

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

**ESTUDIO DE RELACIONES MOMENTO-CURVATURA
EN SECCIONES DE CONCRETO ARMADO Y CONCRETO PREENFORZADO
SOMETIDAS A FLEXIÓN**

Tesis para optar el Grado de Magíster, que presenta el Alumno

DANIEL ANDRÉS CHANG TOKUSHIMA

ASESOR: GIANFRANCO ANTONIO OTTAZZI PASINO

Lima, octubre de 2015

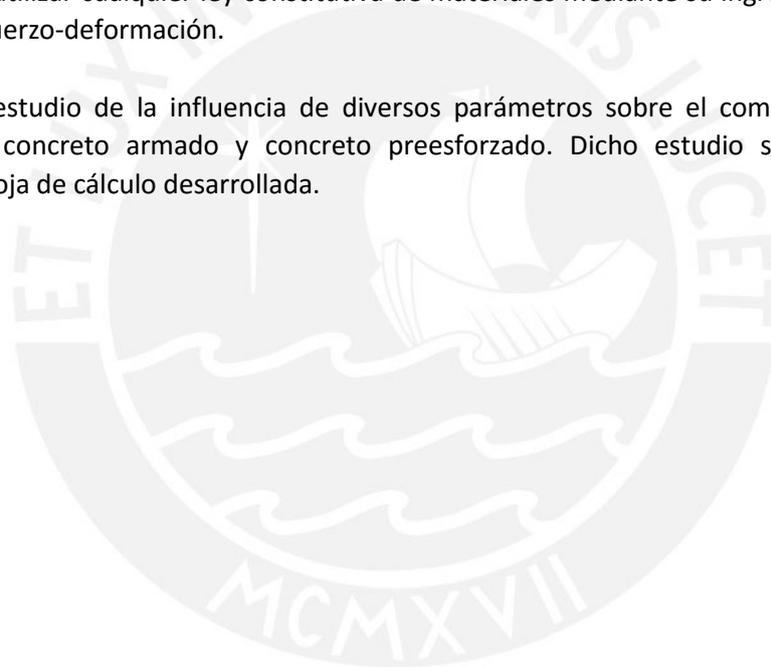
RESUMEN

Los diagramas momento-curvatura permiten percibir de manera clara el comportamiento de secciones dentro de toda su historia de carga. En la presente tesis se realiza el estudio de dichos diagramas para secciones de concreto armado y concreto preesforzado sometidas a flexión monotónica.

Se realizó la implementación de un programa en lenguaje VBA (Visual Basic for Applications), en forma de una hoja de cálculo de Microsoft Excel. La hoja desarrollada permite la construcción de diagramas momento-curvatura mediante una interfaz sencilla y de licencia libre. La implementación del programa es transparente y puede ser accedida por el usuario, y su precisión ha sido validada con resultados obtenidos con el programa Section Designer y estudios analíticos hechos por varios autores.

La hoja de cálculo desarrollada en la presente tesis es capaz de analizar una gran cantidad de secciones de concreto armado y concreto preesforzado. En el análisis el usuario tiene la capacidad de utilizar cualquier ley constitutiva de materiales mediante su ingreso en forma de puntos de esfuerzo-deformación.

Se realizó el estudio de la influencia de diversos parámetros sobre el comportamiento de secciones de concreto armado y concreto preesforzado. Dicho estudio se llevó a cabo utilizando la hoja de cálculo desarrollada.



RESUMEN	ii
ÍNDICE	iii
LISTA DE IMÁGENES	v
LISTA DE TABLAS	viii
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 General	1
1.2 Alcances	1
1.3 Objetivos	2
2 GENERALIDADES	3
2.1 El diseño sismorresistente en el Perú	3
2.1.1 Antecedentes sísmicos en el Perú	3
2.1.2 Enfoque y exigencias de la normativa vigente de concreto armado en el Perú	3
2.2 Definiciones	4
2.2.1 Modelos de esfuerzo-deformación de materiales	4
2.2.2 Curvatura	4
2.2.3 Ductilidad	5
2.2.4 Diagrama de momento-curvatura	5
3 MARCO TEÓRICO	6
3.1 Características y comportamiento de los materiales del concreto armado y preesforzado	6
3.1.1 Características y modelos de esfuerzo-deformación del concreto	6
3.1.2 Características y modelos de esfuerzo-deformación del acero de refuerzo	10
3.1.3 Características y modelos de esfuerzo-deformación del cable de preesfuerzo	12
3.2 Diagramas numéricos de momento curvatura ante cargas monotónicas	13
3.2.1 Principio de equilibrio de fuerzas internas	13
3.2.2 Metodología de construcción de diagramas momento-curvatura	13
3.2.3 Modelos de idealización bilineal de diagramas de momento-curvatura	16
3.2.3.a Modelo propuesto por Priestley	17
3.2.3.b Modelo de Caltrans y AASHTO	18
4 IMPLEMENTACIÓN DE PROGRAMA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA	19
4.1 Alcances y restricciones	19
4.2 Hipótesis consideradas	21
4.2.1 Principio de Navier	21
4.2.2 Adherencia	22
4.2.3 Resistencia del concreto en tracción	22
4.2.4 Relaciones esfuerzo-deformación de los materiales	22
4.2.5 Consideraciones en la geometría	23
4.3 Algoritmos utilizados en la construcción de diagramas momento-curvatura	23
4.3.1 Búsqueda binaria o dicotómica	23
4.3.2 Determinación de un punto del diagrama momento-curvatura de una sección	24
4.3.3 Construcción del diagrama momento-curvatura de una sección	25

5	APLICACIÓN Y VALIDACIÓN DE PROGRAMA IMPLEMENTADO	27
5.1	Datos de entrada y resultados de salida	27
5.1.1	Ingreso de características de la sección estudiada	27
5.1.2	Ingreso de características de los materiales	28
5.1.3	Diagrama momento-curvatura calculado	30
5.2	Validación de resultados	31
5.2.1	Comparación de resultados obtenidos contra valores analíticos	32
5.2.2	Comparación de resultados obtenidos contra valores experimentales	41
6	ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE SECCIONES DE CONCRETO ARMADO Y CONCRETO PREESFORZADO ANTE CARGA MONOTÓNICA	43
6.1	Elección de características de secciones a analizar	43
6.2	Comportamiento de secciones de concreto armado convencional	45
6.2.1	Influencia del uso de diferentes leyes constitutivas de concreto	45
6.2.2	Influencia de la cuantía de acero en tracción	46
6.2.3	Influencia de la cuantía de acero en compresión	47
6.2.4	Influencia del ancho de la sección	48
6.2.5	Influencia de la resistencia del concreto	49
6.2.6	Influencia de la sobrerresistencia del acero	50
6.2.7	Influencia del confinamiento del concreto	51
6.3	Comportamiento de secciones de concreto preesforzado	53
6.3.1	Influencia de la cuantía de cable de preesfuerzo	53
6.3.2	Influencia de la proporción de acero de refuerzo y cable de preesfuerzo	54
6.3.3	Influencia del ancho de ala de una sección T preesforzada	56
6.3.4	Influencia del peralte efectivo del cable de preesfuerzo	58
6.3.5	Influencia del esfuerzo estable inicial en el cable de preesfuerzo	61
7	RESUMEN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	63
7.1	Resumen	63
7.2	Conclusiones y comentarios	63
7.3	Recomendaciones para trabajo futuro	64
	BIBLIOGRAFÍA	65

LISTA DE IMÁGENES

Figura 1	Estado interno de deformaciones de una sección de concreto [02]	4
Figura 2	Ley constitutiva de concreto propuesta por Kent y Park [1]	7
Figura 3	Ley constitutiva propuesta por Hognestad para el concreto [9]	8
Figura 4	Ley constitutiva propuesta por Kent y Park para el concreto [9]	9
Figura 5	Ley constitutiva propuesta por Mander para el concreto [9]	10
Figura 6	Ley constitutiva propuesta por Park y Paulay para el acero [9]	11
Figura 7	Ley constitutiva propuesta por Menegotto y Pinto para el acero de preesfuerzo	12
Figura 8	Metodología para cálculo de un punto del diagrama momento-curvatura [22]	14
Figura 9	Diagrama momento-curvatura de sección rectangular 40x70 cm de concreto armado	15
Figura 10	Diagrama momento-curvatura de sección rectangular 40x70 cm con refuerzo distribuido en altura	16
Figura 11	Diagrama momento-curvatura bilineal idealizado propuesto por Priestley [17]	17
Figura 12	Diagrama momento-curvatura bilineal idealizado adoptado por Caltrans y AASHTO [18]	18
Figura 13	Diagrama momento-curvatura de sección de concreto preesforzado	20
Figura 14	Distribución de puntos de momento-curvatura determinados por el programa	20
Figura 15	Ejemplo de secciones idealizadas para poder ser analizadas con el programa	21
Figura 16	Esquema de fuerzas internas de una sección de concreto después del agrietamiento [20]	22
Figura 17	Ejemplo de sección hueca transformada en una sección equivalente aceptada por el programa	23
Figura 18	Comparación entre áreas (a) antes y (b) después de hallar un punto adicional en el diagrama	26
Figura 19	Formato de hoja de cálculo "Geometría"	27
Figura 20	Ejemplo de geometrías ingresadas al programa	28
Figura 21	Formato de hoja de cálculo "Concreto"	29
Figura 22	Formato de hoja de cálculo "Acero"	29
Figura 23	Formato de hoja de cálculo "Cable"	30
Figura 24	Formato de hoja de salida de resultados y sus componentes	31
Figura 25	Sección rectangular 40x70 cm, $A_s' = 10 \text{ cm}^2$, $A_s = 20 \text{ cm}^2$	32
Figura 26	Modelo de Mander para concreto con $f'c = 28 \text{ MPa}$	32
Figura 27	Modelo de Park y Paulay para acero con $f_y = 420 \text{ MPa}$	33
Figura 28	Validación de diagrama momento-curvatura de viga 40x70 cm con cuantía intermedia	33
Figura 29	Sección rectangular 40x70 cm, $A_s' = 8 \text{ cm}^2$, $A_s = 8 \text{ cm}^2$	34
Figura 30	Validación de diagrama momento-curvatura de viga 40x70 cm con cuantía baja	34
Figura 31	Sección rectangular 40x70 cm, $A_s' = 10 \text{ cm}^2$, $A_s = 50 \text{ cm}^2$	34
Figura 32	Validación de diagrama momento-curvatura de viga 40x70 cm con cuantía alta	35
Figura 33	Sección T 40x70+80x20 cm, $A_s' = 10 \text{ cm}^2$, $A_s = 30 \text{ cm}^2$	35
Figura 34	Validación de diagrama momento-curvatura de viga 40x70+80x20 cm con cuantía intermedia	36
Figura 35	Sección I preesforzada estudiada por T.Y. Lin [22]	36
Figura 36	Modelos de materiales utilizados por T.Y. Lin	37

Figura 37	Comparación de diagrama momento-curvatura de la sección I estudiada por T.Y. Lin con el construido con el programa desarrollado	38
Figura 38	Características de sección analizada por Saqan y Rasheed [24]	38
Figura 39	Modelos de materiales utilizados por Saqan y Rasheed	39
Figura 40	Comparación de diagrama momento-curvatura de la sección preesforzada	40
Figura 41	Comparación de diagrama momento-curvatura de la sección preesforzada	40
Figura 42	Comparación de diagrama momento-curvatura de la sección preesforzada	41
Figura 43	Sección cuadrada 32x32 cm ensayada por Cattaneo et al. [25]	41
Figura 44	Comparación de diagramas momento-curvatura de los especímenes RC1 y RC2	42
Figura 45	Secciones típicas de vigas consideradas en los análisis para medir la influencia de varios parámetros en su comportamiento ante flexión pura	44
Figura 46	Influencia del modelo de concreto utilizado en el comportamiento estimado de una sección	46
Figura 47	Variación del comportamiento de una sección con variación en el acero en tracción	47
Figura 48	Variación del comportamiento de una sección con variación en el acero en compresión	48
Figura 49	Variación del comportamiento de una sección con variación en el ancho	49
Figura 50	Variación del comportamiento de una sección con variación en la resistencia del concreto	50
Figura 51	Variación del comportamiento de una sección con variación en la sobrerresistencia del acero	51
Figura 52	Variación en deformación de agotamiento del concreto para distintos espaciamientos de estribos	52
Figura 53	Comparación de diagramas momento-curvatura para distintos espaciamientos de estribos	52
Figura 54	Variación del comportamiento de una sección con variación en el área de cable de preesfuerzo	53
Figura 55	Diagramas momento-curvatura de banda de 200x50 cm con distintas áreas de cable de preesfuerzo, y acero de refuerzo constante	54
Figura 56	Variación de la ductilidad de una sección con variación en la proporción entre área de acero de refuerzo y área de cable de preesfuerzo para una capacidad constante de 2000 kN.m	55
Figura 57	Diagramas momento-curvatura de banda de 200x50 cm para distintas proporciones de acero de refuerzo y cable de preesfuerzo para una capacidad constante de 2000 kN.m	56
Figura 58	Variación de la ductilidad de una sección con variación en el ancho de ala en Compresión	57
Figura 59	Diagramas momento-curvatura de sección de 200x50 cm para anchos de ala diferentes	57
Figura 60	Variación de la ductilidad de una sección con variación en la posición y área de cable de preesfuerzo para capacidad constante de 700 kN.m	58
Figura 61	Diagramas momento-curvatura de sección de 40x70 cm para áreas y ubicación de cable de preesfuerzo diferentes, y capacidad constante	59
Figura 62	Variación de la ductilidad de una sección con variación en el área de acero de refuerzo y la posición de cable de preesfuerzo para capacidad constante de 1000 kN.m	60

Figura 63	Diagramas momento-curvatura de sección de 40x70 cm para áreas de acero de refuerzo y ubicación de cable de preesfuerzo diferentes, y capacidad constante	60
Figura 64	Variación del comportamiento de una sección con variación en el esfuerzo Estable inicial de cable de preesfuerzo	61
Figura 65	Diagramas momento-curvatura de sección de 200x50 cm para diferentes esfuerzos estables iniciales en cable de preesfuerzo	62



LISTA DE TABLAS

Tabla 1	Estándares de calidad para barras de acero ASTM A615 Gr60 [13]	11
Tabla 2	Constante K en función de tipo de acero de preesfuerzo [14]	13
Tabla 3	Modelo esfuerzo-deformación de cable de preesfuerzo utilizado por T.Y. Lin	37
Tabla 4	Características de casos estudiados por Saqan y Rasheed	38
Tabla 5	Modelo esfuerzo-deformación de cable de preesfuerzo propuesto por el PCI	39
Tabla 6	Características de edificaciones de concreto armado (RC) y preesforzado (PT) de referencia para el presente estudio	43
Tabla 7	Características típicas de los materiales consideradas en los análisis para medir la influencia de varios parámetros sobre el comportamiento de secciones sometidas a flexión pura	45
Tabla 8	Características y resultados de banda de 200x50 cm con distintas áreas de cable de preesfuerzo	53
Tabla 9	Áreas de acero de refuerzo y cable de preesfuerzo estudiadas para una capacidad constante de 2000 kN.m, y la ductilidad y curvatura de agotamiento correspondientes	55
Tabla 10	Áreas y posiciones de cable de preesfuerzo estudiados para una capacidad constante de 700 kN.m	58
Tabla 11	Áreas de acero de refuerzo y posiciones de cable de preesfuerzo estudiados para una capacidad constante de 1000 kN.m	59
Tabla 12	Casos estudiados de secciones con distinto esfuerzo estable inicial en cable de preesfuerzo	61

1 INTRODUCCIÓN

1.1 General

El diseño de elementos de concreto armado y concreto preesforzado en el Perú, bajo los lineamientos del Reglamento Nacional de Edificaciones, se basa en el método de diseño por resistencia. Dicho método analiza los elementos bajo condiciones de rotura, y garantiza la existencia de un factor de seguridad razonable antes de alcanzar a la falla o agotamiento.

En edificaciones que pueden someterse a cargas dinámicas excepcionales como las originadas en sismos severos, sus elementos estructurales deben poder disipar importantes cantidades de energía sin alcanzar el agotamiento. Esto se debe a que durante este tipo de eventos las solicitaciones son controladas por deformaciones y no por cargas.

Las normas de diseño peruanas, de manera similar a las estadounidenses, tienen exigencias que indirectamente generan elementos estructurales con una capacidad de deformación competente. Sin embargo, no consideran de manera directa la forma de falla o el proceso que conduce a ella.

Una herramienta que permite percibir directamente la capacidad de deformación de una sección y su comportamiento hasta el agotamiento, es el diagrama momento-curvatura. Esta herramienta describe la respuesta de una sección durante toda su historia de carga [1].

Un diagrama momento-curvatura es una representación gráfica del lugar geométrico definido por los momentos flectores y las curvaturas que les corresponden en la historia de carga de una sección [2]. En el caso de secciones de concreto armado o concreto preesforzado, los diagramas obtenidos son dependientes de la geometría y disposición de los materiales que los conforman. Asimismo, los diagramas dependen de las leyes constitutivas consideradas para el concreto, el refuerzo de acero, y el acero de los tendones postensados.

1.2 Alcances

La presente tesis realiza el estudio de secciones de vigas de concreto armado y concreto preesforzado sometidas a solicitaciones de flexión pura. En el caso de secciones de concreto preesforzado, se limita el enfoque a vigas con acero de preesfuerzo adherido al concreto. El estudio es únicamente analítico, en torno a diagramas momento-curvatura.

Se implementa una hoja de cálculo capaz de construir diagramas momento-curvatura para carga monotónica. Los diagramas se construyen en base a la geometría de la sección analizada, la configuración de refuerzo, y las leyes constitutivas que representan el comportamiento de los materiales que conforman la sección.

1.3 Objetivos

La presente tesis realiza el estudio de la relación momento-curvatura de secciones de concreto armado y concreto preesforzado bajo flexión monotónica. Se implementa una hoja de cálculo que permite la construcción de diagramas momento-curvatura.

El programa implementado es uso libre, y puede ser utilizado como complemento en el diseño estructural de elementos en flexión, así como herramienta académica. El programa, que se entrega como anexo en la presente tesis se presenta en forma de una hoja de cálculo de uso simple y de fácil acceso (formato .xslm).

Se utiliza la hoja de cálculo implementada en el estudio de la influencia de distintos parámetros sobre el comportamiento de secciones de concreto armado y preesforzado. Se trabaja en torno a secciones características de edificaciones ubicadas en la ciudad de Lima. Este estudio también pretende mostrar la utilidad del programa desarrollado.



2 GENERALIDADES

2.1 El diseño sismorresistente en el Perú

2.1.1 Antecedentes sísmicos en el Perú

El Perú se encuentra en una zona de alta actividad sísmica, generada por la interacción entre la placa de Nazca y la placa Sudamericana, por lo que su potencial sísmico se encuentra entre los más importantes a nivel mundial [3]. Debido a ello, en el Perú han sucedido eventos sísmicos históricamente importantes, estimados en magnitudes máximas de entre ocho y nueve grados [3].

Dado que en la frontera entre la placa de Nazca y la placa Sudamericana la primera se encuentra en subducción por debajo de la segunda, la zona de la costa se encuentra caracterizada por sismos de profundidad baja a intermedia. En la zona de la sierra, y conforme incrementa la distancia al borde de placas, se tiene un menor potencial sísmico, y los eventos existentes se generan mayormente en fallas locales [4].

2.1.2 Enfoque y exigencias de la normativa vigente de concreto armado en el Perú

En vista del alto peligro sísmico que existe en algunas zonas del Perú, el Reglamento Nacional de Edificaciones (RNE) precisa exigencias de diseño sismorresistente. Para el caso de estructuras de concreto armado, estas se indican en el capítulo 21 de la norma RNE E.060.

El diseño de elementos sometidos a flexión pura, como en el caso de vigas de concreto armado y concreto preesforzado, presentado por el RNE E.060 sigue la metodología del diseño por resistencia. Esta metodología garantiza un factor de seguridad razonable ante el colapso, mediante la reducción de las capacidades nominales de los elementos y la amplificación de las demandas sobre los mismos.

La metodología de diseño en flexión por resistencia queda resumida en la Ecuación 1, en donde M_n representa el momento nominal de la sección, M_u la demanda última o amplificada a la cual se somete la sección analizada, y ϕ es el factor de reducción de la capacidad.

$$\phi M_n \geq M_u \dots (\text{Ec. 1})$$

El RNE E.060 presenta exigencias adicionales en el diseño para elementos sometidos a demandas sísmicas. Dichas exigencias tratan que los elementos presenten un buen comportamiento inelástico capaz de disipar energía sísmica. Ya que las demandas sísmicas son controladas por deformaciones, también buscan brindar a los elementos una capacidad de deformación suficiente para poder soportar eventos sísmicos sin alcanzar el colapso.

Debido a que las exigencias sísmicas del RNE E.060 son cualitativas o se enfocan en el comportamiento inelástico de manera indirecta, durante el diseño no es posible la percepción cuantitativa del comportamiento no lineal de los elementos estructurales.

2.2 Definiciones

2.2.1 Modelos de esfuerzo-deformación de materiales

El concreto armado y el concreto preesforzado son materiales compuestos, conformados por concreto y acero de refuerzo. En el caso de elementos de concreto armado convencional, el refuerzo consiste en barras de acero, usualmente dúctil. Por otro lado, el refuerzo en elementos de concreto preesforzado consiste en cables de acero de alta resistencia sometidos a un preesfuerzo inicial, además de refuerzo convencional opcional.

Durante el análisis de una sección es necesario contar con modelos que caractericen el comportamiento de los materiales que la conforman. Dichos modelos son conocidos como leyes constitutivas de los materiales o modelos esfuerzo-deformación.

Los modelos esfuerzo-deformación relacionan el esfuerzo al que se somete un material y la deformación unitaria que le corresponde.

El comportamiento de los materiales es complejo por naturaleza y varía según la muestra y las condiciones de demanda a las cuales se someten. Por ello, es imposible representar perfectamente el comportamiento de un material mediante un modelo esfuerzo-deformación. No obstante, las leyes constitutivas pueden caracterizar a los materiales con suficiente precisión para ser útiles en el estudio analítico de secciones.

2.2.2 Curvatura

La curvatura se define como el cambio de rotación que existe en una sección [2], y puede entenderse como el cambio de giro por unidad de longitud de un elemento sometido a flexión. Esta definición se representa gráficamente en la Figura 1.

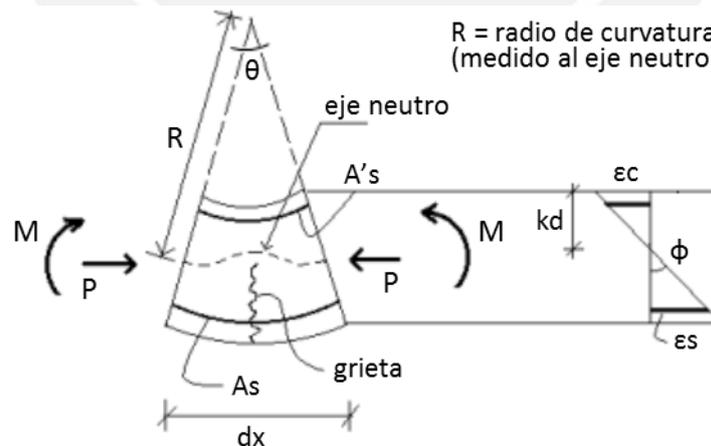


Figura 1 Estado interno de deformaciones de una sección de concreto [02]

$$\phi = \frac{\epsilon_c}{c} = \frac{\epsilon_s}{d-c} \dots \text{(Ec. 2)}$$

La Figura 1 muestra el estado interno de deformaciones de una sección genérica de concreto armado, en donde ϵ_c es la deformación unitaria de la fibra extrema del concreto, y c es la profundidad de la sección neutra. La curvatura ϕ de una sección de concreto armado puede definirse en base a estas variables según la Ecuación 2.

2.2.3 Ductilidad

La ductilidad se define como la relación entre la deformación de agotamiento y la deformación que marca el inicio del comportamiento inelástico de un elemento o sección. La ductilidad permite expresar de manera cuantitativa la capacidad de deformación inelástica disponible [2], y puede entenderse como la capacidad de un elemento para soportar deformaciones inelásticas sin presentar una pérdida importante de capacidad.

En el caso de secciones de concreto armado o preesforzado, la ductilidad puede ser expresada en forma de ductilidad de curvatura, y queda definida mediante la Ecuación 3.

$$\mu\phi = \frac{\phi_{\max}}{\phi_y} \dots \text{(Ec. 3)}$$

En la Ecuación 3 ϕ_{\max} es la curvatura de agotamiento o máxima de la sección, y ϕ_y es la curvatura asociada a la primera fluencia del refuerzo en tracción [2].

La ductilidad es importante pues permite percibir el proceso de falla de una estructura [2]. Además, es una cualidad importante en el diseño pues permite la absorción y disipación de energía durante eventos sísmicos [2]. El diseño sismorresistente en el Perú considera la reducción de fuerzas sísmicas elásticas apelando a la ductilidad, y si bien existen exigencias de diseño que buscan garantizar un comportamiento dúctil, esto no se hace de manera cuantitativa.

2.2.4 Diagrama de momento-curvatura

El diagrama momento-curvatura es la representación gráfica del lugar geométrico definido por los momentos flectores y las curvaturas asociadas a los mismos para una sección determinada [2].

En el caso de elementos de concreto armado y concreto preesforzado, los diagramas son dependientes de la geometría y disposición de los materiales que conforman la sección compuesta. Asimismo, los diagramas dependen de las leyes constitutivas consideradas para el concreto, el refuerzo de acero, y el refuerzo de preesfuerzo.

La construcción de diagramas momento-curvatura permite el estudio de la ductilidad de una sección y del elemento, así como permite entender el desarrollo de rótulas plásticas y redistribución de momentos flectores [2].

Los diagramas momento-curvatura convencionalmente consideran deformaciones generadas por solicitaciones de flexión pura, lo cual es válido cuando estas son las predominantes en el elemento estructural en estudio [2].

3 MARCO TEÓRICO

3.1 Características y comportamiento de los materiales del concreto armado y preesforzado

El comportamiento de los materiales que conforman el concreto armado y concreto preesforzado depende de una gran cantidad de variables, lo cual implica la existencia de muchos modelos con diversos grados de complejidad. La forma de aplicación de cargas, o la interacción entre cada uno de los materiales que conforman una sección, son algunas de las variables que justifican la existencia de una gran cantidad de leyes constitutivas diferentes.

Para el caso de elementos de concreto armado y concreto preesforzado, es necesario definir el comportamiento del concreto, el del acero de refuerzo y el de los cables de preesfuerzo.

3.1.1 Características y modelos de esfuerzo-deformación del concreto

El comportamiento del concreto toma principal importancia bajo esfuerzos de compresión, ya que bajo sollicitaciones de tracción su capacidad es considerablemente menor, dentro del orden de 10% de su capacidad en compresión [2].

Bajo cargas de compresión monotónicas, el concreto simple presenta un comportamiento casi lineal hasta alcanzar aproximadamente 50% de su resistencia máxima, tras lo cual presenta una disminución gradual de rigidez. Una vez alcanzada su resistencia máxima, el concreto es capaz de tomar deformaciones adicionales. Sin embargo, tras este punto sufre una pérdida progresiva de resistencia, hasta alcanzar una falla por trituración [1].

El concreto armado y el concreto preesforzado son materiales compuestos. En el caso de estos materiales el comportamiento del concreto difiere del mostrado por el concreto simple, y es modificado por la presencia del refuerzo de acero. La configuración triaxial de esfuerzos originada por la presencia de estribos y acero longitudinal incrementa la ductilidad y deformación disponible antes de la falla [5].

Un modelo ampliamente utilizado y validado que describe el comportamiento del concreto sometido a cargas monotónicas es el propuesto por Kent y Park en 1971 [1]. Este modelo presenta una curva que refleja directamente el comportamiento del concreto obtenido mediante ensayos de compresión, y considera la densidad volumétrica de estribos de confinamiento [6].

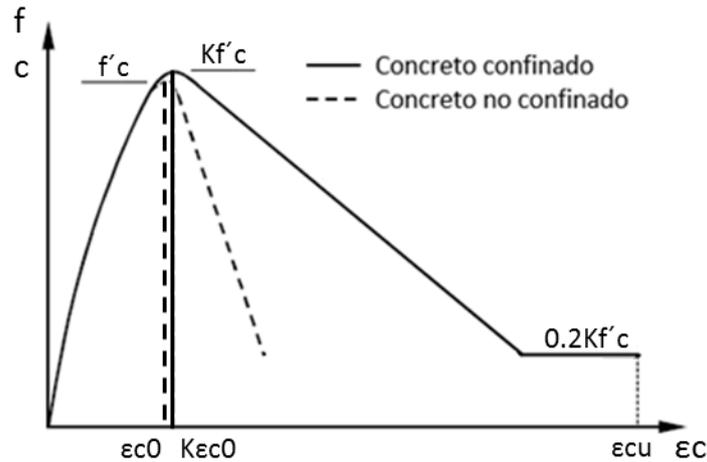


Figura 2 Ley constitutiva de concreto propuesta por Kent y Park [1]

El efecto del confinamiento sobre el comportamiento del concreto no depende únicamente de la densidad de estribos, sino también de su disposición geométrica y características mecánicas [5].

Por otro lado, a diferencia de modelos para carga monotónica como el de Kent y Park, también existen modelos que consideran la degradación de la rigidez y resistencia del material debido a ciclos de carga y descarga.

Queda claro que la complejidad de las leyes constitutivas que describen el comportamiento del concreto se presenta dentro de un rango muy amplio. La presente tesis se limita al uso de tres leyes constitutivas que describen la respuesta ante carga monotónica del concreto, que se presentan a continuación. Estas se seleccionan por tener un nivel de complejidad relativamente bajo, y por contar con un amplio historial de estudio y validación académica.

3.1.1.a Ley constitutiva de Hognestad (1951)

El modelo de esfuerzo-deformación de Hognestad, propuesto en 1951, representa el comportamiento del concreto ante cargas monotónicas de compresión por flexión en base al estudio experimental de columnas sometidas a carga axial excéntrica [8].

