PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

CONSTRUCCIÓN DE UN SIGNIFICADO DE REFERENCIA DE LA ADICIÓN DE NÚMEROS NATURALES EN EL SISTEMA CURRICULAR PERUANO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

Jorge Enrique Quiroz Quiroz

Dirigida por

Dr, Uldarico Víctor Malaspina Jurado

San Miguel, 2015

DEDICATORIA

A la memoria de mi querido padre *Enrique Quiroz y de mi entrañable abuela materna, Carmen Malca*,

Ejemplos de vida que siguen orientado mi caminar

por el mundo.

AGRADECIMIENTOS:

A la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) por su contribución a mi desarrollo académico y profesional.

Mi gratitud al asesor de esta tesis, Dr. Uldarico Víctor Malaspina Jurado, por su esfuerzo y dedicación para orientarme en la culminación de este trabajo, así como su generoso trato amical.

A Mery, Alfredo, Dady y Jorge Luis, esposa e hijos que me acompañan con alegría y enteresa en los avatares de la vida.

.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En nuestro país, desde la década de los 90 del siglo pasado, el estado a través del Ministerio de Educación inició un cambio en los contenidos curriculares de la educación básica y como ayuda inició la entrega de textos escolares para la mayoría de las áreas curriculares en los niveles de inicial, primaria y secundaria, por lo que podemos decir que actualmente se ha hecho obligatorio y es prácticamente indispensable para el trabajo en el aula el uso de materiales escritos en Matemática y otras áreas curriculares.

Adicionalmente, en los últimos años el Ministerio de Educación (MED) ha iniciado la elaboración de un ***sistema curricular*** (formado, básicamente por *el Marco Curricular*, *los Mapas de Progreso* y *las Rutas de Aprendizaje*). En el 2013 publicó estándares de evaluación en algunas áreas curriculares como Matemática y Comunicación con el nombre de Mapas de Progreso con la finalidad de ayudar a mejorar la calidad del servicio que ofrecen las instituciones educativas, públicas y privadas y para desarrollar estos estándares entregó las Rutas del Aprendizaje.

Todos los programas curriculares y de evaluación propugnan la comprensión de los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras. Esto quiere decir que todas buscan, por ejemplo, que los estudiantes comprendan los distintos significados de la adición y sustracción de números naturales y la relación entre ambas operaciones, así como los efectos de sumar o restar números naturales. También se interesan por desarrollar y usar estrategias para efectuar con fluidez operaciones con números naturales.

El objeto matemático del Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular que hemos escogido es la ***adición de números naturales*** y sobre él intentamos construir un significado de referencia que nos permita describir las *prácticas matemáticas*; los *objetos* y *procesos* (lenguaje, problemas, propiedades, conceptos, procedimientos y argumentos), las *configuraciones didácticas* en que se divide el proceso de instrucción planificado y analizar los conflictos semióticos potenciales, así como juzgar la idoneidad didáctica de un proceso de estudio pretendido (planificado).

El trabajo pretende:

1. Construir un *significado de referencia de la adición de números naturales en Educación Primaria en el Perú*. Para cumplir con este cometido analizaremos las situaciones aditivas propuestas por Catherine Durand y Gerard Vergnaud (1976) ; Thomas Carpenter y James Moser (1982 y 1983); Carlos Maza Gómez (2001) y Eva Cid, Juan D. Godino y Carmen Batanero (2004a); también analizaremos los cuadernos de trabajo y textos escolares que el MED ha entregado a los estudiantes de educación primaria de las instituciones educativas públicas; lo que propone el DCN, los Mapas de Progreso, las Rutas del Aprendizaje, así como lo que piensan los docentes de educación primaria.

Construido el significado de referencia a partir de lo que proponen los expertos, los textos escolares, las orientaciones curriculares y la práctica de los docentes, estaremos en condiciones de:

2. Mostrar presencias y ausencias en los principales instrumentos del Sistema Curricular Peruano (Marco Curricular, Mapas de Progreso, Rutas del Aprendizaje y cuadernos y textos escolares entregados por el MED a los estudiantes de educación primaria).
3. Examinar la idoneidad didáctica sobre la adición de números naturales en educación primaria en sus dimensiones: epistémica y cognitiva utilizando el significado de referencia.

Nuestro interés radica en conectar la investigación educativa a la mejora de la enseñanza-aprendizaje y particularmente de la matemática y ayudar a mejorar la formación profesional de los futuros docentes de educación primaria al mostrar la utilidad de algunas herramientas teóricas para el estudio didáctico en matemática, pues este objetivo está en la base de cualquier esfuerzo de investigación e innovación.

