PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE EDUCACIÓN

EL FRANQUEAMIENTO DE OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DE LA NOCIÓN DE LÍMITEEN UN ENTORNODE GEOMETRÍA DINÁMICA

Tesis para optar el Título de Licenciado en Educacióncon especialidad en Educación Secundaria – Matemáticas que presenta la Bachiller:

María del Carmen Bonilla Tumialán

Asesora: Mag. María Guadalupe Suárez

San Miguel, agosto de 2013

En primer lugar dedico este trabajo a mis dos hijos, Florcita e Ivancito, que siempre me alentaron a que siguiera superándome, y supieron comprenderme. Gracias por su apoyo.

Además,quiero mencionar a dos personas que fueron importantes en mi formación en la Facultad de Educación:el profesor Pedro Castillo Coloma, pues sus palabras dealiento fortalecieron el desarrollo de mis habilidades matemáticas y me dieron fuerzas para continuar a pesar de las dificultades, y a la Profesora Betty Merino, que descansa en paz,quiénme incentivó para que comunicara mis trabajose hizo que descubriera mi pasión por la investigación

.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi reconocimiento a la profesora María Guadalupe Suárez por el tiempo que ha dedicado a la asesoría de mi trabajo, y por sus oportunas enseñanzas que organizaron mis ideas. Si no hubiera sido por ella nunca hubiera terminado este trabajo. Es justicia exponer mi más sincera gratitud a la profesora Haydée Azabache pues sus palabras de aliento llevaron a que culminara este trabajo. Y no solamente por el asesoramiento académico, sino también por el aspecto humano, pues me supo comprender en momentos en que pasé dificultades.Sus sugerencias enriquecieron el trabajo y dieron orden a mis ideas.

De igual manera sólo tengo palabras de agradecimiento para la Dra. Norma Rubio por haber colaborado con la realización del estudio preliminar del presente trabajo, al haber prestado las pruebas del examen de Cálculo 1 de estudiantes de Estudios Generales Ciencias de la PUCP; y así mismo, agradecer a la Mag. Cecilia Gaita, Dr. Francisco Ugarte y Mag.Miguel Gonzaga, por responder a las preguntas de la entrevista sobre las dificultades en la enseñanza del Cálculo.

Sin las enseñanzas tanto de los profesores de la Facultad de Educación, como de los profesores de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas, no hubiera sido posible realizar el presente trabajo de investigación.Gracias por contribuir a desarrollar en mí el espíritu de investigación.

RESUMEN

El proyecto de innovación didáctica sobre la noción de límite en un entorno de Geometría Dinámica procura contribuir a la solución de la problemática relacionada con la insuficiente comprensión de la noción de límite en los estudiantes de Cálculo. Esta incomprensión es debida, por un lado, alas dificultades para acceder al pensamiento analítico, estudiadas por diversos investigadores a través la complejidad de los objetos matemáticos presentes en este pensamiento, y por los obstáculos epistemológicos; así como, por otro lado, debido a las características tradicionales de la enseñanza tradicional. La propuesta innovadora tiene como centro de la enseñanza y aprendizaje al estudiante, y utiliza como medio didáctico a la geometría dinámica del Cabri II Plus. Es en este*Milieu didactique,* en el sentido brousseauniano, que se construye la noción de límite a través de la ejecución de actividades que explotan el dinamismo e interactividad de la informática por medio del dragging (arrastre), cuidando rigurosamente la vigencia de las propiedades matemáticas relacionadas con el pensamiento analítico, y motivando intrínsecamente a los estudiantes a experimentar en un medio, en estas épocas, consustancial a ellos, el informático.

ÍNDICE

ÍNDICE DE GRÁFICOS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Comprender la noción de límite es básico en el aprendizaje del cálculo, instrumento del análisis matemático. Pero, ¿por qué se debe desarrollar el pensamiento analítico en las matemáticas superiores universitarias de todas las carreras de Ciencias e Ingeniería, y de algunas carreras universitarias de Humanidades y Ciencias Sociales? El siguiente texto de Joseph Fourier, citado por Miguel de Guzmán, muestra la importancia del pensamiento analítico y del Cálculo en la comprensión y dominio de los fenómenos naturales y sociales, por lo tanto en el desarrollo de la ciencia, de allí lanecesidad de su enseñanza.

> Fourier se manifiesta también profundamente pitagórico en el interesante discurso preliminar de su obra fundamental, *Teoría Analítica del calor*, publicada en 1822:
>
> "Las ecuaciones analíticas (…) no se restringen a las propiedades de las figuras y a las que son objeto de la mecánica racional; se extienden a todos los fenómenos generales. No puede haber un lenguaje más universal ni más simple, más exento de errores y de oscuridades, es decir más digno de expresar las relaciones invariables de los seres naturales.
>
> Considerado bajo este punto de vista, el análisis matemático es tan extenso como la naturaleza misma; define todas las relaciones sensibles, mide el tiempo, los espacios, las fuerzas, las temperaturas;… su atributo principal es la claridad; no tiene en absoluto signos para expresar nociones confusas. Relaciona los fenómenos más diversos y descubre las analogías secretas que los une.
>
> Si la materia se nos evade, por su extrema tenuidad, como la del aire y de la luz, si los cuerpos están situados lejos de nosotros, en la inmensidad del espacio, si el hombre quiere conocer el espectáculo de los cielos en épocas sucesivas que un gran número de siglos separa, si las acciones de la gravedad y del calor se ejercen en el interior del globo sólido a profundidades que nos serán siempre inaccesibles, el análisis matemático puede, con todo, dominar las leyes de estos fenómenos.

> Él nos los hace presentes y parece ser una facultad de la razón humana destinada a suplir la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos; y, lo que es aún más notable, sigue el mismo camino en el estudio de todos los fenómenos; los interpreta con el mismo lenguaje como para atestiguar la unidad y la simplicidad del plan del universo, y hacer aún más patente este orden inmutable que preside todas las causas naturales."
>
> A la cabeza del capítulo primero de este gran "poema matemático", como Maxwell llamó a la *Teoría analítica del calor* figura en latín una cita de Platón que resume el pensamiento básico de Fourier sobre la aplicabilidad universal del análisis matemático: ET IGNEM REGUNT NUMERI (Incluso el fuego está gobernado por los números). (Guzmán, 1983, p. 9)

Cuanta sensibilidad y profundidad de espíritu existe en este texto de Fourier, que por su belleza constituye un poema. La verdad es evidente en sus palabras, sin embargo es triste que las persistentes dificultades que los estudiantes tienen al introducirse en el campo conceptual del Análisis, y el ambiente generalizado de insatisfacción generado en los estudiantes de los cursos de Cálculo (Artigue, 1998), impidan que esa verdad no sea fácilmente percibida por quienes estudian el universo y las sociedades.

En el presente proyecto de innovacióntenemos como objetivo que los conocimientos relacionados al pensamiento analítico, en particular la noción de límite, sean más fácilmente comprendidos por los estudiantes universitarios, a través del uso de la Geometría Dinámica. La visualización(Guzmán, 1996), el movimiento de los objetos matemáticos a través del arrastre o dragging, nos van a permitir apreciar en toda su variabilidad y belleza la esencia del pensamiento analítico.

Hay que tener en cuenta que la noción de límite es un cambio en cantidades mínimas (Artigue, 1998), y que ese cambio, en las condiciones tradicionales de enseñanza, no puede ser visualizado en su real dimensión al ser representado geométricamente en la pizarra. Es por ello que se requiere elaborar un recurso didáctico que permita a los estudiantes visualizar ese cambio. Es necesario que los estudiantes logren comprender la estructura topológica subyacente. El problema de investigación que se pretende resolver con el proyecto de innovación se plantea de la siguiente manera: ¿Cómo lograr que los estudiantes franqueen el obstáculo epistemológico que les impide dar el salto cualitativo del pensamiento algebraico al pensamiento analítico? ¿Cuál es el medio más propicio para conseguir el franqueamiento del obstáculo? ¿Cuáles son las interacciones que se pueden ofrecer al estudiante para que haga suyo el proceso de apropiación del nuevo conocimiento y rechace las concepciones antiguas?

Elproyecto propuesto busca disminuir las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de tal manera que se optimice lacomprensión de las nociones de límite de sucesiones y límite de funciones, y, siguiendo a Artigue, disminuir esas dificultades está relacionado con el franqueamiento de los obstáculos epistemológicos que no permiten su comprensión. En el trabajopresentamosun primer capítulo en el que se desarrolla la justificación y antecedentes delproblema que se pretende solucionar, su formulación y delimitación, así como unestudio preliminar sobre la enseñanza del Cálculo en una institución privada de educación superior, que consiste en un trabajo de campo de tipo diagnóstico realizado en el curso de Cálculo 1 de la Unidad de Estudios Generales Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú. De igual manera, detallamos cómo el proyecto de innovación didáctica ha sido expuesto como ponencia en eventos nacionales e internacionales,así comoha sido publicado en sus respectivas actas.

En el segundo capítulo se desarrolla la fundamentación teóricaque sustenta la investigación, en laque se estudian aportes de la filosofía de las matemáticas, de la ciencia matemática, de la educación matemática y de la informática, en específico, la geometría dinámica.

El Diseño del Proyecto de Innovación es desarrollado en el tercer capítulo, en donde se describe el proyecto, sus objetivos, y las acciones a realizar para su puesta en marcha.

Finalmente, este trabajo busca contribuir con el desarrollo de algunaslíneas de investigación,como el pensamiento matemático avanzado relacionado con el tema de la enseñanza y aprendizaje de la noción de límite, así comoel uso de las Tecnologías de Información como recurso didáctico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, todo esto dentro del Programa Epistemológico de la Didáctica de las Matemáticas.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

En el campo de la enseñanza del Cálculo existen numerosas investigaciones, desarrolladas desde hace más de 30 años, que demuestran la dificultad de los estudiantes para adentrarse en el pensamiento analítico (Tall, 1991, Artigue y Ervynck, 1992, Farfán, 1993, citados por Artigue, 1995) (Claros, Sánchez y Coriat, 2007) (Cantoral y Farfán, 1998) (Hitt y Páez, 2005). Dichas investigaciones muestran que se les puede enseñar de forma más o menos mecánica a resolver problemas estándar,pero que es difícil que alcancen una verdadera comprensión de los conceptos y pensamiento analíticos, pues se tiende a centrar en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo. Muchos profesores omiten la enseñanza del concepto formal de límite pues es más difícil que los estudiantes lo logren comprender. De ahí que se enseñe más la habilidad algebraica, siendo ésta la que principalmente se evalúa, pues es en la que se obtiene más éxito (Hitt y Páez, 2005). Los estudiantes creen así que el cálculo algebraico algoritmizado es lo esencial en el Análisis (Artigue, 1998).

La tendencia a privilegiar las estructuras algebraicas es consecuencia de la influencia que el grupo Bourbaki, de origen francés, ejerció sobre la enseñanza de las matemáticas a nivel mundial, tanto a nivel superior desde la década del 30, como en la enseñanza básica desde la década del 60 del siglo pasado. Esta corriente impulsó la Matemática Moderna y con ella entraron a los programas las notaciones de conjuntos, los cuantificadores,las estructuras algebraicas y el formalismo. El enfoque estructuralistaera el dominante en todos los campos de las ciencias, humanas y sociales, así como las exactas.

Como una reacción a la Reforma de la Matemática Moderna se dio una contrarreforma dirigida por los profesores agrupados en la AMPEP (Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública de Francia) y los IREM (Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas) (Douady, 1995).Producto de este movimiento el sistema educativo aceptó el hecho de que es imposible enseñar de golpe los saberes del cálculo bajo su forma definitiva. Es importante citar las críticas que estos grupos de profesores hicieron a la enseñanza del cálculo en Francia en los años setenta (InterIREM Analyse, 1981, citado por Artigue 1995) (Douady, 1995):

- Se introduce las nociones básicas sin el planteamiento de un problema, o a partir de problemas lejanos al estudiante
- Los conceptos se construyen linealmente sin conectarlos a la resolución de problemas
- Predomina lo cualitativo (formal) sobre lo cuantitativo (numérico)
- Se emplea precozmente el lenguaje formalizado
- Enseñanza muy centrada en el discurso del profesor

Las críticas cuestionan una concepción de las matemáticas entendida como estructura y lenguaje, y sustentan una visiónentendidacomo una actividad humana, histórica, que se desarrolla en base a la resolución de problemas. Con esa forma de ver,las matemáticas no se descubren sino se construyen en base a las necesidades. Al darle un carácter más humano se acerca el saber matemático a la actividad cognitiva del estudiante.

El análisis anterior está situado en la enseñanza del cálculo en los Liceos franceses, equivalente a los últimos años de secundaria en nuestro país. En la universidad,los estudiantes franceses que van al área de ciencias volverán a estudiarel cálculo con mayor profundidad. En el Perú,en la secundaria, no se enseña el cálculo, salvo en muy pocos colegios privados, y por ello la brecha es aún mayor pues es en el primer año de la universidad que los estudiantes ven el Cálculo por primera vez.

El aprendizaje del Cálculo tiene dificultades de diversa índole.Un grupo de esas dificultades están asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo, como por ejemplo, los números reales (Robinet 1986, citado por Artigue 1998), las sucesiones, las funciones (Vinner y Dreyfus 1989, citado por Artigue 1998). Es en la enseñanza del cálculo que estos objetos se conceptualizan plenamente. Hay otro grupo de dificultades relacionadas con la ruptura que tiene que darse con los modos de pensamiento puramente algebraicos, que se emplea en el trabajo técnico del cálculo.

En particular, la conceptualización de la noción de límite tiene una problemática peculiar dentro del Cálculo, en tanto tiene una posición central en este campo.Las dificultades y los errores que se cometen en el proceso de aprendizaje y enseñanza del límite están ligados a la noción de obstáculo epistemológico (Cornu 1983, Sierpinska 1985, Sierpinska 1988, Schneider 1991, citados por Artigue 1998), constructo que fue creado por Gastón Bachelard (Barbin, 2012), filósofo y crítico francés, y que fue trabajado por diversos investigadores franceses en didáctica de las matemáticas (Brousseau, 1983).En pocas palabras, por obstáculo epistemológico se entiende a las dificultades que existen al adquirir los conocimientos, en tanto que, el conocimiento científico no es un proceso continuo, sino que necesita un momento de ruptura con los conocimientos anteriores. Si no se da esa ruptura, ese salto cualitativo, los conocimientos anteriores se convierten en obstáculos para que surjan los nuevos conocimientos.

Los obstáculos epistemológicos relacionados con la adquisición de la noción de límite se pueden resumir en (Artigue, 1998):

- ✓ Entender al límite como una barrera infranqueable y no alcanzable, idea reforzada por concepciones monótonas estrictas de la convergencia.
- ✓ Al tratar el proceso de límite como un proceso algebraico finito no se señala la diferencia que tiene con las operaciones algebraicas comunes.
- ✓ La noción de límite tiene un doble status, uno operacional y otro estructural, como proceso y como objeto, al igual que la mayoría de las nociones matemáticas (Dubinsky, 1994). Para el estudiante es difícil separar la visión de límite en términos de proceso, para así diferenciar el objeto límite del proceso que le permitió construirlo. Un ejemplo que puede clarificar el problema mencionado es cuando se le pide a los estudiantes comparar los números 0,9999… y 1. El primero es claramente de tipo proceso y el segundo de tipo objeto. Para considerar a ambos como iguales se debe ver más allá del proceso descrito por 0,999…el número creado por este proceso y distinto de él. Según Thompson (Pelczer y Gamboa, 2007) la esencia del aprendizaje matemático consiste en transformar procesos en objetos.
- ✓ Sierpinska (1985, citada por Pelczery Gamboa, 2007) propone un obstáculo geométrico en el aprendizaje de la noción de límite. La

visualización geométrica no permite identificar los objetos sobre los cuales se lleva a cabo el proceso del límite, y deja fuera de lado la estructura topológica que subyace.

- ✓ El obstáculo lógico viene a estar dado por las características de la definición formal de la noción de límite. Existe una complejidad lógica expresada por los cuantificadores y las implicaciones lógicas, y por el hecho de que la definición invierta la dirección del proceso función que va de la variable x al valor de la función f(x).

En el capítulo 2 correspondiente alaFundamentación Teórica se desarrolla con mayor profundidad y detalle las dificultades que se encuentran tanto en la enseñanza del campo conceptual del cálculo como en la enseñanza de la noción de límite en específico.

1.2 ESTUDIO PRELIMINAR

El Estudio preliminar se desarrolló en dos niveles, con los estudiantes y con los docentes.

Con la finalidad de tener una mayor claridad del problemaa solucionar se desarrolló un trabajode campo preliminar con los estudiantes. En el segundo semestre del año 2005 la investigadora efectuóun trabajo final para el curso de Análisis 1, como parte de sus estudios en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. El trabajo consistía en analizar una muestra de 35 pruebas del Examen parcial del Curso de Cálculo 1 del semestre 2005-2 correspondiente al primer ciclo de Estudios Generales Ciencias de la PUCP. Los estudiantes del curso tenían edades que fluctúan entre los 16 y 18 años yestaban en el inicio de sus carreras de Ingeniería o de Ciencias Básicas, Matemática, Física y Química.El objetivo de este análisis fue conocer cuáles eran los errores que cometían los estudiantesen relación a la noción de límite, con la finalidad de plantear alternativas que ayuden a superar los errores, y así ayudar a una mejor comprensión y dominio del pensamiento analítico. Los exámenes fueron gentilmente proporcionados por la Dra. Norma Rubio, profesora del curso.

Las preguntas de este examen evaluaban diferentes temas desarrollados en el curso, pero únicamente se tomó en cuenta aquellas preguntas que se referían a la noción de límite de funciones. En específicolo que interesaba analizar eran aquellas preguntas que expresaban el grado de comprensión de los conceptos relacionados a límites, no se pretendía evaluar el aprendizaje de técnicas para hallar el límite de funciones.Las preguntas analizadas del Examen Parcial de

Cálculo 1 se presentan en el Apéndice 1. De igual manera las respuestas expresadas por los estudiantes, así como un análisis más detallado, se resumen en la Tabla 1 delmismo Apéndice: Estudio de las respuestas 1 a) y 1 b) del examen del curso de Cálculo 1.Asimismo, en el mismoApéndice se presentan las Tablas 2 y 3 que contienen el análisis de los errores, relacionándolos con los obstáculos epistemológicos.

En otro nivel del estudio preliminarse realizaron entrevistas a tres docentes de la Sección Matemáticas del Departamento de Ciencias de la PUCP que enseñan cursos de Cálculo 1.El interés era conocer que tanto se aplica la sistematización elaborada por Michèle Artigue sobre las dificultades que presentan los estudiantes de los cursos introductorios de cálculo en el aprendizaje del análisis elemental en la realidad universitaria peruana. La Mag. Cecilia Gaita Iparraguirre, el Dr. Francisco Ugarte Guerra y el Mag. Miguel Gonzaga Ramírez fueron entrevistados, a quienes identificaremos como Profesor A, Profesor B y Profesor C no necesariamente en el orden indicado.

Las entrevistas fueron efectuadas en el mes de julio del 2011. Se desarrollaron en base a un cuestionario entregado a los docentes con anticipación. Las preguntas realizadas en la entrevista se presentan en el Apéndice2 y un resumen de las respuestas más resaltantes están señaladas en el Apéndice 3.

1.2.1 Análisis e interpretación de las respuestas

a) Respecto a los estudiantes:

El análisis se efectuó principalmente sobre los errores cometidos por losestudiantes al responder las preguntas relacionadas con la noción de límite. A través de los errores semanifiestan las deficiencias que tienen los estudiantesen su formación matemática. De acuerdo a las deficiencias encontradas, la idea es proponer alternativas didácticas que busquen superar esos errores.Para desarrollar el análisis se consideróel marco teórico que Guy Brousseau desarrolla en su artículo Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas (1983), y que es explicado con mayor detenimiento en el capítulo 2 sobre la Fundamentación Teórica.

Con el fin de sistematizar los resultados, se han agrupado los errores en categorías que tratan de clasificarlos. En las Tablas2 y 3del Apéndice 1 se señalan las frecuencias de las respuestas correctas, así como las frecuencias de las categorías en que se han dividido las respuestas incorrectas, de las preguntas 1 a) y 1 b) respectivamente.

De la lectura de la Tabla 2 se puede afirmar que en la pregunta 1 a) el 22,9% de los estudiantes respondió correctamente, ya sea utilizando el teorema del sándwich o aplicando límite sobre 1/x. El 77,1% no responde correctamente. Dentro de este grupo, el 22,9 % no está en condiciones de expresar la noción de función en un nivel abstracto y tiene que recurrir a casos particulares para tratar de justificar su respuesta. Según la clasificación de los obstáculos epistemológicos sistematizados por Artigue (1998) se podría suponer que, los estudiantes comprenden la noción de función como proceso pero no llegan al status de objeto. Un importante 17,1% parece extender las propiedades de los números reales ala multiplicación de funciones. Este error está ligado a la complejidad del objeto matemático función, obstáculo epistemológico que impide trascender los pensamientos numérico y algebraico para acceder al pensamiento funcional.El 14,3 % de estudiantes no maneja correctamente la escritura de la función seno, e igual porcentaje parece no aplicar adecuadamente la definición de límite.

En el caso de la pregunta 1 b) de la Tabla 3,los estudiantes que respondieron correctamente son el 34,3% del total, y en su mayoría graficaron la representación geométrica del enunciado para poder entenderlo. Sólo un 2,9% de los estudiantes utiliza casos particulares de funciones para justificar su respuesta. En esta pregunta es más difícil concretizar el enunciado pues el grado de abstracción es mayor que en la pregunta 1 a). El 11,4% posiblemente ha memorizado mecánicamente la definición de límite al infinito y se deduce que no relacionan la definición memorizada con la afirmación propuesta en el examen. Aquí se manifiesta el obstáculo lógico en tanto los cuantificadores e implicaciones dificultan la comprensión de la noción de límite de funciones. El 14,3% parece expresar afirmaciones en las que no se aplica correctamente la definiciónde límite,y el 37,1% no respondieron nada.

Considerando la clasificación de los tres grandes grupos de dificultades en el aprendizaje del Cálculo señalados por Artigue, que se menciona en el punto 2.2.3 del capítulo 2 sobre la Fundamentación Teórica, en el estudio preliminar se aprecia que un buen porcentaje de estudiantes no utilizan correctamente las propiedades de las funciones, y nolas diferencian de las propiedades de los números reales. No logran romper con el pensamiento algebraico para acceder al pensamiento funcional.

Tomando como base lafundamentación teórica proporcionada por Guy Brousseau para interpretar los resultados obtenidos en ambaspreguntas 1 a) y 1 b), se puede afirmar que los obstáculos que se presentan para que la mayoría de los estudiantes de Cálculo 1 aprendan la noción de límite se originan principalmente en el aspecto epistemológico. También dentro de este marco se ve con claridad que la mayoría de los estudiantes no diferencian al pensamiento analítico como distinto al pensamiento algebraico, y que las propiedades que son válidas en el Álgebra no necesariamente lo son para el caso del Análisis. Además, les es difícil comprender la definición formal de límite por los cuantificadores y las letras en el alfabeto griego que representan números, a pesar de que la definición es representada gráficamente, pues por lo general la definición formal es enunciada primero y graficada después. Es por ello que los estudiantes en su mayoría memorizan mecánicamente la definición, sin comprender su significado.

b) Respecto a los docentes:

Las respuestas más significativas de los tres docentes a las entrevistas están registradas en el Apéndice3. En base al análisis de las respuestas se elaboró la Tabla N° 4 que sintetiza la problemática percibida por los docentes sobre las dificultades en la enseñanza del Cálculo que se presenta en el Apéndice4.

Podemos apreciar que las dificultades planteadas por Artigue (1995, 1998), como la complejidad de los objetos básicos del cálculo, los obstáculos lógico y geométrico, así como la ruptura con el pensamiento algebraico para desarrollar el pensamiento analítico son percibidas por los profesores encuestados, lo que reafirma la validez delafundamentación teórica expuesta en el capítulo 2.

Las dificultades más resaltantes en los estudiantes serían las relacionadas con la falta de conceptualización de las nociones de números reales, de función, de punto de acumulación. Los obstáculos lógico y geométrico son señalados por los tres docentes como presentes en el aprendizaje del pensamiento analítico. Las nociones de igualdad, de tangente a una curva, asíntota son las que más se resisten a cambiar cuando se da la ruptura del modo de pensamiento algebraico para acceder al análisis.

1.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El problema en el que se quiere intervenirse puede planteara través del siguienteenunciado:

Los estudiantes del curso de Cálculo 1del primer ciclo de Estudios Generales Ciencias de la PUCP presentanuna insuficiente comprensión de la noción de límite, característica que se manifiesta en la deficiente aplicacióndel límite en la resolución de problemas.

Las causas del problema señalado anteriormente se pueden abordar desde dos perspectivas:

1. Desde lo epistemológico:
    - Equivocadamente se entiende al límite como una barrera infranqueable y no alcanzable, idea reforzada por concepciones monótonas estrictas de la convergencia.
    - En lo operativo cuando se trata el proceso de límite como un proceso algebraico finito no se señala la diferencia que tiene con las operaciones algebraicas comunes.
    - La noción de límite tiene un doble status, uno operacional y otro estructural, como proceso y como objeto, al igual que la mayoría de las nociones matemáticas. Para el estudiante es difícil separar la visión de límite en términos de proceso, para así diferenciar el objeto límite del proceso que le permitió construirlo.
    - Sierpinska (1985, citada por Pelczer y Gamboa 2007) propone un obstáculo geométrico en el aprendizaje de la noción de límite. La visualización geométrica no permite identificar los objetos sobre los cuales se lleva a cabo el proceso del límite, y deja fuera de lado la estructura topológica que subyace.
    - El obstáculo lógico viene a estar dado por las características de la definición formal de la noción de límite. Existe una complejidad lógica expresada por los cuantificadores y las implicaciones lógicas.
2. Desde la enseñanza:
    - Se introduce las nociones básicas sin el planteamiento de un problema, o a partir de problemas lejanos al estudiante
    - Los conceptos se construyen linealmente sin conectarlos a la resolución de problemas
    - Predomina lo cualitativo (formal) sobre lo cuantitativo (numérico)
    - Se emplea precozmente el lenguaje formalizado
    - El centro de la enseñanza y aprendizaje de la noción de límite es el docente, y no es el estudiante.
    - Hay un predominio de la representación lingüística de la noción de límite frente a las representaciones visual y gráfica.

1.4 SIGNIFICATIVIDAD DE LOS CAMBIOS Y APORTES QUE BRINDARÁ EL PROYECTO DE INNOVACIÓN DIDÁCTICA

La significatividad del trabajo propuesto se aprecia en el contexto de la enseñanza del Cálculo en la Educación Superior para el pregrado y postgrado de la Universidad, y para el Perú en general. Para poder apreciar la trascendencia del trabajo propuesto se tiene que analizar la frecuencia con que se enseñan los temas de Cálculo en la malla curricular de las universidades peruanas. Producto de una búsqueda realizada en diversas páginas web, se puede afirmar que en las carreras universitarias del Perú es extendida la enseñanza del Cálculo. Esta situación responde a la validez del análisis matemático tanto en el campo de las ciencias exactas y la ingeniería como en las ciencias humanas.

Diversas universidades de Lima incluyen el Cálculo en el Plan de Estudios de las carreras que ofrecen. En la Tabla 5 que se encuentra en el Apéndice 5, se muestran las carreras de las Universidades Católica, Cayetano Heredia, San Marcos, La Molina, Universidad Nacional de Ingeniería, Pacífico, Lima, San Martín de Porres y Ricardo Palma en las que se enseña Cálculo.

