en ambos ejercicios es necesario reemplazar el valor que se propone para obtener un valor numérico.

En la actividad 3, se pide realizar las operaciones entre fracciones algebraicas de cuatro tareas. La primera consiste en proponerles cuatro fracciones donde se debe multiplicar, sumar y dividir las fracciones. La segunda consiste en restar, sumar y dividir las fracciones. En la tercera tarea, se debe dividir y restar las fracciones. Mientras que en la cuarta se debe dividir y sumar las fracciones. Sólo en esta última tarea se incluye agrupación de fracciones algebraicas denotadas con paréntesis en la suma de fracciones, haciendo hincapié al orden de las operaciones entre fracciones.

En la actividad 4, se pide determinar la veracidad de dos afirmaciones donde se indica las respuestas de éstas tareas, la primera es sobre valor numérico y la segunda sobre una fracción algebraica compleja.

En la actividad 5, se propone una fracción algebraica donde se pide al estudiante argumentar a partir de los resultados que se indica en el ejercicio.

Finalmente, luego de describir y analizar el texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012, podemos concluir que las tareas propuestas y desarrolladas son tareas algorítmicas orientadas a ser trabajadas por el estudiante de manera mecánica, siguiendo pasos o procedimientos rutinarios aprendidos, además en la mayoría de las tareas desarrolladas hay ausencia de argumentos, mientras que en las tareas propuestas para el estudiante se proponen dos tareas para que se argumente y se verifique afirmaciones. El lenguaje algebraico, es el que predomina en esta unidad, no existe cambio de registro, además no hace hincapié al dominio de las fracciones algebraicas en las tareas que se proponen en la página 105.

4.3 Comparación de los usos de las fracciones algebraicas de los libros de textos de nivel superior y del texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012

A continuación, se presenta la comparación de los usos de las fracciones algebraicas en los libros de textos de nivel superior y del texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria (significados de referencia vs. significados pretendidos).

Al revisar el contenido de fracciones algebraicas en los textos de matemática de nivel superior tales como Swokowski (1996), Sobel y Lerner (1995) y Smith et al. (1998) se encontró la siguiente secuencia y orden en los usos que se da al objeto en estudio:

- Simplificación de fracciones algebraicas
- Multiplicación y simplificación de fracciones algebraicas
- División y simplificación de fracciones algebraicas (expresiones recíprocas)
- Suma en las fracciones algebraicas: sin denominador común
- Resta en las fracciones algebraicas: sin denominador común
- Suma en las fracciones algebraicas: con denominador común
- Resta en las fracciones algebraicas: con denominador común
- Suma y resta en las fracciones algebraicas: sin denominador común
- Fracciones algebraicas complejas

Luego, para elaborar la Tabla N° 5 y realizar la comparación entre los usos de las fracciones algebraicas en los materiales de texto de nivel superior y de nivel escolar, se determinó el orden de los usos de las fracciones algebraicas de acuerdo a la secuencia de contenidos en que aparecen en el texto oficial de matemática. De los nueve contenidos mencionados anteriormente (que señalamos en la Tabla Nº 5), hemos añadido un uso sobre el valor numérico de la fracción algebraica que no es presentado en los textos de nivel superior (pero si previamente en los ejercicios con polinomios).

En la Tabla Nº 5 se menciona los significados o usos de las fracciones algebraicas, de acuerdo al orden y secuencia que aparecen en el libro de texto oficial de matemática de cuarto año de Secundaria 2012. Cabe mencionar que al final de cada significado en la Tabla Nº 5, la enumeración entre paréntesis es de acuerdo al orden que aparecen los usos en los textos de nivel superior (ver Tabla Nº 5).

Tabla N° 5: Comparación de significados de referencia y pretendido de fracciones algebraicas

SIGNIFICADO DE LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS	REFERENCIA	PRETENDIDO		OBSERVACIÓN ● En ejercicios desarrollados. ○ En ejercicios propuestos.
Valor numérico de la fracción algebraica.		●	○	Sólo en el material oficial de matemática se promueve esta tarea.
Simplificación de fracciones algebraicas (1)	X	●	○	En los ejercicios propuestos y desarrollados del material oficial de matemática se promueve esta tarea.
Suma en las fracciones algebraicas: con denominador común. (4)	X		○	Sólo en los ejercicios propuestos del material oficial de matemática se promueve esta tarea.
Resta en las fracciones algebraicas: con denominador común. (5)	X		○	Sólo en los ejercicios propuestos del material oficial de matemática se promueve esta tarea.
Suma en las fracciones algebraicas: sin denominador común. (6)	X	●		Sólo en los ejercicios desarrollados del material oficial de matemática se promueve esta tarea.
Resta en las fracciones algebraicas: sin denominador común. (7)	X		○	Sólo en los ejercicios propuestos del material oficial de matemática se promueve esta tarea.
Suma y resta en las fracciones algebraicas: sin denominador común. (8)	X		○	Sólo en los ejercicios propuestos del material oficial de matemática se promueve esta tarea.
Simplificación en la multiplicación de fracciones algebraicas. (2)	X		○	Sólo en los ejercicios propuestos del material oficial de matemática se promueve esta tarea.
Simplificación en la división de fracciones algebraicas (expresiones recíprocas). (3)	X	●	○	En los ejercicios propuestos y desarrollados del material oficial de matemática se promueve esta tarea.
Fracciones algebraicas complejas. (9)	X		○	Sólo en el texto de referencia se promueve esta tarea, y sin embargo se propone en el texto pretendido.

Fuente: Elaboración propia

De la Tabla N° 5, nos percatamos que la estructura que presenta el objeto matemático "fracciones algebraicas" en la unidad tres en el material de texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012, tiene un orden diferente al de material de nivel universitario.
Es decir, en las páginas 84 y 85 del texto en estudio, se observa que lo primero que presenta es la definición de fracciones algebraicas, luego el uso del valor numérico de las fracciones algebraicas, simplificación de fracciones algebraicas, suma de fracciones algebraicas sin denominador común y división de fracciones algebraicas, con sus respectivos ejemplos.
En cambio, al revisar los libros de nivel superior, como ya mencionamos (p. 68), el valor numérico de las fracciones algebraicas no se desarrolla en éstos materiales, pero sí en el material de texto oficial de matemática. Tanto en el material de texto de nivel superior como el de nivel secundario, se desarrollan ejercicios sobre: simplificación de fracciones algebraicas, suma de fracciones sin denominador común y simplificación en la división de fracciones algebraicas.
El significado pretendido, en el texto oficial de matemáticas de la página 105, se plantean tareas para el estudiante tales como: suma de fracciones algebraicas con denominador común, resta en las fracciones algebraicas con denominador común, resta en las fracciones algebraicas sin denominador común, suma y resta en las fracciones algebraicas sin denominador común, simplificación en la multiplicación y división de fracciones algebraicas y fracciones algebraicas complejas; todas éstas tareas presentan el mismo nivel de exigencia de resolución, es decir, se pide calcular, simplificar, reducir, simplificar y determinar las expresiones algebraicas, secuencia de tareas similares a lo pedido en los ejercicios desarrollados . Se observa también que, menos del 50% de lo que se describe en el material de texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012, presentan usos (como ya lo mencionamos en el párrafo anterior) que se da a las fracciones algebraicas en los ejercicios desarrollados y que puede ser de guía y apoyo para el estudiante. El material de texto presenta ejercicios simples que se proponen, tales como: simplificación de fracciones algebraicas en una fracción y ejercicios con valor numérico en la fracción algebraica. También, se propone otras tareas como: fracciones algebraicas complejas y fracción algebraica que contiene parámetro. En esa unidad de trabajo se presenta un total de 22 tareas, de las cuales sólo 4 tareas son ejemplificadas y desarrolladas, mientras que 18 tareas son propuestas para que el estudiante lo desarrolle.
De acuerdo a los usos de las fracciones algebraicas, podemos manifestar que en los materiales de texto de nivel superior si presentan todos los significados de manera organizada y secuenciada, referente a las fracciones algebraicas, considerando previamente el orden de las operaciones. Por lo tanto, en términos del EOS se puede valorar el grado de representatividad

de estos materiales de textos de nivel superior manifestando que tiene alta idoneidad epistémica.

Podemos concluir que en el texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012, se toman en cuenta cuatro usos o significados sobre fracciones algebraicas, y a través de ejemplos desarrollados explican el proceso de solución de las tareas planteadas para el estudiante.

4.4 Indicadores de la idoneidad epistémica

En esta sección presentamos los componentes e indicadores de la Idoneidad epistémica propuesta por el EOS, para valorar al contenido fracciones algebraicas del libro de texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012 de la Educación Básica Regular, según Godino (2011) adaptado por Garcés (2013).

Tabla N° 6: Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica.

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE		OBSERVACIÓN
		SI	NO	
SITUACIONES PROBLEMAS	Se presentan problemas contextualizados que se resuelven con fracciones algebraicas.		x	
	Se ejemplifica con ejercicios que requieren de comparación en fracciones algebraicas.	x		En las tareas propuestas.
	Se resuelven ejercicios algorítmicos aplicando fórmulas en fracciones algébricas.	x		
	Se proponen situaciones de problemas cercanos al estudiante sobre fracciones algebraicas.		x	Son situaciones problemas descontextualiza-dos.
LENGUAJES	Uso del modo de expresión verbal en las actividades sobre fracciones algebraicas.	x		
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de fracciones algebraicas.		x	Ninguna tarea
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de fracciones algebraicas.	x		
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con fracciones algebraicas.		x	Es el mismo lenguaje en todas las tareas planteadas y desarrolladas.
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de secundaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación.		x	En las tareas propuestas se proponen tareas que no tienen alguna observación para desarrollarlas.

	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, verbal).	x		Sólo lenguaje algebraico simbólico.
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.		x	En escasas tareas planteadas.
REGLAS (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Las definiciones y conceptos de fracciones algebraicas. Son claros y correctos.		x	
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos.	x		
	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación secundaria.	x		
	Se presentan los enunciados de fracciones algebraicas.	x		
	En caso que se propongan problemas contextualizados, se muestran procedimientos básicos para resolver estos problemas con fracciones algebraicas.		x	
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de fracciones algebraicas.		x	Sólo se aplican algoritmos repetitivos.
	Se proponen situaciones de fracciones algebraicas donde los alumnos tengan que generar o intercambiar procedimientos.	x		Son actividades individuales.
ARGUMENTOS	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes son adecuadas al nivel educativo secundario.		x	El desarrollo de los ejercicios es algorítmico.
	Las demostraciones de teoremas son adecuadas a dar solución son adecuadas desde la matemática.		x	No se comprueba
	Se promueven situaciones-problemas relacionados a fracciones algebraicas para que el alumno argumente.	x		En las tareas propuestas, sólo en dos de 18 tareas.
RELACIONES	Los objetos matemáticos primarios (problemas, definiciones proposiciones, etc.) se relacionan entre sí.	x		Procedimientos y propiedades.
	Los objetos matemáticos emergentes en la actividad de resolución de problemas contextualizados con fracciones algebraicas (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan y conectan entre sí.		x	No se proponen problemas de contexto.