Capítulo 1

1 EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN, RELEVANCIA, OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

RESUMEN

En la sección 1.1 realizamos el planteamiento del tema y las preguntas de investigación; en la sección 1.2 justificamos el problema a investigar; en la sección 1.3 formulamos los objetivos; en la sección 1.4 explicamos la metodología usada y en la sección 1.5 explicamos la estructura de la presente memoria de investigación.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL TEMA

Investigadores del Enfoque Ontosemiótico (EOS) consideran:

> En la actualidad, uno de los grandes problemas que enfrenta la didáctica, si no el principal, es el análisis y la determinación simultánea de los conocimientos precisos y las condiciones en las que pueden ser propuestos y aprendidos por los sujetos o instituciones. (Brousseau, 2004, intervención oral en CS ADIREM) Este objetivo precisa de la discriminación y de la descripción de las nociones, procesos y significados matemáticos que han de ser enseñados. En particular, es necesario determinar los significados asociados a los objetos matemáticos en los diferentes contextos de uso en las instituciones escolares y organizarlos como un todo complejo y coherente" (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004, p. 1).

Nuestro problema en este estudio será determinar el significado de referencia de la adición de números naturales. Para el EOS el significado de un objeto matemático se identifica con el conjunto de prácticas asociadas a la solución de problemas respecto de dicho objeto matemático, tanto en la dimensión personal como institucional. El objeto matemático es un emergente de un sistema de prácticas. Considerando el uso en diferentes contextos se puede considerar como único y con un significado holístico. (Godino y Batanero, 1994)

De las operaciones con números naturales, la primera que se estudia es la adición. Para analizar el significado de esta operación necesitamos construir un significado de referencia. Para este propósito analizaremos los estudios de Durand y Vergnaud (1976); de Carpenter y Moser (1982 y 1983) basadas en las características semánticas de los problemas aditivos; Maza (2001) y Cid, Godino y Batanero (2004a).

Cuando se ha elaborado el significado de referencia de un objeto matemático es posible analizar un proceso de instrucción planificado en un libro de texto (significado pretendido) pues permite comparar ambos significados al mostrar ausencias y presencias y valorar la pertinencia y adecuación respecto al proyecto educativo, es decir, determinar la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza aprendizaje.

En este contexto, formulamos las preguntas:

- ¿Cuál es el significado de la adición de números naturales en el Sistema Curricular Peruano para la educación primaria?
- ¿Cuál sería un significado de referencia de la adición de números naturales en el sistema curricular peruano de la educación primaria?
- ¿Cuáles son las presencias y ausencias de los significados parciales de la adición de números naturales en el Sistema Curricular Peruano para la educación primaria?
- ¿Qué indicadores de la idoneidad didáctica – epistémica y cognitiva- de la adición de números naturales están presentes en los cuadernos de trabajo y textos escolares entregados por el MED a estudiantes de Instituciones Públicas de educación primaria?

Para el MED el sistema curricular "está compuesto, básicamente, por el Marco Curricular, los Mapas de Progreso y las Rutas del Aprendizaje." (Ministerio de Educación, 2013, *p*. 5) Consideramos también, los cuadernos y textos escolares entregados por el MED a los estudiantes de las instituciones públicas.

1.2 JUSTIFICACIÓN DEL TEMA

Elaborar el significado de un objeto matemático permitirá apoyar al trabajo del docente y del alumno, pues dispondrán de los distintos tipos de situaciones, los grados de dificultad de los mismos, la forma de representarlos y el uso pertinente de los materiales adecuados, además "existe un divorcio muy fuerte entre la investigación científica que se está desarrollando en el ámbito académico y su aplicación práctica a la mejora de la enseñanza de las matemáticas." (Godino, 2010, p. 38.) Para teóricos como Hiebert, Morris y Glass "un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores" (Godino, Font y Wilhelmi (2006), p. 132).

El MED, a las situaciones aditivas, en los Mapas de Progreso y en las Rutas del Aprendizaje (2013) las considera como situaciones de *combinación*, *cambio*, *comparación* o *igualación* y a las prácticas del estudiante o del profesor las relaciona con las acciones de *juntar*, *aumentar*, *comparar*. Esta propuesta se diferencia de la que propone en el DCN (2009) pues a dichas situaciones solo considera como acciones de *juntar*, *aumentar*, *comparar*, *quitar*, *separar* o *tachar*. Esta razón es suficiente para que el sistema curricular cuente con un significado de referencia de las situaciones aditivas.

