



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

Sistemas Periódicos: perturbación y aplicaciones

Tesis para optar el grado de
Magíster en Matemáticas

AUTOR

Br. Joel Mendoza Jimenez

ASESOR

Dr. Roland Rabanal Montoya

JURADO

Dr. Rudy Rosas Bazan

Dr. Percy Fernandez Sanchez

LIMA - PERÚ

2013

Joel Mendoza Jimenez²

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magíster en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

Dr. Rudy Rosas (presidente)

Dr Percy Fernandez (miembro)

Dr Roland Rabanal (asesor)

Lima - Perú

2013

¹Este trabajo forma parte del proyecto DGI: 70242.3020

²Versión con las correcciones del Jurado



... A MIS PADRES.

Contenido

Introducción	1
1 Preliminares	3
1.1 Definiciones y Notaciones	3
1.1.1 Ecuaciones autónomas	7
1.1.2 Estabilidad y linealización: Hartman - Grobman	17
1.1.3 Sistemas lineales de dimension dos	24
1.1.4 Puntos singulares de ecuaciones no lineales	26
1.2 Soluciones periódicas	29
1.2.1 Estabilidad de órbitas periódicas	30
1.2.2 Ciclos limites en el plano	30
1.2.3 Criterio de Bendinxson	33
1.2.4 Conjunto límite: Teorema de Poincaré-Bendixson	34
2 Sistemas Periódicos	41
2.1 Teoría de Floquet	41
2.2 Perturbaciones y aproximación asintótica	47
2.3 Método del promedio	53
2.4 Forma estandar del promedio	54
2.4.1 Método del promedio en el caso periódico	55
2.4.2 Teoría clásica del promedio	57
2.5 Teoría del promedio via grado de Brouwer	59
2.5.1 Grado de Brouwer	60
2.5.2 Fórmula de Maclaurin	68
2.5.3 Teoría del promedio via grado de Brouwer	70
2.5.4 Teoría del promedio y grado de coincidencia	72
2.6 Método del promedio para sistemas autónomos	73

3	Sistemas periódicos no-lineales y ciclos límite	81
3.1	n -variedad de órbitas periódicas	81
3.1.1	Caso (i): Perturbación de un sistema isócrono	86
3.1.2	Caso(ii): Perturbación de un sistema lineal	87
3.1.3	caso(iii)	90
3.2	Aplicaciones	92
3.2.1	Sobre una ecuación diferencial de tercer orden	93
3.2.2	Sistema de Michelson	98
3.2.3	El sistema prototipo 4-Rossler	102



Índice de Figuras

1.1	Centro	12
1.2	Silla	13
1.3	Flujo tubular	16
1.4	Repulsor y silla	19
1.5	Nodos	25
1.6	Foco repulsor $\lambda_1 = 1 - i, \lambda_2 = 1 + i$	26
2.1	$\epsilon = 0.1$	58



Agradecimientos

Siempre he tenido la fortuna de encontrarme en la vida con grandes personas, sin las cuales todo hubiese sido mucho más complicado.

Tengo que agradecer:

A mis padres que fueron mis primeros maestros por su gran apoyo en mis decisiones, certeras o no.

A mi asesor Dr. Roland Rabanal por su enorme paciencia y sus consejos para la realización de este trabajo, sin ellos no hubiese sido posible la culminación de la misma.

A mis profesores de pregrado Gloria Ortiz, Fernando Huancas, Adelmo Perez que me apoyaron y dieron ánimos para continuar la maestría.

A mis compañeros de maestría y amigos.

Joel Mendoza Jimenez

Introducción

La teoría de Floquet estudia las soluciones de una ecuación diferencial no autónoma del tipo $x' = A(t)x$, donde $A(t)$ es una función matricial continua, de período $T > 0$ (T -periódica) y mediante un cambio de variable conveniente transforma la ecuación original en un sistema lineal [9, 3]; de este modo se reduce la dificultad del problema y es posible obtener alguna información sobre la estabilidad de las soluciones por medio del teorema de Hartman–Grobman, según el cual el comportamiento cualitativo de la ecuación diferencial y la de su parte lineal son localmente equivalentes cuando en la matriz jacobiana, todos sus autovalores tienen la parte real distinta de cero. Pero ¿qué sucede cuando algún autovalor es imaginario puro, cómo en el sistema diferencial $x' = -y$, $y' = x$, donde sus soluciones llenan el plano con circunferencias concéntricas, centradas en el origen? Por ejemplo, la expansión de una aplicación de Poincaré para una perturbación sin parte lineal de $x' = -y$, $y' = x$ permite ver que el origen o bien es un foco débil o continúa siendo un centro. Sin embargo, nos gustaría saber si después de una perturbación particular de $x' = -y$, $y' = x$ es posible encontrar una órbita periódica aislada (ciclo límite). En otras palabras, se estudiará la bifurcación de un centro para entender si el comportamiento de las soluciones cambian drásticamente con respecto a las soluciones del sistema sin perturbar y acotar el número de ciclos límites, pequeños que aparecen en la perturbación. En este trabajo se usa la teoría del promedio (Averaging Theory), clásica y la más reciente variante que usa el grado de Brouwer. La teoría del promedio via el grado de Brouwer, [1] relaciona el número de soluciones T -periódicas de un sistema diferencial, cuyo campo de vectores depende de un parámetro pequeño $\epsilon > 0$, y el número de ceros de una función a la que se denomina función promedio o función de bifurcación. De este modo, el problema de acotar las soluciones T -periódicas se reduce a estudiar los ceros de alguna función entre espacios euclidianos.

El presente trabajo está dividido en tres capítulos, en el primero se presentan algunos conceptos preliminares, como por ejemplo el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias, los sistemas lineales de dos dimensiones, el mencionado teorema de Hartman–Grobman y el teorema de Poincaré–Bendixson que brinda una clasificación de muchos conjuntos α –límite y ω –límite, en el plano.

El capítulo dos empieza con un resumen de la teoría de Floquet, seguido de la versión clásica de la teoría del promedio que usa conceptos como función orden y los símbolos de Landau: \mathfrak{o} y \mathcal{O} , [12]. Este segundo capítulo incluye una breve introducción del concepto de grado para funciones en espacios de dimensión finita, el cual se usa para probar el teorema del promedio via el grado de Brouwer [1], y concluye con una aplicación de la teoría del promedio para sistemas autónomos en el plano.

El capítulo tres comienza con el teorema de reducción de Lyapunov–Schmidt que permite obtener el clásico teorema del promedio como el corolario de un resultado general y presenta una perturbación de los sistemas que admiten un centro isócrono. Este capítulo termina con algunas aplicaciones como la bifurcación de Hopf (cero) del sistema de Michelson y el número de órbitas periódicas para la ecuación diferencial de tercer grado de tipo $x''' - \mu x'' + x' - \mu x = \epsilon F(x, x', x'')$.

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo se desarrollan los teoremas básicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Por linealización y cuando sea posible se compara el sistema diferencial con el sistema lineal asociado. Se presenta el teorema del flujo tubular que permite entender el comportamiento de las soluciones cerca de los puntos regulares. La última sección incluye el teorema de Poincare-Bendixon que clasifica los conjuntos α y ω -límite en el plano; en la demostración de éste teorema es fundamental el clásico teorema de la curva de Jordan. [3, 4, 19, 18].

1.1 Definiciones y Notaciones

1.1. Se consideran ecuaciones diferenciales de la forma

$$x' = f(t, x),$$

donde $x' = \frac{dx}{dt}$ indica la derivada de x con respecto a t ,— por lo general, t se relaciona con el tiempo.— La función $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se asume continua, para garantizar la existencia de la **solución** que es una función diferenciable $\mathbb{R} \ni t \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

para todo t en el dominio de x . Para obtener la unicidad de la solución es necesario que f sea localmente Lipschitz con respecto a la segunda variable. Cuando se fija $[t_0 - a, t_0 + a] \times D$ con $a > 0$ y D abierto, se dice que f es de **Lipschitz con respecto a la segunda variable** si existe una constante $L \geq 0$ que depende de $[t_0 - a, t_0 + a] \times D$ tal que:

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad \text{por cada } x_1, x_2 \in D.$$

$L \geq 0$ es la constante de Lipschitz de f en $[t_0 - a, t_0 + a] \times D$.

Ejemplo 1.2. Si $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 en un abierto, para cada $a > 0$ y $r > 0$ con $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq r\}$ tal que $[t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x_0, r) \subset \Omega$ siempre existe $L > 0$, una constante de Lipschitz de f en $[t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x_0, r)$. En efecto, como f es continuamente diferenciable existe $L > 0$ tal que la norma de la derivada $|f'(x)| \leq L$. Por la desigualdad del valor medio [23, Pg. 237] se obtiene

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \|,$$

para todo $(t, x), (t, y) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x_0, r)$. Por lo tanto, f es de Lipschitz con respecto a la segunda variable en $[t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x_0, r)$.

Teorema 1.3. (*Existencia y unicidad*) Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dadas las constantes $a > 0$ y $d > 0$ se define el siguiente problema de valor inicial:

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

con $|t - t_0| \leq a$ y $\bar{B}(x_0, d)$ tal que $[t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x_0, d) \subset \Omega$. Si además $f(t, x)$ satisface las siguientes condiciones:

- (a) $f(t, x)$ es continua en $G = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x_0, d) \subset \Omega$.
- (b) $f(t, x)$ es de Lipschitz con respecto a la segunda variable en G .

Entonces (1.2) tiene una única solución¹ definida cuando $|t - t_0| \leq \inf(a, \frac{d}{M})$, donde $M = \text{Sup}\{|f(t, x)|; (t, x) \in G\}$ y cuya imagen está en G .

Idea de la demostración. A partir de (1.1), no es difícil ver que resolver (1.2) es equivalente a encontrar una función $x(t)$ para la cual se cumple

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

La prueba usa $C([t_0 - a, t_0 + a], \bar{B}(x_0, d))$, el espacio de las funciones continuas

$$\{\tilde{f} : [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow \bar{B}(x_0, d); \tilde{f} \text{ es continua}\},$$

con la distancia

$$d(g, h) = \sup\{|g(t) - h(t)|, t \in [t_0 - a, t_0 + a]\}.$$

¹Solución única: Por cada x_0 pasa una única curva, imagen de una solución de (1.2).

Este espacio $C([t_0 - a, t_0 + a], \overline{B}(x_0, d))$ es métrico y completo (i.e. toda sucesión de Cauchy en este espacio es convergente). Se considera la aplicación $F : C([t_0 - a, t_0 + a], \overline{B}(x_0, d)) \rightarrow C([t_0 - a, t_0 + a], \overline{B}(x_0, d))$ definida como:

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)).$$

La demostración consistirá en dar un punto fijo para F . Esto es posible pues para n , grande la composición F^n es una contracción². [19, Pg. 13] \square

Ejemplo 1.4. La ecuación diferencial

$$x' = x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

satisface las condiciones de **1.1** (vea el Ejemplo 1.2). Por cada $x_0 \in \mathbb{R}$, esta ecuación induce el problema de valor inicial

$$x' = x^2, \quad x(0) = x_0$$

cuya solución:

$$t \mapsto \frac{x_0}{1 - x_0 t} =: \phi(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

es única y satisface $\phi(0, x) = x$. Si $x_0 > 0$ la solución única correspondiente existe en el intervalo $I(t_0, x_0) = (-\infty, x_0^{-1})$. Observe que

$$|\phi(t, x_0)| \rightarrow \infty \text{ cuando } t \rightarrow x_0^{-1}.$$

Teorema 1.5. (*Soluciones maximales*) Sea f continua en el abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Suponga que por $(t_0, x_0) \in \Omega$ exista una única solución de

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.3}$$

definida en un intervalo abierto $I = I(t_0, x_0)$ ³. Si $(t_0, x_0) \in \Omega$ entonces existe una única solución $\varphi = \varphi(t, x_0, t_0)$ de (1.3) definida en un intervalo $M(t_0, x_0) = (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$ tal que toda solución ψ de (1.3) definida en I satisface $I \subseteq M(t_0, x_0)$ y $\psi = \varphi|_I$ (la restricción de φ al intervalo I).

² $F : X \rightarrow X$ es una contracción en un espacio métrico X , si existe una constante $\lambda < 1$ tal que

$$d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

para cada x, y en X , donde d es la métrica en X .

³Veá el Teorema 1.3. Por ejemplo si f es localmente lipschitziana ésta condición es satisfecha.

Demostración. Bastará elegir $M(t_0, x_0) = \cup I_{\psi}$, donde $I_{\psi} \ni t_0$ es el intervalo de definición de alguna solución ψ de (1.3). Si $t \in I_{\psi}$, se define $\varphi(t) := \psi(t)$, esta definición no depende de la solución usada, ψ . En efecto, el conjunto $C = \{t \in I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2}; \psi_1(t) = \psi_2(t)\}$ es abierto en $I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2}$ pues para todo t' , $I(t', \psi_1(t')) \subset C$. También es cerrado en $I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2}$ ya que $C = (\psi_1 - \psi_2)^{-1}(0)$. Como $I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2}$ es conexo entonces $I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2} = C$. Por lo tanto, la definición de φ no depende de la solución ψ usada. \square

1.6. Se llama **solución máxima** de

$$x' = f(t, x) \tag{1.4}$$

a toda solución φ definida en (ω_-, ω_+) , el intervalo máxima de φ . Esto significa que si ψ es otra solución en un intervalo J con $(\omega_-, \omega_+) \subseteq J$ y $\varphi = \psi|_{(\omega_-, \omega_+)}$, entonces $(\omega_-, \omega_+) = J$. En otras palabras ψ es solución máxima cuando **no** admite una extensión a otra solución.

Corolario 1.7. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Si φ es una solución máxima de (1.4), definida en (ω_-, ω_+) . Entonces la aplicación $g(t) = (t, \varphi(t))$ tiende a $\partial\Omega$ cuando $t \rightarrow \omega_{\pm}$. Es decir, por cada compacto $K \subset \Omega$ existe una vecindad V de ω_{\pm} tal que $g(t) \notin K$ para todo $t \in V$.*

Demostración. Aquí solo se demuestra para el caso asociado a ω_+ . Suponga que para algún compacto K existe una sucesión $t_n \rightarrow \omega_+$ con $g(t_n) \in K$. En consecuencia, existe una subsucesión de t_n tal que $g(t'_n)$ converge. Para $(t_0, x_0) = (\omega_+, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t'_n) \in K$ considere $a > 0$ y $d > 0$ tal que $G = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, d) \subset \Omega$. Ahora defina la vecindad $V = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(x_0, d) \subset G$ con $0 < \alpha \leq \inf\{a, \frac{d}{M}\}$ y $M = \sup\{|f(t, x)| : (t, x) \in G\}$ (como en el Teorema 1.3). Sea $V_1 = I_{\alpha/3}(t_0) \times B_{d/3}(x_0)$, $I_{\alpha/3}(t_0) = (t_0 - \alpha/3, t_0 + \alpha/3)$. Para todo $(t_1, x_1) \in V_1$ existe una solución definida en $I_{\alpha_1}(t_1)$ con $0 < \alpha_1 < \inf\{\frac{\alpha}{3}, \frac{d}{M}\}$. En efecto, aplicando el Teorema 1.3 al punto (t_1, x_1) de vecindad $V' = I_{\alpha_1}(t_1) \times B_{d_1}(x_1)$, $d_1 = \frac{\alpha M}{2}$ contenida en V encontramos una solución pasando por (t_1, x_1) definida para todo $t \in I_{\alpha_1}(t_1)$. Tomando $t_1 = t'_n$ con n suficientemente grande de modo que $g(t'_n) \in V_1$ tenemos que φ puede ser prolongada hasta $t'_n + \frac{\alpha}{2} > t_0 = \omega_+$, lo que es una contradicción. \square

Ejemplo 1.8. En general **no** es verdad que exista el límite de la solución máxima φ cuando $t \rightarrow \omega_{\pm}$, aún cuando $\omega_{\pm} < \infty$. Por ejemplo:

$$x' = -\frac{\cos(1/t)}{t^2}, \quad t > 0$$

que tiene como solución máxima la función

$$(0, +\infty) \ni t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right) \in \mathbb{R}, t > 0$$

Teorema 1.9. (Gronwall) Sean $\alpha, \phi, \psi : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ funciones continuas y $a < b$. Si α es C^1 con $\alpha'(t) \geq 0$ y además

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds,$$

entonces:

$$\phi(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

para todo $t \in [a, b]$.

Idea de la demostración. Si se supone que $\alpha(a) > 0$, entonces se tiene que $\alpha(t) \geq \alpha(a) > 0$ en el intervalo $[a, b]$. Pasando a dividir se tiene:

$$\frac{\phi(t)}{\alpha(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds} \leq 1;$$

multiplicando por $\psi(t)$ a ambos lados, sumando y restando $\alpha'(t)$ en el numerador del lado izquierdo de la desigualdad y utilizando la estimación dada como hipótesis e integrando se obtiene:

$$\ln(\alpha(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds) - \ln(\alpha(a)) \leq \int_a^t \psi(s)ds + \ln(\alpha(t)) - \ln(\alpha(a)).$$

Se concluye usando la exponencial a ambos lados. [3, Pg. 147]. □

1.1.1 Ecuaciones autónomas

1.10. Una **ecuación autónoma** no involucra la variable t , es decir

$$x' = f(x). \tag{1.5}$$

Usualmente, la aplicación $f = (f_1, \dots, f_n)$ se identifica con

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

el **campo vectorial** asociado a (1.5). Geométricamente, φ es una solución de (1.5) si y solo si $\varphi'(t)$, su vector velocidad en t coincide con el valor de f en $\varphi(t)$. Las soluciones pueden no estar definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ pero es posible reparametrizarlas al multiplicar por una función positiva a $f(x)$. Se obtiene un vector paralelo con la misma dirección y orientación de forma que la solución estará definida en todo \mathbb{R} , Lema 1.11. Si este es el caso, cada solución es llamada **completa**. La ecuación (1.5) induce el **problema de valor inicial**

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0, \tag{1.6}$$

para el cual se pregunta ¿cómo se comportan las soluciones de (1.6) cuyos valores iniciales están cerca, es decir cuando tales valores se eligen dentro de una determinada $B(x_0, \delta)$? Sucede que las soluciones dependen continuamente de la condición inicial y se puede encontrar un estimativa de la variación, tal como se describe en el Teorema 1.13.

Lema 1.11. *Si en (1.5) f de clase C^1 entonces la ecuación diferencial*

$$x' = \frac{1}{1 + |f(x)|^2} f(x) \tag{1.7}$$

también está definido en \mathbb{R}^n y cada solución es completa.

Demostración. La función f es C^1 y está definida en \mathbb{R}^n . Si φ es una solución maximal con valor inicial $\varphi(0) = x_0$, entonces se tiene:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \frac{1}{1 + |f(\varphi(s))|^2} f(\varphi(s)) ds.$$

Por la desigualdad triangular y $\left| \frac{f(\varphi(t))}{1 + |f(\varphi(t))|^2} \right| \leq 1$, se cumple

$$|\varphi(t)| \leq |x_0| + t.$$

Se concluye por el Corolario 1.7 que $\varphi(t)$ está definida en todo \mathbb{R} . □

Observación 1.12. Las imágenes de las soluciones maximales dadas por (1.5) y (1.7) son iguales cuando se intersectan (i.e. definen la misma curva).

Teorema 1.13. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $x_0 \in U$ y $f \in C^1(U)$. Si (1.6) tiene una solución definida en $[a, b]$ entonces existe $\delta > 0$ y $K > 0$ tal que $y \in B(x_0, \delta)$ implica que*

$$x' = f(x), \quad x(0) = y \tag{1.8}$$

$$|\varphi(t, y) - \varphi(t, x_0)| \leq |y - x_0|e^{Kt},$$

además

$$\lim_{y \rightarrow x_0} \varphi(t, y) = \varphi(t, x_0), \text{ uniformemente, } \forall t \in [a, b] \quad (1.9)$$

Demostración. Como $[a, b]$ es compacto y $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ es continua, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : x = \varphi(t, x_0) \text{ y } a \leq t \leq b\}$ es un compacto del abierto U . Además, existe $\epsilon > 0$ tal que el conjunto compacto

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \varphi(t, x_0)| \leq \epsilon \text{ y } a \leq t \leq b\} \subset U.$$

Como $f \in C^1(U)$ entonces por el Ejemplo 1.2 f es localmente Lipschitz en U y puesto que $A \subset U$ es compacto f es lipschitziana en A . (i. e. $0 < K < \sup_{z \in A} \|Df(z)\|$). Se toma $\delta > 0$ tal que

$$\delta \leq \epsilon \quad \text{y} \quad \delta \leq \epsilon e^{-K(b-a)} \quad (1.10)$$

donde $K > 0$ es la constante de Lipschitz de f en A . Así, se cumple:

(a) Si $y \in B(x_0, \delta)$ y $\varphi(t, y)$ es la solución de (1.8), definida en su intervalo maximal (α, β) entonces $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$

Demostración de (a). Si $\beta \leq b$, se afirma que $\varphi(t, y) \in A$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$. De lo contrario existirá algún $t' \in (\alpha, \beta)$ tal que $\varphi(t', y) \notin A$ y además $\varphi(t, x_0) \in A$ para $t \in (\alpha, t']$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} |\varphi(t, y) - \varphi(t, x_0)| &\leq |y - x_0| + \int_0^t |f(\varphi(s, y)) - f(\varphi(s, x_0))| ds \\ &\leq |y - x_0| + K \int_0^t |\varphi(s, y) - \varphi(s, x_0)| ds, \forall t \in (\alpha, t']. \end{aligned}$$

Por el Teorema 1.9 y al evaluar en $t = t'$ se obtiene:

$$|\varphi(t', y) - \varphi(t', x_0)| \leq |y - x_0|e^{K|t'|}.$$

Como $t' < \beta \leq b$ y $|y - x_0| \leq \delta$ (pues $y \in B(x_0, \delta)$), por (1.10) se cumple

$$|\varphi(t', y) - \varphi(t', x_0)| \leq |y - x_0|e^{K|t'|} \leq \delta e^{K(b-a)} < \epsilon,$$

es decir $\varphi(t', y) \in A$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x(t, y) \in A$ para $t \in (\alpha, \beta)$. Por el Corolario 1.7, (α, β) no sería el intervalo maximal de $\varphi(t, y)$. Esta contradicción muestra que $b < \beta$. Por lo tanto, (a) es verdadero porque el caso $\alpha < a$ es similar. \square

$$\begin{aligned} |\varphi(t, y) - \varphi(t, x_0)| &\leq |y - x_0| + \int_0^t |f(\varphi(s, y)) - f(\varphi(s, x_0))| ds \\ &\leq |y - x_0| + K \int_0^t |\varphi(s, y) - \varphi(s, x_0)| ds, \forall t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Por el Teorema 1.9

$$|\varphi(t, y) - \varphi(t, x_0)| \leq |y - x_0| e^{Kt} \text{ para todo } t \in [a, b]$$

de esto sigue (1.9). Para más detalle, vea [18, Pg. 91]. \square

Teorema 1.14. *Considere (1.6) con $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable en el abierto U . Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1.- Existencia y unicidad de soluciones maximales: *Por cada $x \in U$ existe un intervalo $I_x = I(x)$ donde esta definida una única solución máxima φ_x de (1.5) tal que $\varphi_x(0) = x$.*

2.- Propiedad de grupo: *Como $f \in C^1(U)$ entonces para todo $x_0 \in U$, cuando $t \in I(x_0)$ y $s \in I(\varphi_t(x_0))$, se cumple*

$$s + t \in I(x_0) \quad \text{y} \quad \varphi_{s+t}(x_0) = \varphi_s(\varphi_t(x_0)).$$

3.- Diferenciabilidad: *El conjunto $D = \{(t, x); x \in U, t \in I(x)\}$ es abierto en \mathbb{R}^{n+1} y la aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi : D &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto \varphi_x(t) \end{aligned}$$

es de clase C^1 , en las dos variables.

Demostración. Se dará una descripción de la prueba, dada en [18, Pg. 96].

1.- Sigue de los teoremas: 1.3 y 1.5. (Vea Ejemplo 1.2).

2.- Sea $s > 0, t \in I(x_0)$ y $s \in I(\varphi_t(x_0))$, y el intervalo maximal $I(x_0) = (\alpha, \beta)$.

Se define la función $x : (\alpha, s + t] \rightarrow U$ dada por

$$x(r) = \begin{cases} \varphi(r, x_0), & \text{si } \alpha < r \leq t; \\ \varphi(r - t, \varphi_t(x_0)), & \text{si } t \leq r \leq s + t. \end{cases}$$

Se observa que $x(0) = x_0$ y así $x(r)$ será la solución de (1.6) definida en $(\alpha, s + t]$.

Por lo tanto, $s + t \in I(x_0)$, y por la unicidad de soluciones se tiene

$$\varphi(s + t) = x(s + t) = \varphi(s, \varphi_t(x_0)) = \varphi_s(\varphi_t(x_0)).$$

Además, si $s = 0$ el teorema se cumple de forma inmediata y cuando $s > 0$ se considera la función $x : [s + t, \beta) \rightarrow U$ dada por

$$x(r) = \begin{cases} \varphi(r, x_0), & \text{si } t \leq r < \beta; \\ \varphi(r - t, \varphi_t(x_0)), & \text{si } s + t \leq r \leq t. \end{cases}$$

3.- D es abierto en \mathbb{R}^n . En efecto, si $(t_0, x_0) \in D$; por la definición de D se tiene que la solución $x(t) = \phi(x, t_0)$ está definida en $[0, t_0]$. Como t_0 es finito, $x(t)$ se extiende a un intervalo de la forma $[0, t_0 + \epsilon]$. Así, $\varphi(x, t_0)$ está definida en un intervalo $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ y del Teorema 1.13 existe una vecindad de x_0 $B(x_0, \delta)$ tal que $\phi(t, y)$ está definida en $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times B(x_0, \delta)$, es decir $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times B(x_0, \delta) \in D$ por lo tanto D es abierto en $\mathbb{R} \times U$.

Por otro lado, Teorema 1.13 implica que $\varphi \in C^1((t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times B(x_0, \delta))$, pero como (t_0, x_0) son arbitrarios se tiene que $\varphi \in C^1(D)$. \square

Definición 1.15. La función $\phi : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $(t, x) \mapsto \phi(t, x)$ es llamada **flujo** si

- $\phi(0, x) = x$.
- $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$,

siempre que ambos lados de la igualdad están bien definidos. La parte 3 del teorema anterior da un ejemplo de flujo para el cual se cumple

$$\frac{d}{dt}(\varphi_x(t)) = f(\varphi_x(t)) \text{ para todo } (t, x) \in D.$$

Este es llamado el **flujo asociado** a la ecuación (1.6), dada por el campo vectorial $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y D , su dominio, es abierto.

Ejemplo 1.16. Considere la ecuación de segundo grado

$$x'' + x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Por un cambio de variable, $x'' + x = 0$ induce una ecuación autónoma con dos variables (en general esto se puede hacer siempre). Específicamente, al hacer $y = x'$ se obtiene $y' = x'' = -x$, junto al siguiente sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

cuya matriz fundamental basada en cero⁴ es $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

El flujo asociado al sistema está dado por

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x) &\mapsto \phi(t, x), \end{aligned}$$

donde

$$\phi(t, x) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

El retrato de fase se describe en la figura 1.1.

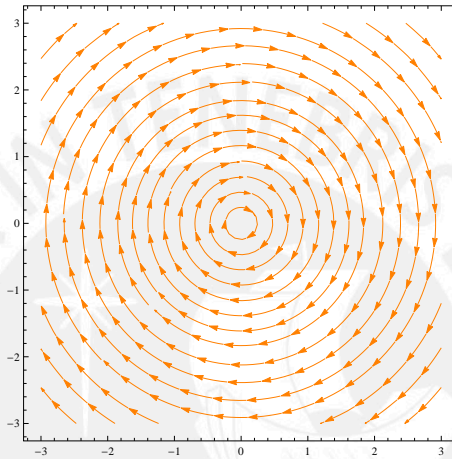


Figure 1.1: Centro

Ejemplo 1.17. Considere

$$x'' - x = 0.$$

De forma similar, $y = x'$ induce la siguiente ecuación de primer orden

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

⁴Sea el sistema lineal homogéneo $x' = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$. Una función matricial $t \rightarrow \Phi(t)$, definida en un intervalo abierto J , es llamada matriz solución del sistema si cada una de sus columnas es una solución. Esta matriz solución es la matriz fundamental si sus columnas definen funciones linealmente independientes. Además tal solución $t \rightarrow \Phi(t)$ se denomina matriz fundamental basada en t_0 cuando la imagen $\Phi(t_0)$ es la matriz identidad. Observe que $\Phi(t) = e^{tA}$ es la matriz fundamental basada en cero de $x' = Ax$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t} + e^t}{2} & \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t - e^{-t}}{2} & \frac{e^{-t} + e^t}{2} \end{pmatrix}.$$

El flujo asociado al sistema está dado por

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x) &\mapsto \phi(t, x), \end{aligned}$$

donde

$$\phi(t, x) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t} + e^t}{2} & \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t - e^{-t}}{2} & \frac{e^{-t} + e^t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

y el retrato de fase se describe en la figura 1.2.

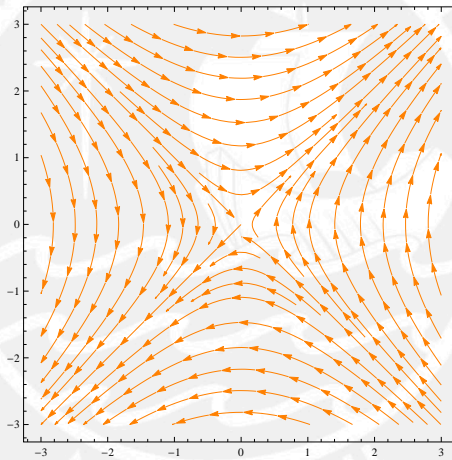


Figure 1.2: Silla

1.18. Si $\phi(t)$ es una solución de (1.5) entonces $t \mapsto \phi(t - t_0)$ también lo es, por cada constante t_0 . En efecto, si se hace el cambio $\tau = t - t_0$, $\phi'(\tau) = f(\phi(\tau))$ y al volver a la variable original se obtiene $\phi'(t - t_0) = f(\phi(t - t_0))$, así $\phi(t - t_0)$ es solución de (1.5). En particular, si $\text{sen}(t)$ es solución de (1.5) entonces también lo será $\text{cos}(t)$ la razón es que se obtiene $\text{cos}(t)$ de $\text{sen}(t)$ por la transformación $t \rightarrow t - \frac{\pi}{2}$, se nota que $t - \frac{\pi}{2}$ debe caer en el dominio de la función.

1.19. En la Observación 1.12, las soluciones maximales de algunos sistemas autónomos distintos definen la misma curva.

- Sean X_1 y X_2 dos campos vectoriales definidos en abiertos $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^n$, respectivamente. Se dice que X_1 es **topológicamente equivalente** (respectivamente **C^r -equivalente**) a X_2 cuando existe un homeomorfismo (respectivamente un difeomorfismo de clase C^r) $h : U_1 \rightarrow U_2$ que lleva las órbitas de X_1 en órbitas de X_2 preservando la orientación. Es decir, cuando $p \in U_1$ y $\gamma^1(p)$ es la órbita orientada⁵ de X_1 pasando por p entonces $h(\gamma^1(p))$ es la órbita orientada de X_2 pasando por $h(p)$. Esta definición establece una relación de equivalencia y el homeomorfismo h se llama equivalencia topológica entre X_1 y X_2 .
- Considere $\varphi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, los flujos inducidos por $X_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $X_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente. Se dice que el campo X_1 es **topológicamente conjugado** (respectivamente **C^r -conjugado**) a X_2 cuando existe un homeomorfismo (respectivamente un difeomorfismo de clase C^r) $h : U_1 \rightarrow U_2$ tal que

$$h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x)) \quad \forall (t, x) \in D_1.$$

Ejemplo 1.20. Considere los siguientes ejemplos.

(a) La aplicación $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $h(x, y) = (x, y + \frac{x^3}{4})$ es una conjugación topológica entre $X(x, y) = (x, -y)$ y $Y(x, y) = (x, -y + x^3)$.

(b) Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ dos matrices con $a > 0$ y $b > 0$.

Los sistemas $x' = Ax$ y $x' = Bx$ definen centros cuyas órbitas periódicas tienen periodo $2\pi/a$ y $2\pi/b$, respectivamente. Si $a \neq b$ estos sistemas **no** son conjugados, pero $h(x) = x$ genera una equivalencia topológica entre ellos.