Fuente: Godino (2011)

Con la ayuda de la Tabla Nº 6, que consta de componentes e indicadores de la idoneidad epistémica, podremos analizar ésta idoneidad didáctica en las siguientes líneas.

Análisis de la idoneidad didáctica de las tareas de fracciones algebraicas: Idoneidad Epistémica

Godino manifiesta que para que las actividades matemáticas tengan alta idoneidad epistémica, las tareas matemáticas deben ser ricas; es decir, deben interconectarse las situaciones problemas, lenguajes, reglas, así como también los argumentos.
El análisis para el cumplimiento de los indicadores de la idoneidad epistémica, proporcionada por el EOS en las fracciones algebraicas, se resume en las siguientes descripciones.

Situaciones problema: este componente posee cuatro indicadores (ver Tabla Nº 6) de los cuales, sólo dos indicadores cumplen con presentar situaciones donde el estudiante puede resolver ejercicios algorítmicos aplicando ciertas propiedades y fórmulas ya conocidas. Se aprecia mayor énfasis el proceso de algoritmización del EOS; es decir, proceso de mecanización, repetición (Rubio, 2012) evidenciándose en la resolución de fracciones algebraicas procedimientos mecánicos y aprendidos.

Lenguaje: los ejercicios propuestos en el material de texto, están representados en una misma estructura algebraica, es decir, las tareas tienen las mismas expresiones algebraicas donde presentan operaciones que tienen el mismo sistema de solución, los mismos procedimientos, predominando el lenguaje algebraico para expresar la respuesta de cada tarea.

Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos): Las tareas matemáticas se centran en la parte operativa y algorítmica con el fin de lograr reducir, simplificar las fracciones algebraicas, sin que el estudiante tenga una comprensión acerca de las tareas que desarrolla. En cuanto a las definiciones y conceptos en el texto, no son tan precisas para comprenderlas, y se presta a crear confusiones posteriores en el estudiante al emplear las definiciones cuando desarrolle las tareas matemáticas (por ejemplo, en $\frac{P(x)}{Q(x)}$, no explica que $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en los ejercicios, además las fracciones complejas que no está definida pero que sin embargo se propone tarea de este tipo, etc.). Además, en los procedimientos y propiedades, nos damos cuenta que los métodos de solución son casi similares a otros ejercicios, se emplean constantemente diferencia de cuadrados, aspa simple, factor común monomio, donde los ejercicios carecen de justificación, argumentación, basándose en procesos algorítmicos implicando tareas de baja demanda cognitiva para el estudiante al desarrollar las tareas propuestas.

Argumentos: de las 18 tareas propuestas a los estudiantes, solo en dos tareas se les pide argumentar y fundamentar sus respuestas en base a resultados expuestos en las tareas. Pero en los cuatro ejemplos desarrollados en el libro, sólo se toma en cuenta los procedimientos de solución de las tareas, careciendo así de los procesos de argumentación en cada uno de ellas.

Relaciones: en este componente se aprecia que los indicadores tienen un cumplimiento parcial, donde sólo los objetos primarios se relacionan entre sí en las tareas desarrolladas.

A modo de conclusión respecto a la valoración de esta idoneidad epistémica, se determina que tiene baja idoneidad epistémica, ya que en las situaciones – problemas no contienen tareas ricas que incentive a los estudiantes a desarrollar conjeturas, interpretación y justificación de las soluciones sobre fracciones algebraicas.

En conclusión, al finalizar la elaboración y el análisis de la configuración epistémica de las tareas matemáticas de fracciones algébricas, se puede determinar que el lenguaje algebraico (simbólico) se hace más evidente. Sólo presenta 2 ejercicios incluidos donde el alumno debe fundamentar su respuesta, pero el enunciado del problema es similar a los demás ejercicios propuestos y desarrollados pidiéndoles simplificar y reducir la expresión algebraica, exigiendo así a los estudiantes una baja demanda cognitiva, según la clasificación de Stein donde las tareas matemáticas son de memorización y procedimientos sin conexión.

4.5 Indicadores de la Idoneidad Cognitiva de las fracciones algebraicas a priori

En esta parte del trabajo, se presenta en la Tabla Nº 7 los indicadores de la idoneidad cognitiva para hacer un análisis a priori con la finalidad de validarlo en un estudio futuro. Los indicadores que se consideró son componentes de la tabla de idoneidad cognitiva del EOS.
En nuestro caso, como en el capítulo IV hicimos la descripción del material de texto oficial de matemática 2012 y la configuración epistémica de fracciones algebraicas (tomados de la unidad tres del material de texto que contiene 22 tareas propuestas y desarrolladas), a continuación se analiza, si los contenidos pretendidos fueron adecuados o no para los estudiantes de cuarto año de secundaria 2012, según Godino (2011) adaptado por Garcés (2013). (Ver Tabla Nº 7).

Tabla N° 7: Componentes e indicadores de la idoneidad cognitiva.

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE		OBSERVACIÓN
		SI	NO	
Conocimientos previos (situaciones, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos, relaciones)	Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio de las fracciones algebraicas.	x		Al inicio de la unidad tres del material de texto presenta conocimientos previos que el estudiante debe tomarlos en cuenta.
	Los alumnos tienen los conocimientos previos sobre tipos de factorización para el estudio de las fracciones algebraicas.		x	No son suficientes porque se exige a los estudiantes más propiedades de lo estudiado o conocidos por ellos al resolver tareas propuestas.
	Los significados pretendidos de fracciones algebraicas se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.	x		
Adaptación curricular a las diferencias individuales	Se incluyen actividades de ampliación en el tema de fracciones algebraicas y de refuerzo.	x		Actividades sobre tareas propuestas que en algunos casos no están definidos en la parte teórica.
Aprendizaje	Los diversos modos de evaluación muestran que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos de fracciones algebraicas pretendidos.		x	Se asume que los estudiantes presentan carencia de algunas definiciones y consideraciones en fracciones algebraicas.
	Se evidencia competencia comunicativa y argumentativa por parte de los estudiantes en las actividades		x	No se promueve en las actividades desarrolladas. Y son escasos en las actividades propuestas.
	La evaluación de los contenidos pretendidos de fracciones algebraicas tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia de los estudiantes.		x	Presenta tareas que están dirigidas a un mismo nivel de comprensión y competencia de los estudiantes.

Fuente: Godino (2011)

Referente a la idoneidad cognitiva de las tareas matemáticas propuestas y desarrolladas del material en estudio, se aprecia a partir de un análisis a priori, que las tareas en este nivel presentan baja idoneidad cognitiva porque menos de la mitad cumplen con los indicadores presentados (ver Tabla Nº 7), esto se debe a que los alumnos no tienen suficientes conocimientos previos sobre los tipos de factorización, carencia de algunas definiciones (que no están definidos en el material de texto) y consideraciones sobre fracciones algebraicas, no se promueven actividades con argumentos y las tareas están dirigidas a un mismo nivel de exigencia cognitiva y comprensión.

4.6 Indicadores de la Idoneidad Ecológica de las fracciones algebraicas a priori

A continuación, se aplica los indicadores de la idoneidad ecológica del EOS, a las tareas del material de texto oficial de matemáticas de cuarto año de secundaria 2012 en el presente estudio, según Godino (2011) adaptado por Garcés (2013).

Tabla N° 8: Componentes e indicadores de la idoneidad ecológica.

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
Adaptación al currículo	Los contenidos de la actividad fracciones algebraicas y su implementación se corresponden con las directrices curriculares establecidas en el DCN.	x		Existe relación entre el material de texto y el DCN.
Apertura hacia la innovación didáctica	Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto de desarrollo institucional.		x	El uso de tecnologías está ausente en las tareas propuestas en el libro.
Adaptación socio - profesional y cultural	Los contenidos pretendidos de fracciones algebraicas, contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.		x	El objeto matemático y los significados pretendidos en el material de texto, son desarrollados brevemente.
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos de fracciones algebraicas se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.	x		Con contenidos de funciones, sistema de ecuaciones, etc.

Fuente: Godino (2011)

Referente a la idoneidad ecológica, respecto a la presentación de la estructura de las fracciones algebraicas en las tareas propuestas y desarrolladas se aprecia que a partir de un análisis a priori, las tareas en este nivel cumplen la mitad de los indicadores presentados (ver Tabla Nº 8), y se puede afirmar que posee una moderada idoneidad ecológica ya que existe relación entre los temas del material del texto oficial de cuarto año de secundaria 2012 y el DCN, también las fracciones algebraicas se relacionan con otros contenidos matemáticos. Asimismo, el uso de tecnologías está ausente en las tareas propuestas y el objeto matemático es desarrollado brevemente.

CAPÍTULO V: PROPUESTA DE CATEGORIZACIÓN DE TAREAS

En este apartado se presenta el análisis de dos objetos primarios de la configuración epistémica del EOS: procedimientos y propiedades, sobre fracciones algebraicas del libro oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012, de las actividades propuestas y desarrolladas a los estudiantes, para describirlos posteriormente. Se propone asimismo, la categorización de las tareas de acuerdo a la estructura que presentan. En este capítulo nos proponemos cumplir con nuestro objetivo específico de estudio "Determinar el nivel de exigencia cognitiva de las tareas matemáticas fracciones algebraicas del libro de texto en estudio".

5.1 Objetos primarios: procedimientos y propiedades

En el capítulo IV, se realizó la configuración epistémica y el análisis de las tareas matemáticas fracciones algebraicas, llegando a determinar que el lenguaje algebraico, los conceptos, propiedades, situación problemas y procedimientos son los mismos y que reiteradas veces se hace la aplicación en las tareas propuestas y desarrolladas. Para cumplir con nuestro objetivo específico "Determinar el nivel de exigencia cognitiva de las tareas matemáticas fracciones algebraicas del libro de texto en estudio", se tomó en cuenta los objetos primarios procedimientos y propiedades de la configuración epistémica (considerando el desarrollo de 22 tareas matemáticas del libro de texto en estudio), y a partir de ellos, se hizo evidente nuevos objetos que emergen en las prácticas matemáticas fracciones algebraicas, las cuales nos brindaron conceptos y estrategias matemáticas para determinar el nivel de exigencia cognitiva de las tareas que se proponen en el libro de texto en estudio, y clasificarlas en: tareas simples y tareas complejas que consisten en diferentes procesos de desarrollo en la solución de las fracciones algebraicas, de acuerdo a la categoría de Stein et al., (2000, citados en Cruz, 2009) quienes desarrollan la baja y alta demanda cognitiva de las tareas matemáticas. Asimismo, esta categorización se determinó con los aportes del sentido estructural, enfoque procedimental y estructural. Es por eso que, en este estudio se plantea la siguiente pregunta: ¿Qué objetos y procesos matemáticos intervienen al desarrollar las tareas con fracciones algebraicas de los libros de textos, en particular en el libro oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012 y cuál es el nivel de exigencia?