Asimismo en el caso del postgrado, la problemática en torno a la enseñanza y la comprensión de la noción de límite encuentra los mismos obstáculos, por lo cual nuestra propuesta resulta válida también para ese nivel. En los institutos superiores también es extendida la enseñanza del Cálculo.

Se puede ver con claridad la importancia que tiene el Cálculo en las matemáticas superiores y la necesidad que existe en mejorar la enseñanza del pensamiento analítico, y por ende optimizar su comprensión, para así contribuir al desarrollo de la ciencia en el Perú.

Un hecho que ha mantenido vigente, informalmente, nuestra propuesta de innovación durante 7 años es su aceptación al haber sido presentada ante la comunidad académica. Desde el año 2006 ha sido expuesta en diferentes eventos académicos de carácter nacional e internacional. Por ello, en todo este tiempo se ha ido recibiendo sugerencias, comentarios y recomendaciones de los docentes. Estos aportes han enriquecido, y de alguna manera validado la propuesta por sí misma.Las sugerencias recibidas están señaladas en el Apéndice6.

En forma intuitiva se ha apreciado la aceptación de la propuesta por parte de profesores de Cálculo asistentes a las presentaciones orales, talleres o comunicaciones, principalmente por su carácter novedoso impregnado por el uso de la geometría dinámica. Los eventos académicos en los que se ha expuesto la propuesta, así como las publicaciones respectivasse presentan en el Apéndice 7. En el inciso 3 del Apéndice 7 está registrado el contenido de las preguntas de la encuesta aplicada a los docentes asistentesal Taller: Visualización de la noción de Límite empleando el Cabri II. Este taller se realizó en el marco del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas organizado por IREM – PUCP y realizado del 13 al 15 de Febrero del 2008. El taller se desarrolló en dos sesiones de dos horas cada una y contó con la asistencia de 14 profesores de cursos de Cálculo que provenían de distintas regiones del Perú. En él se explicó principalmente el proyecto de innovación didáctica expuesto en el presente trabajo, y asimismo se indicó cómo se construyen las actividades. La exposición estuvo a cargo de María del Carmen Bonilla y Jacqueline Huanqui Astocóndor. Como es costumbre en estos eventos, los organizadores del Coloquio disponen que al final de la realización del Taller se aplique, con fines de evaluación, una encuesta de opinión a los docentes asistentes. En el inciso 4 del Apéndice 7 se presentanlasTablas 6 y 7 con la tabulación de las respuestas de los 11 docentes encuestados.

Lo primero que hay que resaltar es que casi el 64 % de los encuestados son profesores universitarios. De los resultados de las encuestas se puede concluir que los asistentes en un 100% opinaron que el Taller había cumplido los objetivos, y que éstos estaban claramente definidos. Además, un 90% consideraban que habían adquirido conocimientos, y que la metodología utilizada en el taller les pareció conveniente. El 81% piensa que la metodología podría ser implementada en sus centros de enseñanza.

Los entrevistados destacan lo novedoso del proyecto, lointeresante que es el uso del Cabri en la enseñanza de la noción de límite, pues ayuda a la comprensión de los conceptos matemáticos. Piensan que debería utilizarse en la explicación de otros conceptos del Análisis. Esos resultados han sido motivadores para continuar con el planteamiento y el desarrollo de la propuesta.

De esa manera la problemática en torno a la comprensión de la noción de límite está vigente, y las dificultades en su enseñanza y aprendizaje están expresadas en los obstáculos epistemológicos, por lo que esta propuesta es necesaria y válida, lo que nos reafirma en la aspiración a resolver la problemática.

En lo que se refiere a otros antecedentes del proyecto de innovación, diferentes software como el Mathlab, Derive, Mathematica se pueden utilizar para hallar el límite de una función o de una sucesión de manera directa. Otra manera de utilizar estos software, para el caso de límites, es elaborando la gráfica de la función para visualizar la tendencia en f(x) cuando x tiende a un punto. Todos ellos son software de algebra computacional y tienen la desventaja de no tener el dinamismo y el movimiento que si tienen los software de geometría dinámica.

Entre los software de geometría dinámica que si están diseñados para la enseñanza y aprendizaje del análisis,aparte del Cabri, destaca el Geogebra. Con él se pueden hallar integrales definidas. Pacini, Riccomi, Sacco y Schivo (2011) realizaron un trabajo en la enseñanza y aprendizaje de las integrales múltiples utilizando el Geogebra,en el que demostraron que para el caso de la determinación de los dominios de integración en integrales dobles, el uso de técnicas de visualización apropiadas proporcionadas por el dinamismo de los deslizadores del software, refuerza los procesos de conceptualización y comprensión del contenido abordado. El Cabri II Plus, como software de geometría de dinámica, tiene también estos mismos beneficios, por ello hemos optado por este software con la finalidad de hacer más accesible y efectiva la implementación de la propuesta.

El proyecto de Innovación Didáctica es viable pues la PUCP cuenta con aulas informáticas que se utilizan para la enseñanza de los diferentes cursos. En este caso, se requiere planificar la distribución de las aulas informáticas, de manera tal que cada alumno del curso de Cálculo 1 de Estudios Generales Ciencias pueda acceder a una computadora para el desarrollo de las actividades del proyecto. Además la Universidad tiene la licencia comercial del software Cabri II Plus, el cual está instalado en las computadoras de las aulas informáticas.

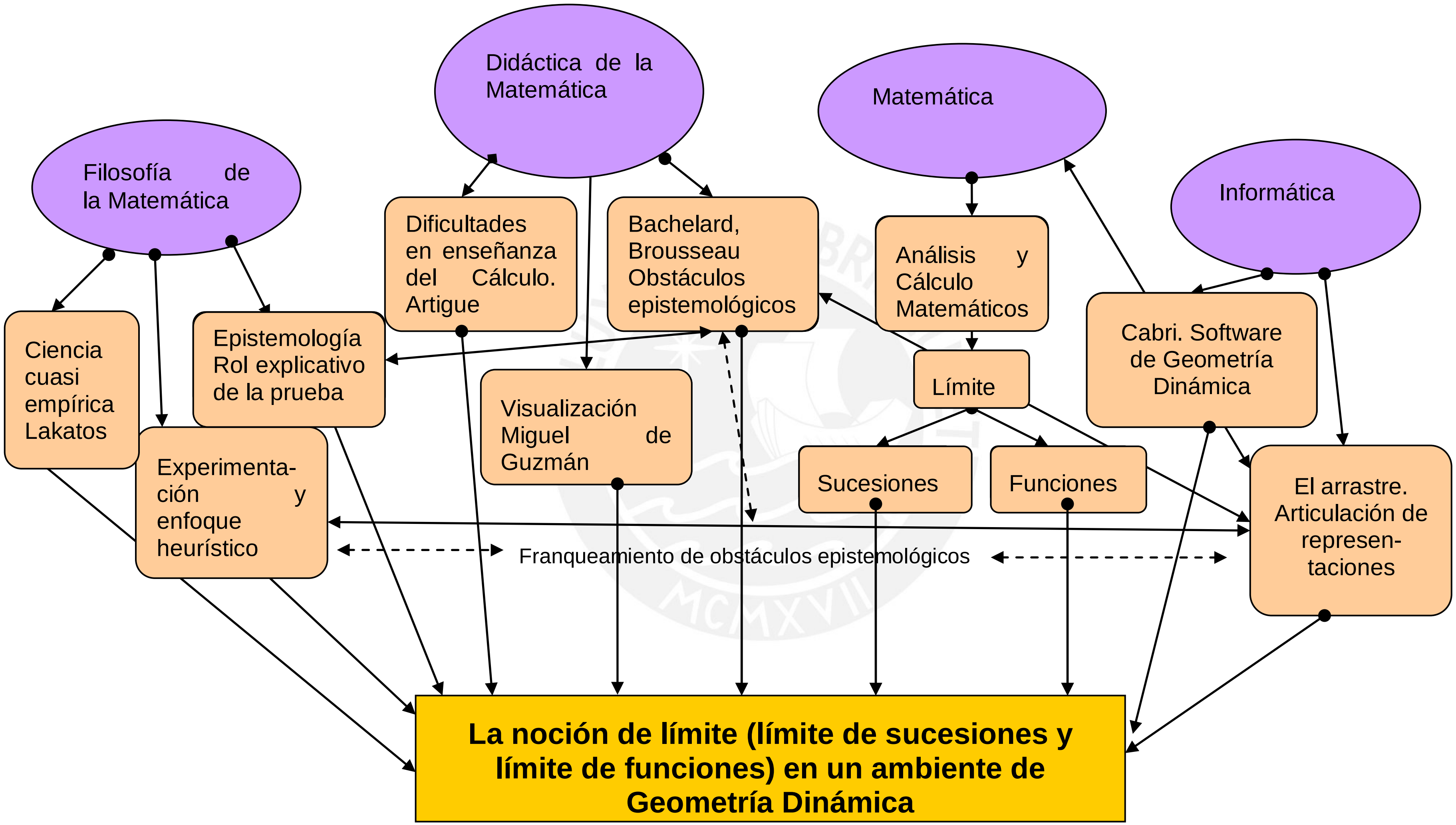
CAPÍTULO 2

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Para elaborar una propuesta de innovación didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la noción de límite en un ambiente de geometría dinámica, es necesario interrelacionar diferentes ámbitos del conocimiento. En primer término, definir las nociones matemáticas involucradas en la noción de límite, abordadas dentro de una perspectiva filosófica en el quehacer matemático. Luego, es preciso referirse a algunas corrientes de la filosofía de la matemática, las cuáles mencionan que el uso de los recursos tecnológicos y la heurística han cambiado el rol principal de la prueba, de la demostración a la explicación, a la comprensión. Una vez definidos los objetos matemáticos, elproblema se traduce en cómo se consigue que estas nociones sean visualizadas, con fines didácticos, utilizando la geometría dinámica, de manera tal que se optimice su comprensión.En este nivel ya se está en el campo de la Didáctica de las Matemáticas. En específico, la cuestión es entendida como la búsqueda del camino que permita utilizar la informática, a través del software Cabri II plus, para lograr la comprensión de la noción de límite.

Todos estos temas, que sientan las bases del presente proyecto de innovación didáctica, y que son desarrollados a continuación, han demostrado influencia y frutos tanto en la filosofía de la matemática como en la didáctica de las matemáticas. Como se puede apreciar en el esquema de la página siguiente (Gráfico1), se ha intentado visualizar lafundamentación teórica en forma integral.

Gráfico N° 1: Mapa mental de la Fundamentación Teórica del Proyecto de Innovación



Fuente: Elaboración propia

2.1 FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA

Las disciplinas científicas tienen un sistema en base al cual se organizan. En esa estructura científica ocupa un lugar importante la concepción filosófica, una manera peculiar de ver el mundo. La concepción filosófica se relaciona con la visión epistemológica empleada en el conocimiento científico, y a su vez tiene influencia sobre determinadas visiones didácticas y pedagógicas. Es por ello necesario señalar primero los fundamentos filosóficos sobre los que se basa el presente trabajo, mediante el análisis de la práctica matemática desde una perspectiva filosófica.

Desde hace más de 30 años se ha producido cambios en la práctica matemática, manifestados en el establecimiento de nuevos tipos de prueba y argumentación (Hanna, Jahnke y Pulte, 2006). Las normas y lo establecido estáncambiando por el uso de las computadoras, para la heurística o para la verificación;porque las matemáticas y las ciencias y tecnología han establecido nuevas relaciones; y porque el inconsciente social de los procesos que guía la aceptación de una prueba también ha cambiado. El cambio de la práctica matemática genera un cambio en las nuevas tendencias en la filosofía de la matemática. En realidad es un proceso dialéctico, la práctica matemática influye sobre la concepción filosófica, y el camino reverso también se cumple. Desdehace muchos años, la filosofía de la matemática ha tratado de definir los fundamentos lógicos y su estructura formal, y en los últimos 40 años la búsqueda ha cambiado de dirección hacia la comprensión matemática. Podríamos afirmar que la naturaleza de las matemáticas también ha cambiado.

Dentro del campo de la filosofía e historia de la matemática el enfoque de la comprensión matemática ha cambiado profundamente. El primero en destacar estos cambios fue Imre Lakatos, a fines de los sesenta del siglo pasado, al considerar a las matemáticas como una ciencia cuasi-empírica. Su trabajo continúa siendo de gran relevancia para la filosofía de las matemáticas como para la educación matemática.

2.1.1 Imre Lakatos, enfoque deductivista vs. enfoque heurístico

Lakatos (1976) elabora una comparación entre dos estilos en la elaboración de una prueba matemática. El primero, el deductivista, es desarrollado por la metodología euclídea. Al inicio se mencionan axiomas, lemas ydefiniciones cuyo origen no es explicado, y hay que aceptar. A continuación se expresa el teorema, y por último la prueba. Lo que se espera del estudiante es que tenga cierta madurez matemática, es decir, esté dotado de la habilidad de aceptar los argumentos euclídeos sin interés en el trasfondo problemático y en la heurística del argumento. En este caso las matemáticas son vistas como un conjunto de verdades eternas e inmutables, en el que no entra el contraejemplo, la refutación y la crítica, en medio de un clima autoritario. El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura, en un medio en donde la historia se desvanece, así como las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo de la prueba, siendo el resultado final sagrado.

El estilo heurístico pone en evidencia las definiciones generadas por la prueba, las definiciones generadas por las pruebas antepasadas, así como los contraejemplos que han generado su descubrimiento. Hace hincapié en la situación problemática, en la lógica que ha dado a luz el nuevo concepto. El orden heurístico estaría dado por enunciar la conjetura, mostrar la prueba y los contraejemplos, hasta el teorema, y finalmente la definición generada por la prueba.

La práctica matemática que se propone en el presente proyecto de innovación procura estar teñida fuertemente del estilo heurístico, en tanto se incentiva a que el estudiante, ante un problema determinado, explore, conjeture, experimente, deduzca y construya por si sólo el conocimiento, a través de la manipulación y el arrastre de los objetos matemáticos, permitiéndose de esa manera el descubrimiento de las nociones matemáticas.

2.1.2 Explicación vs. justificación

Lakatos y otrosimpulsaron la experimentación en la matemática, gracias a lainfluencia de enfoques epistemológicos y cognitivos. Ligada a esta idea se da importancia a la comprensión y la explicación matemáticas como funciones de las pruebas matemáticas. Hay un cambio en los focos de atención, del rol justificativo al rol explicativo de la prueba.

> "Lo central no es sólo porqué y cómo una prueba hace una proposición verdadera, sino cómo ésta contribuye a una adecuada comprensión de la proposición en cuestión, y qué rol juega en este proceso por factores que van más allá de la lógica" (Hanna et al., 2006).

La computadora ha causado un cambio radical en la práctica educacional, los programas informáticosde matemática han optimizado la visualización y la experimentación. Ello permite al docente y a los estudiantes establecer una mayor comunicación en la clase, así como el trabajo cooperativo y en equipo.El rol de la noción tradicional de prueba ha cambiado, evolucionando nuevas formas y tipos de explicación y argumentación.

Tanto en el campo de la filosofía de la matemática como en el campo de la educación matemática,ese proceso de cambios, que en un inicio fue inconsciente, ahora es consciente. Filósofos matemáticos y educadores matemáticos, en diferentes instituciones y en diferentes programas de investigación, están trabajando en forma conjunta para fortalecer ese proceso de cambios, y desarrollar un marco teórico convergente basado en avances recientes en ambos campos.

Bajo esafundamentación teórica, el proceso didáctico para la enseñanza de la noción de límite en un entorno de geometría dinámica que se está planteando en el presente proyecto, procura que a través de la visualización yla manipulación de los objetos matemáticos dibujados y articulados, se logre la comprensión de las diferentes definiciones involucradas.

2.1.3 La enseñanza de la prueba

Basada en el análisis de diferentes estudios sobre el problema de la enseñanza de la prueba, Hanna (1989) afirma que existe una tendencia creciente a alejarse de las pruebas formales en el currículum, y a dar más énfasis al criterio social para la aceptación de una prueba (Volmink 1988, Movshobits-Hadar 1988, Alibert 1988, citados por Hanna 1989). En ese contexto señala una distinción entre pruebas matemáticas que prueban y pruebas matemáticas que explican, siendo ambas legítimas, pues todas cumplen con los requisitos de las pruebas matemáticas, aunque hay diferencias de opinión sobre el grado de rigor. Las pruebas que explican inciden en el argumento convincente (Balacheff 1988, citado por Hanna 1989), en el rol de la prueba como un medio de comunicación de ideas matemáticas, generándose nuevas maneras de enseñar las pruebas. Las pruebas que prueban solo muestran que un teorema es verdadero, las pruebas que explican, además de mostrar que es verdadero también muestran porque es verdadero, pues resaltan las propiedades matemáticas características que implican el teorema a ser probado, es decir, el resultado depende de las propiedades. Es pues necesario sustituir las pruebas no explicativas por otras tan legítimas como las primeras, pero con un poder explicativo brindado por las propiedades matemáticas en las que se basan y por el mensaje matemático del teorema. Los educadores matemáticos tenemos la tarea de hacer comprender las matemáticas a los estudiantes, y para ello es importante poner en primer plano en el currículum las pruebas que explican (Knuth, 2002).

2.1.4 Visualización y prueba desde la Filosofía de la Matemática

Desde hace más de dos décadas las investigaciones sobre el uso de las representaciones visuales y su contribución potencial a las pruebas matemáticas son más numerosas e importantes, principalmente porque las computadoras han aumentado las posibilidades de visualización. Además del papel tradicional de las representaciones visuales como evidencia o fuente de inspiración para un enunciado matemático, se analiza hasta qué punto las representaciones visuales pueden utilizarse también en su justificación, como sustitutos de la prueba tradicional (Hanna, 2007).

Investigadores en matemáticas han estudiado este tema y las diferentes posiciones al respecto abarcan desde la más tradicional, que considera a la visualización como complemento útil para la prueba (Bardelle, 2009), y que puede mostrar el camino para una prueba rigurosa pero que es incapaz de sustituir el rigor en la verificación del conocimiento adquirido por esa vía. En un término intermedio se ubican los investigadores que consideran que las representaciones visuales pueden desempeñar un papel esencial, aunque limitado en las pruebas, y señalan que en algunos casos las pruebas visuales pueden constituir pruebas si cumplen unos requisitos. En el otro extremo, hay investigadores que señalan que las representaciones visuales pueden constituir pruebas por sí misma (Giaquinto, 2007). La información puede ser presentada de manera lingüística y no lingüística. La lógica proposicional es sólo representación lingüística. La tarea que se proponen es extraer la información implícita en una representación visual de tal manera que se obtenga una prueba válida. Algunos investigadoresno creen que el razonamiento visual y el proposicional sean mutuamente excluyentes, y han elaborado el concepto de "prueba heterogénea", (Barwise y Etchemendy 1991, citados por Hanna 2007) en donde se facilita el razonamiento con objetos visuales. Se dirige la atención al contenido de la prueba, enseña el razonamiento lógico y la construcción de la prueba mediante la manipulación visual y la información proposicional de una manera integrada.

En resumen se puede apreciar que no existe consenso sobre las funciones de la visualización en las matemáticas, en específico en sus papeles de explicación y justificación de la prueba, aunque su papel como ayuda a la comprensión matemática si es aceptado por todos. En Educación Matemática hay investigaciones que muestran que la geometría dinámica tiene éxito en la mejora de la capacidad de los estudiantes de darse cuenta de los detalles, en conjeturar, reflexionar e interpretar relaciones y ofrecer explicaciones provisionales y pruebas, investigaciones que apoyan a la literatura matemática sobre la visualización y su ayuda en la comprensión matemática.

2.1.5 Prueba y visualización desde la Educación Matemática

En el salón de clases el papel clave de la prueba es la promoción de la comprensión matemática (Hanna, 2000). Una de las maneras más eficaces para llegar a ella es el uso de la geometría dinámica, pues ayuda a desarrollar en los estudiantes el razonamiento matemático, produce pruebas válidas y mejora la comprensión de las matemáticas. En relación a la prueba, incluso para los matemáticos experimentados, el carácter riguroso de ella, a pesar de ser definida, es secundaria frente a la comprensión. Es convincente y legítima cuando lleva a la comprensión. Entre las diversas funciones de la prueba, verificación, explicación, sistematización, descubrimiento, comunicación, construcción, exploración e incorporación, las dos primeras son las fundamentales, pero en el ámbito educativo la que ocupa el primer lugar es la explicación, por lo que se valora más la prueba que mejor explica (Carter, 2009).

Existe un consenso entre los matemáticos sobre que la intuición, la especulación y la heurística son útiles en las etapas preliminares de la obtención de resultados matemáticos, y que el razonamiento intuitivo sin prueba no constituye una rama especulativa, separada de las matemáticas. El software de geometría dinámica ha dado un impulso a la intuición, especulación y la heurística, gracias a la exploración de los objetos matemáticos mediante el arrastre. Se alienta la exploración y la prueba pues es fácil plantear y probar conjeturas. Sin embargo esas potencialidades no deben fundamentar un enfoque totalmente experimental de la justificación matemática, ni desdeñar el aspecto central de la prueba en la teoría y práctica matemática. Lo que se debe hacer es usar ambas, exploración y prueba, pues son complementarias y se refuerzan mutuamente. La exploración conduce al descubrimiento y la prueba es la confirmación del descubrimiento. El uso del software de geometría dinámica en la heurística, la exploración y la visualización fomentan la comprensión de la prueba (Ruthven, 2009).

Tanto en la filosofía matemática como en la educación matemática existe una mutua conciencia de los nuevos tipos de prueba y explicación, principalmente a causa de la visualización y la geometría dinámica, conciencia que es necesario fortalecer, y, además, es necesario contribuir a desarrollar un marco teórico convergente basado en avances recientes en ambos campos, a la luz de las fuertes tendencias empiristas y realistas ahora compartidas y trabajadas por filósofos matemáticos y educadores matemáticos en diferentes instituciones y en diferentes programas de investigación.

2.2 ENFOQUES DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

La Didáctica de la Matemática, expresión empleada en Francia, Alemania y España, o Educación Matemática, tal como es conocida en el mundo anglosajón, es una disciplina científica o área del conocimiento. Aunque algunos consideran que ambos términos son equivalentes, en realidad no lo son pues descansan sobre diferentes supuestos.

La Educación Matemática, del mundo anglosajón, se fundamenta en un enfoque clásico que considera como central la actividad cognoscitiva del sujeto, la cual debe primero ser descrita y comprendida de manera relativamente independiente. De igual manera los conocimientos sobre el conocimiento necesario para la enseñanza, así como los conocimientos sobre las relaciones sociales, deben establecerse de manera independiente. Los subsistemas del sistema didáctico, el enseñado, el enseñante, el medio son estudiados cada uno independientemente.

Por otro lado, la Didáctica de la Matemática (Brousseau, 1986) presenta una concepción global de los subsistemas del sistema didáctico. El sistema didáctico entero se toma en conjunto como objeto de estudio, el cual es la descripción y explicación de actividades ligadas a la comunicación de conocimientos matemáticos, y las transformaciones, intencionales o no, de los protagonistas (enseñado, enseñante, medio) de esta comunicación, así como las transformaciones del conocimiento mismo (saber). El desglose del sistema se hace en hiposistemas llamados situaciones.

2.2.1 La Escuela Francesa

Desde esa perspectiva la Escuela Francesa de Didáctica de las Matemáticas estudia las actividades didácticas, que tienen como objetivo específico la enseñanza de las matemáticas. En ese ámbito los resultados se refieren a los comportamientos cognoscitivos de los estudiantes, pero también a los tipos de situaciones desarrolladas para enseñarles, y los fenómenos derivados de la comunicación del saber. El objeto de estudio puede ser examinado desde diferentes ángulos: el saber y el trabajo del matemático, el trabajo del estudiante, y el trabajo del profesor.

En la medida que el presente trabajo de investigación se desarrollará desde la perspectiva de la Didáctica de la Matemática, se va a explicar a continuación los supuestos (Ruiz, Chavarría, y Alpízar, 2006), (Brousseau, 1986) dentro de ese enfoque, sobre los cuáles se elaborará la propuesta didáctica de la noción de límite en un entorno de geometría dinámica.

a) El saber y el trabajo del matemático

El saber constituido se presenta en varias formas. Una de ellas es la presentación axiomática del saber matemático, clásica de las matemáticas, que parece estar adaptada a la enseñanza. En ella se define los objetos que se estudian en base a las nociones introducidas anteriormente para así organizar la adquisición de nuevos conocimientos. En un mínimo de tiempo se acumula un máximo de conocimientos cercanos al conocimiento erudito. Pero esta presentación elimina la historia de esos conocimientos, las dificultades en que aparecieron esos conocimientos, cómo fueron usados para plantear nuevos problemas, la aparición de técnicas tomadas de otros sectores, y toda la discusión relacionada al tema. La ciencia no funciona, no se desarrolla de forma axiomática, avanza y retrocede en medio de errores, de una búsqueda tortuosa y ardua de la verdad, guiada por la única pasión de conocerla. De ahí que la presentación axiomática da a conocer una génesis ficticia del conocimiento científico.

Con fines de enseñanza el conocimiento matemático debe de ser transpuesto en el contexto escolar, aislándose algunas nociones y propiedades del contexto de las actividades que originaron ese conocimiento, y que le dieron utilidad y sentido. Este proceso, la transposición didáctica, constructo teórico desarrollado por Yves Chevallard (1989), es necesario, útil e inevitable, pero también cuestionable, y debe ser vigilado constantemente. Con fines de ser comunicado, el productor del conocimiento, el matemático, despersonaliza, descontextualiza y destemporaliza el saber nuevo. Tiene que reordenar los conocimientos vecinos, buscando una teoría más general en que los resultados siguen siendo valederos. Los conocimientos son organizados de acuerdo a las exigencias que la comunicación de ellos impone al autor. Todas estas consideraciones son tomadas en cuenta en la transposición didáctica desarrollada por la comunidad científica.

b) El estudiante

Por el lado del estudiante, su trabajo intelectual debería ser algo equivalente a una actividad científica. Para lograr ello sería necesario que el estudiante actúe, formule, pruebe, especule, demuestre, logre la construcción de modelos, de nociones y teorías. No sólo debe aprender definiciones y teoremas, y saber cuándo aplicarlos para resolver problemas. Resolver problemas es sólo una parte del trabajo, también tiene que aprender a plantear cuestionamientos. Para lograr que el estudiante pueda simular realizar una actividad científica el profesor debe elaborar situaciones susceptibles de ser vividas por el estudiante y planteárselas, de tal manera que descubra la solución óptima a los problemas mediante el uso de los conocimientos que el profesor desea que aparezcan (Godino, 2010).

c) El profesor

El profesor, hasta cierto punto como investigador, debe recontextualizar y repersonalizar los conocimientos, de tal manera que esos conocimientos se conviertan en propios del estudiante, al significar una respuesta natural del estudiante a ciertas condiciones particulares, adquiriendo así un sentido para él. El conocimiento debe nacer de la adaptación del estudiante a una situación determinada, en medio de un contexto y de relaciones que son establecidas por el álgebra, la aritmética, u otra área de la matemática. (Valero, 1997)

La clase de matemática debería simular ser una microsociedad científica, de tal manera que los conocimientos producidos por el estudiante planteen buenos problemas y solucionen debates, desarrollando el lenguaje a través de situaciones de formulación, y convirtiendo las demostraciones en pruebas. El profesor debe crear los medios para que el estudiante encuentre en esasituación el saber cultural que sequiere enseñar, redescontextualizando y redespersonalizando su saber, e identificándolo con el saber científico de la época. Dentro de esta perspectiva,

> “…el acento se pone fuertemente sobre todas las actividades sociales y culturales que condicionan la creación, el ejercicio y la comunicación del saber y de los conocimientos.” (Brousseau, 1986).