(c) Hartman probó en [10] que si $a > b > 0$ y $c \neq 0$ entonces **no** existe una C^1 -conjugación en una vecindad del origen para el sistema

$$x' = ax, \quad y' = (a - b)y + cxz, \quad z' = -bz$$

y su parte lineal. Además, presentó los siguientes resultados:

⁵La **órbita orientada** o **trayectoria** de X_1 pasando por p es la imagen (curva parametrizada) de la solución maximal $t \mapsto \gamma_p^1(t)$ del problema de valor inicial

$$x' = X_1(x), \quad x(t_0) = p \quad \text{para algún } t_0 \in \mathbb{R}.$$

Observe que se identifica la solución con la curva orientada $\gamma^1(p) : t \rightarrow \gamma_p^1(t)$.

- Si un campo vectorial C^2 tiene un punto singular⁶ donde todos los autovalores tiene la parte real negativa (o la parte real positiva) entonces el campo es localmente C^1 -conjugado a su parte lineal.
- Si un campo vectorial planar tiene un punto singular hiperbólico (Definición 1.31), el campo es localmente C^1 -conjugado a su parte lineal.

Lema 1.21. Sean $X_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $X_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos vectoriales C^r y $h : U_1 \rightarrow U_2$ un difeomorfismo de clase C^r con $r \geq 1$. Entonces h es una conjugación entre X_1 y X_2 si y solamente si

$$Dh_p X_1(p) = X_2(h(p)) \text{ para todo } p \in U_1.$$

Demostración. Sean $\varphi_1 : D_1 \rightarrow U_1$ y $\varphi_2 : D_2 \rightarrow U_2$ los flujos de X_1 y X_2 respectivamente suponga que h satisface la relación. Dado $p \in U_1$ sea $\psi(t) = h(\varphi_1(t, p))$, entonces ψ es solución de $x' = X_2(x)$, $x(0) = h(p)$ ya que

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= Dh(\varphi_1(t, p)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t, p) \\ &= Dh(\varphi_1(t, p)) X_1(\varphi_1(t, p)) \\ &= X_2(h(\varphi_1(t, p))) \\ &= X_2(\psi(t)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$. Recíprocamente, si se asume que h es una conjugación para $p \in U_1$ se tiene $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$ al derivar esta relación y evaluar en $t = 0$ se concluye. Vea [19, Pg. 221]. \square

1.22. Sean $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^r , $r \geq 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un abierto. Una aplicación $f : A \rightarrow U$, de clase C^r se llama **sección transversal local de X** (de clase C^r , $r \geq 1$) si para todo $a \in A$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ y $X(f(a))$ generan \mathbb{R}^n . Por ejemplo cuando $\{v_1, \dots, v_{n-1}, X(p)\}$ es una base de \mathbb{R}^n . Para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, $f : B(0, \delta) \rightarrow U$ dada por

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}) = p + \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i$$

es una sección transversal local de X en p , definida en la bola abierta $B(0, \delta)$.

⁶Sea $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial, $p \in U$ es llamado punto **singular** de X , si $X(p) = 0$. En caso de que esto no ocurra, el punto p se denomina punto **regular** el campo.

Teorema 1.23. (Flujo tubular) Sea p un punto regular de $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, un campo de de clase C^r (i.e $X(p) \neq 0$) y $f : A \rightarrow \Sigma$ una sección transversal local de X de clase C^r con $f(0) = p$. Entonces existe una vecindad V de p en U y un difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B(0, \epsilon)$ de clase C^r tal que:

- (a) $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B(0, \epsilon)$;
- (b) h es una C^r -conjugación entre la restricción $X|_V$ y el campo constante $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

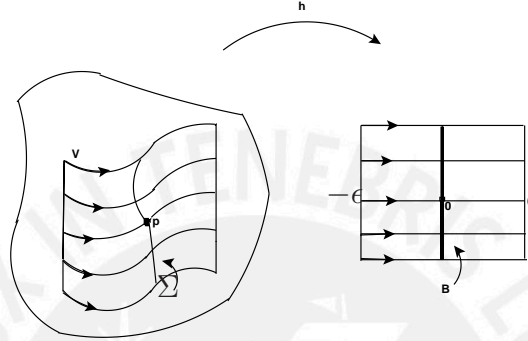


Figure 1.3: Flujo tubular

Demostración. Sea $\varphi : D \rightarrow U$ el flujo asociado (ver Definición 1.15) de X . Sea $D_A := \{(t, u) : (t, f(u)) \in D\}$ (es abierto ya que D y A los son) y $F : D_A \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $F(t, u) = \varphi(t, f(u))$. F aplica líneas paralelas en curvas integrales de X . Se probará que F es un difeomorfismo local en $0 = (0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Por el teorema de la función inversa es suficiente probar que $DF(0)$ es un isomorfismo. Se tiene que $D_1F(0) = \frac{d}{dt}\varphi(t, f(0))|_{t=0} = X(\varphi(0, p)) = X(p)$ y $D_jF(0) = D_{j-1}f(0)$ para todo $j = 2, \dots, n$ pues $\varphi(0, f(u)) = f(u), \forall u \in A$. Como f es transversal, los vectores $D_jF(0), j = 1, \dots, n$ generan \mathbb{R}^n y $DF(0)$ es un isomorfismo.

Por el teorema de la función inversa existe $\epsilon > 0$ y una bola abierta $B = B(0, \epsilon)$ en \mathbb{R}^{n-1} con centro en el origen tal que $F : (-\epsilon, \epsilon) \times B$ es un difeomorfismo sobre el abierto $V = F((-\epsilon, \epsilon) \times B)$. Sea $h = (F|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B})^{-1}$ entonces $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$ pues $F(0, u) = f(u) \in \Sigma$ para todo $u \in B$ lo que prueba la parte a), por otro lado h^{-1} conjuga X e Y pues $Dh^{-1}(t, u)Y(t, u) = DF(t, u).(1, 0, \dots, 0) = D_1F(t, u) = X(\varphi(t, f(u))) = X(F(t, u)) = X(h^{-1}(t, u))$. Vea [19, Pg. 222] □

Corolario 1.24. Sea Σ una sección transversal de X . Para todo punto $p \in \Sigma$ existen $\epsilon = \epsilon(p) > 0$, una vecindad V de p en \mathbb{R}^n y una función $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k tales que $\tau(V \cap \Sigma) = 0$ y

- (a) Para todo $q \in V$, la curva integral $\varphi(t, q)$ de $X|V$ está definida y es biunívoca en $J_q = (-\epsilon + \tau(q), \epsilon + \tau(q))$.
- (b) $\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$ es el único punto donde $\varphi(\cdot, q)|_{J_q}$ intercepta a Σ . En particular $q \in \Sigma \cap V$ si y solo si $\tau(q) = 0$.
- (c) $\xi : V \rightarrow \Sigma$ de clase C^k y $D\xi(q)$ es sobreyectiva para todo $q \in V$. Además $D\xi(q).v = 0$ si y solo si $v = \alpha X(q)$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sean h , V y ϵ como en el Teorema 1.23. Se denota $h = (-\tau, \eta)$. El campo Y de este teorema satisface el corolario. Como h es una C^r -conjugación, X satisface las afirmaciones. [19, Pg. 223], [4, Pg. 10] \square

1.1.2 Estabilidad y linealización: Hartman - Grobman

1.25. Considere la ecuación

$$x' = f(x) \tag{1.15}$$

con $x \in U \subset \mathbb{R}^n$. U es llamado **espacio-fase**, y si f tiene un cero en $x = a \in U$, a es llamado punto **singular** de la ecuación. Por ejemplo (1.11) y (1.13) admiten al origen como punto singular.

Definición 1.26. Sea x_0 un punto en el dominio de la ecuación diferencial (1.15) cuyo flujo inducido se denota por $\phi(t, x) = \phi_t(x)$. La solución $t \mapsto \phi_t(x_0)$ es **estable** (en el sentido de Lyapunov) si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\phi_t(x) - \phi_t(x_0)| < \epsilon, \forall t > 0$ siempre que $|x - x_0| < \delta$; si además existe una constante a tal que $|x - x_0| < a$ implica $\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi_t(x) - \phi_t(x_0)| = 0$ entonces la solución se denomina **asintóticamente estable**.

Ejemplo 1.27. Se considera los siguientes ejemplos

- (a) Considere $x' = -x, t \geq 0, x = 0$ es un punto singular de la ecuación, además $x(t) = 0, t \geq 0$ es una solución de equilibrio. Se tiene que la función $x(t) = x_0 e^{-t}$ es una solución del sistema y además $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, lo que nos dice que $x = 0$ es estable en el sentido de Lyapunov.
- (b) El ejemplo anterior es asintóticamente estable.

(c) En el sistema (1.11) tenemos que el origen es estable pero no asintóticamente estable ya que sus trayectorias son circunferencias concéntricas con centro el origen, es decir la solución siempre va a pertenecer a la circunferencia para todo t ya que es compacta, luego el limite de la trayectoria cuando $t \rightarrow \infty$ no es cero.

1.28. En el análisis de las singularidades se considera la parte lineal de la ecuación en una vecindad del punto singular y se asume la existencia de una expansión de Taylor. Si por ejemplo, si se supone $f(a) = 0$ entonces, alrededor de la singularidad, (1.15) se escribe como

$$x' = Df(a)(x - a) + \frac{1}{2}D^2f(a)(x - a)^2 + \dots$$

Despreciando los términos de orden mayor, se obtiene

$$y' = Df(a)(y - a).$$

Para simplificar se hace $z = y - a$ obteniendo $z' = Df(a)z$ donde $Df(a) = A$ es una matriz con coeficientes constantes. La **linearización** consiste en esperar que el comportamiento del sistema no lineal $x' = f(x)$, cerca de $x = a$ sea aproximado por el comportamiento de su parte lineal en $x = a$, i.e $z' = Df(a)z$.

Ejemplo 1.29. Considere la ecuación $x'' + \text{sen}(x) = 0, -\pi \leq x \leq \pi$. Si se hace $y = x'$ entonces $y' = x'' = -\text{sen}(x)$, y se obtiene:

$$x' = y, \quad y' = -\sin(x).$$

Los puntos singulares son $(0, 0), (-\pi, 0), (\pi, 0)$. La expansión en $(0, 0)$

$$x' = y, \quad y' = -x + \text{términos de orden mayor.}$$

La expansión alrededor de $(\pm\pi, 0)$ es

$$x' = y, \quad y' = (x \pm \pi) + \text{términos de orden mayor.}$$

Ejemplo 1.30. (Lotka–Volterra) En $[0, \infty) \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$, considere el sistema:

$$x' = ax - bxy, \quad y' = bxy - cy,$$

donde $a > 0, b > 0$ y $c > 0$ son constantes. Las singularidades son $(0, 0)$ y $(\frac{c}{b}, \frac{a}{b})$, además:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ bxy - cy \end{pmatrix} \text{ y } Df(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ by & bx - c \end{pmatrix}$$

$$x' = ax, \quad y' = -cy$$

cuyas soluciones son de la forma

$$x(0) \exp(at) \quad y \quad y(0) \exp(-ct).$$

En una vecindad de $(\frac{c}{b}, \frac{a}{b})$ se obtiene

$$x' = -c(y - \frac{a}{b}), \quad y' = a(x - \frac{c}{b})$$

y sus soluciones son combinaciones de $\cos(\sqrt{act})$ y $\sin(\sqrt{act})$.

Definición 1.31. Un punto singular $x_0 \in \mathbb{R}^n$ de f es **hiperbólico** si la matriz $Df(x_0)$ tiene todos sus autovalores con parte real distinta de cero (i.e la matriz es hiperbólica). Si todos los autovalores de $Df(x_0)$ tienen la parte real negativa es llamado **atractor**. Si todos tienen parte real positiva es llamado **repulsor**. Si la singularidad hiperbólica tiene al menos dos autorvalores cuyas partes reales tienen signos distintos, el punto será llamado **silla**.

Ejemplo 1.32. Sea $x' = f(x)$ donde $f(x) = (x_1^2 - x_2^2 - 1, 2x_2)$, se tiene que $f(x) = 0$ cuando $x = (1, 0)$ y $x = (-1, 0)$ y además

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Df(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } Df(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $(1, 0)$ es repulsor y $(-1, 0)$ es silla. Figura 1.4.

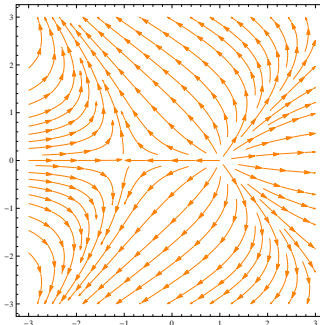


Figure 1.4: Repulsor y silla

1.33. En páginas anteriores anterior se linealizó el sistema $x' = f(x)$ en una vecindad de un punto singular obteniendo como resultado la ecuación:

$$y' = Ay, \tag{1.16}$$

donde A es una matriz constante de orden $n \times n$ y el punto singular fue trasladado al origen. En esta sección se excluye el caso en que $\det(A) = 0$ y en análisis de (1.16) se usan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los autovalores de A , dados por la **ecuación característica**

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

1.34. Si $f(p) \neq 0$ con f de clase C^r y $r \geq 1$. Por el Teorema 1.23, el flujo inducido por (1.15) es localmente conjugado a un campo constante. Por esta observación se describe el comportamiento local cualitativo de las órbitas de un campo vectorial en torno a sus puntos regulares, pues apenas existe una clase de conjugación. Si $f(p) = 0$, la situación se complica. Por ejemplo, solo en \mathbb{R}^2 aparecen sillas, centros, nodos, etc. Sin embargo, cuando p es un punto singular hiperbólico existe una conjugación entre el campo y su parte lineal.

Teorema 1.35. (Hartman–Grobman) Sea $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $X(0) = 0$. Si $A = Df(0)$, la derivada de X en el origen es hiperbólica entonces X es localmente conjugado a A en el origen.

Demostración. Ver Chicone [3, Pg. 359] □

Corolario 1.36. Si A es una matriz de orden $n \times n$, son equivalentes:

1.- Existe una norma $|\cdot|_a$ en \mathbb{R}^n y $\mu > 0$ tal que

$$|e^{tA}v|_a \leq \exp(-\mu t)|v|_a, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0.$$

2.- Por cada norma $|\cdot|_g$ en \mathbb{R}^n existen $\mu > 0$ y $C > 0$ tal que

$$|e^{tA}v|_g \leq C \exp(-\mu t)|v|_g, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0.$$

3.- La parte real de cada autovalor de A es negativa.

Demostración. Ver Chicone [3, Pg. 174] □

1.37. El Lema 1.7 dice que en una ecuación diferencial autónoma es posible reparametrizar el tiempo de modo que el flujo este definido para todo \mathbb{R} sin afectar el espacio de fase, por eso para estudiar los conjuntos que no cambian basta considerar las ecuaciones $x' = f(x), x \in U \subset \mathbb{R}^n$ que inducen flujos completos y dar la siguiente definición. El conjunto $M \subset U$ es llamado **invariante** si $x(0) \in M$ implica que la solución $x(t)$ está contenida en M para $t \in \mathbb{R}$. Si esta propiedad solo se cumple para $t \geq 0$ ($t \leq 0$) el conjunto M será llamado **positivamente invariante** (**negativamente invariante**).

Ejemplo 1.38. Los puntos singulares y las trayectorias son ejemplos triviales de conjuntos invariantes. Un ejemplo no trivial es construido con el sistema

$$x_1' = -x_1, \quad x_2' = x_2 + x_1^2$$

con la condición inicial $x(0) = c, c = (c_1, c_2)$. Su solución viene dada por:

$$\phi_t(c) = \phi(t, c) = \left(c_1 e^{-t}, c_2 e^t + \frac{c_1^2}{3} (e^{-t} - e^{-2t}) \right).$$

Si $c_2 = -\frac{c_1^2}{3}$, en las coordenadas de la solución solo hay términos que dependen de e^{-t} y estos tienden a cero cuando $t \rightarrow +\infty$, por ello se toma el conjunto

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -\frac{x_1^2}{3} \right\},$$

S es invariante por el flujo, en efecto: Si $c \in S$, entonces $c_2 = -\frac{c_1^2}{3}$ y la solución

$$\phi_t(c) = \left(c_1 e^{-t}, -\frac{c_1^2}{3} e^{-2t} \right),$$

por lo tanto S es invariante por el flujo para todo $t \in \mathbb{R}$.

1.39. Muchas ecuaciones diferenciales puede ser ‘integradas’ construyendo relaciones entre las componentes de la solución. Por ejemplo, en $x'' + x = 0$ integrando se tiene $\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}x^2 = E$, donde $E \geq 0$ puede ser determinada por la condición inicial. En el espacio fase esta relación associa a cada $E > 0$ una circunferencia centrada en el origen. En general, si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son diferenciables, la derivada $L_t F$ de F a lo largo de X parametrizada por t es:

$$L_t F = \frac{\partial F}{\partial x} x' = \frac{\partial F}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial F}{\partial x_2} x_2' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} x_n'$$

donde x_1, x_2, \dots, x_n son las componentes de X . Si X es una solución del sistema $x' = f(x)$, la función F es llamada **integral primera** de la ecuación

si $L_t F = 0$. Por ejemplo, para (1.11) y (1.13) tenemos que

$$F_1(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \quad \text{y} \quad F_2(x, y) = \frac{-x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

son integrales primeras de los respectivos sistemas.

Definición 1.40. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ . Si $DF(a) = 0$, a es llamado **punto crítico** de F . Este punto crítico de F es **no degenerado** si además $\| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a) \| \neq 0$. F es una **función de Morse** cuando todos sus puntos críticos son no degenerados. Por ejemplo, el origen es un punto crítico no degenerado de las siguientes funciones

$$x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad x^2 - 2y^2.$$

Proposición 1.41. (Lema de Morse, [16]) Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^r con $r \geq 2$. Si el origen es un punto crítico no degenerado con índice⁷ k , entonces en una vecindad del origen existe un difeomorfismo que transforma F en:

$$G(y) = G(0) - y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2$$

Demostración. Vea [22, Pg. 513] □

Ejemplo 1.42. Considere $x'' + f(x) = 0$ con $f(x)$ de clase C^∞ . Si $y = x'$ entonces $y' = x'' = -f(x)$ induce

$$x' = y, \quad y' = -f(x).$$

Si $f(a) = 0$, $(a, 0)$ es una singularidad, si se traslada a al 0 la linealización produce:

$$x' = y, \quad y' = -f_x(0)x + \text{terminos de orden mayor}$$

cuyos autovalores son: $\lambda = \pm \sqrt{-f_x(0)x}$. Así se tiene que:

Si $f_x(0)x < 0$ entonces $(0, 0)$ es un centro.

Si $f_x(0)x > 0$ entonces $(0, 0)$ es un punto silla.

La integral primera de la ecuación es

$$F(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(s)ds$$

⁷El índice de p inducido por $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la dimensión maximal del subespacio donde la Hessiana, $D^2F(p)$ es definida negativa.

ya que su derivada a lo largo de la curva solución es cero. Además, $F(x, y)$ en una vecindad de $(0, 0)$ es una función de Morse con expansión:

$$F(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}f_x(0)x^2 + \text{terminos de orden mayor.}$$

Si $f_x(0)x > 0$ entonces por el lema de Morse existe una transformación a la forma cuadrática $z_1^2 + z_2^2$ índice $k = 0$ así también se tiene en el sistema no lineal órbitas homomorfas a S^1 (centro no lineal). Si $f_x(0)x < 0$ entonces por el lema de Morse existe una transformación a la forma cuadrática $z_2^2 - z_1^2$ de índice $k = 1$ así se obtiene un punto silla.

Ejemplo 1.43. Considere las ecuaciones de Lotka–Volterra del Ejemplo 1.30. La ecuación de sus órbitas en el espacio fase es:

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{x}{y}\right) \frac{a - by}{bx - c}.$$

Si se integra se tiene para $x, y > 0$:

$$bx - c \ln(x) + by - a \ln(y) = C$$

donde C es una constante determinada por las condiciones iniciales. La expresión

$$F(x, y) = bx - c \ln(x) + by - a \ln(y)$$

es la integral primera de las ecuaciones de Volterra–Lotka. Además, $F(x, y)$ es una función de Morse en una vecindad de $(\frac{c}{b}, \frac{a}{b})$ con expansión :

$$F(x, y) = F\left(\frac{c}{b}, \frac{a}{b}\right) + \frac{b^2}{2c}\left(x - \frac{c}{b}\right)^2 + \frac{b^2}{2a}\left(y - \frac{a}{b}\right)^2 + \dots$$

El punto crítico tiene índice cero y por el lema de Morse las órbitas son homeomorfas a S^1 .

Lema 1.44. Considere la ecuación $\dot{x} = f(x)$ en \mathbb{R}^n y un dominio $D(0)$ en \mathbb{R}^n que suponemos tiene por volumen $v(0)$. El flujo define una función de $D(0)$ en \mathbb{R}^n , $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D(t) = \varphi^t D(0)$. Para el volumen $v(t)$ en $D(t)$ tenemos:

$$\frac{dv(0)}{dt} = \int_{D(0)} \text{div}(f) dx,$$

donde $\text{div}(f)$ es la divergencia de f , $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$.

Demostración. De la definición del jacobiano se tiene que:

$$v(t) = \int_{D(0)} \left\| \frac{\partial \varphi^t(x)}{\partial x} \right\| dx.$$

Expandiendo en una vecindad del origen se tiene: $\varphi^t(x) = x + f(x)t + O(t^2)$

para $t > 0$, de lo cual resuta:

$$\frac{\partial \varphi^t(x)}{\partial x} = I + \frac{\partial f}{\partial x}t + O(t^2),$$

donde I es la matriz identidad de orden $n \times n$, y

$$\left\| \frac{\partial \varphi^t(x)}{\partial x} \right\| = \left\| I + \frac{\partial f}{\partial x}t \right\| + O(t^2) = 1 + \text{Tr}\left(\frac{\partial f}{\partial x}t\right) + O(t^2).$$

Pero como $\text{Tr}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \text{div}(f)$, entonces:

$$v(t) = v(0) + \int_{D(0)} t \text{div}(f) dx + O(t^2).$$

Lo que nos da el lema. □

Teorema 1.45. (Liouville) *El flujo generado por un sistema Hamiltoniano⁸ independiente de tiempo preserva volumen.*

Demostración. Se tiene que $\text{div}(f) = 0$, luego por el lema anterior resulta que $v'(t_0) = 0$ para $t_0 = 0$ y $\forall t_0 \in \mathbb{R}$. □

1.1.3 Sistemas lineales de dimension dos

1.46. Aquí la matriz A es cuadrada de orden 2, en el caso que los autovalores λ_1, λ_2 sean reales o complejos conjugados, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y la forma de Jordan real $T^{-1}AT$ es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

entonces la solución general es dada por:

$$z(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Según las elecciones de λ_1, λ_2 se tiene los siguientes casos:

⁸Un sistema Hamiltoniano inducido por las derivadas parciales de $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es

$$x' = -H_y(x, y), \quad y' = H_x(x, y).$$

El nodo. Los autovalores son reales y tienen el mismo signo.

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $z_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ y $z_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$.

Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, entonces $(0, 0)$ es llamado nodo atractor.

Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, entonces $(0, 0)$ es llamado nodo repulsor.

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, la forma de Jordan es en general de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Donde las soluciones del sistema son:

$$z_1(t) = c_1 e^{(\lambda t)} + c_2 t e^{(\lambda t)} \quad y \quad z_2(t) = c_2 t e^{(\lambda t)}.$$

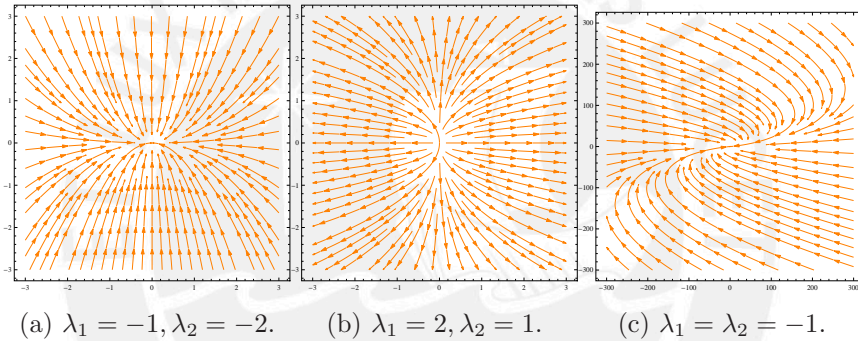


Figure 1.5: Nodos

Punto silla. Los autovalores λ_1, λ_2 son reales y tienen signo distinto las soluciones están dadas por:

$$z(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{(\lambda_1 t)} \\ c_2 e^{(\lambda_2 t)} \end{pmatrix}$$

El comportamiento de las órbitas es hiperbólico. Figura 1.2.

El foco (fuerte). Los autovalores son complejos conjugados con la parte real distinta de cero.

Las soluciones complejas son de la forma:

$$e^{(u+wi)t}$$

Las combinaciones lineales de las soluciones complejas produce soluciones independientes de la forma:

$$e^{ut} \cos(wt), \quad e^{ut} \sin(wt)$$

Las órbitas son espirales entrando o saliendo (según sea el signo de w) de $(0, 0)$ y llamamos a $(0, 0)$ un foco. Figura 1.6

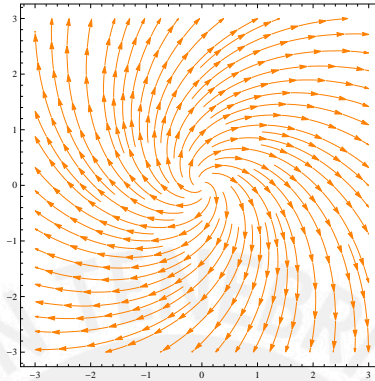


Figure 1.6: Foco repulsor $\lambda_1 = 1 - i, \lambda_2 = 1 + i$.

El centro. En el caso especial en que los autovalores son imaginarios puros, $(0, 0)$ es llamado centro. Las órbitas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ son compactas, homeomorfas a una circunferencia. Vea la figura 1.1

1.1.4 Puntos singulares de ecuaciones no lineales

1.47. Hasta aquí se estudió los puntos singulares de $x' = f(x)$ por análisis lineal. La singularidad se traslada al origen y se estudia:

$$x' = Ax + g(x) = f(x), \tag{1.17}$$

donde se asume que A es una matriz no singular de orden $n \times n$ y que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Así, algunas propiedades de $x' = Ax$ se mantienen para $x' = f(x)$.

Teorema 1.48. En \mathbb{R}^n , considere la ecuación

$$x' = Ax + B(t)x + f(t, x); \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.18}$$

donde A es una matriz tal que todos sus autovalores tienen la parte real negativa; $B(t)$ es una función continua tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$. Si f es continua, lipschitz en la segunda variable, en una vecindad de $x = 0$ y

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0, \text{ uniformemente en } t$$

(ésta última condición afirma que $x = 0$ es una solución) entonces existen constantes positivas C, δ, μ tal que $\|x_0\| \leq \delta$ implica que

$$\|x(t)\| \leq C\|x_0\|e^{-\mu(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

Demostración. Sea $\Phi(t)$ una solución de

$$\Phi' = A\Phi, \quad \Phi(t_0) = I.$$

Los autovalores de A poseen parte real negativa, existen $C > 0$ y $\mu_0 > 0$ con

$$\|\Phi(t)\| \leq Ce^{-\mu_0(t-t_0)}; t \geq t_0.$$

De la condición dada a f se tiene que para $\delta > 0$ suficientemente pequeño existe $b(\delta)$ tal que si $\|x\| < \delta$, entonces

$$\|f(t, x)\| \leq b(\delta)\|x\|, t \geq t_0,$$

(vea Corolario 1.36). Adem'as para t_0 suficientemente grande

$$\|B(t)\| \leq b(\delta), t \geq t_0.$$

Por el Teorema 1.3, en una vecindad de $x = 0$ la solución del problema (1.18) existe para $t_0 \leq t \leq t_1$, pero esta solución puede ser prolongada para $t \geq t_0$. El problema de valor inicial (1.18) es equivalente a la ecuación integral

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t-s+t_0)[B(s)x(s) + f(s, x(s))] ds \quad (1.19)$$

al usar las desigualdades para $\Phi(t)$, $B(t)$ y f se tiene para $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|\Phi(t)\|\|x_0\| + \int_{t_0}^t \|\Phi(t-s+t_0)\|[\|B(s)\|\|x(s)\| + \\ &\quad \|f(s, x(s))\|] ds \\ &\leq Ce^{-\mu_0(t-t_0)}\|x_0\| + \int_{t_0}^t Ce^{-\mu_0(t-s)}2b\|x(s)\| ds \\ e^{-\mu_0(t-t_0)}\|x(t)\| &\leq C\|x_0\| + \int_{t_0}^t Ce^{-\mu_0(s-t_0)}2b\|x(s)\| ds. \end{aligned}$$

$$\|x(t)\| \leq C\|x_0\|e^{2Cb-\mu_0(t-t_0)}. \quad (1.20)$$

Si δ y consecuentemente b son suficientemente pequeños entonces $\mu = \mu_0 - 2Cb > 0$ y se obtiene la desigualdad deseada para $t_0 \leq t \leq t_1$. Cuando, $\|x_0\|$ satisface $C\|x_0\| \leq \delta$ la desigualdad (1.20) vale para $t \geq t_0$. \square

Observación 1.49. Considere la ecuación (1.17). Si la matriz A tiene algún autovalor con parte real positiva, entonces el punto singular $x = 0$ no es un atractor positivo para la ecuación no lineal (1.17)

1.50. El conjunto invariante del Ejemplo 1.38 es una parábola. Si se hace lo mismo pero cuando $t \rightarrow +\infty$ se obtiene $\tilde{U} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$, invariante. Gráficamente, S y \tilde{U} son tangentes en la silla $(0, 0)$. Esto no es casualidad, en cada punto hiperbólico existen estos tipos de conjuntos a los que se denominan variedad estable e inestable. En general, si $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, φ el flujo asociado y S un conjunto invariante por X . Al conjunto

$$W_S^s = \{x \in U : d(\varphi(t, x), S) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$$

se denomina **conjunto estable** de S . De manera análoga se define

$$W_S^u = \{x \in U : d(\varphi(t, x), S) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\},$$

el **conjunto inestable** de S .

Observación 1.51. Si $h : U_1 \rightarrow U_2$ es una conjugación entre X_1 y X_2 , por cada conjunto invariante de X_1 su imagen $h(S) = S'$ es invariante para X_2 y

$$h(W_S^s) = W_{S'}^s, \quad h(W_S^u) = W_{S'}^u.$$

Para los sistemas lineales hiperbólicos, $S = \{0\}$ es invariante y el conjunto W_0^s es el subespacio⁹ E^s , cuya dimensión es el **índice**¹⁰ de estabilidad. Análogamente, $W_0^u = E^u$ tiene dimensión complementaria $n - i(p)$. Por el Teorema 1.35, W_p^s y W_p^u son imágenes homeomorfas de E^s y E^u , respectivamente, además son subvariedades diferenciables de \mathbb{R}^n .

⁹ E^s (E^u) es el espacio generado por los autovectores asociados a los autovalores con la parte real negativa (positiva) de $DX(p)$.

¹⁰A partir del Lema 1.21 es fácil observar que si X_1 y X_2 son conjugados por h y $X_1(p) = 0$ entonces $q = h(p)$ es un punto singular de X_2 y $\det(DX_1(p)) = \det(DX_2(q))$, es decir dos campos conjugados tienen los mismos autovalores. Al número de autovalores con la parte real negativa, $i(p)$ se le llama índice de estabilidad de X en p .

Teorema 1.52. *Sea p un punto singular hiperbólico de X , un campo vectorial de clase C^r en un abierto de \mathbb{R}^n . Existe una vecindad V de p tal que:*

- a) $W_p^s(X|_V) = \{x \in V : \varphi(t, x) \in V, \forall t \geq 0\}$.
- b) $W_p^u(X|_V) = \{x \in V : \varphi(t, x) \in V, \forall t \leq 0\}$.
- c) $W_p^s(X|_V)$ es una subvariedad diferenciable de clase C^r y su dimensión es el índice de estabilidad de p . El espacio tangente de $W_p^s(X|_V)$ en p coincide con E^s , el espacio estable de $A = DX(p)$.
- d) $W_p^u(X|_V)$ es una subvariedad diferenciable de clase C^r y su codimensión es igual al índice de estabilidad de p . El espacio tangente de $W_p^u(X|_V)$ en p coincide con E^u , el espacio inestable de $A = DX(p)$.