Para la categorización de las tareas propuestas en el texto de matemática de cuarto año de educación secundaria 2012, se tomó en cuenta la habilidad que debería desarrollar el alumno, según la definición del sentido estructural dada por Hoch (2007, citado en Novotná y Hoch, 2008) quien manifiesta que los estudiantes muestran sentido estructural para el álgebra si pueden:

1) Reconocer una estructura familiar en su forma más simple.

2) Tratar términos compuestos como una sola entidad.

3) Aplicar principio de sustitución al reconocer una estructura en una forma más compleja y escoger manipulaciones apropiadas para hacer un mejor uso de la estructura, habiendo identificado en primer lugar, los objetos matemáticos primarios *propiedades* y *procedimientos* en las configuraciones epistémicas.

Dicho lo anterior, para este estudio se presenta las siguientes definiciones que se propone a partir de las tareas propuestas y desarrolladas del material de texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012, de la siguiente manera:

5.2 Tareas Simples (TS)

Consisten en aplicar directamente las propiedades (diferencia de cuadrados, aspa simple, factor común monomio, mínimo común múltiplo) y al reducir la expresión algebraica se hace uso del valor numérico, operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de expresiones algebraicas.

Estas tareas simples presentan una baja demanda cognitiva, de acuerdo al modelo de tareas matemáticas de Stein et al., (1996, citados en Cruz, 2009) debido a que en los ejercicios propuestos y desarrollados son algorítmicos, usando procedimientos estándar aprendidos Molina (2010), similares a los ejercicios desarrollados centrándose en obtener una respuesta correcta más que en desarrollar la comprensión de las tareas, reproduciéndose consecutivamente las fórmulas, reglas, definiciones de memoria para ejecutar las tareas rutinarias.

Cabe indicar que las tareas simples fueron divididas en tres tareas simples, debido a las estrategias de solución que presentan en las tareas propuestas y desarrolladas en el material de texto.

Dicho lo anterior, presentamos a las tareas simples, de la siguiente manera:

a) Tarea Simple 1 (TS1): consiste en aplicar diferencia de cuadrados y/o el método de aspa simple, aspa simple doble especial en el numerador o en el denominador de una fracción, además se requiere factorizar coeficientes en esta tarea, tanto en el numerador como en el denominador. Luego se simplifica los factores comunes, para obtener una expresión reducida. Asimismo la tarea simple 1, está agrupada de tareas que contiene valor numérico de una y dos fracciones algebraicas, puesto que las operaciones se efectúan bajo las reglas aritméticas.

b) Tarea Simple 2 (TS2): está constituida por operaciones como adición, sustracción y división de fracciones algebraicas, en el que se apliquen diferencia de cuadrados, suma de cubos, método de aspa simple, factor común monomio en el numerador o denominador, propiedad distributiva y además el mínimo común múltiplo entre fracciones, para simplificar factores comunes. En esta tarea simple 2, las operaciones se efectúan entre dos fracciones algebraicas.

d) Tarea Simple 3 (TS3): está constituida por operaciones combinadas entre la adición, sustracción, multiplicación y/o división de fracciones, y fracciones algebraicas complejas en el numerador y denominador. Se aplica, diferencia de cuadrados, identidad de legendre, diferencia de cubos, factor común monomio, binomio al cuadrado, mínimo común múltiplo, racionalización, orden de operaciones entre más de dos fracciones, para reducir y simplificar términos semejantes.

Las tareas simples, entonces, radican en procesos de solución algorítmicas que limitan al estudiante a los procedimientos sin conexiones (tareas aprendidas por repetición debido a la ejercitación a través de cálculos mecánicos).

5.3 Tareas complejas (TC)

En el caso de fracciones algebraicas, éstas están constituidas por una estructura de tareas que contiene parámetros en el numerador y/o denominador, además, requiere agrupar términos para expresar como única entidad a los factores extraídos de manera que apliquen el principio de sustitución y convertirla en una tarea simple, asimismo para desarrollar el sentido estructural de los alumnos, se deben plantear tareas en las que el estudiante reconozca una estructura familiar en su forma más simple, según Hoch (2007, citado en Novotná y Hoch, 2008).

Además, estas tareas están categorizadas como tareas complejas porque se requiere prestar atención a las características particulares de las expresiones, según Molina (2010), por otro lado, se requiere de un pensamiento complejo y no algorítmico; es decir, los estudiantes deben comprender los conceptos, procedimientos y relaciones matemáticas, usándolos apropiadamente en la resolución de las tareas propuestas, estas tareas están dentro de las tareas que requieren alta demanda cognitiva para el estudiante, según Stein et al., (1996, citados en Cruz, 2009).

Dicho lo anterior, las tareas matemáticas se pueden agrupar de la siguiente manera, de acuerdo a las estrategias de solución que presentan:

a) Tarea compleja 1 (TC1): está constituida por tareas que requieren el uso de parámetros.

b) Tarea compleja 2 (TC2): está constituida por tareas que requieren el uso de principio de sustitución en las expresiones algebraicas incluyendo los parámetros.

c) Tarea compleja 3 (TC3): está constituida por tareas que requieren el uso de la traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico (incluyen las TC1, TC2).

Estas tareas exigen tareas de alta demanda cognitiva, donde el estudiante comprende las situaciones propuestas sobre las tareas fracciones algebraicas, las relaciona con los aprendizajes anteriores para evaluar y elaborar su propia estrategia de solución. Son tareas que requieren mayor atención a la estructura que presenta las fracciones algebraicas.

A continuación, las tareas han sido divididas en dos tablas: tareas simples y tareas complejas, tareas que han sido planteadas en el material de texto de matemática de cuarto año de educación secundaria 2012, distribuidas por el MINEDU. Asimismo, se presenta las tareas simples y complejas, que contienen ejercicios desarrollados y propuestos en el texto elegido, indicando las propiedades que se debe aplicar para obtener la tarea simplificada y los procedimientos argumentando el trabajo matemático en estudio.

5.4 Categorías de las tareas simples (TS)

Tal como definimos en 5.2 la tarea simple está orientada a ser desarrollada bajo algoritmos repetitivos y procedimientos aprendidos de otros ejercicios similares que implican tareas rutinarias. Es decir, éstas tareas exigen una baja demanda cognitiva para los estudiantes de matemática de cuarto año de educación secundaria.

En la Tabla Nº 9 se presenta 21 tareas matemáticas de fracciones algebraicas, que han sido clasificadas en tarea simple1, tarea simple 2 y tarea simple 3, de acuerdo a las estrategias de solución al ser desarrolladas.

Pero antes de presentar la Tabla Nº 9, se describe brevemente sobre las tareas simples:

La tarea simple 1 (TS1) contiene 10 tareas, de las cuales son tareas desarrolladas y propuestas en el material de texto. Se exige al estudiante que calcule el valor numérico de una fracción y simplifique fracciones algebraicas de una sola fracción.

La tarea simple 2 (TS2) contiene 4 tareas, de las cuales son tareas desarrolladas y propuestas para el estudiante. Se exige al estudiante simplificar fracciones algebraicas a partir de dos fracciones con operaciones de sustracción, adición y división.

La tarea simple 3 (TS3) contiene 7 tareas, de las cuales son tareas desarrolladas y propuestas para el estudiante. Se exige al estudiante a realizar operaciones combinadas con fracciones algebraicas (operaciones con sustracción, adición, multiplicación y división) entre tres a más fracciones.

A continuación, los ejercicios están distribuidos de la siguiente manera en la Tabla Nº 9:

Tabla N° 9: Tareas simples de fracciones algebraicas de las actividades propuestos y desarrollados en el libro de texto de cuarto año de educación secundaria (Minedu, 2012)

<table>
<tr><td colspan="2">Tarea Simple 1:
EJERCICIOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">1) Si $n = 2$, determina el valor numérico de las siguientes fracciones algebraicas:
a) $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$; b) $\frac{n^2-1}{2n+7} = \frac{2^2-1}{2(2)+7} = \frac{3}{11}$; c) $\frac{3-2n}{5n} = \frac{3-2(2)}{5(2)} = \frac{-1}{10}$;
d) $\frac{2+n^2}{n^3+1} = \frac{2+2^2}{2^3+1} = \frac{2+4}{8+1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$</td></tr>
<tr><td>PROPIEDADES</td><td>PROCEDIMIENTOS</td></tr>
<tr><td>Uso de las reglas aritméticas en términos de fracciones algebraicas.</td><td>Se reemplaza el valor numérico de “n” en cada fracción algebraica. Luego se suma, resta, multiplica, eleva al cuadrado, cubo algunos valores para determinar el valor numérico de las fracciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2) Determina el valor numérico de: $\frac{5x^2+7x+1}{4x^2-9}$ para $x = -2$.
Desarrollo:
$$\frac{5x^2+7x+1}{4x^2-9} = \frac{5(-2)^2+7(-2)+1}{4(-2)^2-9} = \frac{7}{7} = 1.$$</td></tr>
</table>

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Uso de las reglas aritméticas en términos de fracciones algebraicas.	Se reemplaza el valor numérico de “x” en la fracción algebraica. Luego se multiplica y eleva al cuadrado, para sumar y restar los valores y simplificar términos comunes.

3) Supón que dispones de una calculadora con una tecla especial que calcula el valor de $\frac{x}{x+1}$. Por ejemplo, si presionas “5” y luego la tecla especial, en pantalla observas $5/6$. ¿Qué fracciones obtendrías en cada caso si presionas los números $3, 5, 7, 9$ y 11?

Desarrollo:

De $\frac{x}{x+1}$ se obtiene: $\frac{3}{4}; \frac{5}{6}; \frac{7}{8}; \frac{9}{10}; \frac{11}{12}$.

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
	Con o sin el uso de la calculadora, al reemplazar los números en la fracción, se obtiene fracciones cuyos numeradores y denominadores son continuos.

4) Determina el valor numérico de la fracción $\frac{(x^2+5)(x^2+7x-9)}{(x^2+3x+1)(x^2+4x-4)}$ si $x = 2$.

Desarrollo:

$$\frac{(x^2+5)(x^2+7x-9)}{(x^2+3x+1)(x^2+4x-4)} = \frac{(2^2+5)(2^2+7(2)-9)}{(2^2+3(2)+1)(2^2+4(2)-4)} = \frac{(4+5)(4+14-9)}{(4+6+1)(4+8-4)} = \frac{9.9}{11.8} = \frac{81}{88}$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Uso de las reglas aritméticas en términos de fracciones algebraicas.	Se reemplaza el valor numérico de “x” en la fracción algebraica. Luego se eleva al cuadrado y multiplica los valores para sumar y restar, obteniendo así otro valor numérico.