Este modelo describe una zona inicial con forma parabólica (Ecuación 4) hasta alcanzar un esfuerzo máximo $f'c$ en función de la capacidad característica del concreto $f'c$ [8]. Posteriormente continúa una zona de descenso lineal hasta alcanzar el esfuerzo de agotamiento con una pérdida de capacidad de 15% [8]. La reducción de capacidad característica considera el efecto del régimen de deformaciones al que se somete el elemento real, y la diferencia en forma y tamaño de la zona en compresión [8].

$$f_c = f'c \left[\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]; 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_0 \dots (\text{Ec. 4})$$

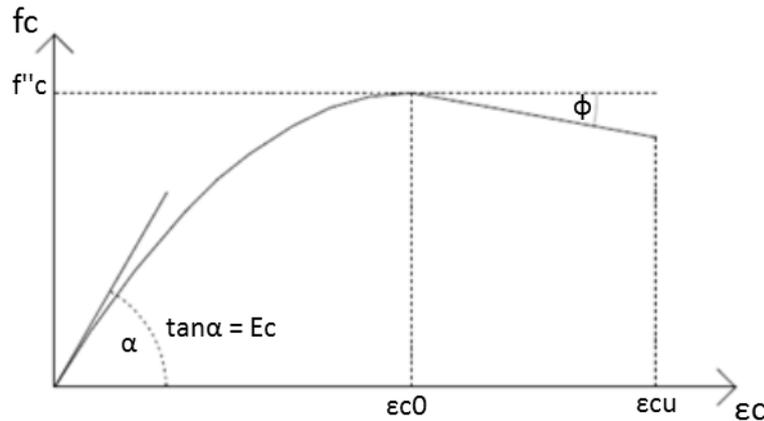


Figura 3 Ley constitutiva propuesta por Hognestad para el concreto [9]

El modelo de Hognestad, representado en la Figura 3, considera una deformación de agotamiento $\epsilon_{cu} = 0.0038$, y una deformación ϵ_{c0} asociada al esfuerzo máximo definida por la Ecuación 5.

$$\epsilon_{c0} = \frac{2f'c}{E_c} \dots (\text{Ec. 5})$$

En la Ecuación 5, $f'c$ es la resistencia del concreto en la estructura real, y E_c es el módulo de elasticidad del concreto. En la presente tesis se considera $f'c = 0.85f'c$, tomando como referencia lo especificado por el Comité Europeo del Concreto (CEB) y el Instituto del Concreto Americano (ACI) [2].

3.1.1.b Ley constitutiva de Kent y Park (1971)

El modelo de esfuerzo-deformación de Kent y Park, propuesto en 1971, representa el comportamiento del concreto ante cargas monotónicas de compresión por flexión. Se basa en el estudio de información experimental existente de columnas sometidas a carga axial concéntrica y excéntrica [10]. El modelo de Kent y Park tiene como uno de sus parámetros la cuantía volumétrica de refuerzo de confinamiento, y puede representar el comportamiento del concreto sin confinar y bajo diversos grados de confinamiento [10].

El modelo de Kent y Park describe una zona inicial parabólica similar a la propuesta por Hognestad en 1951 (Ec. 5), que alcanza el esfuerzo característico del concreto $f'c$ en una deformación unitaria $\epsilon_0 = 0.002$ [10]. Tras este punto continúa una zona decreciente lineal hasta una pérdida de capacidad de 80%, y cuya deformación queda definida en función a la deformación correspondiente a una pérdida de capacidad de 50% [10].

En el caso de concreto confinado, tras alcanzar una pérdida de capacidad de 80%, el modelo de Kent y Park considera una capacidad remanente constante, que se considera válida hasta el agotamiento [10].

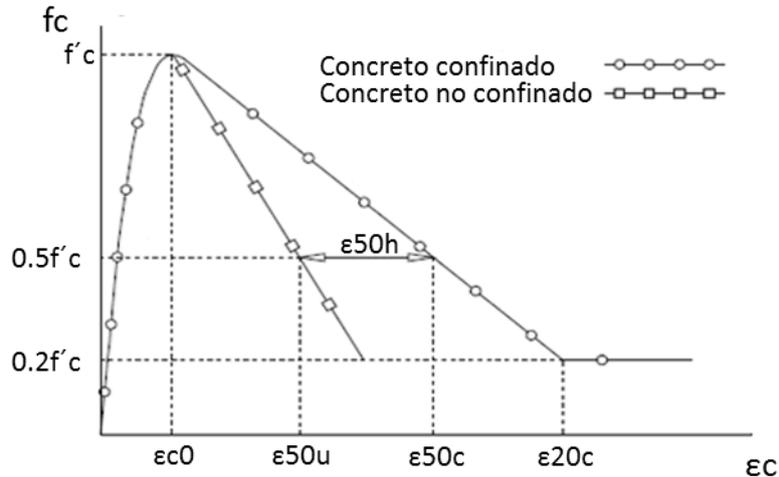


Figura 4 Ley constitutiva propuesta por Kent y Park para el concreto [9]

La deformación correspondiente a una pérdida de capacidad de 50% para el caso de concreto sin confinamiento, conocida como ϵ_{50u} , queda definida por la Ecuación 6 [10].

$$\epsilon_{50u} = \frac{3 + 0.002f'_c}{f'_c - 1000} \dots \text{(Ec.6)}$$

En la Ecuación 6, f'_c es la resistencia característica del concreto expresada en psi.

Por otro lado, para el caso de concreto confinado, se considera que el valor de ϵ_{50u} incrementa hasta la deformación ϵ_{50c} . Este incremento debido a la presencia de estribos (hoops) denominado ϵ_{50h} queda definido por la Ecuación 7 [10].

$$\epsilon_{50h} = \frac{3}{4} \rho'' \sqrt{\frac{b''}{s}} \dots \text{(Ec. 7)}$$

En la Ecuación 7, ρ'' es la cuantía volumétrica de estribos de confinamiento en función del núcleo confinado, b'' es la menor dimensión del núcleo confinado, y s es el espaciamiento entre estribos [10].

3.1.1.c Ley constitutiva de Mander (1988)

El modelo de esfuerzo-deformación de Mander, propuesto en 1988, representa el comportamiento del concreto ante cargas axiales de compresión, y considera el efecto de la cuantía y disposición del refuerzo de confinamiento [11]. La ley constitutiva propuesta por Mander expresa el comportamiento del concreto mediante una única expresión continua, que puede considerar el efecto de historia de cargas tanto cíclicas como monotónicas [11].

La presente tesis trabaja en torno a diagramas momento-curvaturas se secciones sometidas a cargas monotónicas, por lo que las consideraciones de efectos histeréticos propuestas por Mander no son estudiadas. Además, por simplicidad se considera únicamente el modelo para fuerzas de compresión en concreto no confinado.

Para concreto no confinado el modelo de Mander es descrito por una única expresión (Ec. 8) que genera una curva continua [11]. Dicha ecuación alcanza una capacidad máxima igual a la capacidad característica del concreto en una deformación $\epsilon_0 = 0.002$, tras lo cual describe una caída hasta alcanzar una deformación $2\epsilon_0$ [11]. Posteriormente, existe una zona de caída drástica que representa el efecto de pérdida de recubrimiento (spalling) que es descrita por una recta hasta alcanzar la pérdida total de capacidad para una deformación arbitraria ϵ_{sp} [11].

$$f_c = \frac{\left(\frac{E_c}{E_c - E_{sec}}\right) f'_c}{\left(\frac{E_c}{E_c - E_{sec}}\right) - 1} \dots (Ec8)$$

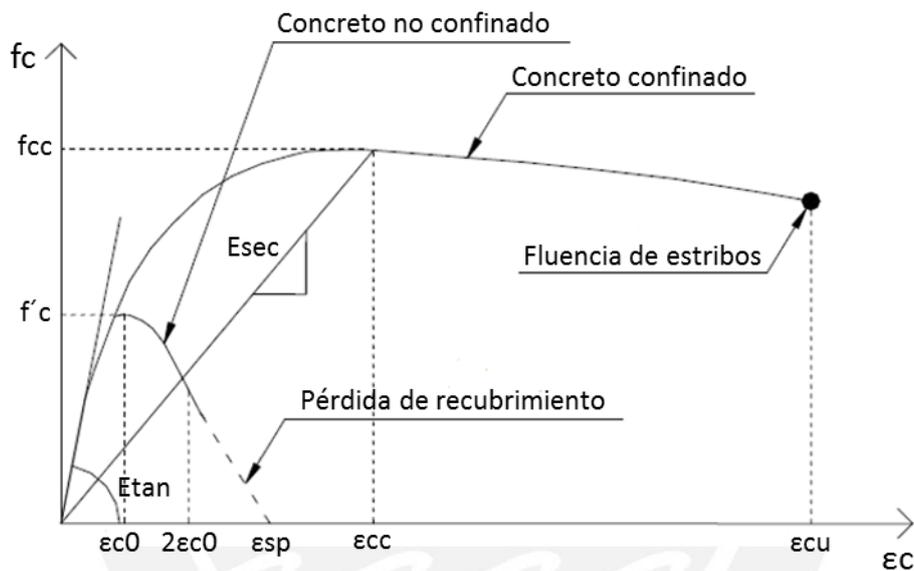


Figura 5 Ley constitutiva propuesta por Mander para el concreto [9]

En la presente tesis se desprecia la zona de caída por pérdida de recubrimiento, en vista de que el comportamiento del concreto no confinado dentro de este rango es difícil de predecir. Se considera que el concreto alcanza el agotamiento en una deformación $2\epsilon_0 = 0.004$.

3.1.2 Características y modelos de esfuerzo-deformación del acero de refuerzo

El acero de refuerzo utilizado en el concreto armado es comúnmente representado por modelos basados en ensayos de barras de refuerzo sometidas a tracción pura. El comportamiento es usualmente supuesto como lineal elástico hasta el punto de fluencia, tras lo cual se considera un flujo plástico perfecto [12]. Sin embargo, también son utilizados modelos más precisos que consideran el fenómeno de endurecimiento del acero [2].

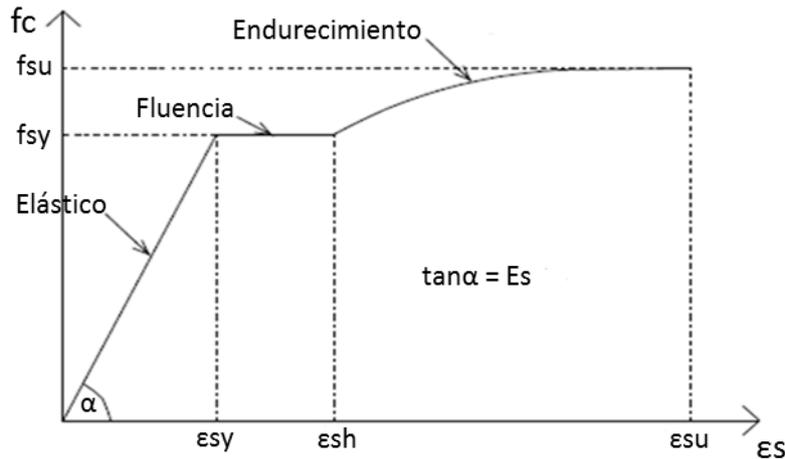


Figura 6 Ley constitutiva propuesta por Park y Paulay para el acero [9]

Dependiendo del proceso de manufactura, el acero puede o no presentar un escalón de fluencia marcado [2]. En el caso del acero ASTM A615 Grado 60 utilizado ampliamente en el Perú, las exigencias de control de calidad únicamente indican esfuerzos mínimos de fluencia, rotura y deformación mínima a la rotura [13]. Las elongaciones y esfuerzos mínimos correspondientes según los calibres de refuerzo corrugado que define la norma ASTM A615 se presentan en la Tabla 1.

	Grado 40 (280 Mpa)	Grado 60 (420 Mpa)	Grado 75 (520 Mpa)	Grado 80 (550 Mpa)	Grado 100 (690 Mpa)
Esfuerzo de rotura, min, MPa	420	620	690	725	790
Esfuerzo de fluencia, min, Mpa	280	420	520	550	690
Elongación en 200 mm, min, %					
Calibre de barra					
3/8"	11	9	7	7	7
1/2", 5/8"	12	9	7	7	7
3/4"	12	9	7	7	7
7/8", 1"	-	8	7	7	7
1.1/8", 1.1/4", 1.3/8"	-	7	6	6	6
1.3/4", 2.1/4", 2.1/2"	-	7	6	6	6

Tabla 1 Estándares de calidad para barras de acero ASTM A615 Gr60 [13]
(Calibres no disponibles en el mercado local se indican en color tenue)

El acero producido en el Perú suele presentar un escalón de fluencia marcado como en el caso del producido por Aceros Arequipa [2]. Sin embargo, también es posible el uso de aceros importados que no presenten dicho escalón.

En la presente tesis se utiliza el modelo de Park y Paulay, propuesto en 1975, que presenta un comportamiento elastoplástico perfecto hasta alcanzar una deformación de endurecimiento (hardening) ϵ_{sh} , usualmente en el rango de cuatro a seis veces la deformación de fluencia [2]. La zona de endurecimiento propuesta por Park y Paulay queda definida por una curva parabólica que describe las Ecuaciones 9, 10, 11 y 12 hasta alcanzar la deformación de rotura o agotamiento ϵ_{su} [9].

$$f_s = \left[\frac{mu+2}{60u+2} + \frac{(60-m)u}{2(30r+1)^2} \right] f_y \dots (\text{Ec. 9})$$

$$m = \frac{\frac{f_{su}}{f_y} (30r+1)^2 - 60r - 1}{15r^2} \dots (\text{Ec.10})$$

$$r = \epsilon_{su} - \epsilon_{sh} \dots (\text{Ec.11})$$

$$u = \epsilon_s - \epsilon_{sh} \dots (\text{Ec.12})$$

3.1.3 Características y modelos de esfuerzo-deformación del cable de preesfuerzo

El refuerzo de preesfuerzo utilizado en elementos de concreto preesforzado, ya sea pretensado o postensado, presenta un comportamiento diferente al del acero de refuerzo corrugado convencional. Su proceso de manufactura es distinto, pues al estar sometido constantemente a fuerzas de tensión altas, es necesario que este material tenga una baja relajación.

El comportamiento del acero de preesfuerzo típicamente presenta una parte lineal en la zona elástica, seguido por una parte curva de transición en la zona de fluencia, y finalmente una zona de endurecimiento lineal de poca pendiente [14].

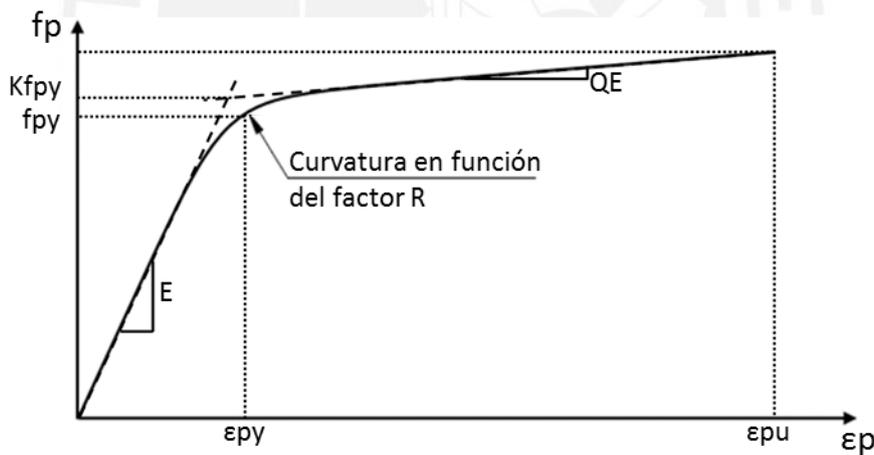


Figura 7 Ley constitutiva propuesta por Menegotto y Pinto para el acero de preesfuerzo

La presente tesis utiliza el modelo de Menegotto y Pinto, propuesto en 1973, que describe el comportamiento del material mediante la Ecuación 13, y cuya forma se presenta en la Figura 7.

$$f_p = \epsilon_p E \left[Q + \frac{1+Q}{\left\{ 1 + \left(\frac{\epsilon_p E}{K_{f_{py}}} \right)^R \right\}^{1/R}} \right] \dots (\text{Ec.13})$$

En la Ecuación 13, E es el módulo de elasticidad inicial del material, Q y K determinan la rama de endurecimiento, y R determina la curvatura de transición. El valor de Q queda definido por la Ecuación 14, mientras que K es un valor que depende de tipo de acero y cuyos valores característicos se presentan en la Tabla 2 [15]. El valor R es un parámetro de calibración, que se define para que el esfuerzo de fluencia corresponda a la deformación de fluencia [15].

$$Q = \frac{f_{pu} - Kf_{pu}}{\epsilon_{pu}E - Kf_{pu}} \dots \text{(Ec.14)}$$

Material	K
Cable ASTM A882 Gr270	1.04
Cable ASTM A882 Gr250	1.04
Alambre ASTM A882 Gr250	1.03
Alambre ASTM A882 Gr235	1.03
Barra ASTM A882 Gr150	1.01

Tabla 2 Constante K en función de tipo de acero de preesfuerzo [14]

3.2 Diagramas numéricos de momento-curvatura ante cargas monotónicas

Los diagramas numéricos de momento-curvatura, a diferencia de los obtenidos de manera experimental, son aquellos construidos de manera analítica en base al estudio de las fuerzas internas de secciones teóricas.

La presente tesis estudia diagramas numéricos de secciones de vigas sometidas a flexión pura con carga monotónica. La historia de cargas a la cual se somete el elemento analizado es incremental y lento, desde el estado inicial sin cargas externas hasta el agotamiento. Por ello, no se tienen en consideración efectos generados por sollicitaciones cíclicas, y cada punto del diagrama corresponde a un estado de equilibrio estático.

3.2.1 Principio de equilibrio de fuerzas internas

Al considerarse una aplicación de cargas lenta se puede aceptar que cada punto de un diagrama momento-curvatura corresponde a un estado en equilibrio estático.

Como las sollicitaciones sobre la sección estudiada se limitan a casos de flexión pura, las fuerzas internas de tracción y compresión en la sección deben de mantenerse en equilibrio. Por otro lado, las fuerzas internas generan un momento libre que debe de ser igual al momento externo aplicado sobre la sección. No pueden existir otras respuestas, ya que de otro modo la sección estudiada no se encontraría en equilibrio estático.

3.2.2 Metodología de construcción de diagramas momento-curvatura

La construcción de diagramas momento-curvatura es un proceso aproximado en donde se determinan puntos discretos de momento-curvatura de una sección, que en conjunto describen la historia continua de carga mediante su interpolación.

Para determinar cada punto se parte de un valor de deformación en la fibra extrema de concreto en compresión, para el cual existen un momento externo y una curvatura que satisfacen el equilibrio interno de la sección.

Para determinar qué estado de deformación cumple el equilibrio de fuerzas internas se asume una profundidad de eje neutro, lo cual define el estado de deformación de toda la sección. Con el estado de deformación definido se determinan las fuerzas internas de la sección, y se verifica si estos se encuentran en equilibrio. Una vez obtenida la ubicación del eje neutro que satisfaga el equilibrio mediante intentos sucesivos, se hallan el momento externo correspondiente y el giro de la sección.

La curvatura de la sección se determina mediante la Ecuación 15, y la metodología antes descrita para el cálculo de un punto del diagrama momento-curvatura se muestra en la Figura 9 desarrollada por Park y Paulay.

$$\phi = \frac{\epsilon_c}{c} = \frac{\epsilon_s}{d-c} = \frac{\epsilon_c + \epsilon_s}{d} \dots \text{(Ec.15)}$$

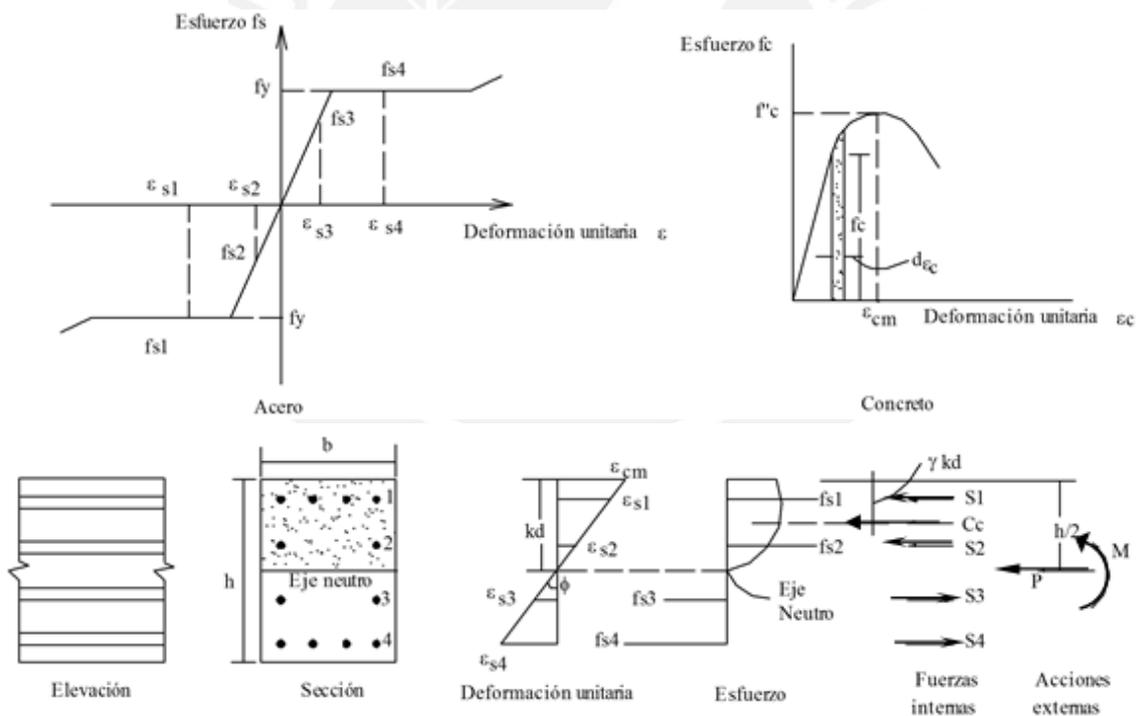


Figura 8 Metodología para cálculo de un punto del diagrama momento-curvatura [22]

El punto final del diagrama es aquel cuando el esfuerzo en compresión de la fibra extrema es el esfuerzo de agotamiento del concreto. El punto inicial es aquel donde el momento externo aplicado es nulo, y que en secciones de concreto no preesforzado corresponde a un giro y estado de deformación nulos. En secciones con preesfuerzo el punto inicial sí cuenta con un giro y esfuerzos internos, debido al momento de la fuerza de precompresión.

Cuando el concreto está descrito por una ley constitutiva con caída de esfuerzo muy grande cerca a la rotura, es posible tener diagramas en los que la pérdida de resistencia de la sección cerca al agotamiento es grande. En los trabajos desarrollados en la presente tesis se desprecia la zona del diagrama posterior a una pérdida de 80% de la capacidad máxima, considerando que una pérdida mayor de capacidad se relaciona con un comportamiento inestable [16].

Por otro lado, en casos de cuantía de refuerzo en tracción baja o de refuerzo con poca capacidad de deformación a la rotura, la sección puede alcanzar el agotamiento debido a la fractura del refuerzo.

Existen otros puntos importantes en un diagrama momento-curvatura, que corresponden a cambios marcados en el comportamiento de la sección. Uno se presenta al agrietarse el concreto, el cual deja de trabajar en tracción y ocasiona un salto notorio en la rigidez. Otros puntos importantes se presentan cuando alguno de los aceros de refuerzo alcanza la fluencia, lo cual también genera pérdida de rigidez.

En secciones convencionales con refuerzo en tracción concentrado en una sola profundidad, se presenta un solo punto de fluencia bien definido. Sin embargo, en casos de secciones con refuerzo distribuido en varias capas es imposible determinar un único punto de fluencia, ya que pueden existir tantos cambios de rigidez como capas de acero que entran en fluencia.

Se presenta en la Figura 9 el diagrama de momento-curvatura de una sección de concreto armado de 40x70 cm, con refuerzo superior e inferior de 20 cm² de acero. Se aprecia el punto de agrietamiento de concreto A, y un único punto de fluencia B, el punto de estado sin cargas externas o estado inicial O, y el punto final C cuando el concreto alcanza el agotamiento.

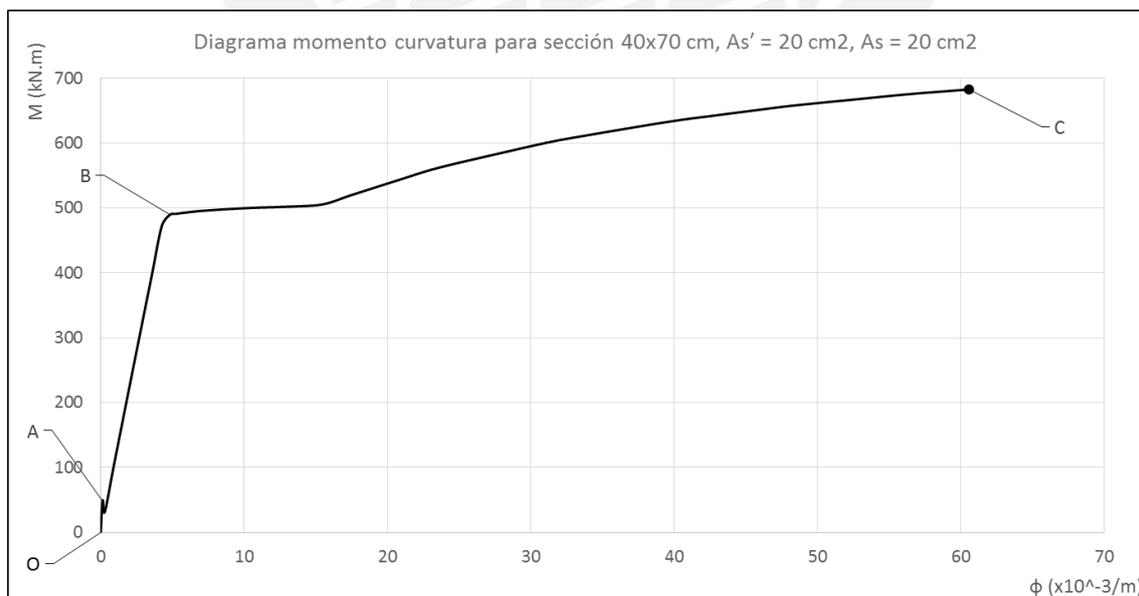


Figura 9 Diagrama momento-curvatura de sección rectangular 40x70 cm de concreto armado

Las leyes constitutivas del concreto estudiadas en la presente tesis describen el comportamiento del concreto únicamente ante cargas de compresión. Para los cálculos antes de que el concreto alcance el esfuerzo de agrietamiento, se toma como supuesto que el comportamiento en tracción del concreto es igual al descrito por la ley constitutiva utilizada para compresión.

3.2.3 Modelos de idealización bilineal de diagramas de momento-curvatura

Los diagramas momento-curvatura pueden ser simplificados convirtiéndolos en diagramas bilineales. En dichos diagramas simplificados se considera que el concreto en tracción inicia el proceso de carga en un estado agrietado, y se define un único punto de fluencia equivalente que marca el cambio de rigidez de la sección.

Los modelos simplificados permiten estimar el comportamiento de la sección de manera rápida cuando se espera un solo punto de fluencia evidente, pues se puede construir el diagrama momento-curvatura con solo los puntos inicial, de fluencia y de agotamiento.

Usualmente la construcción de diagramas momento-curvatura se realiza con la asistencia de un computador, en cuyo caso no existe una diferencia importante entre el tiempo o trabajo utilizado para construir un diagrama simplificado o uno detallado.

En casos simples de vigas de concreto armado con refuerzo en tracción concentrado en una sola capa la ubicación del punto de fluencia es fácilmente identificable. Sin embargo, en casos como el de la Figura 10, que consiste en una viga de 40x70 cm con cinco capas de acero de 10 cm² distribuidos en altura, no hay un punto único de fluencia.

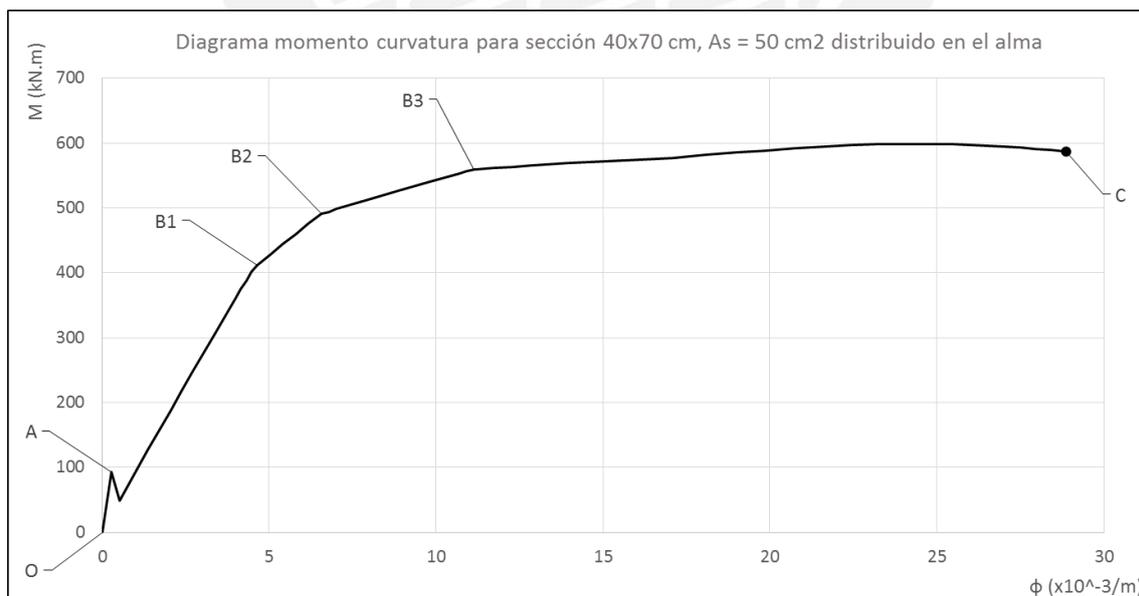


Figura 10 Diagrama momento-curvatura de sección rectangular 40x70 cm con refuerzo distribuido en altura

De manera similar al diagrama de una viga con una sola capa de refuerzo en tracción, se tiene el punto inicial O, el punto de agotamiento C, y el punto de agrietamiento del concreto A. Sin

embargo, no se distingue un único punto de fluencia. Para el caso presentado en la Figura 10 se pueden observar hasta tres quiebres en el diagrama, cada uno correspondiente a la fluencia de una capa distinta de acero.