En el presente proyecto de innovación se tratará de llevar el saber matemático, la noción de límite, de sucesiones y de funciones, a un entorno de geometría dinámica, en donde se pretende que el estudiante, a través de la visualización, manipulación y experimentación desarrolladas mediante las actividades propuestas, consiga comprender intuitivamente las nociones involucradas.

2.2.2 La Visualización

Para Miguel de Guzmán (1996) los conceptos y métodos matemáticos tienen gran riqueza de contenidos visuales que pueden ser representados intuitiva y geométricamente, y que son muy útiles tanto para la comunicación matemática como para resolver problemas. De igual manera la ayuda visual es muy eficaz para el trabajo creativo y el dominio del campo de los expertos en matemáticas.

En el proceso de desarrollo de la matemática la Aritmética surge para dominar la multiplicidad que existe en la realidad; la Geometría aparece para explorar la forma y la extensión; el Álgebra, en una abstracción de segundo orden, estudia las estructuras que subyacen a los números y a las operaciones; y el análisis matemático busca estudiar las estructuras del cambio que se da en el tiempo y en el espacio. En ese proceso de entender las estructuras comunes de las cosas se realiza una matematización de la realidad, y en ella la percepción visual es importante tanto en la Geometría, al estudiar el espacio, como en el Análisis al explorar los cambios de los objetos en el espacio y tiempo. En el caso específico del Análisis las ideas básicas de orden, distancia, surgen de situaciones intuitivas y visuales, de allí la necesidad de recurrir a los objetos concretos para utilizar con habilidad los objetos abstractos.

Los fenómenos de visualización deben de ser interpretados, codificados y descodificados, mediante procesos de carácter personal, pero inmersos en procesos sociales que se han construido a lo largo de la historia de la matemática. Es por ello que la visualización es un proceso de aprendizaje al cual se podría no tener acceso sino hay una adecuada interpretación de lo que se contempla (Gómez-Chacón, 2011). De allí la importancia de aprender a leer lo que se quiere comunicar. La iniciación a la visualización en la enseñanza no es una tarea fácil pues hay que ser conscientes que el que aprende no está familiarizado en esa tarea. Además, la tarea de decodificación es compleja porque hay diferentes formas de visualización, según el grado de correspondencia entre la situación matemática que tratamos de visualizar y la forma que empleamos para hacerlo.

Visión histórica de la visualización

La visualización siempre se utilizó en el trabajo creativo de los matemáticos desde los inicios de la humanidad (Guzmán, 1996).

Para los griegos la palabra ζεορεμα(zeorema) es lo que se contempla, no lo que se demuestra, de allí que era indispensable la visualización en matemática. Para los clásicos antiguos la visualización era connatural a la matemática.

En la Edad Moderna René Descartes estableció varias reglas relacionadas con la visualización. La Geometría Analítica surgió para unir la imagen de la Geometría Sintética Griega con el Álgebra. En el siglo XVII el Cálculo surge a través de la visualización, relacionado con problemas geométricos y físicos. Lagrange consideraba que era importante que el matemático desarrollara la facultad de observación. Gauss llamó a la matemática como la ciencia del ojo.

En el siglo XX surgen las tendencias formalistas que dejan a segundo plano a la visualización. Fueron las Geometrías No Euclidianas las que condujeron a desconfiar de la visualización. Era necesario que la fundamentación matemática sea orientada hacia la formalización. Lo negativo fue que también se extendió a la intercomunicación en la comunidad matemática, y peor aún, se extendió a la educación matemática, a nivel superior, secundario y lo que es más grave, a nivel primario. El modelo formalista imperó hasta finales del siglo XX (Guzmán, 1996).

En la actualidad hay un retorno de la visualización en el quehacer matemático y entre los que se dedican a la investigación en Educación Matemática, principalmente entre los que exploran las bondades de la informática en la Matemática, que son pocos, pero cuyo número va creciendo cada vez más. Es que el software aplicado a la enseñanza de las matemáticas facilita la visualización de los objetos matemáticos. Pero no es sólo eso. La importancia de lo visual va más allá, no sólo se debe considerar a lo visual como argumento heurístico, que ayuda en el desarrollo de la intuición, sino también lo innovador es utilizar la visualización para el desarrollo de la prueba y la demostración. Ese es el camino.

Importancia de la visualización en la Matemática

La imagen es el elemento central en la visualización. La imagen muchas veces propicia el surgimiento de nociones y procesos matemáticos, pues gracias a ella se pueden establecer relaciones entre los objetos matemáticos, que posibilitarán encontrar soluciones a problemas. La imagen ayuda al desarrollo de la memoria a partir de la comprensión de las nociones, pues sirve de ayuda para la teoría. ‘Una imagen vale más que mil palabras’, esta afirmación indica que es un vehículo de transmisión rápida de las ideas (Ramírez y Flores, 2010)

La visualización es útil en la matematización, en la enseñanza-aprendizaje y en la investigación, en todas las áreas de la matemática. Pero la capacidad de visualización debe de ser ejercitada y entrenada, tanto en el aspecto de traducir lo formal a un registro gráfico, como en la habilidad de interpretar las imágenes. La

Educación Matemática se ha dedicado muy poco a enseñar a interpretar y descodificar las visualizaciones traduciéndolas al lenguaje formal.

A los estudiantes se les debe enseñar a desarrollar el aspecto intuitivo que tal vez no es tan consciente. Es por ello que la tarea de la visualización tiene elementos fuertemente subjetivos. Las maneras de visualizar y hacer cercanas e intuitivas las ideas del análisis dependen mucho de la estructura mental de cada uno. Tanto la Teoría de las Inteligencias Múltiples (Ramírez y Flores, 2010) como lo que se sabe acerca de los estilos de aprendizaje, nos señalan que hay diferentes tipos de inteligencia, y que aprendemos de diferentes maneras. Es por ello que la visualización es más necesaria en unos más que en otros, pero de todas maneras es útil en todos los casos. Si bien es cierto una visualización incorrecta puede conducir a errores, eso no invalida su eficacia y potencia en el trabajo creativo, en la comunicación y transmisión de las matemáticas, en general en todos los procesos que ella requiere.

Desde épocas antiguas la visualización se desarrolló a través de medios escritos, que si bien ayudan en el trabajo matemático, su carácter estático limita la potencia de la imagen. En la actualidad el uso de la informática en la enseñanza y aprendizaje de la matemática permite acceder a visualizaciones de carácter dinámico, que superan ampliamente a las imágenes de los libros, donde se trasmite el producto final, y también superan a las gráficas que se elaboran cuando en una presentación oral se escribe en una pizarra. El estudio del cambio en cantidades muy pequeñas, propio del análisis, puede ser visto con mucha mayor claridad con la visualización dinámica de un programa informático como Cabri, y ese aspecto es el que queremos explotar en el proyecto de innovación sobre la enseñanza y aprendizaje de la noción de límite.

2.2.3 Enseñanza del Cálculo

Perspectiva histórica en la enseñanza introductoria del Cálculo

Las investigaciones en el campo de la Didáctica de los últimos 30 años han dado a conocer que existe una gran dificultad en los estudiantes para comprender las nociones relacionadas al pensamiento analítico, cuando el Análisis no se reduce a la aplicación de algoritmos algebraicos. Michèle Artigue (1995, 1998) trata de sintetizar los resultados más importantes de las investigaciones didácticas hasta esa fecha, elaborando una visión personal del estado del arte, tanto de los procesos de aprendizaje en el campo del Análisis como de las prácticas de enseñanza en el bachillerato francés, que ilustran las tendencias generales.

a) La Reforma de 1902

Al inicio del siglo XX Francia realizó una reforma de los liceos, institución que corresponde a los tres últimos años de educación secundaria y que termina en el bachillerato. Con un espíritu positivista se pretendía adaptar los programas a la evolución de las matemáticas, de la ciencia y de la técnica, introduciendo el cálculo. En ese proyecto trabajaron Poincaré, Hadamard, Borel, Darboux y otros matemáticos prestigiosos (Beke 1914, citado por Artigue 1998). En 1904Poincaré señaló que con la reforma se procuró enseñar un cálculo adaptado a las capacidades cognitivas de los estudiantes.

El informe Beke probó que la reforma francesa no era un movimiento exclusivo de Francia sino que a nivel internacional se veía la necesidad de enseñar al estudiante las herramientas del cálculo diferencial e integral para el trabajo científico. El positivismo impregnó de una concepción experimental a las matemáticas, vinculándola con la realidad y con otras ciencias. La reforma fue un éxito aunque los matemáticos no se dieron cuenta de las dificultades de la introducción del cálculo dentro de cuadro algebraico.

b) Las Matemáticas Modernas en los 60

Desde otra perspectiva de la enseñanza de las matemáticas, con una repercusión mundial, destaca la influencia del Grupo Bourbaki. El grupo Bourbaki fue fundado en 1934 en Francia para modernizar la enseñanza del cálculo diferencial en la licenciatura en matemáticas, privilegiando las estructuras algebraicas. En los años 60 se pretendió llenar el desfase entre las matemáticas enseñadas en la secundaria y las matemáticas que eran practicadas por la comunidad de matemáticos, con el movimiento conocido como las Matemáticas Modernas (Ruiz, 2009). Produjo un gran perjuicio a la educación básica. Se introdujeron notaciones de conjuntos, cuantificadores y estructuras algebraicas, es decir el formalismo, ocupando un lugar importante las definiciones. La visión filosófica que subyace a esta reforma es del estructuralismo. Posteriormente la reforma y la visión que proclamaba fueron rechazadas.

c) La Contrarreforma

Esta reforma de los años ochenta no surge del ámbito de los matemáticos sino de los profesores que pertenecían al APMEP (Asociation des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public), y a los IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques). Las críticas de la Comisión inter-IREM (Artigue, 1995, 1998) llamada Cálculo se resumen en:

- Se introduce las nociones sin plantear problemas, o con problemas fuera del contexto del estudiante.
- Los conocimientos se construyen linealmente sin relacionarlos con la resolución de problemas.
- El lenguaje formalizado es introducido muy temprano.
- La enseñanza está centrada en el profesor.

La concepción de las matemáticas cambia, en tanto ya no es considerada estructura ni lenguaje sino una actividad histórica, que ha sido construida por el hombre buscando resolver problemas intra y extra matemáticos. En esa perspectiva es importante el estudio de la historia de las matemáticas y considerar que el saber matemático debe ser equilibrado con el funcionamiento cognitivo del estudiante, cada vez más conocido por el avance de las teorías del aprendizaje.

Las soluciones a la problemática antes señaladas serían las siguientes (Moreno, 2005):

- Organizar las actividades de enseñanza teniendo como eje problemas claves relacionados al tema. En el caso del Análisis relacionadas con problemas de aproximación y optimización
- Desarrollar un enfoque intuitivo y constructivista del aprendizaje.
- Elaborar niveles de formalización accesibles a los estudiantes, procurando formalizar lo necesario de una manera progresiva.
- Incidir que los estudiantes desarrollen una exploración numérica y gráfica utilizando calculadoras.

Sin embargo la experiencia posterior a los ochenta ha demostrado que la enseñanza del cálculo no ha dejado ser problemática, a pesar de que está más cercana al estudiante. Lo que sí ha quedado establecido es que no se puede enseñar de golpe el cálculo bajo su forma definitiva. A toda acción hay una reacción opuesta. El asunto no es situarse en los extremos sino en el punto medio. La cuestión es, si se parte de un enfoque intuitivo en base a problemas que dan sentido al cálculo, ¿Cómo manipular los objetos matemáticos inmersos de tal forma que el estudiante llegue progresivamente a una formalización comprensible por él? Esa es la tarea que este trabajo pretende resolver.

Dificultades en la Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo

Diversas investigaciones (Artigue, 1995, 1998) (Vrancken, Gregorini, Engler, Müller y Hecklein, 2006) agrupan las dificultades que tienen los estudiantes para acceder al cálculo en las tres grandes categorías que se describen a continuación:

1. Dificultades relacionadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo

Los números reales, las sucesiones y las funciones son objetos matemáticos que se conceptualizan a plenitud en el proceso de enseñanza del cálculo.

En relación a los números reales se puede afirmar que:

- Para los estudiantes no existe mucha claridad en las relaciones que existen entre los diferentes conjuntos de números encontrados en las sucesivas extensiones del cuadro numérico (enteros, fracciones, decimales, números con radical). De ahí que frecuentemente se asocia número real con número decimal.
- La asociación de los números reales con la recta numérica no toma en cuenta la visión del continuo numérico. Al inicio del estudio del cálculo se considera que los números reales son objetos algebraicos. Existen dificultades para que los estudiantes adquieran una concepción topológica de los números reales. Si A es 0.999… y B es 1, no se concibe que si dos números A y B satisfacen la condición $\forall n > 0, |a - b| < \frac{1}{n}$, entonces son iguales.

Con respecto al objeto matemático función (Moreno, 2005):

- Existen dificultades relacionadas con la comprensión de lo que es una función, así como el caso especial de las sucesiones como funciones. Los estudiantes para reconocer una función mayormente no utilizan la definición de función sino asocian la función con la fórmula, o asocian la función con la curva regular, lo que lleva a rechazar funciones o a admitir objetos que no son funciones.
- Los objetos matemáticos tienen dos status: el operacional, dinámico, y el estructural, estático. Hay un salto cualitativo entre dos niveles de conceptualización de la noción de función: el nivel de proceso y el nivel de objeto (Dubinsky, 1994). Si ese salto no se da los estudiantes les es difícil identificar como iguales funciones generadas por procesos

equivalentes pero diferentes, o cuando trabajan con funciones definidas por una propiedad general. Muchos estudiantes se quedan en el primer nivel y les es difícil considerar a las funciones como objetos que intervienen en procesos más complejos, como la integración y la diferenciación.

- De igual forma existen dificultades en la representación y trabajo con funciones desde diferentes registros semióticos, gráfico, algebraico, etc., así como en el trabajo de traducción de un registro semiótico a otro, principalmente del gráfico al algebraico. También existen dificultades de utilizar diferentes nociones dentro de un mismo registro. Hay una sobrevaloración del registro algebraico sobre el registro gráfico. (Vrancken, Gregorini, Engler, Müller y Hecklein, 2006)
- Los estudiantes tienen dificultades para acceder al pensamiento funcional, superando los modos de pensamiento numérico y algebraico.

2. Dificultades Asociadas a la Conceptualización y Formalización de la Noción de Límite

La noción de límite es central en el Cálculo, de ahí la importancia de su enseñanza. Uno de los enfoques más interesantes que se han desarrollado para poder comprender las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la noción de límite, es aquel que se relaciona con la noción de *obstáculo epistemológico*, desarrollada por el crítico y filósofo francés Gastón Bachelard en 1938, y que es utilizada por Guy Brousseau (1983).

Los obstáculos epistemológicos

La noción de obstáculo epistemológico no tiene que ver con la ausencia de conocimiento, sino a las dificultades que se tienen con los conocimientos adquiridos. El conocimiento científico no se adquiere de manera lineal, continua, sino en un proceso que necesita rupturas con conocimientos anteriores (Contreras, 2001). De lo contrario los conocimientos adquiridos con anterioridad se convierten en obstáculos que originan errores en el quehacer matemático de los estudiantes. Se pueden señalar varios ejemplos. Para poder entrar en el pensamiento funcional se requiere liberarse de la concepción estática de las matemáticas griegas, y superar los pensamientos aritmético y algebraico, históricamente anteriores. Lo mismo sucede cuando se quiere entrar al pensamiento analítico. Entrar a esos pensamientos matemáticamente superiores implica no poder generalizar espontáneamente las propiedades vigentes en los pensamientos aritmético o algebraico a los objetos nuevos. Esa es la ruptura. Darse cuenta que el nuevo nivel necesita de nuevas reglas y propiedades, y que lo que era válido antes ahora no lo es. Sin embargo es muy difícil liberarse de esas ideas, y por ello se cometen errores (Cid, 2000).

Para Brousseau el aprendizaje implica una interacción constante del estudiante con situaciones problemáticas, en ese juego dialéctico el estudiante utiliza conocimientos anteriores, los valida, cambia, acepta o rechaza. De esa interacción surgen concepciones nuevas. Con ese fin la didáctica estudia cuáles son las condiciones que deben tener las situaciones o los problemas propuestos al estudiante, para quesurjan nuevas concepciones y se rechacen las concepciones antiguas. Así los problemas más interesantes serán aquellos que permitirán franquear un verdadero obstáculo. Es por ello que Brousseau examina la cuestión de los obstáculos en didáctica.

Errores

Brousseau señala que el error y el fracaso en el quehacer matemático no tienen una explicación tan sencilla como parece. El error no es solamente producto de la ignorancia, de la incertidumbre, sino consecuencia de un conocimiento adquirido, válido anteriormente pero que ahora es falso, o no se adapta a la situación nueva. Estos errores vuelve a reproducirse, son previsibles.

Los errores muchas veces no son explícitos. No desaparecen fácilmente, se resisten a desaparecer, y se vuelven a cometer a pesar que el estudiante conscientemente superó el modelo obsoleto en su sistema de conocimientos. Muchas veces las ideas erróneas se apoyan en definiciones adquiridas en la enseñanza elemental que son muy difíciles de superar.

El estudianteal enfrentarse a situaciones nuevas pone a prueba su sistema de conocimientos, y si no le es útil lo considera como ineficaz y lo reconsidera. Esta situación se da en medio de la dialéctica del estudiante con el objeto de su conocimiento, y de interacciones rechazadas. Se necesita queel estudiante interactúe con su medio, con una situación que hace al conocimiento óptimo. “El objeto de la didáctica viene a ser modificar las condiciones de la interacción de manera tal que se dé un salto cualitativo” (Brousseau, 1983).

Los obstáculos pueden deberse a varias causas, a varios tipos de orígenes, por ejemplo,origen ontogenético, limitaciones neurofisiológicas; origen didáctico;

uorigen epistemológico. Los obstáculos epistemológicos son inevitables, pues su origen surgeen la historia de los conceptos (Cid, 2000).

Para franquear los obstáculos epistemológicos se plantea un problema, una situación en la que el estudiante tendrá que dar intercambios sucesivos. En esa dinámica el estudiante trabaja sobre la cuestión que constituye su obstáculo, y se apoya en él para construir un conocimiento nuevo. El estudiante cuestiona la situación y controla el proceso, de tal manera que la resolución del problema se dará en un proceso experimental. El proceso de franqueamiento de un obstáculo se da en medio de sucesivas interacciones entre el estudiante y el medio, con la finalidad de que éste haga suyo el concepto en el que surge la significación. Es un proceso dialéctico.

En el proceso de franqueamientose debe proponer una situación que haga desarrollar al estudiante. El asunto no es comunicar informaciones a enseñar, de lo que se trata es de diseñar situaciones en las que se necesite utilizar la información que queremos que los alumnos aprendan, y que esas informaciones sean las únicas que puedan ser usadas para resolver el problema. La situación exige al estudiante que utilice todos sus recursos, sintiendo de esa manera una motivación intrínseca, una satisfacción producto del conocimiento descubierto ysu habilidad para resolver el problema.

Considerando lafundamentación teórica sobre los obstáculos epistemológicos, se pueden señalar los siguientes obstáculos asociados a la conceptualización de la noción de límite (Artigue, 1995, 1998):

- El empleo de la palabra límite facilita que se conciba la noción de límite como una barrera infranqueable, como el término final de un proceso (Hitt y Páez, 2005).
- Las propiedades de los procesos finitos se sobregeneralizan a los procesos infinitos, no se señala la diferencia que tiene con las operaciones algebraicas comunes.
- Patrick. W. Thompson (1985, citado enPelczer y Gamboa 2007.) desarrolla supuestos teóricos que plantean que los conocimientos matemáticos tienen un factor dual: como objetos y como procesos (Dubinsky, 1994). Ejemplos de objetos son los números, las variables, las funciones, los cuáles se interconectan a través de relaciones. Las operaciones sobre los objetos generan procesos. La complejidad del conocimiento matemático se debe a ese carácter dual, y a la dificultad que esa dualidad produce en el

entendimiento de las nociones. Según Thompson se produce el aprendizaje matemático cuando se transforman los procesos en objetos. La noción de límite también tiene un doble status, uno operacional y otro estructural, como proceso y como objeto. Para el estudiante es difícil distinguir los dos status, el objeto de proceso que lo produce. Un ejemplo que puede clarificar el problema mencionado es cuando se le pide a los estudiantes comparar los números 0,9999… y 1. El primero es de tipo proceso y el segundo de tipo objeto. "Para considerar las dos como iguales, es necesario no caer en la trampa de estas diferencias semióticas y ser capaz de ver más allá del proceso descrito por 0,999…, el número creado por este proceso y distinto de él." (Artigue, 1998, p. 44)

- Sierpinska (1985, citada por Pelczer y Gamboa 2007) propone un obstáculo geométrico en el aprendizaje de la noción de límite. La representación geométrica no permite identificar los objetos en el cuadro numérico sobre los cuales se lleva a cabo el proceso del límite, y deja fuera de lado la estructura topológica que subyace.
- El obstáculo lógico viene a estar dado por las características de la definición formal de la noción de límite. Existe una complejidad lógica expresada por los cuantificadores y las implicaciones lógicas, y por el hecho de que la definición "invierta la dirección del proceso función que va de la variable x al valor de la función f(x)" (Artigue, 1998, p.44). En la historia de la noción de límite hay un salto cualitativo fundamentalentre la concepción intuitiva del concepto y su definición formal. Esta última rompe con las concepciones previas de esta noción, cumpliendo en ese contexto un papel trascendental como concepto unificador en el campo del análisis, más importante que su papel como instrumento para resolver problemas. Esta dimensión epistemológica no es tan fácil de transponer utilizando problemas apropiados que los estudiantes puedan resolver.

3. Dificultades relacionadas con la ruptura con el modo de Pensamiento Algebraico, y con el trabajo técnico del Cálculo

Si bien es cierto el trabajo matemático en el Cálculo se apoya en competencias algebraicas, es necesario trascender el pensamiento algebraico para llegar al pensamiento analítico. Marc Legrand (1993, citado por Artigue 1998) señala algunas dimensiones en las que se organiza la ruptura entre el pensamiento algebraico y el pensamiento analítico.

Así como en la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico es necesario reconstruir la noción de igualdad, para entrar al mundo del análisis se debe enriquecer la noción de igualdad, desarrollando nuevas técnicas para demostrar igualdades. En el álgebra para demostrar la igualdad de dos expresiones se utilizan equivalencias sucesivas. En el análisis se utiliza la igualdad como una proximidad local infinita, es decir que, si a una distancia óptima, $\forall\ \varepsilon > 0\ d(A,B) < \varepsilon,\ entonces\ A = B$. Vemos que en esta definición de igualdad, las desigualdades y el modo de razonamiento local por condiciones suficientes, ocupan un papel muy importante. Además es evidente que hay un aumento en la dificultad técnica del trabajo matemático (Bosch y Gascón, 2004).

Otra dimensión de la ruptura del álgebra y el análisis se da cuando los estudiantes tienen que reconstruir objetos matemáticos conocidos anteriormente. Es el caso de la noción de tangente, primero conocida como un objeto geométrico que toca en un punto al círculo, y posteriormente definida en el análisis como la recta que toca en un punto a la curva, siendo la pendiente de la recta el valor de la derivada de la función asociada en el punto.

2.2.4 Aportes de Hitt y Páez para vencer las dificultades en el aprendizaje de la Noción de Límite

Las dificultades en el aprendizaje de la noción de límite determinadas en investigaciones realizadas por Hitt y Páez (2005) coinciden en esencia con las señaladas en el punto 2.2.3. Ambos investigadores sugieren que, en base a experiencias realizadas por Tall y Schwarzenberger, Sierpinska, Cornu, entre otros, una de las vías para vencer los obstáculos epistemológicos relacionados con el aprendizaje de la noción de límite, es a través de la creación de conflictos cognitivos en los estudiantes, pero no a partir de un tratamiento numérico, tabular, algebraico o gráfico. La idea es generar una discusión rica en torno a las ideas intuitivas de los estudiantes con actividades de carácter geométrico, usadas en un ambiente de clase de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión. Del conjunto de actividades propuestas por otros investigadores y recopiladas por Hitt y Páez, hemos seleccionado dos de ellas para iniciar la construcción de la noción de límite de sucesiones utilizando la geometría dinámica. Las actividades 1 y 2 sobre límite de sucesiones que se encuentran en el Apéndice 8 se basan en esa recopilación. Es necesario señalar que para facilitar la construcción de las figuras en Cabri II plus, en la actividad N° 2 se utilizaron círculos en lugar de los semicírculos que originalmente estaban propuestos por los investigadores.

2.3 LAS MATEMÁTICAS

Las matemáticas, considerada por algunos como la madre de las ciencias, distingue dentro de sus múltiples ramas, cuatro objetos básicos de estudio:la cantidad, la estructura, el espacio y el cambio, que corresponden a la aritmética, el álgebra, la geometría y el análisis. La noción de límite está relacionada principalmente con el análisis, aunque también se expresa algebraica, aritmética y geométricamente.

2.3.1 El AnálisisMatemático

El Análisis Matemático como rama independiente, fue creado en el Siglo XVII, durante la revolución científica (Jahnke, 2003). Kepler, Galileo, Descartes, Fermat, Huygens, Newton y Leibniz, entre otros, contribuyeron a su génesis. Temas relacionados a la mecánica, la óptica y la astronomía jugaron un papel importante en un primer momento, así como el cálculo de áreas, volúmenes y centros de gravedad, y el análisis de curvas. Al final del Siglo XVII surge, del trabajo de Leibniz y Newton, el Análisis como una nueva disciplina matemática, cuyo objeto de estudio es el estudio de las dependencias entre cantidades variables.

Desde esos momentos ningún campo de las matemáticas ha influenciado tan profundamente en el desarrollo del pensamiento científico moderno. El uso de las ecuaciones diferenciales para comprender el comportamiento global de las cantidades variables desde sus cambios infinitesimales, ha sido importante y trascendente en nuestra visión científica del mundo, principalmente en la noción de causalidad. Desde el Siglo XVIII más científicos están de acuerdo que los procesos en la naturaleza y en la sociedad, obedecen y están determinados por leyes que pueden ser descritas en términos de ecuaciones diferenciales (Guzmán, 1983).

Lo expuesto explica la necesidad del estudio y el manejo por parte de los científicos sociales, de los científicos que estudian la naturaleza, de los ingenieros, de las herramientas derivadas del Análisis, el cálculo diferencial y el cálculo integral, y el conocimiento y la comprensión de la noción de límite, concepto básico en esta disciplina.

2.3.2 El Cálculo

Del conjunto de las matemáticas, el Cálculo o Cálculo Infinitesimal, se ha convertido en la principal herramienta para estudiar y modelizar la naturaleza. El Cálculo se divide en: cálculo diferencial y cálculo integral. Basándonos en el texto de James Stewart, Cálculo, Trascendentes tempranas (2002), se podría definir al

Cálculo como la parte de las matemáticas que trata con límites. El cálculo es menos estático y más dinámico, se interesa en el cambio y el movimiento, y de cantidades que se aproximan a otras cantidades.