5) Determina el valor numérico de $\frac{(x-5)(5x^3+1)}{(9-3x^3)(x+1)} + \frac{(8x^5-2)(-0,3x+2)}{(2-3x)(x+1)}$ si $x = 2$

Desarrollo:

$$\frac{(2-5)(5(2)^3+1)}{(9-3(2)^3)(2+1)} + \frac{(8(2)^5-2)(-0,3(2)+2)}{(2-3(2))(2+1)} = \frac{(-3)(41)}{(-15)(3)} + \frac{(254)(1,4)}{(-4)(3)} = \frac{41}{15} + \frac{88,9}{-3} = 2,73 - 29,63$$
$$= -26,90$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Uso de las reglas aritméticas en términos de fracciones algebraicas, simplificación de términos comunes, división de fracción.	Se reemplaza el valor numérico de “x” en la fracción algebraica. Luego de elevar al cubo y al exponente cinco, se multiplican con los coeficientes respectivos, para efectuar operaciones aritméticas y así obtener un valor numérico de la fracción.

6) Si $\frac{12+r-r^2}{r^3+3r^2}$, determina la veracidad de la información cuando $r = 5$ entonces es $-1/25$.

Desarrollo:

$$\frac{12+r-r^2}{r^3+3r^2} = \frac{12+5-5^2}{5^3+3.5^2} = \frac{17-25}{125+75} = \frac{-8}{200} = \frac{-1}{25}$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Uso de las reglas aritméticas en términos de fracciones algebraicas, simplificación de términos comunes, división de fracción.	Se reemplaza el valor numérico de “*r*” en la fracción algebraica. Luego de elevar al cuadrado y al cubo el valor de *r*, se procede a sumar y restar en la fracción para obtener un valor numérico.

7) Simplifica la expresión algebraica $\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, si $x \notin \{-1/2;\ 1\}$

Desarrollo:

$$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{(2x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{x+1}{2x+1}$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa diferencia de cuadrados, método de aspa simple y simplificación del factor común.	Se aplica diferencia de cuadrados. Luego, aspa simple en el denominador y se expresa como el producto de dos factores primos. Al final se simplifica los términos comunes entre el numerador y denominador.

8) Simplifica $\frac{(x^2-1)(x^2+2x-3)}{(x^2-2x+1)(x^2+4x+3)}$

Desarrollo:

$$\frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}\cancel{(x+3)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-1)}\cancel{(x+3)}\cancel{(x+1)}} = 1$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa diferencia de cuadrados, método de aspa simple y simplificación de factor común.	Se aplica diferencia de cuadrados. Luego método de aspa simple en el numerador y denominador, expresando como el producto de dos factores primos. Al final se simplifica los términos comunes entre el numerador y denominador. Observamos también que en el problema no presenta una restricción en el denominador ($x \notin \{1, -3, -1\}$)

9) Simplifica la siguiente expresión $\frac{(x^2-9x+20)(x^2+6x+5)}{(25-x^2)(x^2-3x-4)}$

Desarrollo:

$$\frac{(x-5)\cancel{(x-4)}\cancel{(x+1)}\cancel{(x+5)}}{(5-x)\cancel{(5+x)}\cancel{(x-4)}\cancel{(x+1)}} = \frac{\cancel{(x-5)}}{-\cancel{(x-5)}} = \frac{1}{-1} = -1$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa diferencia de cuadrados, el método de aspa simple y simplificación de factor común.	Se aplica diferencia de cuadrados y el método de aspa simple en el numerador y denominador para simplificar los términos comunes. Luego se identifica que las expresiones $(x-5)$ y $(5-x)$ pueden simplificarse previamente factorizando el signo negativo de $(5-x)$. Se observa también que el problema no presenta una restricción en el denominador $(x\notin\{5,-5,4,-1\})$.

10) Se pide a Carlos y Rosa que simplifiquen la expresión $\frac{12x^2-12}{16(x+3)(x+1)}$. Él concluyó lo siguiente: $\frac{12x^2-12}{16(x+3)(x+1)}=\frac{3(x^2-1)}{4(x+3)(x+1)}$; luego Rosa simplificó y obtuvo de $\frac{12x^2-12}{16(x+3)(x+1)}=\frac{3(x-1)}{4(x+3)}$.

Desarrollo de Carlos:

$$\frac{12x^2-12}{16(x+3)(x+1)}=\frac{\cancel{12}(x^2-1)}{\cancel{16}(x+3)(x+1)}=\frac{3(x^2-1)}{4(x+3)(x+1)}$$

Desarrollo de Rosa:

$$\frac{12x^2-12}{16(x+3)(x+1)}=\frac{12(x^2-1)}{16(x+3)(x+1)}=\frac{\cancel{12}(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{16}(x+3)\cancel{(x+1)}}=\frac{3(x-1)}{4(x+3)}$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa factor común monomio, diferencia de cuadrados y simplificación de factor común.	Para simplificar y verificar el procedimiento correcto se factoriza el término común monomio entre las expresiones del numerador. Se identifica que el factor encontrado puede representarse en dos factores primos aplicando diferencia de cuadrados. Luego se simplifica los términos comunes entre el numerador y denominador. El problema no presenta la restricción en el denominador $(x\notin\{-3,-1\})$. En este ejercicio se pide determinar si es correcto o no lo que hizo Carlos, habiendo simplificado sólo los términos numéricos. También presenta el resultado de Rosa, que coincide con la respuesta correcta. Se le pide que manifieste si es correcto y porqué.

Tarea Simple 2:

EJERCICIO

11) Efectúa $\frac{2x-2}{2x^2-50} \div \frac{3x+3}{x^2-4x-5}$ si se sabe que está definida en $\mathbb{R}$.

Desarrollo:

$$\frac{2x-2}{2x^2-50} \div \frac{3x+3}{x^2-4x-5} = \frac{2(x-1)}{2(x^2-25)} \div \frac{3(x+1)}{(x-5)(x+1)} = \frac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}\cancel{(x-5)}(x+5)} \cdot \frac{\cancel{(x-5)}\cancel{(x+1)}}{3\cancel{(x+1)}} = \frac{x-1}{3(x+5)}$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa diferencia de cuadrados, factor común monomio, división de fracciones algebraicas y simplificación de factores comunes.	Se factoriza el término común monomio entre el numerador y denominador para aplicar diferencia de cuadrados. Luego se invierte la fracción de división a multiplicación de fracciones para simplificar los términos comunes entre el numerador y denominador. El problema no presenta una restricción en el denominador ($x \notin \{5, -5, -1\}$).

12) Resuelve $\frac{5(x+1)^2}{x^5+x^4} \div \frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2}$ y simplifica el resultado si $x \notin \{-2;\ -1;\ 0\}$.

Desarrollo:

$$\frac{5(x+1)^2}{x^5+x^4} \div \frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2} = \frac{5(x+1)(x+1)}{x^4(x+1)} \div \frac{(x+2)(x+1)}{x^2(x+2)} = \frac{5\cancel{(x+1)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{x^4}\cancel{(x+1)}} \cdot \frac{\cancel{x^2}\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+2)}} = \frac{5}{x^2}$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa factor común monomio, aspa simple, división de fracciones y simplificación de factores comunes.	Se factoriza los términos comunes en el denominador, luego se aplica aspa simple en el numerador de la segunda fracción. Se simplifica los factores comunes en la primera y segunda fracción. Luego se invierte la segunda fracción para multiplicar y simplificar los factores comunes en las fracciones algebraicas.

13) Efectúa $\frac{6x^2+5x-6}{2x^2+5x+3} - \frac{4x^2-17x+4}{4x^2+3x-1}$ si se sabe que está definida en $\mathbb{R}$.

Desarrollo:

$$\frac{6x^2+5x-6}{2x^2+5x+3} - \frac{4x^2-17x+4}{4x^2+3x-1} = \frac{\cancel{(2x+3)}(3x-2)}{\cancel{(2x+3)}(x+1)} - \frac{\cancel{(4x-1)}(x-4)}{\cancel{(4x-1)}(x+1)} = \frac{3x-2}{x+1} - \frac{(x-4)}{x+1}$$

$$= \frac{3x-2-x+4}{x+1} = \frac{2x+2}{x+1} = \frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = 2$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa aspa simple, mínimo común múltiplo, factor común monomio, resta de fracciones algébricas con el mismo denominador y simplificación de factor común.	Se aplica aspa simple en el numerador y denominador. Luego al obtener dos fracciones algebraicas se simplifica los factores comunes y se expresa en una sola fracción porque tienen el mismo denominador. Se suma y resta los términos semejantes en el numerador, para luego simplificar los términos comunes. El problema no presenta una restricción en el denominador ($x \notin \{-3/2, -1, ¼\}$).

14) Efectúa $\frac{x^2-1}{x^2+x-2} + \frac{(x-1)(x+1)}{2x+2}$ y simplifica el resultado si $x \notin \{-2, -1, 1\}$.

Desarrollo:

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2} + \frac{(x-1)(x+1)}{2x+2} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)} + \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{2\cancel{(x+1)}} = \frac{(x+1)}{x+2} + \frac{(x-1)}{2} =$$

$$= \frac{2(x+1)+(x+2)(x-1)}{2(x+2)} = \frac{2x+\cancel{2}+x^2+x-\cancel{2}}{2(x+2)} = \frac{x^2+3x}{2(x+2)} = \frac{x(x+3)}{2(x+2)}$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa diferencia de cuadrados, método de aspa simple, factor común monomio, mínimo común múltiplo, propiedad distributiva y simplificación de factor común.	Se aplica diferencia de cuadrados, aspa simple, factor común monomio; para simplificar los factores comunes en cada fracción algebraica. Luego se aplica mínimo común múltiplo en la suma de fracciones algebraicas, donde en el numerador se elimina términos semejantes para simplificar los términos comunes en la fracción reducida.

Tarea Simple 3:

EJERCICIO

15) Realiza las operaciones entre fracción algebraicas definidas en $\mathbb{R}$.

$$\frac{-9}{x^2+x-12} \div \frac{x-4}{x^2-16} - \frac{4}{x-8}$$

Desarrollo:

$$\frac{-9}{x^2+x-12} \div \frac{x-4}{x^2-16} - \frac{4}{x-8} = \frac{-9}{(x+4)(x-3)} \cdot \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{(x-4)}} - \frac{4}{x-8} =$$

$$= \frac{-9}{\cancel{(x+4)}(x-3)} \cdot \frac{\cancel{x+4}}{1} - \frac{4}{x-8} = \frac{-9}{(x-3)} - \frac{4}{(x-8)} = \frac{-9x+72-4x+12}{(x-3)(x-8)} = \frac{-13x+84}{(x-3)(x-8)} =$$

$$= \frac{-13(x-6)}{(x-3)(x-8)}$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa diferencia de cuadrados, aspa simple, factor común monomio, mínimo común múltiplo, división de fracciones algebraicas y simplificación de factor común.	Se aplica diferencia de cuadrados aspa simple, luego se invierte la segunda fracción para multiplicar y simplificar las fracciones algebraicas. Una vez que se obtenga una sola fracción algebraica, se aplica el mínimo común múltiplo en la resta de fracciones, luego se factoriza el término común monomio. El problema no presenta una restricción en el denominador ($x \notin \{-4,3,4,-8\}$).