En casos donde no existe un punto marcado de fluencia es útil poder definir el diagrama momento-curvatura bilineal, pues al definir un punto de fluencia equivalente único se puede determinar la ductilidad de curvatura. Para ello existen varios criterios para construir diagramas bilineales equivalentes. En la presente tesis se trabaja el método propuesto por Priestley [17], y el adoptado por el Departamento de Transporte de California (Caltrans) [18] y la Asociación Americana de Oficiales de Carreteras Estatales y Transportes (AASHTO) [19].

3.2.3.a Modelo propuesto por Priestley

El modelo propuesto por Priestley supone un diagrama bilineal con una recta inicial que parte del punto inicial O y pasa por el punto de primera fluencia del acero Y. La recta inicial se extrapola hasta alcanzar el punto de fluencia equivalente A. El momento nominal M_n relacionado con el punto de fluencia equivalente A es el asociado a una deformación de la fibra extrema de concreto $\epsilon_c = 0.004$ o a una deformación del acero $\epsilon_s = 0.015$, la que ocurra primero. La segunda parte del diagrama es una línea recta que conecta el punto A de fluencia equivalente y el punto final B asociado al agotamiento [17].

La idealización de Priestley puede utilizarse en secciones en flexión pura y secciones con carga axial. Por ello define el punto de primera fluencia Y como aquel en el cual se alcanza la primera fluencia del refuerzo, o en el que el concreto alcanza una deformación $\epsilon_c = 0.002$, el que ocurra primero. La deformación límite indicada para el concreto corresponde en la mayoría de los casos a la asociada a la máxima resistencia en compresión.

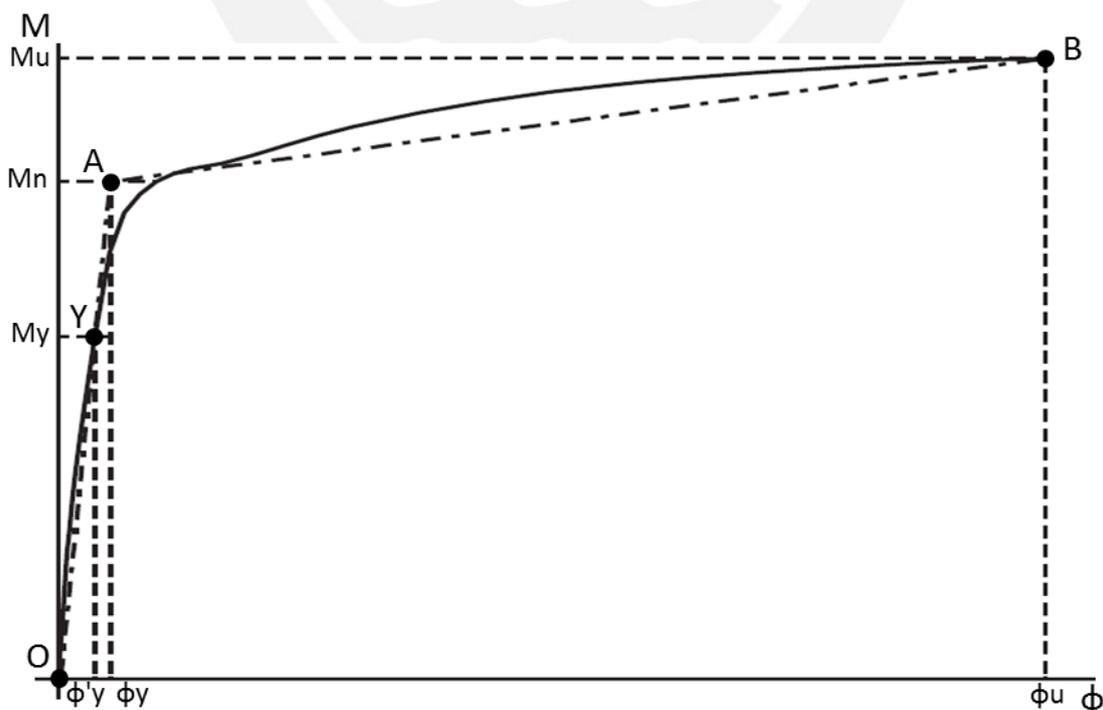


Figura 11 Diagrama momento-curvatura bilineal idealizado propuesto por Priestley [17]

3.2.3.b Modelo adoptado por Caltrans y AASHTO

El modelo que es utilizado por el Caltrans y el AASHTO en sus manuales de diseño se basa en el equilibrio de áreas. Parte de suponer que el diagrama es bilineal elastoplástico, con una recta antes de la fluencia del acero que conecta el punto inicial O y el punto de primera fluencia del acero Y, y que se extiende hasta el punto de fluencia equivalente A. Posteriormente se tiene una recta horizontal de comportamiento plástico que conecta el punto A hasta alcanzar el punto final B en la curvatura de agotamiento [18].

El punto de fluencia equivalente A se ubica de manera que se forman áreas balanceadas entre el diagrama real y el diagrama idealizado después de la fluencia del primer acero. Lo antes descrito puede observarse en la Figura 12, adaptada del manual del Caltrans.

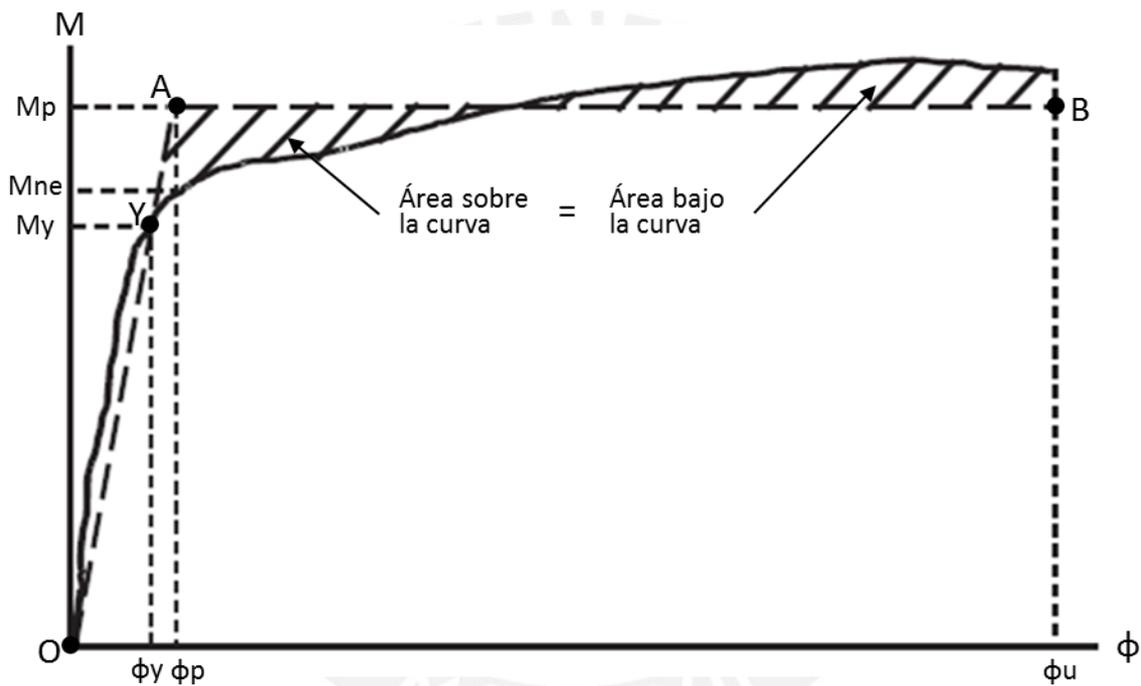


Figura 12 Diagrama momento-curvatura bilineal idealizado adoptado por Caltrans y AASHTO [18]

El procedimiento utilizado por Caltrans y AASHTO para definir el punto de fluencia es equivalente a definir una zona de plasticidad perfecta, en donde el momento plástico M_p es igual al momento promedio en el rango inelástico [19].

4 IMPLEMENTACIÓN DE PROGRAMA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA

4.1 Alcances y restricciones

En la presente tesis se desarrolla un programa en la forma de libro de hojas de cálculo en Microsoft Excel 2013 con macros habilitadas (formato .xlsm), con compatibilidad total hasta la versión Microsoft Excel 2010, y compatibilidad parcial con pérdidas menores de formato hasta la versión Microsoft Excel 2007. El programa desarrollado se encuentra implementado en el lenguaje de programación Visual Basic for Applications (VBA), y los datos de entrada y la salida de resultados se encuentran organizados en varias hojas de cálculo.

El programa permite la construcción de diagramas momento-curvatura para secciones de concreto armado y concreto preesforzado sometidas a flexión pura. El diagrama determinado mediante métodos numéricos presenta la historia completa de comportamiento de la sección analizada desde el reposo hasta el agotamiento.

Las secciones analizadas pueden estar conformadas por concreto, acero y cable de preesfuerzo. Cada material cuenta con una ley constitutiva que define su comportamiento. En el caso del cable de preesfuerzo, sólo se toma en cuenta el sistema de cables adheridos, en donde los cables se comportan como una unidad con el resto de la sección.

El programa cuenta con leyes constitutivas de materiales predefinidas, desarrolladas en el capítulo 3.1 de la presente tesis. El usuario además tiene la posibilidad de ingresar una ley constitutiva propia, mediante la definición de coordenadas de esfuerzo-deformación.

El concreto, acero de refuerzo y cable de preesfuerzo son definidos por una ley constitutiva cada uno. Esto implica que no es posible el análisis de secciones armadas con una combinación de aceros de distintos grados, o el de secciones con dos comportamientos de concreto distintos.

El comportamiento del acero ante cargas de tracción y compresión se rige por la ley constitutiva utilizada. Para el concreto en compresión se utiliza la ley constitutiva que se haya definido. Donde sea necesario considerar el comportamiento del concreto en tracción se considera la misma ley constitutiva utilizada en compresión, pero solamente hasta alcanzar la deformación de agrietamiento indicada por el usuario.

El punto inicial de reposo considera los casos con curvatura distinta de cero, debido a las deformaciones generadas por la existencia de refuerzo preesforzado. El punto final se relaciona con el agotamiento del concreto por trituración, o la fractura de refuerzo por tracción.

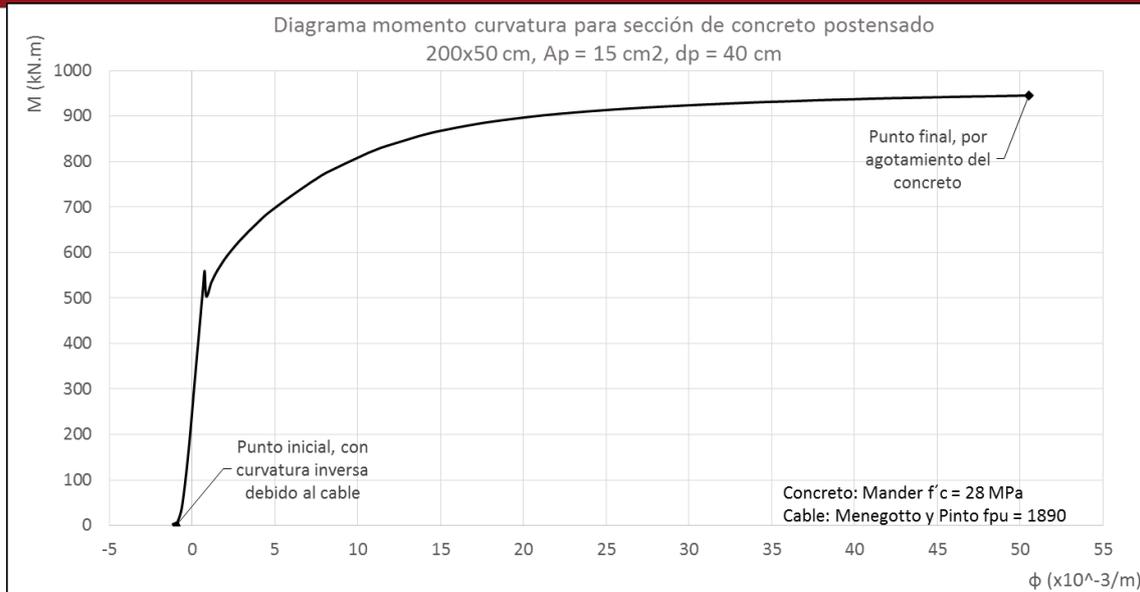


Figura 13 Diagrama momento-curvatura de sección de concreto preesforzado

El programa calcula los puntos de agrietamiento del concreto y de fluencia del primer acero. Se determinan también puntos intermedios que permiten la construcción aproximada del diagrama, cuya cantidad y concentración queda definida automáticamente mediante los criterios de precisión expuestos posteriormente en el capítulo 4.3.3.

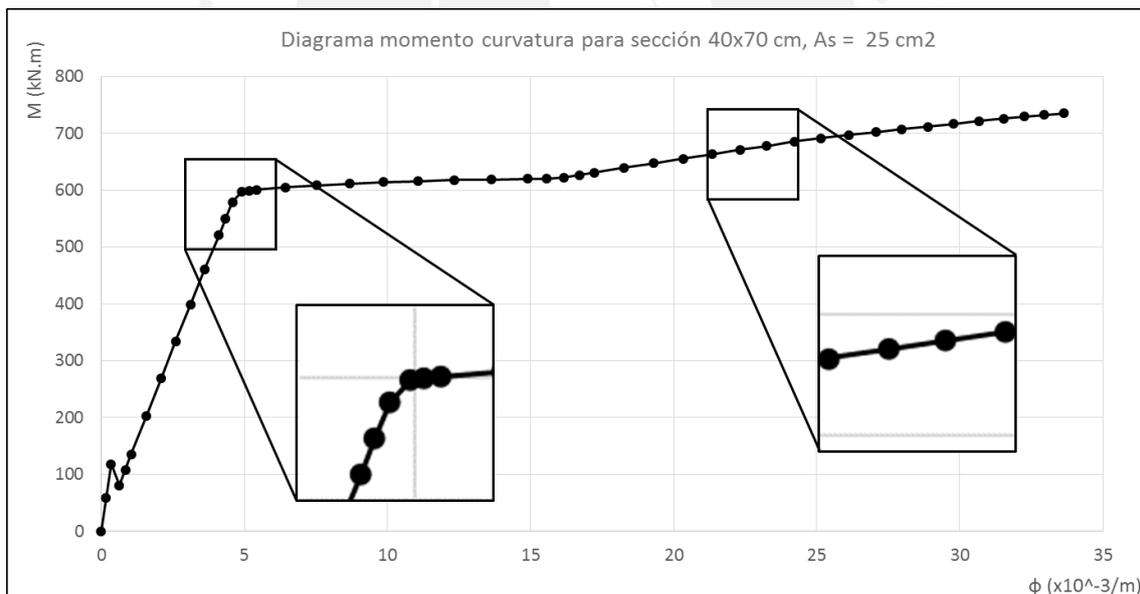


Figura 14 Distribución de puntos de momento-curvatura determinados por el programa

Las secciones estudiadas se limitan a geometrías simétricas en las cuales a cada profundidad corresponde un único valor de ancho. Las secciones no pueden tener geometrías en las cuales el corte con una línea paralela al momento intersecte dos cuerpos o partes separadas de concreto.

Es posible la construcción de diagramas momento-curvatura para una gran cantidad de secciones complejas, si se desprecia el efecto de flexión inclinada que se presenta en secciones asimétricas con respecto al eje vertical. Además, es posible hallar secciones equivalentes a

secciones con geometrías que no tienen un único ancho para cada profundidad, como se presenta en la Figura 15.

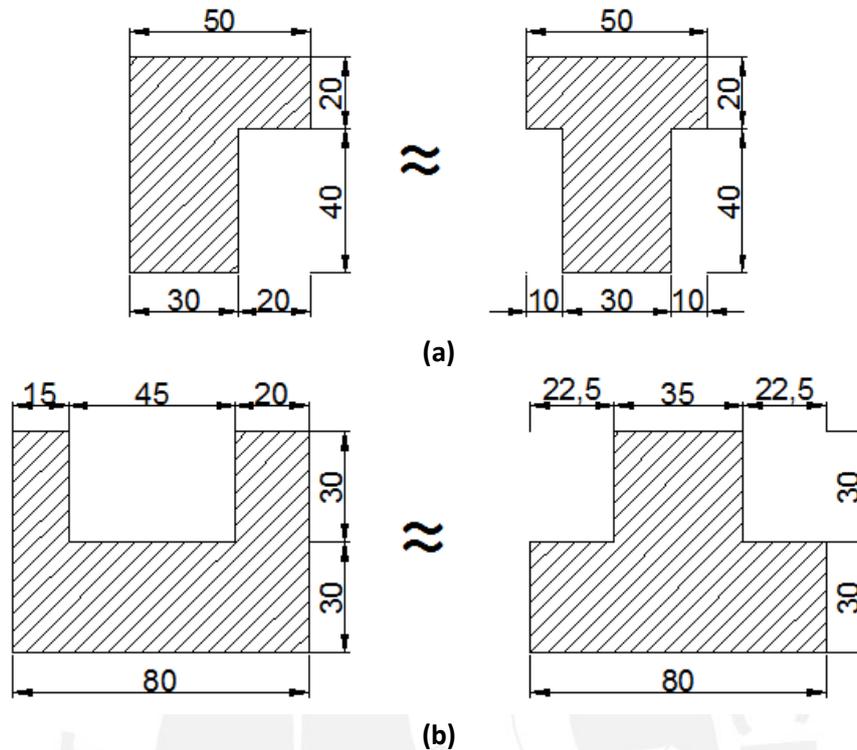


Figura 15 Ejemplo de secciones idealizadas para poder ser analizadas con el programa
(a) Sección asimétrica (b) Sección con más de un corte horizontal para cada profundidad

Para las secciones estudiadas, se hallan el diagrama idealizado propuesto por Priestley y el diagrama definido por los lineamientos de Caltrans y AASHTO. Partiendo de los diagramas idealizados se determinan los valores de ductilidad de curvatura disponibles correspondientes a cada uno. Se determina también la ductilidad real de la sección si existe.

4.2 Hipótesis y simplificaciones consideradas

Para la construcción de diagramas momento-curvatura se debe idealizar el comportamiento real de las secciones estudiadas. A continuación se presentan las hipótesis aceptadas en el presente estudio, que permiten limitar la complejidad de los análisis necesarios.

4.2.1 Principio de Navier

Se acepta que las secciones planas inicialmente permanecen planas. Esta afirmación es razonable en elementos esbeltos, donde la longitud es por lo menos cuatro veces el peralte [02]. Por ello, las secciones estudiadas en la presente tesis, y el alcance de la hoja de cálculo implementada se limitan a vigas esbeltas.

El principio de Navier permite saber las deformaciones de cualquier ubicación de la sección, partiendo de la deformación conocida a cierta profundidad y su ubicación con respecto al eje neutro.

4.2.2 Adherencia

Se supone una perfecta adherencia entre los materiales que conforman la sección (concreto, acero de refuerzo y cable de preesfuerzo). Se desprecian los deslizamientos que pueden existir en la interface de refuerzo y concreto, y en el caso de secciones de concreto preesforzado se limita el estudio a secciones con cables de sistema adherido.

4.2.3 Resistencia del concreto en tracción

La resistencia del concreto en tracción se desprecia totalmente una vez la fibra más esforzada en tracción supera la deformación de agrietamiento. El agrietamiento realmente se presenta de manera discreta y no en todas las secciones, y la profundidad de las grietas incrementa junto con la demanda.

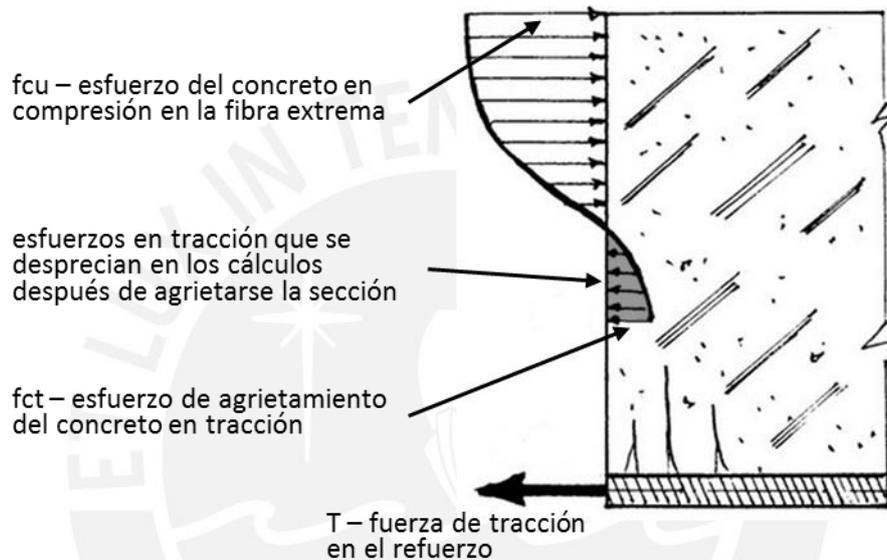


Figura 16 Esquema de fuerzas internas de una sección de concreto después del agrietamiento [20]

La resistencia del concreto es mucho menor en tracción que en compresión, y despreciar su aporte luego de que parte de la sección se ha fisurado no influye fuertemente en los resultados de los análisis.

Se considera que el concreto se agrieta una vez este alcanza una deformación de agrietamiento definida por el usuario. El comportamiento en tracción hasta darse el agrietamiento se supone igual al descrito por la ley constitutiva utilizada para el concreto en compresión.

4.2.4 Relaciones esfuerzo-deformación de los materiales

Se considera que el esfuerzo en los materiales es definido en función de su deformación unitaria, según sus leyes constitutivas. Se considera para cada sección una ley constitutiva por material, lo cual implica que no se puede diferenciar entre el comportamiento del concreto del recubrimiento y el concreto del núcleo confinado.

Realmente en una sección todo el concreto se comporta similar al concreto no confinado hasta darse la pérdida de recubrimiento, tras lo cual el efecto de confinamiento de los estribos modifica el comportamiento del concreto que conforma el núcleo.

La simplificación considerada desprecia la diferencia entre el comportamiento del recubrimiento y del núcleo confinado. También desprecia el efecto de la pérdida de recubrimiento, pues se asume que el agotamiento de toda la sección se alcanza cuando la fibra extrema del concreto llega a su deformación de agotamiento.

Se considera que el cable de preesfuerzo se encuentra en un estado de pretensado estable luego de sufrir todas las pérdidas de fuerza. Se asume que el tensado de los cables se realiza de manera simultánea, despreciando los efectos generados en un tensado secuencial.

El tensado de los cables no se realiza necesariamente en simultáneo, sino que se pueden tensar de manera secuencial según el tipo de sistema de preesfuerzo utilizado. En estos casos, las deformaciones generadas por el tensado de unos cables varían los esfuerzos de los cables que ya se encontraban previamente tensados.

4.2.5 Consideraciones en la geometría

La sección de concreto armado analizada se define de manera discreta mediante un arreglo de profundidades y anchos. El programa desarrollado divide a la sección estudiada en franjas rectangulares, cuyo ancho se determina mediante la interpolación lineal entre los puntos de geometría definidos en el arreglo. Por defecto las zonas en tracción y compresión se dividen en cien franjas cada una.

Se considera que la sección es simétrica con respecto al plano normal al momento, y que existe un único corte de concreto para cada profundidad. Para el análisis de formas complejas, como secciones asimétricas o huecas, estas deben asimilarse a secciones equivalentes que cumplan con las limitaciones de datos de entrada.

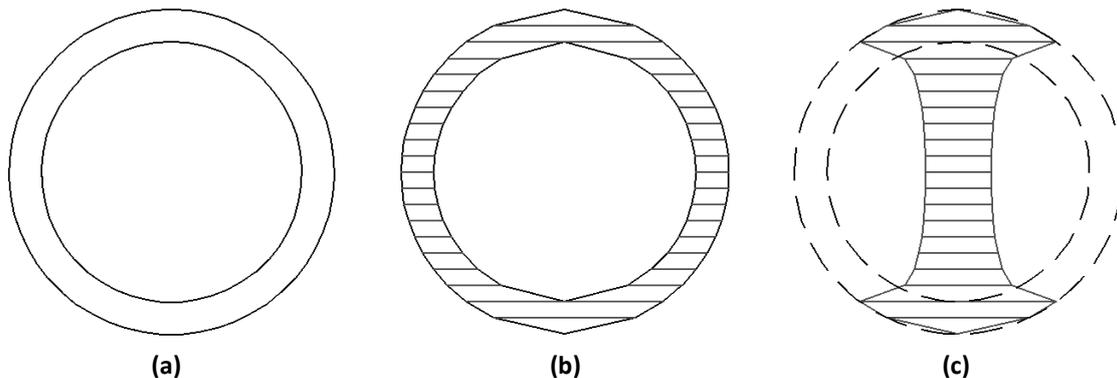


Figura 17 Ejemplo de sección hueca transformada en una sección equivalente aceptada por el programa
(a) Sección real, (b) Sección dividida en franjas, (c) Sección aceptada por el programa

4.3 Algoritmos utilizados en la construcción de diagramas momento-curvatura

4.3.1 Búsqueda binaria o dicotómica

La búsqueda binaria o dicotómica es un algoritmo que permite encontrar de manera eficiente el valor deseado dentro de una lista ordenada [21].

A diferencia de una búsqueda secuencial convencional, en donde se verifica secuencialmente uno por uno los valores hasta encontrar el buscado, la búsqueda binaria presenta una técnica de búsqueda mejorada [21].

El algoritmo de búsqueda binaria consiste en comprobar si el elemento intermedio de la lista coincide con el valor objetivo. De no ser el valor buscado, se define nuevamente la lista de búsqueda como la mitad superior o inferior de la lista original, según el valor objetivo sea mayor o menor al valor previamente comparado.

Este algoritmo es idóneo para encontrar los valores de esfuerzos internos de la sección analizada, ya que las leyes constitutivas se almacenan en función de la deformación de manera ordenada. Mientras la complejidad de una búsqueda secuencial es n , la complejidad de la búsqueda binaria es $\log_2(n)$ [21].

4.3.2 Cálculo de un punto del diagrama momento-curvatura de una sección

La metodología de construcción de diagrama momento-curvatura que se utiliza en el programa desarrollado se basa en el cálculo de varios puntos discretos de momento-curvatura. Cada uno de los puntos se determina partiendo de una deformación supuesta en la fibra externa del concreto ϵ_c , para la cual corresponde una única configuración interna de deformaciones que satisface el equilibrio de fuerzas.

El procedimiento de cálculo de un punto genérico del diagrama momento-curvatura puede resumirse en los siguientes pasos [02]:

1. Fijar la deformación de la fibra externa en compresión del concreto ϵ_c ;
2. Asumir una profundidad de eje neutro c , con lo cual se define el estado de deformaciones a lo alto de toda la sección;
3. Hallar la fuerza y el momento de la zona en compresión del concreto mediante integración numérica (ver Ecuaciones 16 y 17);
4. Hallar la fuerza y el momento de la zona en tracción del concreto, si es que la sección no se encuentra agrietada (ver Ecuaciones 16 y 17);
5. Hallar la fuerza y el momento de los aceros de refuerzo (ver Ecuaciones 18 y 19);
6. Hallar la fuerza y el momento de los cables de preesfuerzo, considerando que su deformación será igual a la deformación de preesfuerzo más la deformación de la fibra ubicada en su posición (ver Ecuaciones 18 y 19);
7. Verificar si se cumple el equilibrio de fuerzas internas.
8. Si el equilibrio de fuerzas internas no se cumple, elegir una nueva profundidad de eje neutro y volver al paso 3.
9. Si el equilibrio de fuerzas internas se cumple, determinar el momento resistente en la sección y hallar la curvatura ϕ mediante la Ecuación 15 presentada en la sección 3.2.2.

$$F_c = \sum (h_i * b_i) f_{c_i} \dots \text{(Ec.16)}$$

$$M_c = \sum (h_i * b_i) f_{c_i} * y_{c_i} \dots \text{(Ec.17)}$$

En las Ecuaciones 16 y 17, h_i y b_i son el alto y ancho de cada una de las franjas de concreto en la zona analizada, f_{ci} es el esfuerzo en el concreto en cada franja, e y_{ci} es la profundidad de cada franja de concreto con respecto al borde superior de la sección.

$$F_s = \sum A_{s_i} * (f_{s_i} - f_{c_i}) \dots \text{(Ec.18)}$$

$$M_s = \sum A_{s_i} * (f_{s_i} - f_{c_i}) * y_{s_i} \dots \text{(Ec.19)}$$

En las Ecuaciones 18 y 19, A_{s_i} son las áreas de cada uno de los aceros o cables, f_{s_i} y f_{c_i} son los esfuerzos del refuerzo y concreto para cada ubicación de refuerzo, e y_{s_i} es la profundidad de cada refuerzo con respecto al borde superior de la sección. El término $(f_{s_i} - f_{c_i})$ considera el concreto desplazado por el refuerzo, y f_{c_i} será nulo en el caso de concreto agrietado sometido a tracción.

Ya que a cada deformación de la fibra extrema de concreto sólo corresponde un estado de equilibrio interno, la curva de sumatoria de fuerzas internas en función de la profundidad del eje neutro cruza el eje de abscisas una vez. Esto significa que si la resultante de fuerzas internas se encuentra en tracción, el eje neutro que satisface el equilibrio es más profundo que el supuesto. Por el contrario, si la resultante de fuerzas internas se encuentra en compresión, el eje neutro que satisface el equilibrio es menos profundo que el supuesto.