Reconstruir la noción de un objeto matemático permite analizar las prácticas operativas, discursivas y regulativas en cualquier nivel de la Educación Básica. En particular, se puede abordar el análisis de los libros de texto y, por tanto, "identificar ausencias y presencias relevantes para la introducción o desarrollo de una noción matemática. Con otras palabras, permiten un análisis de la idoneidad epistémica de procesos de enseñanza y aprendizaje potenciales basados en dichos libros de texto". (Reina, Wilhelmi, y Lasa, 2012, p. 68).

El EOS a través de Godino, Batanero y Font (2009) nos indica:

> La Didáctica de la Matemática no debería limitarse a la mera descripción que lo deja todo como estaba, sino que debería aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de estudio. Por tanto, son necesarios criterios de 'idoneidad' o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y 'guiar' su mejora. Se trata de realizar una acción o meta-acción para ser más precisa (la valoración) que recae sobre otras acciones (las acciones realizadas en los procesos de instrucción). En consecuencia, ha de considerarse la incorporación de una racionalidad axiológica en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc. (p. 17).

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 GENERAL

Construir un significado de referencia de la adición de números naturales en el sistema curricular peruano de educación primaria.

1.3.2 ESPECÍFICOS

1. Describir los significados de la adición de números naturales presentes en el Sistema Curricular Peruano de la educación primaria.
2. Identificar presencias y ausencias importantes de los significados parciales de la adición de números naturales en el Sistema Curricular Peruano.
3. Valorar la idoneidad epistémica y cognitiva de la adición de números naturales en los cuadernos de trabajo y textos escolares entregados por el MED a estudiantes de Instituciones Públicas de educación primaria.

1.4 METODOLOGÍA

Para responder a la primera pregunta (de tipo empírico), relacionada con el primer objetivo específico, sobre el *significado de la adición de números naturales en el Sistema Curricular*

Peruano para la educación primaria, hemos utilizado el análisis ontosemiótico (análisis de contenido). El EOS (Godino, Batanero y Font 2006) clasifica las cuestiones de investigación didáctica según cuatro ejes o dimensiones: el *foco,* el *fin*, la *generalizabilidad y* el *nivel* de la investigación; cada una con varias categorías. Consideramos la dimensión *foco* en su categoría epistémica (significados institucionales). El fin, en su categoría descriptiva; específicamente, describir, comparar, clasificar, analizar e interpretar las situaciones aditivas para la educación primaria de los trabajos de los expertos: *Estructuras aditivas y complejidad psicogenética*, de Catherine Durand y Gerard Vergnaud (1976); *The Development of Addition and Subtraction Problem Solving Skills* (1982) y *The Acquisition of Addition and Subtraction concepts* (1983) de Thomas Carpenter y James Moser, de la Universidad de Wisconsin; *Adición y Sustracción*, de C. Maza Gómez de la Universidad de Sevilla en Castro, E. (2001, editor); y *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros,* de Eva Cid, Juan D. Godino y Carmen Batanero de la Universidad de Granada (2004a); y también los significados que propone el sistema curricular peruano: DCN, los Mapas de Progreso y las Rutas del Aprendizaje; asimismo, describimos los conocimientos y concepciones de las situaciones aditivas con números naturales de una muestra de docentes, tanto de instituciones educativas públicas como privadas. Con estos insumos, planteamos *un significado de referencia de la adición de números naturales para la educación primaria*. La selección de los trabajos de los expertos la hemos hecho a partir de la información en los Mapas de Progreso (MED, 1913) y las Rutas del Aprendizaje (MED, 1913b). Estos documentos refieren el libro *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* cuyo editor es Enrique Castro. El capítulo 8 está referido a la Adición y Sustracción escrito por Carlos Maza. Nuestro interés, inquietud y sugerencia del asesor nos llevó a Matemática para Maestros (Cid, Godino y Batanero (2004), luego a Durand y Vergnaud (1976) y finalmente a Carpentier y Moser (1982 y 1983), por sugerencia personal de Godino. Con la construcción de un significado de referencia respondemos a la segunda pregunta de investigación y damos cumplimiento al objetivo general de investigación.

En cuanto a la generalizabilidad, el presente trabajo se ubica en la categoría de exploratorio, pues no pretende generalizar a otros contextos, aunque brinda elementos para hacer análisis similares que puedan contribuir a una generalización posterior.