16) Realiza las operaciones entre fracción algebraicas definidas en ℝ.

$$\frac{9x^2y}{3x}-\frac{5x^2y}{3x}+\frac{4x^2y^2}{3x^2}\div\frac{5y}{2x}$$

Desarrollo:

$$\frac{9x^2y}{3x}-\frac{5x^2y}{3x}+\frac{4x^2y^2}{3x^2}\div\frac{5y}{2x}=\frac{9x^2y-5x^2y}{3x}+\frac{4\cancel{x^2}y^2}{3\cancel{x^2}}.\frac{2x}{5y}=\frac{4x^2y}{3x}+\frac{8\cancel{x^2}\cancel{y}^2x}{15\cancel{x^2}\cancel{y}}=\frac{4xy}{3}+\frac{8yx}{15}=$$

$$=\frac{20xy+8xy}{15}=\frac{28xy}{15}$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa mínimo común múltiplo, suma y diferencia de términos semejantes, división de fracciones algebraicas y simplificación de factor común.	Se procede a restar las fracciones algebraicas homogéneas. También se invierte la fracción que divide a otra fracción para multiplicarlos y simplificar términos comunes, luego se procede a sumar fracciones aplicando previamente el mínimo común múltiplo y representarlos como una mínima expresión algebraica. El problema no presenta una restricción en el denominador ($x \notin \{0\}$).

17) Realiza las operaciones entre fracción algebraicas definidas en ℝ.

$$\frac{8mn}{3m}.\frac{2mn^2}{9n}+\frac{4m^3n}{9mn}\div\frac{3m}{5n^2}$$

Desarrollo:

$$\frac{8mn}{3m}.\frac{2mn^2}{9n}+\frac{4m^3n}{9mn}\div\frac{3m}{5n^2}=\frac{16\cancel{m}^2\cancel{n}^3}{27\cancel{m}\cancel{n}}+\frac{20\cancel{m}^3\cancel{n}^3}{27\cancel{m}^2\cancel{n}}=\frac{16mn^2}{27}+\frac{20mn^2}{27}=\frac{36mn^2}{27}=\frac{4mn^2}{3}$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa multiplicación, división y suma de fracciones algebraicas, mínimo común múltiplo y simplificación de factor común.	Se simplifica términos comunes entre el numerador y denominador, al multiplicar y dividir fracciones algebraicas. Luego se suma los numeradores de las fracciones porque tienen denominadores iguales y se simplifica los términos comunes obtenidos. El

	problema no presenta una restricción en el denominador $(m, n \notin \{0\})$.

18) Realiza las operaciones entre fracción algebraicas definidas en ℝ.

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} \div \left(\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}\right)$$

Desarrollo:

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} \div \left(\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}\right) = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-1)} \div \left(\frac{x}{(x-1)(x+1)} + \frac{1(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right) =$$

$$\frac{(x+1)}{(x-1)} \div \left(\frac{x+(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right) = \frac{(x+1)}{\cancel{(x-1)}} \cdot \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(2x-1)} = \frac{(x+1)^2}{2x-1}$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa diferencia de cuadrados, método de aspa simple, simplificación de factores comunes, mínimo común múltiplo, suma y división de fracciones algebraicas	Se aplica diferencia de cuadrados, aspa simple; para simplificar los factores comunes en la fracción algebraica. Luego se aplica mínimo común múltiplo en la suma de fracciones algebraicas para sumar los términos en el numerador. Se expresa la división en su inversa (multiplicación) para simplificar los factores comunes y obtener una fracción algebraica irreductible. El problema no presenta una restricción en el denominador $(x \notin \{-1, 1\})$.

19) Efectúa $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{1-x^2}$ si se sabe que está definida en ℝ.

Desarrollo:

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{1-x^2} = \frac{(x-1)-(1+x)}{(1+x)(x-1)} - \frac{2x}{1-x^2} = \frac{x-1-1-x}{(1+x)(x-1)} - \frac{2x}{(1-x)(1+x)} =$$

$$= \frac{-2}{(1+x)(x-1)} + \frac{2x}{(x-1)(1+x)} = \frac{-2+2x}{(1+x)(x-1)} = \frac{2(-1+x)}{(1+x)(x-1)} = \frac{2\cancel{(x-1)}}{(1+x)\cancel{(x-1)}} = \frac{2}{(x+1)}$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa diferencia de cuadrados, factor común monomio, mínimo común múltiplo y simplificación de factor común.	Se aplica el mínimo común múltiplo en las fracciones, luego se procede a sumar y restar términos semejantes en el numerador. Se factoriza el término común monomio en el numerador y se aplica diferencia de cuadrados en el denominador para simplificar los factores comunes en la fracción algebraica. El problema no presenta una restricción en el denominador $(x \notin \{-1, 1\})$.

20) Cuando Mario simplificó la expresión:

$\frac{x^3}{x^2-y^2} + \frac{y^3}{y^2-x^2} + \frac{xy}{x+y}$ obtuvo $(x - y)$ como valor final. Teresa le dijo que había cometido un error y que el resultado era $(x + y)$. ¿Quién de los dos tuvo razón? Fundamenta tu respuesta.

Desarrollo:

$$\frac{x^3}{x^2-y^2}+\frac{y^3}{y^2-x^2}+\frac{xy}{x+y}=\frac{x^3}{x^2-y^2}-\frac{y^3}{x^2-y^2}+\frac{xy}{x+y}=\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}+\frac{xy}{x+y}=$$

$$=\frac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}{\cancel{(x-y)}(x+y)}+\frac{xy}{x+y}=\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}+\frac{xy}{x+y}=\frac{x^2+xy+y^2+xy}{x+y}=$$

$$=\frac{x^2+2xy+y^2}{x+y}=\frac{(x+y)^{\cancel{2}}}{\cancel{x+y}}=x+y$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa diferencia de cubos, diferencia de cuadrados, mínimo común múltiplo, binomio al cuadrado y simplificación de factor común.	Se factoriza el signo del denominador de la segunda fracción para restar las dos primeras fracciones homogéneas. Se aplica diferencia de cubos en el numerador de dicha fracción formada, luego se simplifica el factor común en el numerador y denominador. Del resultado obtenido, se suma con la siguiente fracción algebraica ya que son fracciones homogéneas. Al sumar en el numerador se verifica que la expresión es un trinomio cuadrado perfecto y se expresará como un binomio al cuadrado para simplificar el numerador y denominador los factores comunes. El problema no presenta una restricción en el denominador $(x \notin \{y, -y\})$.

21) Al simplificar $\frac{x+1+\frac{1}{x+3}}{x-\frac{x-4}{x+5}}$, determina la veracidad si el numerador es $(x+5)$.

Desarrollo:

$$\frac{x+1+\frac{1}{x+3}}{x-\frac{x-4}{x+5}}=\frac{\frac{(x+1)(x+3)+1}{x+3}}{\frac{x(x+5)-(x-4)}{x+5}}=\frac{\frac{x^2+4x+3+1}{x+3}}{\frac{x^2+5x-x+4}{x+5}}=\frac{\frac{\cancel{x^2+4x+4}}{x+3}}{\frac{\cancel{x^2+4x+4}}{x+5}}=\frac{x+5}{x+3}$$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa mínimo común múltiplo, producto de binomios con un término en común, división de fracciones algebraicas (producto de extremos y medios).	Se efectúa el mínimo común múltiplo en el numerador y denominador para expresarlos como una fracción simple, luego se aplica producto de binomios con un término en común, para sumar términos semejantes y simplificar los factores comunes en la división, al obtener el producto de extremos y medios. El problema

	no presenta una restricción en el denominador ($x \notin \{-3, -5\}$).

Fuente: Elaboración propia.

Después de presentar las tareas simples, y clasificar en tarea simple 1, tarea simple 2 y tarea simple 3, de acuerdo a la aplicación de los diferentes conceptos y estrategias matemáticos; desarrollamos a continuación el análisis de las tareas simples.

Análisis de las prácticas matemáticas de las tareas simples.

Luego de realizar la configuración epistémica (ver Tabla N° 4) de las tareas de matemáticas propuestas y desarrolladas en el material de texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012, se identificó en primer lugar, los objetos matemáticos primarios *propiedades* y *procedimientos* en las configuraciones para analizar dichas tareas y verificar (a través de éstos objetos) si se exige trabajar con expresiones complejas (no simples) aplicando el principio de sustitución para convertirla en una expresión simple.

Dentro del bloque de tareas propuestas y desarrolladas en el material de texto, se encontró 21 tareas simples propuestas para el estudiante, de 22 tareas en total (ver Tabla N° 9). Estas tareas simples, fueron divididas en tres tareas: tarea simple 1, tarea simple 2 y tarea simple 3, de las cuales se requieren la aplicación de procedimientos algorítmicos, mecánicos y repetitivos, tales como: mínimo común múltiplo, producto de binomios con un término en común, diferencia de cubos, factor común, binomio al cuadrado, método de aspa simple, simplificación de factores comunes, factor común monomio, suma, resta, multiplicación y división de fracciones algebraicas, propiedad distributiva, resta de fracciones algébricas con el mismo denominador, reglas aritméticas en términos de fracciones algebraicas.

En esta parte del trabajo podemos señalar que las tareas simples no presentan exigencias en el desarrollo del principio de sustitución. Estas tareas son categorizadas como tareas de baja demanda cognitiva, que están enfocadas a desarrollarse de manera algorítmicas, mecánica y requiere aplicación directa de propiedades y estrategias ya identificadas, para reducir las fracciones algebraicas. Se emplean en su gran mayoría procedimientos estándar aprendidos sin atender a las características particulares de las expresiones con que el estudiante puede trabajar, limitándose a la resolución de problemas del mismo tipo, de acuerdo a los procedimientos que aprende el estudiante.

En su gran mayoría 10 de 22 tareas están categorizadas dentro de la tarea simple 1, ya que cinco de ellas implica la solución de fracciones algebraicas al determinar el valor numérico de una fracción y otra de la suma de dos fracciones algebraicas aplicando las reglas aritméticas para sumar y restar fracciones. Luego, 4 de las 10 tareas requieren la simplificación de factores comunes, diferencia de cuadrados y método de aspa simple, procedimientos que tienen las mismas estrategias para resolverlas. Asimismo, en tres tareas no presentan la restricción de "*x*" en el denominador de las fracciones que evitarían anularlos.

En la tarea simple 2, se agrupan 4 de 22 tareas que se requiere sumar, restar y dividir dos fracciones algebraicas, de las cuales se resuelven aplicando diferencia de cuadrados, método de aspa simple, factor común monomio en el numerador o denominador, propiedad distributiva, simplificación de factor común y además el mínimo común múltiplo. De este grupo, dos tareas presentan división de fracciones algebraicas, otra fracción con resta de fracciones algebraicas y por último la suma de dos fracciones algebraicas. En sólo dos de ellas hace mención de la restricción de "*x*" y sus respectivos valores que los denominadores no pueden tomar para evitar anularlos.

La tarea simple 3, contiene 7 de 22 tareas que requiere sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones algebraicas. De las cuales 4 de las 7 tareas, contienen tres fracciones algebraicas; en dos de ellas contienen cuatro fracciones algebraicas y en una de ellas se propone al estudiante una tarea que requiere aplicar fracción compleja simple. En estas tareas, tampoco presenta la restricción de "*x*" en el denominador.