La metodología utilizada en el programa para determinar la profundidad del eje neutro puede resumirse en las siguientes condiciones:

1. La profundidad de eje neutro que cumple con la condición de equilibrio interno de la sección se encuentra dentro del rango de profundidades definido como $c_{min} < c < c_{max}$.
2. Si para una profundidad supuesta la resultante de fuerzas internas de la sección es de compresión, la profundidad de eje neutro que satisface el equilibrio es menor.
3. Si para una profundidad supuesta la resultante de fuerzas internas de la sección es de tracción, la profundidad de eje neutro que satisface el equilibrio es mayor.
4. La primera iteración supone que la profundidad es igual al peralte del elemento h .
5. Si en la primera iteración la profundidad buscada es mayor a h entonces se incrementa la profundidad supuesta en intervalos de $0.5h$, hasta superar la profundidad buscada y determinar los valores de c_{min} y c_{max} .
6. Si en la primera iteración la profundidad buscada es menor a h entonces el valor de c_{max} es el peralte del elemento y el valor de c_{min} es cero.
7. El valor supuesto de profundidad del eje neutro se toma como el promedio entre los límites c_{max} y c_{min} .
8. Se acepta que se alcanza la convergencia cuando los valores de curvatura ϕ y de momento nominal M_n no varían en más de 1% con respecto a la última iteración.
9. Si no se alcanza la convergencia entonces el valor de profundidad utilizado se considera como el nuevo límite c_{min} o c_{max} según corresponda, y se continúa con una nueva iteración suponiendo la profundidad según la condición 7.

4.3.3 Construcción del diagrama momento-curvatura de una sección

La metodología utilizada de construcción de diagramas momento-curvatura por el programa desarrollado se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Calcular el punto inicial del diagrama momento curvatura, que en el caso de secciones preesforzadas no necesariamente corresponde a un giro y momento nominal nulos.
2. Determinar cuál es la deformación inicial del cable de preesfuerzo en el punto inicial del diagrama. Dicha deformación inicial es utilizada para determinar el esfuerzo del cable de preesfuerzo en el resto de puntos.
3. Calcular en total veinte puntos del diagrama momento-curvatura que abarcan todo el diagrama hasta el agotamiento del concreto, con intervalos iguales de deformación de la fibra extrema de concreto.
4. Determinar si el agotamiento de la sección se alcanza por rotura del refuerzo antes que el concreto alcance el agotamiento, y si es así eliminar los puntos posteriores a la falla.
5. Determinar si el punto de agotamiento presenta una pérdida de resistencia mayor a 15%, y si es así eliminar los puntos posteriores a dicha caída de capacidad.
6. Calcular puntos adicionales del diagrama ubicados entre los puntos ya determinados. La deformación de la fibra extrema del concreto se toma como el promedio de las deformaciones entre cada dos puntos consecutivos.
7. Dejar de calcular puntos adicionales cuando el área original bajo un intervalo del diagrama (Figura 18a) no cambia en más de 1% en comparación con el área considerando un punto intermedio (Figura 18b).
8. Calcular los puntos del diagrama en donde el concreto en tracción alcanza su agotamiento (punto de agrietamiento), y donde el acero extremo alcanza la fluencia (punto de fluencia).
9. Calcular los diagramas bilineales equivalentes según los criterios de Priestley, y del AASHTO o Caltrans vistos en la sección 3.2.3.

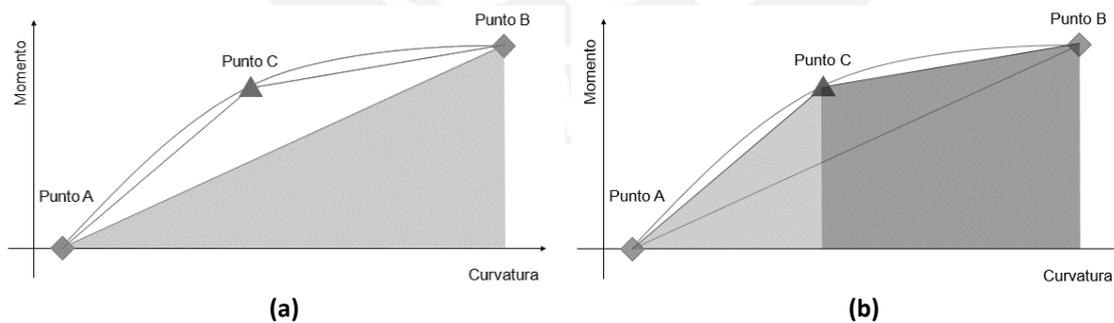


Figura 18 Comparación entre áreas (a) antes y (b) después de hallar un punto adicional en el diagrama

5 APLICACIÓN Y VALIDACIÓN DE PROGRAMA IMPLEMENTADO

5.1 Datos de entrada y resultados de salida

5.1.1 Ingreso de características de la sección estudiada

El ingreso de datos de la sección estudiada se realiza mediante la hoja de cálculo "Geometría". En esta se ingresan la forma de la sección y la disposición de los refuerzos, ya sea acero de refuerzo o cable de preesfuerzo.

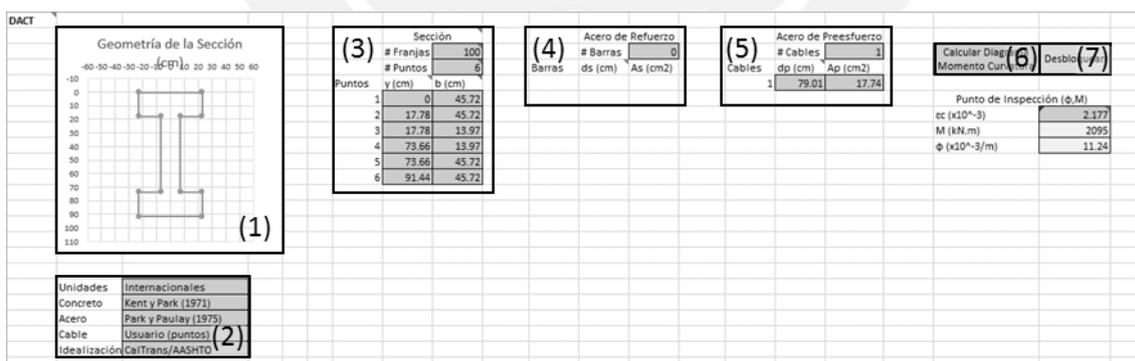
La forma de la sección se ingresa como un arreglo de anchos y profundidades medidas a partir del borde superior de la sección. La forma de la sección en el análisis considera la interpolación lineal de los datos de la forma de la sección definidos por el usuario.

No es posible el ingreso de secciones en las cuales cada profundidad tiene más de un corte. Por otro lado, el programa considera que las secciones estudiadas son simétricas con respecto al plano normal al momento.

El arreglo de forma no presenta un límite máximo de valores debido a limitaciones del programa, pero el formato está adaptado para un máximo de veinte filas como límite práctico.

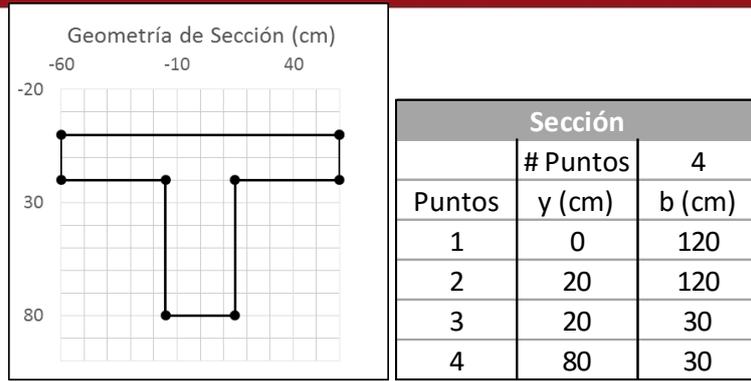
El refuerzo se ingresa en forma de dos arreglos, uno para el acero de refuerzo convencional y otro para el cable de preesfuerzo. Dichos arreglos presentan el área y la profundidad del refuerzo con respecto al borde superior de la sección. No hay un límite de valores máximo en el programa, pero el formato de ingreso acepta hasta veinte datos.

Como se menciona en la sección 2.4.5, es posible ingresar una gran variedad de secciones, si se desprecia la inclinación del eje neutro que existe en secciones asimétricas, y si se simplifican las formas a geometrías más simples con un solo corte de concreto para cada profundidad.

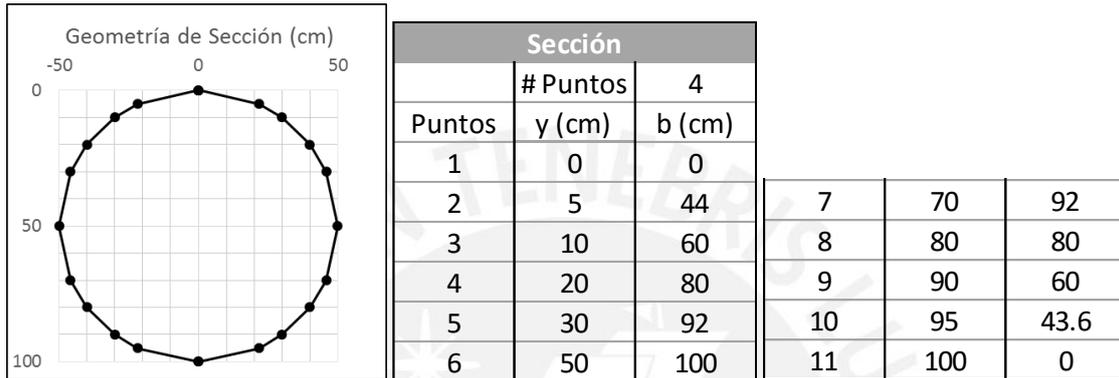


- (1) Gráfica de sección analizada
- (2) Leyes constitutivas utilizadas
- (3) Datos de la sección
- (4) Datos de acero de refuerzo
- (5) Datos de cable de preesfuerzo
- (6) Botón de ejecución de programa
- (7) Botón de desbloqueo de datos

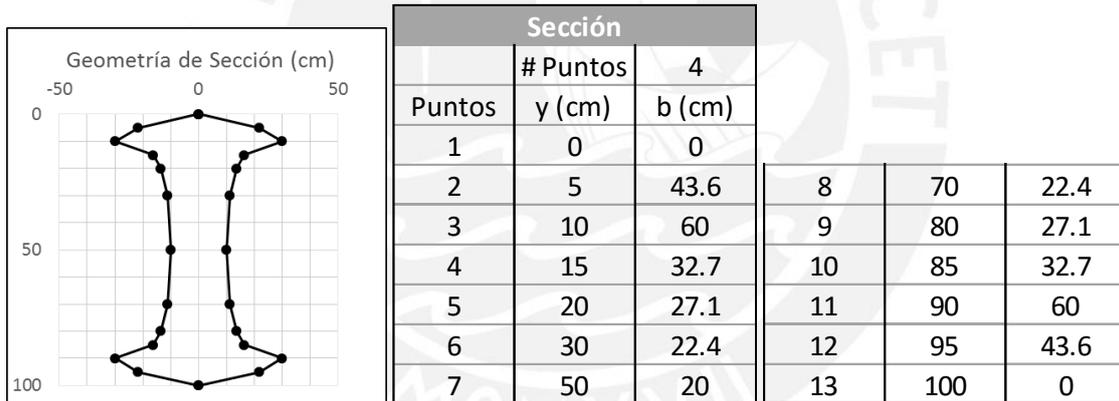
Figura 19 Formato de hoja de cálculo "Geometría"



(a)



(b)



(c)

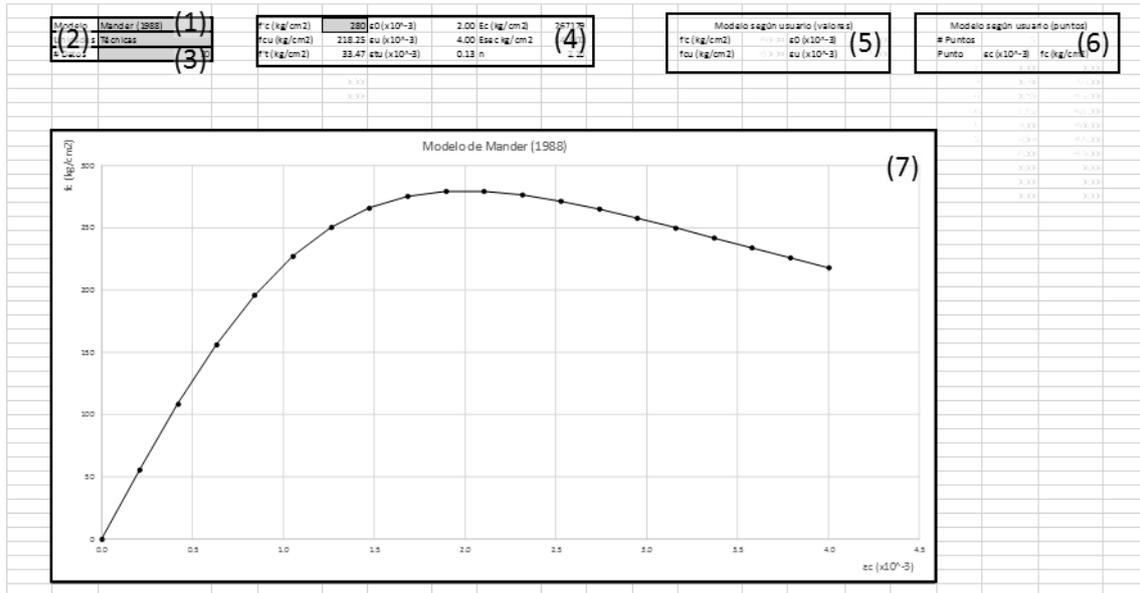
Figura 20 Ejemplo de geometrías ingresadas al programa
 (a) Sección T 30x80 cm con ala 120x20 cm, (b) Sección circular de diámetro 100 cm,
 (c) Sección circular hueca de radio interno 80 cm y radio externo 100 cm.

5.1.2 Ingreso de características de los materiales

El comportamiento de los materiales es definido completamente por las leyes constitutivas según lo descrito en la sección 4.2.4. Las leyes constitutivas consideradas en el análisis se ingresan mediante las hojas de cálculo “Concreto”, “Acero” y “Cable”.

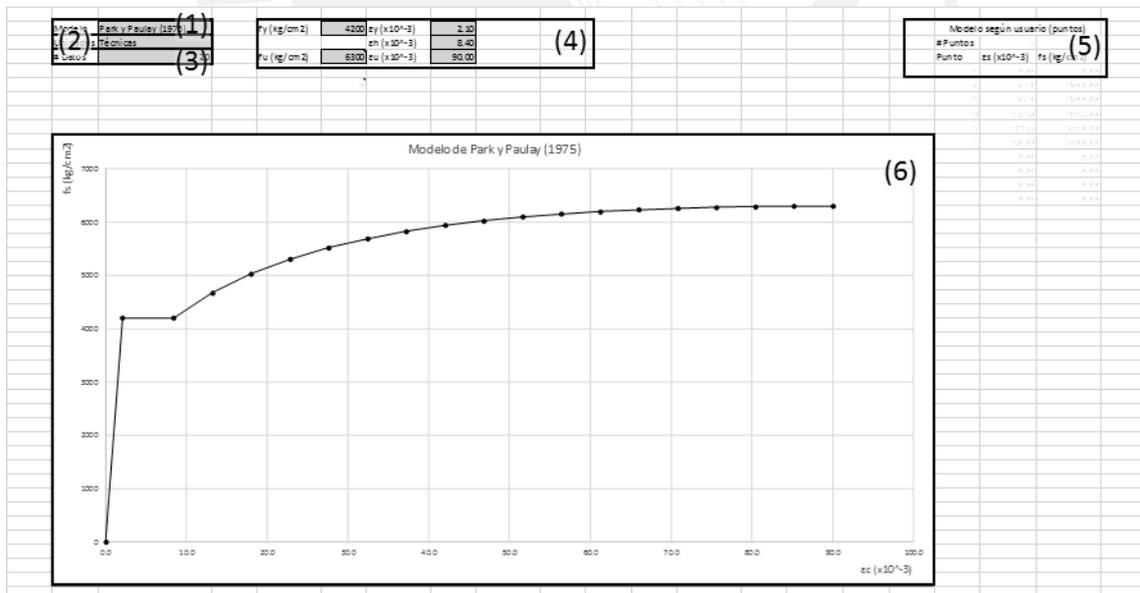
En la hoja de cálculo “Concreto” se define el comportamiento del concreto. Se pueden elegir los modelos predeterminados de Hognestad (1951), de Kent y Park (1971) y de Mander (1988), mediante un menú desplegable. También es posible el uso de un modelo genérico definido por el usuario, que consiste en una parábola invertida ascendente de segundo grado, seguida de una caída lineal. Finalmente, también es posible el ingreso de cualquier ley constitutiva del

concreto mediante la definición de puntos discretos de esfuerzo-deformación, a partir de los cuales el programa trabaja mediante su interpolación lineal.



- (1) Modelo de concreto utilizado
- (2) Unidades utilizadas
- (3) Número de puntos considerados
- (4) Datos de concreto de modelos predefinidos
- (5) Datos de concreto de modelo genérico
- (6) Puntos de modelo definido por usuario
- (7) Gráfica de modelo de concreto

Figura 21 Formato de hoja de cálculo "Concreto"



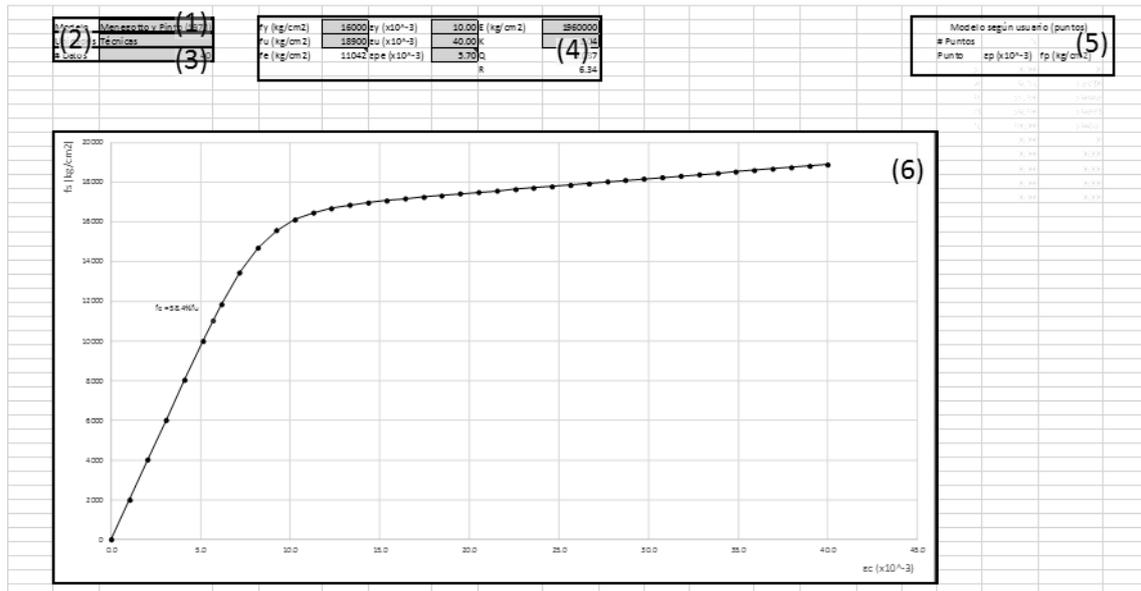
- (1) Modelo de acero utilizado
- (2) Unidades utilizadas
- (3) Número de puntos considerados
- (4) Datos de acero de refuerzo
- (5) Puntos de modelo definido por usuario
- (6) Gráfica de modelo de acero de refuerzo

Figura 22 Formato de hoja de cálculo "Acero"

En la hoja de cálculo "Acero" se define el comportamiento del acero de refuerzo convencional. La hoja tiene el modelo de Park y Paulay (1975) de manera predeterminada. También se puede trabajar con un modelo genérico trilineal, en donde el usuario indica el punto de fluencia, el

punto de endurecimiento, el punto de agotamiento, y el grado de la parábola de endurecimiento. Es posible también ingresar cualquier modelo mediante el uso de puntos discretos de esfuerzo-deformación.

En la hoja de cálculo "Cable" se define el comportamiento del cable de preesfuerzo. La hoja permite seleccionar mediante un menú desplegable el modelo de Menegotto y Pinto (1973) que se encuentra de manera predeterminada. También es posible el ingreso de cualquier otro modelo mediante el ingreso de valores discretos de esfuerzo-deformación, a partir de los cuales el programa define la ley constitutiva a utilizar mediante interpolación lineal.



- (1) Modelo de cable utilizado
- (2) Unidades utilizadas
- (3) Número de puntos considerados
- (4) Datos de cable de preesfuerzo
- (5) Puntos de modelo definido por usuario
- (6) Gráfica de modelo de cable de preesfuerzo

Figura 23 Formato de hoja de cálculo "Cable"

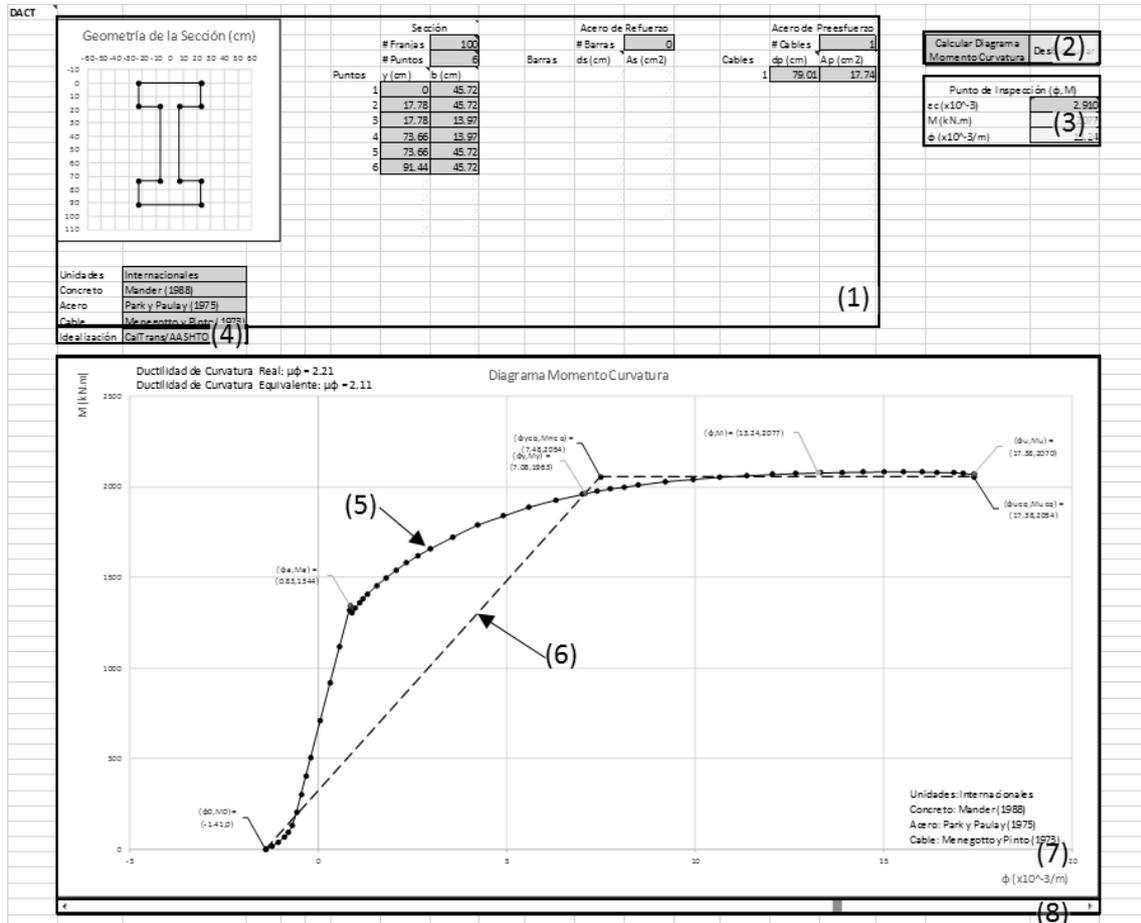
El número de datos que define las leyes constitutivas ingresadas es definido por el usuario. En el caso del ingreso manual de modelos mediante puntos, el número de valores aceptados según el formato es de diez, pero realmente no existe un límite de datos que pueda manejar el programa.

5.1.3 Diagrama momento-curvatura calculado

El diagrama de momento-curvatura construido mediante el programa es presentado en la hoja "Geometría" en forma gráfica. Se presentan en dicho diagrama los puntos críticos de agrietamiento del concreto, de fluencia, el punto inicial y el punto de agotamiento de la sección. Se indica también si la sección presenta falla por trituración del concreto comprimido o por rotura del refuerzo. Las unidades utilizadas son las del sistema internacional de unidades, pero de manera alternativa se puede trabajar con el sistema técnico, que es utilizado ampliamente en el Perú.

Junto con el diagrama momento-curvatura se presenta también su idealización bilineal de acuerdo al modelo de Priestley o el utilizado por el AASHTO y Caltrans, según se seleccione en un menú desplegable.

Finalmente, se tiene la opción de inspeccionar un punto cualquiera en el diagrama en función de la deformación de la fibra externa del concreto. Las características del punto en inspección se obtienen mediante la interpolación lineal de los puntos que conforman el diagrama. La deformación del concreto del punto inspeccionado puede ingresarse de manera numérica o mediante una barra deslizante ubicada en la parte inferior del diagrama.



- (1) Área de datos de ingreso
- (2) Botón de ejecución de programa
- (3) Punto de inspección esfuerzo-deformación
- (4) Modelo bilineal utilizado
- (5) Diagrama momento-curvatura
- (6) Diagrama idealizado bilineal
- (7) Área de gráfica de resultados
- (8) Barra de selección de punto de inspección

Figura 24 Formato de hoja de salida de resultados y sus componentes

5.2 Validación de resultados

Se presentan en las secciones 5.2.1 y 5.2.2 algunos casos estudiados en la validación de los resultados obtenidos por el programa desarrollado. La validación del programa se realiza mediante la comparación de sus resultados contra los diagramas momento-curvatura de varias fuentes confiables.

Se utilizaron en la comparación diagramas construidos con el módulo Section Designer incluido en el programa comercial SAP2000 V16.0.0 de la empresa Computer and Structures, además de diagramas construidos analíticamente por diversos autores.

Se realizó además la comparación de dos diagramas experimentales obtenidos por Cattaneo et al. en 2011, y el diagrama de la sección ensayada construido analíticamente con el programa desarrollado.

5.2.1 Comparación de resultados obtenidos contra valores analíticos

5.2.1.a Sección rectangular de concreto armado con cuantía intermedia

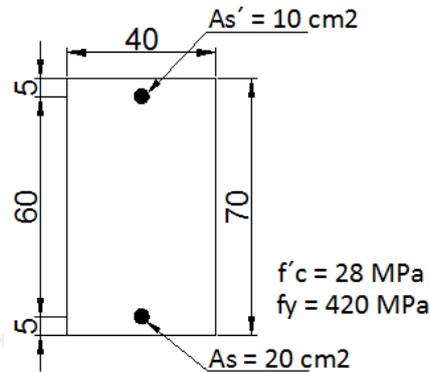


Figura 25 Sección rectangular 40x70 cm, $A_s' = 10 \text{ cm}^2$, $A_s = 20 \text{ cm}^2$

Se analiza una sección rectangular de concreto armado con cuantía intermedia de acero de refuerzo en tracción, cuya geometría y características se presentan en la Figura 25. Se considera en el análisis el modelo de concreto de Mander (Figura 26), y el modelo de acero de Park y Paulay (Figura 27).

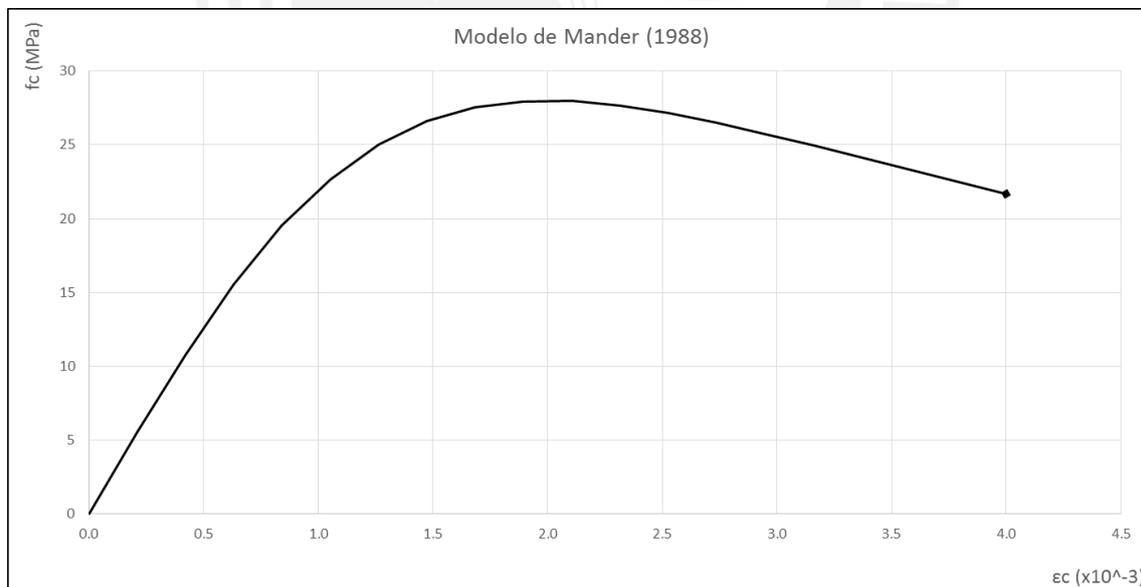


Figura 26 Modelo de Mander para concreto con $f'_c = 28 \text{ MPa}$

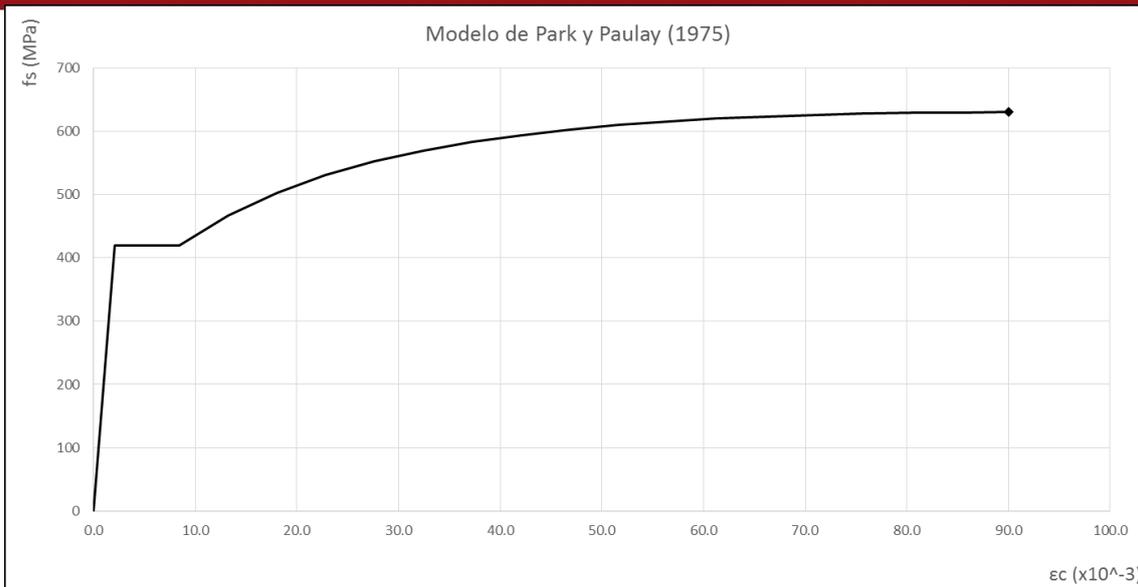


Figura 27 Modelo de Park y Paulay para acero con $f_y = 420$ MPa

El diagrama momento-curvatura construido ha sido comparado con el hallado por el módulo Section Designer, obteniéndose un buen ajuste entre ambos casos como se muestra en la Figura 28.