Los orígenes del Cálculo (Durán, 2000) se pueden encontrar 2 500 años atrás en los antiguos griegos, cuando hallaron áreas aplicando el método del agotamiento. Es así como hallaron áreas de figuras curvas. Concretamente,Arquímedes realizó en el siglo III a.C (287 - 212 ANE) el cálculo de áreas de figuras curvas y volúmenes de sólidos delimitados por superficies curvas. En el verano de 1906, J.L. Heiberg, profesor de Filología Clásica en la Universidad de Copenhagen, descubrió un manuscrito del siglo X que incluía la obra de Arquímedes, El Método. Este documento histórico tiene una importancia especial porque nos revela una faceta del pensamiento de Arquímedes que no encontramos en ningún otro lugar. El Método nos proporciona una explicación de cómo Arquímedes descubrió muchos de sus resultados, utilizando nociones físicas, como la ley de la palanca y centro de gravedad.

Eudoxio hizo el primer uso racional del infinito y planteó el agotamiento de las magnitudes finitas substrayendo una cantidad fija. A partir del axioma de Eudoxio es muy fácil demostrar por reducción al absurdo, proposición que constituye la base del método de exhausión griego(Boyer, 1987).

Cavalieri en su obra Geometría indivisibilibus continuorum, escrita en 1635, señala como idea fundamental que un área se puede considerar formada por segmentos rectilíneos o indivisibles, y que un volumen sólido puede considerarse compuesto de secciones o áreas que son indivisibles, redescubriendo las bases metodológicas del método mecánico de Arquímedes.

Otro de los precursores del Cálculo es Grégoire de Saint Vincent, quién en su obra Opus Geometricum desarrolla un método de integración geométrico, y estudia las series geométricas.

John Wallis fue editor de obras de Arquímedes, aritmetizó los indivisibles de Cavalieri dándoles valores numéricos, convirtiendo de esta forma el cálculo geométrico de áreas en cálculos aritméticos. Fue el primero en utilizar el símbolo del infinito como el 8 acostado. Propone la siguiente genealogía del cálculo (Durán, 2000):

- Método de exhausión (Arquímedes)
- Método de los indivisibles (Cavalieri)
- Aritmética de los infinitos (Wallis)

- Métodos de las series infinitas (Newton)

Como se mencionó antes, en el Cálculo se puede distinguir dos áreas o ramas del conocimiento (Stewart, 2002) el Cálculo integral y el Cálculo diferencial. El problema del área es el problema central del cálculo integral. El problema de la tangente ha dado lugar al cálculo diferencial, el cual se inventó más de 2 000 años después que el cálculo integral,desarrollado intuitivamente por los griegos. Fueron Pierre Fermat (1601-1665), y el maestro de Isaac Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677) quienes aplicaron métodos para hallar la ecuación de una recta tangente a una curva. Ambos métodos, conocidos por Newton, tuvieron que ver con la formulación final del cálculo a la que él llegó.

En el siglo XVIII matemáticos como Euler y los hermanos Bernoulli desarrollaron el cálculo infinitesimal, sin preocuparse demasiado si sus demostraciones eran correctas por completo. Es en el siglo XIX que hubo una preocupación por aplicar el rigor en las matemáticas. Se produjo un movimiento de regreso a las bases del tema, para presentar definiciones cuidadosas y demostraciones rigurosas. Así fue como el francés Augustín-Louis Cauchy (1789-1857) tomó la idea de Newton, que Jean d'Alambert, otro matemático francés, había mantenido viva durante el siglo XVIII y la hizo más precisa. Cauchy con frecuencia utilizó desigualdades delta-épsilon, semejantes a las que vemos en la actualidad. Fue Karl Weierstrass (1815-1897), matemático alemán, quién enunció la definición de límite exactamente igual a la que se conoce ahora (Ferrante, 2009).

2.3.3 La noción de límite

El producto del presente trabajo de investigación es la elaboración de una propuesta que permita la visualización de la noción de límite en un entorno de geometría dinámica. Es por ello necesario tener la mayor claridad de lo que significa la noción de límite.

Límite de una Sucesión

Sucesión

Una sucesión matemática es una aplicación o función definida sobre los números naturales, quienes constituyen su dominio (Stewart, 2002). La sucesión está conformada por números escritos en un orden definido:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots\ldots., a_n, \ldots\ldots\ldots.$$

en donde a_1 es el primer término, a_2, es el segundo término, y en general a_n, es el enésimo término de la sucesión que responde a una ley de formación. En tanto es una aplicación sobre los números naturales las sucesiones son infinitas y cada término a_n, tiene una sucesión a_{n+1}.

A cada número natural le corresponde un a_n,

$$a : \aleph \rightarrow \Re$$

$$n \rightarrow a_n$$

1	→	a_1
2	→	a_2,
3	→	a_3
4	→	a_4
5	→	a_5
….	…	…
N	→	a_n
…	…	…

La sucesión $\left\{ a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7......., a_n, ... \right\}$ se puede denotar de la siguiente manera:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{ó} \qquad \{a_n\}$$

Cuando la sucesión es de números reales puede denotarse como una regla de correspondencia o fórmula escrita para el término enésimo.

Límite de una sucesión

Decimos que el número real L es el límite de la sucesión (a_n), y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si y solo si para cada número ε > 0, existe un número

$n_0 \in \aleph^+$ tal que $n > n_0 \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Observaciones:

$$|a_n - L| < \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

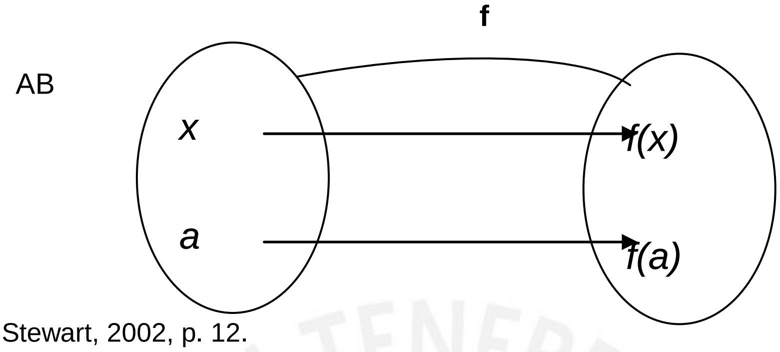
$$\leftrightarrow a_n \epsilon]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$$

Límite de una función

Función

Una función fes una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado f(x), de un conjunto B. Generalmente tanto A como B son conjuntos de números reales. A es el dominio de la función, y el conjunto de las imágenes de los x que pertenecen a A constituye el rango de f, es decir, el conjunto de todos los valores posibles de f(x).Ver Gráfico N° 2.

Gráfico N° 2. Diagrama sagital de una función



Fuente: Stewart, 2002, p. 12.

Límite de una función

> Definición intuitiva 1
>
> “Escribimos
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> y decimos ‘el límite de f(x), cuando x tiende a a, es igual a L’ si podemos acercar arbitrariamente los valores de f(x) a L (tanto como deseemos) tomando x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.” (Stewart, 2002, p.91)

En palabras más sencillas se afirma que los valores de f(x) se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (por ambos lados de a), pero x ≠ a.

En algunos textos se encuentra la siguiente notación:

$$f(x) \to L \quad \text{cuando } x \to a$$

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ que se lee “f(x) tiende a L cuando x tiende a a”.

“Definición precisa de límite de funciones

Sea f una función definida sobre el intervalo abierto que contiene el número a, excepto cuando a se define a si misma. Entonces decimos que el límite de f(x) cuando x tiende o se aproxima a a es L y escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Si para cada número ε > 0 hay un correspondiente número δ > 0 tal que

$|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.”

(Stewart, 2002, p. 112)

Límites laterales

Definición intuitiva 2 basada en Stewart (2002)

2.1 Escribimos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Decimos que el límite de f(x) cuando x se acerca a apor la izquierda es igual a L, si se puede aproximar los valores de f(x) a L tanto como se quiera, tomando los x lo bastante cerca de a pero menores que a.

2.2 Escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Decimos que el límite de f(x) cuando x se acerca a apor la derecha es igual a L, si se puede aproximar los valores de f(x) a L tanto como se quiera, tomando los x lo bastante cerca de a pero mayores que a.

Si $x \to a^+$ se debe considerar los valores de x > a.

De igual manera, si $x \to a^-$ se debe considerar los valores de x < a.

En el caso que ambos límites laterales sean iguales, esto quiere decir, que se consideran los x >a y x< a, y por lo tanto x está cerca de a por ambos lados, este caso viene a ser similar a la definición 1. De allí que podemos afirmar:

"Definición 3

$$\underset{x\to a}{lím}\ f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L \wedge \lim_{x\to a^+} f(x) = L"$$

(Stewart, Op.cit., p. 96)

Definiciones precisas de límites laterales

"Límite izquierdo

$$\underset{x\to a^-}{lím}\ f(x) = L$$

si para todo número ε > 0 existe un número correspondiente δ > 0 tal que

$|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $a - \delta < x < a$

Límite derecho

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para todo número ε > 0 existe un número correspondiente δ > 0 tal que

$|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $a < x < a + \delta$”

(Stewart, 2002, p. 116).

Límites infinitos

Definición intuitiva 4

“Sea una función f definida a ambos lados de a, excepto tal vez en el mismo a. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Significa que los valores de f(x) pueden hacerse arbitrariamente grandes (tan grandes como se quiera) tomando x suficientemente cerca de a, pero distinto de a”. (Stewart, 2002, p. 97)

También se puede señalar que

f(x) → ∞ conforme x → a

es decir, *el límite de f(x), cuando x tiende a* a, *es infinito*.

Definición precisa de Límite infinito

"Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene el número a, excepto, posiblemente, en a mismo. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Significa que para cada número positivo M hay un número correspondiente δ tal que

$f(x) > M$ siempre $0 < |x - a| < \delta$"

(Stewart, 2002, 119)

Límites al infinito

Definición intuitiva 5

"Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞)

Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Indica que los valores de f(x) se pueden acercar arbitrariamente a L si x se incrementa lo suficiente." (Stewart, 2002, p. 134)

Definición precisa

"Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞)

Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que para todo ε > 0 hay un número correspondiente N tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que x > N."

(Stewart, 2002, p. 141)

Definición intuitiva 6

"Sea f una función definida en un intervalo (∞, a). Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Indica que los valores de f(x) se pueden acercar arbitrariamente a L haciendo que x sea negativa y lo bastante grande." (Stewart, 2002, p.134)

Definición precisa

"Sea f una función definida en un intervalo (-∞, a). Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que para todo ε > 0 hay un número correspondiente N tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que x < N."

(Stewart, 2002, p. 142)

2.4 LA GEOMETRÍA DINÁMICA

El uso de la Informática en el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas es un campo de investigación desarrollado desde los años 80. Uno de sus investigadores, Balacheff (1994), señala que en el campo de la didáctica no se espera que lacomputadora se comporte como un profesor, pero síque por ese medio se puedan crear las condiciones favorables para que el estudiante pueda construir conocimientos aceptables relacionados a objetivos de enseñanza, y que a su vez sea posible la retroalimentación.

> "En términos de la Teoría de Situaciones Didácticas lo que se desea es que el ordenador permita la realización efectiva de un medio pertinente desde un punto de vista epistemológico." (Laborde 1993, citado en Balacheff 1994, p.3)

Uno de los medios que permite un ambiente de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es el Sistema de Geometría Dinámica (SGD). Estesistemaha renovado el interés por la construcción geométrica (Arzarello, Bartolini, Lun, Mariotti y Stevenson, 2012). Lo que define a las figuras de un SGD es que son el resultado de un proceso de construcción, obtenido por el uso de herramientas disponibles en una barra, y que pueden ser manipuladas directamente, pues son concebidas en término de la lógica incorporada del sistema. Las figuras de SGD tienen una lógica intrínseca resultado de la construcción. Entre sus elementos se establece una jerarquía de relaciones producto de las herramientas utilizadas, así como una jerarquía de propiedades que corresponden a las relaciones de condicionalidad lógica.

Cabri-géomètre, Sketchpad, Geogebra, etc., son SGD que simulan una realidad y tienen una relación intrínseca con la Geometría Euclidiana. Se podría decir que hay una correspondencia entre el mundo del SGD y el mundo teórico de la Geometría Euclidiana, establecida por una modelización.

2.4.1 Entornos de simulación y micromundos

Lacomputadora proporciona una representación del mundo, una modelización. Colette Laborde (1994, citado en Díaz Barriga 2001) nos señala que siempre hay una distancia entre los modelos y la realidad, pues el modelo nos ofrece una interpretación de un fragmento de la realidad. En toda modelización está implícita una cierta abstracción que retiene un conjunto limitado de objetos y relaciones que son los representantes del modelo.

Dentro de esa perspectiva se han creado entornos de simulación, en los cuales juegan varias variables, que pueden ser de naturaleza numérica, textual, gráfica, etc. Lo importante sería analizar qué tan fiel es esa representación con respecto al mundo representado, así como el tipo de aprendizaje producido por la interacción del sistema. En este caso estamos hablando en términos de fidelidad, es decir, cuán estrechamente el entorno simulado se acerca al mundo real. Se han identificado varios tipos diferentes de fidelidad (Burton 1988, citado en Balacheff 1994) que sirven en diferentes situaciones: fidelidad física (se siente igual), fidelidad de apariencia(parece lo mismo), fidelidad mecánica (se comporta igual), y fidelidad conceptual (se piensa de la misma manera). Wenger (1987, citado por Balacheff 1994)introdujo la noción de fidelidad epistémica, como el concepto que califica la distancia entre la realización física de una representación y el conocimiento de referencia, anivelepistémico. Es decir, que tan útil es la representación para el diseño y evaluación de modelos de conocimiento comunicable.

Unos de los entornos de simulación son los micromundos, entendidos como mundos computacionales donde varias ideas matemáticas pueden ser expresadas y desarrolladas (Díaz Barriga, 2001). En ellos se le proporciona al estudiante un conjunto básico de objetos elementales y un conjunto de herramientas primitivas, con los que se construyen objetos cada vez más complejos. Para Balacheff (1994.) el micromundo se caracteriza por la articulación de un sistema formal constituido por objetos primitivos, por operadores elementales y por reglas, con un campo fenomenológico que determina el tipo de retroalimentación que resulta de las acciones del usuario. En este campo se deben cumplir criterios epistemológicos.

2.4.2 Cabri II Plus y la Transposición Informática

El proyecto de innovación didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la noción de límite seva a desarrollar utilizando un programa de geometría dinámica, Cabri II Plus. Cabri es un programa informático creado por un equipo de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble y el Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) de Francia, bajo la dirección del Dr.Jean-Marie Laborde. Este software está en permanente desarrollo, evidenciado por sus diversas versiones, desde su primera aparición en 1986.

El Cabri ofrece posibilidades que son inaccesibles en el medio habitual de lápiz y papel, como por ejemplo la posibilidad de realizar dibujos a los cuales se les puede dar movimiento (Bongiovanni, 2001). Las propiedades matemáticas que son utilizadas para construir las figuras se mantienen, a pesar de cualquier desplazamiento. Es ahí cuando se ponen en evidencia los invariantes, y se valida la construcción. Con la geometría dinámica se puede manipular directamente los objetos geométricos construidos,así como sus relaciones matemáticas, articulándose dinámicamente la multiplicidad de registros de representación. Mediante Cabri II Plus podemos presentar resultados desde una perspectiva heurística, en micromundos de exploración que pidan al estudiante que ajuste líneas, que desplace puntos, que superponga segmentos, que elabore proposiciones matemáticas, etc.

Balacheff (1994) introduce el término de Transposición Informática en clara alusión a la expresión Transposición Didáctica desarrollada por Chevallard en la Didáctica de las Matemáticas. La Transposición Informática se realiza en base a una representación simbólica, y la aplicación de esta representación por un dispositivo informático, por medio del cual se puede “mostrar” el conocimiento, o “manipularlo”. Esa contextualización del conocimiento tiene consecuencias importantes en los resultados del aprendizaje. En realidad el problema planteado por la transposición informática es el grado de validez epistemológica de los dispositivos informáticos para el aprendizaje humano. El dispositivo informático divide al micromundo en tres regiones: el universo interno, la interfaz y el universo externo. En el universo externo se encuentra el operador humano, estableciéndose un juegode interacción que involucra otros dispositivos de hardware y los actores sociales, como el profesor y los estudiantes. El universo interior está constituido por varios elementos físicos, especialmente componentes electrónicos, cuya articulación e implementación permite el "funcionamiento" del dispositivo informático. La interfaz es el lugar de la comunicación entre el usuario y el dispositivo informático. La interfaz permite la visualización de representaciones del conocimiento.

Cabri II Plus es un micromundo que permite visualizar objetos de geometría y manipularlos, sobre el cual se ha efectuado una Transposición Informática. Los objetos del Cabri II Plus tienen una representación interna determinada por una geometría analítica en un modelo de números reales, que se representa externamente en la interfaz, en la que el estudiante interactúa, posibilitándose el aprendizaje.

2.4.3 Trabajo en un entorno Cabri y conceptos involucrados

El trabajo con un entorno computacional de Geometría Dinámica involucra dos fases (Jean-Marie Laborde 1997, citado por Díaz Barriga 2001):

1. Fase de representación de un objeto o un proceso geométrico, cuando se comienza en una pantalla en blanco y, mediante la ejecución de una secuencia de comandos, se construyen objetos y el proceso se dinamiza, desde la percepción que el diseñador tiene del objeto a construir.
2. Fase de aprovechamiento de una representación con el propósito de extraer información de ella, cuando el estudiante extrae información explorando un entorno construido. La actividad central es la manipulación del entorno, en forma manual vía el desplazamiento o arrastre de los objetos matemáticos con el ratón, o en forma automática vía la animación.

En la primera fase el docente elabora un diseño experimental construyendo figuras geométricas dentro de un micromundo. Los dibujos, en el entorno Cabri-Géomètre, pueden ser de diversas clases. A continuación se explican los conceptos de Cabri-dibujo, Cabri-figura, Cabri-objeto, Cabri-construcción, Cabri-enunciado.

> Un Cabri-dibujo es la traza en el monitor que la computadora almacena y que es deformable continuamente en el marco de grados de libertad que le otorga el proceso de su construcción y que le permite conservar las propiedades geométricas que han determinado las afirmaciones para su creación. Tiene lugar entonces una clase de figuras por las deformaciones posibles de este Cabri-dibujo y se llama Cabri-figura a la abstracción de esta familia de Cabri-dibujos en un objeto geométrico. Obsérvese que las Cabri-figuras son abstracciones de objetos geométricos; la Cabri-construcción correspondiente es el programa o proceso de construcción que ha sido llevado a cabo para la realización del Cabri-dibujo.
>
> Notemos que un mismo Cabri-dibujo puede realizarse con distintos programas de construcción; así las propiedades geométricas utilizadas pueden variar de acuerdo a qué enunciados constructivos han intervenido. Así un Cabri-objeto está definido por una parte por las propiedades geométricas y los puntos con sus grados de libertad, por otra parte por su

> programa de construcción (sus Cabri-enunciados), y por los dibujos obtenidos por el desplazamiento de sus puntos libres. (Jahn 1998, citado por Díaz Barriga 2001, p. 22)

En el presente trabajo de las dos fases señaladas se desarrollará la primera pues se elaborarán cabri-figuras y cabri-construcciones que posibiliten un proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de límite.

2.4.4 El arrastre

La característica más importante del Cabri II Plus es el desplazamiento, arrastre o dragging, que permite pasar de una geometría estática a una geometría dinámica. En ella los objetos son figuras geométricas que se deforman pero que conservan las propiedades geométricas con las cuales fueron construidas. Con el arrastre se invalida las construcciones erróneas, se pone en evidencia los invariantes geométricos, se obliga a utilizar propiedades geométricas para construir una figura que resista. "El arrastre brinda un "milieu" (Brousseau) rico en retroacciones que le pueden permitir al sujeto evolucionar en su estrategia de resolución" (Restrepo, 2010, p. 1).

Los arrastres se pueden clasificar de acuerdo a diferentes criterios (Arzarello 2002, Olivero 2002, Healy 2000, citados por Restrepo 2001). Una de las clasificaciones es la siguiente:

- Arrastre errático (Wandering dragging)
- Arrastre limitado (Bound dragging)
- Arrastre blando o guiado (Guided dragging)
- Arrastre sobre una línea (Line dragging)
- Arrastre sobre objeto (Linked dragging)
- Test del arrastre (Dragging test).

2.4.5 El descubrimiento guiado

Balacheff (1994), analizando el grado de directividad del sistema, es decir el grado de iniciativa que el sistema deja al estudiante, establece que los sistemas pueden estar situados en un continuum que va desde la ausencia de iniciativa a una total libertad. Señala tres puntos: los puntos extremos, sistemas de tutoría y micromundos, y un punto medio, los entornos de descubrimiento guiado. Los sistemas de tutoría dejan poca iniciativa a los alumnos, y realizan un acompañamiento directivo poco tolerante a los errores. Por el contrario, los micromundos dejan que el estudiante tenga total iniciativa, no hay regulación externa, y por ello los aprendizajes no son decididos con anterioridad.

Lo que se plantea en el presente proyecto de innovación didáctica elaborada en el entorno informático del Cabri, marca distancia de los anteriores niveles de directividad del sistema, pues va más en la dirección del paradigma del Descubrimiento Guiado (Cook, 1990, citado por Balacheff 1994), que busca un equilibrio entre la directividad y la no directividad, y de esa manera tiene en cuenta el estado del alumno, dejándolo que cometa errores que serán enmendados por el mismo cuando caiga en cuenta de ellos, y que por otro lado toma en cuenta complejidad del objeto de enseñanza.

En la presente propuesta se elaboran actividades que señalan tareas a los estudiantes, las cuales están ligadas a la experimentación, a la heurística, al descubrimiento. Es en ese proceso que el docente guía al estudiante en su aprendizaje pero le deja total libertad de desplazar, “arrastrar” los objetos matemáticos, hasta que logre comprender el conocimiento puesto en juego.

CAPÍTULO 3

DISEÑO DEL PROYECTO DE INNOVACIÓN DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN DE LÍMITE

A la luz de los planteamientos teóricos considerados en el Capítulo 2, en el presente capítulo pretendemos responder a la siguiente pregunta: ¿Qué proceso didáctico se tendría que desarrollar para que los estudiantes del curso de Cálculo 1 de la PUCP logren comprender la noción de límite, salvando los obstáculos epistemológicos inherentes al desarrollo histórico del pensamiento analítico?

3.1 DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO DE INNOVACIÓN DIDÁCTICA

Desde el campo de la filosofía de la matemática el enfoque que pretendemos adoptar es el heurístico, desarrollando una matemática de tipo experimental en un laboratorio informático, pues lo que principalmente nos interesa no es la demostración ni la justificación de las definiciones sobre límites, sino que en base a actividades propuestas se desarrolle un proceso en el que el estudiante descubra las propiedades sobre las que se sustentan las definiciones, facilitando de esa manera la comprensión de la posterior formalización algebraica, imprescindible y necesaria para el proceso de institucionalización de los conocimientos matemáticos.

Desde el campo de la Didáctica se busca que el saber matemático sea expresado no desde su forma acabada, axiomática, sino construido a partir de la visualización de situaciones que propician el surgimiento de las propiedades matemáticas que sustentan la noción de límite. En esa construcción se produce la interacción de los diferentes sistemas de representación, partiendo de la representación geométrica, y posteriormente la numérica. El saber es contextualizado y orientado a la búsqueda de respuestas a las interrogantes planteadas en las actividades.

Las actividades facilitarán el proceso de aprendizaje a través del planteamiento de preguntas que obligarán al estudiante a activar los procesos mentales necesarios para comprender la noción de límite. El estudiante participará activa y dinámicamente experimentando con el desplazamiento de los objetos matemáticos, con la finalidad de dar respuesta a las interrogantes planteadas. Se puede afirmar que el estudiante participa en un proceso de descubrimiento guiado.

A través de las actividades de Cabri II Plus se activa la visualización de los objetos y las propiedades matemáticas, potenciados por el arrastre o desplazamiento de las figuras geométricas. El arrastre también permite observar el movimiento en su representación numérica, produciéndose el cambio en cantidades muy pequeñas. De esta manera se procuran disminuir las dificultades asociadas a la conceptualización y formalización de la noción de Límite, ligadas a la noción de obstáculo epistemológico, principalmente en lo que se refieren alos obstáculos lógico y geométrico, así como apreciar la diferencia del límite como objeto y el límite como un proceso, pues es durante el arrastre que se va construyendo el límite como proceso, siendo el resultado final el límite como objeto. Es así mismo muy fácil identificar las representaciones geométrica, numérica y algebraica, que se encuentran articuladas.

3.1.1 Beneficiarios

El proyecto de Innovación didáctica está dirigido a estudiantes del curso de Cálculo 1 de Estudios Generales Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú, pero puede ser aplicado en estudiantes de cualquier primer curso de Cálculo de la educación superior. Para efectos de la implementación, el proyecto se aplicará en un grupo horario de 40 estudiantes.

3.1.2 Duración del Proyecto

El Proyecto tendrá una duración de tres semanas y media, en tanto se ha planificado que se va a desarrollar en 14 horas de clase.

En resumen, las características principales del proyecto de innovación didáctica son las siguientes:

1.	La propuesta didáctica será planteada bajo el esquema de una guía docente.
2.	El proyecto de innovación didáctica puede ser aplicado en alumnos de cualquier primer curso de Cálculo de educación superior universitaria.
3.	La duración del proyecto es de 14 horas de clase, y si se considera que cada semana tiene 4 horas de clase, el proyecto se desarrollará en tres semanas y media.
4.	Los estudiantes participan en un laboratorio matemático en el entorno informático de la geometría dinámica de Cabri II plus, desarrollado en un aula informática. Reciben al iniciar el laboratorio un cuadernillo con las actividades y una carpeta virtual con los archivos en Cabri II Plus.
5.	No es necesario un entrenamiento previo para el manejo del software Cabri pues las actividades han sido diseñadas en ese sentido.
6.	Los objetos matemáticos involucrados son trabajados experimentalmente al utilizar el arrastre de los objetos matemáticos, de acuerdo a un diseño didáctico planteado a través de las actividades propuestas.
7.	En la propuesta se procura que el estudiante descubra los conocimientos guiado por las actividades propuestas por el docente.
8.	Con las actividades se potencia la visualización de los objetos matemáticos involucrados en la noción de límite y la comprensión de sus propiedades.
9.	Las actividades interrelacionan las representaciones geométrica, numérica y algebraica de la noción de límite, lo cual facilita la comprensión de los conceptos involucrados,
10.	A través de las actividades se busca el franqueamiento de algunos obstáculos epistemológicos relacionados a la noción de límite, señalados por Michèle Artigue.
11.	Producto de la experimentación de los estudiantes surgen saberes nuevos que serán formalizados por el docente, realizándose la institucionalización

	de las nociones matemáticas involucradas.
12.	El proceso de evaluación de las actividades se realizará de acuerdo al sistema de evaluación contemplado en el programa analítico del curso de Cálculo 1.

3.2 OBJETIVOS DEL PROYECTO

3.2.1 Objetivo general

Favorecer la comprensión de las nociones de límite de una sucesión y límite de funciones ysu aplicación correcta en la resolución de problemas intra y extramatemáticos, en los estudiantes del curso de Cálculo 1 de Estudios Generales Ciencias de la PUCP.

3.2.2 Objetivos específicos

- Propiciar el franqueamiento de los obstáculos epistemológicos relacionados con el pensamiento analítico a través de laconstrucción de un medio propicio, con ayuda de la geometría dinámica del Cabri II Plus,en donde el estudiante sea el centro del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Propiciar la diferenciación del doble status, operacional y estructural, como proceso y como objeto, que tiene la noción de límite,al igual que la mayoría de las nociones matemáticas, en los estudiantes de modo que separen la visión de límite en términos de proceso del objeto límite construido por el proceso.
- Favorecer el franqueamientodel obstáculo geométrico en el aprendizaje de la noción de límite, permitiendo a los alumnos identificar los objetos sobre los cuales se lleva a cabo el proceso del límite, considerando la estructura topológica que subyace.
- Favorecer el franqueamiento del obstáculo lógico dado por las características de la definición formal de la noción de límite,de modo que disminuya la complejidad lógica expresada por los cuantificadores y las implicaciones lógicas.