Respecto al nivel de análisis, el presente trabajo se ubica en la categoría de global, pues aborda hechos y fenómenos relacionados al estudio de las situaciones aditivas en varios grados de la educación primaria.

Para responder a la segunda pregunta de investigación y dar cumplimiento al tercer objetivo específico sobre *presencias y ausencias de los significados parciales de la adición de números naturales en el Sistema Curricular Peruano para la educación primaria* elaboramos un instrumento (Instrumento 1) que permitió explicitar características como: contexto de una situación, tipo de situación, significado de los números, número de respuestas correctas, representación, etc. (variables planteadas por Cid, Godino y Batanero 2004) en el DCN, los Mapas de Progreso, las Rutas del Aprendizaje y los cuadernos de trabajo y textos escolares entregados por el MED a los estudiantes de instituciones públicas. Todo esto, con el propósito de comparar los significados del DCN, los Mapas de progreso, las rutas del aprendizaje y los cuadernos de trabajo y textos escolares entregados por el MED con el significado de referencia.

Para dar respuesta a la cuarta pregunta de investigación y cumplir el tercer objetivo específico sobre la idoneidad didáctica - epistémica y cognitiva- de los cuadernos de trabajo y textos escolares entregados a los estudiantes de primaria de instituciones públicas, usamos los indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas del enfoque ontosemiótico referidos a la idoneidad epistémica y a la idoneidad cognitiva (Godino, 2011)

Para elaborar un significado de referencia, hemos utilizado las siguientes herramientas del marco teórico: Sistemas de prácticas (prácticas institucionales), objetos primarios (Lenguaje, situaciones, conceptos, procedimientos y argumentos) y configuraciones epistémicas.

Para examinar la idoneidad didáctica de las situaciones aditivas propuestas en los cuadernos y textos entregados por MED, en sus dimensiones epistémica y cognitiva, hemos utilizado los indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas propuestos por Godino (2011). La elección de estas dos idoneidades es pertinente, por el énfasis en el análisis documental de este trabajo, y porque consideramos que en un significado pretendido, es esencial examinar el qué se enseña y el cómo se espera que se aprenda. Examinar las otras idoneidades requiere de observaciones en aula, tarea que puede realizarse en otra investigación.

Capítulo 2

2 ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

RESUMEN

Este capítulo consta de dos secciones, la primera resume las investigaciones de Durand y Vergnaud (1976), de Carpenter y Moser (1982 y 1983), de Maza (2001) y Cid, Godino y Batanero (2004a y 2004b). La segunda sección es una síntesis de las principales herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico utilizadas en el presente estudio.

2.1 ANTECEDENTES

2.1.1 INVESTIGACIONES DE CATHERINE DURAND Y GERARD VERGNAUD

Durand y Vergnaud (1976), en el trabajo *Estructuras aditivas y complejidad psicogenética*, deslindan con el enfoque de la enseñanza de la Matemática moderna. En este artículo nos dicen que la presentación clásica de la adición, sustracción multiplicación y división se basan en la ley de composición. En una ley de composición interna los términos de cualquier operación son objetos de la misma naturaleza. Sumandos y suma; minuendo, sustraendo y diferencia; factores y producto, y dividendo, divisor y cociente pertenecen al conjunto soporte: $\mathbb{N}$.

$$+ : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \longrightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \qquad - : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \longrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$$

$$\times : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \longrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \qquad \div : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \longrightarrow \boldsymbol{a} \div \boldsymbol{b}$$

Si bien, el estudio de la adición y multiplicación son fáciles de definirlas, la sustracción y división presentan una dificultad mayor, pues en la sustracción el primer término debe ser mayor o igual que el segundo. En el caso de la división el primer término debe ser múltiplo del segundo. Además, nos dicen que *el estudio de los problemas de la aritmética elemental pone en evidencia una gran cantidad de otras dificultades, que demuestran sino el fracaso, lo inadecuado de la noción de ley interna para caracterizar ciertas relaciones numéricas*. (p. 28) Sus reflexiones se basan principalmente en el hecho que muchos de los problemas aditivos implican una secuencia temporal y los diferentes roles de los números involucrados en la situación.

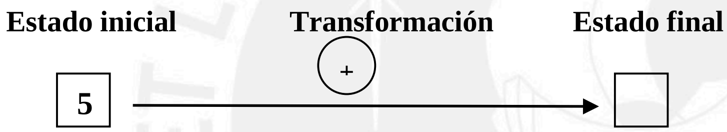
Describe situaciones como la siguiente:

Tengo S/. 5 y mi tío me regaló S/. 4. ¿Cuánto dinero tengo en total?