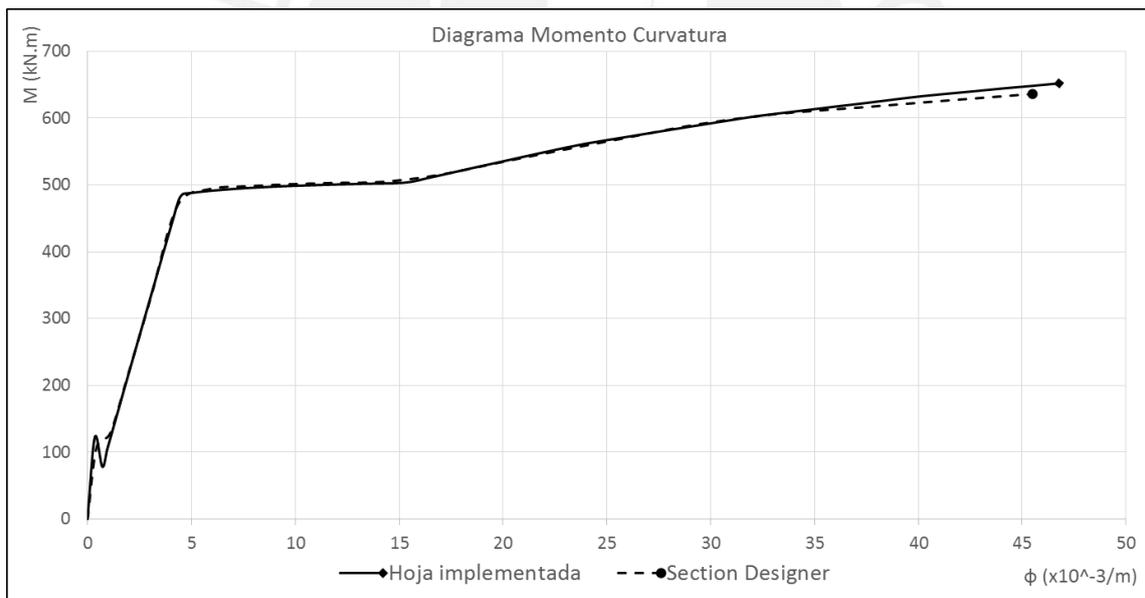


Figura 28 Validación de diagrama momento-curvatura de viga 40x70 cm con cuantía intermedia

5.2.1.b Sección rectangular de concreto armado con cuantía baja

Se analiza una sección rectangular de concreto armado sin preesfuerzo, con cuantía de acero de refuerzo en tracción cercana al mínimo reglamentario de acuerdo al RNE E.060. La geometría y características de la sección en estudio se presentan en la Figura 29. El resultado ha sido comparado con el generado por el módulo Section Designer, obteniéndose un buen ajuste entre ambos casos como se muestra en la Figura 30.

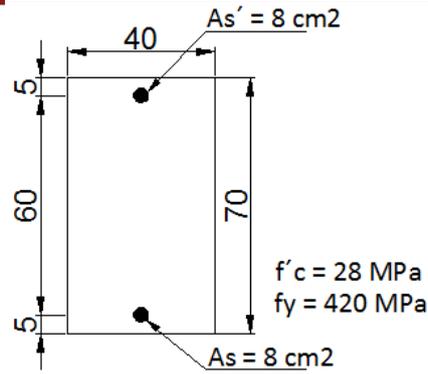


Figura 29 Sección rectangular 40x70 cm, $A_s' = 8 \text{ cm}^2$, $A_s = 8 \text{ cm}^2$

Se considera en el análisis el modelo de concreto de Mander (Figura 26), y el modelo de acero de Park y Paulay (Figura 27).

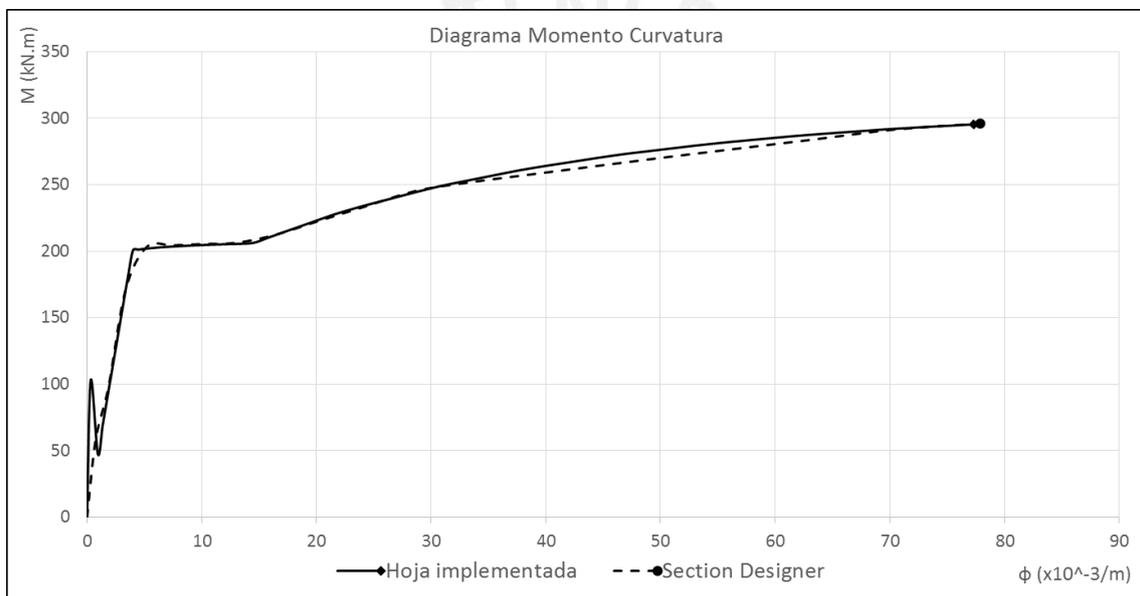


Figura 30 Validación de diagrama momento-curvatura de viga 40x70 cm con cuantía baja

5.2.1.c Sección rectangular de concreto armado con cuantía alta

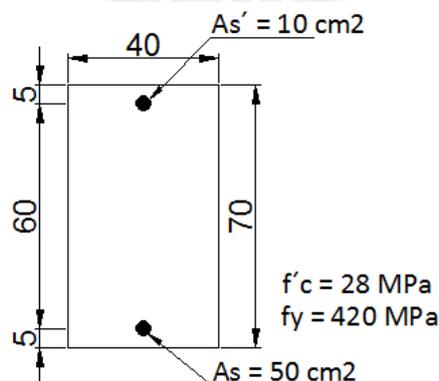


Figura 31 Sección rectangular 40x70 cm, $A_s' = 10 \text{ cm}^2$, $A_s = 50 \text{ cm}^2$

Se analiza una sección rectangular de concreto armado sin preesfuerzo, con cuantía de acero de refuerzo en tracción cercana al máximo reglamentario de acuerdo al RNE E.060. Su geometría y características se presentan en la Figura 31. El resultado ha sido comparado con el

generado por el módulo Section Designer, obteniéndose un buen ajuste entre ambos como se muestra en la Figura 32.

Se considera en el análisis el modelo de concreto de Mander (Fig. 26), y el modelo de acero de Park y Paulay (Fig. 27).

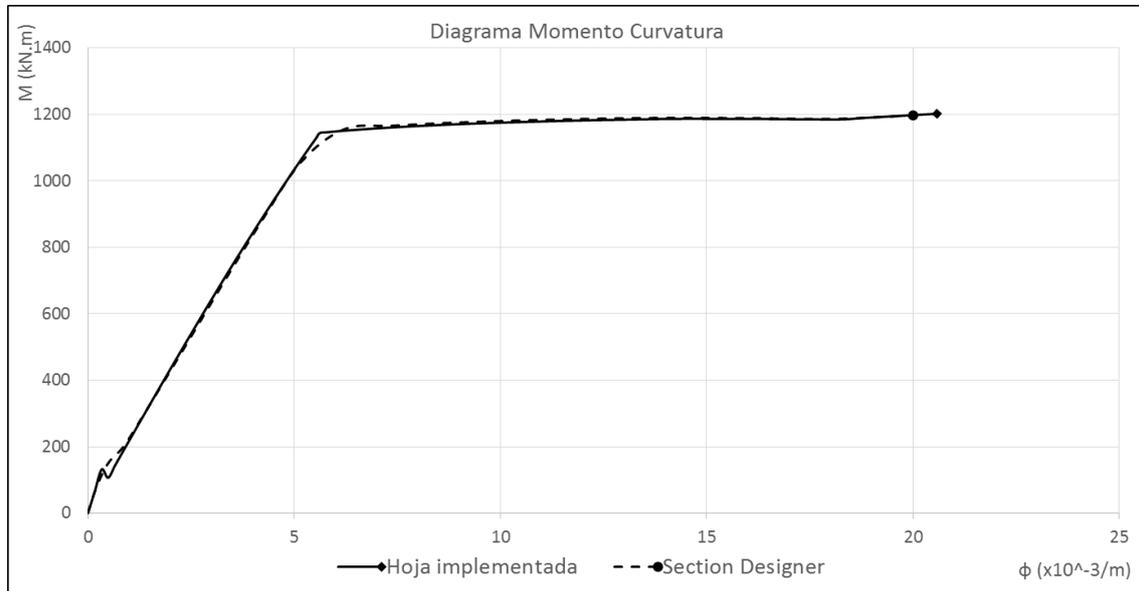


Figura 32 Validación de diagrama momento-curvatura de viga 40x70 cm con cuantía alta

Para los tres casos analizados mediante el programa desarrollado se aprecia una marcada caída de resistencia en el momento del agrietamiento, la cual difiere con los diagramas determinados por el módulo Section Designer. Esto se debe a que el algoritmo desarrollado determina valores controlando las deformaciones, mientras que el módulo Section Designer determina valores controlando las fuerzas.

5.2.1.d Sección T de concreto armado con cuantía intermedia

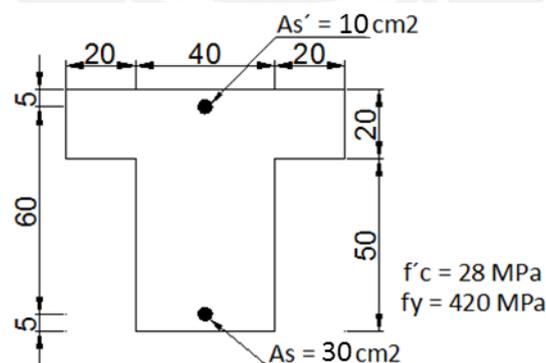


Figura 33 Sección T 40x70+80x20 cm, $A_s' = 10 \text{ cm}^2$, $A_s = 30 \text{ cm}^2$

Se analiza una sección T de concreto armado sin preesfuerzo, con cuantía de refuerzo en tracción intermedia, y cuya geometría y características se presentan en la Figura 33. El resultado ha sido comparado con el generado por el módulo Section Designer, obteniéndose un buen ajuste entre ambos como se muestra en la Figura 34.

Se considera en el análisis el modelo de concreto de Mander (Fig. 26), y el modelo de acero de Park y Paulay (Fig. 27).

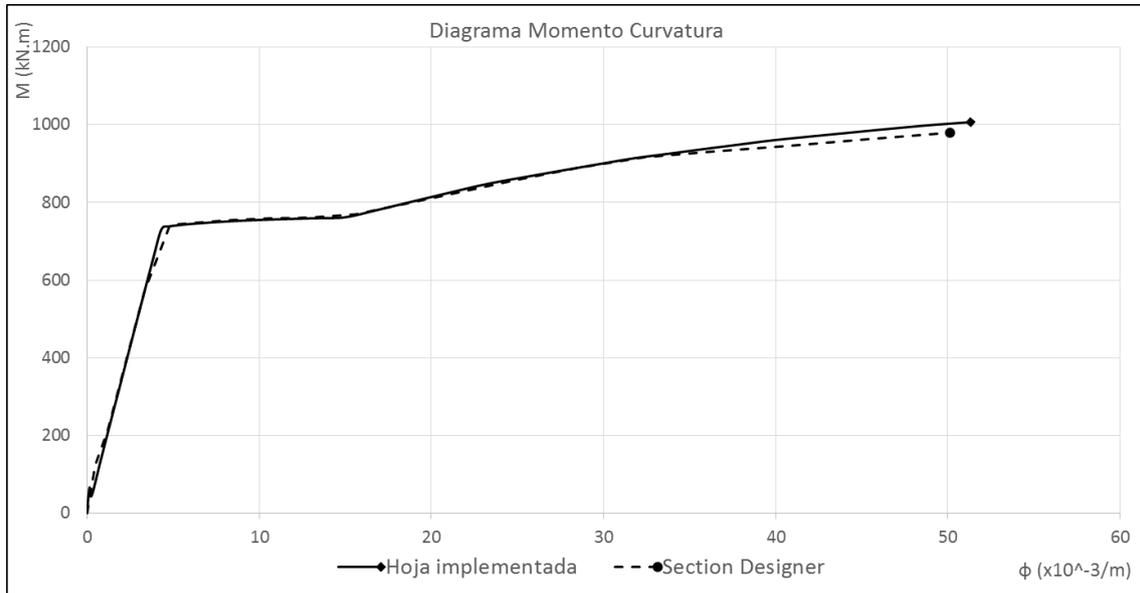


Figura 34 Validación de diagrama momento-curvatura de viga 40x70+80x20 cm con cuantía intermedia

5.2.1.e Sección I de concreto preesforzado analizada por T.Y. Lin

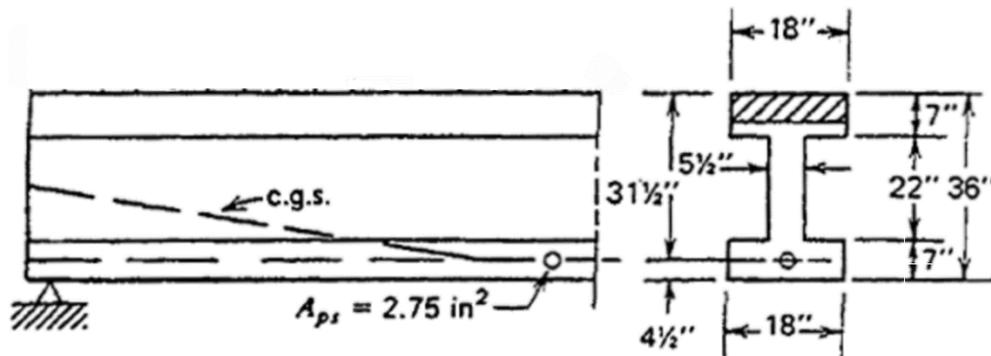
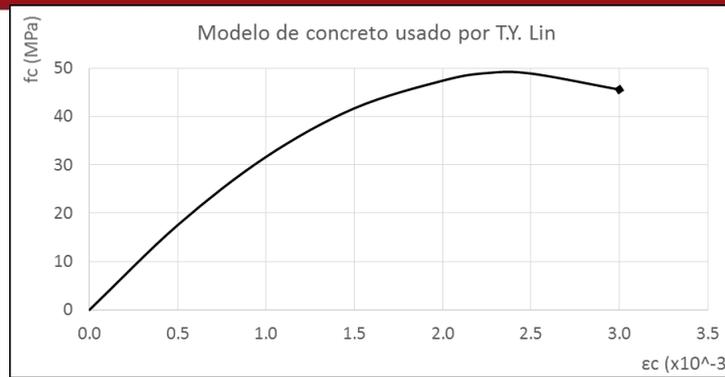


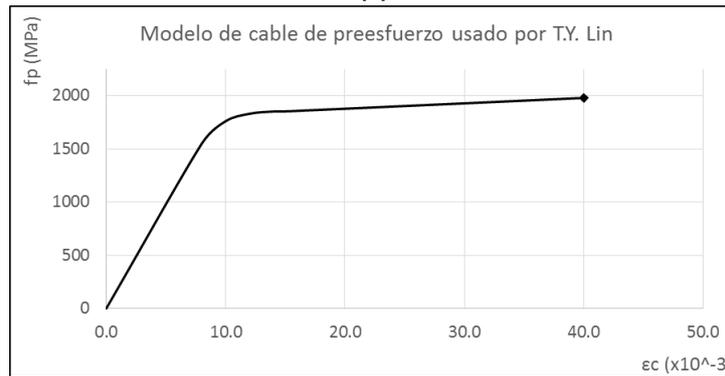
Figura 35 Sección I preesforzada estudiada por T.Y. Lin [22]

Se analiza una sección I de concreto preesforzado previamente estudiada por T.Y. Lin en 1981 [22]. Las dimensiones y características de la sección en análisis se muestran en la Figura 35. El cable de preesfuerzo, ubicado a 11.43 cm del borde inferior tiene un área de 17.74 cm². La resistencia característica del concreto es $f'_c = 49$ MPa (490 kg/cm²), y la sección tiene como dimensiones 91.44 cm de peralte, 13.97 cm de espesor de alma, 45.72 cm de ancho de alas, y 17.78 cm de espesor de alas.

Los modelos de comportamiento de concreto y de cable de preesfuerzo adoptados por T.Y. Lin en sus análisis son los presentados en la Figura 36. Para obtener resultados coherentes se utilizan modelos similares en el análisis realizado con la hoja de cálculo desarrollada.



(a)



(b)

Figura 36 Modelos de materiales utilizados por T.Y. Lin

(a) Concreto con $f'c = 49$ MPa, (b) Cable de preesfuerzo con $fpu = 1975$ MPa

Para el caso del concreto se utiliza el modelo propuesto por Mander para un esfuerzo máximo $f'c = 49$ MPa (490 kg/cm^2) asociado a la deformación $\epsilon_{c0} = 0.00248$, y con deformación de agotamiento $\epsilon_{cu} = 0.003$.

Para el cable de preesfuerzo se utiliza el mismo modelo indicado por T.Y. Lin en su análisis, que es ingresado en la hoja de cálculo mediante los puntos de esfuerzo-deformación indicados en la Tabla 3.

Modelo de cable T.Y. Lin		
# Puntos	7	
Punto	$\epsilon_p (x10^{-3})$	f_p (MPa)
1	0	0
2	8	1547
3	10	1757
4	12	1827
5	14	1848
6	15.2	1850
7	40	1975

Tabla 3 Modelo esfuerzo-deformación de cable de preesfuerzo utilizado por T.Y. Lin

La curva de esfuerzo-deformación construida mediante la hoja de cálculo implementada presenta un buen ajuste con respecto a la curva construida de manera analítica por T.Y. Lin. Existe una variación entre ambas curvas en la zona inicial, ya que la hoja implementada

considera el efecto del agrietamiento durante la etapa de curvatura negativa, mientras que T.Y. Lin supone en sus cálculos que la sección se encuentra en el rango elástico.

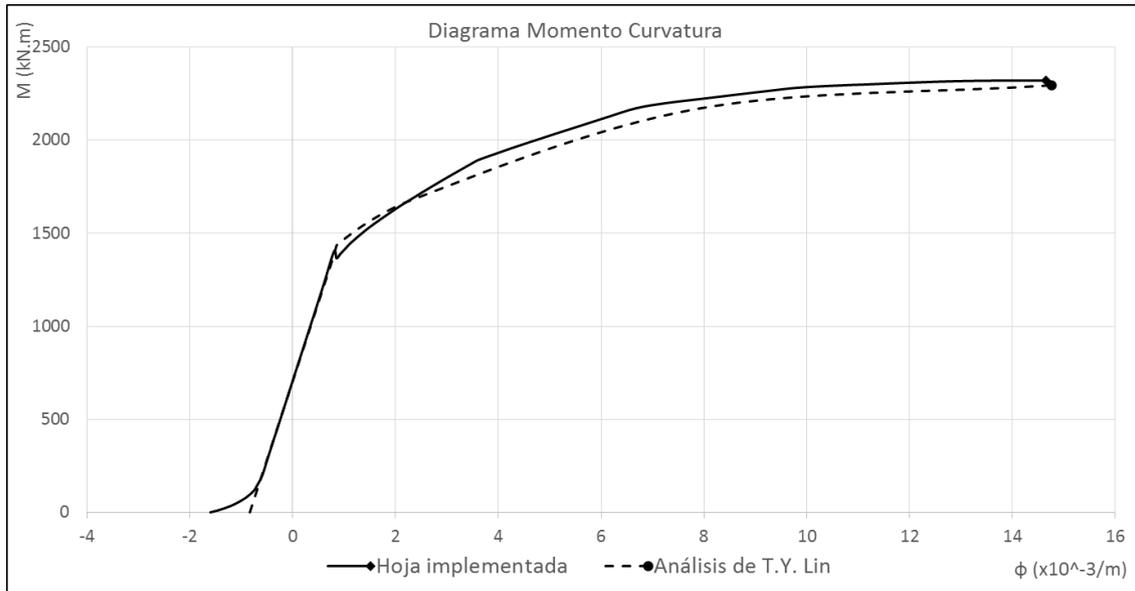


Figura 37 Comparación de diagrama momento-curvatura de la sección I estudiada por T.Y. Lin con el construido con el programa desarrollado

5.2.1.f Secciones rectangulares de concreto preesforzado analizadas por Saqan y Rasheed

Se analizan tres casos estudiados por Saqan y Rasheed en 2010 [24]. El estudio se realizó en tres secciones similares cuya geometría y arreglo se presentan en la Figura 38. Los casos estudiados se resumen en la Tabla 4, y tienen resistencias características de concreto y áreas de cable de preesfuerzo diferentes.

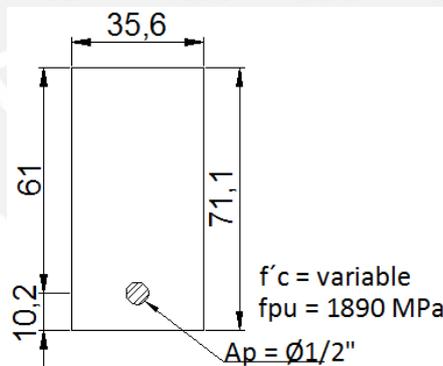


Figura 38 Características de sección analizada por Saqan y Rasheed [24]

Casos estudiados por Saqan y Rasheed				
Sección	f'c (MPa)	fcr (Mpa)	Refuerzo	Ap (cm2)
a	28	3.32	5φ1/2"	4.94
b	35	3.71	8φ1/2"	7.90
c	42	4.07	12φ1/2"	11.85

Tabla 4 Características de casos estudiados por Saqan y Rasheed

Se consideran en el análisis el modelo de concreto de Hognestad (Fig. 39a), y el modelo de cable de preesfuerzo del manual del Instituto del Concreto Prefabricado/Preesforzado (PCI) (Fig. 39b), de manera similar que los estudios de Saqan y Rasheed. Ya que el modelo propuesto

por el PCI no se encuentra implementado por defecto en la hoja de cálculo, este se ingresa mediante los puntos discretos de esfuerzo-deformación presentados en la Tabla 5.

En el modelo de concreto utilizado según Hognestad, el esfuerzo máximo del concreto se toma como $f''c$ igual al 85% de $f'c$.

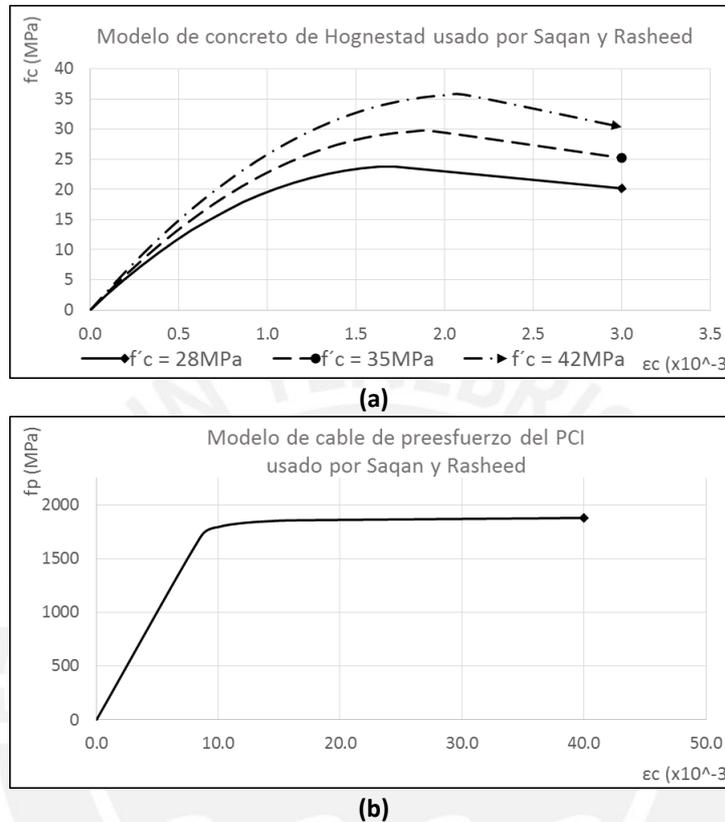


Figura 39 Modelos de materiales utilizados por Saqan y Rasheed
(a) Concreto con $f'c = 28, 35$ y 42 MPa; (b) Cable de preesfuerzo con $f_{pu} = 1890$ MPa

Modelo de cable Saqan y Rasheed		
# Puntos	7	
Punto	ϵ_p ($\times 10^{-3}$)	f_p (MPa)
1	0	0
2	8.6	1716
3	10	1797
4	12	1834
5	14	1850
6	16	1859
7	40	1882

Tabla 5 Modelo esfuerzo-deformación de cable de preesfuerzo propuesto por el PCI

Las curvas de esfuerzo-deformación construidas mediante la hoja de cálculo presentan un ajuste razonable con los resultados obtenidos en el estudio analítico de Saqan y Rasheed. Existe una diferencia apreciable en la parte inicial, debido a que en análisis realizado por Saqan y Rasheed supone que la sección se comporta de manera elástica en esta zona. La diferencia es más marcada cuando el agrietamiento inicial genera una pérdida de rigidez importante, como

lo presenta el comportamiento de la sección c, que tiene la mayor cantidad de preesfuerzo (Fig. 42).

Por otro lado, los análisis de Saqan y Rasheed indican que las secciones cuentan con mayor curvatura de agotamiento que la determinada mediante el uso de la hoja de cálculo. Sin embargo, la diferencia es pequeña, de aproximadamente 5% a 10% de la curvatura de agotamiento. Mediante cálculos manuales se ha verificado que las curvaturas de agotamiento obtenidas utilizando la hoja de cálculo son correctas bajo las hipótesis con las que esta trabaja.