3.3 ESTRATEGIAS Y ACTIVIDADES

Para el logro de los objetivos propuestos se ha escogido el desarrollo de una serie de actividades creadas en el entorno de la geometría dinámica del Cabri II Plus.

La propuesta didáctica se basa en un conjunto de actividades que serán desarrolladas en un laboratorio en el que cada estudiante pueda hacer uso de una computadora. Todas las actividades están planteadas para ser desarrolladas de manera individual, bajo el asesoramiento de un profesor. Las actividades tienen diferentes duraciones, pero todas se dan dentro de las dos horas de clase de cada tema. Se inicia con las actividades en Cabri y se finaliza con la formalización dirigida por el profesor.

El estudiante recibe las instrucciones al ingresar al laboratorio. En las instrucciones se señalan una serie de acciones a ser desarrolladas por el estudiante con el software que permitirán responder las preguntas planteadas, produciéndose una serie de interacciones. Esta es la parte heurística y experimental que activa y estimula el aprendizaje, provocando una serie de conflictos cognitivos que para ser resueltos será necesario que se produzca la ruptura con el pensamiento algebraico preestablecido, y el surgimiento del pensamiento analítico, básicamente cuando sea construida la noción de entorno y vecindad. Eso es lo que se desea, pero sólo se sabrá de la certeza del presente planteamiento cuando sea validado en aula.

De realizarse ese paso dialéctico, la noción de número real toma su verdadera dimensión, anclándose la idea del continuo y la densidad de los números reales, lográndose llegar a la visión topológica, que supera lo algebraico y lo geométrico. Es recién allí, cuando se percibe esa comprensión en el estudiante, que termina el proceso de experimentación y el profesor inicia el proceso de institucionalización de saberes, con la consiguiente formalización algebraica. Eso no quita que se tenga que volver a recurrir al software para dar sentido al uso de cuantificadores e implicaciones, o para clarificar las propiedades. Ese sería el momento en que se franquea el obstáculo lógico.

Contenidos a desarrollar

Tomando en cuenta el Programa Analítico del curso de Cálculo 1 de Estudios Generales Ciencias (Pontificia Universidad Católica del Perú), y considerandolos cinco capítulos programados, para el desarrollo del Proyecto de Innovación se ha considerado algunos contenidos del Capítulo 2. Pero además se ha añadido en ese capítulo el tema de límite de sucesiones antes del límite de funciones.

La Programación del curso de Cálculo 1 del 2011-1, proporcionada gentilmente por el profesor José Luis Henostroza, considera los siguientes temas en lo que corresponde a límites, desarrollados en sesiones de dos horas:

Semana 3:

Quinta sesión. Límite de una función real de variable real. Idea intuitiva. Definición formal de límite. Uso de la definición de límite en funciones lineales, racionales, cuadráticas y raíz cuadrada.
Sexta sesión. Teoremas sobre límites: unicidad del límite, preservación del signo del límite de la función, límite de la suma, producto y cociente de funciones. Ejemplos.

Semana 4:

Sétima sesión: Límite de la función compuesta. Límite de la función raíz n-ésima. Traslación y cambio de escala o de variable. Cálculo de límites usando propiedades.
Octava sesión. Límites laterales. Existencia de límites. Teorema del Sándwich. Cálculo de límites de funciones seccionadas que dependan de parámetros. Límites trigonométricos notables. Ejemplos.

Semana 5:

Novena sesión. Límites infinitos. Definición. Propiedades. Asíntota vertical. Ejemplos.
Límites en el infinito. Definición. Propiedades. Asíntotas horizontales y asíntotas oblicuas.
Décima sesión. Esbozo de gráfica de funciones racionales a partir de sus asíntotas y de sus límites infinitos y en el infinito. Ejemplos.

La idea es introducir dentro de esa programación las actividades elaboradas con la geometría dinámica del Cabri II Plus para el estudio de:

- ✓ La noción de límite de una sucesión
- ✓ La noción de límite de funciones
- ✓ Límites laterales
- ✓ Límites infinitos
- ✓ Límites al infinito

Las actividades se encuentran desarrolladas en el Apéndice8. Cada una de las actividades requiere archivos realizados en Cabri II Plus, los cuálesen su formato digital se han creado con los siguientes nombres, y que están grabados en el DVD adjunto al presente proyecto de investigación:

1. Sucesión de triángulos.fig
2. Sucesión de circunferencias.fig
3. Límite de sucesiones.fig
4. Función lineal.fig
5. Función 1.fig
6. Función 2.fig
7. Sqrt (3-x).fig
8. Función definida a trozos.fig
9. Límite infinito positivo.fig
10. Límite infinito negativo.fig
11. Límite al infinito.fig

3.4 RECURSOS

Para la puesta en práctica del proyecto de innovación didáctica se necesitará, además de la presencia de un responsable de la conducción del proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de límite en un entorno de geometría dinámica, la ayuda de un asistente que colabore en la orientación a los alumnos en el uso del Cabri II Plus para el desarrollo de las actividades propuestas.

Es necesario que todas las sesiones del proyecto se desarrollen en un Laboratorio o Aula Informática, y que las computadoras tengan instalado el software Cabri II Plus.

Se proporcionará a los estudiantes un cuadernillo con las Actividades que están señaladas en el Apéndice8, además de una carpeta virtual con los 11 archivos en formato .fig elaborados en Cabri II Plus y señalados en el punto anterior.

3.5 MONITOREO Y EVALUACIÓN

El monitoreo de la ejecución de las actividades será efectuado por el responsable de la conducción del proyecto de acuerdo a la programación establecida para el curso de Cálculo 1 por la Unidad Académica de Estudios Generales Ciencias.

La Evaluación de las actividades del proyecto de Innovación Didáctica será efectuada a través de las evaluaciones que se tomarán en el curso de Cálculo 1 de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

De acuerdo a la Programación del 2011-1 del Curso de Cálculo 1 los temas relacionados con Límites se consideran a partir de la quinta sesión hasta la décima sesión. Considerando que se va a aumentar el tema de Límite de sucesiones se necesitarán siete sesiones de clase. Estos contenidos serán evaluados específicamente en la segunda práctica calificada que tiene una duración de dos horas, y dentro del Examen Parcial del curso que tiene una duración de tres horas.

Los ítems de la práctica calificada N° 2 y del Examen Parcial serán los mismos que las pruebas tomadas a los alumnos de losdemás horarios del curso de Cálculo 1, que no tomarán parte del Proyecto de Innovación Didáctica. Las preguntas de las pruebas de evaluación serán elaboradas por los profesores que dictan el curso.

3.6 SOSTENIBILIDAD

Con la finalidad de que el proyecto de innovación didáctica sea trasmitido a la comunidad docente se tomará en cuenta las siguientes consideraciones:

1. Cada actividad del Proyecto de Innovación Didáctica será presentada siguiendo el esquema de una guía docente. Para ese efecto se ha considerado las pautas señaladas por el documento “Elaboración de la Guía Docente para la Convergencia Europea. Principios para su diseño”, elaborado por la Universidad de Valencia. (Salinas y Cotillas, 2005). El esquema base es el siguiente:

1. Introducción
2. Objetivos de la actividad
3. Contenidos
4. Capacidades

5. Obstáculos epistemológicos que se pretenden franquear
6. Insumos
7. Duración:
8. Desarrollo de la Actividad
9. Indicaciones para el docente e Institucionalización del conocimiento

En la guía se explica los objetivos y los obstáculos epistemológicos que serán franqueados en cada una de las actividades. Los objetivos se han redactado teniendo en cuenta la Taxonomía de Bloom para la Era Digital (Churches, 2009). Para el desarrollo de las capacidades se ha tomado en cuenta lo planteado por Lupiáñez y Rico (2008), así como por Solar y colaboradores (2011) en investigaciones del Ministerio de Educación de Chile.

Esta Guía permitirá que los criterios de aplicación sean uniformes en los docentes que desean poner en práctica el proyecto de innovación didáctica en sus clases de Cálculo.

Las actividades estructuradas en base a la Guía Docente se encuentran en el Anexo 8.

2. Los docentes interiorizarán la necesidad de desarrollar capacidades ligadas al uso del software de geometría dinámica en sus clases, cuando ellos estén convencidos de que las actividades en Cabri II Plus son efectivas en lograr la comprensión de las nociones de límite de sucesiones y de funciones. Y ese convencimiento se dará cuando comparen el rendimiento de los alumnos que han participado en el proyecto con el rendimiento de los alumnos que han trabajado en forma tradicional.El sistema de evaluación del aprendizaje de los estudiantes de ambos grupos será el mismo.

3. Los resultados de la aplicación del proyecto de innovación didáctica serán trasmitidos a la comunidad científica de educación matemática a través de exposiciones en eventos académicos, congresos, coloquios, etc.; así como a través de la publicación de artículos en revistas educativas o en actas de eventos.

3.7 PRESUPUESTO APROXIMADO

Para el cálculo del presupuesto se tomará en cuenta los siguientes rubros:

Concepto	Costo por unidad (S/.)	Total (S/.)
Docente	100	1 400 (14 h.)
Asistente de docencia	100	1 400 (14 h.)
Alquiler aula informática	0	0
Impresión, copias y anillado de las actividades	5	210 (42 c.)
Licencia para escuela del cabri II Plus en la PUCP		0
	Importe total	3 010,00

Para cursos de pregrado y posgrado la Dirección de Informática Académica no cobra por el uso de las aulas informáticas, como es el caso de Cálculo 1.

Es importante señalar que el Cabri II Plus es un software comercial que la Pontificia Universidad Católica del Perú ha adquirido desde hace varios años, por lo que su uso no representará un gasto adicional. Pero si una institución educativa desea adquirir la licencia tendría que gastar aproximadamente 3 720 soles (600 euros).

3.8 CRONOGRAMA

Las acciones para poner en marcha el Proyecto de Innovación se iniciarán el año anterior al escogido para su ejecución. Es necesario presentar el Proyecto alaSección Matemáticas del Departamento de Ciencias de la PUCP para su aprobación. Si se considera ejecutar el Proyecto en el semestre 2014-1, considerando que se inicia el 17 de marzo del 2014, el cronograma sería el siguiente:

Acción	**Fecha**
Presentación del Proyecto ala Sección Matemáticas del Departamento de Ciencias de la PUCP.	Mes 1
Elaboración de las Fichas de Actividades	Mes 2
Ejecución del Tema Límite de sucesiones. Actividades 1, 2 y 3.	2 horas (quinta sesión) de la tercera semana del mes 3
Ejecución del Tema Límite de Funciones. Actividades 1 y 2.	2 horas (sexta sesión) de la tercera semana del mes 3
Ejecución del Tema Límites laterales. Actividad 3.	2 horas (octava sesión) de la quinta semana del mes 4
Ejecución del Tema Límites infinitos y límites al infinito	2 horas (novena sesión) de la sexta semana del mes 4
Práctica Calificada N° 2	2 horas fuera de la programación de clases de la quinta semana del mes 4
Examen parcial	3 horas fuera de la programación de clases de la novena semana del mes 5
Evaluación Final del Proyecto de Innovación Didáctica	En la décima semana del mes 5

Finalmente, creemos necesario precisar lo siguiente:

- Existe un pleno convencimiento de que las construcciones elaboradas en Cabri transponen las nociones de límite de sucesiones y límite de funcionesa un entorno informático. Estas construcciones tienen una fidelidad epistémica, su manipulación transmite nuevos conocimientos a las personas que trabajan con ellas.

- Las preguntas elaboradas en las guías de actividades, si bien procuran establecer interacciones entre el estudiante y la actividad en Cabri, podrían ser mejoradas, más aun cuando se aplique la propuesta en aula. Las actividades se hanaplicado en forma individual, y a ese nivel se ha demostrado su efectividad en la enseñanza de las nociones señaladas.
- La aplicación de la propuesta didáctica es posible siempre y cuando la institución educativa cuente con un Laboratorio de Informática y con el software Cabri. De no contarse con la licencia es posible descargar de internet la versión de evaluación por un periodo de 30 días.
- Este trabajo ha sido desarrollado en su primera versión como parte del trabajo final del curso Análisis 1 de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, llevado el ciclo 2005 – II. Es decir tiene *7 años* de creación y de un desarrollo continuo. Para su realización se ha dado todo el esfuerzo que felizmente ha sido recompensado con la aceptación en diferentes eventos académicos nacionales e internacionales, así como se ha visto gratificado con su publicación en diferentes oportunidades.
- Las más grandes satisfacciones que motivan la persistencia en la propuesta, a pesar de percibir el rechazo de algunos a utilizarla, se dan cuando se ve la expresión de aceptación de los profesores cuando la trabajan, y cuando se aprecia el placer de los estudiantes por encontrarse en un ambiente que es “su” entorno habitual y el placer por*comprender* lo que se les pretende enseñar.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.),*Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). Bogotá: Una empresa docente& Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental. ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 40 – 55.

Arzarello, F., Bartolini, M., Lun, A., Mariotti, M. y Stevenson, I. (2012). Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs*.* En G. Hanna y M. de Villiers(Eds.),*Proof and Proving in Mathematics Education.The 19th ICMI Study*(97 – 143). New York, USA: Springer.

Bainville, E. (2002). *Cabri Geometry II Plus. User Manual*. Cabrilog. (S. Hoath, trad.). Recuperado de http://www.cabri.com

Balacheff, N. (1994). Didactique et Intelligence Artificielle. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 14(1-2), 9-42.

Barbin, E. (2012). *What is epistemology (for)?*Powerpoint presentation. Colloque en hommage à Michèle Artigue. Paris.

Bardelle, C. (2009). Visual proofs: anexperiment. *Proceedings of Cerme 6*.Lyon, pp. 251-260. Recuperado de: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg2-08-bardelle.pdf

Bongiovanni, V. (2001). *Les caractérisations des coniques avec Cabri-geómètre en formation continue d'enseignants:étude d'une sequence d'activités et conception d'un hyperdocument interactif.*(Thèse non publiée pour obtenir le titre de Docteur). Université Joseph Fourier, France.

Bosch, M. y Gascón, J. (2004). La Praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. En *Boletín N° 16 delSeminario Inter-Universitario de Investigación en Didáctica de la Matemática.* Actas del XX SI-IDM, Madrid, España. Grupo Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica de la

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/

Boyer, Carl. (1987). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1983). *Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas*. Recuperado de http://fractus.uson.mx/Papers/Brousseau/ObstaculosBrousseau.htm

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des Mathématiques. (M. Villalba y V. Hernández, trads).*Recherches en Didactiques de Mathématiques*, 7 (2), 33-115. Recuperado de: http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001/File/FundamentosBrousseau.pdf.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis.*Recuperado de: http://www.fing.edu.uy/imerl/didactica_matematica/Documentos_2008/Cantoral%20y%20Farfan%20(1998)%20-%20Epsilon.pdf

Carter, J. (2009). Visualization and understanding in mathematics. En *The Pantaneto Forum,* Issue 33, January 2009. Recuperado de http://www.pantaneto.co.uk/issue33/carter.htm

Chevallard, Y. (1989).*On didactic, transposition theory: some introductory notes*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/On_Didactic_Transposition_Theory.pdf

Churches, A. (2009). *Taxonomía de Bloom para la Era Digital*. Recuperado de http://www.eduteka.org/TaxonomiaBloomDigital.php

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. En *Boletín N° 10 delSeminario Inter-Universitario de Investigación en Didáctica de la Matemática*. Actas del XIV SI-IDM, Cangas, España. Grupo Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica de la Sociedad Española de Investigación enEducación Matemática. Recuperado de:http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf

Claros, F., Sánchez, M. Y Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA*, 1 (3), 125-137.

Contreras, A. (2001). El límite en el Bachillerato y primer año de Universidad. Perspectivas desde los enfoques epistemológico y semiótico. En *Boletín N° 12 del Seminario Inter-Universitario de Investigación en Didáctica de la Matemática*. Programa y Documentos de Trabajo de las XVI Jornadas del SI-IDM, Huesca, España. Grupo Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica de la Sociedad Española de Investigación enEducación Matemática. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/huesca/limitebachillerato.pdf

Díaz Barriga, E. (2001). *Transparencia y opacidad de una noción matemática:Objeto geométrico mediado por el entorno computacional Cabri-Géomètre, el caso del Principio de Cavalieri*. (Tesis inédita de doctorado).Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Douady, R. (1995). Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en*

Educación Matemática (pp. 1-5). Bogotá: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Dubinsky, E. (1994). Reaction to James Kaput's paper, Democratizing Access to Calculus: New Route to Old Roots. En A. Schoenfeld (Ed.), Mathematical *Thinking and Problem Solving.* Hillsdale: Erlbaum, pp. 157-171. Recuperado de http://www.math.kent.edu/~edd/ReactKaput.pdf

Durán, A. (2000). De cómo se gestó y vino al mundo el cálculo infinitesimal. En Consejería de Cultura (Junta de Andalucía), Universidad de Sevilla, Real Sociedad Matemática Española (Eds.), *El legado de las matemáticas. De Euclides a Newton: los genios a través de sus libros* (pp. 225-280). Sevilla: TF. Artes Gráficas.

Ferrante, J. (2009). *Una Introducción al concepto de límite (dos mil años en un renglón). Guía de estudio*. Facultad Regional General Pacheco. Buenos Aires: Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional. Recuperado de: http://www.edutecne.utn.edu.ar/guias_de_estudio/limites.pdf

Giaquinto, M. D. (2007). *Visual Thinking in Mathematics: An Epistemological Study.*Oxford: Oxford University Press.

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica.* Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Gómez-Chacón, I. (2011). Visualización e intuición en Investigación en Educación Matemática. En: C. Corrales e I. Gómez, (Eds.), *Ideas y Visualizaciones Matemáticas*. Facultad de Ciencias matemáticas, Universidad Complutense de Madrid. Recuperado de: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/ideas/documentos/ines1.pdf

Guzmán, M. de (1983). *Impactos del Análisis Armónico, Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.* Recuperado de http://rinconmatematico.com/bunge/deguzman/deguzarmonico.pdf

Guzmán, M. de (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid: Pirámide.

Hanna, G., (1989). Proofs That Prove and Proofs That Explain. En: G. Vergnaud, J. Rogalski, y M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics EducationN° 13*, Paris, Vol II, pp. 45-51.

Hanna, G., (2000). Proof, explanation and exploration: An overview.*Educational Studies in Mathematics, Special issue on "Proof in Dynamic Geometry Environments"*, 44 (1-2), 5-23.

Hanna, G., Jahnke, H. y Pulte, H. (2006). *Conference Program (preliminary) of The International Conference Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Recuperado de http://www.uni-due.de/imperia/md/content/zis/programm_tagung_011106.pdf

Hanna, G., & Sidoli, N., 2007, "Visualization and proof: a brief survey of philosophical perspectives", *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 3*9(1-2), 73-78.

Hitt, F., Páez, R. (2005). Dificultades en el aprendizaje del concepto de límite y actividades de ensenanza. En Cortés C. & Hitt F. (Eds), *Reflexiones sobre* *el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 133-156). México D.F.: Morevallado Editores.

Jahnke, H. (Ed.). (2003). A History of Analysis.*History of Mathematics,* 24. Providence: American Mathematical Society.

Knuth, E. (2002). Proof as a tool for learning mathematics, *Mathematics Teacher*, 95 (7), 486-490.

Lakatos, I. (1976). *Pruebas y Refutaciones, La lógica del descubrimiento matemático.*Madrid: Alianza Editorial, S.A.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competenciasy capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA, 3*(1), 35-48. Recuperado de http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/4219/1/Lupiannez2008Analisis.pdf

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez, M. Torralbo (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 81-96). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1325/1/Gonzalez2005El_SEIEM_81.pdf

Pacini, C., Riccomi, H., Sacco, L. Y Schivo, M. (2011).El aporte del software libre a la enseñanza y el aprendizaje de las integrales múltiples. Ponencia de la *6ta Jornada de Informática y Educación*. Universidad Nacional deVilla María, Córdoba, Argentina. Recuperado de http://jornadaie.unvm.edu.ar/ponencia30.pdf

Pelczer, I. y Gamboa, F. (2007). Factores de dificultad de los problemas con sucesiones e implicaciones para el diseño de cursos de Cálculo en línea. Ponencia presentada en el *VIII Encuentro Internacional Virtual Educa 2007*, 18 – 22 de junio. São Paulo, Brasil. Recuperado de http://e-spacio.uned.es/fez/view.php?pid=bibliuned:19258

Pontificia Universidad Católica del Perú. Programa Analítico del Curso de Cálculo 1. En: *Sílabos de Estudios Generales Ciencias*. Recuperado de http://www.pucp.edu.pe/documento/postulantes/silabos_eeggcc.pdf

Ramírez, R y Flores, P. (2010). *Visualización en alumnos de ESTALMAT: una experiencia docente e investigadora*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España. Recuperado de: http://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionValencia2010/Visualizacion.pdf

Restrepo, Á. (2006). La Instrumentación de los desplazamientos en Cabri por alumnos de 6è. En E. Acosta (coord.), *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Cabri, Iberocabri 2006* [CD]. Bogotá, Colombia.

Restrepo, Á. (2010). Diferentes Usos y Dificultades de apropiación del "Arrastre" en Cabri-geometry. Comunicación presentada en *II Congreso de Formación y Modelación en Ciencias Básicas*, 5 - 7 de mayo. Medellín, Colombia.Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/650/

Ruiz, A., Chavarría, J. y Alpízar, M. (2006). La Escuela Francesa de Didáctica de las Matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica. *Cuadernos de Investigación y formación en Educación Matemática*, 1 (2). Recuperado de:

http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno2/Cuadernos%202%20c%201.pdf

Ruiz, A. (2009). *Desafíos de la Educación Matemática: La formación de formadores*. Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-matemáticas del Área de Ciencias Básicas de la Universidad de Costa Rica. Recuperado de: http://cimm.ucr.ac.cr/aruiz/recursos/formacion.pdf

Ruthven, K. (2009). Towards a Naturalistic Conceptualisation of Technology Integration in Classroom Practice: the example of school mathematics. *Éducation et didactique* [Versión en linea], 3, (1), marzo 2009. Recuperado de: http://educationdidactique.revues.org/434

Salinas, B. y Cotillas, C. (2005). *Elaboración de la Guía Docente para la Convergencia Europea. Principios para su diseño.* Servei de Formació Permanent de la Universitat de València (Ed.). Recuperado de: http://www.uv.es/eees/(GUIA%20DOCENTE).pdf

Solar, H., Espinoza, L., Rojas, F., Ortiz, A., González, E. y Ulloa, R. (2011). *Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM).*Fondo de Investigación y Desarrollo En Educación – FONIDE. Ministerio de Educación de Chile. Recuperado de http://www.comunidadescolar.cl/documentacion/FONIDE/Informe%20Final-Horacio%20Solar-UCSC-F511091.pdf

Stewart, J. (1999). *Cálculo, conceptos y contextos*. México, D.F.: International Thomson Editores.

Stewart, J. (2002). *Cálculo, trascendentes tempranas*. México, D.F.: Thomson Learning.

Ugarte, F. (2004). *Matemáticas 2 para arquitectos. Notas del curso*. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Valero, P. (1997). *Una Visión de la Didáctica de las matemáticas desde Francia. Algunos conceptos y métodos.* Bogotá: Universidad de los Andes. Recuperado de: http://www.fing.edu.uy/imerl/didactica_matematica/Documentos_2008/Una_vision_de_la_didactica_1_.pdf

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Müller, D. y Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite.*Revista Premisa de la Sociedad Argentina de Educación Matemática*.Año 8. Nº 29. (pp. 9- 19). Recuperado de: http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf

APÉNDICES

APÉNDICE 1

Preguntas y estudio de las respuestas del examen parcial del curso de Cálculo 1 del 2005-2, vinculadas a la noción de límite

Las preguntas analizadas en el Examen Parcial de Cálculo 1 (2005-2) fueron las siguientes:

1. Señalar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando su respuesta:

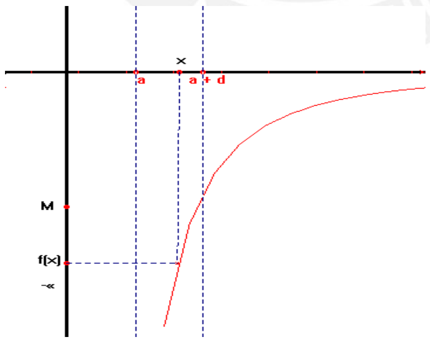
a) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)sen\frac{1}{x}=0$

b) $\forall M<0, \exists\delta>0 / x\in Dom(f)\wedge a<x<a+\delta \Rightarrow f(x)<M \Rightarrow \lim\limits_{x\to a+} f(x)=-\infty$

Tabla N°1 Estudio de las respuestas 1 a) y 1 b) del Examen parcial del curso de Cálculo 1 del 2005-2

Ítem	Respuesta	Veces	Argumento dado por el estudiante	Observaciones del investigador
1 a)	Correcta	4	$(-1\leq sen(\frac{1}{x})\leq 1)$ f(x) $\lim\limits_{x\to+\infty} - f(x)\leq \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)sen(\frac{1}{x})\leq \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $0\leq \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)sen(\frac{1}{x})\leq 0$	Por el Teorema del Sándwich.
		4	$\lim\limits_{x\to+\infty} sen(1/x)=sen(0)=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x=0$

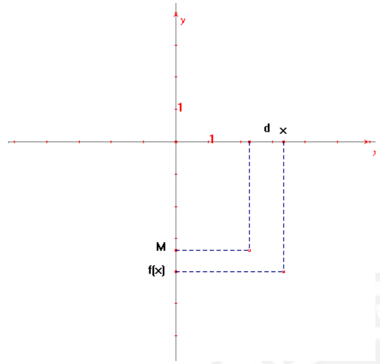
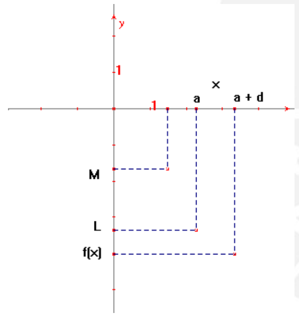
Incorrecta	4	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\left(\dfrac{sen(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	Trata de acomodar la expresión a la propiedad $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x} = 1$. Factoriza (separa) la expresión 1/x fuera del límite, lo cual no es correcto pues "x" es la variable.Parece que ha usado la propiedad de producto de límites sin considerar que la condición previa es el conocimiento de la existencia de cada uno. Aquí debe probar que existe, está asumiendo su existencia.
	8	$f(x) = 1/x$, $f(x) = 1/(x+1)$, $f(x) = 1/(x-1)$, $f(x) = 1/x^2$, etc.	Utilizan casos particulares para justificar su respuesta.
	2	Es verdadero porque al ser $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y multiplicar cualquier función, el producto siempre será cero.	Extiende propiedades de la multiplicación de los números reales que son válidas en el álgebra pero no en el pensamiento analítico. No ven la tendencia.Hay contraejemplos que demuestran lo contrario.
	1	$sen(1/x) = n$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} sen(\frac{1}{x}) = n$	$sen(1/x)$ es una función, no es una constante. Escribe incorrectamente esa función.
	1	Reemplaza $\lim\limits_{x\to+\infty} sen(1/x)$ por $\lim\limits_{x\to 0} sen(1/x) = 0$. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} sen(1/x) \neq \lim\limits_{x\to 0} sen(1/x)$ entonces la respuesta es diferente de cero.	Error de concepto. No se conoce la razón por la cual cambia x →+∞ por x →0. Pero $\lim\limits_{x\to 0} sen(1/x) = 0$.
	3	$\lim\limits_{x\to\infty} sen(1/x) =$ no existe	Error en la aplicación del límite a la función seno.