Demostración. Vea [19, Pg. 299] o [3, Pg. 326] □

1.2 Soluciones periódicas

1.53. Sea $\phi(t)$ una solución de $x' = f(x), x \in U \subset \mathbb{R}^n$. Si $\exists T > 0$ tal que $\phi(t + T) = \phi(t), \forall t \in \mathbb{R}$ entonces $\phi(t)$ es llamada **solución periódica** de la ecuación con periodo T . Para simplificar se dirá T -periódica.

Lema 1.54. *Cada solución periódica de $x' = f(x)$ genera una trayectoria compacta y viceversa.*

Demostración. \Rightarrow Una solución T -periódica no es inyectiva. Así la trayectoria se cortará, por unicidad de soluciones que debe ser una órbita compacta homeomorfa a S^1 , cuando $T > 0$.

\Leftarrow Sea C , una trayectoria homeomorfa a S^1 y $x_0 \in C$. Si $\phi(t)$ es la solución de $x' = f(x)$ con $\phi(0) = x_0$, por unicidad de soluciones C no contiene singularidades, esto es $\|f(x)\| \geq a > 0$ para $x \in C$. Esto implica que $\|\phi'(t)\| \geq a > 0$ además luego de un cierto tiempo $t = T$ se retorna a x_0 . Resta probar que $\phi(t + T) = \phi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es posible escribir $t = nT + t_1$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $0 < t_1 < T$. Por **1.18**, si $\phi(t)$ es una solución con $\phi(t_1) = x_1$ entonces también $\phi(t + nT)$ es una solución con $\phi(t_1 + nT) = x_1$. Por lo tanto $\phi(t_1) = \phi(t_1 + nT)$ y puesto que t_1 es cualquier valor en $(0, T)$ se tiene que $\phi(t)$ es T -periódica. □

1.2.1 Estabilidad de órbitas periódicas

1.55. Sea $\gamma = \{\varphi(t, p) : 0 \leq t \leq T\} \subset U$ una trayectoria T -periódica de $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^r con $r \geq 1$, y sea Σ una sección transversal a X en p . Por la continuidad del flujo φ de X , para cada punto $q \in \Sigma$ cercano a p la trayectoria $t \mapsto \varphi(t, q)$ está cerca de γ con t en un intervalo compacto prefijado como por ejemplo $[0, 2T]$. Se define la **aplicación de Poincaré**, $\pi : \Sigma_0 \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$ eligiendo $\pi(q)$ como el primer punto donde $t \mapsto \varphi(t, q)$ intercepta a Σ , en particular $p \in \Sigma_0$ y $\pi(p) = p$. Las órbitas periódicas de X vecinas de γ corresponden a los puntos periódicos de π que son puntos $q \in \Sigma_0$ para los cuales $\pi^n(q) = q$ para algún entero $n \geq 1$. Con las notaciones dadas, $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ es un **atractor periódico** (entonces se dice γ orbitalmente estable) cuando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo q en una vecindad de γ

Observación 1.56. La sección transversal Σ es una hipersuperficie diferenciable de dimensión $n - 1$ del abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se puede suponer que la variedad Σ es un disco de un subespacio vectorial o afín de \mathbb{R}^n .

1.57. $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1 = \pi(\Sigma_0)$ es un difeomorfismo de clase C^r . Sea V una vecindad de p dada por el Corolario 1.24. Como $\varphi(T, p) = p$, existe una vecindad Σ_0 de p en Σ tal que $\varphi(T, q) \in V$ para todo $q \in \Sigma_0$. Si $\xi : V \rightarrow \Sigma$ es la aplicación del Corolario 1.24 entonces

$$\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma, \quad \pi(q) = \xi(\varphi(T, q)).$$

Otra expresión para π es

$$\pi(q) = \varphi(T + \tau(\varphi(T, q)), q),$$

donde $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ es el tiempo $\tau(x)$ que lleva la órbita por x en V para interceptar a Σ . Del teorema de la función implícita τ es C^r y π tiene la misma regularidad de X . La inversa, $\pi^{-1} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$ se define con $-X$. Por lo tanto π es un difeomorfismo.

1.2.2 Ciclos limites en el plano

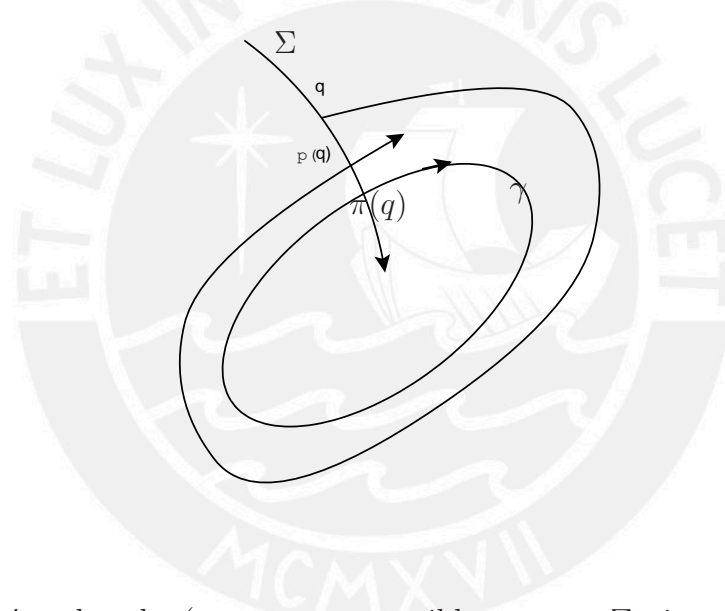
Definición 1.58. Un **ciclo límite** γ de un sistema planar es una órbita periódica no-degenerada (de periodo positivo) que es un conjunto límite (α o bien ω) de cada trayectoria en una vecindad de γ . Observe que basta

que una trayectoria tenga tal propiedad para conseguir lo mismo en todas las trayectorias en un abierto que contiene la órbita periódica.

Proposición 1.59. *Con las notaciones de arriba existen apenas los siguientes tipos de ciclos limites¹¹ (disminuyendo V si fuera necesario)*

- (a) *Estable, cuando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0 \forall q \in V$.*
- (b) *Inestable, cuando $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0 \forall q \in V$.*
- (c) *Semiestable, cuando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0 \forall q \in V \cap Ext\gamma$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0 \forall q \in V \cap Int\gamma$ o lo contrario.*

Demostración. Disminuir la vecindad V si fuera necesario se puede suponer que ésta no posee singularidades. Sean $p \in \gamma$ y Σ una sección transversal a X en p . Sea $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ la transformación de Poincaré. Suponga



que Σ está ordenada (note que es posible ya que Σ tiene dimensión 1) siendo el sentido positivo del exterior de γ $Ext\gamma$ al interior de γ $Int\gamma$. Dado $q \in \Sigma_0 \cap Ext\gamma$, se tiene que $\pi(q) > q$ o $\pi(q) < q$. Se supone que $\pi(q) > q$. Considere la región A limitada por γ , por el arco de trayectoria $\cap q\pi(q)$ y por el segmento $q\pi(q) \in \Sigma_0$. A es positivamente invariante, es decir dado $x \in A$ entonces $\varphi(t, x) \in A \forall t \geq 0$. Además $\varphi(t, x)$ intercepta a Σ en una secuencia estrictamente monótona de puntos x_n que convergen a p . Por lo tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, x), \gamma) = 0$. Las otras afirmaciones se prueban de manera similar. \square

¹¹Para una órbita compacta γ , no-degenerada $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma = Ext\gamma \cup Int\gamma$, donde $Int\gamma$ es la componente compacta.

Observación 1.60. Con las notaciones de la proposición se tiene que γ es un ciclo límite si y solo si p es un punto fijo aislado de π . Además se tiene

- 1.- γ es estable si y solo si $|\pi(x) - p| \leq |x - p| \forall x \neq p$ próximo de p .
- 2.- γ es inestable si y solo si $|\pi(x) - p| \geq |x - p| \forall x \neq p$ próximo de p .
- 3.- γ es semiestable si y solo si $|\pi(x) - p| \leq |x - p| \forall x \in \Sigma \cap Ext\gamma$ próximo de p y $|\pi(x) - p| \geq |x - p| \forall x \in \Sigma \cap Int\gamma$ próximo de p o lo contrario.

En particular si $\pi'(p) < 1$ se puede aplicar el teorema de valor medio y concluir que γ es estable. Análogamente, γ es inestable si $\pi'(p) > 1$.

Teorema 1.61. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 . Sea γ una trayectoria T -periódica y $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ la transformación de Poincaré en una sección transversal Σ en $p \in \gamma$. Entonces

$$\pi'(p) = \exp \left(\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt \right).$$

En particular, si $\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt < 0$ entonces γ es estable y en caso contrario es inestable.

Demostración. Para cada t se tiene $A(t) = DX(\gamma(t))$. Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental de $x' = A(t)x$, con $\Phi(0) = I$ por la fórmula de Liouville se tiene que

$$\det \Phi(T) = \exp \left(\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt \right).$$

Solo basta probar que $\pi'(p) = \det \Phi(T)$. Sea φ el flujo de X . entonces se tiene que $\Phi(T) = D_2\varphi(T, p)$. Se afirma que

(a) $D_2\varphi(T, p).X(p) = X(p)$

Demostración de (a). Como $\frac{d}{dt}\varphi(t, p)|_{t=0} = X(p)$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} D_2\varphi(T, p).X(p) &= \frac{d}{dt}\varphi(T, \varphi(t, p))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\varphi(T + t, p)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\varphi(t, p)|_{t=0} \\ &= X(p). \end{aligned}$$

Por otro lado si $g : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Sigma$ es una parametrización de Σ que $g(0) = p$, el conjunto $B = \{X(p), g'(0)\}$ es una base de \mathbb{R}^2 . Por definición $\pi(g(s)) = \varphi(T + \tau(T, g(s)), g(s))$ y así $\pi'(p)g'(0)$ es igual a

$$\frac{d}{ds}\pi(g(s))|_{s=0} = D_1\varphi(T, p).a + D_2\varphi(T, p).g'(0) = aX(p) + D_2\varphi(T, p).g'(0),$$

donde a es la derivada de $\tau(\varphi(T, g(s)))$ en $s = 0$. Por lo tanto de esto junto con (a) se tiene que la matriz de $D_2\varphi(T, p)$ en la base B es

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & \pi'(p) \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene que $\pi'(p) = \det\Phi(T)$. Las ultimas observaciones del teorema siguen de la Observación 1.60. \square

1.2.3 Criterio de Bendinxson

1.62. Un sistema autónomo planar, las órbitas compactas se corresponden con soluciones periódicas. Una manera de ver la no existencia de soluciones periódicas en el plano es el criterio de Bendinxson.

Teorema 1.63. (*Criterio de Bendinxson*) Sea el sistema autónomo:

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y), \tag{1.21}$$

en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo y (f, g) continuamente diferenciable en D . La ecuación (1.21) puede tener órbitas periódicas solo si la divergencia

$$\text{div}(f, g) = f_x + g_y$$

cambia de signo en D o si $\text{div}(f, g)$ es cero en D .

Demostración. Sea una C una órbita homeomorfa a S^1 en D por el Lema (1.54) se corresponde con una solución de (1.21), el interior de C es G , por el Teorema de Green¹² se tiene:

$$\int_G \int \text{div}(f, g) d\sigma = \int_C (f dy - g dx) = \int_C (f \frac{dy}{ds} - g \frac{dx}{ds}) ds$$

el integrando en la última integral es cero ya que la órbita homeomorfa a S^1 corresponde con la solución de (1.21), entonces la integral es cero, esto significa que la divergencia de (f, g) no puede estar con signo constante. \square

¹²Para una prueba del Teorema de Green vea [23, Pg. 237].

Ejemplo 1.64. Sea la ecuación :

$$x'' + p(x)x' + q(x) = 0$$

Sean $p(x)$ y $q(x)$ suaves y $p(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, si se hace $y = x'$ se tiene que $y' = x''$ así resulta la ecuación equivalente:

$$x' = y, \quad y' = -q(x) - p(x)y,$$

luego $\text{div}(f, g) = -p(x)$, es decir la divergencia es negativa siempre. Del criterio de Bendixson la ecuación no posee soluciones periódicas.

Ejemplo 1.65. Sea en \mathbb{R}^2 la ecuación de Van Der Pol:

$$x'' + x = u(1 - x^2)x'$$

Donde u es constante, sea $y = x'$ se tiene $y' = x''$ luego:

$$x' = y, \quad y' = -x + u(1 - x^2)y,$$

$\text{div}(f, g) = u(1 - x^2)$. Por lo tanto, por el criterio de Bendixson la solución periódica si existiese tendría que intersectar a $x = 1$ o $x = -1$ o a ambas.

Observación 1.66. El teorema ha sido formulado en \mathbb{R}^2 , lo que haría suponer que se puede generalizar, pero esto no es así. En el sistema

$$x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = 0,$$

se tiene que $\text{div}(f, g, h) = \text{div}(x, -y, 0) = 0$ y se debería concluir que existe solución periódica, sin embargo las soluciones del sistema – que vienen dadas por $\gamma(t) = (k_1 e^t, k_2 e^{-t}, t)$, $k \neq 0$ constante – no son periódicas.

1.2.4 Conjunto límite: Teorema de Poincaré-Bendixson

1.67. Sea $\varphi(t, p)$ el flujo inducido por $x' = f(x)$ con $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

Definición 1.15. Así, $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ es la solución definida en su intervalo maximal $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$ y $\varphi(0, p) = p$. El conjunto ω -límite de p es

$$\omega(p) = \{q \in U : \exists(t_n), \text{ con } t_n \rightarrow \omega_+(p), \text{ y } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ si } n \rightarrow \infty\}$$

y el conjunto α -límite de p se define como

$$\alpha(p) = \{q \in U : \exists(t_n), \text{ con } t_n \rightarrow \omega_-(p), \text{ y } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ si } n \rightarrow \infty\}.$$

En general, para una trayectoria γ , su conjunto ω -límite, $\omega(\gamma)$ es $\omega(p)$ para cualquier $p \in \gamma$. De forma similar, $\alpha(\gamma) = \alpha(p)$ para cualquier $p \in \gamma$.

Observación 1.68. Sea $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ como antes y $\psi(t) = \psi(t, p)$ la curva integral¹³ asociada a $-f$ por el punto p , entonces $\psi(t, p) = \varphi(-t, p)$. De donde tenemos que ω -limite de $\psi(t)$ es igual al α -limite de $\varphi(t)$ y también de manera recíproca el ω -limite de $\varphi(t)$ es igual al α -limite de $\psi(t)$.

- Si p es un punto singular de f , entonces $p \in \alpha(p) \cap \omega(p)$, pues en este caso $\varphi(t) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- Si $\gamma_p = \{\varphi(t, p) : t \in I_p\}$ y $q \in \gamma_p$ entonces $\omega(p) = \omega(q)$. En efecto: si $q \in \gamma_p$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, p) = \varphi(t + c, q)$.

Ejemplo 1.69. Sea el sistema:

$$x' = x, \quad y' = -y.$$

Las soluciones son: $\varphi(t) = (e^t, 0)$ y $\varphi(t) = (0, e^{-t})$, así: Si $p = 0$, entonces $\omega(p) = 0$ y $\alpha(p) = 0$. Si $p \in \text{al eje } X - 0$, entonces $\omega(p) = \emptyset$ y $\alpha(p) = 0$. Si $p \in \text{al eje } Y - 0$, entonces $\omega(p) = 0$ y $\alpha(p) = \emptyset$. Si $p \notin a(X \cup Y) - 0$, entonces $\omega(p) = \alpha(p) = 0$.

Ejemplo 1.70. Si $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ es T -periódica entonces:

$$\omega(p) = \gamma_p = \{\varphi(t, p) \text{ tal que } 0 \leq t \leq T\} = \alpha(p).$$

En efecto: si $q \in \gamma_p$ existe $t' \in [0, T]$ tal que $\varphi(t', p) = q$. Si $t_n = t' + nT$ tenemos que $t_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_n) = \varphi(t' + nT, p) = \tau(t') = q$. De manera análoga para probar que $q \in \alpha(p)$.

Teorema 1.71. Sea $\varphi(t, p)$ el flujo inducido por $x' = f(x)$ con $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $C^k, k \geq 1$ y $\gamma^+(p) = \{\varphi(t, p) : t \geq 0\}$ la semi-trayectoria positiva. Si $\gamma^+(p) \subset K$, donde K es un subconjunto compacto de U se cumple:

- 1.- $\omega(p) \neq \emptyset$.
- 2.- $\omega(p)$ es compacto.
- 3.- $\omega(p)$ es invariante por f .
- 4.- $\omega(p)$ es conexo.

¹³Sea el sistema diferencial $x' = f(x)$ tal que $x(0) = p$ se llama curva integral a la imagen de solución maximal, es decir al gráfico del flujo asociado $\varphi(t, p)$.

Demostración. En efecto:

1.- $\omega(p) \neq \emptyset$.

Sea $t_n = n, n \in \mathbb{N}$, por hipótesis tenemos que $\varphi(t_n) \subset K$, K compacto entonces existe una subsucesión $\varphi(t_{n_k})$ que converge a un punto $q \in K$. Por lo tanto, $q \in \omega(p)$ pues $t_{n_k} \rightarrow \infty$, si $n_k \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_{n_k}) \rightarrow q$.

2.- $\omega(p)$ es compacto.

Como $\omega(p) \subset \overline{\gamma^+(p)} \subset K$ entonces $\omega(p)$ está acotado. Solo resta probar que $\omega(p) = \overline{\omega(p)}$. Si $q \in \overline{\omega(p)}$, existe una sucesión q_n en $\omega(p)$ tal que $q_n \rightarrow q$. Queda probar que $q \in \omega(p)$, como cada $q_n \in \omega(p)$ para cada q_n existe una secuencia t_m^n tal que $t_m^n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_m^n, p) \rightarrow q_n$ cuando $m \rightarrow \infty$. Escogamos para cada secuencia t_m^n un punto $t_n = t_m^n > n$ tal que $d(\varphi(t_n, p), q_n) < \frac{1}{n}$. Así,

$$d(\varphi(t_n, p), q) \leq d(\varphi(t_n, p), q_n) + d(q_n, q) < \frac{1}{n} + d(q_n, q),$$

es decir $d(\varphi(t_n, p), q) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ esto es $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$, como $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ se sigue que $q \in \omega(p)$.

3.- $\omega(p)$ es invariante por f .

Sea $q \in \omega(p)$ y $\psi : I(q) \rightarrow \mathbb{R}^n$ la curva integral que pasa por q . Sea $q_1 = \varphi(t_0, q) = \psi(t_0)$, como $q \in \omega(p)$, entonces existe una secuencia t_n tal que $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$. Como φ es continua tenemos:

$$q_1 = \varphi(t_0, q) = \varphi(t_0, \lim \varphi(t_n, p)) = \lim(t_0, \varphi(t_n, p)) = \lim \varphi(t_0 + t_n, p).$$

Así hemos encontrado una secuencia $s_n = (t_0 + t_n)$ tal que $s_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(s_n, p) \rightarrow q$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir $q_1 \in \omega(p)$.

4.- $\omega(p)$ es conexo.

Supongamos que $\omega(p)$ no es conexo, entonces $\omega(p) = A \cup B$ donde A, B son cerrados no vacíos y disjuntos. Como A es no vacío, existe un elemento $a \in A$ y existe una secuencia t'_n tal que $t'_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t'_n) \rightarrow a$ cuando $n \rightarrow \infty$. De forma similar existe una secuencia t''_n tal que $t''_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t''_n) \rightarrow b \in B$ cuando $n \rightarrow \infty$. Luego podemos construir una secuencia t_n tal que $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ tal que $d(\varphi(t_n), A) < \frac{d}{2}$ y $d(\varphi(t_{n+1}), A) > \frac{d}{2}$ (donde $d = d(A, B) > 0$) para todo n impar.

Como la función $g(t) = d(\varphi(t), A)$, $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ para todo n impar es continua y $g(t_n) < \frac{d}{2}$ y $g(t_{n+1}) > \frac{d}{2}$ luego por el teorema del valor intermedio existe $s_n, t_n \leq s_n \leq t_{n+1}$ tal que

$$g(s_n) = d(\varphi(s_n), A) = \frac{d}{2}.$$

Como la secuencia $(\varphi(s_n))$ está contenida en un compacto $Q \in \text{Dom}(f); d(x, A) = \frac{d}{2}$, $(\varphi(s_n))$ posee una subsecuencia convergente $(\varphi(s_n))$. Sea $p' = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n)$.

Entonces $p' \in \omega(p)$, pero $p' \notin A$, pues $d(p', A) = \frac{d}{2} > 0$, también $p' \notin B$, pues $d(p', B) \geq d(A, B) - d(p', A) = \frac{d}{2} > 0$, así se llega a una contradicción. \square

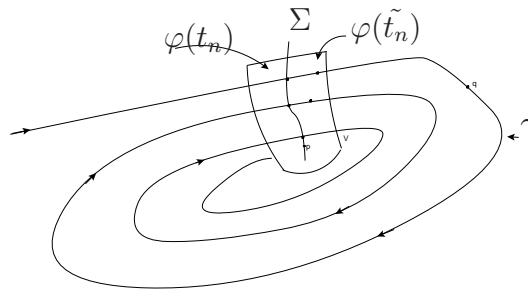
Observación 1.72. En las condiciones del teorema anterior si $q \in \omega(p)$, la trayectoria de f por q es completa. Como $\omega(p)$ es compacto e invariante, la órbita de f pasando por q está contenida en el compacto $\omega(p)$ luego la solución está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, tal como muestra el Corolario 1.7.

Teorema 1.73. (Poincaré - Bendixson). Sea $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ definida para todo $t \geq 0$ tal que γ_p^+ está contenida en un compacto K . Suponga que el campo f posee un número finito de singularidades en $\omega(p)$ entonces tenemos las siguientes alternativas:

- 1.- Si $\omega(p)$ solo contiene puntos regulares, $\omega(p)$ es una órbita periódica.
- 2.- Si $\omega(p)$ contiene puntos regulares y singulares, $\omega(p)$ consiste de un conjunto de órbitas cada una de las cuales tiende a sus puntos singulares cuando $t \rightarrow \pm\infty$.
- 3.- Si $\omega(p)$ no contiene puntos regulares, $\omega(p)$ es un punto singular.

Lema 1.74. Si $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$, siendo Σ una sección transversal a f y $\gamma = \{\varphi(t)\}$ órbita de f , entonces p puede ser expresado como limite de una secuencia de puntos $\varphi(t_n)$ de Σ donde $t_n \rightarrow \infty$

Demostración. Sea $\gamma = \{\varphi(t)\} = \{\varphi(t, q)\}$ y $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$, además se considera la vecindad V y la aplicación $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por el Corolario 1.24. Como $p \in \omega(\gamma)$ entonces $\exists(t_n)$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = p$, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$



tal que $\varphi(\tilde{t}_n) \in V \forall n \geq n_0$. Si $t_n = \tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n))$, así se tiene

$$\begin{aligned}\varphi(t_n) &= \varphi(\tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n)), q) \\ &= \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n))\end{aligned}$$

por la definición de τ resulta que $\varphi(t_n) \in \Sigma$, como τ es continua sigue

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n)) \\ &= \varphi(0, p) \\ &= p\end{aligned}$$

pues $\varphi(\tilde{t}_n)$ y $\tau(\varphi(\tilde{t}_n)) \rightarrow \tau(p) = 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. □

Observación 1.75. Notamos que la sección transversal Σ a f tiene dimensión uno ya que se considera el campo en \mathbb{R}^2 , luego Σ es difeomorfa a un intervalo de la recta, así Σ tiene un orden total inducido por el orden total del intervalo, entonces es posible hallar sucesiones monótonas en Σ .

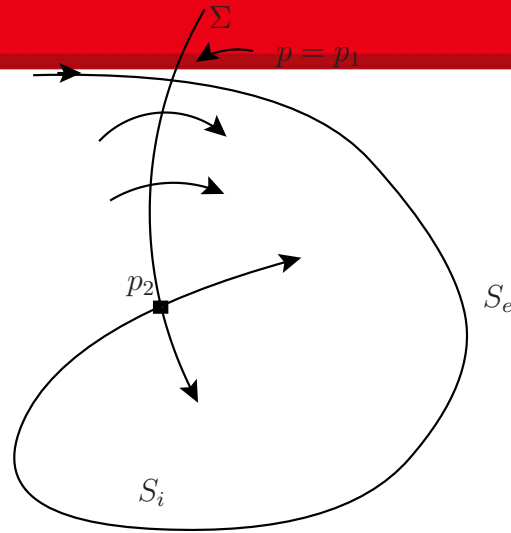
Lema 1.76. *Sea Σ una sección transversal a f . Si γ es una órbita de f y $p \in \Sigma \cap \gamma$, entonces γ_p^+ intersecta Σ en una secuencia monótona $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$*

Demostración. Sea $D = \{t \in \mathbb{R}^+; \varphi(t, p) \in \Sigma\}$ por el Teorema del flujo tubular D es discreto. Por lo tanto podemos ordenar el conjunto

$$D = \{0 < t_1 < \dots < t_n < \dots\}.$$

Sea $p_1 = p$. Definamos $p_2 = \varphi(t_1, p)$ por inducción definimos $p_n = \varphi(t_{n-1}, p)$. Notamos tres casos:

- Si $p_1 = p_2$, entonces γ es una trayectoria cerrada de periodo t_1 y la sucesión sería constante.
- Si $p_1 > p_2$ considere la curva Γ formada por $\{\varphi(t, p); t_1 \leq t \leq t_2\}$ con el segmento de Σ que une p_1 y p_2 . Γ es una curva cerrada que no presenta autointersecciones ya que si se autointersectase p_2 no sería el segundo punto donde corta Σ a γ_p^+ . Luego Γ desconecta al plano, si existiese p_3 entonces p_3 pertenece al interior o al exterior de Γ pero no puede estar en el exterior ya que cambiaría la dirección del flujo, así p_3 está en el interior de Γ y así sucesivamente se tiene $p_1 > p_2 > \dots > p_n > \dots$
- Si $p_1 < p_2$ de manera análoga al ítem anterior.



□

Lema 1.77. Si Σ es una sección transversal a f , $\Sigma \cap \omega(p)$ es a lo más unitario.

Demostración. Se supone que Σ intercepta $\omega(p)$ en dos puntos x, y . Luego, existe una sucesión monótona $\varphi(t_n)$ de Σ tal que $\varphi(t_n) \rightarrow x$ de forma similar existe una sucesión monótona $\varphi(s_n)$ de Σ tal que $\varphi(s_n) \rightarrow y$ esto es una contradicción con la monotonía del lema anterior. □

Lema 1.78. Sea γ_p^+ contenida en un compacto K , γ una órbita de f con $\gamma \subset \omega(p)$. Si $\omega(\gamma)$ contiene puntos regulares, entonces γ es una órbita cerrada y $\omega(p) = \gamma$.

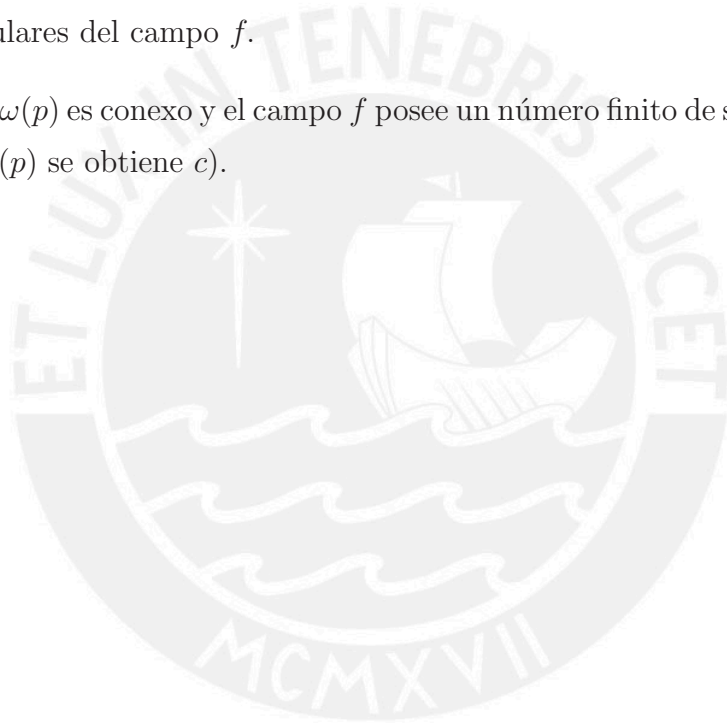
Demostración. Sea $q \in \omega(\gamma)$ punto regular y sea V la vecindad de q dada por el Corolario 1.24 y Σ_q la sección transversal correspondiente. Por el Lema 1.74 existe una secuencia $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\gamma(t_n) \in \Sigma_q$. Como $\gamma(t_n) \in \omega(p)$ la secuencia $\{\gamma(t_n)\}$ se reduce aun punto por el lema 1.77. Esto prueba que γ es periódica. Resta probar que $\gamma = \omega(p)$, como $\omega(p)$ es conexo y γ es cerrado y no vacío basta probar que γ es abierto en $\omega(p)$. Sean $\bar{p} \in \gamma$, $V_{\bar{p}}$ una vecindad de \bar{p} dada por el Corolario 1.24 y $\Sigma_{\bar{p}}$ la sección transversal correspondiente. Se afirma que $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$, en efecto como $V_{\bar{p}} \cap \gamma \subset V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$ para mostrar la otra inclusión se procede por contradicción, se supone que existe $\bar{q} \in V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$ tal que $\bar{q} \notin \gamma$. Por el teorema del flujo tubular y por la invarianza de $\omega(p)$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, \bar{q}) \in \omega(p) \cap \Sigma_{\bar{p}}$ y $\varphi(t, \bar{q}) \neq \bar{q}$. De allí existen dos puntos distintos de $\omega(p)$ en $\Sigma_{\bar{p}}$ lo que no puede ocurrir por el Lema 1.77.

Luego $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. Sea $U = \bigcup_{\bar{p} \in \gamma} V_{\bar{p}}$, U es abierto en \mathbb{R}^2 , $\gamma \subset U$ y $U \cap \omega(p) = U \cap \gamma = \gamma$, esto es γ es la intersección de un abierto de \mathbb{R}^2 con $\omega(p)$. Entonces γ es abierto en $\omega(p)$. \square

Demostración del teorema de Poincaré-Bendixson. .

- 1.- Si se cumple la hipótesis de *a*) y como $q \in \omega(p)$; entonces la órbita $\gamma_q \subset \omega(p)$, y como $\omega(p)$ es compacto se tiene que $\omega(\gamma_q) \neq \emptyset$. Luego por el Lema 1.78 resulta que $\omega(p) = \gamma_q = \text{órbita cerrada}$.
- 2.- Si se cumple la hipótesis de *b*) y γ es una órbita contenida en $\omega(p)$ que no se reduce a un punto singular, entonces por el Lema 1.78 y como $\alpha(\gamma)$, $\omega(\gamma)$ son ambos conexos se tiene que $\alpha(\gamma)$, $\omega(\gamma)$ son ambos puntos singulares del campo f .
- 3.- Como $\omega(p)$ es conexo y el campo f posee un número finito de singularidades en $\omega(p)$ se obtiene *c*).

\square



Capítulo 2

Sistemas Periódicos

En este capítulo se desarrolla la teoría de Floquet que permite estudiar un sistema lineal periódico por medio de un sistema lineal con coeficientes constantes. Se introduce la teoría de aproximación asintótica para observar que tan lejos se encuentran las soluciones de un sistema diferencial perturbado del sistema diferencial sin perturbar. Se presenta el método del promedio primero en su forma clásica, continuando con una introducción a la teoría de grado en espacios de dimension finita aquí se muestra que el grado de Brouwer es invariante mediante homotopia, esto permite que el grado de una función dada sea el mismo que el grado de su desarrollo de Taylor. Luego se estudia el método del promedio via grado de Brouwer, en este ultimo se debilita las hipótesis del primero. Finalmente se usa tal teoría en los sistemas autónomos planares. [3, 9, 21].

2.1 Teoría de Floquet

2.1. Aquí se estudia sistemas lineales de la forma

$$x' = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

donde $t \rightarrow A(t)$ es función continua T -periódica, este sistema es denominado sistema T -**periódico** de periodo T si $A(t + T) = A(t)$. El Teorema de Floquet en esta sección da una forma canónica para la matriz fundamental del sistema (2.1), este resultado será usado para demostrar que existe un cambio de coordenadas el cual transforma el sistema (2.1) en un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes. Para ello será necesario el siguiente lema.