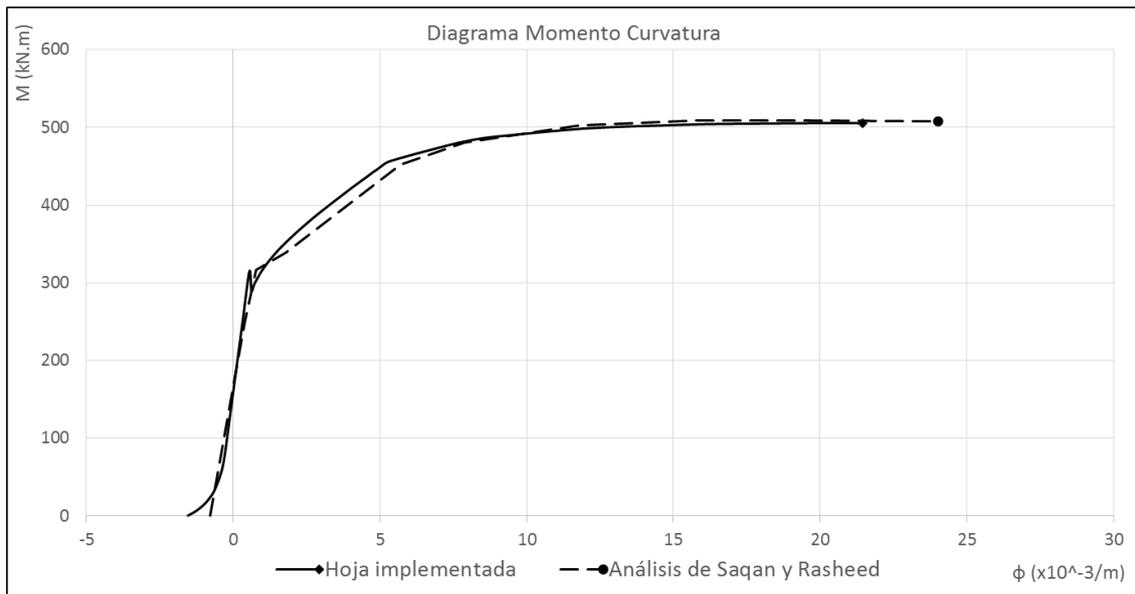


Figura 40 Comparación de diagrama momento-curvatura de la sección preesforzada estudiada por Saqan y Rasheed con el construido con el programa desarrollado para la sección a ($f'c = 28 \text{ MPa}$, $A_p = 5\phi 1/2''$)

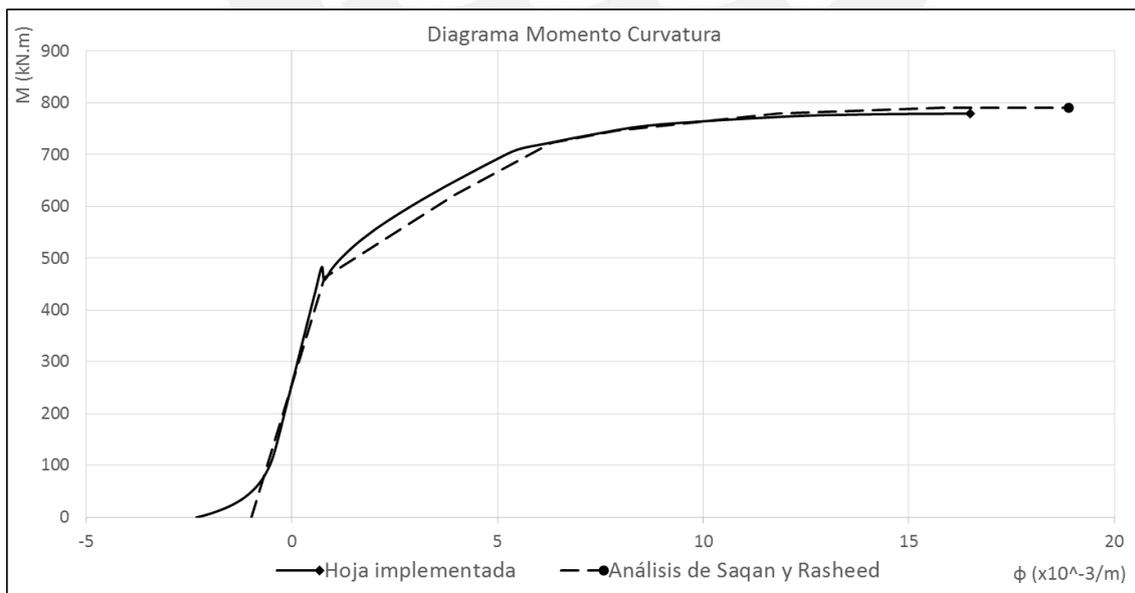


Figura 41 Comparación de diagrama momento-curvatura de la sección preesforzada estudiada por Saqan y Rasheed con el construido con el programa desarrollado para la sección b ($f'c = 35 \text{ MPa}$, $A_p = 8\phi 1/2''$)

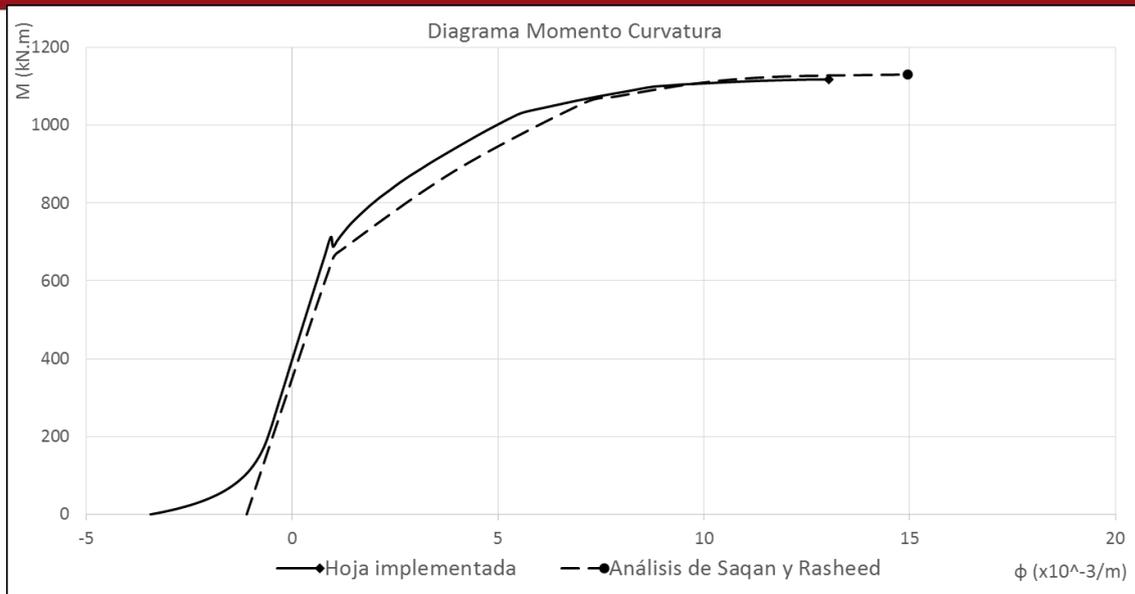


Figura 42 Comparación de diagrama momento-curvatura de la sección preesforzada estudiada por Saqan y Rasheed con el construido con el programa desarrollado para la sección c ($f'c = 42 \text{ MPa}$, $A_p = 12\phi 1/2''$)

5.2.2 Comparación de resultados obtenidos contra valores experimentales

Se analiza la sección cuadrada de concreto armado presentada en la Figura 43. La sección corresponde a dos vigas idénticas, RC1 y RC2, ensayadas por Cattaneo et al. en 2011 [25]. Los especímenes fueron sometidos a flexión generada por dos cargas aplicadas a los tercios hasta alcanzar el agotamiento.

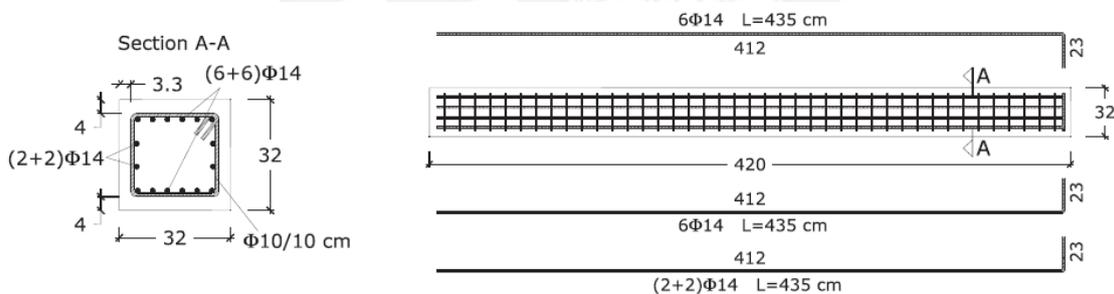


Figura 43 Sección cuadrada 32x32 cm ensayada por Cattaneo et al. [25]

Para el análisis mediante la hoja de cálculo se utiliza el modelo de Mander para el concreto de $f'c = 51 \text{ MPa}$. Se utiliza el modelo de Park y Paulay para el acero de refuerzo, cuyas características son: $f_y = 537 \text{ MPa}$, $\epsilon_{sy} = 0.00278$, $f_{su} = 640 \text{ MPa}$, y $\epsilon_{su} = 0.30$.

Se aprecia en la Figura 44 la comparación entre los resultados teóricos según la hoja de cálculo implementada y los resultados experimentales según los ensayos realizados por Cattaneo et al. El diagrama teórico construido con la hoja de cálculo presenta una coherencia razonable con los resultados observados en ambos ensayos.

Existe una diferencia visible entre la capacidad de las dos vigas ensayadas por Cattaneo et al. pese a que los especímenes son idénticos, y puede atribuirse a la incertidumbre propia de los ensayos. La muestra de dos ensayos estudiada es pequeña y permite tener una idea del

comportamiento de la sección en análisis, pero no permite llegar a conclusiones estadísticamente significativas.

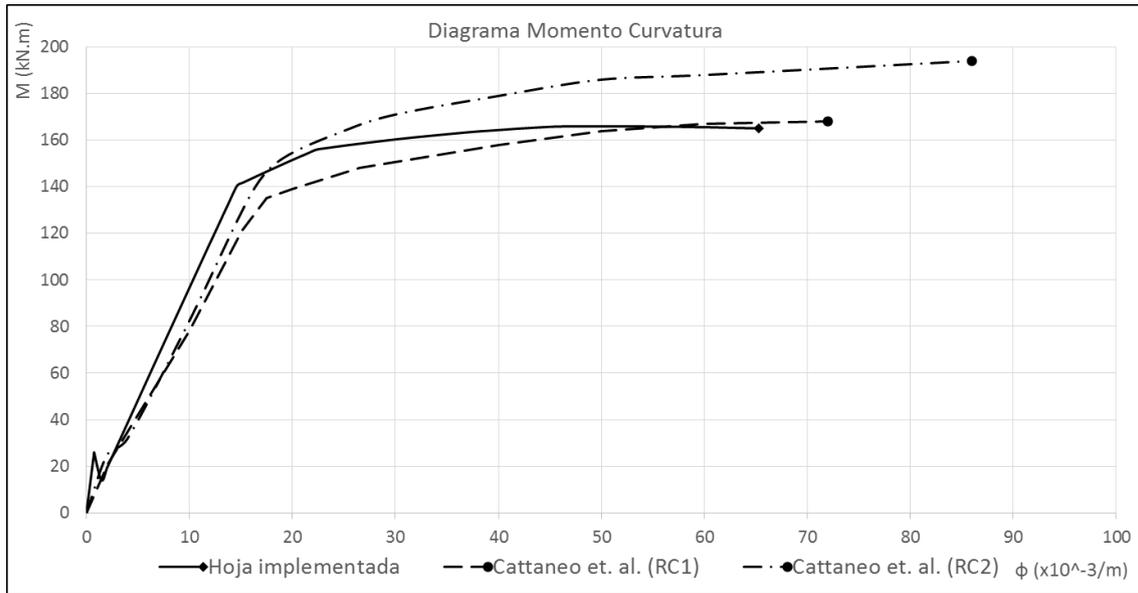


Figura 44 Comparación de diagramas momento-curvatura de los especímenes RC1 y RC2 ensayados por Cattaneo et al. con el construido con el programa desarrollado



6 ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE SECCIONES DE CONCRETO ARMADO Y CONCRETO PREESFORZADO ANTE CARGA MONOTÓNICA

En el presente capítulo se realiza el análisis de diversas secciones de concreto armado y concreto preesforzado sometidas a cargas monotónicas de flexión, y se estudia la influencia de diversos parámetros en su comportamiento. Para el análisis de las secciones estudiadas se utiliza el programa desarrollado, que ha sido presentado en los capítulos 4 y 5 de la presente tesis.

6.1 Elección de características de secciones a analizar

El análisis se realiza en torno a secciones de vigas convencionales y preesforzadas, cuyas características se eligen en base a diversos proyectos de estructuras de la ciudad de Lima.

Se utiliza una base de datos de 22 edificaciones de concreto armado y concreto preesforzado ubicadas en los distritos de Miraflores, San Isidro, Surco, Barranco y Magdalena. La información fue provista por dos de las principales oficinas de diseño estructural del Perú (ABBINGS Ingenieros y GCAQ Ingenieros), y por una empresa internacional especialista en proyectos en concreto preesforzado (CCL International).

Nombre Clave	Proyectista	Distrito	Número de Pisos	Luz Libre Típica	(bxh)	Sistema
Pardo y Aliaga	ABB	San Isidro	13	7.65	(50x70)	RC
Pardo y Aliaga	ABB	San Isidro	13	12.5	(150x50)	PT
Begonias	ABB	San Isidro	10	7.5	(40x70)	RC
Interseguros	ABB	San Isidro	33	6	(70x55)	RC
Interseguros	ABB	San Isidro	33	5.1	(40x80)	RC
Itálica	ABB	Miraflores	8	7.1	(30x70)	RC
Golf Los Incas	ABB	Surco	20	8.1	(40x70)	RC
La Paz	ABB	Miraflores	9	9.6	(40x75)	RC
CEM IV	ABB	Miraflores	11	9.05	(60x90)	RC
CEM IV	ABB	Miraflores	11	12.6	(200x45)	PT
Hilton	ABB	Miraflores	9	8.45	(50x75)	RC
Lima Central Tower	ABB	Surco	25	8.8	(220x47)	PT
Talbot	ABB	San Isidro	10	7.6	(50x60)	RC
UTEC	GCAQ	Barranco	10	9.8	(40x80)	RC
Miraflores	GCAQ	Miraflores	12	5.6	(30x75)	RC
ICCGSA	GCAQ	San Isidro	11	10	(40x70)	RC
Canaval y Moreyra	GCAQ	San Isidro	10	7	(40x55)	RC
Pershing	GCAQ	Magdalena	13	8.6	(40x80)	RC
Maurtua III	GCAQ	San Isidro	5	7.6	(40x55)	RC
Jacinto Lara	GCAQ	San Isidro	5	5.8	(30x60)	RC
Banco de la Nación	GCAQ	San Isidro	30	8.8	(60x80)	RC
Santa Cruz	CCL	Miraflores	7	14	(200x50)	PT
Va Belaunde	CCL	Miraflores	7	11.1	(200x35)	PT

Tabla 6 Características de edificaciones de concreto armado (RC) y preesforzado (PT) de referencia para el presente estudio

Lejos de ser un estudio estadístico detallado, el levantamiento de datos realizado busca brindar información referencial para la elección de las secciones estudiadas el presente capítulo. Las edificaciones se ubican en la ciudad de Lima, donde existe la mayor concentración de obras de concreto convencional y preesforzado, y en zonas donde los proyectos son formales. El resumen de las edificaciones consideradas y sus características se presentan en la Tabla 6.

En edificaciones de viviendas, oficinas y comercio las dimensiones de vigas de concreto armado quedan limitadas por lo requerido para cubrir luces libres usualmente de 6 a 8 m. El uso de elementos de concreto preesforzado busca reducir el peralte necesario, y permitir construir mayor cantidad de pisos dentro de los límites municipales de altura máxima. En estos casos las vigas son reemplazadas por bandas de concreto preesforzado, que tienen menor peralte y mayor ancho. En base a la información presentada en la Tabla 6 se opta por estudiar secciones de vigas de concreto armado de 40x70 cm y secciones de bandas de concreto preesforzado de 200x50 cm.

Las dos secciones típicas a estudiar y sus configuraciones se presentan en las Figuras 45a y 45b. Salvo indicado, se utilizan los modelos de Mander para el concreto, de Park y Paulay para el acero de refuerzo, y de Menegotto y Pinto para el cable de preesfuerzo. Las características típicas de los materiales se presentan en la Tabla 7, y serán las consideradas en los análisis salvo indicación contraria.

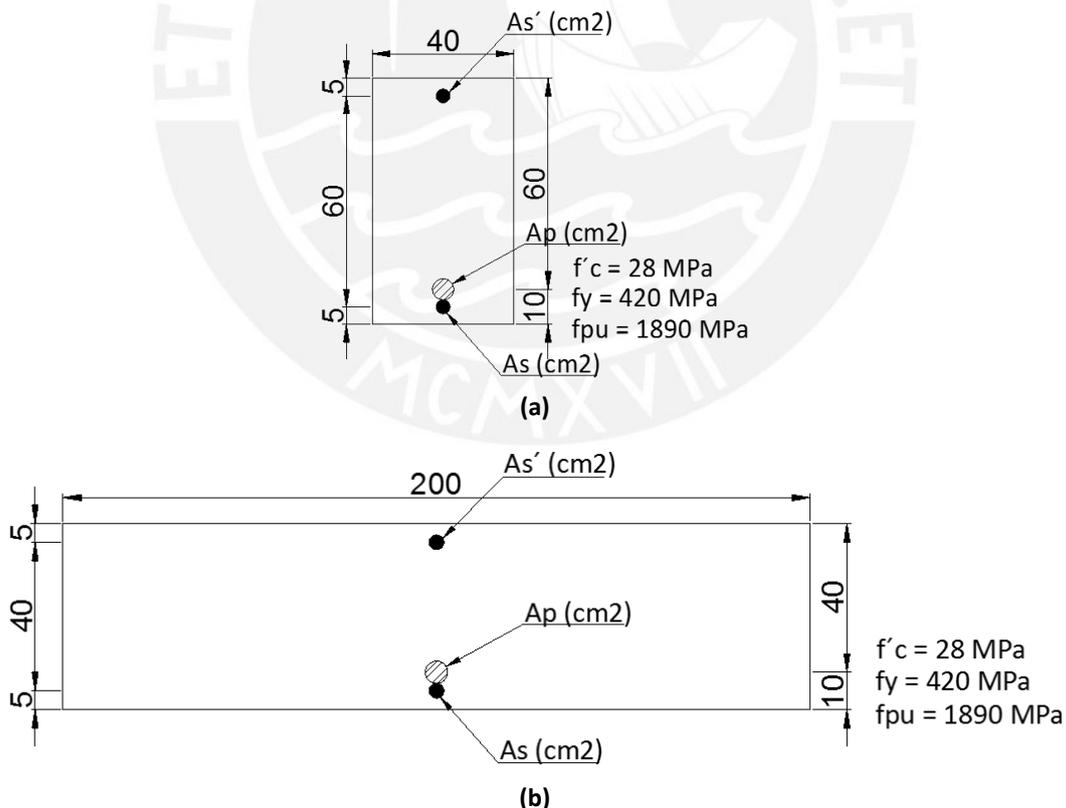


Figura 45 Secciones típicas de vigas consideradas en los análisis
(a) Sección A (40x70 cm), (b) Sección B (200x50 cm)

Concreto			
f'c, MPa	28	ecu, ‰	4
Acero			
fy, MPa	420	esy, ‰	2.1
		esh, ‰	8.4
fu, MPa	630	esu, ‰	90
Cable			
fpe, MPa	1104	epe, ‰	5.7
fpy, MPa	1600	epy, ‰	10
fpu, MPa	1890	epu, ‰	40

Tabla 7 Características típicas de los materiales consideradas en los análisis

6.2 Comportamiento de secciones de concreto armado convencional

6.2.1 Influencia del uso de diferentes leyes constitutivas de concreto

Se comparan diagramas momento-curvatura de la Sección A (Fig. 45a), considerando varios modelos de esfuerzo-deformación para el concreto. El refuerzo de la sección consiste en $A_s' = 5 \text{ cm}^2$ y $A_s = 25 \text{ cm}^2$.

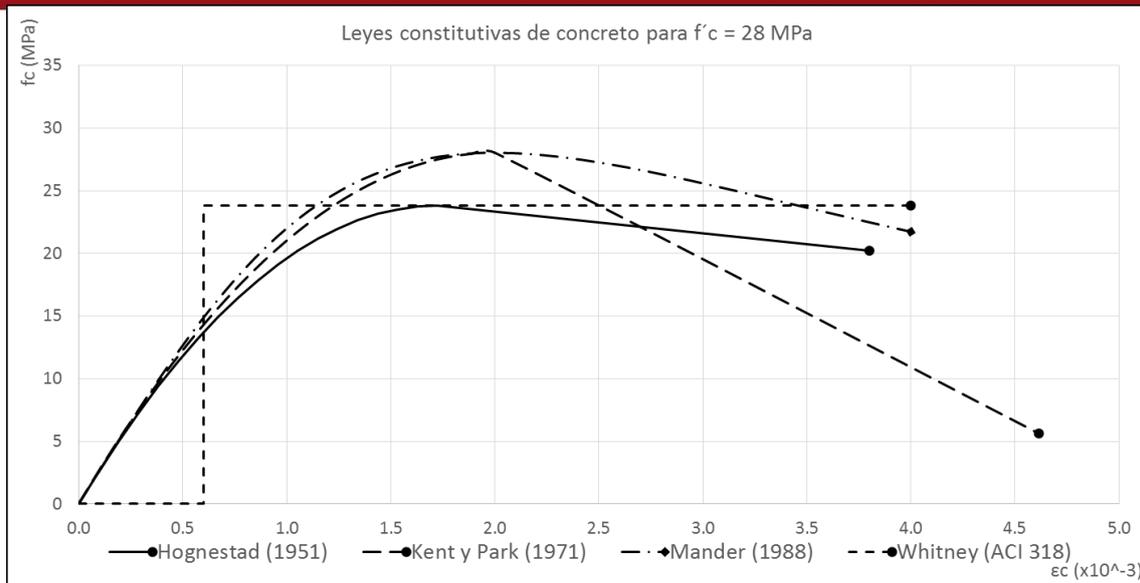
Se estudian los modelos de Hognestad, de Kent y Park, y de Mander, que están implementados por defecto en la hoja de cálculo. Adicionalmente, se comparan los resultados con los obtenidos de manera simplificada. Para ello asume el comportamiento del concreto como elástico lineal en la fluencia, y se utiliza el bloque equivalente de Whitney propuesto por el ACI 318 y adoptado por el RNE E.060 en el agotamiento.

Se supone una deformación última del concreto $ecu = 0.004$ para todos los modelos utilizados, de manera que los resultados sean comparables con los obtenidos con el uso de otros modelos.

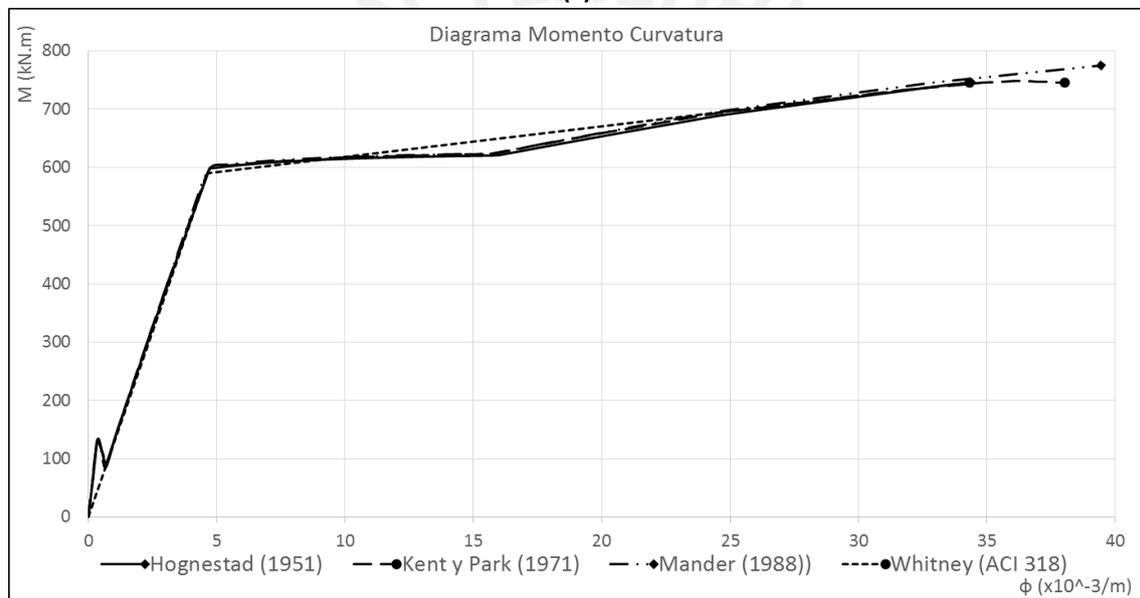
Se muestran en la Figura 46b las curvas construidas considerando diversos modelos de comportamiento del concreto presentados en la Figura 46a. Como se puede apreciar la variación en resultados es poco marcada, lo cual indica que para la sección estudiada la ley constitutiva de concreto que se considere tiene poca influencia.

Para vigas de concreto armado con cuantía de refuerzo menor a la balanceada, la profundidad del eje neutro es usualmente pequeña, especialmente cerca al agotamiento. En general el efecto de la forma de la curva esfuerzo-deformación del material es poco importante, ya que incide poco en la profundidad del eje neutro y en el brazo interno de palanca. Los resultados obtenidos en el caso estudiado son coherentes con lo esperado.

El modelo simplificado utilizando el bloque de Whitney presenta buen ajuste con análisis con modelos más complejos, pero pierde precisión en la zona cercana al endurecimiento del acero. Esto se debe a que el modelo bilineal simplificado no considera la existencia del escalón de fluencia en el acero, seguido del endurecimiento que no es lineal.



(a)



(b)

Figura 46 Influencia del modelo de concreto utilizado en el comportamiento estimado de una sección (a) Leyes constitutivas utilizadas, (b) Diagramas momento-curvatura construidos con diferentes modelos

6.2.2 Influencia de la cuantía de acero en tracción

Se estudia la influencia de la cuantía de acero en tracción, para lo cual se analiza la Sección A (Fig. 45a), considerando un refuerzo en tracción A_s variable, y $A_s' = 10$ cm².

El área de acero en tracción varía desde 10 cm² (10% A_{sb}) hasta 100 cm² (A_{sb}). A_{sb} es el área de acero balanceado para la sección estudiada, en donde el acero alcanza la fluencia al mismo tiempo que el concreto alcanza el agotamiento, considerando el efecto del acero en compresión.

Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 47, que muestra la influencia de la cuantía en tracción sobre la resistencia nominal en flexión y la ductilidad de la sección.

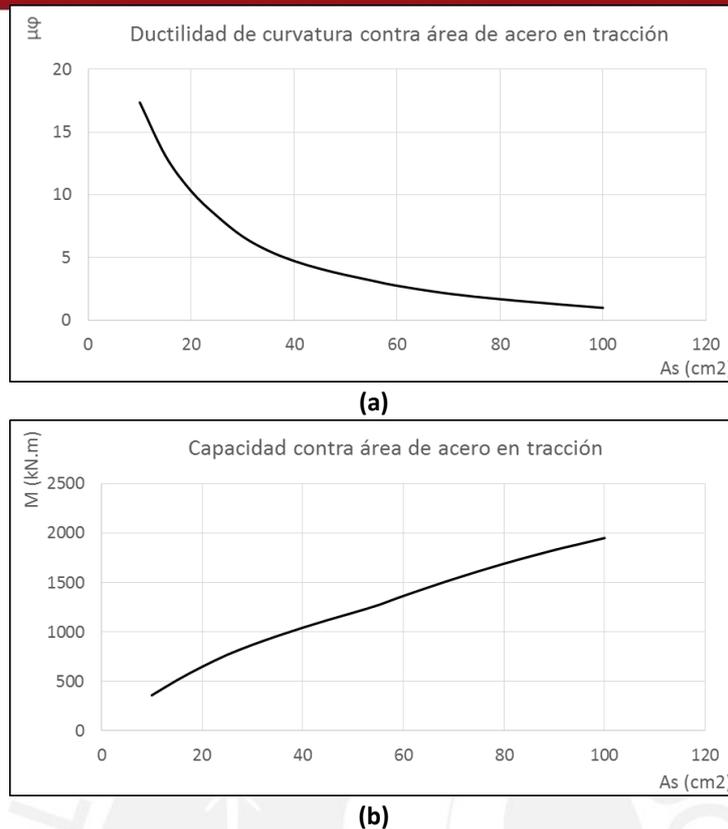


Figura 47 Variación del comportamiento de una sección con variación en el acero en tracción
 (a) Variación en ductilidad, (b) Variación en capacidad

La ductilidad de curvatura de la sección estudiada presenta una fuerte correlación con la cantidad de acero en tracción, donde el incremento del refuerzo genera una disminución en la ductilidad (Figura 47a). Este comportamiento es natural, ya que mayor área de acero implica una mayor cantidad de concreto en compresión que satisfaga el equilibrio interno, y por lo tanto mayor profundidad del eje neutro.

Por otro lado, existe una relación directa entre la capacidad nominal a flexión y el área de acero (Figura 47b), que no es perfectamente lineal debido a la disminución progresiva del brazo interno de palanca y al efecto del endurecimiento del acero. Se aprecia un punto de cambio de pendiente en la curva para un área aproximada de 60 cm^2 , a partir de la cual el acero no alcanza el endurecimiento antes del agotamiento.

6.2.3 Influencia de la cuantía de acero en compresión

Se estudia la influencia de la cuantía de acero en compresión, para lo cual se analiza la Sección A (Fig. 45a), considerando un refuerzo en compresión A_s' variable, y $A_s = 25 \text{ cm}^2$.

Se estudia la variación en el área de acero en compresión, desde el caso sin acero en compresión ($A_s' = 0 \text{ cm}^2$) hasta el caso donde el área de acero en compresión es igual al área de acero en tracción ($A_s' = 25 \text{ cm}^2$).

Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 48, que muestra la influencia de la cuantía en compresión sobre la ductilidad de la sección.

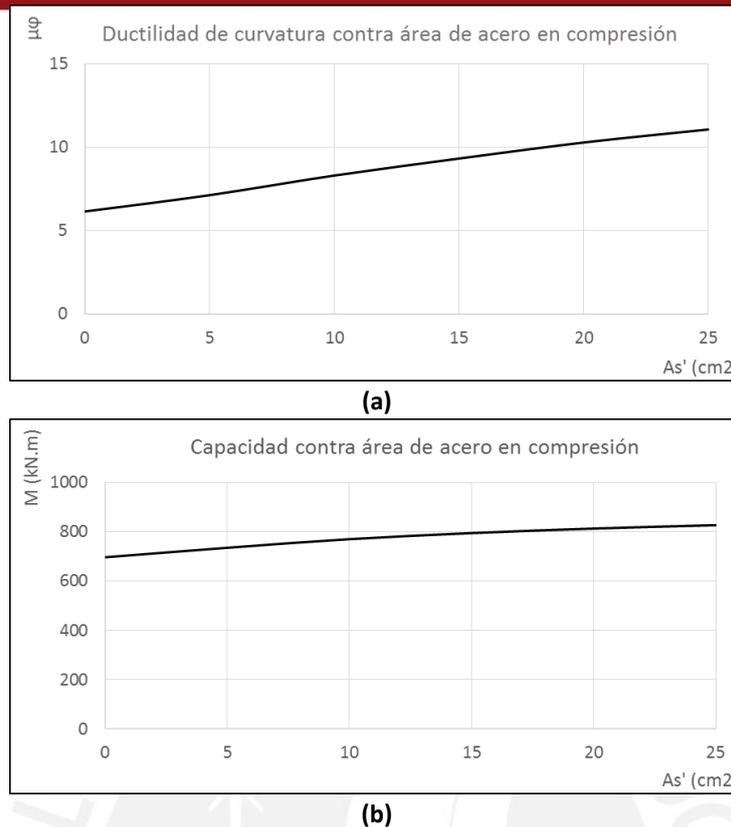


Figura 48 Variación del comportamiento de una sección con variación en el acero en compresión
(a) Variación en ductilidad, (b) Variación en capacidad

Se observa en los resultados obtenidos que mayor área de acero en compresión incrementa la ductilidad del elemento (Fig. 48a). Esto se debe a que el área de acero en la zona comprimida disminuye la profundidad del eje neutro necesaria para satisfacer el equilibrio interno, y por lo tanto incrementa la curvatura. Por otro lado, se aprecia también un ligero incremento en la capacidad nominal a flexión (Fig. 48b), debido al incremento del brazo de palanca interno que acompaña la disminución del área de concreto en compresión.