		1	$\lim_{x\to+\infty} sen(1/x) = L$ $\alpha = sen(1/+\infty)$ $\alpha = sen(0) = 0$	Error en la notación. Piensa que $1/x$ es valor en radianes. No comprende que $sen(1/x)$ es una función.
		1	$sen(1/x)$ sería indeterminado y no existiría si fuese 0, por ello el límite de $sen(1/x)$ no está definido por eso no es seguro que sea cero la respuesta.	Está mal dicho pero se refiere a $g(x) = sen(1/x)$, x ≠ 0. $g(x)$ no está definida en x = 0, pero ello no implica que no exista el límite.
		1	$\lim_{x\to+\infty} sen(1/x) = 1$	
		1	$\lim_{x\to+\infty} sen(1/x) = \lim_{x\to+\infty} sen/x = (\lim_{x\leftarrow\infty} sen)(\lim_{x\to\infty} 1/x) = (sen)(\infty) = \infty$	Escribe incorrectamente la función $sen(1/x)$.
		1	$\lim_{x\to+\infty} f(x)sen(1/x) = sen(1/x)(\lim_{x\to+\infty} f(x))$	Cree que $sen(1/x)$ es una constante, no la opera como una función.
		3	No responden nada	
1.b)	Correcta	12		Comprende la definición del límite cuando x tiende al menos infinito. Los estudiantes identificaron la proposición con la definición de límite infinito negativo, cuando x tiende a *a* por la derecha.

$$\forall M < 0, \exists \delta > 0 / 0 < | x - a | < \delta \Rightarrow f(x) < M$$

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = -\infty$$

Incorrecta	3	$\forall M < 0, \exists \delta > 0 / 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < -M$. Dice que por el signo es falso. Para N>0…… $\Rightarrow f(x) < -N$, por eso es falso. $\forall N > 0, \exists \delta > 0 / 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > N$ $\forall M < 0, \exists \delta > 0 / -\delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) - N$ $\forall M < 0, \exists \delta > 0 / -\delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) < N$	No toma en cuenta que M<0. El otro estudiante es rígido y considera que N>0, si N<0, entonces está mal. Memorizan mecánicamente las definiciones. El tercer estudiante trata por todos los medios de acomodar la pregunta a la definición que le han enseñado.
	1	No existe ningún δ en la definición.	Se queda en lo formal. No considera que se pueda enunciar la definición de límite de otra manera. Memorización mecánica.
	1	$\forall M > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \| x - a \| < \delta \Rightarrow f(x) > M$	Escribe la definición de límite infinito positivo enseñada en clase. La ha memorizado.
	1	Para todo M positivo hay un δ negativo.	δ es una distancia, nunca puede ser negativa. Hay una confusión de límites infinitos positivos y negativos.
	13	No responde nada	
	1	Identifica f(x) con $-(x^2)$	No toma en cuenta que para justificar esas afirmaciones no podemos tomar casos particulares.

1		Pone la distancia δ hacia la izquierda, cuando debe considerarla hacia la derecha. Por ello no logra elaborar el gráfico correctamente. No grafica correctamente el límite lateral por la derecha donde los valores de x se acercan a "a" desde valores mayores que a, decreciendo.
1	No necesariamente ya que f(x) puede ser positivo o puede ser negativo.	No toma en cuenta las condiciones que se establecen en la afirmación.
1	 $\lim_{x \to a^{+}} f(x) = L$ No siempre es infinito negativo.	No logra graficar la función. Parte de considerar al límite de la función a L, cuando la afirmación señala que el límite es – infinito. El límite no siempre es infinito negativo pero en este caso lo es.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla N° 2. Análisis de las respuestas a la pregunta 1 a)

Preguntas	Categorías	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa (%)	Dificultad u obstáculo epistemológico
Correctas	Utiliza el teorema del sándwich. Aplica límite sobre 1/x.	8	22.9	
Incorrectas	Utiliza casos particulares	8	22.9	Límite en el status de proceso, no llega al de objeto.
	No escribe correctamente la función seno	5	14.3	Complejidad del objeto matemático función seno.
	Utiliza las propiedades de los números reales en el caso de funciones	6	17.1	No accede al pensamiento fun-cional, se queda en el pensamiento numérico.
	No escribe correctamente la definición de límite	5	14.3	Complejidad del objeto matemático límite.
	No responde	3	8.5	
Total		35	100	

Fuente: Elaboración propia

Tabla N°3. Análisis de las respuestas a la pregunta 1 b)

Preguntas	Categorías	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa(%)	Dificultad u obstáculo epistemológico
Correctas	Identifica la proposición con la definición de límite infinito negativo.	12	34.3	
Incorrectas	Utiliza casos particulares	1	2.9	Límite en el status de proceso, no llega al de objeto.
	Utiliza la definición de límite al infinito proporcionada en clase.	4	11.4	Obstáculo lógico. Complejidad lógica.
	No escribe correctamente la definición de límite al infinito	5	14.3	Complejidad del objeto matemático límite.
	No responde	13	37.1	
Total		35	100	

Fuente: Elaboración propia.

APÉNDICE 2

Preguntas de la entrevistas a docentes del curso de Cálculo 1 de Estudios Generales Ciencias de la PUCP

1. ¿Considera usted que las dificultades relacionadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, función) son válidas en la realidad educativa en la que usted se desempeña como docente? Si, por favor, podría darnos algunos ejemplos.

2. ¿Propondría usted otros objetos básicos del cálculo u otras nociones matemáticas que no han sido considerado en el primer grupo?

3. ¿Considera usted que las dificultades asociadas a la conceptualización y formalización de la noción de límite (obstáculos geométrico, lógico, etc.) han estado presentes en el aprendizaje de los estudiantes de los cursos de cálculo a su cargo? Si podría explicar un poco por favor.

4. Por su experiencia docente, ¿usted ha detectado otras dificultades que tienen los estudiantes de cálculo para conceptualizar la noción de límite que no han sido consideradas en la pregunta anterior?

5. ¿Qué comentarios le merecen las dificultades relacionadas a la ruptura con el modo de pensamiento algebraico para alcanzar a desarrollar el pensamiento analítico?

APÉNDICE 3
Resumen de las entrevistas a docentes de Cálculo 1 de Estudios Generales Ciencias de la PUCP

1. **Entrevista al profesor A:**

Pregunta 1

"Yo he notado efectivamente que, por ejemplo, cuando en Estudios Generales Ciencias se trabaja lo que se refiere a inecuaciones, inecuaciones cuadráticas por ejemplo, …se muestra…que los alumnos no han comprendido realmente las propiedades de los números reales, la continuidad…en cuanto a su ubicación en la recta, ahí se pueden detectar algunas deficiencias, en concreto con este tema, con los números reales"…."yo diría que sí, que si que si efectivamente también son válidas estas dificultades en el ámbito en el que yo me desempeño."…"En el caso de las funciones la mayor dificultad creo que se da cuando se concibe a la función solamente a través de su representación algebraica, cuando hay problemas para poder hacer el nexo entre la representación algebraica con la representación gráfica y viceversa, establecer conexiones entre estas representaciones"…
Pregunta 2
"…hay ideas asociadas a la lógica proposicional, hay ideas asociadas a la teoría de conjuntos, a los cuantificadores, al lenguaje mismo que se emplea y a la lógica que está detrás de la forma de pensar en cálculo, que los alumnos no tienen, o que no saben cómo esto se puede conectar."
Pregunta 3
…"Los alumnos más bien terminan quedándose con la idea, me da la impresión, de que todo se puede hacer asumiendo que es continua la función, y que todo consiste en evaluar la función en el punto, y que esos problemas de cálculos de límites para los casos en los que hay que levantar indeterminaciones al final se reducen a, mejor dicho, evaluemos, lleguemos a una función donde pueda evaluar, se vuelven expertos en técnicas más bien algebraicas para reescribir las expresiones, para levantar indeterminaciones para que al final puedan evaluar las funciones, y entonces la noción de límite se pierde, no se busca comprender que está pasando en un entorno ni nada de eso, está reemplazando la función por otra en la que si hay continuidad y está diciendo como evaluar."…
Pregunta 4
…"Hay propiedades interesantes en la noción de límite, y hay algunos problemas que si ayudan,"…"cuando se les plantea a los alumnos preguntas sobre la validez de una determinada propiedad"…"se puede hacer uso de ese tipo de preguntas que apuntan más a una concepción correcta de límite que a un mero cálculo algebraico de una propiedad, porque son preguntas donde se requieren contraejemplos para decir que una propiedad no vale"…
Pregunta 5
…"lo que es una igualdad en álgebra difiere esa definición de igualdad con lo que se trabaja en esa parte de las matemáticas que involucra los límites"…"por ejemplo a que el 0,999… es 1, la sorpresa a la que se enfrentan, porque sienten que es casi uno pero no es uno, y ahí está detrás la definición de límite."... "En los objetos geométricos por ejemplo la noción de tangente, eso pasa también con la noción de asíntota, no solamente pasa con la de tangente, cuando tú enseñas en geometría analítica la hipérbola y le dices que las asíntotas son esas dos rectas a las que se aproxima pero que nunca toca, también eso lo llevan cuando se hace luego análisis, esa idea, una asíntota es una recta a la cual la curva se acerca pero que nunca la va a tocar, eso que también es falso en general, lo importante es cómo se comporta la curva a medida que la variable crece o decrece indefinidamente"… "así como para la circunferencia definiste recta tangente como la recta que la tocaba solo en un punto, han tenido unas definiciones previas en contextos que no son contextos relacionados con el análisis. …esos mismos nombres se traen… para …el análisis, … es difícil romper esa idea".

2. Entrevista al Profesor B

Pregunta 1

"…esos conceptos se asumen, no se trabajan, por lo tanto no se detectan estas dificultades… tal vez lo que persiste es la identificación de lo que es la función con lo que es la gráfica de la función…. son capaces de entender que el objeto función se le puede manipular por ejemplo derivándolo, y que la derivada resulta que puede ser otra función…. la sorpresa es cuando la derivada es una constante, entonces ahí se les recuerda,…que la constante también es una función. … hay dificultades pero una vez conocidas, … se va entendiendo cuáles son estas dificultades… ellos reconocen, asocian, eso también es un problema que viene alimentado de Matemática 1, funciones con fórmulas…. no necesariamente toda función tiene asociada una expresión algebraica."
Pregunta 2
"Formalmente llamaríamos lo que es un punto de acumulación. Nosotros no definimos formalmente lo que es un punto de acumulación. Sin embargo, de manera intuitiva se necesita trabajar con él… hay que desarrollarla a lo largo de casi toda la mitad del curso, es decir, esta idea de que entre dos puntos existen infinitos puntos, … que significa lo que es una vecindad,… esas nociones que están en la raíz de límite… entonces lo que hacemos es una aproximación intuitiva gráfica."
Pregunta 3
"…trabajamos directamente el límite con la noción de que es básicamente el valor que debería "tomar una función" en un punto, teniendo en cuenta lo que sucede alrededor, entonces se empieza con esta idea vaga intuitiva, apoyada en el gráfico, y no se empieza con una definición en cuantificadores, por lo cual no hay dificultades en ese sentido… Con ese gráfico inmediatamente se pasa a la notación, todo dentro de una primera sesión. Y se les explica que esta noción de límite vamos a irla puliendo, a través de lo que nosotros llamaremos los teoremas, es decir, verdades que se demuestran a partir de una definición que nosotros no la damos. Aquí aparece estas propiedades, esta álgebra de los límites, …"
Pregunta 4
"….no son capaces todavía de reconocer que el límite hay que entenderlo en su dualidad, es un proceso y un objeto. Es un objeto cuando puedo aplicarle unas reglas, pero para aplicarle esas reglas tengo que ser consciente de cuándo puedo aplicar esas reglas. Y esa regla falla porque en realidad el límite no es un objeto, es un proceso, entonces esas hipótesis están asociadas justamente a alertarme a mí cuando yo puedo simplificar el límite y simplemente reemplazar, cuando no puedo reemplazar porque el límite no es reemplazable, es decir no es algo estático…"
Pregunta 5
"…podríamos mencionar el ejemplo de la tangente, ya cuando se introduce utilizando límites la noción de derivada... que la noción de tangente que traen los alumnos es la tangente asociada a una circunferencia, es una recta que corta a la circunferencia en un punto… y entonces eso les trae desde el primer momento conflictos…y le decimos que trace la tangente y la traza tranquilamente, y entonces luego una vez que ya fue trazada la tangente, aumentamos la curva, la circunferencia la seguimos, la hacemos de tal manera de que toque a la tangente que han dibujado en tres o cuatro puntos, nos la arreglamos. Entonces decimos, ¿sigue siendo la tangente en el punto? Entonces entra otra vez en un conflicto porque la idea de tangente es que toca en un solo punto.…Entonces claramente está totalmente justificada una primera dificultad pero que se conoce y que hay formas, al menos nosotros pensamos, de abordarla.

3. Entrevista al Profesor C

Pregunta 1
"Si un número es natural, entero, racional, no sobre todo en los cursos de generales ciencias, he visto que esa parte si la tienen clara. En ese aspecto no he encontrado dificultad. En la parte en que señala que mayormente para reconocer una función no se utiliza la definición sino asocian la función con una fórmula… muchas veces inclusive no se menciona el dominio, en que ámbito se define esa función… no manejan muy bien el

concepto de sucesión como una función… Más fácil para el estudiante es pasar del registro algebraico al gráfico, pero cuando se da el proceso inverso, pasar del gráfico al algebraico, tienen dificultades.”
Pregunta 2
“…al comienzo quizá se trabaja como se señala aquí en el material con funciones o con sucesiones cómodas donde efectivamente el límite es fácil de detectar o se puede ver más o menos adonde converge una sucesión o cuál es el límite de una función… Y después en una segunda etapa, en cursos más avanzados, por ejemplo aquí el concepto de sucesión se da en cursos ya de Cálculo 4, donde el alumno ya ha adquirido madurez, y tal vez en ese momento ya se puedan trabajar cuestiones más complicadas respecto a las sucesiones, por ejemplo… Definitivamente tienen muchas dificultades para el manejo correcto de los cuantificadores, el para todo y el existe. En las pruebas se ve que a veces se mecanizan…”
Pregunta 3
“…Se hace un uso del álgebra pero a veces hay procesos de simplificación, eliminar factores por ejemplo, que se hacen de forma automática pero el alumno la mayoría de veces no se da cuenta de que puede cancelar porque está trabajando con valores diferentes del número al cual está tendiendo una función... El pensamiento analítico es difícil de alcanzar con profundidad, hay que insistir mucho sobre todo para hacerle notar que el concepto de límite es un concepto local, alrededor de un puntito, porque si ya se alejan mucho de ese puntito se pueden estar alterando propiedades, resultados que se pueden necesitar para analizar ese límite.
Pregunta 4
Tienen dificultades para considerar esa nueva consideración respecto a igualdad de cantidades, recta tangente a una curva, si tienen dificultades para adoptar esta nueva concepción.
Pregunta 5
La dificultad central en el estudio del límite, digamos por ejemplo de las funciones, claramente pues está en el manejo formal de la definición, el manejo formal de la definición a pesar de que se insiste se repite y se ve en varios cursos, primero a nivel de funciones de una variable, después a nivel de funciones de varias variables, manejar la definición cuesta mucho trabajo. Se puede manejar con relativa facilidad funciones simples, en el caso de funciones de una variable funciones lineales, en el caso de funciones de varias variables también funciones de primer grado, pero ya cuando se pasa a funciones de segundo grado funciones más complicadas ya el manejo de la definición se torna más complicado para el alumno. No tanto así en la parte operacional la parte de cálculo cuando ya después se les da los teoremas para calcular límites eso si lo manejan con relativa facilidad tanto en una como en varias variables. La dificultad central está en el manejo de la definición formal de límite.

APÉNDICE 4

Análisis de las entrevistas

Tabla N°4. Análisis de las entrevistas a profesores de la PUCP sobre dificultades en la Enseñanza del Cálculo

Dificultad	Profesor A	Profesor B	Profesor C
Complejidad de los objetos básicos del cálculo	Si. Hay dificultad en la conceptualización de los números reales, en sus propiedades, y en la noción de función, cuando serelacionansus representaciones.	Si. Se suele identificar a las funciones con gráficas y fórmulas. Un número puede ser una función constante. Dificultad en la idea de punto de acumulación.	Si. Se tiende a identificar a las funciones con las fórmulas. No se considera a las sucesiones como funciones. Dificultad en el paso del registro gráfico al algebraico.
Conceptualización y formalización de la noción de límite (obstáculos geométrico, lógico, etc.)	Si. Existen los obstáculos lógico y geométrico. Dificultad de aplicar límites enlas funciones no continuas.	Si. El límite de una función es un objeto porque se aplican reglas, que fallan porque es un proceso.	Si. Hay un obstáculo lógico por el uso de la definición formal. También existe un obstáculo geométrico.
Ruptura con el modo de pen-samiento algebraico para desarrollar el pensamiento analítico.	Si, existe dificultad al reconstruir los objetos matemáticos (asíntota).	Si, en dibujar una tangente que toca sólo en un punto a la curva.	Si, al redefinir la noción de igualdad en el pensamiento analítico, así como la tangente a una curva.

Fuente: Elaboración propia.

APÉNDICE 5

Carreras universitarias de las principales universidades de Lima en que se enseña Cálculo

Tabla N°5. Carreras de las principales universidades de Lima en las que se enseña Cálculo

Campo científico	Carrera universitaria
Ciencias Sociales	Geografía
Ciencias Básicas	Química Física Matemática Estadística Investigación Operativa Computación Científica Ingeniería Física Ciencia de la computación
Educación	Secundaria. Especialidades: Matemática, Física, Química, Biología
Ciencias de la vida	Biología
Ciencias de la salud	Medicina Humana Obstetricia Enfermería Tecnología Médica Nutrición Farmacia y Bioquímica Ciencias de los Alimentos Toxicología Odontología Estomatología Medicina Veterinaria Nutrición
Ciencias Económico-empresariales	Economía Administración Contabilidad Gestión de Recursos Humanos Marketing
Ingenierías	Agronomía Meteorología Ambiental Forestal En Gestión Empresarial Estadística e Informática

	En Industrias Alimentarias Agrícola Pesquería Zootecnia Informática Química Agroindustrial Mecánicade Fluidos Geológica Geográfica De Minas Metalúrgica Civil Industrial Textil y Confecciones Electrónica Eléctrica Telecomunicaciones De Sistemas De Software Económica y Ciencias sociales De Petróleo y Petroquímica Empresarial Mecatrónica
Gestión y Alta Dirección	
Arquitectura	

Fuente: Elaboración propia en base a la información encontrada en las siguientes páginas web el 20 de abril de 2013
http://www.uni.edu.pe/sitio/academico/facultades/
http://www.admision.unmsm.edu.pe/portal/index.php?option=com_content&view=article&id=2&Itemid=3
http://www.up.edu.pe/carrera/ingempresarial/Paginas/JER/Detalle.aspx?IdElemento=53
http://www.pucp.edu.pe/content/index.php
http://www.upch.edu.pe/upchvi/portada.asp
http://www.ulima.edu.pe/webulima.nsf/
http://www.usmp.edu.pe/index.php?pag=facultades
http://www.urp.edu.pe/

APÉNDICE 6

Sugerencias recibidas a lo largo de las exposiciones del proyecto de innovación didáctica

Fecha	Lugar	Docente	Sugerencia
Febrero 2008	III Coloquio sobre enseñanza de las matemáticas. Lima	Cecilia Gaita	Propuso hallar uncamino geométrico para determinar δ en función de ε.
Julio 2008	III Coloquio sobre enseñanza de las matemáticas, Lima, y en el ICME 11, México.	Jacqueline Huanqui	Darle más dinamismo al punto a en la construcción de la definición de límite.
Julio 2008	Workshop del ICME 11 (México).	Docente	La definición de límite invierte la dirección de la implicación.
Julio 2008	Topic Study Group N° 16 del ICME 11.	Yudariah Mohammad (Malasia)	Posibilidad de dividir el dominio en trozos.
Agosto 2012	VI Iberocabri en Lima	Laurito Alves (Brasil)	Desplazamiento más natural en los intervalos del eje X. Dígitos de la parte decimal de las coordenadas del punto.

APÉNDICE 7

Eventos académicos, publicaciones y encuesta sobre el Proyecto de Innovación Didáctica

1. Eventos académicos

El Proyecto de Innovación Didáctica desarrollada en el presente trabajo no se expuso en su totalidad en un solo evento. De acuerdo a cómo se ha ido desarrollando la investigación, se expuso cada avance en los diferentes eventos, los cuáles han sido los siguientes:

Febrero de 2006. En el Coloquio Internacional sobre Enseñanza de la Matemática a Estudiantes de Ingeniería. IREM. GIEMU, se presentó la comunicación "Estudio de los errores en el concepto de límite de funciones en un curso de Cálculo 1", en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Julio de 2006. En el XXIV Coloquio Nacional de Matemática "Maynard Kong" de la Sociedad Matemática Peruana, se expuso la comunicación "Visualización del cambio en la noción de Límite usando Cabrí", en la Universidad Nacional San Luís Gonzaga de Ica.

Agosto de 2006. En el Quinto Encuentro Científico Internacional de Invierno (ECI2006), se presentó la ponencia: "Un estudio sobre los errores en el concepto de Límite de Funciones en un curso de Calculo 1", en el Centro de Convenciones Internacionales del INICTEL, en Lima.

Julio de 2007. En la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 21) se desarrolló el Taller "Visualización de la noción de límite utilizando Cabrí Géomètre", en la Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Febrero de 2008. En el III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas llevado a cabo en la PUCP se expuso el Taller "Visualización de la noción de límite empleando Cabri II" en compañía de Jacqueline Huanqui.

Julio de 2008. En el 11th International Congress on Mathematical Education (ICME 11), en el Topic Study Group Nº 16: Research and development in the teaching and learning of calculus se presentó el paper "El papel de la visualización en el análisis epistemológico de la noción de límite", en la Universidad Autónoma de Nuevo León, Monterrey, México.

Julio de 2008. Asimismo, en el ICME 11, se expuso el Workshop: “Visualización de la noción de límite usando Cabri II”, en compañía de Jacqueline Huanqui, en la Universidad Autónoma de Nuevo León.

Julio de 2008. En la XXII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa se presentó el Reporte de Investigación “Análisis epistemológico de la noción de límite en un contexto computacional”, en el Instituto Politécnico Nacional, México D.F.

Agosto de 2012. En el VI Congreso Iberoamericano de Cabri, Iberocabri 2012, desarrollado en la PUCP, se expuso el Taller: Visualizando los límites de funciones y las derivadas con geometría dinámica, en compañía de María Elena Villanueva y Rocío Delgado de la Universidad Nacional Agraria de la Molina.

2. Publicaciones en actas de eventos académicos

El proyecto de innovación tuvo un proceso de desarrollo. Las ideas que han ido dando cuerpo a la propuesta fueron publicadas en actas de eventos académicos:

1. Bonilla, M. y Huanqui, J. (2008). Visualización de la noción de límite empleando el Cabri II. En: C. Gaita (Ed.). Actas del III Coloquio Internacional Sobre Enseñanza de las Matemáticas (pp. 183-193). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú. Disponible en:

   http://www.pucp.edu.pe/irem/publicaciones_archivos/Actas-2008.pdf

   http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/.../taller_4_bonilla_iii_coloquio.doc

2. Bonilla, M. (2009). Análisis epistemológico de la noción de límite en un contexto computacional. En: P. Lestón. (Ed.). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22 (pp. 1753-1760). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Disponible en:

   http://www.clame.org.mx/documentos/alme22.pdf

3. Bonilla, M., Villanueva, M y Delgado, R. (2012). Visualizando los límites de funciones y las derivadas con geometría dinámica. En F. Ugarte y H. Azabache (Eds.). Actas del VI Congreso Iberoamericano de Cabri. Iberocabri (pp. 172 - 177). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de http://textos.pucp.edu.pe/textos/ver2/2654

3. **Encuesta aplicada a los docentes asistentes al Taller "Visualización de la Noción de Límite empleando el Cabri II" de febrero de 2008**

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
IREM – PERÚ

90 AÑOS PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

GRUPO DE INVESTIGACIÓN PARA L ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA UNIVERSITARIA
GIEMU-PUCP

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
PUCP

III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas
Campus de la PUCP- 13, 14 y 15 de febrero de 2008

- Esta encuesta es anónima y su opinión nos permitirá recoger sugerencias y recomendaciones en relación a este evento así como nos permitirá seguir mejorando para la realización de próximos eventos.
- Marque con un círculo la opción más cercana a su propia apreciación dibujando una circunferencia sobre la letra respectiva. Mucho agradeceremos que conteste la presente encuesta con la mayor sinceridad posible.

Preguntas sobre el participante:

1. Ud. se identifica como:
   a. Profesor de Secundaria
   b. Profesor de Centro Preuniversitario o Academia de preparación
   c. Profesor de Instituto Superior Tecnológico
   d. Profesor Universitario
   e. Otro: ______________________

Preguntas sobre el taller:

2. ¿Ud. considera que desde un inicio ha sido claro el objetivo del taller?
   a. Si
   b. No
   c. No sabe, no opina

3. ¿Ud considera que se cumplieron los objetivos del taller?
   a. Si
   b. No
   c. No sabe, no opina

4. ¿Ud considera que ha adquirido nuevos conocimientos?
   a. Si
   b. No
   c. No sabe, no opina

5. ¿Ud considera que podrá implementar en su centro educativo el tema que ha aprendido en este Taller?
   a. Si

b. No podré implantar estos temas , pues: ____________________

____

c. No sabe, no opina. ¿por qué?

____

____

6. ¿Ud considera que la metodología utilizada en el taller por las profesoras Jacqueline Huanqui y María del Carmen Bonilla ha sido adecuada para lograr incrementar su propio aprendizaje sobre el tema?
   a. Si
   b. No ha sido adecuada, pues: ____________________

   ____

   c. No sabe, no opina. ¿Por qué?: ____________________

   ____

7. ¿Ud considera que la metodología utilizada en el taller la podrá implementar (total o parcialmente) en su centro educativo para tratar este tema u otros?
   a. Si
   b. No podré implementarla, pues: ____________________

   ____

   c. No sabe, no opina. ¿Por qué?: ____________________

   ____

8. Este espacio ha sido reservado para que Ud. libremente nos de su opinión y sugerencias sobre el enfoque del taller, sobre el tema, sobre la metodología, respecto a los alcances del tema, y para que nos sugiera otros temas que puedan ser de interés para Ud.

____

____

____

Muchas gracias.

4. Resultados de la encuesta aplicada a los docentes asistentes al taller del III Coloquio

Tabla N° 6. Resultados de la pregunta sobre el tipo de participante en la encuesta de opinión.

Pregunta sobre el participante	Profesor de Secundaria		Profesor de Instituto Superior Tecnológico		Profesor Universitario		Estudiante de especialidad Matemáticas	
Pregunta 1	1	9,1%	2	18,2%	7	63,6%	1	9,1%

Fuente: Elaboración propia.