Lema 2.2. *Si C es una matriz no singular $n \times n$, entonces existe una matriz B (que puede ser compleja) tal que $e^B = C$. Si C es una matriz no singular real $n \times n$, entonces existe una matriz B tal que $e^B = C^2$.*

Teorema 2.3. (Teorema de Floquet). Si $\Phi(t)$ es matriz fundamental solución de el sistema T -periódico (2.1), entonces para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T),$$

además existe una matriz B que puede ser compleja tal que

$$e^{TB} = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$$

y una función matricial T -periódica $t \rightarrow P(t)$, tal que $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. También existe una matriz R y una función matricial $t \rightarrow Q(t)$ $2T$ -periódica, tal que $\Phi(t) = Q(t)e^{tR}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Como $t \mapsto A(t)$ es periódica y existe para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces todas las soluciones están definidas en \mathbb{R} . Si se hace $\Psi(t) = \Phi(t + T)$,

$$\Psi'(t) = \Phi'(t + T) = A(t + T)\Phi(t + T) = A(t)\Psi(t),$$

es decir $\Psi(t)$ es solución de (2.1), además $t \mapsto \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ también es solución de (2.1) y ambas cumplen con la condición inicial $x(0) = \Phi(T)$. Por tanto, por unicidad de soluciones, se obtiene

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T).$$

Como $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T)$, entonces $\Phi(t+2T) = \Phi(t+T)\Phi^{-1}(0)\Phi(T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T)\Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ luego $\Phi(t + 2T) = \Phi(t)[\Phi^{-1}(0)\Phi(T)]^2$ si se llama $C = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ se ve que C es no singular, entonces por el Lema 2.2 existe una matriz B tal que $e^B = C$ tal que $e^B = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$, por lo mismo existe una matriz R tal que $e^{2TR} = [\Phi^{-1}(0)\Phi(T)]^2$ para concluir si se hace $P(t) = \Phi(t)e^{-tB}$ y $Q(t) = \Phi(t)e^{-tR}$, entonces

$$P(t + T) = \Phi(t + T)e^{-TB}e^{-tB} = \Phi(t)Ce^{-TB}e^{-tB} = \Phi(t)e^{-tB} = P(t),$$

$$Q(t + 2T) = \Phi(t + 2T)e^{-2TR}e^{-tR} = \Phi(t)e^{-tR} = Q(t).$$

esto es se tiene $P(t + T) = P(t)$, $Q(t + 2T) = Q(t)$ y

$$\Phi(t) = P(t)e^{tB} = Q(t)e^{tR}$$

□

Definición 2.4. La representación $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ es llamada **forma normal** de Floquet para la matriz fundamental $\Phi(t)$. Además, por cada $\tau \in \mathbb{R}$ se define el **operador de monodromía**

$$M_\tau : v \mapsto \Phi(T + \tau)\Phi^{-1}(\tau)v; \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

sus autovalores son los **multiplicadores característicos** del sistema (2.1)

Observación 2.5. El sistema (2.1) puede ser visto como un sistema autónomo

$$\begin{aligned} x' &= A(\psi)x \\ \psi' &= 1 \text{ mod } T \end{aligned}$$

en el cilindro de fase $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$ donde ψ es una variable angular de módulo T .

Proposición 2.6. Las siguientes afirmaciones son válidas para (2.1)

- 1.- Cada operador de monodromía es invertible o de manera equivalente cada multiplicador característico es distinto de cero.
- 2.- Todos los operadores de monodromía tienen los mismo autovalores, en particulares existen exactamente n multiplicadores característicos contando multiplicidades.

Demostración.

1.- La función $v \mapsto M_\tau(v)$ es inyectiva pues las soluciones del sistema autónomo son disjuntas entre si, como la aplicación entre espacios de la misma dimensión entonces también es sobre, luego existe la inversa.

2.- Sea $\Phi(t)$ matriz fundamental basada en cero, sea $\Psi(t)$ otra matriz fundamental, entonces $\Psi(t) = \Phi(t)\Psi(0)$ ya que $\Phi(t)$ está basada en cero. Por el Teorema 2.3 $\Phi(t + T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T) = \Phi(t)\Phi(T)$ y el operador de monodromía para Ψ está dado por $\tilde{M}_\tau(v) = \Psi(t + \tau)\Psi^{-1}(t).v$, pero como $\Psi(t) = \Phi(t)\Psi(0)$ al reemplazar se obtiene

$$\begin{aligned} \Psi(T + \tau)\Psi^{-1}(t) &= \Phi(T + \tau)\Psi(0)\Psi^{-1}(0)\Phi^{-1}(\tau) \\ &= \Phi(T + \tau)\Phi^{-1}(\tau) \\ &= \Phi(\tau)\Phi(T)\Phi^{-1}(\tau), \end{aligned}$$

en particular los autovalores del operador $\Phi(T)$ son los mismos que del operador de monodromía \tilde{M} , es decir todos los operadores de monodromía tienen los mismos autovalores. □

Observación 2.7. Como $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ y al considerar la forma normal de Floquet $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ y al notar que $\Phi(0) = P(0) = P(T)$ se tiene que $\Phi^{-1}(0)\Phi(T) = e^{TB}$ además al usar la forma normal de Floquet

$$\begin{aligned}\Phi(T)\Phi^{-1}(0) &= P(T)e^{TB}\Phi^{-1}(0) \\ &= \Phi(0)e^{TB}\Phi^{-1}(0) \\ &= \Phi(0)(\Phi^{-1}(0)\Phi(T))\Phi^{-1}(0),\end{aligned}$$

es decir $(\Phi^{-1}(0)\Phi(T))$ tiene los mismo autovalores que el operador de monodromía dado por $v \mapsto \Phi(T)\Phi^{-1}(0).v$

Definición 2.8. Un número $u \in \mathbb{C}$ se dice que es un **exponente característico** o exponente de Floquet de (2.1) si e^{uT} es algún multiplicador característico. Observe que si $e^{uT} = \lambda$ satisface lo anterior entonces $u + \frac{2\pi ik}{T}$ también es un exponente característico si $k \in \mathbb{Z}$, entonces, aún cuando existen a lo más n multiplicadores característicos, estos generarán infinitos exponentes característicos.

Teorema 2.9. Si A es una matriz $n \times n$ y si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A repetido de acuerdo a su multiplicidad, entonces $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ son los autovalores de A^k y $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ son los autovalores de e^A .

Demostración. Ver [3, pg. 193] □

Teorema 2.10. Si la matriz fundamental de soluciones del sistema T -periódico $x' = A(t)x$ en cero esta dada por $\Phi(t) = Q(t)e^{tR}$, entonces el cambio $x = \Phi(t)y$ transforma el sistema $x' = A(t)x$ en $y' = Ry$, además si los multiplicadores característicos del sistema $x' = A(t)x$ todos tienen módulo menor que uno o equivalentemente si todos los exponentes característicos tienen parte real negativa, entonces la solución cero es asintóticamente estable.

Demostración. Se tiene que como $\Phi(t) = Q(t)e^{tR}$, entonces $x(t)$ puede verse como $x(t) = Q(t)e^{tR}$ al tomar en cuenta el cambio se tiene $Q(t)y = Q(t)e^{tR}x(0)$ al tener que $Q(t)$ es inversible $y(t) = e^{tR}x(0)$ al derivar se obtiene $y' = Ry$.

Por el Teorema 2.3, existe R y $Q(t)$ una aplicación $2T$ -periódica tal que $\Phi(t) = Q(t)e^{tR}$, por lo mismo existe una matriz B y una aplicación T -periódica $P(t)$ tal que $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ y los multiplicadores característicos son los autovalores de e^{tB} . Como $\Phi(0) = I = Q(0)$, entonces $\Phi(2T) = e^{2TR} = e^{2TB}$, en particular

$(e^{TB})^2 = e^{2TR}$, es decir los autovalores de e^{2TR} son los cuadrados de los multiplicadores característicos. Como todos estos tienen módulo menor que uno, por el Teorema 2.9 todos los autovalores de la matriz R tienen parte real negativa, es decir la solución cero es asintóticamente estable para $y' = Ry$ luego existen constantes $C > 0, \lambda > 0$ tal que

$$|y(t)| \leq Ce^{-\lambda t}|y(0)| \text{ para todo } t \geq 0 \text{ y para todo } y(0) \in \mathbb{R}^n,$$

puesto que $Q(t)$ es periódica, entonces es acotada y por la relación $x = \Phi(t)y$ se tiene que la solución cero es asintóticamente estable para $x' = A(t)x$. \square

Observación 2.11. El teorema anterior dice que si se tiene un sistema periódico del tipo $x' = A(t)x$ es posible mediante un cambio de variable volver el sistema en uno del tipo $y' = Cy$ con C una matriz con entradas constantes, además brinda información sobre la estabilidad de la solución nula. Sin embargo, ¿Existe un método para determinar los exponentes característicos sin encontrar las soluciones, explícitamente? Un ejemplo de Lawrence Markus and Hidehiko Yamabe que tal método no puede ser construido naturalmente a partir de los autovalores de $A(t)$. Considere el sistema π -periódico $x' = A(t)x$ donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) & -1 + \frac{3}{2} \sin^2(t) \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $A(t)$ son $\frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{7})i$. En particular, la parte real de cada autovalor es negativa. Por otro lado,

$$x(t) = e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

es una solución y así ¡la solución nula **no** es estable! (vea Corolario 1.36).

Lema 2.12. Si μ es un exponente característico del sistema $x' = A(t)x$ y $\Phi(t)$ es la matriz fundamental basada en cero, entonces existe \tilde{B} tal que $\Phi(t) = \tilde{P}(t)e^{t\tilde{B}}$ tal que μ es un autovalor de \tilde{B} .

Demostración. Sea $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ la forma normal de Floquet de $\Phi(t)$, como μ es un exponente característico por definición se tiene que existe un multiplicador característico λ tal que $\lambda = e^{\mu T}$, así por el Teorema 2.9 existe

un autovalor v de B tal que $e^{vT} = \lambda$, además existe algún entero $k \neq 0$ tal que $v = \mu + \frac{2\pi ik}{T}$, si se define

$$\tilde{B} = B - \frac{2\pi ik}{T}I, \tilde{P}(t) = P(t)e^{\frac{2\pi ik}{T}tI}$$

es claro que μ es un autovalor de \tilde{B} , en efecto $\det(B - \frac{2\pi ik}{T}I - \mu I) = \det(B - (\frac{2\pi ik}{T} + \mu)I) = \det(B - vI) = 0$, además

$$\tilde{P}(t)e^{t\tilde{B}} = P(t)e^{\frac{2\pi ik}{T}tI}e^{Bt - \frac{2\pi ik}{T}tI} = P(t)e^{Bt} = \Phi(t)$$

□

Teorema 2.13. *Si λ es un valor característico de $x' = A(t)x$ y $e^{T\mu} = \lambda$, entonces existe una solución no trivial de la forma $x(t) = e^{t\mu}p(t)$, donde $p(t)$ es una aplicación T -periódica y además para esta solución se tiene $x(t+T) = \lambda x(t)$*

Demostración. Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental de $x' = A(t)x$, $\Phi(0) = I$, entonces por el Lema 2.12 se puede tomar la forma normal de Floquet $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ tal que μ sea un autovalor de B . Por lo tanto existe un vector $x \neq 0$ tal que $Bx = \mu x$, entonces $e^{tB}x = e^{t\mu}x$ y al multiplicar ambos lados por $P(t)$ resulta $P(t)e^{tB}x = P(t)e^{t\mu}x$ pero como $P(t)e^{tB} = \Phi(t)$ se obtiene

$$\Phi(t)x = P(t)e^{t\mu}x = e^{t\mu}P(t)x$$

y si al nombrar $p(t) = P(t)x$, entonces $x(t) = \Phi(t)x$ por lo tanto $x(t) = e^{t\mu}p(t)$. Además $x(t+T) = e^{(t+T)\mu}p(t+T) = e^{(t+T)\mu}p(t) = e^{T\mu}x(t) = \lambda x(t)$. □

Teorema 2.14. *Sean λ_1, λ_2 multiplicadores característicos del sistema $x' = A(t)x$ tal que $e^{T\mu_1} = \lambda_1$ y $e^{T\mu_2} = \lambda_2$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces existen funciones T -periódicas p_1 y p_2 tales que*

$$x_1(t) = e^{\mu_1 t}p_1(t), \quad x_2(t) = e^{\mu_2 t}p_2(t),$$

son soluciones linealmente independientes.

Demostración. Por el Lema 2.12 se tiene que existe una matriz B tal que $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ con $\Phi(0) = I$ y además μ_1 es autovalor de B y sea v_1 un autovector correspondiente a μ_1 , como λ_2 es un autovalor de la matriz de monodromía $\Phi(T)$ (puesto que $\Phi(0) = I$), por el Teorema 2.9 existe un autovalor μ de B tal que $e^{T\mu} = \lambda_2 = e^{T\mu_2}$ (pues $\Phi(T) = P(T)e^{TB} = e^{TB}$) pero

además existe $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tal que $\mu_2 = \mu + \frac{2\pi ik}{T}$ puesto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ se tiene que $\mu \neq \mu_1$, si v_2 es un autovector de B correspondiente a μ , entonces v_1 y v_2 son linealmente independientes. Por el Teorema 2.13 esas soluciones son de la forma

$$x_1(t) = e^{\mu_1 t} P(t)v_1, \quad x_2(t) = e^{\mu t} P(t)v_2,$$

y como $x_1(0) = v_1$ y $x_2(0) = v_2$ entonces las soluciones son linealmente independientes. \square

2.2 Perturbaciones y aproximación asintótica

2.15. Se estudiarán algunas perturbaciones del sistema (1.1). Específicamente se usa una familia ϵ -paramétrica de la forma:

$$x' = f(t, x, \epsilon); \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.2}$$

donde f es continua con respecto a ϵ , $(t, x) \rightarrow f(\cdot, \cdot, \epsilon)$ satisface el Teorema 1.3, $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, \infty)$ y $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$. Si f fuese suave en una vecindad de (x_0, t_0) , el sistema (2.2) tendría solución única $x_\epsilon(t)$ para valores pequeños de ϵ fijados. La pregunta es ¿Como se comportan las soluciones del sistema perturbado con respecto al sistema sin perturbar o que tan lejos están estas? los siguientes ejemplos ilustran que cuando se quiere aproximar soluciones de problemas de valor inicial se tiene que mirar en que intervalo se está aproximando y que tan grande puede llegar a ser este.

Ejemplo 2.16. Sea el problema de valor inicial

$$x' = -x + \epsilon; \quad x(0) = 1. \tag{2.3}$$

Se tiene que la solución es $x(t) = e^{-t}(1 - \epsilon) + \epsilon$, mientras que el sistema sin perturbar

$$y' = -y; \quad y(0) = 1, \tag{2.4}$$

tiene como solución $y(t) = e^{-t}$ además $|x(t) - y(t)| = \epsilon - \epsilon e^{-t}$, y para todo

$$t \geq 0; \quad |x(t) - y(t)| \leq \epsilon,$$

se puede decir que el error en aproximar $x(t)$ por $y(t)$ nunca excede a ϵ .

Ejemplo 2.17. Sea el problema de valor inicial

$$x' = x + \epsilon; \quad x(0) = 1. \tag{2.5}$$

Se tiene que la solución es $x(t) = e^t(1 + \epsilon) - \epsilon$, mientras que el sistema sin perturbar

$$y' = y; \quad y(0) = 1, \tag{2.6}$$

tiene como solución $y(t) = e^t$ además $|x(t) - y(t)| = \epsilon|e^t - 1|$, y para

$$t \leq 1; \quad |x(t) - y(t)| \geq \epsilon,$$

se puede decir que el error en aproximar $x(t)$ por $y(t)$ excede a ϵ cuando $0 \leq t \leq 1$.

Definición 2.18. Una función $\delta(\epsilon)$ será llamada **función orden** si $\delta(\epsilon)$ es continua, positiva¹ en $(0, \epsilon_0]$ y además $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon)$ existe mientras $\delta(\epsilon)$ es decreciente cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Observación 2.19. En el caso en que $f(t, x, \epsilon)$ se pueda expresar en su expansión de Taylor con respecto al parámetro pequeño $\epsilon > 0$, las funciones ordenes usadas son

$$\{\epsilon^n\}_{n=0}^{\infty}$$

Definición 2.20. Para comparar funciones se usa el **símbolo de Landau** [12].

- $\delta_1(\epsilon) = \mathcal{O}(\delta_2(\epsilon))$ para $\epsilon \rightarrow 0$ si existe una constante k tal que $\delta_1(\epsilon) \leq k(\delta_2(\epsilon))$ para $\epsilon \rightarrow 0$;
- $\delta_1(\epsilon) = \mathfrak{o}(\delta_2(\epsilon))$ para $\epsilon \rightarrow 0$ si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} = 0$.

Ejemplo 2.21. Sean los siguientes ejemplos

(a) Si $n > m$, entonces $\epsilon^n = \mathfrak{o}(\epsilon^m)$ para $\epsilon \rightarrow 0$.

En efecto $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^n}{\epsilon^m} = 0$.

(b) $\epsilon \sin(\frac{1}{\epsilon}) = \mathcal{O}(\epsilon)$ para $\epsilon \rightarrow 0$

En efecto

$$|\epsilon \sin(\frac{1}{\epsilon})| \leq |\epsilon| |\sin(\frac{1}{\epsilon})| \leq |\epsilon|.$$

(c) $\epsilon^2 \log \epsilon = \mathfrak{o}(\epsilon^2 \log^2 \epsilon)$ para $\epsilon \rightarrow 0$.

¹ $\delta(\epsilon)$ es positiva si $\delta(\epsilon) > 0$ en $(0, \epsilon_0)$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^2 \log \epsilon}{\epsilon^2 \log^2 \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log \epsilon} = 0.$$

(d) $e^{-\frac{1}{\epsilon}} = o(\epsilon^n)$

En efecto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\epsilon}}}{\epsilon^n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\epsilon}}}{e^{n \ln \epsilon}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{\epsilon} - n \ln \epsilon} = 0.$$

Definición 2.22. Se dice que $\delta_1(\epsilon) = \mathcal{O}_s(\delta_2(\epsilon))$ para $\epsilon \rightarrow 0$ si $\delta_1(\epsilon) = \mathcal{O}(\delta_2(\epsilon))$ y $\delta_1(\epsilon) \neq o(\delta_2(\epsilon))$ para $\epsilon \rightarrow 0$

Ejemplo 2.23. Sean los ejemplos

(a) $\epsilon \sin(\frac{1}{\epsilon}) = \mathcal{O}_s(\epsilon).$

(b) $\epsilon \log \epsilon = \mathcal{O}_s(2\epsilon \log \epsilon + \epsilon^3)$

Definición 2.24. Sea la función $f(t, x, \epsilon)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, $\delta(\epsilon)$ una función orden, entonces:

- $f(t, x, \epsilon) = \mathcal{O}(\delta(\epsilon))$ si existe una constante positiva k tal que $\|f\| \leq k\delta(\epsilon)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ donde $\|f\|$ es la norma del supremo.
- $f(t, x, \epsilon) = o(\delta(\epsilon))$ si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|f\|}{\delta(\epsilon)} = 0.$
- $f(t, x, \epsilon) = \mathcal{O}_s(\delta(\epsilon))$ si $\|f(t, x, \epsilon)\| = \mathcal{O}(\delta(\epsilon))$ y $f(t, x, \epsilon) \neq o(\delta(\epsilon)).$

Ejemplo 2.25. Se quiere estimar el orden del tamaño del error que se obtiene al aproximar $\sin(t + \epsilon t)$ por $\sin(t)$ en un intervalo I .

Si $I = [0, 2\pi]$ se tiene que

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} |\sin(t + \epsilon t) - \sin(t)| = \mathcal{O}(\epsilon).$$

En efecto si se usa serie de Taylor se obtiene:

$$\sin(t + \epsilon t) = \sin t + r, \text{ donde } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{r}{\epsilon} = 0.$$

Así $\sup_{t \in [0, 2\pi]} |\sin(t + \epsilon t) - \sin(t)| = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |r|$, entonces

$$\frac{\sup_{t \in [0, 2\pi]} |\sin(t + \epsilon t) - \sin(t)|}{\epsilon} = \frac{\sup_{t \in [0, 2\pi]} |r|}{\epsilon} \rightarrow 0,$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Luego $\sup_{t \in [0, 2\pi]} |\sin(t + \epsilon t) - \sin(t)| = o(\epsilon)$ y por lo tanto

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} |\sin(t + \epsilon t) - \sin(t)| = \mathcal{O}(\epsilon).$$

2.26. En algunos problemas la frontera de I depende de ϵ por ello el intervalo puede convertirse en ilimitado cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Por ejemplo cuando se trata de aproximar $\sin(t + \epsilon t)$ por $\sin(t)$ en un intervalo $I_\epsilon = [0, \frac{2\pi}{\epsilon}]$, (es decir el intervalo no es uniforme) se nota que cuando $\epsilon \rightarrow 0$ el intervalo se vuelve ilimitado, pero con la norma del supremo se tiene

$$\sin(t + \epsilon t) - \sin(t) = \mathcal{O}_s(1).$$

Se está interesado en problemas con valor inicial, donde la variable t juega un papel importante. Se quiere estudiar la solución o su aproximación en un intervalo, este se quiere que sea el más grande posible por ello no se puede fijar apriori un intervalo del tiempo. Por ejemplo

$$\epsilon t \sin x = \mathcal{O}(\epsilon), \quad t \in [0, 1], \quad x \in \mathbb{R},$$

pero $\mathcal{O}(\epsilon)$ **no** es una estimativa cuando $t \geq 0$ o cuando $t \leq 0$. Por ello resulta útil caracterizar el tamaño del intervalo del tiempo en función de ϵ .

Definición 2.27. (Tiempo-escala) Sea la función $f(t, x, \epsilon)$, $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, y las funciones orden $\delta_1(\epsilon)$ y $\delta_2(\epsilon)$; $f(t, x, \epsilon) = \mathcal{O}(\delta_1(\epsilon))$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ en el tiempo escala $\frac{1}{\delta_2(\epsilon)}$ si la estimativa es válida para $x \in D$, $0 \leq \delta_2(\epsilon)t \leq C$ donde C es una constante que no depende de ϵ . La definición para el símbolo \mathfrak{o} es como sigue:

$$f(t, x, \epsilon) = \mathfrak{o}(\delta_1(\epsilon)) \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0 \text{ en el tiempo escala } \frac{1}{\delta_2(\epsilon)}$$

Si la estimativa es válida para $x \in D$, $0 \leq \delta_2(\epsilon)t \leq C$, donde C es una constante que no depende de ϵ .

Ejemplo 2.28. Considere los siguientes ejemplos:

(a) Sea $f_1(t, x, \epsilon) = \epsilon t \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, entonces $f_1(t, x, \epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon)$ en el tiempo escala 1 y $f_1(t, x, \epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon)$ en el tiempo escala $1/\epsilon$.

(b) $f_2(t, x, \epsilon) = \epsilon^2 t \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $f_2(t, x, \epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon)$ en el tiempo escala $1/\epsilon$ y $f_2(t, x, \epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$ en el tiempo escala $1/\epsilon^{3/2}$.

Definición 2.29. Sean las funciones $f(t, x, \epsilon)$, $g(t, x, \epsilon)$, $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$; $g(t, x, \epsilon)$ es una aproximación asintótica de $f(t, x, \epsilon)$ en tiempo escala $1/\delta(\epsilon)$ si:

$$f(t, x, \epsilon) - g(t, x, \epsilon) = \mathfrak{o}(1) \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0 \text{ en tiempo escala } 1/\delta(\epsilon)$$

2.30. En general es posible obtener aproximaciones de funciones como serie de aproximaciones asintóticas sobre algún intervalo I de la forma

$$\bar{f}(t, x, \epsilon) = \sum_{n=0}^N \delta_n(\epsilon) f_n(t, x, \epsilon) + \mathfrak{o}(\delta_N(\epsilon)),$$

con $\delta_n(\epsilon)$, $n = 0, \dots, N$, funciones orden tales que $\delta_{n+1}(\epsilon) = \mathfrak{o}(\delta_n(\epsilon))$, $n = 0, \dots, N - 1$, los coeficientes $f_n(t, x, \epsilon)$ son acotados e iguales a $\mathcal{O}(1)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ donde $(t, x) \in I \times D$. Para una función $f(t, x, \epsilon)$ en el intervalo I la serie asintótica $\bar{f}(t, x, \epsilon)$ es llamada **aproximación asintótica de orden m** de $f(t, x, \epsilon)$ en I si

$$f(t, x, \epsilon) - \bar{f}(t, x, \epsilon) = \mathfrak{o}(\delta_m(\epsilon)) \text{ en } I$$

Ejemplo 2.31. Considere

$$\begin{aligned} f(t, x, \epsilon) &= \sin(t + \epsilon t) \text{ en } I = [0, 2\pi] \\ \bar{f}(t, x, \epsilon) &= \sin t + \epsilon t \cos t - \frac{1}{2} \epsilon^2 t^2 \sin t \end{aligned}$$

las funciones de orden son $\delta_n(\epsilon) = \epsilon^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, y es claro que $f(t, x, \epsilon) - \bar{f}(t, x, \epsilon) = \mathfrak{o}(\epsilon^2)$, es decir $\bar{f}(t, x, \epsilon)$ es una aproximación asintótica de tercer orden de $f(t, x, \epsilon)$ en I .

Observación 2.32. Las aproximaciones asintóticas no son únicas.

En efecto $\tilde{f}(t, x, \epsilon) = \sin t + \epsilon \phi_2(t) - \frac{1}{2} \epsilon^2 t^2 \sin t$ con $\phi_2(t) = \frac{\sin(\epsilon t) \cos t}{\epsilon}$ es otra aproximación asintótica de $f(t, x, \epsilon) = \sin(t + \epsilon t)$ en $I = [0, 2\pi]$

Ejemplo 2.33. Considere

$$f(t, x, \epsilon) = \int_0^\infty \frac{\exp(-t)}{1 + \epsilon t} dt, \quad \epsilon \in (0, \epsilon_0],$$

ésta integral está bien definida ya que $\frac{\exp(-t)}{1 + \epsilon t} \leq \exp(-t)$, $\forall t \geq 0, \epsilon \in (0, \epsilon_0]$, como $\int_0^\infty \exp(-t)$ es convergente, entonces por el criterio de comparación $f(t, x, \epsilon)$ converge. Sea el cambio de variable $\tau = \epsilon t$, se obtiene:

$$f(t, x, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \int_0^\infty \frac{\exp(\frac{-\tau}{\epsilon})}{1 + \tau} d\tau$$

luego integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{1 + \tau}, & du &= -\frac{1}{(1 + \tau)^2} d\tau \\ dv &= \exp\left(\frac{-\tau}{\epsilon}\right), & v &= -\epsilon \exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon}\right) \end{aligned}$$

$$f(t, x, \epsilon) = 1 - \frac{\exp\left(\frac{-t}{\epsilon}\right)}{(1 + \tau)^2} d\tau$$

luego de repetir la integración por partes se obtiene:

$$f(t, x, \epsilon) = 1 - \epsilon + 2\epsilon \int_0^\infty \frac{\exp\left(\frac{-\tau}{\epsilon}\right)}{(1 + \tau)^3} d\tau,$$

al seguir este proceso se define:

$$\bar{f}(t, x, \epsilon) = \sum_{n=0}^m (-1)^n n! \epsilon^n$$

además se tiene que $f(t, x, \epsilon) = \bar{f}(t, x, \epsilon) + R_m$ con

$$R_m = (-1)^{m+1} (m+1)! \epsilon^m \int_0^\infty \frac{\exp\left(\frac{-\tau}{\epsilon}\right)}{(1 + \tau)^{m+2}} d\tau,$$

regresando a la variable x se tiene

$$R_m = (-1)^{m+1} (m+1)! \epsilon^{m+1} \int_0^\infty \frac{\exp(-t)}{(1 + \epsilon t)^{m+2}} d\tau,$$

se nota que $R_m = \mathcal{O}(\epsilon^{m+1})$, así $\bar{f}(t, x, \epsilon)$ es una aproximación asintótica de $f(t, x, \epsilon)$.

Observación 2.34. Cuando una aproximación asintótica dada por una serie asintótica converge, esto **no** implica que converja a la función dada, para ello se observa el siguiente ejemplo sea

$$f(t, x, \epsilon) = \sin \epsilon + \exp\left(-\frac{1}{\epsilon}\right),$$

la expansión de Taylor de la función $\sin \epsilon$ da la serie:

$$\bar{f}(t, x, \epsilon) = \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n \epsilon^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

la cual es convergente para $m \rightarrow \infty$. $\bar{f}(t, x, \epsilon)$ es una aproximación asintótica de $f(t, x, \epsilon)$ con

$$f(t, x, \epsilon) - \bar{f}(t, x, \epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^{2m+3}) \text{ para todo } m \in \mathbb{N},$$

sin embargo la serie **no converge** a $f(t, x, \epsilon)$.

2.35. El método del promedio es un método mediante el cual se trata de encontrar soluciones aproximadas para ecuaciones diferenciales que puedan expresarse en cierta forma, denominada forma estandar. Estas soluciones aproximadas serán medidas que tan lejos se encuentra de la solución exacta por medio de la aproximación asintótica estudiada en la sección anterior. La idea del método del promedio como una técnica computacional se originó en el siglo XVIII, pero fue bien formulada por Lagrange (1788) en su estudio del problema de los tres cuerpos como una perturbación del problema de los dos cuerpos, vea [11].

Ejemplo 2.36. Sea la ecuación

$$x'' + x = \epsilon f(x, x'). \quad (2.7)$$

Si $\epsilon = 0$, entonces las soluciones estarían dadas por combinaciones lineales de $\cos t$, $\sin t$ que también puede ser escrita como

$$r_0 \cos(t + \psi_0)$$

la amplitud r_0 y la fase ψ_0 son constantes que pueden ser determinadas por las condiciones iniciales. Para estudiar el comportamiento de las soluciones cuando $\epsilon \neq 0$ Lagrange introduce variación de constantes. Asume que para $\epsilon \neq 0$ la solución aun puede ser escrita de la misma forma, pero ahora con r , ψ_0 funciones que dependen del tiempo, se asume que

$$x(t) = r(t) \cos(t + \psi(t)) \quad (2.8)$$

$$x'(t) = -r(t) \sin(t + \psi(t)) \quad (2.9)$$

como $x(t)$ es solución de (2.7), debe satisfacerla y al reemplazar se obtiene

$$-r' \sin(t + \psi) - r \cos(t + \psi)(1 + \psi') + r \cos(t + \psi) = \epsilon f(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi))$$

que al simplificarlo resulta

$$-r' \sin(t + \psi) - r \cos(t + \psi)\psi' = \epsilon f(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)) \quad (2.10)$$

además se debe tener en cuenta que la derivada de $x(t)$ debe coincidir con $x'(t) = -r \sin(t + \psi)$, con ello se obtiene

$$r' \cos(t + \psi) - r \sin(t + \psi)(1 + \psi') = -r \sin(t + \psi),$$

$$r' \cos(t + \psi) - r \sin(t + \psi)\psi' = 0, \quad (2.11)$$

las ecuaciones (2.10) y (2.11) pueden tratarse como dos ecuaciones algebraicas donde las incógnitas vendrían a ser r' y ψ' , al resolver este sistema se obtiene:

$$r' = -\epsilon \sin(t + \psi)f(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)) \quad (2.12)$$

$$\psi' = -\frac{\epsilon}{r} \cos(t + \psi)f(r \cos(t + \psi), -r \sin(t + \psi)) \quad (2.13)$$

al hacer las transformaciones $x, x' \rightarrow r, \psi$ se supone que $r \neq 0$, si existiese t_0 tal que $r(t_0) = 0$ se hace una transformación distinta. El razonamiento de Lagrange fue que el lado derecho del sistema (2.12) puede ser expandido de la forma

$$\epsilon[g_0(r, \psi) + g_1(r, \psi) \sin t + h_1(r, \psi) \cos t + \dots]$$

lo que hoy se conoce como serie de Fourier del lado derecho de (2.12)

2.4 Forma estandar del promedio

2.37. Considere para $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ el siguiente problema de valor inicial

$$x' = A(t)x + \epsilon g(t, x); \quad x(0) = x_0, \quad (2.14)$$

donde $A(t)$ es una matriz $n \times n$ continua, $g(t, x)$ es una función suficientemente suave de t y x , cuando $\epsilon = 0$, el sistema sin perturbar se vuelve $x' = A(t)x$ el cual tiene n soluciones linealmente independientes y cuya matriz fundamental viene dada por $\Phi(t)$, sea el cambio de variable

$$x = \Phi(t)y$$

derivando y reemplazando en (2.14) se tiene

$$\Phi'(t)y + \Phi(t)y' = A(t)\Phi(t)y + \epsilon g(t, \Phi(t)y)$$

y como $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, entonces

$$\Phi(t)y' = \epsilon g(t, \Phi(t)y),$$

despejando y' se obtiene

$$y' = \epsilon \Phi^{-1}(t)g(t, \Phi(t)y); \quad y(0) = \Phi^{-1}(0)x_0 \quad (2.15)$$

$$y' = \epsilon f(t, y).$$

Ejemplo 2.38. Considere la ecuación

$$x'' + \omega^2 x = \epsilon g(t, x, x'), \quad \omega > 0.$$

Las transformaciones amplitud-fase son

$$x(t) = r(t) \cos(\omega t + \psi(t)) \tag{2.16}$$

$$x'(t) = -r(t)\omega \sin(\omega t + \psi(t)) \tag{2.17}$$

y se encuentran las siguientes ecuaciones

$$r' = \frac{-\epsilon}{\omega} \sin(\omega t + \psi) g(t, r \cos(\omega t + \psi), -r\omega \sin(\omega t + \psi)) \tag{2.18}$$

$$\psi' = -\frac{\epsilon}{\omega r} \cos(\omega t + \psi) g(t, r \cos(\omega t + \psi), -r\omega \sin(\omega t + \psi)) \tag{2.19}$$

lo que sería la forma estándar.