6.2.4 Influencia del ancho de la sección

Se estudia la influencia de la resistencia del concreto, para lo cual se analiza la Sección A (Fig. 45a), pero con ancho variable desde $b_w = 40$ cm hasta $b_w = 120$ cm. El refuerzo de la sección consiste en $As = 25$ cm^2 y $As' = 10$ cm^2 .

Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 49, que muestra la influencia del ancho de la sección de concreto sobre la ductilidad de la sección.

Para mayor ancho de sección incrementa marcadamente la ductilidad de curvatura (Fig. 49a), mientras que la capacidad nominal tiene solamente un ligero aumento (Fig. 49b). Esto se debe a que una mayor cantidad de concreto disponible implica una menor profundidad del eje neutro y una mayor curvatura en el agotamiento. Sin embargo, el aumento en el brazo de palanca interno de la sección no incrementa de manera significativa, y las fuerzas internas presentan ninguna variación salvo por el leve cambio debido al endurecimiento del acero.

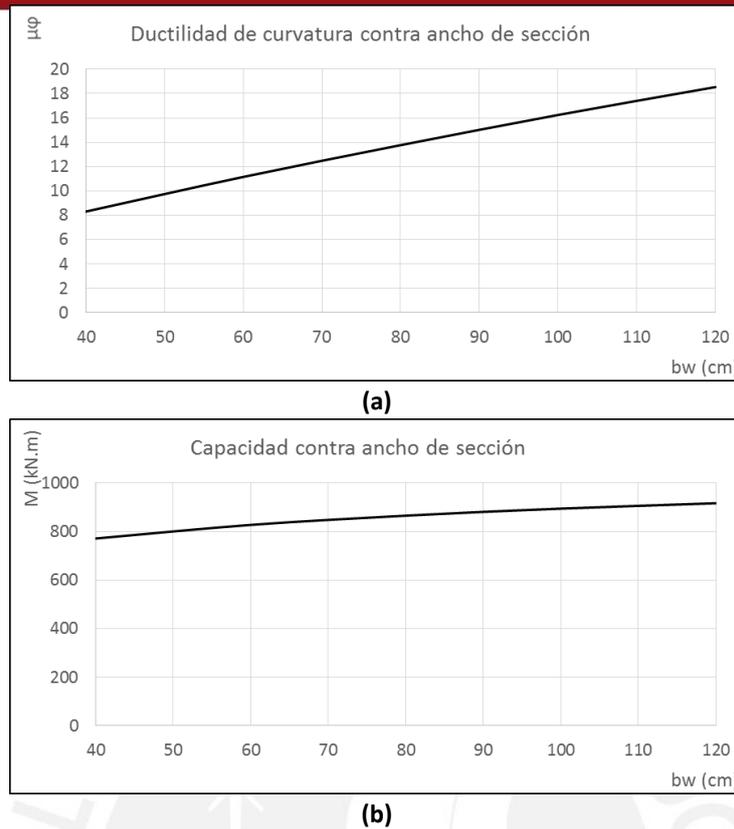


Figura 49 Variación del comportamiento de una sección con variación en el ancho
 (a) Variación en ductilidad, (b) Variación en capacidad

6.2.5 Influencia de la resistencia del concreto

Se estudia la influencia de la resistencia del concreto, para lo cual se analiza la Sección A (Fig. 45a), considerando valores de f'_c variables desde 21 MPa (210 kg/cm²) hasta 49 MPa (490 kg/cm²). El refuerzo de la sección consiste en $A_s = 25$ cm² y $A_s' = 10$ cm².

El efecto de la resistencia del concreto sobre el comportamiento de la sección es el mismo que tiene la variación del ancho. En ambos casos cambia la fuerza interna en compresión para cada estado de deformaciones. La variación de la resistencia del concreto modifica el esfuerzo en compresión, mientras que la variación del ancho modifica el área sobre la cual actúa el esfuerzo.

Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 48. La ductilidad de curvatura incrementa junto con la resistencia del concreto, de manera similar a como sucede cuando aumenta el ancho de la sección (Figura 50a).

La resistencia varía poco con el cambio de resistencia del concreto (Figura 50b), ya que las fuerzas internas tienen poco o ningún cambio. Un incremento en la resistencia del concreto disminuye la profundidad del eje neutro e incrementa el brazo de palanca interno. Sin embargo, el efecto no es grande ya que en la rotura la profundidad de la cabeza comprimida suele ser pequeña en comparación con el peralte de la sección.

Los resultados son coherentes con las exigencias normativas de diseño. El ACI 318 y el RNE E.060 limitan la cuantía en tracción como máximo al 75% de la cuantía balanceada, buscando un comportamiento razonablemente dúctil. En caso de secciones muy reforzadas se debe

incrementar la resistencia del concreto, el ancho de la sección, o el acero en compresión, ya que esto aumenta directamente la ductilidad disponible. Por otro lado, estos cambios no afectan directamente la resistencia en forma considerable, pero indirectamente permiten mayor capacidad al incrementar el área de refuerzo en tracción máxima.

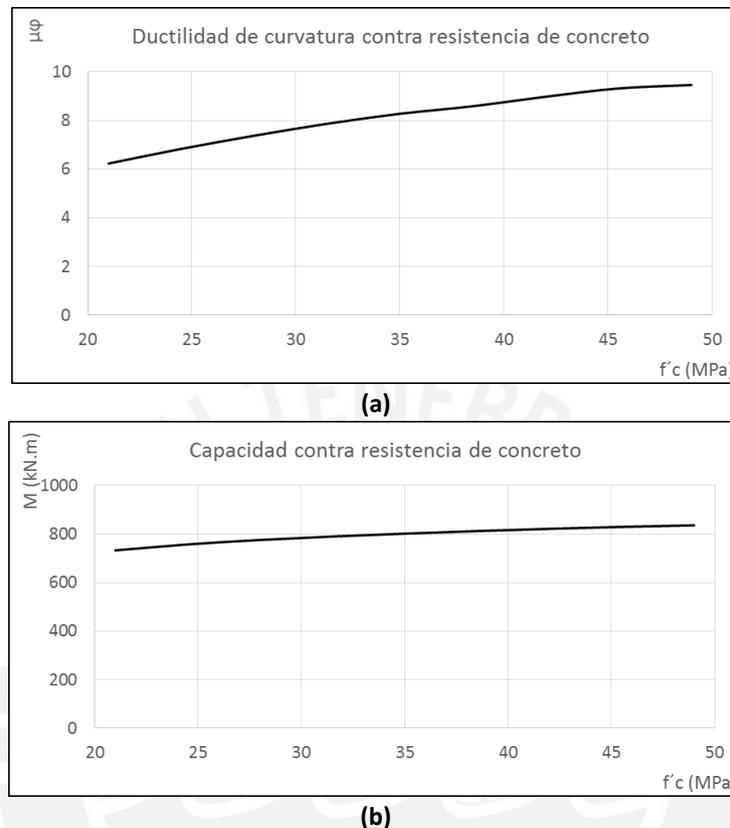


Figura 50 Variación del comportamiento de una sección con variación en la resistencia del concreto
(a) Variación en ductilidad, (b) Variación en capacidad

6.2.6 Influencia de la sobrerresistencia del acero

Se estudia el efecto de la sobrerresistencia del acero en el comportamiento de vigas, analizando la Sección A (Fig. 45a). El refuerzo consiste en $A_s = 25 \text{ cm}^2$ y $A_s' = 10 \text{ cm}^2$. Se utiliza el modelo elastoplástico perfecto para el acero de refuerzo, de manera que el endurecimiento no tenga influencia sobre los resultados obtenidos.

Se analiza la sección considerando esfuerzos de fluencia de refuerzo variables, desde el valor característico típico $f_y = 420 \text{ MPa}$ (4200 kg/cm^2) para acero grado 60, hasta $f_y = 588 \text{ MPa}$ (5880 kg/cm^2) que corresponde a una sobrerresistencia de 40%. Hay que notar que los estándares de calidad de acero ASTM 615, a diferencia de los presentados en el ASTM 706, indican valores mínimos de esfuerzos de fluencia, mas no controlan la sobrerresistencia [13].

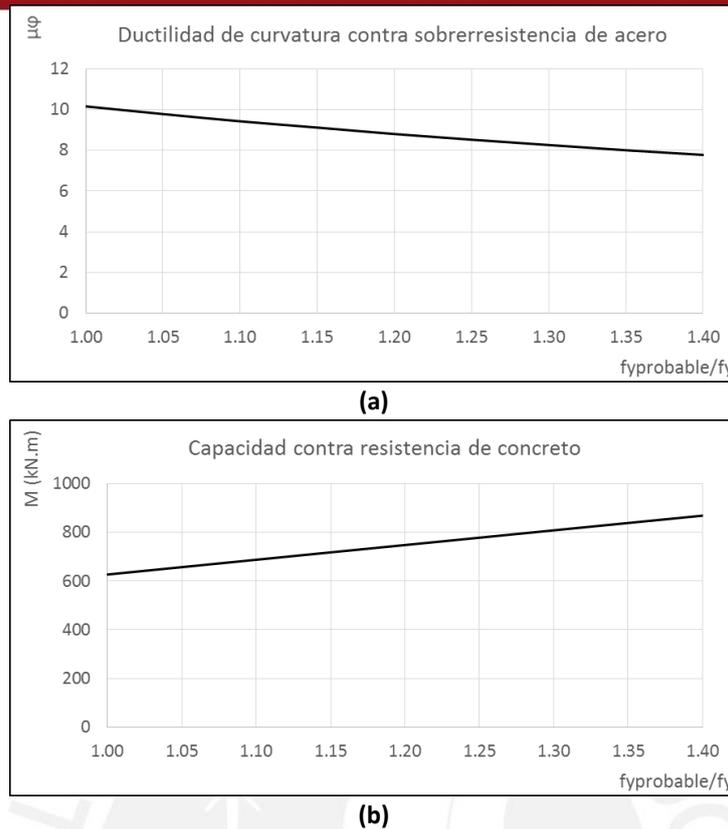


Figura 51 Variación del comportamiento de una sección con variación en la sobrerresistencia del acero
 (a) Variación en ductilidad, (b) Variación en capacidad

Como se puede ver en las Figuras 51a y 51b, con el incremento de la sobrerresistencia del acero aumenta la capacidad nominal y disminuye la ductilidad de curvatura.

El efecto de la sobrerresistencia es importante, ya que es similar a incrementar el área de acero en tracción. En el caso de vigas sometidas a demandas de deformación inelástica como las presentes en eventos sísmicos, ambos valores son importantes. La ductilidad permite soportar las solicitaciones sísmicas de deformación, mientras que la resistencia controlada permite lograr que la falla global en la estructura se presente mediante mecanismos deseados.

6.2.7 Influencia del confinamiento del concreto

El confinamiento incrementa considerablemente la deformación de agotamiento del concreto pues previene la falla por trituración del núcleo confinado [02], e incrementa en menor medida la resistencia. Para el estudio de la influencia del confinamiento en el comportamiento de vigas, se analiza la Sección A (Fig. 45a), con refuerzo $A_s = 25 \text{ cm}^2$ y $A_s' = 10 \text{ cm}^2$. Se considera para el concreto confinado la ley constitutiva de Kent y Park. Se analizan los casos de confinamiento con estribos simples de diámetro 3/8" espaciados a 25 cm, 20 cm, 15 cm y 10 cm.

Si bien la hoja de cálculo desarrollada está limitada al uso de un solo modelo para el concreto, si se desean predicciones más detalladas, es posible el análisis de la sección en dos etapas. Antes de la pérdida de recubrimiento se puede analizar la sección bruta con un modelo con confinamiento, y después de la pérdida de recubrimiento se puede analizar la sección del núcleo con un modelo confinado.

El análisis realizado en el presente estudio tiene un enfoque simplificado, en donde se considera que toda la sección se encuentra confinada, incluyendo el área de concreto que se encuentra en el recubrimiento. Además, se desprecia la zona de esfuerzos residuales en el concreto, luego de que el concreto ha perdido 50% de su capacidad.

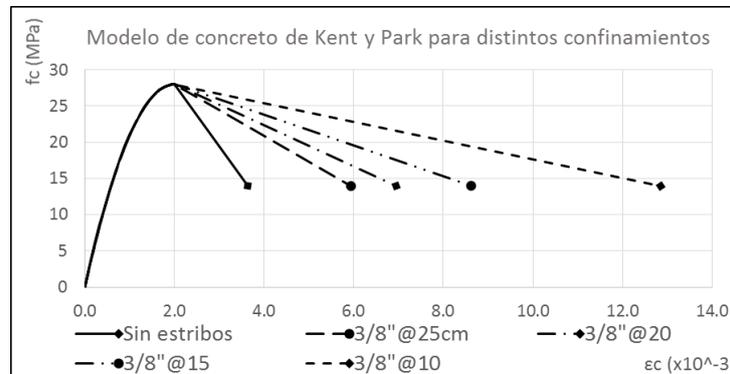


Figura 52 Variación en deformación de agotamiento del concreto para distintos espaciamientos de estribos

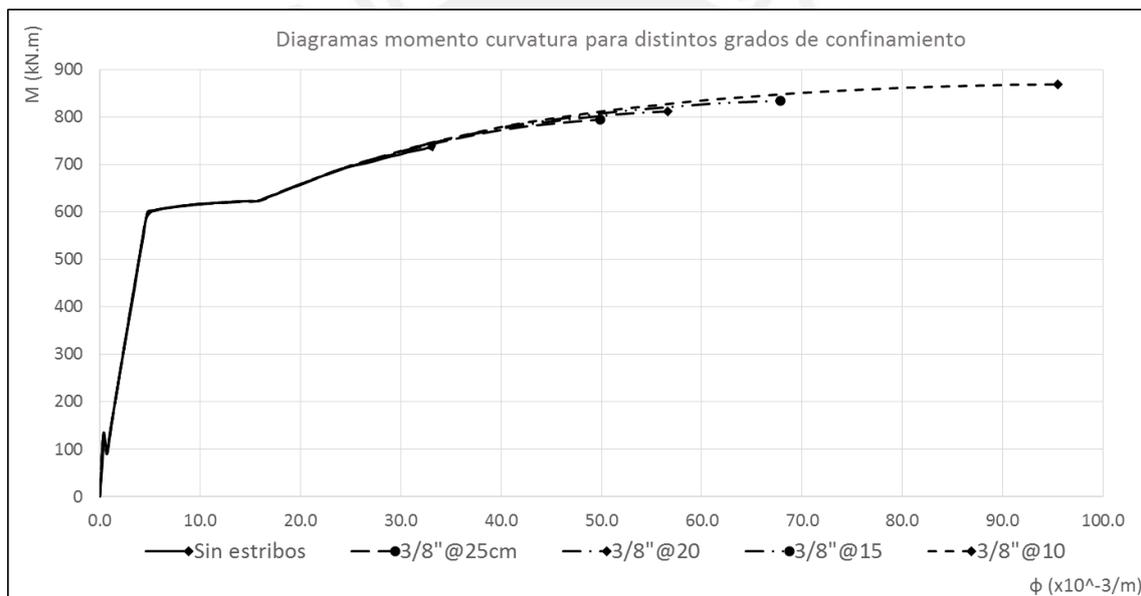


Figura 53 Comparación de diagramas momento-curvatura para distintos espaciamientos de estribos

Se puede ver que la ductilidad de curvatura incrementa considerablemente con el confinamiento (Figura 53), lo cual se debe al aumento de la deformación de agotamiento del concreto (Figura 52). El modelo de Kent y Park utilizado no toma en consideración el incremento en la resistencia del concreto debido al confinamiento.

En los diagramas momento-curvatura construidos se aprecia un aumento en la capacidad nominal junto con el aumento de confinamiento. Este incremento en la capacidad a flexión se debe al incremento en las deformaciones de agotamiento, que implican que el acero de refuerzo ingrese a la zona de endurecimiento.

6.3 Comportamiento de secciones de concreto preesforzado

6.3.1 Influencia de la cuantía de cable de preesfuerzo

Para estudiar la influencia de la cuantía de cable de preesfuerzo se realiza el análisis de la Sección B (Fig. 45b)

El refuerzo convencional está conformado $A_s = A_s' = 20 \text{ cm}^2$. El área de cable de preesfuerzo A_p es variable desde 0 cm^2 hasta 90 cm^2 . El análisis se limita hasta 90 cm^2 de área, ya que para mayores cuantías de cable el refuerzo extremo no alcanza la fluencia y no hay ductilidad.

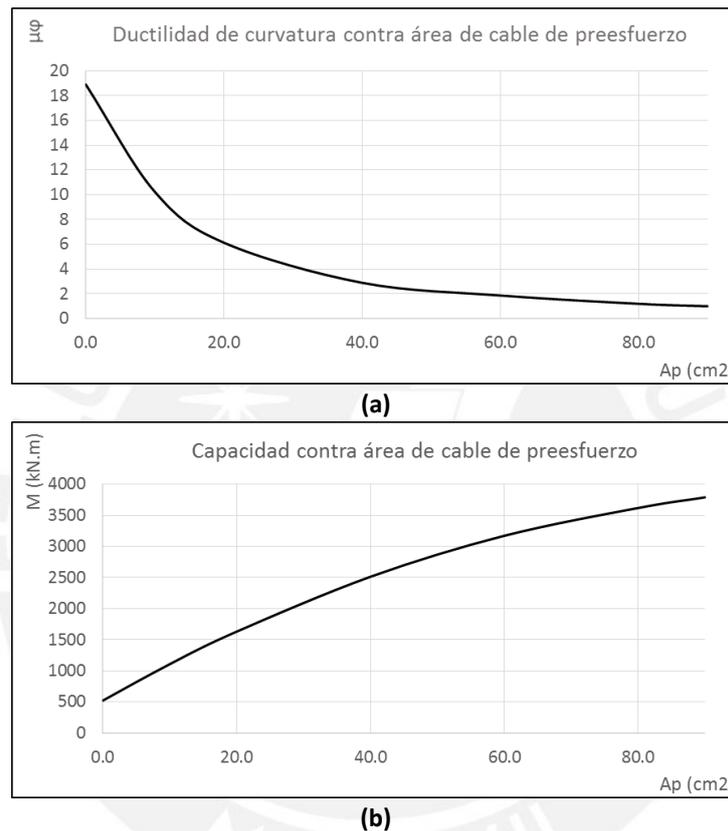


Figura 54 Variación del comportamiento de una sección con variación en el área de cable de preesfuerzo
(a) Variación en ductilidad, (b) Variación en capacidad

Se aprecia en la Figura 54 el marcado efecto de la cuantía de cable de preesfuerzo en el comportamiento de la viga. Ya que mayor cantidad de área de cable genera mayor fuerza de compresión sobre el elemento, y a su vez incrementa la cuantía total de refuerzo, su aumento disminuye considerablemente la ductilidad.

Caso	$A_p \text{ (cm}^2\text{)}$	$f_{pe} \text{ (MPa)}$	$F_p \text{ (kN)}$	$F_p/A \text{ (MPa)}$	M_n
1	0	-	0	0	523
2	25	1104	2760	2.76	1871
3	50	1104	5520	5.52	2876
4	75	1004	7530	7.53	3520

Tabla 8 Características y resultados de banda de $200 \times 50 \text{ cm}$ con distintas áreas de cable de preesfuerzo

Se presenta en la Tabla 8 las características y resultados de análisis de cuatro casos de secciones analizadas para cuantías distintas de refuerzo de precompresión. Los diagramas momento-curvatura de dichas secciones se presentan en la Figura 55. Se puede notar con claridad la fuerte disminución en la ductilidad que acompaña al incremento en la capacidad última, debido al cable de preesfuerzo.

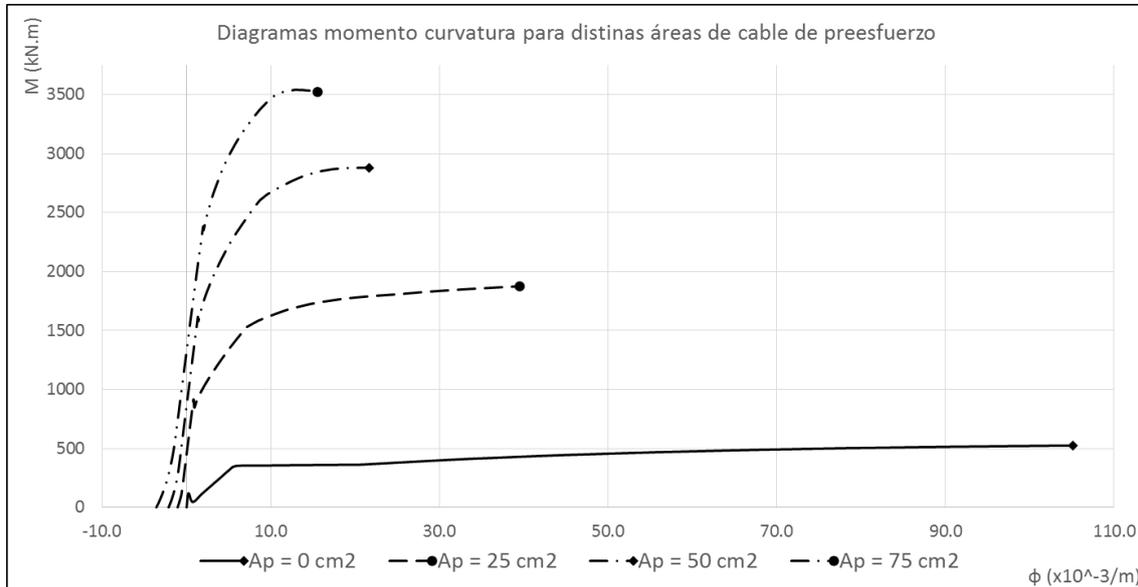


Figura 55 Diagramas momento-curvatura de banda de 200x50 cm con distintas áreas de cable de preesfuerzo, y acero de refuerzo constante

En los diagramas momento-curvatura de los casos con mayor cantidad de cable de preesfuerzo ($A_p = 50 \text{ cm}^2$ y $A_p = 75 \text{ cm}^2$) se puede notar que no existe un salto en la resistencia al momento del agrietamiento, a diferencia de los casos con menor cuantía. Esto se debe a que la diferencia entre el momento antes y después del agrietamiento es pequeña para estos casos.

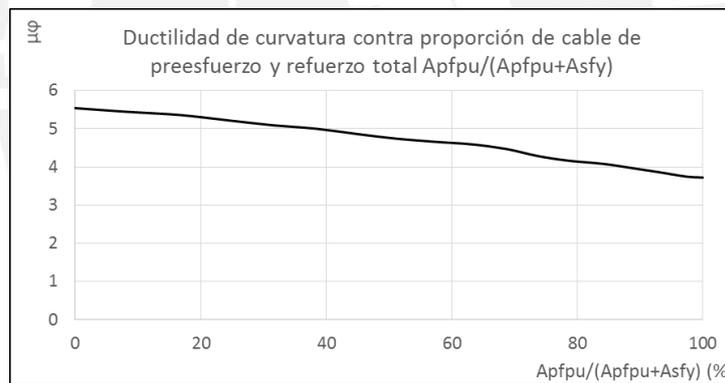
6.3.2 Influencia de la proporción de acero de refuerzo convencional y cable de preesfuerzo

Se estudia la influencia de la proporción entre refuerzo convencional y el de preesforzado, mediante el análisis de la Sección B (Fig. 45b). Las áreas de refuerzo convencional y cable de preesfuerzo son variables (Tabla 9), y han sido seleccionadas de manera que la capacidad nominal del elemento sea 2000 kN.m constante. De esta manera se analiza una sección con diversos niveles de preesfuerzo, pero con sección y capacidad invariables.

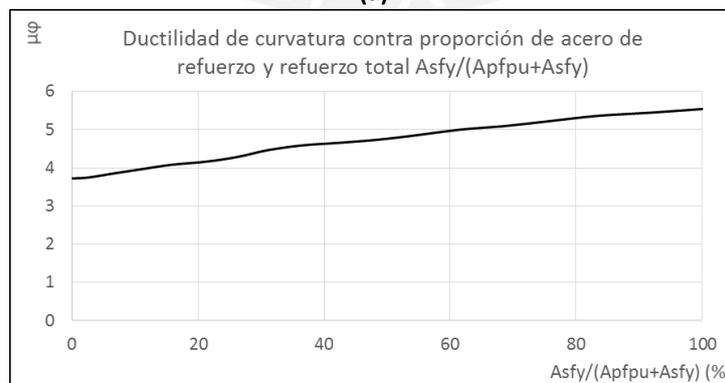
Como se aprecia en la Figura 56, la sección analizada que tiene una cuantía de refuerzo intermedia presenta una reducción moderada en la ductilidad debido al incremento en la fuerza de compresión a comparación de la sección sin preesfuerzo. La sección de concreto armado convencional tiene aproximadamente 40% más ductilidad de curvatura que la sección de concreto preesforzado sin refuerzo de acero en tracción.

Áreas de cable y acero analizadas			
Ap (cm ²)	As (cm ²)	$\mu\phi$	ϕ_u
0	102	5.54	42.69
2	96	5.44	42.31
4	90	5.36	41.93
6	84	5.22	41.5
8	78	5.09	41.14
10	72	5.00	40.73
12	66	4.86	40.33
14	60	4.74	39.94
16	54	4.66	39.55
18	47	4.59	39.46
20	41	4.47	39.03
22	35	4.28	38.66
24	29	4.16	38.26
26	22	4.08	38.12
28	16	3.97	37.69
30	10	3.86	37.22
32	4	3.75	36.76
33	0	3.72	36.84

Tabla 9 Áreas de acero de refuerzo y cable de preesfuerzo estudiadas para una capacidad constante de 2000 kN.m, y la ductilidad y curvatura de agotamiento correspondientes



(a)



(b)

Figura 56 Variación de la ductilidad de una sección con variación en la proporción entre área de acero de refuerzo y área de cable de preesfuerzo para una capacidad constante de 2000 kN.m

(a) en función de la proporción de cable de preesfuerzo,

(b) en función de la proporción de acero de refuerzo

Se presentan en la Figura 57 algunos de los diagramas momento-curvatura de los casos presentados en la Tabla 9. Las secciones con mayor cantidad de preesfuerzo presentan mayor rigidez inicial y una fluencia menos marcada. Las secciones con menor cantidad de preesfuerzo presentan menor rigidez inicial al trabajar agrietadas en la mayor parte del rango elástico, y muestran una fluencia marcada seguida de una zona de aumento de rigidez debido al endurecimiento del refuerzo.

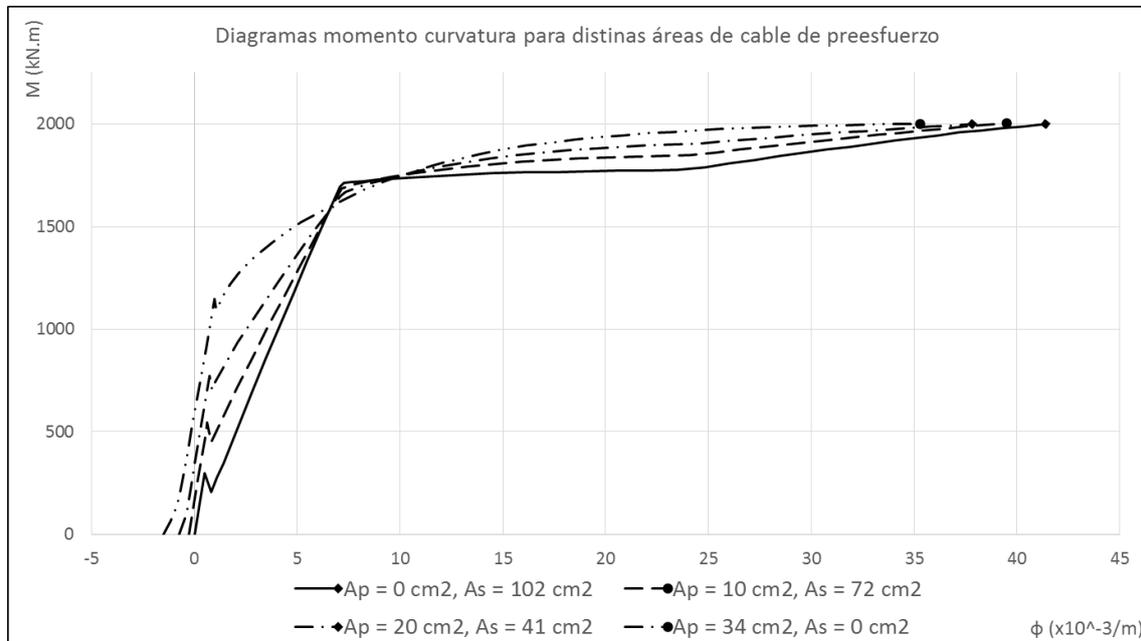


Figura 57 Diagramas momento-curvatura de banda de 200x50 cm para distintas proporciones de acero de refuerzo y cable de preesfuerzo para una capacidad constante de 2000 kN.m

6.3.3 Influencia del ancho de ala de una sección T preesforzada

La influencia del ancho de ala en secciones T preesforzadas es estudiada mediante el análisis de la Sección A (Fig. 45a), pero con un ala en compresión de 20 cm de espesor y de ancho variable.

Se analizan casos con anchos de ala variables desde una sección rectangular $b_f = 40$ cm hasta una sección T con ancho de ala $b_f = 160$ cm. Las áreas de refuerzo convencional son $A_s = 8$ cm² y $A_s' = 8$ cm². El área de cable de preesfuerzo es $A_p = 8$ cm².

En la Figura 58 se presenta la ductilidad de curvatura en función del ancho del ala en la sección estudiada. Ya que en la rotura la profundidad del eje neutro difícilmente supera el espesor del alma, un incremento en el ancho del ala tiene un efecto similar al incrementar el ancho de toda la sección. Esto justifica el incremento en ductilidad que acompaña el incremento en el ancho de ala.