El número 5 representa el estado de mis recursos financieros, es una medida de los recursos. Esta medida es positiva o cero. El número 4 representa una transformación de mis recursos financieros, transformación positiva, en este caso. Pudo haber sido una transformación negativa (gasto o pérdida).

La diferencia del papel de los números en la situación es importante, pues para representar estados, por lo general se utiliza números positivos, mientras que una transformación puede ser representada por un número positivo o negativo.

En la representación simbólica Durand y Vergnaud (1976) utilizan cuadrado para representar un estado, un círculo para una transformación y una flecha para indicar el sentido de la transformación. (p. 29). Esta simbología la usan también Cid, Godino y Batanero (2004) y la adoptaremos, igualmente en el presente trabajo, siguiendo de cerca lo iniciado por Durand y Vergnaud.



Gérard Vergnaud (1990) nos dice que los interesados en el aprendizaje y enseñanza no debemos reducir el concepto a su definición, pues el concepto matemático, para un niño, adquiere sentido a través de las diferentes situaciones que requieren ser resueltas.

Además, nos dice que el conocimiento racional es operatorio y se puede distinguir que un sujeto ante una situación problema puede disponer de las competencias necesarias para su solución, o bien, no disponer de todas ellas. En el primer caso el aprendiz muestra conductas automatizadas, organizadas por un esquema único, mientras que en el otro caso el sujeto está obligado a reflexionar y explorar alguna solución esperando superar el conflicto cognitivo. Muchas veces los intentos de solución son no exitosos.

Para los Campos Conceptuales, el concepto de situación no tiene el sentido de situación didáctica, sino el de tarea. Una tarea compleja se puede analizar como una combinación de tareas simples. La ventaja de este marco teórico es que permite clasificar considerando las situaciones simples y los procedimientos necesarios para resolverlas. El papel esencial lo desempeñan los propios conceptos matemáticos.

> El campo conceptual de las estructuras aditivas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas. De este modo son elementos constitutivos de las estructuras aditivas, los conceptos de cardinal y de medida, de transformación temporal por aumento o disminución (perder o gastar 5 francos), de relación de comparación cuantificada (tener 3 bombones o 3 años más), de composición binaria de medidas (¿cuánto en total?), de composición de transformaciones y de relaciones, de operación unaria, de inversión, de número natural y número relativo, de abscisa, desplazamiento orientado y cantidad ... (Vergnaud, 1990, p. 8)

Vergnaud considera dos ideas centrales en las situaciones aditivas: ***la de variedad***, existe una gran variedad de situaciones en un campo conceptual dado, y las variables de situación son un medio de generar de manera sistemática el conjunto de las clases posibles. La otra idea es ***la de la historia***, los conocimientos de los alumnos son modelados por las situaciones que han encontrado y dominado progresivamente, especialmente por las primeras situaciones susceptibles de dar sentido a los conceptos y a los procedimientos que se les quiere enseñar.

La combinación de estas dos ideas no hace necesariamente fácil el trabajo del investigador en didáctica, ya que la primera idea orienta hacia el análisis, la descomposición en elementos simples y la combinatoria de los posibles, mientras que la segunda le orienta hacia la búsqueda de situaciones funcionales, casi siempre compuestas de varias relaciones, y cuya importancia relativa está muy ligada a la frecuencia con la que se les encuentra. ... (p. 10)

Durand y Vergnaud en 1976 consideraron cinco relaciones aditivas básicas, mientras que en 1990, Vergnaud agrega una más (***transformación de una comparación***).

La clasificación siguiente, tomada de Vergnaud (1990) incorpora una relación aditiva de base -*La relación (cuantificada) de comparación entre dos medidas*- a las otras cinco relaciones propuestas en Durand y Vergnaud (1976). En el reporte último nos dice que esta clasificación no ha salido *perfectamente armada del cerebro de un matemático*, sino que es el resultado de consideraciones psicológicas y matemáticas.

2.1.1.1 Tipos y ejemplos de situaciones de base

I. ***Composición de dos medidas en una tercera***

Tengo 6 polos verdes y 3 rojos. En total tengo 9 polos.

6, 3 y 9 son números naturales. (M–M–M)

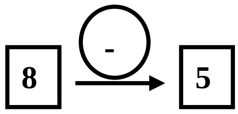
$$\left.\begin{array}{c}\boxed{6}\\ \boxed{3}\end{array}\right\}\boxed{9}$$

Por la ubicación de la incógnita, los problemas pueden ser de dos clases:

- Conociendo las dos medidas elementales, encontrar su compuesta.
- Conociendo la medida compuesta y una medida elemental, hallar la otra.