2.4.1 Método del promedio en el caso periódico

2.39. Considere el problema de valor inicial

$$x'(t) = \epsilon f(t, x) + \epsilon^2 g(t, x, \epsilon), \quad x(0) = x_0. \tag{2.20}$$

Se asume que $f(t, x)$ es T -periódica en t y sea el promedio

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt.$$

Ahora considere el nuevo problema de valor inicial para la ecuación promediada

$$y'(t) = \epsilon f^0(y) \quad y(0) = x_0. \tag{2.21}$$

La función $y(t)$ representa una aproximación de $x(t)$ medido por la aproximación asintótica en el siguiente sentido

Teorema 2.40. *Considere los problemas de valor inicial (2.20) y (2.21) con $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0$, suponga que*

- (a) *las funciones f, g y $\frac{\partial f}{\partial x}$ son definidas continuas y acotadas por una constante M (independiente de ϵ) en $[0, \infty) \times D$;*

(b) g es Lipschitz-continua en $x \in D$

(c) $f(t, x)$ es T -periódica en t con promedio $f^0(x)$; T es una constante independiente de ϵ ;

(d) $y(t)$ está contenido en un subconjunto interno de D .

Entonces se tiene $x(t) - y(t) = \mathcal{O}(\epsilon)$ en la escala $\frac{1}{\epsilon}$

Demostración. Vea los libros [20, pg. 22], [21, pg. 150] □

Observación 2.41. Note que el problema de encontrar una solución para la ecuación diferencial (2.20) se ha reducido en encontrar una solución de la ecuación diferencial (2.21) que es un sistema autónomo y esto en teoría debe resultar más fácil. La solución del sistema (2.20) está cerca del sistema (2.21) en el sentido de aproximación asintótica en el intervalo $0 \leq \frac{t}{\epsilon} \leq C$ donde C es una constante que no depende de ϵ además se puede observar que cuando $\epsilon \rightarrow 0$ dicho intervalo crece.

Ejemplo 2.42. Considere la ecuación

$$x'' + x = -\epsilon x' + \epsilon x^2$$

si se identifica $f(x, x') = x^2 - x'$ y se trabaja de manera análoga al Ejemplo 2.36 se tiene:

$$\begin{aligned} r' &= -\epsilon \sin(t + \psi)(r^2 \cos^2(t + \psi) + r \sin(t + \psi)) \\ \psi' &= -\frac{\epsilon}{r} \cos(t + \psi)(r^2 \cos^2(t + \psi) + r \sin(t + \psi)), \end{aligned}$$

luego las funciones promedio estarían dadas por

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t + \psi)(r^2 \cos^2(t + \psi) + r \sin(t + \psi)) dt = -r\pi \\ f^1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-1}{r} \cos(t + \psi)(r^2 \cos^2(t + \psi) + r \sin(t + \psi)) dt = 0 \end{aligned}$$

lo que da origen a las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -r\pi \\ \frac{d\psi}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución está dada por $r(t) = r(0)e^{-\frac{1}{2}\epsilon t}$, $\psi(t) = \psi(0)$, reemplazando se obtiene la expresión

$$x_a(t) = r(0)e^{-\frac{1}{2}\epsilon t} \cos(t + \psi(0)),$$

así por el Teorema 2.40 se concluye que

$$x(t) - x_a(t) = \mathcal{O}(\epsilon) \text{ en el tiempo escala } \frac{1}{\epsilon}$$

donde $x(t)$ representa la solución del sistema diferencial original, los valores iniciales $r(0)$, $\psi(0)$ son supuestos para ser $\mathcal{O}(1)$ con respecto a ϵ . Esta estimativa no es válida si se inicia cerca de un punto silla.

Ejemplo 2.43. Considere el sistema $x'' + x = \epsilon(1 - x^2)x'$ al comparar con el Ejemplo 2.36 se tiene que $f(x, x') = (1 - x^2)x'$

$$\begin{aligned} r'_a &= \frac{1}{2}\epsilon r_a \left(1 - \frac{r_a^2}{4}\right) \\ \psi'_a &= 0. \end{aligned}$$

Al resolver la ecuación diferencial se tiene donde

$$r_a(t) = \frac{r(0) \exp\left(\frac{\epsilon t}{2}\right)}{\left[1 + \frac{1}{4}r_0^2(\exp(\epsilon t) - 1)\right]^{1/2}}, \quad \psi_a(t) = \psi(0)$$

Como $x_a(t) = r_a(t) \cos(t + \psi_a(t))$ por el Teorema 2.40 se tiene que

$$x(t) = x_a(t) + \mathcal{O}(\epsilon) \text{ en tiempo escala } \frac{1}{\epsilon}$$

Se observa que cuando $r(0) = 2$ se tiene una solución periódica con la cualidad

$$x(t) = \cos(t) + \mathcal{O}(\epsilon) \text{ en la escala } \frac{1}{\epsilon}.$$

Observe la figura 2.1.

2.4.2 Teoría clásica del promedio

Si se observa el Ejemplo 2.43 se ha obtenido una solución periódica cuando $r(0) = 2$, en lo siguiente se trata de mostrar la existencia de órbitas periódicas de un sistema del tipo (2.22). En la demostración de la existencia de órbitas periódicas la hipótesis resaltante es que el determinante del jacobiano de la función promedio evaluada en punto singular de la misma es distinto de cero, esto permite hacer uso de el teorema de la función implícita, además de ello la periodicidad en las funciones involucradas F y R juegan un papel importante.

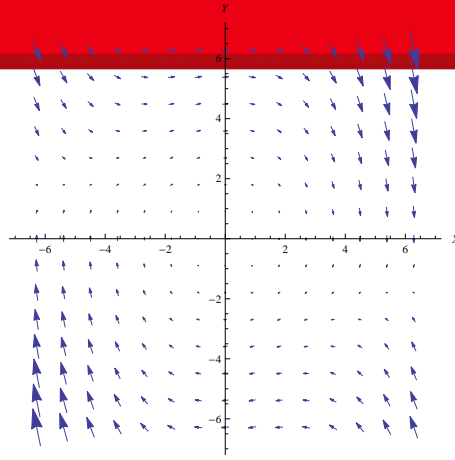


Figure 2.1: $\epsilon = 0.1$

Teorema 2.44. *Considere el siguiente sistema diferencial*

$$x'(t) = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon) \quad (2.22)$$

donde $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones continuas, T -periódicas en la primera variable y D es subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Se define $f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ como:

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s, z) ds \quad (2.23)$$

y se asume que:

- (a) F_1 , R , $D_x F$, $D_x^2 F$, $D_x R$ son definidas, continuas y limitadas por una constante M (independiente de ϵ) en $D \times [0, \infty)$; $-\epsilon_f < \epsilon < \epsilon_f$.
- (b) para $a \in D$ con $f_1(a) = 0$, se tiene $J_{f_1}(a) \neq 0$.

Entonces para $|\epsilon| > 0$ suficientemente pequeño, existe una solución T -periódica $\varphi(\cdot, \epsilon)$ del sistema (2.22) tal que $\varphi(\cdot, \epsilon) \rightarrow a$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Vea el libro [21, pg. 168] □

Ejemplo 2.45. Sea la ecuación $x'' + x = \epsilon(1 - x^2)x'$, haciendo el cambio de variable $y = x'$ se tiene:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x + \epsilon(1 - x^2)y \end{aligned}$$

de donde claramente que las funciones F_1, R no cumplen con la hipótesis de periodicidad del problema para ello se realiza un cambio de coordenadas $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$, derivando se obtiene:

$$\begin{aligned} r' &= \epsilon \sin \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) r \sin \theta \\ \theta' &= -1 + \epsilon (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

así

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\epsilon \sin \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) r \sin \theta}{-1 + \epsilon (1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta},$$

el desarrollo en serie alrededor de $\epsilon = 0$ del lado derecho de la ecuación está dado por:

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon \sin \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) r \sin \theta$$

donde identificando con las hipótesis del teorema se tiene que

$$f_1(r) = \int_0^{2\pi} \sin \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) r \sin \theta d\theta,$$

luego $f_1(r) = \pi - \pi r^2 + \frac{3\pi}{4} r^2$ y encontrando los ceros de f se tiene que en $r = 2$ $f(2) = 0$ y además $f'(2) = -\pi \neq 0$, por lo tanto cumple las hipótesis del teorema, así se concluye que existe una solución 2π - periódica del sistema.

Teorema 2.46. *Suponga que las hipótesis del Teorema 2.44 son satisfechas y que todos autovalores dados por el jacobiano tienen parte real negativa, entonces la correspondiente solución periódica obtenida al aplicar el Teorema 2.44 es asintóticamente estable. Si existe al menos un autovalor con parte real positiva la solución periódica inestable.*²

Demostración. Vea el libro [21, pg. 169] □

2.5 Teoría del promedio via grado de Brouwer

2.47. Para la presente sección se sigue el artículo [1], se puede decir que el método de promedio clásico brinda una relación cuantitativa entre las soluciones de el sistema original el cual es un sistema diferencial no autónomo y el sistema diferencial promediado el cual es un sistema autónomo. Además al aplicar el Teorema de la función implícita el método del promedio

²Vea la Proposición 1.59.

garantiza la existencia de soluciones periódicas para sistemas periódicos. En el artículo [1] se trata este problema por medio de una herramienta topológica específicamente el grado de Brouwer. El Teorema 2.73 es el teorema central, en este se trata de encontrar los ceros de una función relacionada directamente con el sistema.

2.5.1 Grado de Brouwer

2.48. La diferencia entre el método de averaging clásico y el método que aquí se desarrolla es el concepto de grado topológico el cual es una herramienta óptima para estudiar el número de soluciones para la ecuación:

$$f(x) = p.$$

Se utiliza en este sentido esta herramienta ya que el problema que surge en el teorema de averaging es encontrar los ceros de una función definida en un espacio de dimensión finita para determinar el número de ciclos límite que un determinado sistema posee.

Definición 2.49. (Grado para funciones de clase C^1) Sea V un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^n , $f : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f \in C^1(\bar{V})$, además $Z_f = \{x \in \bar{V} | J_f(x) = 0\}$ ³, dado $p \notin f(\partial V) \cup f(Z_f)$. Se define el **grado de f en p** relativo a V como:

$$d_B(f, V, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \text{sgn}(J_f(x)),$$

donde la función signo se denota por sgn y está dada por:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ -1 & , t < 0 \end{cases}$$

Observación 2.50. Se nota que la función

$$d_B : C_1(\bar{V}) \times \mathbb{R}^n \times B \rightarrow \mathbb{R} \setminus (f(\partial \bar{V}) \cup f(S))$$

está bien definida pues $f^{-1}(b)$ es una cantidad finita [5]. En efecto sea $x \in f^{-1}(p)$, entonces $J_f(x) \neq 0$ así por el Teorema de la función inversa f es un difeomorfismo de una vecindad U de x sobre una vecindad V de b es

³ $J_f(x)$ representa el determinante de la matriz jacobiana de f en x

decir $f|_U : U \rightarrow f(U) = V$ es un difeomorfismo por ende es continua. Luego $f^{-1}(p)$ es cerrado y como $f^{-1}(p) \subset \bar{V}$ se tiene que $f^{-1}(p)$ es acotado por lo tanto $f^{-1}(p)$ es compacto. Sea $x \in f^{-1}(p)$, tome la bola abierta B_{r_x} de x se tiene:

$$f^{-1}(p) \subset \bigcup_{x_j \in f^{-1}(p)} B_{r_x}(x_j).$$

Por el Teorema de Borel-Lebesgue como $\{B_{r_x}(x_j)\}$ es una cobertura abierta de $f^{-1}(p)$ se tiene:

$$f^{-1}(p) \subset \bigcup_{j=1}^k B_{r_x}(x_j)$$

así $f^{-1}(p)$ es finito luego $f^{-1}(p) = \{x_1, \dots, x_k\}$ con $J_f(x_j) \neq 0 \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}$

Ejemplo 2.51. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 donde D es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $a \in D$ y $f(a) = 0$, si se tiene que $J_f(x) \neq 0$ por el teorema de la función implícita existe un abierto V que contiene a a tal que $f(x) \neq 0 \forall x \in \bar{V} - a$, entonces $d_B(f, V, 0) \in \{1, -1\}$

Teorema 2.52. Sea $\phi \in C^1(\bar{D})$ y $p \notin \phi(Z_\phi) \cup \phi(\partial D)$ y existe $\delta > 0$, dependiendo de p y ϕ , tal que si $\|\psi - \phi\|_1 < \delta$, entonces $p \notin \psi(Z_\psi) \cup \psi(\partial D)$ y $d(\psi, D, p) = d(\phi, D, p)$

Demostración. ver [15, Pg. 4] □

Ejemplo 2.53. El grado de la función $f(x) = x^2$ en alguna vecindad del origen es cero.

En efecto: f tiene un único cero en $a = 0$ y se tendría que $f'(0) = 0$, así no se puede aplicar la definición de grado directamente, si se considera la función $g(x) = x^2 - \lambda^2$ donde λ es un número positivo arbitrario y g está definida en $V = (-2\lambda, 2\lambda)$, se tiene que g posee dos ceros λ y $-\lambda$, además $g'(\lambda) = 2\lambda > 0$ y $g'(-\lambda) = -2\lambda < 0$, entonces $d_B(g, V, 0) = 0$. Luego por el Teorema 2.52 se tiene que $d_B(g, V, 0) = d_B(f, V, 0) = 0$.

Teorema 2.54. Sea $\phi \in C^1(\bar{D})$, $p \notin \phi(Z_\phi) \cup \phi(\partial D)$. Dada $f_\epsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, además $\text{supp} f_\epsilon = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f_\epsilon(x) \neq 0\}}$ tal que :

$$K_\epsilon \equiv \text{supp} f_\epsilon \subset B(0, \epsilon), \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon(x) dx = 1$$

existe ϵ_0 , dependiendo de p y ϕ , tal que si $0 < \epsilon < \epsilon_0$, entonces

$$d(\phi, D, p) = \int_D f_\epsilon(\phi(x) - p) J_\phi(x) dx$$

Demostración. Por la Observación 2.50 $\phi^{-1}(p)$ es finito, entonces sea $\phi^{-1}(p) = \{a_1, \dots, a_k\}$, es decir son puntos aislados por ello para ϵ suficientemente pequeño se tiene vecindades disjuntas $A_i(\epsilon)$ de a_i en D tal que para cada i , $\phi(A_i(\epsilon)) = B(p, \epsilon)$ y $\phi|_{A_i}$ es inyectiva, además es posible elegir ϵ de tal modo que cada $A_i(\epsilon)$ sea disjunto de ∂D y en ellas $J_\phi \neq 0$ (esto se debe a que cuando $\epsilon = 0$ se tiene que en cada $J_\phi(a_i) \neq 0$ luego por la continuidad de la derivada de ϕ , pues es de clase C^1 se tiene que $J_\phi(a_i) \neq 0$ en una vecindad de a_i en este caso denotada por $A_i(\epsilon)$), así se tiene

$$\text{supp} f_\epsilon(\phi(x) - p) \subset \bigcup_{i=1}^k A_i,$$

de donde:

$$\int_D f_\epsilon(\phi(x) - p) J_\phi(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{A_i} f_\epsilon(\phi(x) - p) J_\phi(x) dx$$

pero J_ϕ tiene solo un signo en cada $A_i(\epsilon)$; entonces

$$\int_{A_i} f_\epsilon(\phi(x) - p) J_\phi(x) dx = \text{sgn} J_\phi(a_i) \int_{K_\epsilon} f_\epsilon(y) dy.$$

Por lo tanto

$$\int_D f_\epsilon(\phi(x) - p) J_\phi(x) dx = \sum_{i=1}^k \text{sgn} J_\phi(a_i) = d(\phi, D, p)$$

□

Teorema 2.55. Sea $\phi \in C^1(\overline{D})$. Suponga que p_1 y p_2 están en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial D)$, y $p_1, p_2 \notin Z_\phi$. Entonces:

$$d(\phi, D, p_1) = d(\phi, D, p_2)$$

Demostración. Ver [15, pg. 14]

□

Es posible remover la restricción $\phi \notin Z_\phi$ en la definición de grado

Definición 2.56. Si $\phi \in C^1 \overline{D}$ y $p \notin \phi(\partial D)$ pero $p \in Z_\phi$ se define $d(\phi, D, p) = d(\phi, D, q)$ donde q es algún punto tal que $q \notin Z_\phi$ y $|q - p| < \rho(p, \phi(\partial D))$.

Observación 2.57. (justificación de la definición) Por el teorema de Sard⁴ cada bola $B(p, r)$ contiene puntos $q \notin Z_\phi$.

⁴Teorema de Sard: Sea $\phi \in C^1(\overline{D})$, entonces $\phi(Z_\phi)$ tiene medida cero en \mathbb{R}^n

Definición 2.58. Una **homotopía** C^1 entre los elementos ϕ, ψ de $C^1(\overline{D})$ es una función $H : \overline{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que si H_t denota la función $x \mapsto H(x, t)$ entonces $H_0 = \phi$ y $H_1 = \psi$, $H_t \in C^1(\overline{D}) \forall t \in [0, 1]$, y $H_s \rightarrow H_t$ en $C^1(\overline{D})$ cuando $s \rightarrow t$ (esto es $\|H_t - H_s\|_1 \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow t$)

Teorema 2.59. Sea $\phi \in C^1(\overline{D})$.

- 1.- $d(\phi, D, p)$ es constante en cada componente de $\mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial D)$.
- 2.- Si $p \notin \phi(\partial D)$, existe $\epsilon > 0$ dependiendo de p y ϕ tal que $d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p)$ cuando $\|\phi - \psi\|_1 < \epsilon$.
- 3.- Sea $H(x, t)$ una homotopía de clase C^1 entre ϕ y ψ , si $p \notin H(\partial D, t) \forall t \in [0, 1]$, entonces $d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p)$.

Demostración. Ver [15, Pg. 16] □

Definición 2.60. (Grado para funciones continuas) Suponga que $\phi \in C(\overline{D})$ y $p \notin \phi(\partial D)$. Se define $d(\phi, D, p) := d(\psi, D, p)$, donde $\psi \in C^1(\overline{D})$ que satisface

$$|\phi(x) - \psi(x)| < \rho(p, \phi(\partial D)); x \in \overline{D}$$

Observación 2.61. (justificación de la definición) En cada vecindad de ϕ en $C(\overline{D})$ existen funciones C^1 . Sea $\rho(p, \phi(\partial D)) = \eta$ y suponga que para $i = 1, 2$, $\psi_i \in C^1(\overline{D})$ y $\|\phi - \psi_i\| < \eta$. Considere la homotopía C^1

$$h_t(x) = t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x); (x \in \overline{D}, 0 \leq t \leq 1)$$

además $|h_t(x) - \phi(x)| = |t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x) - \phi(x) + t\phi(x) - t\phi(x)|$

$$\begin{aligned} |h_t(x) - \phi(x)| &= |t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x) - \phi(x) + t\phi(x) - t\phi(x)| \\ &= |t(\psi_1(x) - \phi(x)) + (1-t)(\psi_2(x) - \phi(x))| \\ &< t\eta + (1-t)\eta = \eta \end{aligned}$$

así si $x \notin \partial D$

$$|p - h_t(x)| \geq |p - \phi(x)| - |\phi(x) - h_t(x)| > 0$$

así $p \notin h_t(\partial D)$ para $0 \leq t \leq 1$ de donde por el Teorema 2.59 se tiene que $d(\psi_1, D, p) = d(\psi_2, D, p)$. Por lo tanto $d(\psi, D, p)$ es el mismo para todo $\psi \in C^1(\overline{D})$ con $\|\phi - \psi\| < \eta$

Teorema 2.62. Suponga que $\phi \in C(\overline{D})$. Si $d(\phi, D, p)$ está bien definido y es distinto de cero entonces existe $q \in D$ tal que $\phi(q) = p$

Demostración. Si $p \notin \phi(\bar{D})$ se toma $\psi \in C^1(\bar{D})$ tal que $\|\phi - \psi\| < \rho(p, \phi(\bar{D}))$.

Entonces $p \notin \psi(\bar{D})$ así se tiene $d(\psi, D, p) = 0$ (por definición). Por lo tanto $d(\phi, D, p) = 0$ (definición 2.60). Por lo tanto $p \in \phi(D)$ si $d(\phi, D, p) \neq 0$ \square

2.63. Hasta el momento solo se ha hecho cambios en ϕ y p ahora se tratara de hacer cambios en el conjunto D , para ello se considera subdivisiones de D .

Teorema 2.64. *Suponga que $p \notin \phi(\partial D)$ y $\phi \in C(\bar{D})$.*

1.- Si D es la unión disjunta de conjuntos abiertos D_i ($i = 1, 2, \dots$), entonces:

$$d(\phi, D, p) = \sum_i d(\phi, D_i, p).$$

2.- Si $K \subset \bar{D}$ es cerrado y $p \notin \phi(K)$, entonces

$$d(\phi, D, p) = d(\phi, D \setminus K, p).$$

Demostración.

1.- Se afirma que $\partial D_i \subset \partial D \forall i$.

Se demuestra por contradicción como $\partial D_i \subset \bar{D}_i \subset \bar{D}$. Sea $y \in \partial D_i$ con $y \notin \partial D$ se tiene que $y \in D$, por lo tanto $y \in D_j$ para algún $j \neq i$, pero como D_j es abierto existe una vecindad U de y tal que $y \in U \subset D_j$ además los D_k son disjuntos así $U \cap D_i = \emptyset$ esto contradice la hipótesis de que $y \in \partial D_i$. Se concluye que $\partial D_i \subset \partial D$. Tome $\psi \in C^1(\bar{D})$ tal que $p \notin Z_\psi$ y

$$\|\phi - \psi\| < \rho(p, \phi(\partial D)).$$

Como $\partial D_i \subset \partial D$, $p \notin \psi(\partial D_i)$ y

$$|\phi(x) - \psi(x)| < \rho(p, \phi(\partial D_i)),$$

$x \in \bar{D}_i$ Por lo tanto $d(\phi, D_i, p) = d(\psi, D_i, p)$ para todo i . Así $d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p)$, además

$$\begin{aligned} d(\psi, D, p) &= \sum_{x \in \psi^{-1}(p)} \text{sgn} J_\psi(x) \\ &= \sum_j \sum_{x \in \psi^{-1}(p) \cap D_j} \text{sgn} J_\psi(x) \\ &= \sum_j d(\psi, D_j, p) \\ &= \sum_j d(\phi, D_j, p) \end{aligned}$$

2.- Elija $\psi \in C^1(\bar{D})$ tal que $p \notin Z_\psi$ y $\|\phi - \psi\| < \rho(p, \phi(\partial D))$ además $\|\phi - \psi\| < \rho(p, \phi(K))$ como K es compacto $\rho(p, \phi(K)) > 0$. Entonces $p \in \psi(K)$ y se tiene:

$$\begin{aligned} d(\phi, D, p) &= d(\psi, D, p) \\ &= \sum_{x \in \psi^{-1}(p) \cap D} \text{sgn} J_\psi(x) \\ &= \sum_{x \in \psi^{-1}(p) \cap (D \setminus K)} \text{sgn} J_\psi(x) \text{ para } \psi^{-1}(p) \cap K \\ &= d(\psi, D \setminus K, p). \end{aligned}$$

Ahora $\|\phi - \psi\| < \rho(p, \phi(\partial(D \setminus K)))$ por la elección de ψ , de donde

$$d(\psi, D \setminus K, p) = d(\phi, D \setminus K, p)$$

□

Lema 2.65. Considere las funciones continuas $f_i : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$, para $i = 0, \dots, k$ y $f, g, r : \bar{V} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde V es un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^n y $0 \notin f(\partial V, \epsilon)$ dadas por

$$g(\cdot, \epsilon) = f_0(\cdot) + \epsilon f_1(\cdot) + \epsilon^2 f_2(\cdot) + \dots + \epsilon^k f_k(\cdot) \quad (2.24)$$

$$f(\cdot, \epsilon) = g(\cdot, \epsilon) + \epsilon^{k+1} r(\cdot, \epsilon) \quad (2.25)$$

Además se asume que

$$g(z, \epsilon) \neq 0 \text{ para todo } z \in \partial V, \epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0] \setminus \{0\}, \quad (2.26)$$

entonces para $|\epsilon| > 0$ suficientemente pequeño $d_B(f(\cdot, \epsilon), V, 0)$ está bien definido y $d_B(f(\cdot, \epsilon), V, 0) = d_B(g(\cdot, \epsilon), V, 0)$.

Demostración. Se usa la invarianza mediante homotopia del grado de Brouwer. Para cada $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0] \setminus \{0\}$ considere la homotopia continua

$$g_t(\cdot, \epsilon) = g(\cdot, \epsilon) + t(f(\cdot, \epsilon) - g(\cdot, \epsilon)), \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

Solo se tiene que probar es que cuando ϵ es suficientemente pequeño $0 \notin g_t(\partial V, \epsilon)$ pues por el Teorema 2.59 se tendría la igualdad de grados. Por contradicción se asume que para algún $t_0 \in (0, 1]$ y algún $x_0 \in \partial V, g_{t_0}(x_0, \epsilon) = 0$. Sea $M > 0$ tal que $|r(z, \epsilon)| \leq M$ para todo $z \in \bar{V}$ (este M existe

ya que el dominio de r es un subconjunto compacto) y cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$.

Entonces $0 = g(x_0, \epsilon) + t(f(x_0, \epsilon) - g(x_0, \epsilon))$ así despejando se tiene que $g(x_0, \epsilon) = -te^{k+1}r(z_0, \epsilon)$ luego como $|t| \leq 1$ se tiene que $|g(x_0, \epsilon)| \leq Me^{k+1}$ esto es una contradicción ya que tomando limite para ϵ suficientemente pequeño se tiene que $g(x_0, \epsilon) = 0$ y $|g(x_0, \epsilon)| = |f_0(x_0) + \epsilon f_1(x_0) + \dots + \epsilon^k f_k(x_0)| \neq 0$ \square

2.66. Se considera el sistema diferencial

$$x' = F(t, x, \epsilon) \tag{2.27}$$

donde $F : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua, T periódica en la primera variable, localmente lipschitziana en la segunda variable y D un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Para cada $z \in D$ se denota por $x(\cdot, z, \epsilon) : [0, t_z) \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución de 2.27 con $x(0, z, \epsilon) = z$. Se asume que

$$t_z > T \text{ para todo } z \in D. \tag{2.28}$$

Considere la función $f : D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por:

$$f(z, \epsilon) = \int_0^T F(t, x(t, z, \epsilon), \epsilon) dt \tag{2.29}$$

cada solución de (2.27) puede ser extendida a \mathbb{R} por periodicidad así se obtiene el siguiente lema.

Lema 2.67. *Sea $x' = F(t, x, \epsilon)$ donde $F : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua, considere la función dada en (2.29), entonces $f(z, \epsilon) = x(T, z, \epsilon) - x(0, z, \epsilon)$ además cada (z_ϵ, ϵ) tal que $f(z_\epsilon, \epsilon) = 0$ provee una solución periódica de (2.27) y cada solución periódica es un cero de la función f dada en (2.29).*

Demostración.

$$\begin{aligned} f(z, \epsilon) &= \int_0^T F(t, x(t, z, \epsilon), \epsilon) dt \\ &= \int_0^T \frac{dx}{dt}(t, z, \epsilon) dt \\ &= x(T, z, \epsilon) - x(0, z, \epsilon) \end{aligned}$$

así se tiene que si $f(z, \epsilon) = 0$, entonces $x(T, z, \epsilon) = x(0, z, \epsilon)$, es decir cada cero de f nos da una solución periódica $x(\cdot, z, \epsilon)$ de (2.27). La recíproca es válida también ya que si tenemos una solución periódica entonces $x(T, z, \epsilon) = x(0, z, \epsilon)$ de esto se concluye que $f(z, \epsilon) = 0$, es decir $(z, 0)$ es un cero de f . \square

Observación 2.68. El lema anterior muestra que el problema de encontrar soluciones T -periódicas de $x' = F(t, z, \epsilon)$ puede ser reemplazado por el de encontrar los ceros de la función f de (2.29) la cual está definida en un espacio de dimensión finita, es decir se ha reducido a encontrar los ceros de la función $f : D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ con el propósito de utilizar el Lema 2.65 para dar respuesta a este problema, se asume que f y g son de la forma dada en (2.65) y $r : D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Lo primero que se debe hacer es encontrar los ceros de f_0 , suponga que a es un cero de f_0 , si existe una vecindad V de a tal que $d_B(f_0, V, 0) \neq 0$, entonces se tiene que para $|\epsilon|$ suficientemente pequeño $f(\cdot, \epsilon)$ tiene al menos un cero en V . Si el grado de Brouwer de f_0 es cero en una vecindad pequeña de a o si no puede ser calculado (f_0 puede ser idénticamente cero), se procede a estudiar $f_0 + \epsilon f_1$ en una vecindad de a y para ϵ suficientemente pequeño. Asuma que existe $a_{1\epsilon}$ un cero de $f_0 + \epsilon f_1$ y suponga V subconjunto abierto y acotado tal que $a_{1\epsilon} \in V$ para cada $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeño y $d_B(f_0 + \epsilon f_1, V, 0) \neq 0$, entonces por el Lema 2.65 se tiene que $d_B(f_0 + \epsilon f_1, V, 0) = d_B(f(\cdot, \epsilon), V, 0) \neq 0$ luego por 2.62 $f(\cdot, \epsilon)$ tiene al menos un cero en V . Se nota que existe la posibilidad de encontrar otro cero distinto de $a_{1\epsilon}$ de $f_0 + \epsilon f_1$ en V . En el caso en que $d_B(f(\cdot, \epsilon), V, 0) \neq 0$ no se cumpla se estudia de manera análoga la función $f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2$

Ejemplo 2.69. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(z, \epsilon) = z^2 - \epsilon^2 + \epsilon^3 r(z, \epsilon)$ identificando como en la Observación 2.68

$$\begin{aligned} f_0(z) &= z^2 \\ f_1(z) &= 0 \\ f_2(z) &= -1 \end{aligned}$$

como por el Ejemplo 2.53 se tiene que en una vecindad de cero el grado de f_0 es cero, esto nos conduce a analizar $f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 = z^2 - \epsilon^2$, esta función tiene dos ceros en $-\epsilon, \epsilon$. Si se fija $\epsilon_0 > 0$ y sean $V = (0, \epsilon_0)$, $U = (-\epsilon_0, 0)$ se tiene que $d_B(f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2, V, 0) \neq 0$ para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ y $d_B(f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2, U, 0) \neq 0$ para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ luego por el Lema 2.65 se tiene que $f(\cdot, \epsilon)$ tiene por lo menos dos ceros, uno en V y otro en U .

Observación 2.70. Asuma que las hipótesis del Lema 2.65 se satisfacen cuando $k = 0$, es decir $f(\cdot, \epsilon) = f_0(\cdot) + \epsilon r(\cdot, \epsilon)$, además se asume que:

(i) Para $a \in D$ con $f_0(a) = 0$ existe una vecindad V de a tal que $f_0(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$ y $d_B(f_0, V, 0) \neq 0$

Como $f_0(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$ por el ítem (2) del Teorema 2.64 se deduce que $d_B(f_0, V \setminus \{a\}, 0) \neq 0$ se deduce que $d_B(f_0, V_\mu, 0) \neq 0$ para cada vecindad $V_\mu \subset V$ de a , es posible elegir V_μ tal que $V_\mu \rightarrow a$ cuando $\mu \rightarrow 0$, como por el Teorema 2.64 $d_B(f_0, V_\mu, 0) = d_B(f(\cdot, \epsilon), V_\mu, 0) \neq 0$, entonces $f(\cdot, \epsilon)$ tiene al menos un cero $a_\epsilon \in V_\mu$ y se puede elegir $a_\epsilon \rightarrow a$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. En este caso se dice que al menos una rama de ceros bifurcan de a si además se supone que $J_{f_0}(a) \neq 0$ por el teorema de la función implícita esta rama es única.