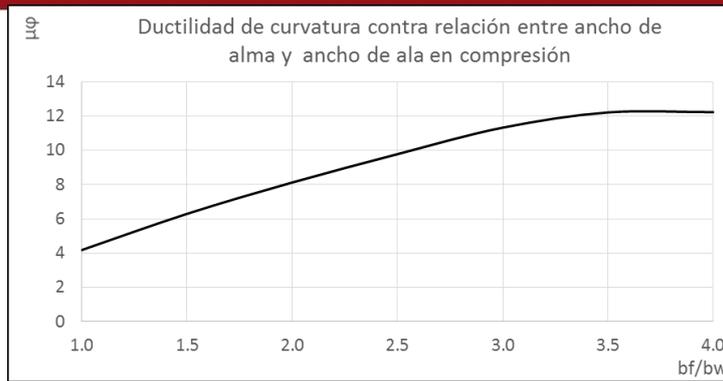


Figura 58 Variación de la ductilidad de una sección con variación en el ancho de ala en compresión

Por otro lado, para alas anchas con respecto al alma, la sección estudiada presenta poca mejora en la ductilidad de curvatura. Esto se debe a que la cantidad de refuerzo total es relativamente baja para estos anchos de ala, y la falla de la sección queda controlada por la rotura de cable de preesfuerzo. Por ello la ductilidad permanece casi constante para relaciones de bf/bw mayores a 3.

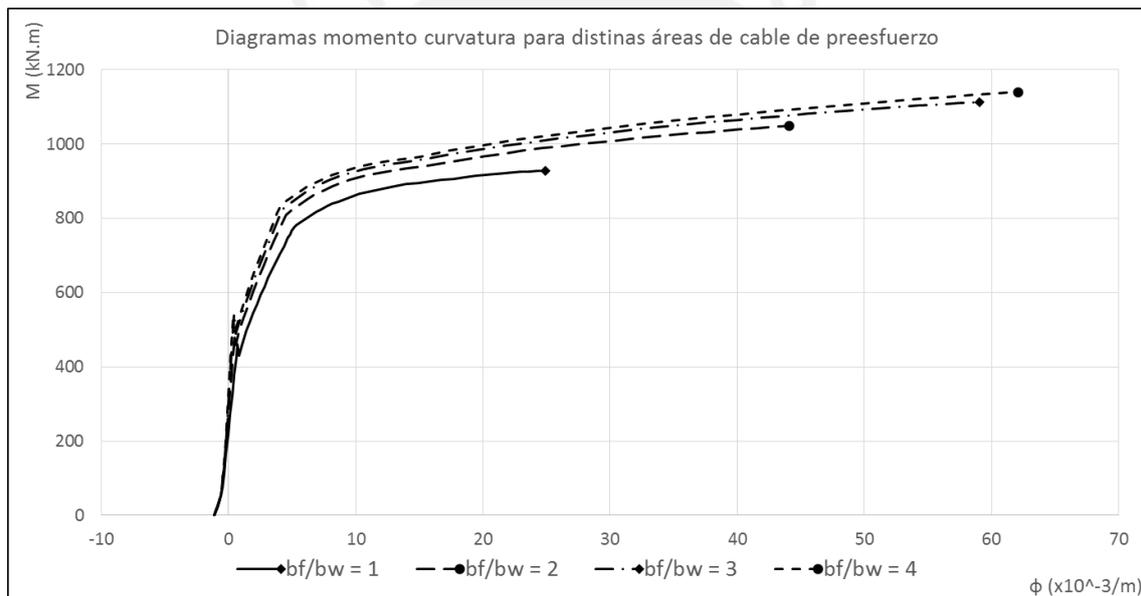


Figura 59 Diagramas momento-curvatura de sección de 200x50 cm para anchos de ala diferentes

En la Figura 59 se presentan los diagramas momento-curvatura para cuatro secciones distintas con anchos de ala diferentes, y es posible distinguir claramente el comportamiento previamente descrito. Existe un incremento en la capacidad nominal, de manera similar a los casos en los cuales se incrementa la capacidad del concreto o el ancho de la sección sin afectar la cuantía de refuerzo en tracción. En el caso estudiado incrementar el ancho de ala por un factor de cuatro significa un incremento en la capacidad de aproximadamente 23%, y se debe a la mayor deformación que existe en el cable al momento del agotamiento del concreto. Si el cable de preesfuerzo no tuviera una rama de endurecimiento pasado el punto de fluencia, entonces el incremento en la capacidad sería despreciable.

6.3.4 Influencia del peralte efectivo del cable de preesfuerzo

Se estudia el efecto que tiene la ubicación del cable de preesfuerzo sobre la ductilidad de curvatura de una sección. Para ello se analiza la Sección A (Fig. 45a), pero considerando la ubicación del cable de preesfuerzo variable desde el centro de la sección hasta 10 cm por encima del borde inferior.

6.3.4.a Análisis variando área de cable de preesfuerzo, con capacidad nominal constante $M_n = 700 \text{ kN.m}$

Se analizan secciones con refuerzo convencional constante $A_s = 8 \text{ cm}^2$ y $A_s' = 8 \text{ cm}^2$. El área de cable de preesfuerzo es variable, seleccionado de manera que la capacidad de las secciones estudiadas sea constante en 700 kN.m (70 ton.m) como se muestra en la Tabla 10. El área de acero de refuerzo es constante de 8 cm^2 superior e inferior.

Peraltes efectivos y áreas de cable analizados				
d_p^* (cm)	A_p (cm ²)	F_p/A (Mpa)	$\mu\phi$	ϕ_u ($\times 10^{-3} \text{ 1/m}$)
35	14.7	5.80	2.92	16.75
40	9.7	3.82	4.14	22.02
45	7.6	3.00	5.15	26.64
50	6.3	2.48	6.00	30.66
55	5.4	2.13	6.81	34.39
60	4.7	1.85	7.24	37.84

Tabla 10 Áreas y posiciones de cable de preesfuerzo estudiados para una capacidad constante de 700 kN.m (* d_p medido desde el borde superior)

Los resultados obtenidos se presentan en las Figuras 60 y 61. En la Figura 60 se muestra la ductilidad de curvatura en función de la profundidad del cable de preesfuerzo. En la Figura 61 se muestran los diagramas momento-curvatura para distintas ubicaciones de cable de preesfuerzo.

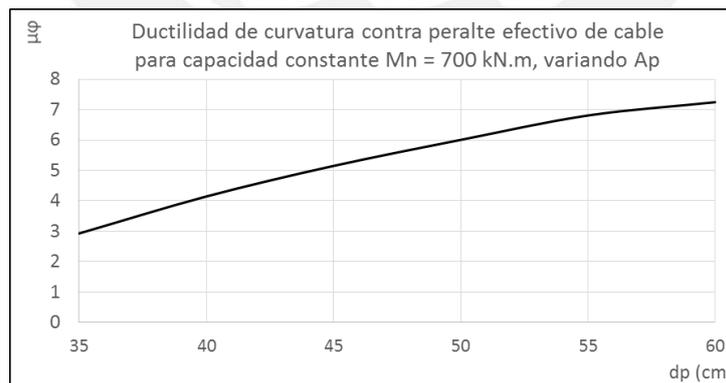


Figura 60 Variación de la ductilidad de una sección con variación en la posición y área de cable de preesfuerzo para capacidad constante de 700 kN.m

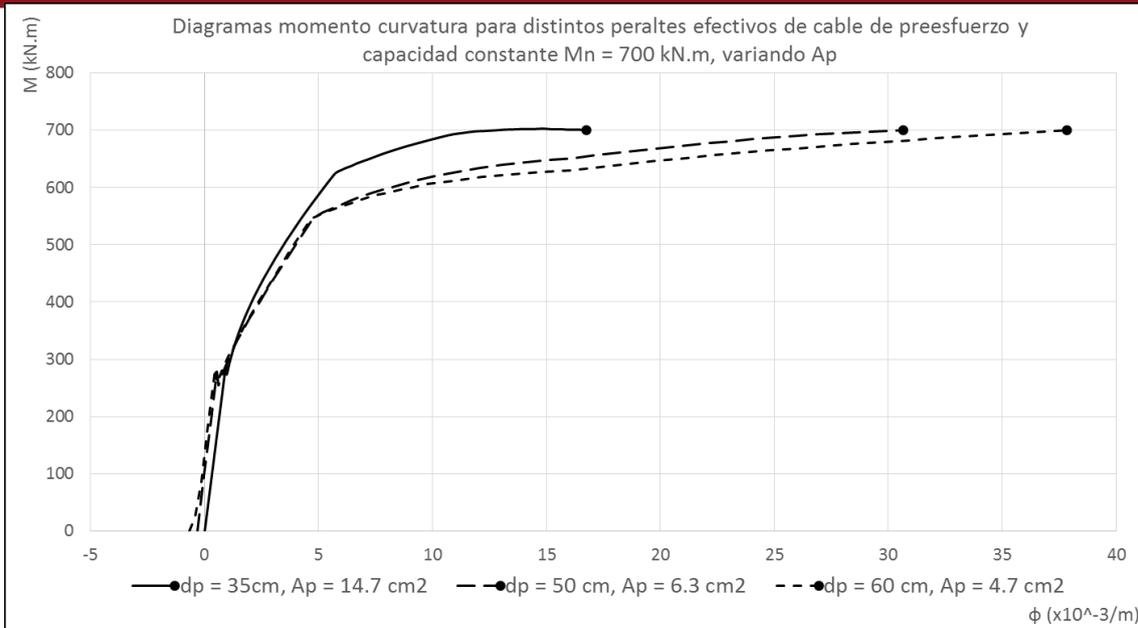


Figura 61 Diagramas momento-curvatura de sección de 40x70 cm para áreas y ubicación de cable de preesfuerzo diferentes, y capacidad constante

6.3.4.b Análisis variando área de acero de refuerzo convencional, con capacidad nominal constante $M_n = 1000 \text{ kN.m}$

Se analizan secciones con cable de preesfuerzo constante $A_p = 10 \text{ cm}^2$, y refuerzo en compresión constante $A_s' = 15 \text{ cm}^2$. El área de refuerzo convencional en tracción es variable, seleccionada de manera que la capacidad de las secciones estudiadas sea constante en 1000 kN.m (100 ton.m) como se muestra en la Tabla 11.

Peraltes efectivos y áreas de acero analizados			
d_p^* (cm)	A_s (cm ²)	$\mu\phi$	ϕ_u ($\times 10^{-3} \text{ 1/m}$)
35	29	2.69	16.00
40	24	2.83	16.71
45	19	3.03	17.77
50	14	3.30	19.26
55	9	3.56	21.18
60	4	3.77	23.54

Tabla 11 Áreas de acero de refuerzo y posiciones de cable de preesfuerzo estudiados para una capacidad constante de 1000 kN.m (* d_p medido desde el borde superior)

Los resultados obtenidos se presentan en las Figuras 62 y 63. En la Figura 62 se muestra la ductilidad de curvatura en función de la profundidad del cable de preesfuerzo. En la Figura 63 se muestran los diagramas momento-curvatura para distintas ubicaciones de cable de preesfuerzo.

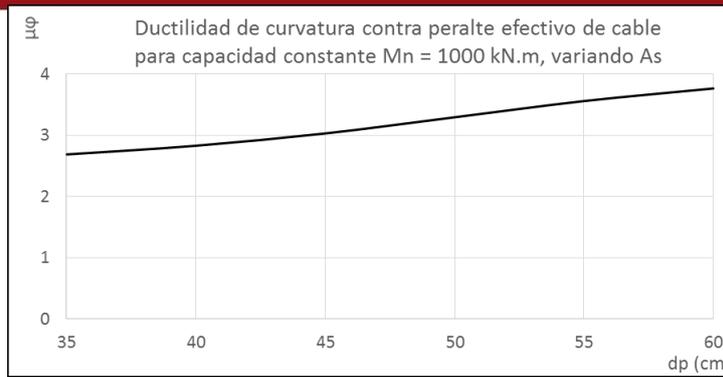


Figura 62 Variación de la ductilidad de una sección con variación en el área de acero de refuerzo y la posición de cable de preesfuerzo para capacidad constante de 1000 kN.m

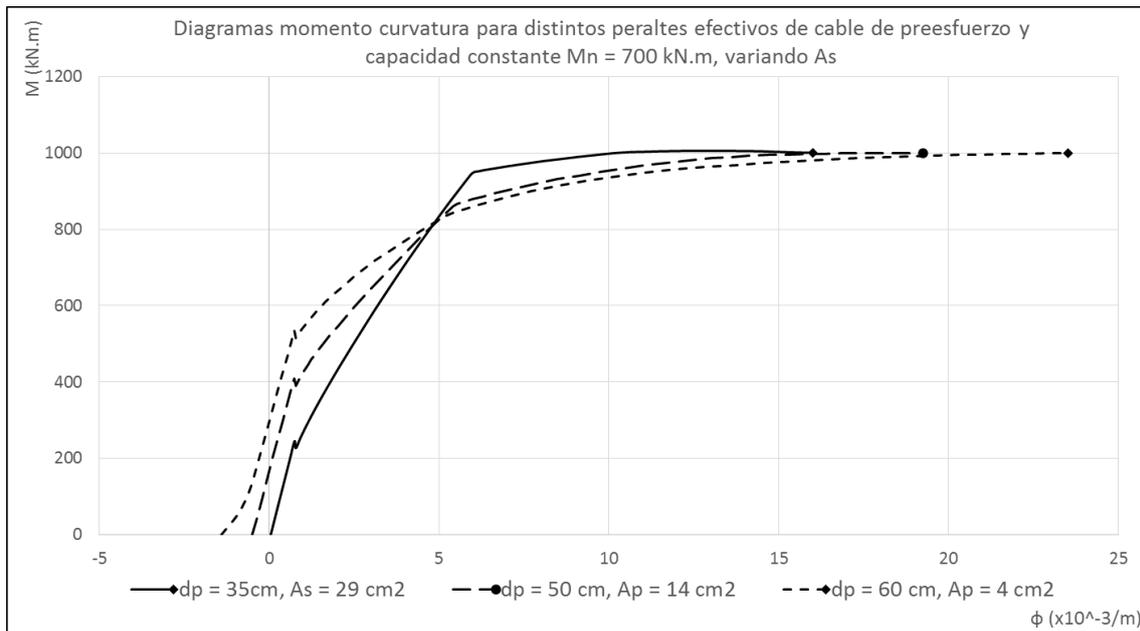


Figura 63 Diagramas momento-curvatura de sección de 40x70 cm para áreas de acero de refuerzo y ubicación de cable de preesfuerzo diferentes, y capacidad constante

Con menor peralte efectivo el refuerzo es menos eficiente, y se requiere por ello mayor cantidad de área de refuerzo. Esto implica que mientras menor es el peralte efectivo del cable de preesfuerzo, menor es la ductilidad de curvatura disponible en la sección.

Comparando los resultados obtenidos en las secciones 6.3.4.a y 6.3.4.b, se observa que la reducción del peralte efectivo de cable de preesfuerzo genera una pérdida de ductilidad cuando se incrementa el refuerzo para mantener la misma capacidad en flexión. Sin embargo, cuando la capacidad se mantiene constante incrementando área el acero convencional, la pérdida de ductilidad es menor que cuando se incrementa el área de cable de preesfuerzo. Para los casos estudiados, el incremento del área de acero convencional genera una pérdida de 30% de la ductilidad, mientras que el incremento del área de cable de preesfuerzo genera una pérdida de 60%. Este resultado es razonable, ya que el acero de refuerzo convencional mantiene un peralte efectivo constante de 65 cm, y por ello es más eficiente que el cable de preesfuerzo.

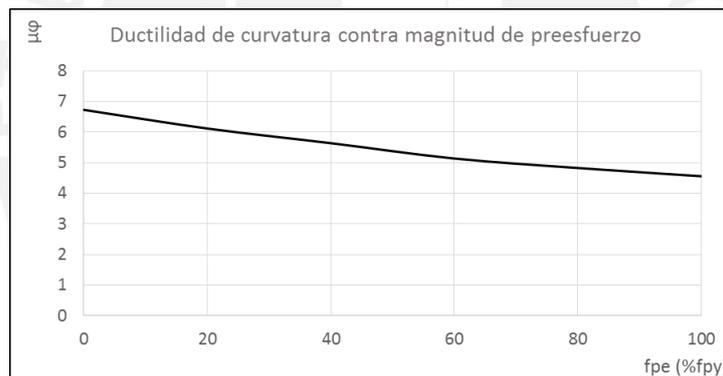
6.3.4 Influencia del esfuerzo estable inicial en el cable de preesfuerzo

Se estudia el efecto que tiene la magnitud del esfuerzo estable de preesfuerzo al cual se somete el cable de preesfuerzo en su estado inicial, sobre la ductilidad de curvatura de una sección. Para ello se analiza la Sección B (Fig. 45b), considerando como refuerzo $A_s = A_s' = 20 \text{ cm}^2$, y $A_p = 25 \text{ cm}^2$.

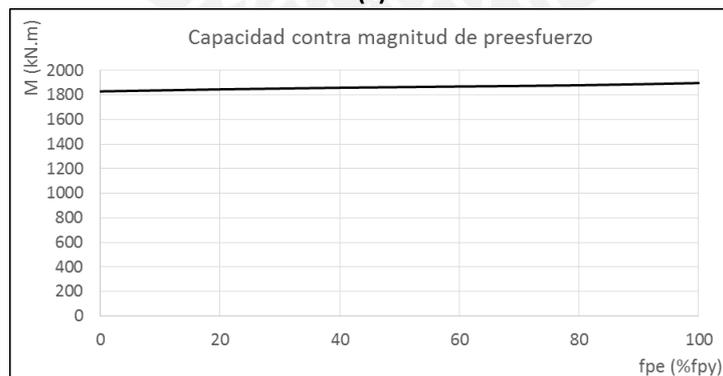
Se analizan casos con diferentes niveles de preesfuerzo, mediante la variación del esfuerzo estable inicial, desde un preesfuerzo nulo hasta alcanzar un preesfuerzo igual al de fluencia del cable (1600 MPa). Se presentan en la Tabla 12 las características de algunos de los casos analizados.

Casos analizados con variación en el esfuerzo estable inicial de cable					
fpe (%fpy)	fpe (Mpa)	F_p/A	$\mu\phi$	$\phi_u (\times 10^{-3} \text{ 1/m})$	Mu
0%	0	0.00	6.73	16.75	1830
20%	320	0.80	6.12	22.02	1847
40%	640	1.60	5.64	26.64	1860
60%	960	2.40	5.14	30.66	1870
80%	1280	3.20	4.83	34.39	1880
100%	1600	4.00	37.84	1898	

Tabla 12 Casos estudiados de secciones con distinto esfuerzo estable inicial en cable de preesfuerzo



(a)



(b)

Figura 64 Variación del comportamiento de una sección con variación en el esfuerzo estable inicial de cable de preesfuerzo
(a) Variación en ductilidad, (b) Variación en capacidad

Se presenta en la Figura 64a la variación de ductilidad de curvatura debido al cambio en el esfuerzo estable inicial al cual se somete el cable de preesfuerzo. Se aprecia que existe una

disminución en la ductilidad que acompaña el incremento de la fuerza de preesfuerzo, debido al incremento en la curvatura de fluencia de la sección. Sin embargo, la capacidad en flexión máxima de la sección no muestra una variación significativa.

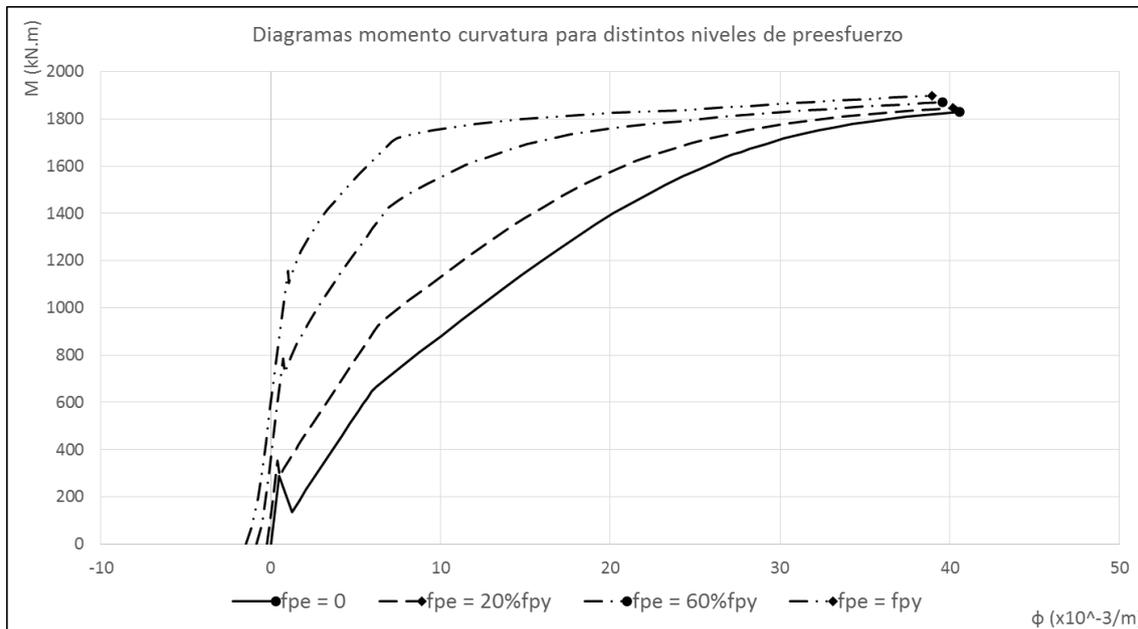


Figura 65 Diagramas momento-curvatura de sección de 200x50 cm para diferentes esfuerzos estables iniciales en cable de preesfuerzo

Se presentan en la Figura 65 los diagramas momento-curvatura para algunos de los casos analizados. Se aprecia que el punto de agotamiento no varía de manera marcada con la variación del preesfuerzo inicial, debido a que la deformación inicial del cable es baja en relación a la deformación final. Por otro lado, sí existe una variación en la ductilidad de curvatura, ya que la curvatura de fluencia incrementa junto con la carga axial en la sección.

7 RESUMEN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

7.1 Resumen

Los diagramas momento-curvatura permiten percibir de manera clara el comportamiento de secciones dentro de toda su historia de carga. En la presente tesis se realiza el estudio de dichos diagramas para secciones de concreto armado y concreto preesforzado sometidas a flexión monotónica.

Se realizó la implementación de un programa en lenguaje VBA (Visual Basic for Applications), en forma de una hoja de cálculo de Microsoft Excel. La hoja desarrollada permite la construcción de diagramas momento-curvatura mediante una interfaz sencilla y de licencia libre. La implementación del programa es transparente y puede ser accedida por el usuario, y su precisión ha sido validada con resultados obtenidos con el programa Section Designer y estudios analíticos hechos por varios autores.

La hoja de cálculo desarrollada en la presente tesis es capaz de analizar una gran cantidad de secciones de concreto armado y concreto preesforzado. En el análisis el usuario tiene la capacidad de utilizar cualquier ley constitutiva de materiales mediante su ingreso en forma de puntos de esfuerzo-deformación.

Se realizó el estudio de la influencia de diversos parámetros sobre el comportamiento de secciones de concreto armado y concreto preesforzado. Dicho estudio se llevó a cabo utilizando la hoja de cálculo desarrollada.

7.2 Conclusiones y comentarios

Con respecto al programa desarrollado:

- 1) Se implementó de manera satisfactoria un programa en forma de hoja de cálculo capaz de construir diagramas momento-curvatura de secciones de concreto armado y preesforzado.
- 2) El programa implementado es de fácil manejo, de funcionamiento transparente, y fácilmente accesible al ser de licencia libre.
- 3) El programa implementado permite el estudio de una gran cantidad de escenarios, al poder trabajar en prácticamente cualquier sección y considerando cualquier ley constitutiva de materiales.
- 4) La precisión del programa implementado ha sido validada para una cantidad razonable de escenarios comunes, algunos mostrados en la presente tesis. Sin embargo, es imposible calificarlo como infalible como cualquier programa con cierto grado de complejidad.

Con respecto al estudio sobre el comportamiento de secciones realizado:

- 1) Las pruebas realizadas son de alcance limitado, ya que es imposible cubrir todas las posibles secciones de vigas. Sin embargo, los resultados obtenidos y presentados en el capítulo 6 corroboran las tendencias aceptadas por la gran mayoría de autores.

2) Para secciones convencionales la forma del modelo esfuerzo-deformación del concreto tiene poca incidencia en el diagrama momento-curvatura. Son más importantes los valores de resistencia característica y deformación de rotura del concreto.

3) La ductilidad de una sección es influenciada principalmente por la cantidad de refuerzo en tracción y la capacidad disponible de la zona de concreto en compresión. Mientras mayor sea la fuerza de compresión disponible, mayor será la deformación en el refuerzo en tracción antes de que el concreto alcance el agotamiento.

4) El acero de refuerzo en compresión, el ancho de ala en compresión y la resistencia característica del concreto influyen en la ductilidad, ya que afectan directamente la fuerza de compresión disponible en la sección.

5) La sobrerresistencia en el acero de refuerzo incrementa la capacidad disponible, y también disminuye la ductilidad de curvatura. El incremento de la sobrerresistencia es equivalente al incremento del área de acero en tracción.

6) Para la sección de concreto de 200x50 cm estudiada, el caso con refuerzo convencional presenta hasta 40% más ductilidad de curvatura que el caso con sólo cable preesforzado.

7) En las secciones de concreto de 40x70 cm estudiadas, la ductilidad de curvatura es mayor mientras mayor es el peralte interno del cable de preesfuerzo y menor el área de refuerzo necesaria.

7.3 Recomendaciones para trabajo futuro

1) Se validó la precisión del programa implementado para la mayoría de escenarios esperados. Sin embargo, este tipo de herramienta requiere trabajo constante en la depuración de posibles errores.

2) Es posible ampliar el alcance de la hoja de cálculo desarrollada de manera que también trabaje con secciones sometidas a flexocompresión. Se puede trabajar en dicho caso con el centro plástico de las secciones.

3) Es posible implementar el análisis de secciones en donde se haga distinción entre la zona de recubrimiento no confinado y la zona de núcleo confinado. Se puede analizar la sección bruta hasta alcanzar la pérdida de recubrimiento (agotamiento del concreto no confinado), y luego el análisis del núcleo hasta la rotura (agotamiento del concreto confinado).

4) Es posible incrementar la cantidad de leyes constitutivas disponibles por defecto en el programa, considerando las características de los aceros y cables de preesfuerzo existentes en el mercado local. Para ello se debe recopilar información suficiente para definir los parámetros que caracterizan los materiales disponibles en el Perú según su proveedor.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Kwak HG., Kim SP. (2002) Nonlinear analysis of RC beams based on moment-curvature relation. *Computer & Structures* 80: 615-628
- [2] Ottazzi G. (2011) Apuntes del curso concreto armado I. Editorial PUCP, Lima
- [3] Bernal I., Tavera H. (2002) Geodinámica, sismicidad y energía sísmica en Perú. Instituto Geofísico del Perú, Lima
- [4] Bolaños A., Monroy O. (2004) Espectros de peligro sísmico uniforme. Repositorio Digital de Tesis PUCP, Lima
- [5] Ying-Wu Z., Yu-Fei W. (2012) General model for constitutive relationships of concrete and its composite structures. *Composite Structures* 94: 580-592
- [6] Sheikh S. (1982) A comparative study of confinement models. *ACI Journal* 79-30: 296-306
- [7] Sima J.F., Roca P., Molins C. (2008) Cyclic constitutive model for concrete. *Engineering Structures* 30: 695-706
- [8] Hognestad E. (1951) Study of combined bending and axial load in reinforced concrete members. *University of Illinois Engineering Experiment Station Bulletin* 399
- [9] Méndez H. (2012) Efecto de las deformaciones por cortante en los diagramas momento-curvatura M-psi de secciones de concreto reforzado y sus implicaciones en la evaluación y diseño sísmico de estructuras. Universidad Nacional Autónoma de México, México DF
- [10] Kent D., Park R. (1971) Flexural members with confined concrete. *Journal of the Structural Division* 97-7: 1969-1990
- [11] Mander J., Priestley M., Park R. (1988) Theoretical stress-strain model for confined concrete. *Journal of Structural Engineering* 114-8: 1804-1826
- [12] Kwak HG. Kim J. (2006) Numerical models for prestressing tendons in containment structures. *Nuclear Engineering and Design* 236: 1061-1080
- [13] ASTM Committee A01.05 (2015) A615/A615M-15 Standard specification for deformed and plain carbon-steel bars for concrete reinforcement. ASTM International, Pennsylvania
- [14] Mattock, A.H. (1979) Flexural strength of prestressed concrete sections by programable calculator. *PCI Journal* 24-1: 32-54
- [15] Skogman B., Tadros M., Grasmick R. (1988) Flexural strength of prestressed concrete members. *PCI Journal* 33-5: 96-123
- [16] Du J.S., Au F., Cheung Y.K., Kwan A. (2008) Ductility analysis of prestressed concrete beams with unbonded tendons. *Engineering Structures* 30-1: 13-21
- [17] Priestley M. (1993) Myths and fallacies in earthquake engineering – Conflicts between design and reality. *Bulleting of the New Zealand National Society for Earthquake Engineering* 26-3: 329-341
- [18] Caltrans (2006) Seismic design criteria. California Department of Transportation, California
- [19] AASHTO (2009) Guide specifications for LRFD seismic bridge design. American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington DC
- [20] Yamb E. Bock-Hyeng C. (2013) Method of dimensioning stress-strain state of Steel concrete plate. *Materials Sciences and Applications* 4-7: 1-5
- [21] Zahonero I., Joyanes L. (2009) Algoritmos y estructuras de datos – Una perspectiva en C. McGraw – Hill Interamericana de España S.L., Galicia
- [22] Lin T.Y., Burns N. (1981) Design of prestressed concrete structures. John Wiley & Sons, New York
- [23] Park R., Paulay T. (1975) Reinforced concrete structures. John Wiley & Sons, New York
- [24] Saqan E., Rasheed H. (2011) Simplified nonlinear analysis to compute neutral axis depth in prestressed concrete rectangular beams. *Journal of the Franklin Institute* 348-7: 1588-1604

- [25] Cattaneo S., Giussani F., Mola F. (2012) Flexural behaviour of reinforced, prestressed and composite self-consolidating concrete beams. *Construction and Building Materials* 36: 826-837