Tabla N° 7. Resultados de las preguntas sobre el taller en la encuesta de opinión

Preguntas sobre el taller	SI		NO		No sabe /no opina		En blanco	
2) Objetivo claro del taller	11	100%						
3) Se cumplieron objetivos del taller	11	100%						
4) Ha adquirido nuevos conocimientos	10	90.9%					1	9.1%
5) Podrá implementar en su centro educativo	10	90.9%					1	9.1%
6)La metodología ha sido adecuada	10	90.9%					1	9.1%
7) Podrá implementar la metodología.	9[1]	81.8%	1[2]	9.1%			1	9.1%

Fuente: Elaboración propia.

[1] Un docente encuestado escribió: “lo podré implementar sólo parcialmente”

[2]Un docente encuestado escribió: “me falta el dominio del programa.

Opiniones y sugerencias de los participantes:

- Me ha gustado mucho, como es posible utilizar la tecnología para poder ayudarnos en nuestras clases, y lograr con ello que los estudiantes comprendan mejor las definiciones formales de matemática. Sería bueno que hubieran más talleres sobre utilización de tecnología en nuestras clases.
- El taller debe ampliarse para otros temas dentro de la matemática aplicada, como puede ser aplicaciones hacia la economía, que nos pueda visualizar por ejemplo un costo marginal (aplicación de la derivada).
- Es muy buena la iniciativa de considerar el Cabri como una herramienta para ayudar a comprender los conceptos matemáticos.
- Está muy bien y debe implementarse para otras definiciones del Análisis Matemático como la derivada y porque no la integral.
- Me ha sido satisfactorio, el Cabri es muy interesante. Me gustaría que en una oportunidad se programe para trabajar en 3D.
- El tema que se expuso en el taller es muy interesante ya que nos facilita visualizar los cambios que queremos ver.
- Todo ha sido de alto nivel, los temas requeridos serían en 3D.
- Aplicar Cabri para funciones de varias variables.
- Más información sobre material multimedia.

APÉNDICE8

Actividades del Proyecto de Innovación Pedagógica elaboradas en Cabri II Plus

QUINTA SESIÓN

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIO DEL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

1. Introducción a las Actividades de la quinta sesión

Considerando los supuestos propuestos por Hitt y Páez (2005), la idea es trabajar con actividades de carácter geométrico que estimulen la intuición de los estudiantes, y a partir de ellas procurar trazar un camino que conduzca a la comprensión de las propiedades matemáticas presentes, facilitando la posterior formalización de la noción de límite de sucesiones, o lo que es lo mismo, que las actividades propuestas faciliten la comprensión de las definiciones algebraicas. Del conjunto de actividades propuestas por otros investigadores y recopiladas por Hitt y Páez,primero vamos a presentardos de ellas para iniciar la construcción de la noción de límite de sucesiones utilizando la geometría dinámica del Cabri II Plus. La tercera actividad se trata sobre una sucesión numérica. Las tres actividades, 1, 2 y 3que siguen a continuación se realizan en una sesión de clase de dos horas. La institucionalización de la definición de límite de sucesión se realiza al finalizar cada una de las tres actividades, remarcando en cada caso, lo particular de cada uno.

Actividad 1: Sucesión de Triángulos

2. Objetivos de la actividad 1

Formalizar la noción de límite de sucesiones a partir de la representación geométrica de una sucesión convergente.

Establecer la diferencia entre el límite de una sucesión convergente y el límite de una sucesión divergente.

Interrelacionar las representaciones geométrica, numérica y algebraica del límite de una sucesión convergente.

3. Contenidos

Límite de una sucesión convergente

Límite de una sucesión divergente

Vecindad o entorno alrededor de un punto.

4. Capacidades

Calcula el límite de una sucesión convergente.

Emplea correctamente la definición de límite de una sucesión en la resolución de problemas.

5. Obstáculos epistemológicos y dificultades que se pretenden franquear

Obstáculo lógico

Obstáculo geométrico

El factor dual de los conocimientos matemáticos: como objetos y como procesos

6. Insumos

Ficha de actividades impresa

Archivo en Cabri II Plus*Sucesión de triángulos.fig.*

Calculadora

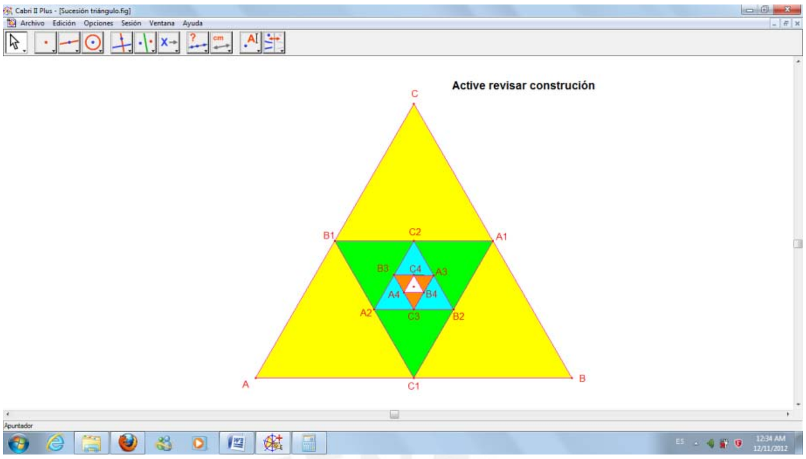
7. Duración

20 minutos.

8. Desarrollo de la actividad

1. Abre el archivo *Sucesión de triángulos.fig* (Gráfico N° 3) que ha sido elaborado con el software Cabri II Plus. En la parte superior de la pantalla, a la izquierda dentro de *Edición* hay un comando *Revisar la construcción*. Selecciónalo. Sale un cuadro. Haz click en la flecha derecha, paso por paso, para poder visualizar el proceso de construcción y entender su lógica.

Gráfico N° 3. Sucesión de triángulos equiláteros.fig

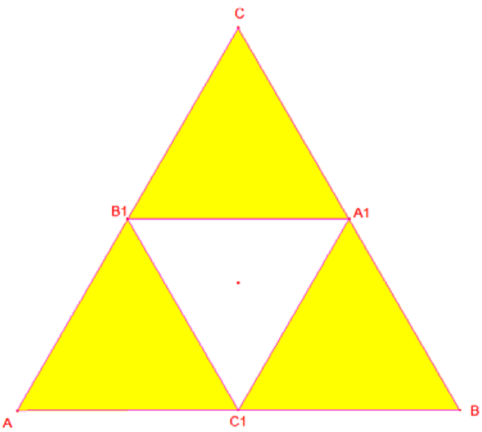


Fuente: Elaboración propia en base a la propuesta de Hitt y Paéz (2005)

2. Sea ABC un triángulo equilátero de área A_0 = S. Los puntos medios de cada lado A_1, B_1 y C_1 se unen formándose nuevos triángulos. (Gráfico N° 4)

a) ¿Cuántos triángulos se han formado? ¿Todos son equiláteros? ¿Cuál es el área $\mathbf{A_1}$ (en función de S) del triángulo central $\triangle A_1B_1C_1$.?

Gráfico N° 4. Formación de nuevos triángulos



Fuente: Elaboración propia en base a propuesta de Hitt y Páez (2005)

b) Si se repite el proceso anterior para formar un nuevo triángulo $A_2B_2C_2$, cuya área es $\mathbf{A_2}$, ¿Cuál es el valor de $\mathbf{A_2}$ en función de S?

…………………………………………………………………………………………...

c) El proceso anterior se repite varias veces. ¿Ese proceso puede continuar? ¿Hasta dónde puede continuar? ¿Podría llegar a tener un último término? Completa el siguiente cuadro hallando los valores en función de S:

…………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

A_0	S
A_1	
A_2	
A_3	
A_4	
….	
A_n	

d) Considera S = 1, utilizando una calculadora halla los valores de $\mathbf{A_6}$, $\mathbf{A_7}$ y $\mathbf{A_{15}}$, y deduce cuál es el valor de $\mathbf{A_n}$ cuando n es muy grande. Completa el cuadro.

A_0	S = 1
A_1	
…	…..
A_6	
A_7	
…	…..
A_{15}	
…	…..
A_n	

e) Si n es muy grande, ¿hacia qué valor se aproxima A_n?

………………………………………………………………………………………..…….

f) ¿En algún momento la sucesión llegará a ser el valor al cuál se aproxima?

………………………………………………………………………………………………

g) Si consideramos a la sucesión B_n = 2n, ¿Hacia qué valor se aproxima esa sucesión?

…………………………………………………………………………………………..

h) ¿Qué diferencia puedes establecer entre las sucesiones A_n y B_n?

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

9. Indicaciones para el docente e Institucionalización del conocimiento

- Sería importante que el estudiante realice la revisión de la construcción en forma simultánea a la lectura de las preguntas a), b) y c). El cuadro que aparece al revisar la construcción sería mejor colocarlo en los extremos de la pantalla para favorecer la visualización.
- Las preguntas pueden ser respondidas en forma autónoma por el estudiante. El profesor cumple el papel de facilitador al inducir con preguntas a que el estudiante llegue a comprender la tendencia de la sucesión.
- Es importante establecer la diferencia entre una sucesión divergente (Bn = 2n) y una sucesión convergente (An).
- Una vez que los alumnos finalizan la actividad, el profesor, en base a las respuestas de los estudiantes, inicia el proceso de institucionalización relacionando los nuevos aprendizajes con la definición formal de límite de sucesión:

Decimos que el número real L es el límite de la sucesión (a_n), y escribimos

$$\underset{n\to\infty}{\text{lím}}\, a_n = L$$

si y solo si para cada número ε > 0, existe un número

$n_0 \in \aleph^+$ tal que $n > n_0 \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Observaciones:

$$|a_n - L| < \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

$$\leftrightarrow a_n \epsilon]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$$

Actividad 2: Sucesión de circunferencias

1. Objetivo de la actividad

   Deduce la definición de límite de una sucesión constante a partir de su representación geométrica.

2. Contenidos

   Límite de una sucesión constante

3. Capacidades

   Calcula el límite de una sucesión constante.

   Emplea correctamente la definición de límite de una sucesión constante en la resolución de problemas.

4. Obstáculo que se pretende franquear.

   El factor dual de los conocimientos matemáticos: como objetos y como procesos.

5. Insumos

   Ficha de actividades

   Calculadora

   Archivo *Sucesión de circunferencias.fig*

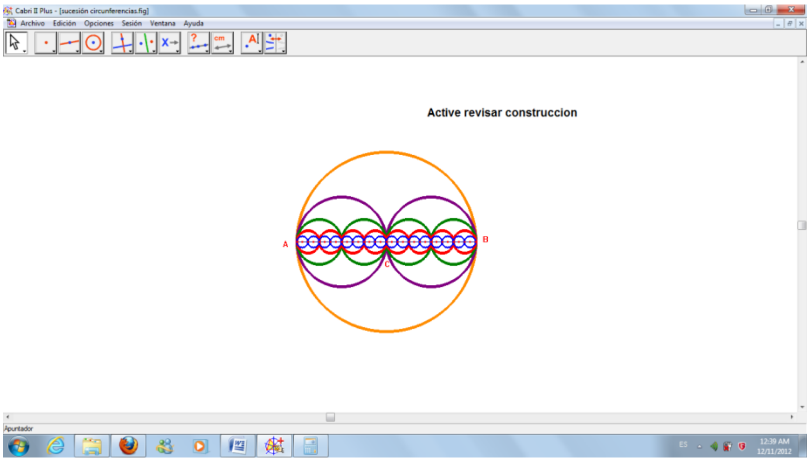
6. Duración

   20 minutos

7. Desarrollo de la Actividad

1. Abre el archivo *Sucesión de circunferencias.fig* (Gráfico N° 5) elaborado con Cabri II Plus. Activa el comando Revisar la construcción y observa el proceso de construcción.

Gráfico N° 5. Sucesión de circunferencias.fig



Fuente: Elaboración propia en base a la propuesta de Hitt y Paéz (2005).

2. Se construye un círculo con el segmento $\overline{AB}$ como diámetro y el radio r. Luego se divide $\overline{AB}$ en dos partes iguales, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, y se construyen dos círculos con $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ como diámetros. Se continúa dividiendo los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ en dos partes iguales, cada uno, y se siguen construyendo más círculos.

a) ¿Cuál es el valor de la suma de las longitudes de las circunferencias de igual tamaño a medida que disminuye la longitud del radio?Completa la siguiente tabla:

Radio	r/2	r/2			…	r/32	….	r/n
Longitud de una circunferencia	2πr							
Número de circunferencias formadas	1							
Suma de la longitud de circunferencias de igual radio	2πr							

b) ¿El proceso de dividir los diámetros y construir círculos puede llegar a finalizar en algún momento? ¿Por qué?

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

c) ¿Qué se puede concluir respecto a la suma de las longitudes de las circunferencias que tienen el mismo radio?

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

d) Si continuamos dividiendo el diámetro y construyendo circunferencias de igual radio indefinidamente, ¿cuál es la tendencia que sigue la suma de las longitudes de las circunferencias que tienen el mismo radio?

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

8. Indicaciones para el docente e Institucionalización del conocimiento

- Las preguntas pueden ser respondidas en forma autónoma por el estudiante. El profesor cumple el papel de facilitador al orientar con sus preguntas para que el estudiante llegue a comprender las propiedades matemáticas relacionadas a la noción de límite.
- En el desarrollo de las respuestas es necesario resaltar que la suma de la longitud de las circunferencias de igual radio es el mismo número en todos los casos, es una constante. Si bien la sucesión de la suma de la longitud de las circunferencias subdivididas de igual radio es infinita, el valor siempre es el mismo.
- De igual manera se debe remarcar que la división del segmento $\overline{AB}$ en mitades es un proceso infinito. Esta idea consolida la idea del continuo numérico.

Actividad 3: Sucesión numérica

1. Objetivos de la actividad

   Visualiza por medio del arrastre el límite de una sucesión numérica.

   Interrelacionar las representaciones geométrica, numérica y algebraica del límite de una sucesión.

2. Contenidos

   Límite de una sucesión convergente

   Entorno o vecindad alrededor de un punto.

3. Capacidades

   Calcula el límite de una sucesión numérica convergente.

   Emplea correctamente la definición de límite de una sucesión en la resolución de problemas.

4. Obstáculos epistemológicos que se pretenden franquear

   Obstáculo geométrico

   Obstáculo lógico

   El factor dual de los conocimientos matemáticos: como objetos y como procesos

5. Insumos

   Ficha de actividades

   Archivo Límite de sucesiones.fig.

   Calculadora

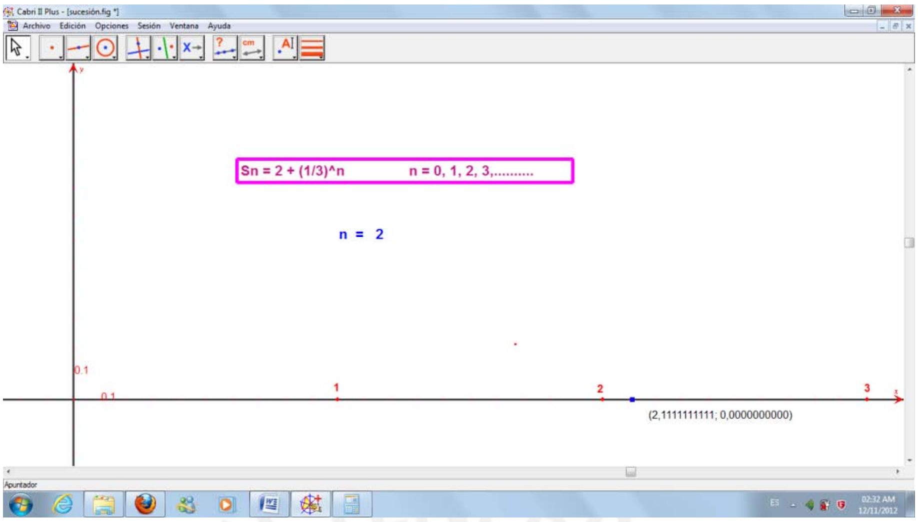
6. Duración

   20 minutos

7. Desarrollo de la Actividad

1. Ingresa al archivo de Cabri II Plus *Límite de sucesiones.fig.* (Gráfico N° 6)

Gráfico N° 6. Límite de sucesiones.fig



Fuente: Elaboración propia.

2. En la pantalla está escrito n = 2. Con la flecha de la herramienta apuntador selecciona 2 cuando aparezca el texto “el número”. Modifica con las flechas ascendente y descendente los valores del número de acuerdo a lo solicitado en la siguiente tabla. Observa cómo se mueve el punto azul que está sobre el eje X y cómo cambian sus coordenadas. De acuerdo a ello completa los espacios en blanco. Para n = 22 utiliza una calculadora.

N	$S_n = 2 + (1/3)^n$	Comentario
0	3	
1	2.333333….	En realidad es $2.\hat{3}$
2		
3		
4		
10		
20		
22		

3. ¿Qué podríamos decir del valor de $\mathbf{S_n}$ cuando **n** es muy grande?, es decir, ¿hacia qué valor se aproxima la sucesión cuando **n** tiende al infinito?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

4. ¿Llegará un momento en que el valor de la sucesión sea igual al valor al que se aproxima?

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

8. Indicaciones para el docente e Institucionalización del conocimiento

- La metodología de trabajo es similar a las anteriores actividades. Al finalizar las actividades el profesor, a partir de las respuestas y las conclusiones a las que llegaron los estudiantes, tendrá que reforzar la definición de límite de sucesión, principalmente la idea de épsilon, del entorno alrededor del punto de acumulación que viene a ser el límite de la sucesión, introducida en el proceso de institucionalización iniciado en las actividades 1 y 2.

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIO DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

A continuación se presentan actividades que se desarrollarán en tres sesiones de clase de la Programación del curso de Cálculo 1, en la sexta sesión las actividades sobre la idea intuitiva de límite de funciones, así como la actividad sobre la definición precisa del límite de funciones,en la octava sesión límites laterales, y en la novena sesión las actividades sobre límites infinitos y límites al infinito.

En cada sesión los estudiantes realizan primero las actividades, y en base a lo analizado el profesor institucionaliza las definiciones intuitiva y precisa de límites de funciones señaladas en la programación. El proceso de construcción del archivo realizado en Cabri II Plus de la definición precisa de límite de funciones, *sqrt(3 – x).fig* está descrito detalladamente en el Apéndice 9.

La actividad en Cabri II Plus *función definida a trozos.fig* es muy similar a una actividad desarrollada en la página 33 del material de trabajo del curso de Matemática 2 de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la PUCP (Ugarte, 2004).

SEXTA SESIÓN

1. Introducción a la Sexta Sesión

Las actividades que se proponen para el caso de límite de funciones buscan el franqueamiento de obstáculos relacionados a las dificultades asociadas a la conceptualización de límite. La idea que se persigue es encontrar una situación en la que el estudiante se va a enfrentar a una cuestión que forma un obstáculo para él, y sobre la cual se va a apoyar para apropiarse, o construir, un conocimiento nuevo. La situación se dará en un proceso experimental, en el entorno informático del Cabri II Plus.

De lo que se trata no es de comunicar las informaciones que se quieren enseñar, sino de encontrar una situación en la cual esas informaciones sean las únicas óptimas a ser usadas. Es a través de las indicaciones señaladas al estudiante, y su trabajo experimental sobre los objetos matemáticos construidos, que surgirán las propiedades matemáticas relacionadas a la noción de límite de funciones.

Actividad sobre la definición intuitiva dellímite de funciones,

2. Objetivos de la actividad

   Visualiza el desplazamiento del punto A sobre la función cuando se aproxima a ***a***y observa el valor de f(x).

3. Contenidos

   Límite de funciones (definición intuitiva).

4. Capacidades

   Calcula el límite de una función por medio del arrastre.

5. Obstáculos epistemológicos que se pretenden franquear

   El factor dual de los conocimientos matemáticos: como objetos y como procesos

6. Insumos

   Ficha de actividades

   Archivo *función lineal.fig*

   Archivos Función 1.fig y *Función 2*.fig

7. Duración

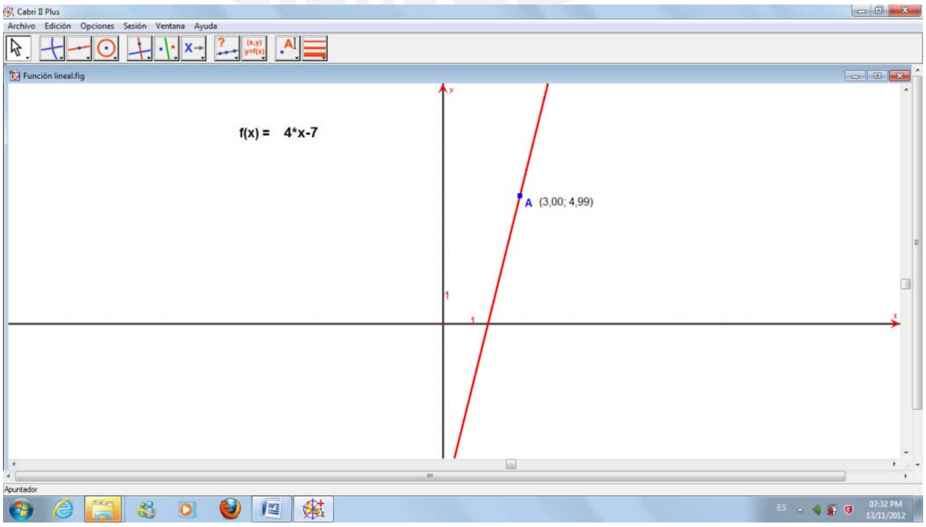
   30minutos

8. Desarrollo de la Actividad

1. Halla el valor al que tiende la función f(x) = 4x – 7cuando x se acerca a 3.

   a) Abre el archivo *función lineal.fig*. (Gráfico N°7)donde se ve la gráfica de la función $f(x) = 4x - 7$.

Gráfico N° 7. Función lineal. Fig



Fuente: Elaboración propia

b) Ubica el punto A y observa sus coordenadas.

c) Desplaza el punto A a través de la recta. Arrastra lentamente el punto A hasta que el valor de la abscisa sea 3, arrástralo tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda.¿Hacia qué valor se aproxima la ordenada de A? Percibe que los cambios son pequeños. Identifica el valor.

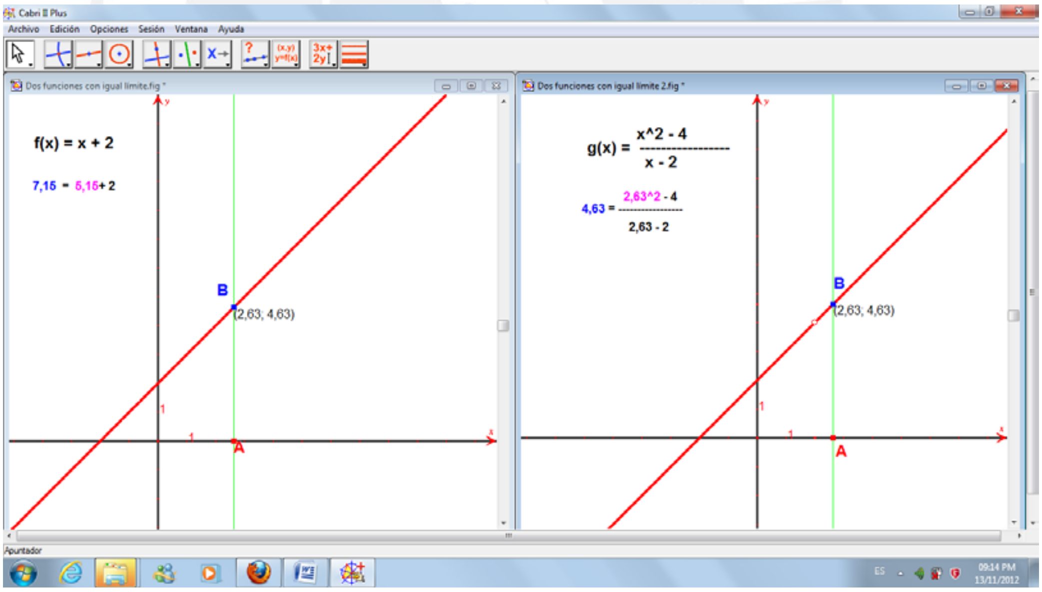
………………………………………………………………………………….

d) ¿Y qué sucede con la ordenada cuando la abscisa del punto A se acerca al 2? ¿A qué valor se acerca la ordenada del punto A?

………………………………………………………………………………….

2. Abre los dos archivos *Función 1.fig* y *Función 2*.fig (Gráfico N° 8), y colócalos en forma simultánea en la pantalla con el comando ventana, mosaico vertical.

Gráfico N°8. Función 1.fig y Función 2.fig



Fuente: Elaboración propia

a) Analiza la representación algebraica de las dos funciones, así como el desplazamiento del punto B cuando se mueve A sobre el eje X, en cada una de ellas. ¿Qué relación hay entre las dos funciones? ¿Cuáles son sus dominios?

…………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………

b) En el archivo *Función 1* que grafica la función f(x) = x + 2, mueve el punto A sobre el eje X para desplazar el punto B que está sobre la función. Mueve el punto B de tal manera que se acerque al valor de 2 en la abscisa. ¿Hacia qué valor se acerca la ordenada de B? Realiza la aproximación tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda.

……………………………………………………………………………………

c) En el archivo *Función 2*que grafica la función $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, mueve el punto B de tal manera que se acerque al valor de 2 en la abscisa, tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. ¿Hacia qué valor se acerca la ordenada de B?

……………………………………………………………………………………

d) ¿Qué relación hay entre las respuestas de las preguntas b) y c)?

……………………………………………………………………………………

9. Indicaciones para el docente e Institucionalización del conocimiento

- El trabajo con los archivos Función lineal.fig, Función 1.fig y Función 2.fig incide en el arrastre del punto sobre la función, observando los valores de la abcisa y la ordenada, para poder apreciar la tendencia.
- En base a las respuestas de los estudiantes el profesor debe llegar a la definición intuitiva de límite de funciones:

  Escribimos

  $$\underset{x\to a}{lím}\ f(x)=L$$

  y decimos 'el límite de f(x), cuando x tiende a *a*, es igual a L' si podemos acercar arbitrariamente los valores de f(x) a L (tanto como deseemos) tomando x lo bastante cerca de *a*, pero no igual a *a.*

Actividad sobre la Enseñanza y aprendizaje de la definición precisa de límite de una función real

1. Objetivos de la actividad

   Interrelacionar las representaciones geométrica, numérica y algebraica del límite de una función real.

   Analizar la relación que existe entre las vecindades [L+ε, L- ε] y [a-δ, a+δ].

   Visualizar el desplazamiento del punto S sobre la función Sqrt(3-x) y verificar la validez de la definición formal del límite de la función en la intersección de ambas vecindades.

2. Contenidos

   Límite de funciones

   Vecindades o entornos

3. Capacidades

   Emplear correctamente la definición formal de límite de funciones en la resolución de problemas.

4. Obstáculos epistemológicos que se pretenden franquear

   Lógico

   Geométrico

   Factor Dual de las nociones matemáticas, como proceso y como objeto.