2.5.2 Fórmula de Maclaurin

2.71. Con la finalidad de aplicar el Lema 2.65 se tiene que $f : D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y de clase C^k en ϵ y se escribe

$$f(z, \epsilon) = g(z, \epsilon) + \epsilon^{k+1}r(z, \epsilon) \tag{2.30}$$

donde g está dada por: $g(z, \epsilon) = f(z, 0) + \epsilon \frac{\partial f}{\partial \epsilon}(z, 0) + \dots + \epsilon^k \frac{\partial^k f}{k! \partial \epsilon^k}$. A estas igualdades se le conoce como **formula de Mac-Laurin**. Excepto en $\epsilon = 0$, la función r está bien definida y es continua. Si se puede probar que r es acotada en algún conjunto de la forma $K \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$, con K un subconjunto compacto de D entonces tenemos que r es continua en $D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f)$ la continuidad de r es necesaria en el lema y en este caso con r de manera explícita se usa el símbolo de Landau y se tiene en $K \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$

$$f(z, \epsilon) = g(z, \epsilon) + \epsilon^{k+1}O(1)$$

Ejemplo 2.72. Si $\frac{\partial^k f}{\partial \epsilon^k}$ es Lipschitz en $K \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$, entonces r es acotada en este conjunto. En efecto como $\frac{\partial^k f}{\partial \epsilon^k}$ es Lipschitz se tiene:

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial \epsilon^k}(x, \epsilon) - \frac{\partial^k f}{\partial \epsilon^k}(y, \epsilon) \right| \leq |x - y|$$

para todo $x, y \in K$, $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$. Como K es compacto existe $M > 0$ tal que $|x - y| \leq M$, así se tiene:

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial \epsilon^k}(x, \epsilon) - \frac{\partial^k f}{\partial \epsilon^k}(y, \epsilon) \right| \leq M$$

Luego $\frac{\partial^k f}{\partial \epsilon^k}$ es acotada.

Teorema 2.73. (Promedio de primer orden) Considere el siguiente sistema diferencial

$$x'(t) = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon) \quad (2.31)$$

donde $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones continuas, T -periódicas en la primera variable y D es subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Se define $f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ como:

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s, z) ds \quad (2.32)$$

y se asume que:

(a') F_1 y R son localmente Lipschitz con respecto a x ;

(b') para $a \in D$ con $f_1(a) = 0$, existe una vecindad V de a tal que $f_1(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ y $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$.

Entonces para $|\epsilon| > 0$ suficientemente pequeño, existe una solución T -periódica $\varphi(\cdot, \epsilon)$ del sistema (2.31) tal que $\varphi(\cdot, \epsilon) \rightarrow a$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$

Observación 2.74. Comparando el teorema de promedio clásico y el teorema de promedio mediante grado de Brouwer en la hipótesis (a) pide que F_1 , R , $D_x F$, $D_x^2 F$, $D_x R$ son definidas, continuas y limitadas por una constante M (independiente de ϵ) en $D \times [0, \infty)$; $-\epsilon_f < \epsilon < \epsilon_f$ en ves de (b'), así como también que $J_{f_1}(a) \neq 0$ para cada $a \in D$ con $f_1(a) = 0$. Vemos que la hipótesis (ii) del teorema de averaging clásico implica la hipótesis (b') del teorema de averaging mediante grado de Brouwer. En efecto: Como para $a \in D$ con $f_1(a) = 0$ se tiene $J_{f_1}(a) \neq 0$, entonces por el teorema de la función inversa se tiene que existe una vecindad V de a tal que $f_1(z) \neq 0$, es decir solo existe un único elemento a en V tal que $f_1(a) = 0$, por ello $d(f_1, V, 0) = \text{sgn}(J_{f_1}(a)) \neq 0$.

Demostración del Teorema 2.73. Para todo $z \in \bar{V}$, existe ϵ_0 tal que siempre que $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$, $x(\cdot, z, \epsilon)$ está definida en $[0, T]$, es decir la relación 2.28 es válida. En efecto por el teorema de existencia y unicidad $t_z > h_z$ y $h_z = \inf(T, \frac{b}{M(\epsilon)})$ donde $M(\epsilon) \geq |\epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon)|$ para todo $t \in [0, T]$, para cada x con $|x - z| \leq b$ y para cada $z \in \bar{V}$. Cuando $|\epsilon|$ es suficientemente pequeño, $M(\epsilon)$ puede ser arbitrariamente grande, tal que $h_z = T$ para todo $z \in \bar{V}$. Para todo $t \in [0, T]$, $z \in \bar{V}$ y $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ se tiene la siguiente relación

$$x(t, z, \epsilon) = z + \epsilon \int_0^t F_1(s, x(s, z, \epsilon)) + \epsilon^2 \int_0^t R(s, x(s, z, \epsilon), \epsilon) ds \quad (2.33)$$

y la función f dada en 2.29 para nuestro sistema es:

$$f(z, \epsilon) = \epsilon \int_0^t F_1(s, x(s, z, \epsilon)) + \epsilon^2 \int_0^t R(s, x(s, z, \epsilon), \epsilon) ds \quad (2.34)$$

Se probará que

$$f(z, \epsilon) = \epsilon f_1(z) + \epsilon^2 O(1) \text{ en } \bar{V} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0], \quad (2.35)$$

con f_1 dada por 2.41 primero se nota que existe un conjunto compacto $K \subset D$ tal que $x(t, z, \epsilon) \in K$ para todo $t \in [0, T], z \in \bar{V}$ y $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$, luego se tiene:

$$f(z, \epsilon) - \epsilon f_1(z) = \epsilon \int_0^T [F_1(s, x(s, z, \epsilon)) - F_1(s, z)] ds + \epsilon^2 O(1) \quad (2.36)$$

utilizando que F_1 es de Lipschitz con respecto a x en $[0, T] \times K$ y de (2.33) se obtiene: $|F_1(s, x(s, z, \epsilon)) - F_1(s, z)| \leq L_K |x(s, z, \epsilon) - z| = \epsilon O(1)$. Así junto con (2.35) y usando la observación se tiene que la hipótesis (ii) asegura la existencia de z_ϵ tal que $f(z_\epsilon, \epsilon) = 0$ y $z_\epsilon \rightarrow a$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Entonces $\varphi(\cdot, \epsilon) = x(\cdot, z_\epsilon, \epsilon)$ es una solución periódica de (2.31) y $\varphi(\cdot, \epsilon) \rightarrow a$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ \square

2.5.3 Teoría del promedio via grado de Brouwer de segundo y tercer orden.

Teorema 2.75. (*Averaging de segundo orden*) Considere el siguiente sistema diferencial

$$x'(t) = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 F_2(t, x) + \epsilon^3 R(t, x, \epsilon) \quad (2.37)$$

donde $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones continuas, T -periódicas en la primera variable y D es subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Se asume que:

(a) $F_1 \in C^1(D)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, F_1, F_2, R y $D_x F_1$ son localmente Lipschitz con respecto a x y R es diferenciable con respecto a ϵ . Se define $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ como:

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s, z) ds, \\ f_2 = \int_0^T [D_z F_1(s, z) \cdot \int_0^s F_1(t, z) dt + F_2(s, z)] ds \quad (2.38)$$

Además se asume que

(b) para $V \subset D$ un conjunto abierto y acotado y para cada $\epsilon \in (-\epsilon_f, \epsilon_f) \setminus \{0\}$, existe $a_\epsilon \in V$ tal que $f_1(a_\epsilon) + \epsilon f_2(a_\epsilon) = 0$ y $d_B(f_1 + \epsilon f_2, V, 0) \neq 0$. Entonces

para $|\epsilon| > 0$ suficientemente pequeño, existe una solución T -periódica (\cdot, ϵ) del sistema (2.37)

Demostración. La idea de la prueba es la misma del teorema anterior. En lo que sigue considere se tiene $t \in [0, T]$, $z \in \bar{V}$, $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$. Como el lado derecho del sistema (2.37) es diferenciable con respecto a ϵ , entonces la solución $x(t, z, \epsilon)$ tiene la misma cualidad. Por lo tanto de manera similar a (2.33) se tiene $x(t, z, \epsilon) = z + \epsilon \int_0^t F_1(s, z) ds + \epsilon^2 \mathcal{O}(1)$ y

$$\frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t, z, \epsilon) = \int_0^t F_1(s, z) ds + \epsilon \mathcal{O}(1).$$

Además como $D_x F_1$ es localmete Lipschitz (entonces es Lipschitz en $[0, T] \times \bar{V} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$) se obtiene las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} F_1(t, x(t, z, \epsilon)) &= F_1(t, z) + \epsilon D_z F_1(t, z) \cdot \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t, z, 0) + \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t, z, \epsilon) + \epsilon^2 \mathcal{O}(1) \\ F_2(t, x(t, z, \epsilon)) &= F_2(t, z) + \epsilon \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

Usando la notación de (2.38) la función f dada por (2.29) puede ser escrita para el nuevo sistema como: $f(z, \epsilon) = \epsilon f_1(z) + \epsilon^2 f_2(z) + \epsilon^3 \mathcal{O}(1)$ en $\bar{V} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$, se concluye aplicando el Lema 2.65. \square

Teorema 2.76. *Considere el siguiente sistema diferencial*

$$x'(t) = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 F_2(t, x) + \epsilon^3 F_3(t, x) + \epsilon^4 R(t, x, \epsilon) \quad (2.39)$$

donde $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas, T -periódicas en la primera variable y D es intervalo abierto de \mathbb{R} . Se asume que:

(a) $F_1(t, \cdot) \in C^2(D)$, $F_2(t, \cdot) \in C^1(D)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $F_1, F_2, F_3, R, D_x^2, D_x F_2$ son localmente Lipschitz con respecto a x y R es dos veces diferenciable con respecto a ϵ . Se hace $f_1, f_2, f_3 : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por (2.38)

$$\begin{aligned} f_3(z) = \int_0^T & \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(s, z)(y_1(s, z))^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial z}(s, z)(y_2(s, z)) + \right. \\ & \left. \frac{\partial F_2}{\partial z}(s, z)(y_1(s, z) + F_3(s, z)) \right] ds \end{aligned}$$

donde

$$y_1(s, z) = \int_0^s F_1(t, z) dt, \quad y_2(s, z) = \int_0^s \left[\frac{\partial F_1}{\partial z}(t, z) \int_0^t F_1(r, z) dr + F_2(t, z) \right] dt$$

además se asume que

(b) para $V \subset D$ un intervalo abierto y acotado y para cada $\epsilon \in (-\epsilon_f, \epsilon_f) \setminus \{0\}$, existe $a_\epsilon \in V$ tal que $f_1(a_\epsilon) + \epsilon f_2(a_\epsilon) + \epsilon^2 f_3(a_\epsilon) = 0$ y $d_B(f_1 + \epsilon f_2 + \epsilon^2 f_3(a_\epsilon), V, 0) \neq 0$. Entonces para $|\epsilon| > 0$ suficientemente pequeño, existe una solución T -periódica $\varphi(\cdot, \epsilon)$ del sistema (2.39) tal que $\varphi(\cdot, \epsilon) \rightarrow a$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Idea de la demostración. Ahora se tiene que expandir la función f dada en (2.29) hasta el orden 3. Para esto se necesita las relaciones (2.39) para las funciones F_2 y f_3 en lugar de F_1 y respectivamente F_2 . También para F_1 se requiere de la siguiente relación

$$F_1(t, x(t, z, \epsilon)) = F_1(t, z) + \epsilon \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, z) \cdot \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t, z, 0) + \epsilon^2 \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(t, z) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t, z, 0) \right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, z) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \epsilon^2}(t, z, 0) \right] + \epsilon^3 \mathcal{O}(1).$$

Se nota que

$$y_1(s, z) = \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(s, z, 0), \quad y_2 = \frac{\partial^2 x}{\partial \epsilon^2}(s, z, 0)$$

Así $f(z, \epsilon) = \epsilon f_1(z) + \epsilon^2 f_2(z) + \epsilon^3 f_3(z) + \epsilon^4 \mathcal{O}(1)$ en $\bar{V} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ se concluye del Lema (2.65) \square

2.5.4 Teoría del promedio y grado de coincidencia

2.77. En la presente sección se pretende dar la idea de que el Teorema 2.31 es aún válido sin la hipótesis (a') para ello considere el sistema:

$$x'(t) = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon), \quad (2.40)$$

donde $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones continuas, T -periódicas en la primera variable y D es subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Se define $f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ como:

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s, z) ds \quad (2.41)$$

Se hace la notación $C_T = \{x \in C[0, T] : x(0) = x(T)\}$, se nota que cada solución de (2.40) que también este en C_T puede ser extendida a una solución periódica. Sea V un subconjunto abierto y acotado tal que $\bar{V} \subset D$, se considera también el conjunto

$$\Omega = \{x \in C_T : x(t) \in V \text{ para todo } t \in [0, T]\},$$

Ω es abierto y acotado en el espacio C_T con la norma del supremo. También se necesitan los siguientes objetos: el espacio $C_0 = \{x \in C[0, T] : x(0) = 0\}$ con la norma del supremo, la aplicación $L : C_T \rightarrow C_0$ dada por $Lx(t) = x(t) - x(0)$ y el operador no lineal $N(\cdot, \epsilon) = \bar{\Omega} \rightarrow C_0$ definido por $N(x, \epsilon)(t) = \int_0^t [\epsilon F_1(s, x) + \epsilon^2 R(s, x, \epsilon)] ds$. La aplicación lineal continua L es un operador de Fredholm de índice 0, es decir la ImL es cerrada en C_0 y $dimKerL = codImL = n < \infty$. El operador $N(\cdot, \epsilon)$ es completamente continuo, es decir es continuo y $N(\bar{\Omega}, \epsilon)$ es un conjunto relativamente compacto. Se puede ver que el problema de encontrar soluciones T -periódicas de (2.40) puede ser escrito como la ecuación abstracta

$$Lx = N(x, \epsilon), x \in \Omega$$

Siempre que $Lx \neq N(x)$ para cada $x \in \partial(\Omega)$ el grado de coincidencia $d((L, N), \Omega)$ es definido en [7] como el grado de Leray-Schauder de algún operador asociado, De ahora en adelante se referirá al número $d((L, N), \Omega)$ como el grado de coincidencia del sistema (2.40). Uno de las propiedades principales de éste es que si es distinto de cero entonces el sistema (2.40) tiene al menos una solución en Ω que es una solución T -periódica. El Teorema IV.2 página 31 de [7] es un teorema abstracto sobre grado de coincidencia. Una consecuencia de este teorema para nuestro problema es la siguiente afirmación. **(S)** Para ϵ suficientemente pequeño, el grado de coincidencia para el sistema (2.40) en el conjunto Ω es igual al grado de Brouwer $d_B(f_1, V, 0)$.

2.6 Método del promedio para sistemas autónomos

2.78. Considere el sistema planar

$$\begin{aligned} x' &= P(x, y) \\ y' &= Q(x, y). \end{aligned} \tag{2.42}$$

donde $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas además se cumple:

(A1) El sistema (2.42) tiene periodo anular alrededor del punto singular $(0, 0)$

$$\Gamma_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = h, \quad h_c < h < h_s\}.$$

Donde H es una integral primera, h_c es el nivel crítico de H correspondiente al centro $(0, 0)$ y h_s denota el valor de H para el cual el periodo anular termina

en una separatriz policiclo. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $h_s > h_c \geq 0$. Se denota por $\mu = \mu(x, y)$ un factor integrante del sistema (2.42) correspondiente a la integral primera H . Considere perturbaciones de (2.42) de la forma

$$\begin{aligned} x' &= P(x, y) + \epsilon p(x, y, \epsilon), \\ y' &= Q(x, y) + \epsilon q(x, y, \epsilon), \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde $p, q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas. El propósito es escribir el sistema (2.43) en la forma estándar para aplicar el método del promedio para ϵ suficientemente pequeño. El sistema diferencial en esta forma describe la dependencia entre la raíz cuadrada de la energía $R = \sqrt{h}$ y el ángulo φ de las coordenadas polares. El campo vectorial de esta ecuación será 2π -periódico y sus soluciones 2π -periódicas serán trayectorias periódicas de (2.43).

Teorema 2.79. *Considere (A1) para el sistema (2.42) y que*

$$xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \text{ en el periodo anular} \quad (2.44)$$

Sea $\rho : (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$ una función continua tal que

$$H(\rho(R, \varphi) \cos \varphi, \rho(R, \varphi) \sin \varphi) = R^2 \quad (2.45)$$

$\forall R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}), \forall \varphi \in [0, 2\pi)$. Entonces la ecuación diferencial que describe la dependencia entre la raíz cuadrada de la energía $R = \sqrt{h}$ y el ángulo φ para el sistema (2.43) es:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \epsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\epsilon(qx - py)}, \quad (2.46)$$

donde $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi, y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$. Se toma $\epsilon_f > 0$ suficientemente pequeño y $D = \cup_{h_{c*} < h < h_{s*}} \Gamma_h$, donde $h_c < h_{c*} < h < h_{s*} < h_s$ son fijos pero arbitrariamente cercanos a h_c, h_s respectivamente. El campo vectorial de la ecuación (2.46) está bien definido, es continuo en $D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f)$ y es 2π -periódica con respecto a φ .

Demostración. Como H es integral primera y μ es un factor de integración⁵ de (2.42), las siguientes relaciones son válidas en el periodo anular

$$\frac{\partial H}{\partial x} P + \frac{\partial H}{\partial y} Q = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\mu P, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \mu Q$$

⁵ μ es factor de integración de $X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$ cuando μX admite una integral primera, global.

$$G(r, R, \varphi) = H(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - R^2,$$

para cada (r, φ) del periodo anular (el cual es un conjunto abierto) y $R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$. (r, φ) denotan las coordenadas polares, se tiene que:

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial H}{\partial y} \sin \varphi = \mu(Q \cos \varphi - P \sin \varphi)$$

al hacer el cambio a coordenadas cartesianas se tiene que:

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\mu(x, y)}{r} \mu(Q(x, y)x - P(x, y)y),$$

donde $x = r \cos \varphi$ y $y = r \sin \varphi$. Para cada (r_0, φ_0) en la región de centros determinados por Γ_h existe un R_0 tal que $G(r_0, R_0, \varphi_0) = 0$, además la hipótesis nos garantiza que $\frac{\partial G}{\partial r}(r_0, R_0, \varphi_0) \neq 0$, luego por el teorema de la función implícita se tiene que alrededor de cada punto (R_0, φ_0) existe una única función continua $\rho = \rho(R, \varphi)$ tal que la relación (2.45) es satisfecha, así esta función bien definida en todo $(\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi)$ y cumple con (2.45), además la ecuación (2.45) nos da la relación $R(t) = \sqrt{H(x(t), y(t))}$, de las relaciones $x = \rho \cos \varphi$ y $y = \rho \sin \varphi$ se tiene $\varphi(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$ siempre que $(x(t), y(t)) \in \Gamma_h$, $t \in \mathbb{R}$. Luego, como en [17], se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \frac{\frac{\partial H}{\partial x} x' + \frac{\partial H}{\partial y} y'}{2\sqrt{H}} \\ &= \frac{\mu Q(P + \epsilon p) - \mu P(Q + \epsilon q)}{2R} \\ &= \frac{\mu QP + \mu Q\epsilon p - \mu PQ - \mu P\epsilon q}{2R} \\ &= \epsilon \frac{\mu(Qp - Pq)}{2R}. \end{aligned}$$

De igual manera

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2} \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x(t)^2} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2} \frac{(Q + \epsilon q)x - y(P + \epsilon p)}{x(t)^2} \\ &= \frac{(Qx - Py) + \epsilon(qx - py)}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\frac{dR}{d\varphi} = \epsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\epsilon(qx - py)}$$

□

Observación 2.80. La función $f : (\sqrt{h_{c*}}, \sqrt{h_{s*}}) \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}$ descrita por (2.29) para el sistema (2.46) viene dada por:

$$f(R, \epsilon) = \epsilon \int_0^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\epsilon(qx - py) + 2R\epsilon(qx - py)} d\varphi$$

su serie de Mac-Laurin en alrededor de $\epsilon = 0$, viene dada por:

$$\epsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py)} + \epsilon^2 \mathcal{O}(1),$$

de donde la función $f_1 : (\sqrt{h_{c*}}, \sqrt{h_{s*}}) \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por:

$$f_1(R) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py)} d\varphi$$

donde $\mu = \mu(x, y)$ es el factor integrante del sistema (2.42) correspondiente a la integral primera H y $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$ y $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$

Ejemplo 2.81. (Bifurcación de un ciclo límite de un centro isócrono via averaging) Sea el sistema diferencial

$$\begin{aligned} x' &= -y + x^2 \\ y' &= x + xy, \end{aligned} \tag{2.47}$$

con un centro isócrono en el origen, cuya integral primera en el periodo anular tiene la expresión $H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(1+y)^2}$ ya que su derivada a lo largo de la curva solución es cero. En este sistema $h_c = 0$ y $h_s = 1$ de la relación (2.45) se tiene que la función ρ definida en la hipótesis del teorema anterior está dada por $\rho(R, \varphi) = \frac{R}{1 - R \sin \varphi}$ para todo $0 < R < 1$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$ Considere las perturbaciones

$$\begin{aligned} x' &= -y + x^2 + \epsilon p(x, y) \\ y' &= x + xy + \epsilon q(x, y), \end{aligned} \tag{2.48}$$

donde $p(x, y) = a_1x - a_3x^2 + (2a_2 + a_5)xy + a_6y^2$ y $q(x, y) = a_1y + a_2x^2 + a_4xy - a_2y^2$. La ecuación (2.46) para este caso está dada por

$$\frac{dR}{d\varphi} = \epsilon \frac{a_1R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R \sin \varphi + \epsilon c(\varphi)R} \tag{2.49}$$

$$a(\varphi) = (-2a_1 + 3a_2 + a_5) \sin \varphi + (a_4 + a_6) \cos \varphi \\ + (-4a_2 - a_5) \sin^3 \varphi + (-a_3 - a_4 - a_6) \cos^3 \varphi,$$

$$b(\varphi) = a_1 + a_2 + (-a_1 - 2a_2) \cos^2 \varphi - a_4 \cos \varphi \sin \varphi,$$

$$c(\varphi) = (a_3 + a_4) \sin \varphi + (-3a_2 - a_5) \cos \varphi + (-a_3 - a_4 - a_6) \sin^3 \varphi \\ + (4a_2 + a_5) \cos^3 \varphi.$$

Al denotar por

$$F_1(\varphi, R) = \frac{a_1 R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R \sin \varphi}$$

$$G(\varphi, R, \epsilon) = -\frac{(a_1 R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3)c(\varphi)R}{(1 - R \sin \varphi)(1 - R \sin \varphi + \epsilon c(\varphi)R)}$$

el sistema (2.49) se transforma en

$$\frac{dR}{d\varphi} = \epsilon F_1(\varphi, \epsilon) + \epsilon^2 G(\varphi, R, \epsilon)$$

el cual esta en la forma estándar. Para aplicar el Teorema 2.73 se necesita la función f_1 que para este problema es $f_1 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_1(z) = \int_0^{2\pi} \frac{a_1 z + a(\varphi)z^2 + b(\varphi)z^3}{1 - z \sin \varphi} d\varphi,$$

al calcular esta integral mediante Mathematica se obtiene

$$f_1(z) = -\frac{1}{2(z\sqrt{1-z^2})} \left[2a_2 z^4 + (6a_2 + a_5 - 2a_1)z^2 \sqrt{1-z^2} \right. \\ \left. - (10a_2 + 2a_5)z^2 - (2a_5 + 8a_2)\sqrt{1-z^2} + 8a_2 + 2a_5 \right]$$

al tomar la nueva variable $\xi \in (0, 1)$ definida por $z = \sqrt{1-\xi^2}$, se tiene $f_1(\sqrt{1-\xi^2}) = \frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}}(1-\xi)(2a_2\xi^2 + (2a_1 - 4a_2 - a_5)\xi + 2a_1 + 2a_2 + a_5)$. Se nota que $z \in (0, 1)$ es un cero de f_1 si y solo si $\xi \in (0, 1)$ es un cero de la función polinomial $g(\xi) = 2a_2\xi^2 + c_1\xi + c_2$ donde $c_1 = 2a_1 - 4a_2 - a_5$ y $c_2 = 2a_1 + 2a_2 + a_5$. Es fácil ver que en nuestra discusión sobre los ceros de g se puede considerar sus coeficientes como numeros reales arbitrarios. Se concluye que el número de ceros de g en el intervalo $(0, 1)$ es a lo más dos. Esto significa que el número de ceros de f_1 es a lo más dos. Por lo tanto a lo mas dos ciclos limites bifurcan el periodo anular del sistema (2.47).

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - \epsilon(1 - x^2)y, \end{aligned} \tag{2.50}$$

multiplicamos por $h(x, y) = -1$ así se nota que:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= -y \\ Q(x, y) &= x \\ p(x, y) &= 0 \\ q(x, y) &= (1 - x^2)y \\ H(x, y) &= \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.51}$$

luego el numerador de la ecuación 2.46 $N = N(x, y)$ del teorema se expresa como:

$$N(x, y) = \mu(x^2 + y^2)(Pq - Qp).$$

Como se tiene que $\mu(x, y) = 1$ y haciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} x &= \rho(R, \varphi) \cos \varphi \\ y &= \rho(R, \varphi) \sin \varphi, \end{aligned}$$

al reemplazar se obtiene:

$$\begin{aligned} N(x, y) &= (x^2 + y^2)(Pq - Qp) \\ &= \rho^2(1 - x^2)y^2 \\ &= \rho^2[\rho^2 \sin^2(\varphi) - \rho^4 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi)] \\ &= \rho^4 \sin^2(\varphi) - \rho^6 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi), \end{aligned}$$

de la igualdad $H(\rho(R, \varphi) \cos \varphi, \rho(R, \varphi) \sin \varphi) = R^2$, se tiene $\rho^2 = 2R^2$ de donde $\rho = R\sqrt{2}$, así se obtiene:

$$N(x, y) = 4 \sin^2(\varphi)R^4 - 8 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi)R^6.$$

El denominador de la ecuación (2.46) es dado por:

$$D(x, y) = 2R(Qx - Py) + 2R\epsilon(qx - py),$$

en la aplicación del método solo influye la expresión $\overline{D(x, y)} = 2R(Qx - Py)$, por tanto una expresión para tal es dada por:

$$\begin{aligned} \overline{D(x, y)} &= 2R(Qx - Py) \\ &= 2R(x^2 + y^2) \\ &= 2R\rho^2 \\ &= 4R^3 \end{aligned}$$

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{4 \sin^2(\varphi)R^4 - 8 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi)R^6}{4R^3 + \epsilon g(R, \varphi, \epsilon)}$$

de acuerdo al método se tiene que encontrar los ceros simples de

$$\begin{aligned} f_1(R) &= \int_0^{2\pi} \frac{4 \sin^2(\varphi)R^4 - 8 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi)R^6}{4R^3 + \epsilon g(R, \varphi, \epsilon)} d\varphi \\ &= R \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi - 2R^3 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) d\varphi \\ &= R(\pi - (\frac{\pi}{2})R^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto los ceros de f_1 son $R = 0$, $R = -\sqrt{2}$, $R = \sqrt{2}$, como R es la raíz de energía del sistema no puede ser negativo, para $R = 0$ corresponde a la singularidad en el origen solo resta $R = \sqrt{2}$. Se tiene que $R = \sqrt{2}$ es un cero simple ya que: $(f'_1(R)) = \pi - (\frac{3}{2}\pi R^2)$, entonces $(f'_1(\sqrt{2})) = -2\pi \neq 0$. Por el teorema de la función inversa existe una vecindad V de $R = \sqrt{2}$ tal que $f_1(v) \neq 0$ para todo $v \in V$, luego

$$d_B(f_1, V, 0) = \text{signo}(f'_1(\sqrt{2})) = \text{signo}(-2\pi) = -1 \neq 0,$$

y por el Teorema 2.73 el sistema inicial posee un ciclo limite, como es esperado en la ecuación de Van Der Pol.

Ejemplo 2.83. (Bifurcación de Hopf) El sistema que presenta bifurcación de Hopf es dado por

$$\begin{aligned} x' &= -\epsilon x - y + \epsilon(xy + xy^2 + x^3 + xy^3 + x^3y) \\ y' &= x - \epsilon y + \epsilon(y^2 + y^3 + yx^2 + x^3 + y^2x^2 + y^4), \end{aligned}$$

donde ϵ representa el parámetro de bifurcación. Sea $X = (x, y)^T$, se escribe el sistema de la forma:

$$X' = \begin{pmatrix} -\epsilon & -1 \\ 1 & -\epsilon \end{pmatrix} X + \epsilon \begin{pmatrix} R_1(X) \\ R_2(X) \end{pmatrix}$$

Se nota que la parte lineal del sistema depende del parámetro ϵ y tiene autovalores $-\epsilon \pm i$, además si $\epsilon > 0$ por el Teorema de Hartman-Grobman 1.35 el sistema es topológicamente conjugado a a un foco atractor lineal, si $\epsilon < 0$ el sistema es topológicamente conjugado a un foco repulsor, si $\epsilon = 0$ el sistema deja de ser hiperbólico y en este caso se tiene un centro global isócrono. Para

detectar una órbita periódica y aplicar el método se realiza un cambio de variable a coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ se tiene:

$$\begin{aligned} r' &= \epsilon r(r^2 - 1)(1 + r \sin \theta) \\ \theta' &= 1 + \epsilon r^2 \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

por la regla de la cadena resulta:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\epsilon r(r^2 - 1)(1 + r \sin \theta)}{1 + \epsilon r^2 \cos^2 \theta}$$

para ϵ suficientemente pequeño y haciendo uso de la fórmula de Mac-Laurin se puede escribir la ecuación diferencial como:

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon(r(r^2 - 1)(1 + r \sin \theta)) + \epsilon^2 R(r, \theta, \epsilon)$$

Así las hipótesis del Teorema 2.73 se cumple, al aplicar el método se observa que $F_1(r, \theta) = r(r^2 - 1)(1 + r \sin \theta)$, con lo cual

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(r^2 - 1)(1 + r \sin \theta) d\theta = r(r^2 - 1)$$

los ceros de f_1 se dan cuando $r = 0$ o $r = \pm 1$ como el radio es positivo y excluyendo $r = 0$ se tiene que el único valor para r es 1, además $f_1'(1) = 2 \neq 0$. Por el teorema de la función inversa existe una vecindad V de $r = 1$ tal que $f_1(v) \neq 0 \forall v \in V$, por lo tanto $d_B(f_1, V, 0) = \text{signo}(f_1'(1)) = 1 \neq 0$, así el sistema inicial posee un ciclo límite.

Capítulo 3

Sistemas periódicos no-lineales y ciclos límite

En esta sección se sigue [2] para demostrar el Teorema 3.5 y se estudian sistemas diferenciales periódicos que dependen de un parámetro ϵ pequeño, una de las hipótesis más importantes es que el sistema sin perturbar posee una variedad invariante de soluciones periódicas. Se dan condiciones suficientes para que esta variedad invariante persista después de la perturbación. El paso importante para la prueba es aplicar el Teorema de reducción de Lyapunov-Schmidt, bajo algunas suposiciones técnicas. En la última sección se dan algunas aplicaciones: [2, 13, 14, 8].

3.1 Sistemas con una n -variedad de órbitas periódicas

3.1. Se estudia la bifurcación de soluciones T -periódicas en:

$$x'(t) = F_0(t, x) + \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon) = f(t, x; \epsilon), \quad (3.1)$$

donde ϵ es un parámetro pequeño, $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones de clase C^2 , T -periódicas en la primera variable y D es subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , vea [6]. El sistema sin perturbar,

$$x'(t) = F_0(t, x) \quad (3.2)$$

tiene una variedad de soluciones periódicas, Z que es el gráfico de una aplicación diferenciable. Como en [2] se considera la Reducción de Lyapunov-Schmidt para dimensión finita y se denota por $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la proyección de las primeras k coordenadas, análogamente $\pi^\perp : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ la proyección de las últimas $(n - k)$ coordenadas.