Después de desarrollar todas las tareas simples y de categorizarlas en la Tabla Nº 9, nos damos cuenta que el procedimiento de estas tareas sigue siendo rutinarias y algorítmicas. De todas estas tareas simples, es necesario aplicar estrategias tales como: operaciones combinadas entre la adición, sustracción, multiplicación y/o división de fracciones algebraicas, fracciones algebraicas complejas en el numerador y denominador, diferencia de cuadrados, diferencia de cubos, método de aspa simple, factor común monomio, binomio al cuadrado, mínimo común múltiplo, simplificación de factores comunes, orden de operaciones entre más de dos fracciones, para reducir y simplificar términos semejantes.

Según el enfoque procedimental, estas tareas exigen a los estudiantes la aplicación de algoritmos y procedimientos rutinarios y aprendidos sin analizarlas previamente ni atender a las características particulares de las expresiones con las que el estudiante está trabajando. Esto es, debido a que en las tareas matemáticas se emplea un procedimiento estándar aprendido tal como lo indica Molina (2010). Asimismo, estas tareas simples en su conjunto, exigen una baja demanda cognitiva para los estudiantes, pues no exigen la comprensión de las nociones matemáticas que se involucra en las actividades presentadas en el material de texto, requieren ser desarrolladas reproduciendo datos, reglas, fórmulas o definiciones ya aprendidas y se evidencia que en 2 de 22 tareas, sólo se pide argumentar, sin dar ejemplos previos a esta tarea.

5.5 Categorías de las tareas complejas (TC)

Como se define en 5.3, la tarea compleja está orientada a ser desarrollada por los estudiantes, con procedimientos que requieren de un pensamiento no algorítmico, ni rutinarios, es decir, en las prácticas matemáticas existe comprensión de ideas, conceptos matemáticos y se aprecia conexiones entre conceptos para desarrollar un nivel profundo de comprensión. Esta tarea requiere de esfuerzo cognitivo, para resolverlas y desarrollarlas con éxito. Dentro de esta categoría, se señaló también tres clases de tareas complejas, tarea compleja 1, tarea compleja 2 y tarea compleja 3, de acuerdo a las estrategias de solución presentadas en el desarrollo de las tareas matemáticas sobre fracciones algebraicas en el texto oficial de estudio.

En esta categoría, sólo 1 de 22 tareas matemáticas del texto exige alta demanda cognitiva.

Tabla N° 10: Tareas complejas 1 de fracciones algebraicas de las actividades propuestos en el libro de texto de cuarto año de educación secundaria (Minedu, 2012)

TC1: EJERCICIO
22) Simplifica la siguiente expresión $\frac{x^2-a^2+2a-1}{x^2-2ax+a^2-1}$. Desarrollo: $\frac{x^2-a^2+2a-1}{x^2-2ax+a^2-1}=\frac{x^2-(a^2-2a+1)}{(x^2-2ax+a^2)-1}=\frac{x^2-(a-1)^2}{(x-a)^2-1}=\frac{(\cancel{x-a+1})(x+a-1)}{(x-a-1)(\cancel{x-a+1})}=\frac{(x+a-1)}{(x-a-1)}$

PROPIEDADES	PROCEDIMIENTOS
Se usa diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, simplificación de factor común y binomio al cuadrado.	Se observa el parámetro "a" en la fracción, y se agrupa adecuadamente los términos en el numerador y denominador. En la fracción se observa el trinomio cuadrado perfecto, donde previamente se factoriza el signo del trinomio del numerador. Luego de expresar el trinomio a un binomio al cuadrado en la fracción, se obtiene diferencia de cuadrado en el numerador y denominador, para obtener factores comunes y simplificarlos. El problema no presenta una restricción en el denominador ($x \notin \{a+1, a-1\}$).

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla Nº 10 se observa que para determinar el ejercicio en esta categoría ha sido necesario apoyarnos en dos objetos primarios de la configuración del EOS: propiedades y procedimientos, para analizar el desarrollo de las tareas matemáticas.

Análisis de las prácticas de las tareas complejas

Dentro del bloque de tareas propuestas y desarrolladas en el material de texto de matemática de cuarto año de secundaria 2012, se encontró una sola tarea compleja 1 propuesta para el estudiante, de 22 tareas en total. En la fracción algebraica de la tarea n° 22 (ver Tabla N° 10) se observa que existe un parámetro que requiere ser convertida a una tarea simple para poder reducirla y simplificarla. No sólo requiere de procedimientos a seguir aplicando diferencia de cuadrados, agrupación de términos, trinomio cuadrado perfecto y factor común, sino que es necesario comprender la situación propuesta, atender las características particulares de la fracción algebraica, analizar la tarea para representarla de otra manera, construir su propia estrategia de resolución al desarrollar y buscar solución al problema matemático para poder aplicar principio de sustitución. Esta tarea compleja está caracterizada dentro de una alta demanda cognitiva para el estudiante, porque es un problema con procedimientos que requieren conexión con aprendizajes anteriores y los adquiridos, comprenderlas y relacionarlas para completar con éxito la tarea matemática.

Dentro de esta categorización no se encontró las tareas complejas 2, ni las tareas complejas 3, ya que en el material de texto no presentan tareas que están constituidas por el uso de principio de sustitución y el uso de la traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, en las fracciones algebraicas.

Consideramos entonces que el estudiante se enfrenta en su gran mayoría a tareas simples y no complejas; no se le exige trabajar con el principio de sustitución en las fracciones algebraicas para convertirlas a una expresión simple. El nivel de exigencia de las tareas matemáticas del material de texto, es un nivel de baja cognitiva puesto que en 21 tareas de 22, se aplican estrategias, conceptos repetitivos y algorítmicos. Todas estas tareas están señalados dentro de la categoría de tareas simples, y esto nos lleva a mencionar que las tareas propuestas en el material de texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012 presentan sólo actividades que no ayudan a los estudiantes a desarrollar la capacidad analítica y argumentativa.

CONCLUSIONES

En relación con la pregunta que nos planteamos en este estudio ¿Qué objetos y procesos matemáticos intervienen al desarrollar las tareas con fracciones algebraicas de los libros de textos, en particular en el libro oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012 y cuál es el nivel de exigencia?, podemos señalar que en la resolución de las tareas matemáticas sobre fracciones algebraicas, en el análisis realizado se observa que se deben aplicar los objetos y procesos matemáticos, tales como: método de aspa simple, factor común monomio, mínimo común múltiplo, diferencia de cuadrados, simplificación de factores comunes; entre otros, determinando que dichas tareas son meramente algorítmicos, rutinarios, enfocados a un proceso procedimental, en términos del EOS, y con baja demanda cognitiva propuesta a los estudiantes según Stein, porque están constituidas por tareas de memorización, reproducción de reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidas en clase, a la ejecución de éstas tareas se les designa como tareas con procedimientos sin conexión. En términos de PISA, estas tareas están dentro de un nivel que requieren ser desarrolladas con procedimientos rutinarios, y según el reporte de resultados en Matemática 2015, Perú se encuentra en el nivel 1 de desempeño de Matemática, lo cual quiere decir que los estudiantes realizan procedimientos rutinarios, (Ministerio de Educación, 2017).

Al considerar el primer objetivo específico en nuestra investigación: “Establecer los significados institucionales del objeto matemático fracción algebraica, en particular el de referencia y el pretendido para valorar su grado de representatividad”, nos propusimos revisar los materiales de textos de matemática de educación superior, que presentan la formalización matemática desde la definición de las expresiones algebraicas hasta las fracciones algebraicas. Luego, encontramos tareas desarrolladas en el material de referencia sobre nuestro objeto de estudio, que están bien argumentadas explicando el proceso de solución. Consideramos que en las prácticas matemáticas de los textos de nivel superior se activan los objetos primarios (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que a su vez permite desarrollar la capacidad de análisis en el estudiante, y llevar a cabo un trabajo más significativo y productivo con las fracciones algebraicas. Es así que genera alta idoneidad epistémica, según el EOS. Por otro lado, cuando revisamos el material de texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria (2012) y determinamos el significado pretendido de fracciones algebraicas, nos percatamos que existe ausencia de argumentos (en la gran mayoría de las tareas) de situaciones problemas contextualizados y exceso de procesos de solución algorítmica repetitivos en las tareas desarrolladas.

Además, encontramos que la estructura y orden que presenta las fracciones algebraicas en el material pretendido difiere del orden y estructura que presenta el objeto matemático fracciones algebraicas en los materiales de referencia, pudiendo crear conflicto cognitivo en el estudiante al resolver las tareas propuestas (ver Tabla N°5; p. 69).

Para el segundo objetivo específico "Identificar los conceptos y procesos matemáticos que intervienen al desarrollar las tareas matemáticas que involucran el tema de fracciones algebraicas", elaboramos la configuración epistémica de las tareas fracciones algebraicas respecto a las tareas propuestas y desarrolladas en el libro, encontrando que las propiedades (tales como: operaciones combinadas entre la adición, sustracción, multiplicación y/o división de fracciones algebraicas, diferencia de cuadrados, método de aspa simple, factor común monomio, binomio al cuadrado, mínimo común múltiplo, simplificación de factores comunes) que se aplican en dichas tareas se hace cada vez más repetitiva, se reproduce los conocimientos, las reglas, fórmulas, datos, definiciones que demanda el mismo proceso de solución, es decir las tareas exigen baja demanda cognitiva para el estudiante, según Stein, generando una baja idoneidad epistémica, además en la mayoría de las tareas de fracciones algebraicas no presenta una restricción en el denominador.

Sobre el tercer objetivo "Determinar el nivel de exigencia cognitiva de las tareas matemáticas fracciones algebraicas del libro de texto en estudio", hicimos la descripción y el desarrollo de las tareas propuestas sobre fracciones algebraicas del libro de texto, considerando los objetos primarios: procedimientos y propiedades, componentes de la configuración epistémica (EOS), para luego categorizar en tareas simples y tareas complejas de acuerdo a la demanda cognitiva de Stein, enfoque procedimental, enfoque estructural y los descriptores del sentido estructural, según Hoch (2007, citado en Novotná y Hoch, 2008) y Molina (2010).

Asimismo, determinamos que las tareas del material de texto son tareas simples y de baja demanda cognitiva porque están enfocadas a ser desarrollados de manera algorítmica, con procedimientos sin conexión, es decir son tareas que requieren ser reproducidos, aprendidos y repetidos sin analizar, examinar y ser comprendidos; el 90% de las tareas están clasificadas dentro de tareas simples. También, en las tareas del material de texto se propone una tarea compleja y de alta demanda cognitiva, ya que se requiere hacer énfasis en el parámetro que implica analizar, reflexionar, prestar atención a los procedimientos para desarrollar un nivel de comprensión de conceptos para construir estrategias de solución, y reducir las fracciones algebraicas. Esta tarea requiere relacionar lo aprendido con nuevos aprendizajes, considerando así procedimientos con conexión.