5. Insumos

   Ficha de actividades

   Archivo Sqrt (3-x).fig

6. Duración

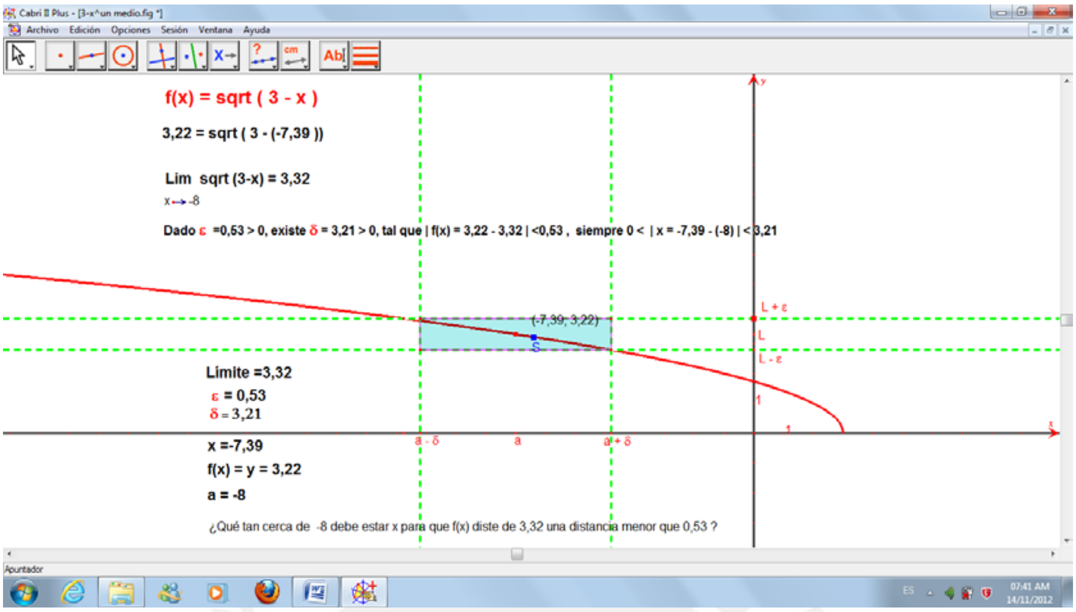
   40 minutos

7. Desarrollo de la Actividad

1. Al abrir el archivo *Sqrt (3 – x).fig* encontrarás el gráfico de la función $f(x)=\sqrt{3-x}$, tal como se muestra en el Gráfico N°9.

   Ubica en el archivo el punto S que está sobre la curva y desplázalo a lo largo de ella.

Gráfico N° 9. Sqrt (3 – x).fig



Fuente: Elaboración propia.

2. Desplaza el punto S hasta que la abscisa sea -8, acercando S a – 8 tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda, ¿a qué valor se aproxima la ordenada de S?

   ………………………………………………………………………………………

3. Desplaza el punto (L + ε) sobre el eje Y. A la izquierda de la pantalla se encuentra el valor de ε. Explica qué significado tiene el valor de ε. ¿Qué representan L + ε y L – ε?

   ………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………

4. Desplaza el punto (L + ε) para contestar la siguiente pregunta. Si nos señalan que los f(x) deben estar a una distancia menor que 0,6 de 3,32 ¿cuáles valores de los x cumplen con la condición?

   ………………………………………………………………………………………

5. Cambiando las condiciones, ¿Qué tan cerca de -8 debe estar x de tal

manera que f(x) esté a una distancia menor que 0,3 de 3,32

……………………………………………………………………………………

6. Desplaza el punto (L + ε) y en el cuadro de abajo escribe los valores de δ que corresponden a cada ε.

ε	**δ**
1	5,63
0,81	
0,5	
0,26	
0,1	

7. En el eje X, ¿qué representan a + δ y a – δ?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

8. ¿Cuál es la relación que se establece entre los intervalos [L + ε; L – ε] y [a + δ; a – δ]?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

9. Mueve el punto *L + ε*lentamente y sitúalo en *ε*= 1. Desplaza el punto S, observa como varían los valores de x y de f(x) en la definición de límite de funciones, que se encuentra arriba. Comprueba en que región del plano la función es válida y en qué región del plano no es válida la definición de límite de funciones escrita arriba con los valores de x y f(x): "Dado un *ε> 0, existe un δ > 0, tal que |f(x) - L| <ε, siempre 0< | x – a| < δ"*.

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………….

10. Así se acerque $L + \varepsilon$ cada vez más a 3,32 ¿siempre existirá la distancia ε, así sea ε muy pequeña? ¿Por qué?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

8. Indicaciones para el docente e Institucionalización del conocimiento

- Esta actividad es más fuerte, más densa pues el uso de cuantificadores lógicos, así como de la doble implicación hacen más difícil la comprensión de la definición precisa de límite de funciones.
- Lo importante es que se incida en la idea de entornos, vecindades, intervalos alrededor del límite y el punto a. Pero que esas ideas deben salir de los estudiantes después del arrastre en forma autónoma.
- De esa manera, una vez comprendidas las propiedades matemáticas sobre las que se levanta la definición, va a ser más sencillo para el alumno el manejo de la definición, que debe ser formalizada por el profesor al terminar la actividad.
- Sería importante insistir en la importancia de que el alumno descubra en qué región del plano cartesiano cumple la definición de límite de funciones, mediante el arrastre del punto S. De esa manera la definición encuentra sentido.

OCTAVA SESIÓN

Actividad sobre el estudio de los límites laterales de una función

1. Introducción

   La actividad es más sencilla pues únicamente se va a arrastrar los puntos señalados, tanto hacia la derecha como hacia la izquierda de un punto. A partir de ello cuando ambos límites laterales sean iguales, se podrá afirmar que la función con respecto a ese punto si tiene límite.

2. Objetivos de la actividad

   Visualizar el desplazamiento del punto sobre la función cuando se acerca al punto *a* por la derecha, y cuando se acerca a *a* por la izquierda.

   Interrelacionar las representaciones geométrica, numérica y algebraica de los límites laterales de una función.

3. Contenidos

   Límite lateral por la derecha

   Límite lateral por la izquierda

4. Capacidades

   Verificar la existencia del límite de una función con respecto a un punto a partir de la aplicación de los límites laterales.

5. Obstáculos epistemológicos que se pretenden franquear

   Lógico

   Geométrico

   Factor Dual de las nociones matemáticas, como proceso y como objeto.

6. Insumos

   Ficha de actividades

   Archivo Función definida a trozos.fig

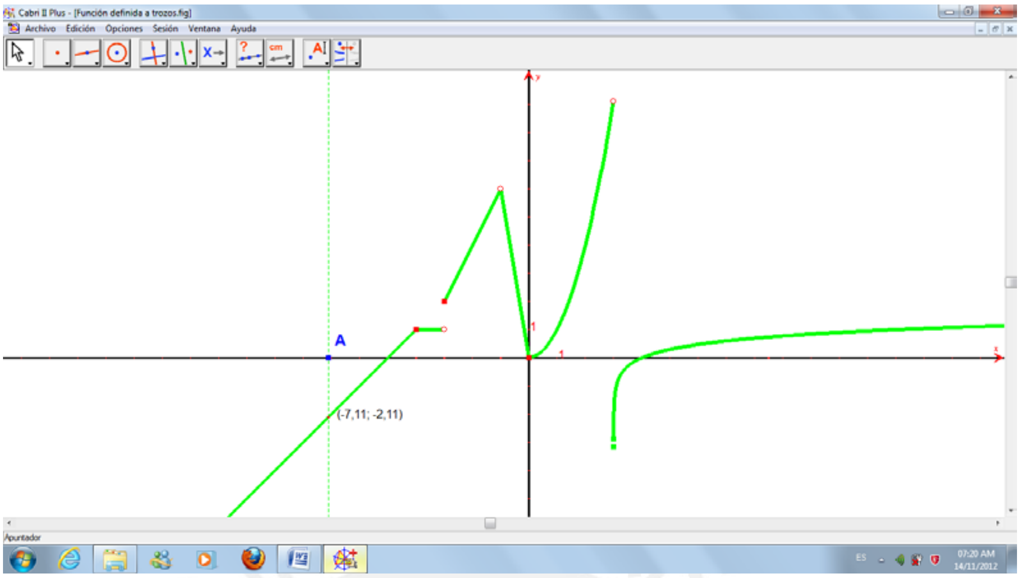
7. Duración

   15 minutos

8. Desarrollo de la Actividad

1. A continuación se va a trabajar con una *función definida a trozos*. Abre El archivo en Cabri II Plus con ese nombre (Gráfico10). Desplaza el punto A sobre el eje X y observa:

Gráfico N° 10. Función definida a trozos.fig



Fuente: Elaboración propia en base a Ugarte (2004)

a) ¿En qué intervalos puedes dividir el dominio de acuerdo a las leyes de correspondencia que se establecen en él?

……………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

b) ¿A qué valor se aproxima f(x) cuando x se acerca por la derecha y por la izquierda a los siguientes puntos que se encuentran en el cuadro siguiente? Los puntos mencionados que pertenecen al dominio se van a llamar ***a***.Llena el cuadro.

a	Cuando x se aproxima a ***a*** por la izquierda, f(x) se acerca a	Cuando x se aproxima a ***a*** por la derecha, f(x) se acerca a	¿Existe el límite de f(x) cuando x tiende a ***a***? (si son iguales)
- 5			
- 4			
- 3			
- 1			
0			
1			

9. Indicaciones para el docente e Institucionalización del conocimiento

- Una vez que los estudiantes han terminado las actividades, el profesor articula las respuestas con las definiciones no precisas y precisas de límites laterales.

  Límite izquierdo

  $$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

  si para todo número ε > 0 existe un número correspondiente δ > 0 tal que

  $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $a - \delta < x < a$

  Límite derecho

  $$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

  si para todo número ε > 0 existe un número correspondiente δ > 0 tal que

  $|f(\mathrm{x}) - \mathrm{L}| < \varepsilon$ *siempre que* $\mathrm{a} < \mathrm{x} < \mathrm{a} + \delta$

NOVENA SESIÓN

Actividad sobre límites infinitos y límites al infinito de una función

1. Introducción

   La forma en que los estudiantes deben trabajar con los archivos es en esencia similar a la metodología empleada en las otras actividades. Sería importante que los estudiantes, a través de la manipulación o arrastre, mediante la exploración, descubran las propiedades matemáticas que sustentan los límites infinitos y los límites al infinito, y que consigan darle un significado a los cuantificadores y variables que intervienen en la definición.

2. Objetivos de la actividad

   Interrelacionar las representaciones geométrica, numérica y algebraica delos límites infinitos de una función.

   Interrelacionar las representaciones geométrica, numérica y algebraica delos límites al infinito de una función.

3. Contenidos

   Límites infinitos positivos de una función.

   Límites infinitos negativos de una función.

   Límites al infinito

4. Capacidades

   Calcular los límites infinitos positivos y negativos de una función.

   Calcular los límites al infinito de una función.

   Emplear correctamente las definiciones de límites infinitos positivo y negativo, así como la definición de límites al infinito en la resolución de problemas.

5. Obstáculos epistemológicos que se pretenden franquear

   Geométrico

   Lógico

   Factor Dual de las nociones matemáticas, como proceso y como objeto.

6. Insumos

   Ficha de actividades

   Archivos Límite infinito positivo.fig, Límite infinito negativo.fig y Límite al infinito.fig.

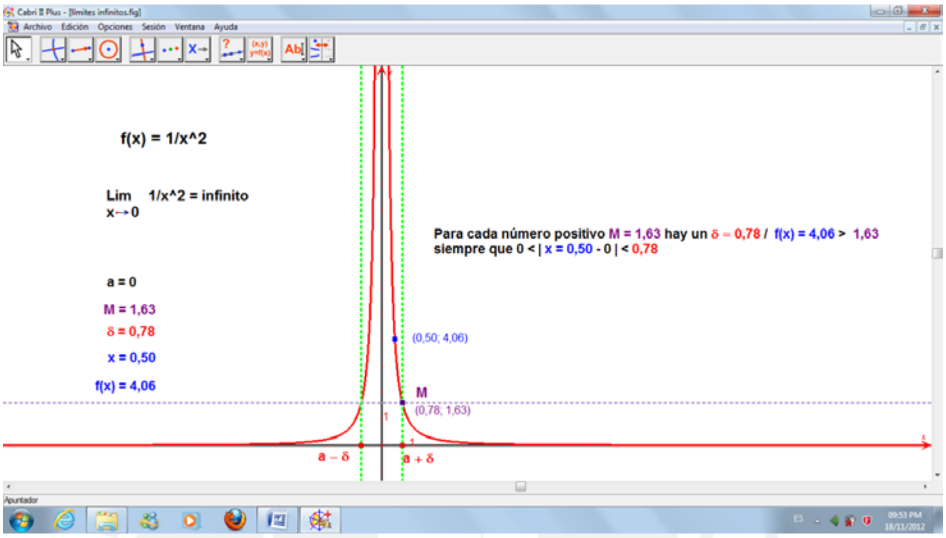
7. Duración

   60 minutos

8. Desarrollo de la Actividad

1. Abre el *archivo Límite infinito positivo.fig*. (Gráfico N° 11). Ubica el punto M y arrástralo sobre la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

Gráfico N° 11. Límite infinito positivo.fig



Fuente: Elaboración propia.

a) ¿Qué sucede cuando arrastras el punto M?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

b) ¿Qué significado tiene [a-δ, a+δ]?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

c) Si movemos el punto P sobre la función, observamos que los valores de x así como de f(x) varían, ¿En qué región del plano es válida la definición de límite infinito positivo escrita en el archivo?

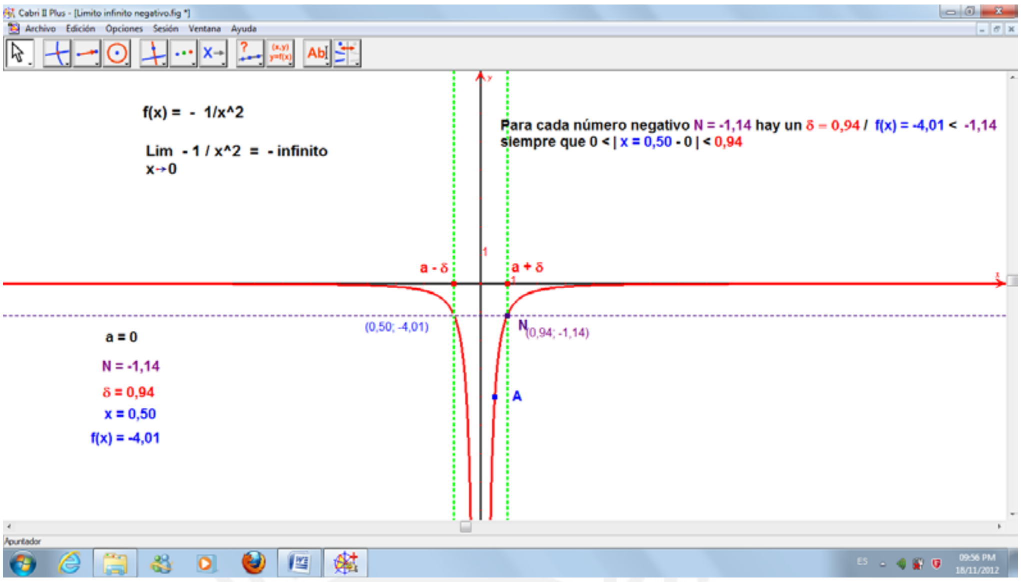
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………..

2. Abre el *archivo Límite infinito negativo.fig*. (Gráfico N° 12). Ubica el punto N y arrástralo sobre la función $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

Gráfico N° 12. Límite infinito negativo.fig



Fuente: Elaboración propia

d) ¿Qué sucede cuando arrastras el punto N?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

e) ¿Qué significado tiene [a-δ, a+δ] y qué relación tiene con el punto N?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

f) Si movemos el punto P sobre la función, observamos que los valores de x así como de f(x) varían, ¿En qué región del plano es válida la definición de límite infinito negativo escrita en el archivo?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………..

3. Abre el *archivo Límite al infinito.fig*. (Gráfico N° 13).

Ubica el punto (L + ε). Arrástralo sobre la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) ¿Qué sucede cuando arrastras el punto (L + ε)?

………………………………………………………………………………………

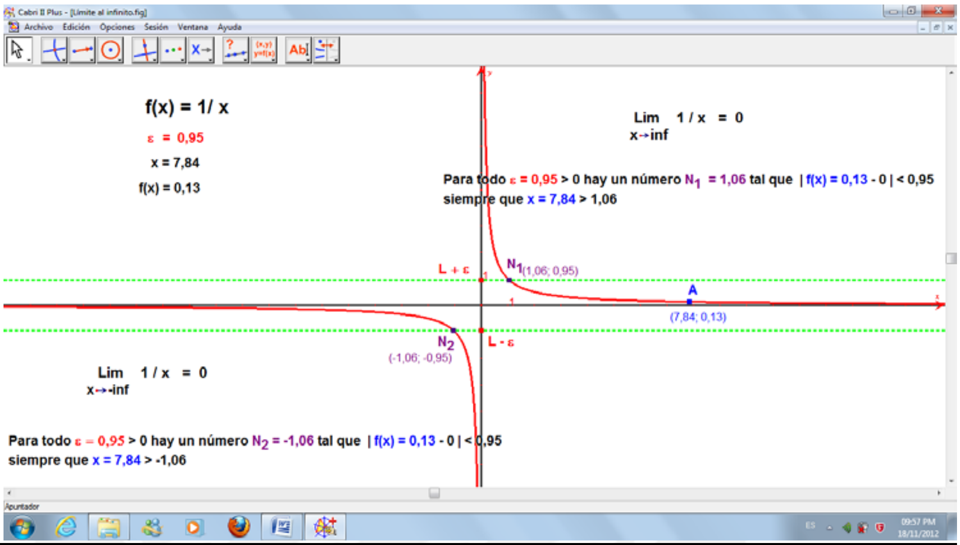
………………………………………………………………………………………

b) ¿Qué significado tiene [L + ε, L – ε]?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Gráfico N° 13. Límite al infinito.fig



Fuente: Elaboración propia

c) ¿Hacia qué valor se aproxima f(x) cuando el punto A se acerca al infinito positivo, o al infinito negativo?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

d) Si movemos el punto A sobre la función, observamos que los valores de x así como de f(x) varían, ¿En qué región del plano es válida la definición de límite al infinito positivo escrita en la parte superior derecha del archivo? ¿En qué región del plano es válida la definición de límite al infinito negativo escrita en la parte inferior izquierda del archivo?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

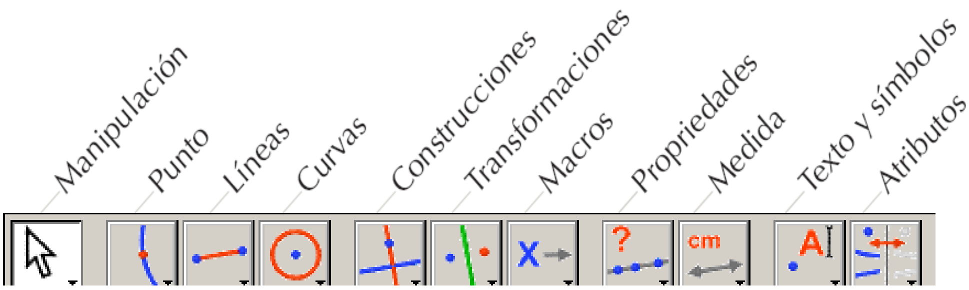
………………………………………………………………………………………

9. Indicaciones para el docente e Institucionalización del conocimiento

- Estas actividades son fuertes, más densas por el uso de las letras griegas ε y δ que delimitan la vecindad alrededor del punto *a*, alrededor del límite.
- Lo importante es que se incida en la idea de entornos, vecindades, intervalos alrededor del límite y el punto a. Pero también es importante que esas ideas deben salir de los estudiantes después del arrastre, de la manipulación delos puntos M, N, N_1 y N_2en forma autónoma.
- De esa manera, una vez comprendidas las propiedades matemáticas sobre las que se construye la definición, va a ser más sencillo para el alumno el manejo de la definición, que debe ser otra vez formalizada por el profesor al terminar la actividad.
- Sería importante incidir en la importancia de que el alumno descubra en qué región del plano cartesiano cumple la definición de límitesinfinitos, límites al infinito, mediante el arrastre delos puntos A de cada uno de los archivos. De esa manera la definición encuentra sentido.

APÉNDICE 9

Proceso para la construcción del archivo sqrt(3-x).fig en Cabri II Plus



B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11

Construcción de la gráfica de funciones con *B10 Expresión*

1. Traza un sistema cartesiano (*B11 Mostrar los ejes*). Con *B10 Expresión* escribe en la pantalla sqrt(3-x). Con *B9 Aplicar expresión* grafica la función clickeando primero sobre la expresión (se lee: aplicar esta expresión), y después haciendo click sobre cualquier eje.
2. En este caso para visualizar la noción de límite de funciones por intuición dibujamos un punto sobre la función (*B2 Punto sobre un objeto*), al que ponemos el nombre de S (*B10 Nombrar*). Señalamos las coordenadas del punto (*B9 Coordenadas o ecuación*). Desplazamos el punto de tal manera que la abscisa se acerca al valor de -8, arrastrándolo por la derecha y por la izquierda. ¿Hacia qué valor se acerca la ordenada del punto?

Construcción de la definición precisa de límite de funciones

1. Expresándonos con mayor precisión, ¿qué tan cerca de -8 debe estar la abscisa de S (x) para garantizar que la ordenada de S (f(x)), punto en $f(x)=\sqrt{3-x}$, esté a una distancia menor que 0,6 de 3,32?
2. En el archivo creado en 2.1 *con B1 Apuntador* desplaza el punto S hasta que la ordenada sea 2,72 ¿qué valor le corresponde a la abscisa?
3. Si nos señalan que la ordenada de S debe estar a una distancia menor que 0,6 de 3,32 ¿cuáles valores de la abscisa de S cumplen con la condición?
4. Cambiando las condiciones, ¿Qué tan cerca de -8 debe estar la abscisa de S de tal manera que la ordenada de S esté a una distancia menor que 0,3 de 3,32?
5. Cuantitativamente, ¿cómo percibes los cambios?
6. Podemos visualizar dos intervalos, entornos, o vecindades, uno alrededor de

-8 en el eje X y otro alrededor de 3,32 en el eje Y ¿Cuál es la relación de dependencia?

7. Vamos a graficar los entornos o vecindades alrededor de -8 en el eje X y alrededor de 3,32 en el eje Y.

8. Escribe -8 en la pantalla (*B10 Número*). Transfiere el número -8 al eje X(*B5 Transferencia de medida*). Se dibuja un punto al cual llamaremos ***a*** **(***B10 Nombrar*). Con *B10 Texto* escribe a = (haz click sobre el número -8). De esa manera podrás cambiar el valor de a con facilidad. Traza una perpendicular al eje X que pase por el punto ***a***(*B5 recta perpendicular*). Interseca esta perpendicular con el lugar geométrico(*B2 punto de intersección*). Por este último punto traza una perpendicular al Eje Y (*B5 recta perpendicular*). Halla el punto de intersección de esta última perpendicular con el eje Y (*B2 punto de intersección*), y sus coordenadas (*B9 Coordenadas*). A este punto ponle por nombre L (*B10 Nombrar*). A partir de L, con *B3 Semirrecta* construye la semirrecta f(x)≥ 3,32 sobre el eje y. Con *B2 Punto sobre objeto* traza un punto sobre la semirrecta (va a salir ¿Qué objeto?, sistema de coordenadas o semirrecta, selecciona semirrecta). Al punto ponle por nombre: L+ε(*B10 Nombrar*). Para que se escriba ε en lugar de E después de escribir L+ haz click derecho, sale *fuente*, selecciona *symbol* y escribe e (minúscula). Señala las coordenadas de L+ε(*B9 Coordenadas*). Traza una recta perpendicular al eje Y que pase por L+ε (*B5 Recta Perpendicular*). Con *B6Simetría axial* traza una recta simétrica a la anterior seleccionando primero la recta que pasa por L+ε y después la recta que pasa por L. Interseca esta última recta con el Eje Y (*B2 punto de intersección*), y ponle por nombre L-ε (*B10 Nombrar*). Al mover el punto L+ε con *B1 Apuntador* se mueven las dos rectas que delimitan el entorno alrededor de y = 3,32. Para hallar el valor de ε con *B9 Calculadora* resta la ordenada de L+ε menos la ordenada de L. Jala el resultado a la pantalla, selecciona el texto, borra la palabra resultado y escribe ε (click derecho, fuente, symbol).

9. ¿Cómo hallarías el entorno alrededor de x = -8? Sabemos que δ depende ε. Para hallar δ interseca la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{3-x}$ con las rectas que pasan por L+ε y L-ε (*B2 punto de intersección*). Traza dos perpendiculares al eje X que pasen por los puntos de intersección anteriores. Te das cuenta que entre las dos rectas está el punto ***a*** (en el eje X). Observando a las dos rectas escogemos aquella que está a menor distancia

de ***a,*** en este caso la que se encuentra a la derecha. Interseca esta recta con el eje X y a ese punto ponle como nombre a+δ (escribe δ con click derecho, fuente, symbol y escribe d). Con *B6Simetría axial* traza una recta simétrica a la anterior seleccionando primero la recta que pasa por a+δ y después la recta que pasa por ***a.*** Interseca esta recta con el eje X y al punto de intersección llámalo a-δ. Halla las coordenadas de ***a*** y de a+δ. Con *B9 Calculadora* encuentra el valor absoluto de la diferencia de las abscisas de ***a*** menos a+δ. El resultado se jala a la pantalla y se reemplaza la palabra resultado por δ (click derecho, fuente, symbol, escribe d). Podemos observar que al mover el punto L+ε con *B2 Apuntador* las vecindades alrededor de -8 y 3,32 también aumentan o disminuyen.

10. Se puede cambiar el aspecto de los puntos, las rectas con B11 Color, Espesor, Punteado o Aspecto. También se puede cambiar el aspecto de los textos con click derecho (fuente, tamaño, estilo, otras fuentes).
11. Las cuatro rectas delimitadas por ε y por δ forman un rectángulo. Intersécalas y con *B3 Polígono* une los puntos de intersección hallados. Con *B11 Rellenar* puedes sombrear la región.
12. Sobre la pantalla con *B10 Texto* escribe *x* = (haz click sobre la abscisa del punto S que está sobre la función). De igual manera escribe otro texto *f(x)* = (haz click sobre la ordenada de S). Si mueves el punto S con *B2 Apuntador* cambiarán los valores de *x* y de *f(x)* de acuerdo a la posición del punto S en la función.
13. Teniendo en cuenta la definición formal de Límite de funciones dada a continuación:

Sea f una función definida sobre un intervalo abierto que contiene al número a, excepto cuando a se define a sí misma. Entonces decimos que el límite de f cuando x tiende o se aproxima a a es L y escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si para cada número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Con *B10 Texto* podemos escribir en la pantalla el siguiente texto (resaltado con rojo):

Dado ε = (hacer click sobre el número que aparece en el texto ε =) **> 0, existe δ =** (hacer click sobre el número que aparece en el texto δ =) **> 0, tal**

que | f(x) = (hacer click sobre el número que aparece en el texto f(x) =) **–** (hacer click sobre la ordenada del punto L) **| <** (hacer click sobre el número que aparece en el texto ε =), **siempre que 0 < | x =** (hacer click sobre el número que aparece en el texto x =) **– (** (hacer click sobre el número que está en el texto ***a*** =) **) | <**(hacer click sobre el número que aparece en el texto δ =).

14. De igual forma con *B10 Texto* se puede escribir la expresión

$$\lim_{x \to -8} sqrt(3 - x) = 3{,}3166....$$

Que hemos redondeado a 3,32, y que se añade haciendo click sobre la ordenada de L.

x $\rightarrow$ -8 , es un texto aparte al cual se ha añadido un vector, y se hace click sobre el número que aparecen en el texto a =***.***

15. Es conveniente ocultar aquellos objetos que sólo se usaron en la construcción, por ejemplo la semirrecta sobre el eje Y, las coordenadas de los puntos menos las coordenadas de S.