Teorema 3.2. (*Reducción de Lyapunov-Schmidt*) Sea $g : D \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ funciones de clase C^2 , donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, $V \subset \mathbb{R}^k$ es un abierto acotado. Se asume que:

- (a) $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \bar{V}\} \subset D$ y para cada $z_\alpha \in Z$ se tiene $g(z_\alpha, 0) = 0$;
- (b) La matriz $G_\alpha = D_z g(z_\alpha, 0)$ tiene en la esquina superior derecha la matriz nula de orden $k \times (n-k)$ y en la esquina inferior derecha la matriz Δ_α , con $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

Si se define $f_1 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ como

$$f_1(\alpha) = \frac{\partial(\pi g)}{\partial \epsilon}(z_\alpha, 0),$$

y existe $a \in V$ con $f_1(a) = 0$ y $\det(Df_1(a)) \neq 0$ entonces existe α_ϵ tal que $g(z_{\alpha_\epsilon}, \epsilon) = 0$ y $z_{\alpha_\epsilon} \rightarrow z_a \in Z$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Considere la función

$$\pi^\perp : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}, (\alpha, \beta, \epsilon) \mapsto \pi^\perp g(\alpha, \beta, \epsilon).$$

Como $g(z_\alpha, 0) = 0$, entonces $\pi^\perp(g(z_\alpha, 0)) = 0$ y $\frac{\partial(\pi^\perp g)}{\partial \beta}(z_\alpha, 0) = \Delta_\alpha$. Por hipótesis $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$ y como g es de clase C^2 se tiene que $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$ en una vecindad de $\epsilon = 0$. Por el Teorema de la función implícita para ϵ suficientemente pequeño existe una función β con $(\alpha, \epsilon) \mapsto \beta(\alpha, \epsilon)$ tal que

$$\beta(\alpha, 0) = \beta_0(\alpha) \text{ y } \pi^\perp g(\alpha, \beta(\alpha, \epsilon), \epsilon) = 0.$$

Luego, considere la función:

$$\delta : \mathbb{R}^k \times [-\epsilon_0, \epsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^k, \text{ dada por } (\alpha, \epsilon) \mapsto \pi g(\alpha, \beta(\alpha, \epsilon), \epsilon).$$

Como $g(z_\alpha, 0) = 0$, $\pi g(z_\alpha, 0) = 0$ y $\delta(\alpha, 0) = 0$. Al derivar δ respecto a ϵ :

$$\delta_\epsilon(\alpha, 0) = \frac{\partial(\pi g)}{\partial \beta}(z_\alpha, 0) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \epsilon}(\alpha, 0) + \frac{\partial(\pi g)}{\partial \epsilon}(z_\alpha, 0),$$

pero $\frac{\partial(\pi g)}{\partial \beta}(z_\alpha, 0) = 0_{k \times (n-k)}$. Luego $\delta_\epsilon(\alpha, 0) = \frac{\partial(\pi g)}{\partial \epsilon}(z_\alpha, 0) = f_1(\alpha)$, además la serie de Mac-Laurin de $\delta(\alpha, \epsilon)$ en $(\alpha, 0)$ induce

$$\delta(\alpha, \epsilon) = \epsilon f_1(\alpha) + \epsilon^2 r(\alpha, \epsilon).$$

$$(\alpha, \epsilon) \mapsto f_1(\alpha) + \epsilon r(\alpha, \epsilon)$$

se tiene que $\zeta(a, 0) = 0$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}(a, 0) = Df_1(a)$ y $\det(Df_1(a)) \neq 0$. Por el Teorema de la función implícita, para ϵ suficientemente pequeño existe $\alpha(\epsilon)$ tal que $\alpha(0) = a$ y $f_1(\alpha(\epsilon)) + \epsilon r(\alpha(\epsilon), \epsilon) = 0$. Consecuentemente, $\delta(\alpha(\epsilon), \epsilon) = 0$, y así $z_{\alpha_\epsilon} = (\alpha(\epsilon), \beta(\alpha(\epsilon), \epsilon), \epsilon)$ implica que $g(z_{\alpha_\epsilon}, \epsilon) = 0$. \square

3.3. Para $z \in \Omega$ se denota por $x(\cdot, z, \epsilon) : [0, t_{(z, \epsilon)}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución de:

$$x'(t) = F_0(t, x) + \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon) \quad (3.3)$$

con $x(0, z, \epsilon) = z$ se deduce que cuando $t_{(z_0, 0)} > T$ para algún $z_0 \in D$ existe una vecindad de $(z_0, 0)$ en $\Omega \times (-\epsilon_f, \epsilon_f)$ tal que para todo (z, ϵ) en esta vecindad se tiene $t_{(z, \epsilon)} > T$ esto se debe a que las soluciones dependen continuamente de ϵ , (además ver Teorema 1.23). Como hipótesis principal se asume que cuando $\epsilon = 0$ el sistema (3.3) tiene soluciones T -periódicas. Con estas hipótesis existe un subconjunto abierto D de Ω y un $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño tal que para todo $(z, \epsilon) \in D \times (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ la solución $x(\cdot, z, \epsilon)$ está definida en $[0, T]$ (ver Teorema 1.3). Luego se puede considerar la función $f : D \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por:

$$f(z, \epsilon) = x(T, z, \epsilon) - z, \quad (3.4)$$

como en el Lema 2.67 el problema de encontrar órbitas periódicas se reduce a encontrar ceros de alguna función.

3.4. En el sistema $x'(t) = F_0(t, x)$, dado en (3.2), la linealización induce

$$y' = P(t, z)y, \quad (3.5)$$

donde $P(t, z)$ es la matriz dada por:

$$P(t, z) = D_x F_0(t, x(t, z, 0)). \quad (3.6)$$

El siguiente es el principal teorema de esta sección, se necesita no solo que $Y(\cdot, z)$ sea alguna matriz fundamental de (3.5) si no que además debe tener una forma determinada, esto facilita de manera notable la demostración del teorema. Sin embargo el encontrar una matriz de tal tipo no siempre es posible.

Teorema 3.5. Sea $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ una función de clase C^2 , donde V es un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^n . Se asume que:

- (a) $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \bar{V}\} \subset D$ y para cada $z_\alpha \in Z$ la única solución x_α de $x'(t) = F_0(t, x)$ con $x(0) = z_\alpha$ es T -periódica;
- (b) para cada $z_\alpha \in Z$, existe una matriz solución fundamental de (3.5) $Y_\alpha(t) = Y(t, z_\alpha)$ tal que la matriz $Y_\alpha^{-1}(0) - Y_\alpha^{-1}(T)$ tiene en la esquina superior derecha la matriz nula de orden $k \times (n - k)$ y en la esquina inferior derecha la matriz Δ_α , de orden $(n - k) \times (n - k)$ con $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

Si se define la función $f_1 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ definida por

$$f_1(\alpha) = \pi \int_0^T Y_\alpha^{-1} F_1(t, x_\alpha(t)) dt, \quad (3.7)$$

y existe $a \in V$ con $f_1(a) = 0$ y $\det(Df_1(a)) \neq 0$, entonces existe una solución T -periódica $\varphi(\cdot, \epsilon)$ del sistema (3.3) tal que $\varphi(0, \epsilon) \rightarrow z_a$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Se necesita estudiar los ceros de la función (3.4) lo que es equivalente a estudiar los ceros de la función

$$g(z, \epsilon) = Y^{-1}(T, z) f(z, \epsilon)$$

ya que cuando f tiene un cero g también y viceversa.

Se tiene que $g(z_\alpha, 0) = 0$ pues $x(\cdot, z_\alpha, 0)$ es solución periódica de (3.2) así $(z_\alpha, 0)$ es un cero de f por ende es un cero de g .

Se probará que

$$G_\alpha = \frac{dg}{dz}(z_\alpha, 0) = Y_\alpha^{-1}(0) - Y_\alpha^{-1}(T) \quad (3.8)$$

Para esto se requiere conocer $\frac{\partial x}{\partial z}(\cdot, z, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t, z, 0) &= F_0(t, x(t, z, 0)); \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{dx}{dt}(t, z, 0) &= \frac{\partial}{\partial z} [F_0(t, x(t, z, 0))]; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial z}(t, z, 0) &= \frac{\partial F_0}{\partial x}(t, x(t, z, 0)) \cdot \frac{\partial x}{\partial z}(t, z, 0); \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial z}(t, z, 0) &= P(t, z) \frac{\partial x}{\partial z}(t, x(t, z, 0)), \end{aligned}$$

de la última igualdad se observa que $\frac{dx}{dz}(t, z, 0)$ es solución del sistema (3.5)

con la condición inicial $\frac{\partial x}{\partial z}(0, z, 0) = I_n$, y puesto que $Y(t, z)$ es la matriz fundamental de (3.5) se tiene por unicidad de soluciones que

$$\frac{\partial x}{\partial z}(t, z, 0) = Y(t, z)Y_\alpha^{-1}(0, z).$$

Por otro lado como $f(z, \epsilon) = x(T, z, \epsilon) - z$ al derivar se tiene

$$\frac{df}{dz}(z, 0) = \frac{\partial x}{\partial z}(T, z, 0) - I_n = Y(T, z)Y_\alpha^{-1}(0, z) - I_n;$$

y al derivar g con respecto a z resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial z}(z, 0) &= Y^{-1}(T, z) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z, 0) + \left(\frac{\partial Y^{-1}}{\partial z_1} f(z, 0), \dots, \frac{\partial Y^{-1}}{\partial z_n} f(z, 0) \right); \\ &= Y^{-1}(0, z) - Y^{-1}(T, z) + \left(\frac{\partial Y^{-1}}{\partial z_1} f(z, 0), \dots, \frac{\partial Y^{-1}}{\partial z_n} f(z, 0) \right). \end{aligned}$$

Para cada $z_\alpha \in Z$ se tiene que $f(z_\alpha, 0) = 0$ con lo cual

$$G_\alpha = \frac{dg}{dz}(z_\alpha, 0) = Y_\alpha^{-1}(0) - Y_\alpha^{-1}(T).$$

Al derivar g con respecto a ϵ se tiene:

$$\frac{\partial g}{\partial \epsilon}(z, 0) = Y^{-1}(T, z) \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(T, z, 0).$$

Al derivar con respecto a ϵ el sistema diferencial (3.3) se puede asociar el sistema diferencial

$$y' = D_x F_0(t, x(t, z, 0))y + F_1(t, x(t, z, 0)), \quad y(0) = 0,$$

del cual $\left(\frac{\partial x}{\partial \epsilon}\right)(\cdot, z, 0)$ es la solución.

En efecto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(\cdot, z, \epsilon) &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{dx}{dt}(\cdot, z, \epsilon); \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(\cdot, z, \epsilon) &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} [F_0(t, x(t, z, \epsilon)) + \epsilon F_1(t, x(t, z, \epsilon)) + \epsilon^2 R(t, x(t, z, \epsilon), \epsilon)]; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(\cdot, z, 0) &= D_x F_0(t, x(t, z, 0)) \cdot \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t, z, 0) + F_1(t, x(t, z, 0)). \end{aligned}$$

Luego por variación de parámetros y unicidad de soluciones

$$\frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t, z, 0) = Y(t, z) \int_0^t Y^{-1}(s, z) F_1(s, x(s, z, 0)) ds$$

al evaluar en $t = T$ resulta

$$\frac{\partial x}{\partial \epsilon}(T, z, 0) = Y(T, z) \int_0^T Y^{-1}(s, z) F_1(s, x(s, z, 0)) ds$$

$$\frac{\partial g}{\partial \epsilon}(z, 0) = Y^{-1}(T, z) \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(T, z, 0)$$

se obtiene

$$\frac{\partial g}{\partial \epsilon}(z, 0) = \int_0^T Y^{-1}(s, z) F_1(s, x(s, z, 0)) ds.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial(\pi g)}{\partial \epsilon}(z_\alpha, 0) = f_1(\alpha)$$

donde f_1 está dada por (3.7). Al aplicar el Teorema 3.2 existe $\alpha_\epsilon \in V$ tal que $g(z_{\alpha_\epsilon}, \epsilon) = 0$, es decir $(z_{\alpha_\epsilon}, \epsilon)$ es un cero de g , luego $f(z_{\alpha_\epsilon}, \epsilon) = 0$, entonces el Lema 2.67 asegura que $\varphi(\cdot, \epsilon) = x(\cdot, z_{\alpha_\epsilon}, \epsilon)$ es solución T -periódica de (3.1). \square

3.1.1 Caso (i): Perturbación de un sistema isócrono

3.6. En esta sección se asume que existe un conjunto abierto V con $\bar{V} \subset D$ tal que para cada $z \in \bar{V}$ la solución $x(\cdot, z, 0)$ es T -periódica, aquí se perturba un sistema isócrono, es decir un sistema en el cual todas sus soluciones son T -periódicas, en seguida se verá el método del promedio de primer orden como un corolario del Teorema 3.5 esto se hará al asumir que $F_0(t, x) = 0$.

Corolario 3.7. (*Perturbación de un sistema isócrono*) Sea V un subconjunto abierto, acotado tal que $\bar{V} \subset D$ y tal que para cada $z \in \bar{V}$, $x(\cdot, z, 0)$ es T -periódica y sea la función $f_1 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f_1(z) = \int_0^T Y^{-1}(t, z) F_1(t, x(t, z, 0)) dt. \quad (3.9)$$

Si existe $a \in V$ con $f_1(a) = 0$ y $\det\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)(a)\right) \neq 0$, entonces existe una solución T -periódica $\varphi(\cdot, \epsilon)$ del sistema (3.3) tal que $\varphi(0, \epsilon) \rightarrow a$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Este resultado es inmediato del Teorema 3.5 con $k = n$. \square

Corolario 3.8. (*Método del promedio de primer orden*) Sea $F_0(t, x) = 0$ y sea la función $f_1 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(t, z) dt, \quad (3.10)$$

Si existe $a \in V$ con $f_1(a) = 0$ y $\det\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)(a)\right) \neq 0$, entonces existe una solución T -periódica $\varphi(\cdot, \epsilon)$ del sistema (3.3) tal que $\varphi(0, \epsilon) \rightarrow a$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Como $F_0(t, x) = 0$, entonces el sistema $x' = F_0(t, x)$ se convierte en $x' = 0$ entonces todas sus soluciones son constantes luego su linealización es la misma y al tomar su matriz solución fundamental $Y(t, z) = I_n$ la matriz identidad $\forall t \in \mathbb{R}, \forall z \in \bar{V}$, el resultado sigue al aplicar el Teorema 3.5 □

3.1.2 Caso(ii): Perturbación de un sistema lineal

3.9. Aquí se considera el sistema (3.1) con $F_0(t, x) = P(t)x + q(t)$, es decir el sistema sin perturbar es el sistema lineal $x' = P(t)x + q(t)$ para ello se necesita de algunos resultados de teoría de sistemas lineales.

Lema 3.10. *Sea $P : \mathbb{R} \rightarrow M_n$ una función continua y T -periódica, se considera el sistema*

$$y' = P(t)y. \tag{3.11}$$

entonces son las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1.- El sistema (3.11) tiene k soluciones periódicas linealmente independientes.
- 2.- Existe una matriz fundamental de soluciones $Y(t)$ de (3.11) tal que $Y^{-1}(t)$ tiene en sus primeras k filas solo soluciones periódicas.

Demostración. Considere el sistema

$$y' = -P^*(t)y, \tag{3.12}$$

donde $P^*(t)$ es la transpuesta de la matriz $P(t)$.

Se afirma que

- (a) Una matriz no singular $Y(t)$ de orden $n \times n$ es matriz solución fundamental de (3.11) si y solo si $Y_a = (Y^{-1}(t))^*$ es matriz fundamental de (3.12).

Demostración de (a). Al derivar $Y(t)Y^{-1}(t) = I$ resulta

$Y'(t)Y^{-1}(t) + Y(t)(Y^{-1}(t))' = 0$ así al despejar

$$(Y^{-1}(t))' = -Y^{-1}(t)Y'(t)Y^{-1}(t). \tag{3.13}$$

Si se asume que $Y(t)$ es matriz fundamental de (3.11), entonces de la relación (3.13)

$$(Y^{-1}(t))' = -Y^{-1}(t)P(t)Y(t)Y^{-1}(t) = -Y^{-1}(t)P(t)$$

$$((Y^{-1}(t))^*)' = -P^*(t)(Y^{-1}(t))^*$$

con lo cual $Y_a(t) = (Y^{-1}(t))^*$ es matriz fundamental para (3.12).

Si se asume que $Y_a(t) = (Y^{-1}(t))^*$ es matriz fundamental para (3.12), entonces al tomar transpuesta a (3.13) se obtiene

$$((Y^{-1}(t))')^* = -Y^{-1}(t)^*(Y'(t))^*Y^{-1}(t)^*$$

pero por hipótesis se tiene que $Y_a = (Y^{-1}(t))^*$ es matriz solución fundamental de (3.12)

$$\begin{aligned} -P^*(t)(Y^{-1}(t))^* &= -Y^{-1}(t)^*(Y'(t))^*Y^{-1}(t)^* \text{ tomando tranpuesta} \\ (Y^{-1}(t))P(t) &= Y^{-1}(t)(Y'(t))Y^{-1}(t) \\ P(t)Y(t) &= Y'(t) \end{aligned}$$

luego $Y(t)$ es matriz solución fundamental de (3.11). □

Los sistemas (3.11) y (3.12) tienen el mismo número de soluciones T -periódicas linealmente independientes (Ver [9, pg.410]). Entonces (1) es equivalente a que el sistema (3.12) tenga k soluciones linealmente independientes, más aun la existencia de alguna matriz fundamental de soluciones para (3.12) denotado por Y_a que en sus primeras k columnas solo tenga funciones T -periódicas. Además como $Y^{-1}(t) = Y_a^*$ es equivalente a (2). □

Lema 3.11. Sea $P : \mathbb{R} \rightarrow M_n$ una función continua y T -periódica, se asume que el sistema (3.11) tiene k soluciones T -periódicas linealmente independientes y se denota por $Y(t)$ su matriz fundamental de soluciones dado como en el ítem (2) del Lema (3.10), además se asume que:

(a) $\pi \int_0^T Y^{-1}(t)q(s)ds = 0,$

(b) $\det(\Delta) \neq 0,$ donde Δ es la matriz de orden $(n-k) \times (n-k)$ de la esquina inferior derecha de la matriz $Y^{-1}(0) - Y^{-1}(T)$ de orden $n \times n$.

Entonces existe $\beta_0 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{R}^k,$ $z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha))$ satisface

$$[Y^{-1}(T) - Y^{-1}(0)]z = \int_0^T Y^{-1}(s)q(s)ds, \quad (3.14)$$

$$x' = P(t)x + q(t), \quad (3.15)$$

con $x(0) = z_\alpha$ es T -periódica.

Demostración. Como $Y(t)$ es matriz fundamental de soluciones del sistema (3.11) como en el ítem **2** del Lema (3.10) se tiene que $Y^{-1}(t)$ tiene en sus primeras k filas solo funciones T -periódicas, luego $Y^{-1}(T) - Y^{-1}(0)$ tiene las primeras k filas idénticamente nulas.

De **(a)** se tiene que las primeras k ecuaciones del sistema (3.14) son triviales es decir $0 = 0$. Al usar **(b)** se obtiene la solución de este sistema como $z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)) \forall \alpha \in \mathbb{R}^k$.

Si se denota por $x(\cdot, z)$ la solución de (3.15) con $x(0) = z$ y $f_0(z) = x(T, z) - z$ por variación de parámetros se obtiene:

$$\begin{aligned} x(t, z) &= Y(t)Y^{-1}(0)z + Y(t) \int_0^t Y^{-1}(s)q(s)ds \\ x(T, z) &= Y(T)Y^{-1}(0)z + Y(T) \int_0^T Y^{-1}(s)q(s)ds \\ x(T, z) - z &= Y(T)Y^{-1}(0)z + Y(T) \int_0^T Y^{-1}(s)q(s)ds - z \\ f_0(z) &= Y(T)Y^{-1}(0)z + Y(T) \int_0^T Y^{-1}(s)q(s)ds - z \\ Y^{-1}(T)f_0(z) &= -[Y^{-1}(T) - Y^{-1}(0)]z + \int_0^T Y^{-1}(s)q(s)ds \end{aligned}$$

entonces faltaría ver que $x(\cdot, z)$ es T -periódica, pero cada cero de f_0 nos da una solución periódica y viceversa. Por (3.14) se tiene que $Y^{-1}(T)f_0(z) = 0$, luego $f_0(z) = 0$ así $x(\cdot, z)$ es T -periódica. \square

Corolario 3.12. *Sea el sistema (3.1) con $F_0(t, x) = P(t)x + q(t)$ y todas las hipótesis del Lema (3.11) son satisfechas. Sea la función $f_1 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por:*

$$f_1(\alpha) = \pi \int_0^T Y^{-1}(t)F_1(t, x_\alpha(t))dt$$

Si existe $a \in V$ con $f_1(a) = 0$ y $\det\left(\frac{df_1}{d\alpha}\right)(a) \neq 0$, entonces existe una solución T -periódica $\varphi(\cdot, \epsilon)$ del sistema (3.1) tal que $\varphi(0, \epsilon) \rightarrow z_a$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Como las hipótesis del Lema (3.11) son satisfechas se tiene que existe que $\beta_0 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ tal que se satisface la (a) del Teorema 3.5, con lo cual se satisface todas las hipótesis de este teorema. El resultado sigue de aplicar el Teorema 3.5. \square

3.1.3 caso(iii)

3.13. Aquí se considera el sistema

$$\begin{aligned} u'(t) &= F_0^1(t, u) + \epsilon F_1^1(t, u, v) + \epsilon^2 R^1(t, u, v, \epsilon), \\ v'(t) &= F_0^2(t, u, v) + \epsilon F_1^2(t, u, v) + \epsilon^2 R^2(t, u, v, \epsilon), \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde $F_0 = (F_0^1, F_0^2)$, $F_1 = (F_1^1, F_1^2)$ y $R = (R^1, R^2)$ satisface las hipótesis del párrafo **3.1** y es coherente con las proyecciones (π, π^\perp) . Se asume que existe un conjunto abierto V con $\bar{V} \subset \pi\Omega$ tal que para cada $\alpha \in \bar{V}$:

- La única solución u_α del sistema sin perturbar $u'(t) = F_0^1(t, u)$ que satisface $u(0) = \alpha$ es T -periódica.
- El nuevo sistema $v'(t) = F_0^2(t, u_\alpha(t), v)$ tiene una única solución T -periódica.

Lema 3.14. Sea $P : \mathbb{R} \rightarrow M_n$ una función continua y T -periódica tal que para todo $t \in \mathbb{R}$, la matriz $P(t)$ tiene en la esquina superior derecha a la matriz nula y tiene la siguiente forma de bloque

$$P(t) = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ B(t) & C(t) \end{pmatrix}.$$

Entonces existe $Y(t)$ matriz fundamental de soluciones del sistema

$$y' = P(t)y, \tag{3.17}$$

tal que $Y^{-1}(t)$ tiene en la esquina superior derecha la matriz nula de orden $k \times (n - k)$. Mas aun

$$Y^{-1}(t) = \begin{pmatrix} U^{-1}(t) & 0 \\ W(t) & V^{-1}(t) \end{pmatrix},$$

donde $U(t)$ y $V(t)$ son respectivamente matriz fundamental de soluciones de $u' = A(t)u$ y $v' = C(t)v$

Demostración. Sea $y \in \mathbb{R}^n$, se define $u = \pi y \in \mathbb{R}^k$, $v = \pi^\perp y \in \mathbb{R}^{n-k}$, entonces

el sistema $y' = -P^*(t)y$ puede ver como

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^*(t) & -B^*(t) \\ 0 & -C^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

de donde

$$u' = -A^*(t)u - B^*(t)v, \quad v' = -C^*(t)v, \quad (3.18)$$

Si se denota por $U_\alpha(t)$ y $V_\alpha(t)$ las matrices fundamentales de solución de $u' = -A^*(t)u$ y $v' = -C^*(t)v$, se observa que

$$Y_\alpha(t) = \begin{pmatrix} U_\alpha(t) & W_\alpha(t) \\ 0 & V_\alpha(t) \end{pmatrix},$$

es matriz solución de (3.18). Entonces por el Lema (3.11) la matriz fundamental de soluciones de $y' = P(t)y$, $Y(t)$ satisfaciendo $Y^{-1}(t) = Y_\alpha^*(t)$ satisface

$$Y^{-1}(t) = \begin{pmatrix} U^{-1}(t) & 0 \\ W(t) & V^{-1}(t) \end{pmatrix},$$

□

3.15. Sea $U_\alpha(t)$, $V_\alpha(t)$ las matrices fundamentales de soluciones de los sistemas $u' = A_\alpha(t)u$ y $v' = C_\alpha(t)v$, donde

$$A_\alpha(t) = D_u F_0^1(t, u_\alpha(t)), \quad C_\alpha(t) = D_v F_0^2(t, u_\alpha(t), v_\alpha(t)).$$

El siguiente es un corolario del Teorema (3.5) y es el principal resultado de esta sección.

Corolario 3.16. *Se asume que existe un abierto V con $\bar{V} \subset \pi\Omega$ tal que:*

- *para cada $\alpha \in \bar{V}$, $u_\alpha(\cdot)$ es T -periódica;*
- *el sistema $v' = F_0^2(t, \alpha, v)$ tiene una única solución T -periódica denotada por v_α .*

Más aún se asume que la matriz $\Delta_\alpha = V_\alpha^{-1}(0) - V_\alpha^{-1}(T)$ tiene $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$ y se considera la función $f_1 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por

$$f_1(\alpha) = \int_0^T U_\alpha^{-1}(t) F_1(t, u_\alpha(t), v_\alpha(t)) dt \quad (3.19)$$

si existe $a \in V$ con $f_1(a) = 0$ y $\det(Df_1(a)) \neq 0$, entonces existe una solución T -periódica $\varphi(\cdot, \epsilon)$ del sistema (3.16) tal que $\varphi(0, \epsilon) \rightarrow (a, v_\alpha(0))$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Sea la función $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ dada por $\beta_0(v) = v_\alpha(0)$.

Entonces el conjunto

$$Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \bar{V}\} = \{z_\alpha = (\alpha, v_\alpha(0)), \alpha \in \bar{V}\}$$

cumple con la hipótesis **(a)** del Teorema 3.5.

La matriz $P(t, z)$ como en (3.6) para este caso tiene en la esquina superior derecha la matriz nula de orden $k \times (n - k)$, esto se debe a que F_0^1 no depende de v , además todas las entradas de esta matriz son continuas ya que F_0 es de clase C^2 .

Luego por el Lema 3.14 existe una matriz fundamental de soluciones $Y(t)$ del sistema (3.5) tal que $Y^{-1}(t, z)$ tiene en la esquina superior derecha a la matriz nula de orden $k \times (n - k)$, en particular esto se cumple para la matriz $Y_\alpha^{-1}(0) - Y_\alpha^{-1}(T)$, ésta matriz tiene en la esquina derecha inferior a la matriz $V_\alpha^{-1}(0) - V_\alpha^{-1}(T)$, tomando esto en cuenta y además que por hipótesis la matriz $\Delta_\alpha = V_\alpha^{-1}(0) - V_\alpha^{-1}(T)$ tiene determinante distinto de cero, entonces se satisface la hipótesis **(b)** del Teorema 3.5, con lo cual el resultado sigue de aplicar el Teorema 3.5. \square

Corolario 3.17. *Considere que $F_0^1(t, u)$ es idénticamente cero y que el sistema $v'(t) = F_0^2(t, \alpha, v)$ tiene una única solución periódica denotada por v_α . Además se asume que la matriz $\Delta_\alpha = V_\alpha^{-1}(0) - V_\alpha^{-1}(T)$ tiene $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$ y se considera la función $f_1 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por*

$$f_1(\alpha) = \int_0^T F_1(t, \alpha, v_\alpha(t)) dt. \quad (3.20)$$

Si existe $a \in V$ con $f_1(a) = 0$ y $\det(Df_1(a)) \neq 0$ entonces existe $\varphi(\cdot, \epsilon)$, una solución T -periódica de (3.16) tal que $\varphi(0, \epsilon) \rightarrow (a, v_\alpha(0))$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Como $F_0^1(t, u)$ es idénticamente cero, entonces la matriz U_α^{-1} es la matriz identidad, así se cumple todas las hipótesis del corolario anterior lo cual nos asegura el resultado. \square

3.2 Aplicaciones

En esta sección se estudia algunas aplicaciones del método del promedio en problemas específicos al utilizar los teoremas 2.73, 3.5. Para ello se sigue los artículos [13], [14], [8].

3.2.1 Sobre una ecuación diferencial de tercer orden

3.18. En esta subsección se sigue [13] para aplicar el Teorema 3.5. Se quiere estudiar la existencia de órbitas periódicas de la ecuación diferencial

$$x''' - \mu x'' + x' - \mu x = \epsilon F(x, x', x''), \quad (3.21)$$

donde las variables x , t y los parámetros μ , ϵ son números reales, más aún ϵ es un parámetro pequeño y la función $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 aquí Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 . Para ello se tiene los siguientes teoremas:

Teorema 3.19 (J. Llibre & L. Roberto, [13]). *Se considera $\mu \neq 0$ en la ecuación diferencial (3.21). Para $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeño y cada cero simple positivo r_0^* de la función*

$$\mathfrak{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A; B; C) \cos \theta d\theta,$$

donde

$$A = -\frac{r_0(\cos \theta + \mu \sin \theta)}{1 + \mu^2}, \quad B = \frac{r_0(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{1 + \mu^2}, \quad C = \frac{r_0(\cos \theta + \mu \sin \theta)}{1 + \mu^2}$$

la ecuación diferencial (3.21) tiene una solución periódica $x_\epsilon(t)$ tendiendo a la solución periódica

$$x(t) = -\frac{r_0^*(\cos t + \mu \sin t)}{1 + \mu^2},$$

de $x''' - \mu x'' + x' - \mu x = 0$, cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Se hace $y = x'$ y $z = x''$. La ecuación diferencial (3.21) en el subconjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ queda expresada como:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= z \\ z' &= -y + \mu(x + z) + \epsilon F(x, y, z). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Este sistema con $\epsilon = 0$ tiene al origen como único punto singular con autovalores $i, -i, \mu$. Al hacer $(X; Y; Z)^T = C(x, y, z)$ con

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\mu & 1 \\ -\mu & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

el sistema (3.22) se transforma en un sistema diferencial cuya parte lineal tiene la forma de normal de Jordan, es decir:

$$\begin{aligned} X' &= -Y + \epsilon \tilde{F}(X; Y; Z), \\ Y' &= X \\ Z' &= \mu Z - \epsilon \tilde{F}(X, Y, Z), \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde $\tilde{F}(X; Y; Z) = F(A; B; C)$, siendo

$$A = -\frac{X + Z + \mu Y}{1 + \mu^2}, \quad B = \frac{Y - \mu(X + Z)}{1 + \mu^2}, \quad C = \frac{X + \mu(Y - \mu Z)}{1 + \mu^2}.$$

Al pasar de coordenadas cartesianas $(X; Y; Z)$ a coordenadas cilíndricas (r, θ, Z) con $X = r \cos \theta$, $Y = r \sin \theta$ el sistema (3.23) se ve como

$$\begin{aligned} r' &= \epsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta \\ \theta' &= 1 - \epsilon \frac{G(r, \theta, Z) \sin \theta}{r} \\ Z' &= \mu Z - \epsilon G(r, \theta, Z), \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $G(r, \theta, Z) = \tilde{F}(r \cos \theta, r \sin \theta, Z)$. Al cambiar la variable independiente t por θ y al denotar la derivada con respecto a θ por un punto, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} = \epsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{Z} &= \frac{dZ}{d\theta} = \mu Z + \epsilon \frac{\mu Z \sin \theta - r}{r} G(r, \theta, Z) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Se estudia por separado cuando $\mu = 0$ y cuando $\mu \neq 0$.

Para $\mu \neq 0$, el sistema (3.25) puede ser escrito como

$$x' = F_0(\theta, x) + \epsilon F_1(\theta, x, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.26)$$

donde

$$x = \begin{pmatrix} r \\ Z \end{pmatrix}, \quad F_0(\theta, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu Z \end{pmatrix}, \quad F_1(\theta, x, \epsilon) = \begin{pmatrix} G(r, \theta, Z) \cos \theta \\ \frac{\mu Z \sin \theta - r}{r} G(r, \theta, Z) \end{pmatrix},$$

Ahora se desea estudiar las soluciones periódicas del sistema (3.26), aplicando el Teorema 3.5, por lo cual lo primero que se debe hacer es observar las soluciones periódicas de el sistema sin perturbar, es decir

$$x' = F_0(\theta, x),$$

de donde $\dot{r}(\theta) = 0$ y $\dot{Z} = \mu Z$, entonces las soluciones periódicas son $(r(\theta), Z(\theta)) = (r_0, 0)$ para cada $r_0 > 0$ (se nota que una solución de $\dot{Z} = \mu Z$, también está dada por $Z(\theta) = Ke^{\mu\theta}$ con K una constante real, pero no se toma en cuenta esta solución ya que no es periódica), además se observa que para cada r_0 las soluciones son circunferencias en el plano $Z = 0$. Identificando los elementos del Teorema 3.5 para este caso se tiene que $k = 1$ y $n = 2$.