También, en la página 105 del texto, al inicio de las actividades se propone al estudiante una tarea compleja, es decir tarea de fracciones algebraicas con parámetros que no han sido resueltos ni demostrados previamente en el texto; se pide resolver tareas definidas en "$\mathbb{R}$" más no indica lo que "$\mathbb{R}$" refiere, luego el texto propone una tarea que enfatiza la agrupación de fracciones con paréntesis.

Por último, en relación al objetivo general de nuestra investigación "analizar las tareas en el libro oficial de matemática de cuarto año de educación secundaria 2012, en relación con el tema fracciones algebraicas", concluimos que los objetos matemáticos como: lenguaje, situaciones, propiedades, procedimientos, conceptos y argumentos, intervienen en la práctica matemática de manera desarticulada; no se complementan entre ellos, las situaciones-problemas en el texto en la gran mayoría son descontextualizados y están orientados a ser desarrollados algorítmicamente. El lenguaje que presenta es algebraico; las propiedades y los procedimientos que se usan son repetitivos en su aplicación, los conceptos y las definiciones tienen poca rigurosidad matemática, también presenta ausencia de argumentos en las tareas matemáticas, lo cual consideramos que puede causar consecuencias para no desarrollar estrategias y capacidad matemática (razonamiento, demostración, comunicación matemática) en el estudiante.

Finalmente, presentamos algunas sugerencias que se pueden tomar en cuenta para futuras investigaciones:

En los materiales de texto oficial de matemática sugerimos proponer tareas matemáticas contextualizadas sobre fracciones algebraicas, planteando situaciones problemas en el contexto intra matemáticos y extra matemáticos donde se encuentren presente los objetos primarios de la configuración epistémica del EOS (lenguaje, situaciones, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) para que exista interrelación entre el lenguaje algebraico, gráfico, verbal y simbólico; logrando así desarrollar las habilidades matemáticas en el estudiante.

Asimismo, en los materiales de texto oficial de matemática sugerimos incluir tareas complejas (tanto en las tareas desarrolladas y propuestas) que impliquen por ejemplo, promover la aplicación del principio de sustitución en las expresiones sobre fracciones algebraicas.

Por otro lado, recomendamos considerar las propuestas y sugerencias de Molina (2010) quien señala que para promover el enfoque estructural en los estudiantes, es necesario plantear a los alumnos situaciones problemas, como: “sabiendo que la expresión que ha resultado al simplificar es $\frac{x+1}{x-1}$ ¿Cuál puede ser la fracción algebraica de partida?”. Esta propuesta sería como inicio de partida para promover discusiones dentro de un grupo de estudiantes con fin de acceder a conocimientos estudiados y experiencias relevantes de los estudiantes que se les permita analizar, examinar y argumentar las tareas propuestas.

Queda pendiente y abierta la posibilidad de investigar más a fondo la dimensión cognitiva, ecológica, interaccional, mediacional y emocional, para que se pueda valorar de manera integral los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre fracciones algebraicas.

REFERENCIAS

Arya, J. y Ladner, R. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía.* Naucalpan de Juárez: Pearson Educación.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). "Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas". *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas.* España, volumen XV, número 3, pp. 361-371. Consulta: 17 de noviembre de 2015.

https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21505/93555

Castro, E. (2012). "Dificultades en el aprendizaje del Álgebra escolar". I*nvestigación en Educación Matemática XVI*. España, pp.75-94. Consulta: 6 de abril de 2015. https://dl.dropboxusercontent.com/u/104572257/Actas/Actas16SEIEM.pdf

Ceballos J. y Blanco L. (2008). "Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad". *Publicaciones*, 38, 2008, pp. 63-88. Consulta: 13 de junio de 2015.
http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/24697/1/479.%20n.%2038.pdf

Cruz, G. (2011). "La demanda cognitiva como oportunidad de aprendizaje en el área de matemática". Ponencia presentada en el *XIV Congreso Nacional de Educadores UPC*. Lima. Consulta: 8 de abril de 2016.

https://es.slideshare.net/gcruz/documento-la-demanda-cognitiva-como-oportunidad-de-aprendizaje-en-el-rea-de-matemtica-con-cita

Cueto, S., Ramírez, C., León, J, y Pain, O. (2003). "Oportunidades de aprendizaje y rendimiento en matemática en una muestra de estudiantes de sexto grado de primaria de Lima". *Grade*. Lima, documento de trabajo 43. Consulta: 8 de abril de 2016.

http://www.grade.org.pe/download/pubs/ddt/ddt43.pdf

Font, V., y Godino, J. (2006). "La noción de configuración epistémica como herramientas de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores". *Educ. Mat. Pesqui*. Sao Paulo, volumen 8, número 1, pp. 67-98. Consulta: 14 de marzo de 2016.

https://www.researchgate.net/publication/277136838_La_nocion_de_configuracion_e pistemica_como_herramienta_de_analisis_de_textos_matematicos_su_uso_en_la_formacion_de_profesores

Font, V., Planas, N. y Godino, J. (2010). “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”. *Infancia y Aprendizaje*. Consulta: 26 de setiembre de 2015. http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf

Gaita, C., Huanqui, J., Wilhelmi, M. y Lasa, A. (2009). “Estudio de significados institucionales de la función en textos oficiales de secundaria”. *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación, XIII Simposio de la SEIEM*. Santander: Universidad de Cantabria. Consulta: 26 de setiembre de 2015. http:// http://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXIII/dmdc/Gaita_Huanqui_Wilhelmi_Lasa_R.pdf

Garcés, W. (2013). *Análisis Didáctico como herramienta para determinar el grado de idoneidad de las tareas sobre ecuaciones lineales entre la educación secundaria y educación superior tecnológica* (tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú. Escuela de Posgrado.

Godino, J. y Batanero C. (1994). “Significado Institucional y Personal de los Objetos matemáticos”. *Recherches en Dicactique des Mathématiques*. Universidad de Granada, vol. 14, nº 3, pp. 325-355, 1994. Consulta: 21 de junio de 2015.

http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J., Batanero C. y Font V. (2003). “Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros”. *Matemáticas y su Didáctica para Maestros*. Granada. Consulta: 26 de noviembre de 2015.

https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Godino, J., Font V. y Wilhelmi, R. (2006). “Análisis Ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. México, Relime Número, Especial, 2006, pp. 131-155. Consulta: 17 de junio de 2015.

http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_textos_suma_resta.pdf

Godino, J., Bencomo, D., Font V. y Wilhelmi, R. (2006). “Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática”. *Departamento de Didáctica de la Matemática*. Granada. Consulta: 9 de octubre de 2015.

https://studylib.es/doc/4995054/pauta-de-an%C3%A1lisis-y-valoraci%C3%B3n-de-la-idoneidad-did%C3%A1ctica-de

Godino, J., Batanero C. y Font V. (2009). "Un enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática". *Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática*, Grupo de investigación. Universidad de Granada. Consulta: 10 de mayo de 2016.

https://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. (2010). "Perspectiva de La Didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica". *Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática*, Grupo de investigación. Universidad de Granada. Consulta: 14 de junio de 2015. https://www.ugr.es/~jgodino/

Godino, J. (2011). "Indicadores de idoneidad didáctica de processos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas". *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Brasil. Consulta: 14 de junio de 2015.

https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

González, T. y Sierra, M. (2004). "Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX". *Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*. Universidad de Salamanca, vol. 22, Nº 3, pp. 389-408. Consulta: 14 de junio de 2015.

http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21990/21824

González, M. (2010). "Análisis matemático en los libros de texto de España". *Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales*. Universidad de Salamanca. Consulta: 13 de junio de 2015.
http://www.apm.pt/files/177852_C67_4dd7a25821d54.pdf

Hernández, R, Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de Investigación*. Quinta edición. México: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

Ibarra, S. (2008). *La transposición didáctica del álgebra en las ingenierías. El caso de los sistemas de ecuaciones lineales* (tesis doctoral en Matemática Educativa). México, Instituto Politécnico Nacional. Consulta: 17 de junio de 2015.
https://tesis.ipn.mx/handle/123456789/11769

Malceski, R., Gogovska, V. y Anevska, K. (2014). “Algebraic Rational Expressions in Mathematics”. *International Journal of Science and Research (IJSR)*. Macedonia, volume 3, issue 3, pp. 420-428. Consulta: 15 de marzo del 2016. https://www.researchgate.net/publication/273632492_Algebraic_Rational_Expressions_in_Mathematics

Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Segunda edición, 2009. Lima, Perú.

Ministerio de Educación (2012). *4 Matemática*. Lima, Perú.

Ministerio de Educación (2017). *El Perú en PISA 2015 Informe nacional de resultados*. Primera edición, 2017. Lima, Perú.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (tesis doctoral). Granada: Universidad de la Rioja. Consulta: 17 de noviembre de 2015.

http://funes.uniandes.edu.co/544/

Molina, M. (2010). “Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas”. *Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. España, Suma 2010, número 65, pp. 7-15. Consulta: 15 de mayo de 2015.

http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/26080/1/SUMA.pdf

Novotná, J. y Hoch, M. (2008). “How Structure Sense for Algebraic Expressions or Equations is Related to Structure Sense for Abstract Algebra”. *Mathematics Education Research Journal*, vol. 20, nº 2, pp. 93-104. Consulta: 11 de noviembre de 2015.

https://www.researchgate.net/publication/251400510_How_structure_sense_for_algebraic_expressions_or_equations_is_related_to_structure_sense_for_abstract_algebra

Palarea, M. y Socas, M. (1994). “Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico”. *Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.* España, Suma 16/1994, pp. 91-98. Consulta: 4 de abril de 2015.

http://revistasuma.es/IMG/pdf/16/091-098.pdf

Palarea, M. (1999). “La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación”. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. España, Números volumen 40, pp. 3-28. Consulta: 17 de junio de 2015.

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/40/Articulo01.pdf

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos* (tesis doctoral). Universidad de Barcelona, pp. 91-95. Consulta: 15 de junio de 2015.

https://www.tdx.cat/handle/10803/294031?show=full

Salcedo, A. (2012). "Análisis de las actividades para el estudiante en los libros de matemáticas". *Investigación y Posgrado*. Venezuela, vol. 27, nº 1, pp. 83-109. Consulta: 8 de abril de 2016.

http://revistas.upel.edu.ve/index.php/revinpost/article/viewFile/1925/818

Smith, S., Charles, R., Dossey, J., Keedy, M. y Bittinger, M. (1998). *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*. Primera edición (versión en español de C. Torres). México: Pearson Educación.

Sobel, M. y Lerner, N. (1995). *Precálculo*. Quinta edición. México: Ed. Español.

Spiegel, M. (1956). *Teoría y problemas de Álgebra superior*. Primera edición en español. México: Libros McGraw-Hill Book Company, Inc., U.S.A.

Stewart, J. (1941). *Cálculo: trascendentes tempranas*. México, D.F.: Cengage Learning, 2008.

Subramaniam K. y Banerjee R. (2004). "Teaching Arithmetic and Algebraic Expressions". *Proceedings of the 28th Conference of the International*. Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 3, pp. 121-128. Consulta: 5 de junio de 2015.

http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR200_Kalyanasundaram.pdf

Swokowski, C. (1996). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamericana.

Vásquez, J. (1962). *Problemas de física general del texto de física general de F.W. Sears y M.W. Zemansky*. Lima, Perú: Librería Internacional del Perú.

Vega-Castro, D. (2010). *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1° de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables* (tesis de maestría en Didáctica de la Matemática). España: Universidad de Granada. Consulta: 29 de agosto de 2015. http://funes.uniandes.edu.co/1947/

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2011). “Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas”. *Dialnet*. Universidad de Granada, Investigación en Educación Matemática XV, pp. 575-586. Consulta: 7 de abril de 2015.

http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3731350

Vega Castro, D. (2013). *Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el Sentido Estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas* (tesis doctoral en Didáctica de la Matemática). España: Universidad de Granada. Consulta: 5 de junio de 2015.

http://digibug.ugr.es/handle/10481/31311

ANEXO

Página 84 del material de texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012.

¿Qué vamos a aprender?

Esta unidad tiene como finalidad desarrollar el pensamiento algebraico, de modo que puedas dar significado a notaciones matemáticas no numéricas, identificar patrones y deducir procedimientos y relaciones entre datos dependientes. Para alcanzar estos propósitos, te presentamos actividades relacionadas con las fracciones algebraicas, los sistemas de ecuaciones lineales, las inecuaciones, la teoría de exponentes y las ecuaciones exponenciales y logarítmicas. El logro de todo ello hará que puedas desenvolverte de manera adecuada en situaciones de contexto científico y económico que exijan modelar y generalizar casos particulares.

Fracciones algebraicas

Luis debe dar 4 vueltas a la pista de atletismo de su localidad. Su desempeño es como sigue: se demora t segundos en dar la primera vuelta, $t-10$ segundos en la segunda, $t-5$ segundos en la tercera y $t+5$ segundos en la cuarta vuelta. Si la distancia recorrida en cada vuelta es a metros, ¿qué expresión permite calcular la velocidad con la que recorrió cada vuelta?

- Organizamos los datos en una tabla (ver margen) y hallamos la expresión que permite calcular la velocidad con que recorrió cada vuelta.

Expresiones como $\frac{a}{t}$; $\frac{a}{t-10}$; $\frac{a}{t-5}$ y $\frac{a}{t+5}$ son llamadas expresiones algebraicas fraccionarias o simplemente fracciones algebraicas.

	Distancia (m)	Tiempo (s)	Velocidad
Primera vuelta	a	t	$\frac{a}{t}$
Segunda vuelta	a	$t-10$	$\frac{a}{t-10}$
Tercera vuelta	a	$t-5$	$\frac{a}{t-5}$
Cuarta vuelta	a	$t+5$	$\frac{a}{t+5}$

Una fracción algebraica es una expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $Q(x)$ no idénticamene nulo, y al menos, de primer grado.

EJEMPLO 1

Si $a = 2$, determina el valor numérico de las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{1}{a+1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{3-2a}{5a} = \frac{3-2(2)}{5(2)} = \frac{3-4}{10} = \frac{-1}{10} = -\frac{1}{10}$

c) $\frac{a^2-1}{2a+7} = \frac{2^2-1}{2(2)+7} = \frac{3}{11}$

d) $\frac{2+a^2}{a^3+1} = \frac{2+2^2}{2^3+1} = \frac{2+4}{8+1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Ten en cuenta

La expresión "no idénticamente nulo" significa que no debe ser igual a cero.

Transformación de fracciones por simplificación

Simplificar una expresión algebraica es convertirla en una fracción equivalente cuyos términos no tengan factores comunes. La fracción resultante se conoce como fracción irreducible porque queda reducida a su mínima expresión.

EJEMPLO 2

Simplifica la fracción algebraica $\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ si $x \notin \{-1/2; 1\}$

- Factorizamos numerador y denominador y simplificamos los factores comunes:

$$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(2x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{x+1}{2x+1}$$

Como no existen factores comunes en el numerador ni en el denominador, la expresión $\frac{x+1}{2x+1}$ es la fracción irreducible.

Glosario

Fracción irreducible: Fracción cuyo numerador y denominador son primos entre sí (no presentan factores comunes).

Página 85 del material de texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012.

Operaciones con fracciones algebraicas

Se desarrollan de forma similar a las que se realizan con fracciones numéricas.

Efectúa $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}+\frac{(x-1)(x+1)}{2x+2}$ **y simplifica el resultado si** $x \notin \{-2;-1;1\}$.

- Factorizamos los términos de cada sumando y simplificamos:

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2}+\frac{(x-1)(x+1)}{2x+2}=\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+2)}+\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{2\cancel{(x+1)}}$$

$$=\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{2}$$

- Operamos como si fueran fracciones numéricas:

$$\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{2}=\frac{2(x+1)+(x+2)(x-1)}{2(x+2)}=\frac{2x+\cancel{2}+x^2+x-\cancel{2}}{2(x+2)}$$

$$=\frac{3x+x^2}{2(x+2)}=\frac{x(x+3)}{2(x+2)}$$

Ten en cuenta

$2(x+2)$ es el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores.

Resuelve $\frac{5(x+1)^2}{x^5+x^4}\div\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2}$ **y simplifica el resultado si** $x \notin \{-2;-1;0\}$.

- Factorizamos cada término y eliminamos los factores comunes:

$$\frac{5(x+1)\cancel{(x+1)}}{x^4\cancel{(x+1)}}\div\frac{(x+1)\cancel{(x+2)}}{x^2\cancel{(x+2)}}=\frac{5(x+1)}{x^4}\div\frac{(x+1)}{x^2}$$

- Expresamos la división como multiplicación, resolvemos y simplificamos:

$$\frac{5(x+1)}{x^4}\div\frac{(x+1)}{x^2}=\frac{5\cancel{(x+1)}}{x^2\cdot x^2}\cdot\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{(x+1)}}=\frac{5}{x^2}$$

ACTIVIDADES

RD (*)

Efectúa las operaciones entre fracciones algebraicas si se sabe que están definidas en $\mathbb{R}$.

a) $\frac{6x^2+5x-6}{2x^2+5x+3}-\frac{4x^2-17x+4}{4x^2+3x-1}$

b) $\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{1-x^2}$

c) $\left(\frac{2x-2}{2x^2-50}\right)\div\left(\frac{3x+3}{x^2-4x-5}\right)$

Para desarrollar el pensamiento matemático

Supón que dispones de una calculadora con una tecla especial que calcula el valor de $\frac{x}{x+1}$. Por ejemplo, si presionas $\boxed{5}$ y luego la tecla especial, en pantalla observas 5/6. ¿Qué fracciones obtendrías en cada caso si presionas los números 3; 5; 7; 9 y 11?

Evaluación

1. **Simplifica** $\frac{(x^2-1)(x^2+2x-3)}{(x^2-2x+1)(x^2+4x+3)}$

2. **Determina** el valor numérico de $\frac{5x^2+7x+1}{4x^2-9}$ para $x=-2$.

3. Cuando Mario simplificó la expresión $\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{y^2}{y^2-x^2}+\frac{xy}{x+y}$ obtuvo $(x-y)$ como valor final. Teresa le dijo que había cometido un error y que el resultado era $(x+y)$. ¿Quién de los dos tuvo razón? **Fundamenta tu respuesta.**

Página 105 del material de texto oficial de matemática de cuarto año de secundaria 2012.

ACTIVIDADES PARA SEGUIR APRENDIENDO

RD (2-6) CM (1) RP (7-10)

...acciones algebraicas

Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{(x^2-9x+20)(x^2+6x+5)}{(25-x^2)(x^2-3x-4)}$

b) $\dfrac{x^2-a^2+2a-1}{x^2-2ax+a^2-1}$

Determina el valor numérico de las fracciones algebraicas si $x=2$.

a) $\dfrac{(x^2+5)(x^2+7x-9)}{(x^2+3x+1)(x^2+4x-4)}$

b) $\dfrac{(x-5)(5x^2+1)}{(9-3x^2)(x+1)} + \dfrac{(8x^2-2)(-0,3x+2)}{(2-3x)(x+1)}$

Realiza las siguientes operaciones entre fracciones algebraicas definidas en R.

a) $\dfrac{8mn}{3m} \cdot \dfrac{2mn}{9n} + \dfrac{4m^2n}{9nm} \div \dfrac{3m}{5n^2}$

b) $\dfrac{9x^3y}{3x} - \dfrac{5x^3y}{3x} + \dfrac{4x^2y^2}{3x^2} \div \dfrac{5y}{2x}$

c) $\dfrac{-9}{x^2+x-12} \div \dfrac{x-4}{x^2-16} - \dfrac{4}{x-8}$

d) $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1} \div \left(\dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{1}{x+1}\right)$

Determina la veracidad de cada afirmación.

a) El valor de $\dfrac{12+r-r^2}{r^3+3r^2}$ cuando $r=5$ es $-1/25$.

b) Al simplificar $\dfrac{x+1+\dfrac{1}{x+3}}{x-\dfrac{x-4}{x+5}}$ el numerador es $(x+5)$.

5 Se pide a Carlos y Rosa que simplifiquen la expresión $\dfrac{12x^2-12}{16(x+3)(x+1)}$. Él concluyó lo siguiente: $\dfrac{12x^2-12}{16(x+3)(x+1)} = \dfrac{3(x^2-1)}{4(x+3)(x+1)}$

a) ¿Es correcto lo que hizo Carlos? ¿Puedes seguir simplificando la expresión? ¿Cómo queda dicha expresión?

b) Rosa simplificó y obtuvo $\dfrac{3(x-1)}{4(x+3)}$. ¿Es correcto? ¿Por qué?

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

6 **Resuelve** empleando el método que creas conveniente.

a) $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-y=9 \\ x-3y=16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x-2y=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=y-1 \\ 2x=3y \end{cases}$

7 Un zoológico tiene varias avestruces y jirafas. Si entre todas se cuentan 15 cabezas y 44 patas, ¿cuántas avestruces y cuántas jirafas hay?

8 Antonia tiene la mitad de la edad de Emilia. Si en 20 años, Emilia será 10 años mayor que Antonia, ¿qué edad tiene cada una?

9 En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de 2 y 5 litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

10 En una librería se han vendido 20 libros a dos precios distintos: unos a S/. 8 y otros a S/. 12. Si se han obtenido S/. 192 por las ventas, ¿cuántos libros de cada precio se han vendido?

Para trabajar cooperativamente

Para ganar un concurso regional de Matemática, Adriana y Enrique decidieron juntarse con el fin de resolver la última pregunta que pedía simplificar P(x) y hallar el numerador de dicha fracción simplificada, además de calcular el valor numérico de P(x) cuando $x=3$.

$$P(x) = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \ldots + \frac{1}{x^2+(2k-1)x+k^2-k}$$

– Adriana comentó: "Es k y el valor numérico de P(3) es también k".

– Enrique dijo: "Es x y el valor numérico de P(3) es 3".

Explica lo que hizo cada uno para llegar a su respuesta.