Sea r_1 arbitrariamente pequeño y r_2 arbitrariamente grande, entonces se toma el conjunto V de \mathbb{R} como $V = (r_1, r_2)$, $\alpha = r_0 \in V$, $\beta : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\beta(r_0) = 0$.

El conjunto \mathfrak{Z} es

$$\mathfrak{Z} = \{z_\alpha = (r_0, 0), r_0 \in [r_1, r_2]\}$$

se puede ver que para cada $z_\alpha \in \mathfrak{Z}$ se puede considerar la solución 2π -periódica $x_\theta = z_\alpha = (r_0, 0)$, la matriz jacobiana de $F_0(\theta, x)$ está dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

luego la matriz fundamental $M_{z_\alpha}(\theta)$ asociada a la solución 2π periódica $z_\alpha(r_0, 0)$ tal que $M_{z_\alpha}(0)$ es la matriz identidad está dada por:

$$M(\theta) = M_{z_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mu\theta} \end{pmatrix}$$

entonces la matriz

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-2\pi\mu} \end{pmatrix}$$

además esta matriz nunca es la matriz nula ya que $\mu \neq 0$, es decir se verifica el ítem (b) del Teorema 3.5, ahora se calcula la función f_1 dada en el Teorema (3.5) para este caso es decir calcular

$$f_1(\alpha) = \pi \int_0^T Y_\alpha^{-1}(t) F_1(t, x_\alpha(t)) dt,$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}(r_0) &= \pi \int_0^{2\pi} M_\alpha^{-1}(\theta) F_1(t, x, \epsilon) d\theta \\
 &= \pi \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-u\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(r, \theta, Z) \cos \theta \\ \frac{uz \sin \theta - r}{r} e^{-u\theta} G(r, \theta, Z) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(r, \theta, Z) \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A, B, C) \cos \theta d\theta
 \end{aligned}$$

es decir todas las hipótesis del Teorema 3.5 son satisfechas aplicando este teorema se garantiza que para cada cero simple $r_0^* \in [r_1, r_2]$ de la función \mathfrak{F} se tiene una solución periódica $(r_\epsilon(\theta), Z_\epsilon(\theta))$ del sistema (3.25) tal que

$$(r_\epsilon(0), Z_\epsilon(0)) \rightarrow (r_0^*, 0) \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

al regresar mediante los cambios de variables realizados se tiene una solución periódica del sistema $(r_\epsilon(t), \theta_\epsilon(t), Z_\epsilon(t))$ del sistema (3.24) tal que

$$(r_\epsilon(t), \theta_\epsilon(t), Z_\epsilon(t)) \rightarrow (r_0^*, t, 0) \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Así se obtiene una solución periódica $(X_\epsilon(t), Y_\epsilon(t), Z_\epsilon(t))$ del sistema (3.23) tal que

$$(X_\epsilon(t), Y_\epsilon(t), Z_\epsilon(t)) \rightarrow (r_0^* \cos t, r_0^* \sin t, 0) \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

además como

$$x = -\frac{X + Z + \mu Y}{1 + \mu^2} \tag{3.27}$$

se tiene una solución periódica $(x_\epsilon(t), y_\epsilon(t), z_\epsilon(t))$ del sistema (3.22) tal que

$$x_\epsilon(t) \rightarrow -\frac{r_0^*(\cos t + \mu \sin t)}{1 + \mu^2} \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

□

3.20. Para dar el siguiente resultado se necesita las siguientes definiciones

$$f_1(r_0, Z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha, \beta, \gamma) \cos \theta d\theta,$$

$$f_2(r_0, Z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha, \beta, \gamma) d\theta,$$

donde $\alpha = -Z_0 - r_0 \cos \theta$, $\beta = r_0 \sin \theta$, $\gamma = r_0 \cos \theta$

Teorema 3.21 (J. Llibre & L. Roberto, [13]). *Considere $\mu = 0$ en la ecuación diferencial (3.21) si existe (r_0, Z_0) tal que*

$$f_1(r_0, Z_0) = 0, \quad f_2(r_0, Z_0) = 0, \quad \text{y} \quad \det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, Z)}\right) \neq 0$$

entonces (3.21) con $\mu = 0$ tiene una solución periódica $x_\epsilon(t)$ tendiendo a la solución periódica $x(t) = -r_0 \cos t - Z_0$ de $x''' + x' = 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$

Demostración. Para el caso $\mu = 0$ el sistema (3.25) se expresa como

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} = \epsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{Z} &= \frac{dZ}{d\theta} = -\epsilon G(r, \theta, Z) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (3.28)$$

con $(r, Z) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Se nota que el sistema (3.28) esta en su forma estándar para aplicar el teorema (2.44), el sistema diferencial promediado es

$$(\dot{r}, \dot{Z}) = \epsilon g^0(r, Z), \quad (3.29)$$

donde

$$g^0(r, Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (G(r, \theta, Z) \cos \theta, G(r, \theta, Z)), \quad (3.30)$$

por el Teorema 2.44 cada punto singular $p = (r_0, Z_0)$ del sistema (3.30) tal que

$$\det\left(\frac{\partial g^0(r, Z)}{\partial(r, Z)}\right)(r_0, Z_0) \neq 0, \quad (3.31)$$

existe una solución 2π -periódica $(r_\epsilon(\theta), Z_\epsilon(\theta))$ del sistema (3.28) tal que $(r_\epsilon(0), Z_\epsilon(0)) \rightarrow p$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ entonces el sistema (3.31) es equivalente a

$$\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)(r, Z)}{\partial(r, Z)}\right)(r_0, Z_0) \neq 0, \quad (3.32)$$

siendo f_1 y f_2 las funciones definidas justo antes de este teorema. Al regresar mediante los cambios de variables la solución 2π periódica del sistema (3.28) provee una solución periódica $(X_\epsilon(t), Y_\epsilon(t), Z_\epsilon(t))$ del sistema (3.23) con $\mu = 0$ tal que:

$$(X_\epsilon(t), Y_\epsilon(t), Z_\epsilon(t)) \rightarrow (r_0 \cos t, r_0 \sin t, Z_0) \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0$$

además de (3.27) se tiene una solución periódica $(x_\epsilon(t), y_\epsilon(t), z_\epsilon(t))$ del sistema (3.22) tal que

$$x_\epsilon(t) \rightarrow -r_0 \cos t - Z_0 \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0$$

□

3.2.2. El siguiente es denominado el sistema de Michelson

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= z \\ z' &= c^2 - y - \frac{x^2}{2}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y el parámetro $c \geq 0$, fue obtenido por Michelson en el estudio de las soluciones de las onda de viaje de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky. Es fácil observar que el sistema (3.33) tiene dos singularidades $(-\sqrt{2}c, 0, 0)$ $(\sqrt{2}c, 0, 0)$. La primera tiene una variedad estable de dimensión dos y la segunda una variedad inestable de dimensión dos.

Teorema 3.23 (J. Llibre & X. Zhang, [14]). *Para $c \geq 0$ suficientemente pequeño, el sistema de Michelson (3.33) tiene una bifurcación Hopf-cero en el origen para $c = 0$. Más aún la órbita periódica bifurcada satisface para $c > 0$ suficientemente pequeño*

$$x(t) = -2c \cos t + \mathfrak{o}(c), \quad y(t) = 2c \sin t + \mathfrak{o}(c), \quad z(t) = 2c \cot t + \mathfrak{o}(c).$$

Demostración. Primero se realiza el cambio de variable con $\epsilon \neq 0$, $x = \epsilon \bar{x}$, $y = \epsilon \bar{y}$, $z = \epsilon \bar{z}$ y $c = \epsilon d$, así el sistema (3.33) queda expresado como

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \bar{y} \\ \bar{y}' &= \bar{z} \\ \bar{z}' &= -\bar{y} + \epsilon d^2 - \epsilon \frac{\bar{x}^2}{2}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

en el sistema (3.34) se nota que cuando $\epsilon = 0$ se tiene un centro para \bar{y}, \bar{z} . Aún se usará x, y, z en vez de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

Al hacer el cambio a coordenadas cilíndricas se tiene $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ y $z = r \cos \theta$, entonces el sistema (3.34) se vuelve

$$\begin{aligned} x' &= r \sin \theta \\ r' &= \frac{\epsilon}{2} \cos \theta (2d^2 - x^2) \\ \theta' &= 1 - \frac{\epsilon}{2r} (2d^2 - x^2) \sin \theta. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Este sistema puede ser expresado como:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= r \sin \theta + \frac{\epsilon}{2} (2d^2 - x^2) \sin^2 \theta + \epsilon^2 f_1(\theta, r, \epsilon) \\ \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\epsilon}{2} (2d^2 - x^2) \cos \theta + \epsilon^2 f_2(\theta, r, \epsilon) \end{aligned} \tag{3.36}$$

donde f_1, f_2 son funciones analíticas en sus variables.

El sistema sin perturbar, es decir cuando $\epsilon = 0$ es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= r \sin \theta \\ \frac{dr}{d\theta} &= 0\end{aligned}$$

cuya solución cuando $x(0) = x_0$ y $r(0) = r_0$ está dada por

$$x(\theta) = r_0 + x_0 - r_0 \cos \theta, \quad r(\theta) = r_0,$$

se puede identificar el sistema

$$y' = F_0(\theta, y) + \epsilon F_1(\theta, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.37)$$

donde

$$y = \begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix}, F_0(\theta, y) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, F_1(\theta, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2d^2 - x^2) \sin^2 \theta \\ \frac{1}{2}(2d^2 - x^2) \cos \theta \end{pmatrix}.$$

El objetivo es estudiar la existencia de órbitas periódicas del sistema (3.37) mediante el Teorema 3.5. Al identificar los elementos del Teorema 3.5 para este caso se tiene que $k = 1$ y $n = 2$.

Sea r_1 arbitrariamente pequeño y r_2 arbitrariamente grande, entonces se toma el conjunto V de \mathbb{R} como $V = (r_1, r_2)$, sea $\alpha = r_0 \in V$, $\beta : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\beta(r_0) = x_0$ así el conjunto \mathfrak{Z} es

$$\mathfrak{Z} = \{z_\alpha = (x_0, r_0), r_0 \in [r_1, r_2]\}$$

se puede ver que para cada $z_\alpha \in \mathfrak{Z}$ se puede considerar la solución 2π -periódica $y_\theta = z_\alpha = (x_0, r_0)$, la matriz jacobiana de $F_0(\theta, y)$ está dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego la matriz fundamental $M_{z_\alpha}(\theta)$ asociada a la solución 2π -periódica $z_\alpha(x_0, r_0)$ tal que $M_{z_\alpha}(0)$ es la matriz identidad está dada por:

$$Y_\alpha(\theta) := M(\theta) = M_{z_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \cos \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la cual es independiente de la condición inicial (x_0, r_0) , es decir se verifica el ítem (b) del Teorema 3.5, ahora se calcula la función f_1 dada en el Teorema 3.5 para este caso

$$f_1(\alpha) = \pi \int_0^T Y_\alpha^{-1}(t) F_1(t, x_\alpha(t)) dt,$$

entonces

$$\mathfrak{F}(x_0, r_0) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} M_\alpha^{-1}(\theta) F_1(t, y) d\theta \quad (3.38)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} M^{-1} \begin{pmatrix} (2d^2 - x^2) \sin^2 \theta \\ (2d^2 - x^2) \cos \theta \end{pmatrix} d\theta \quad (3.39)$$

en la ecuación anterior se debe hacer el reemplazo en la solución periódica del sistema sin perturbar, es decir

$$x(\theta) = r_0 + x_0 - r_0 \cos \theta, \quad r(\theta) = r_0, \quad (3.40)$$

así resulta

$$\mathfrak{F}(x_0, r_0) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} M^{-1} \begin{pmatrix} (2d^2 - x^2) \sin^2 \theta \\ (2d^2 - x^2) \cos \theta \end{pmatrix} \Big|_{(3.40)} d\theta$$

entonces $\mathfrak{F}(x_0, r_0) = (g_1(x_0, r_0), g_2(x_0, r_0))$ donde

$$g_1(x_0, r_0) = \frac{1}{4}(4d^2 - 5r_0^2 - 6r_0x_0 - 2x_0^2), \quad g_2(x_0, r_0) = \frac{1}{2}r_0(r_0 + x_0).$$

La función \mathfrak{F} tiene un cero no trivial en $(x_0, r_0) = (-2d, 2d)$ y además como $\det D\mathfrak{F}(-2d, 2d) = d^2 \neq 0$, luego por el Teorema 3.5 se tiene que dado $d > 0$ y para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño se tiene el sistema (3.36) tiene una órbita periódica $(x(\theta), r(\theta))$ de periodo 2π tal que $(x(0), r(0)) \rightarrow (-2d, 2d)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Se nota que los autovalores de $D\mathfrak{F}(-2d, 2d)$ son $\pm\sqrt{-1}d$ esto muestra que las órbitas periódicas son linealmente elípticas.

De regreso al sistema (3.33) se tiene que para $c > 0$ suficientemente pequeño, el sistema de Michelson tiene una órbita periódica de periodo aproximado 2π : $x(t) = -2c \cos t + \mathfrak{o}(c)$, $y(t) = 2c \sin t + \mathfrak{o}(c)$ y $z(t) = 2c \cot t + \mathfrak{o}(c)$. \square

3.24. Se considera la siguiente generalización del sistema de Michelson:

$$\begin{aligned} x' &= y + \epsilon f(x, y, z) \\ y' &= z + \epsilon g(x, y, z) \\ z' &= -y + \epsilon d^2 - \frac{\epsilon}{2}x^2 + \epsilon h(x, y, z). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Si $\epsilon = 0$ el sistema presenta un centro en YZ , por consiguiente se usan las coordenadas cilíndricas: $x = x$, $y = r \sin \theta$ y $z = r \cos \theta$ y así (3.41) se vuelve

$$\begin{aligned} x' &= r \sin \theta + \epsilon F, \\ r' &= \frac{\epsilon}{2}((2d^2 - x^2) \cos \theta + 2G \sin \theta + 2H \cos \theta), \\ \theta' &= 1 - \frac{\epsilon}{2r}((2d^2 - x^2) \sin \theta + 2G \cos \theta - 2H \sin \theta), \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde para $I \in \{F, G, H\}$ se tiene $I = i(x, r \sin \theta, r \cos \theta)$. El sistema (3.42) puede escribirse

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= r \sin \theta + \frac{\epsilon}{2}((2d^2 - x^2) \sin^2 \theta + 2H \sin^2 \theta - 2G \cos \theta \sin \theta + 2F) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\epsilon}{2}((2d^2 - x^2) \cos \theta + 2H \cos \theta + 2G \sin \theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.43)$$

El sistema (3.43) con $\epsilon = 0$ coincide con lo estudiado en la prueba del Teorema 3.23 nuevamente se obtiene la matriz M y al aplicar este teorema se tiene

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(x_0, r_0) &= \\ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} M^{-1} &\begin{pmatrix} (2d^2 - x^2) \sin^2 \theta + 2H \sin^2 \theta - 2G \cos \theta \sin \theta + 2F \\ (2d^2 - x^2) \cos \theta + 2H \cos \theta + 2G \sin \theta \end{pmatrix} \Big|_{(3.40)} d\theta \end{aligned}$$

Se nota que $\mathfrak{F}(x_0, r_0) = (g_1(x_0, r_0), g_2(x_0, r_0))$, donde esas funciones dependen de las funciones iniciales f , g y h .

Las soluciones (x_0^*, r_0^*) de $\mathfrak{F}(x_0, r_0) = 0$ satisfaciendo

$$\det D\mathfrak{F}(x_0, r_0)|_{x_0=x_0^*, r_0=r_0^*} = d^2 \neq 0$$

proveen las soluciones periódicas del sistema (3.41).

3.2.3 Órbitas periódicas y su estabilidad en el sistema prototipo 4-Rossler

3.25. El sistema 4-prototipo Rossler que aquí se considera es el siguiente

$$\begin{aligned}x' &= -y - z \\y' &= x \\z' &= \alpha y(1 - y) - \beta z.\end{aligned}\tag{3.44}$$

Se estudia la existencia de órbitas periódicas de este sistema, así como la estabilidad e inestabilidad de tales órbitas. Para ello se usa el Teorema 2.73.

Teorema 3.26 (I. A. García, J. Llibre & S. Maza, [8]). *Considere el sistema 4-prototipo Rossler (3.44) que satisface $(\alpha + 2\beta)\alpha > 0$. Además se considera los nuevos parámetros (a, b) definidos como sigue $\alpha = \epsilon a$ y $\beta = -\epsilon(b + \frac{a}{1+\epsilon^2 b^2})$. Entonces para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño existe una solución periódica γ_ϵ de (3.44) tal que*

$$\gamma_\epsilon \rightarrow \{z = \frac{1}{2}\} \cap \{x^2 + (y + z)^2 = -\frac{a + 2b}{2a}\} \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Además γ_ϵ es asintóticamente estable cuando $a + b < 0$ e inestable cuando $a + b > 0$.

Demostración. Desde que $\alpha = \epsilon a$ y $\beta = -\epsilon(b + \frac{a}{1+\epsilon^2 b^2}) \approx -\epsilon(a + b)$, si $(\alpha + 2\beta)\alpha > 0$ y ϵ es suficientemente pequeño, entonces

$$(a + 2b)a < 0,\tag{3.45}$$

porque $(\alpha + 2\beta)\alpha \approx -\epsilon^2(a + 2b)a$.

Así el sistema (3.44) puede ser escrito como:

$$\begin{aligned}x' &= -y - z \\y' &= x \\z' &= \epsilon a y(1 - y) + \epsilon(b + \frac{a}{1+\epsilon^2 b^2})z.\end{aligned}\tag{3.46}$$

El polinomio característico del sistema linealizado en el punto de equilibrio localizado en el origen es

$$p(\lambda) = \frac{(\lambda - \epsilon b)[-1 + \epsilon^2 b(a - b) + a\epsilon\lambda - (1 + \epsilon^2 b^2)\lambda^2]}{1 + \epsilon^2 b^2}$$

además cuando $\epsilon \rightarrow 0$ los autovalores asociados al polinomio característico son $0, \pm i$. Después del cambio de variable

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la parte lineal en su forma de Jordan está dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el sistema (3.46) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} X' &= -Y + \epsilon f(X, Y, Z) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ Y' &= X, \\ Z' &= -\epsilon f(X, Y, Z) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{3.47}$$

con $f(X; Y; Z) = -bZ + a(X + X^2 + 2XZ + Z^2)$.

Ahora al realizar el cambio a coordenadas cilíndricas con $X = r \cos \theta$, $Y = r \sin \theta$ y $z = Z$ entonces el sistema (3.47) sigue como

$$\begin{aligned} r' &= \epsilon g_1(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \theta' &= 1 + \epsilon g_2(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ z' &= \epsilon g_3(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{3.48}$$

con

$$\begin{aligned} g_1(\theta, r, z) &= -\cos \theta g_3(\theta, r, z) \\ g_2(\theta, r, z) &= \frac{\sin \theta}{r} g_3(\theta, r, z) \\ g_3(\theta, r, z) &= bz - a(z^2 + r \cos \theta(1 + 2z + r \cos \theta)). \end{aligned}$$

Además éste sistema está bien definido para $r > 0$. Más aún en esta región para ϵ suficientemente pequeño se tiene que $\theta' > 0$ en una bola grande centrada en el origen, luego se puede reescribir el sistema (3.48) como

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \epsilon g_1(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \frac{dz}{d\theta} &= \epsilon g_3(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{3.49}$$

tomando θ como nueva variable, el sistema (3.49) es 2π -periódico y está en su forma estandar para aplicar el Teorema 2.73 donde las funciones promedio de g_1 y g_3 con respecto a θ son

$$\begin{aligned} \bar{g}_1(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\theta, r, z) d\theta = \frac{1}{2} ar(1 + 2z) \\ \bar{g}_3(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_3(\theta, r, z) d\theta = \frac{1}{2} [-a(r^2 + 2z^2) + 2bz] \end{aligned}$$

el único cero (r^*, z^*) con $r^* > 0$ de la función

$$(r, z) \rightarrow \mathfrak{F}(r, z) = (\bar{g}_1(r, z), \bar{g}_3(r, z))$$

es $(r^*, z^*) = (\sqrt{-\frac{a+2b}{2a}}, \frac{-1}{2})$ como $(a+2b)a < 0$ entonces $r^* \in \mathbb{R}$. Además la matriz jacobiana de \mathfrak{F} en el punto (r^*, z^*) es

$$D\mathfrak{F}(r^*, z^*) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-\frac{(a+2b)a}{2}} \\ -\sqrt{-\frac{(a+2b)a}{2}} & a+b \end{pmatrix}$$

y su determinante es $\det(D\mathfrak{F}(r^*, z^*)) = -\frac{1}{2}a(a+2b) > 0$. Como (r^*, z^*) es un cero simple de \mathfrak{F} , luego por el Teorema 2.73 se asegura la existencia de una órbita 2π -periódica $\gamma_\epsilon = \{(r(\theta, \epsilon), z(\theta, \epsilon)) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ del sistema (3.49) tal que $(r(\theta, \epsilon), z(\theta, \epsilon)) \rightarrow (r^*, z^*)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Si se denota por λ_1, λ_2 los autovalores de la matriz $D\mathfrak{F}(r^*, z^*)$ se obtiene que

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(D\mathfrak{F}(r^*, z^*)) > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = a+b$$

es decir o bien λ_1, λ_2 son ambos positivos o bien λ_1, λ_2 son ambos negativos luego la órbita 2π -periódica es asintóticamente estable si $a+b < 0$ e inestable cuando $a+b > 0$ entonces la conclusión del teorema sobre la estabilidad ha sido probada.

Ahora al regresar através de los cambios de variable, se tiene que el sistema (3.47) tiene una órbita periódica $\gamma_\epsilon \rightarrow C$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ donde C es el círculo dado por $C = \{Z = z^*\} \cap \{X^2 + Y^2 = r^{*2}\}$ la intersección de un plano y un cilindro, finalmente el sistema (3.44) y por lo tanto el sistema 4-prototipo Rossler tiene una órbita periódica γ_ϵ tal que

$$\gamma_\epsilon \rightarrow \{z = z^*\} \cap \{x^2 + (y+z)^2 = r^{*2}\}$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$. □

Teorema 3.27. *Considere el sistema 4-prototipo Rossler (3.44) que satisface $\alpha > 2\beta^3$. Además se considera los nuevos parámetros (a, ϵ) definidos como sigue $\alpha = \epsilon(2a - 1 + a^2\epsilon^2)$ y $\beta = \epsilon(1 - a)$. Entonces para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y $\alpha > \frac{1}{2}$ existe una solución periódica γ_ϵ de (3.44) tal que*

$$\gamma_\epsilon \rightarrow \left\{z = -\frac{1}{2}\right\} \cap \left\{x^2 + (y+z)^2 = \frac{1}{2(2a-1)}\right\} \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Además γ_ϵ es asintóticamente estable cuando $\frac{1}{2} < a < 1$ e inestable cuando $a > 1$.

Demostración. Desde que $\alpha = \epsilon(2a - 1 + a^2\epsilon^2)$ y $\beta = \epsilon(1 - a)$, entonces el sistema (3.44) puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} x' &= -y - z \\ y' &= x \\ z' &= \epsilon[(2a - 1 + a^2\epsilon^2)y(1 - y) - (1 - a)z]. \end{aligned} \tag{3.50}$$

El sistema (3.50) tiene un punto de equilibrio en

$$(x_e, y_e, z_e) = \left(0, \frac{a(1 + a\epsilon^2)}{a(2 + a\epsilon^2) - 1}, \frac{a - 1}{a(2 + a\epsilon^2) - 1} - 1\right)$$

el cual existe para valores suficientemente pequeños de ϵ cuando $a \neq \frac{1}{2}$. El polinomio característico del sistema linealizado en el punto de equilibrio (x_e, y_e, z_e) está dado por:

$$p(\lambda) = (a\epsilon - \lambda)(\lambda^2 + \epsilon\lambda + a\epsilon^2 + 1)$$

además cuando $\epsilon \rightarrow 0$ los autovalores asociados al polinomio característico son $0, \pm i$. Luego de una traslación del punto de equilibrio al origen mediante la función $(x, y, z) \mapsto (x - x_e, y - y_e, z - z_e)$ el sistema (3.50) queda expresado como:

$$\begin{aligned} x' &= -y - z \\ y' &= x \\ z' &= -\epsilon[(1 + a^2\epsilon^2)y + (1 - a)z + (2a - 1 + a^2\epsilon^2)y^2], \end{aligned} \tag{3.51}$$

después del cambio de variable lineal

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la parte lineal en su forma de Jordan está dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

así el sistema (3.51) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} X' &= -Y \\ Y' &= X + \epsilon f(X, Y, Z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ Z' &= \epsilon f(X, Y, Z) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{3.52}$$

con $f(X; Y; Z) = (1 - 2a)Y^2 + Z(a + Z - 2aZ) + Y[2Z(2a - 1) - 1]$.

Ahora al realizar el cambio a coordenadas cilíndricas con $X = r \cos \theta$, $Y = r \sin \theta$ y $z = Z$ entonces el sistema (3.52) sigue como

$$\begin{aligned} r' &= \epsilon g_1(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \theta' &= 1 + \epsilon g_2(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ z' &= \epsilon g_3(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{3.53}$$

con

$$\begin{aligned} g_1(\theta, r, z) &= \sin \theta g_3(\theta, r, z) \\ g_2(\theta, r, z) &= \frac{\cos \theta}{r} g_3(\theta, r, z) \\ g_3(\theta, r, z) &= z(a + z - 2az) + r \sin \theta [2(2a - 1)z + r(1 - 2a) \sin \theta - 1]. \end{aligned}$$

Éste sistema está bien definido para $r > 0$. Más aún en esta región para ϵ suficientemente pequeño se tiene que $\theta' > 0$ en una bola grande centrada en el origen, luego se puede reescribir el sistema (3.53) como

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \epsilon g_1(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \frac{dz}{d\theta} &= \epsilon g_3(\theta, r, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{3.54}$$

tomando θ como nueva variable, el sistema (3.54) es 2π -periódico y está en su forma estándar para aplicar el Teorema 2.73 donde las funciones promedio de g_1 y g_3 con respecto a θ son

$$\begin{aligned} \bar{g}_1(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\theta, r, z) d\theta = \frac{1}{2} r (2z(2a - 1) - 1) \\ \bar{g}_3(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_3(\theta, r, z) d\theta = \frac{1}{2} [r^2(1 - 2a) + 2z(a + z - 2az)]. \end{aligned}$$

El único cero (r^*, z^*) con $r^* > 0$ de la función

$$(r, z) \mapsto \mathfrak{F}(r, z) = (\bar{g}_1(r, z), \bar{g}_3(r, z))$$

es $(r^*, z^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2(2a-1)}}, \frac{1}{2(2a-1)} \right)$ que existe bajo la condición de suponer que $a > \frac{1}{2}$.

Esta condición implica que $\alpha > \frac{\epsilon^3}{4}$ y $\beta < \frac{\epsilon}{2}$, así la restricción del parámetro inicial $\alpha > 2\beta^3$ se cumple, además la matriz jacobiana de \mathfrak{F} en el punto (r^*, z^*) es

$$D\mathfrak{F}(r^*, z^*) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a - \frac{1}{2}} \\ -\sqrt{a - \frac{1}{2}} & a - 1 \end{pmatrix}$$

y su determinante es $\det(D\mathfrak{F}(r^*, z^*)) = a - \frac{1}{2} > 0$ por lo tanto (r^*, z^*) es un cero simple de \mathfrak{F} luego se concluye por el teorema la existencia de una órbita 2π -periódica $\gamma_\epsilon = \{(r(\theta, \epsilon), z(\theta, \epsilon)) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ del sistema (3.54) tal que $(r(\theta, \epsilon), z(\theta, \epsilon)) \rightarrow (r^*, z^*)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Además si se denota por λ_1, λ_2 los autovalores de la matriz $D\mathfrak{F}(r^*, z^*)$ se obtiene que

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(D\mathfrak{F}(r^*, z^*)) > 0, \text{ cuando } a > \frac{1}{2}, \text{ traza}(D\mathfrak{F}(r^*, z^*)) = a - 1$$

luego la órbita 2π -periódica es asintóticamente estable si $\frac{1}{2} < a < 1$ e inestable cuando $a > 1$ entonces la conclusión del teorema sobre la estabilidad ha sido probada.

Ahora regresando através de los cambios de variable, se tiene que el sistema (3.52) tiene una órbita periódica $\gamma_\epsilon \rightarrow C$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ donde C es el círculo dado por $C = \{Z = z^*\} \cap \{X^2 + Y^2 = r^{*2}\}$ la intersección de un plano y un cilindro, finalmente el sistema (3.44) y por lo tanto el sistema 4-prototipo Rossler tiene una órbita periódica γ_ϵ tal que

$$\gamma_\epsilon \rightarrow \left\{ z = -\frac{1}{2} \right\} \cap \left\{ x^2 + (y + z)^2 = \frac{1}{2(2a - 1)} \right\},$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$. □

Bibliografía

- [1] A. BUICĂ & J. LLIBRE Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree. *Bull. Sci. Math* **128** (2004) 7–22.
- [2] A. BUICĂ; J. P FRANÇOISE & J. LLIBRE Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter. *Commun. Pure Appl. Anal.* **6** (2007) 103–111.
- [3] C. CHICONE *Ordinary differential equations with applications*. Second edition. Texts in Applied Mathematics, **34**. Springer, New York, 2006.
- [4] F. DUMORTIER; J. LLIBRE & J. C. ARTÉS *Qualitative theory of planar differential systems*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [5] D. R. EUZÉBIO. *O método Averaging via a Teoria do Grau de Brower e Aplicações* (portugues). Tesis de Maestria, UNESP, 2011.
- [6] J. P. FRANÇOISE Oscillations en biologie. Analyse qualitative et modèles. *Mathématiques & Applications* **46**. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [7] R. E. GAINES, J. MAWHIN *The Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations..* Lectures Notes in Mathematics, **vol 568**. Springer, Berlin, 1977.
- [8] I. A. GARCÍA, J. LLIBRE, S. MAZA Periodic orbits and their stability in the Rossler prototype-4 system, *Physics Letters A.* **376** (2012) 2234–2237.

- [9] PH. HARTMAN *Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
- [10] PH. HARTMAN On local homeomorphisms of Euclidian space. *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **5(2)** (1960) 220–241.
- [11] J. L. LAGRANGE, Remarques g nerates sur le mouvement de plusieurs corps. *In: Oeuvres, vol. 4* (1777) 401–418.
- [12] E. LANDAU *Grundlagen der Analysis (das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen)*. (German) 3rd ed. Chelsea Publishing Co., New York 1960.
- [13] J. LLIBRE & L. ROBERTO On the periodic orbits of the third order differential equation $x''' - \mu x'' + x' - \mu x = \epsilon F(x, x', x'')$, *Applied Mathematics Letters*. **26** (2013) 425–430.
- [14] J. LLIBRE & X. ZHANG On the Hopf-zero bifurcation of the Michelson system. *Nonlinear Analysis : Real World Applications* **12** (2011) 1650–1653.
- [15] N. G. LLOYD *Degree Theory* Tract in Mathematics, **73**. Cambridge University Press, Cambridge, 1968.
- [16] M. MORSE *The calculus of variations in the large*. Reprint of the 1932 original. American Mathematical Society Colloquium Publications, **18**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [17] ALEX C. REZENDE *Dois m todos para a investiga o de ciclos limites que bifurcam de centros* (portugues). Tesis de Maestria, ICMC–USP, 2011.
- [18] L. PERKO *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer–Verlag, 1991.
- [19] J. SOTOMAYOR *Li oes de equaco es diferenciais ordinarias*. Rio de Janeiro, 1979.

- [20] F. VERHULST *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Universitext, Springer-Verlag 1985.
- [21] F. VERHULST *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Universitext, Springer 1991.
- [22] V. A. ZORICH *Mathematical Analysis I* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [23] V. A. ZORICH *Mathematical Analysis II* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