II. ***Transformación (cuantificada) de una medida inicial en una medida final***

Tenía S/. 8 y regalé a mi hermano S/. 3. Ahora, tengo S/. 5.



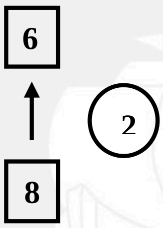
8 y 5 son números naturales, –3 es un número relativo. (M –T– M)

Esta categoría de relaciones numéricas da lugar a seis grandes clases de problemas (tres clases que se subdividen cada una en dos, considerando si la transformación es positiva o negativa).

- Conociendo el estado inicial y la transformación, hallar el estado final.
- Conociendo el estado inicial y el estado final, hallar la transformación.
- Conociendo el estado final y la transformación, hallar el estado inicial.

III. ***Relación (cuantificada) de comparación entre dos medidas***

Tengo S/. 8 y Juana tiene S/. 6. Tengo S/. 2 más que Juana.



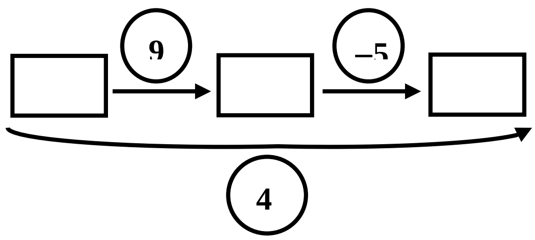
8, 6 y 2 son números naturales. (M–C– M)

Esta categoría de relaciones numéricas da lugar a seis grandes clases de problemas (tres clases que se subdividen cada una en dos, considerando si la comparación es *más que* o *menos que*).

- Conociendo el estado inicial y la comparación, hallar la diferencia (*más que* o *menos que*).
- Conociendo el estado inicial y la diferencia (*más que* o *menos que*), hallar el estado final.
- Conociendo el estado final y la diferencia (*más que* o *menos que*), hallar el estado inicial.

IV. ***Composición de dos transformaciones***

Por la mañana gané S/. 9 y por la tarde perdí S/. 5. Por tanto, gané S/. 4.



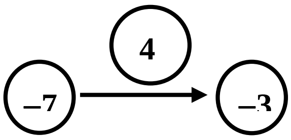
9, –5 y 4 son números enteros. (T–T–T)

Esta categoría de relaciones numéricas da lugar a dos grandes clases de problemas

- Conociendo las dos transformaciones elementales, hallar la compuesta.
- Conociendo la transformación compuesta y una transformación elemental, hallar la otra.

V. ***Transformación de una relación***

Luis tiene 7 canicas menos que Pablo. Juan le regala 4 canicas a Pablo. Por tanto, Luis tiene 3 canicas menos que Pablo.



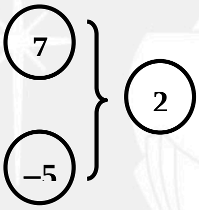
–7, 4 y –3 son números enteros. (C–T–C)

Esta categoría de relaciones numéricas da lugar a seis grandes clases de problemas (tres clases que se subdividen cada una en dos, considerando si la transformación es positiva o negativa).

- Conociendo la comparación inicial y la transformación, hallar la comparación final.
- Conociendo la comparación inicial y la comparación final, hallar la transformación.
- Conociendo la comparación final la transformación, hallar la comparación inicial.

VI. ***Composición de dos relaciones (comparaciones)***

Tengo 7 canicas más que Luis. Luis tiene 5 menos que Juan. Luego, tengo 2 más que Juan.



7, –5 y 2 son números enteros. (C–C–C)

Esta categoría de relaciones numéricas da lugar a dos grandes clases de problemas

- Conociendo las dos comparaciones, hallar la comparación compuesta.
- Conociendo una comparación y la comparación compuesta, hallar la otra comparación.

Estos tipos de problemas de estructura diferente se resuelven con la misma operación: la adición de números naturales o enteros. De lo anterior podemos afirmar que las diversas situaciones podemos agruparlas en situaciones de ***composición*** y ***comparación*** y situaciones de ***transformación***, a las cuales nos referimos más detalladamente a continuación:

Composición de dos medidas, de dos transformaciones **y** ***de dos relaciones*** **(*comparaciones*).** Tenemos así, tres tipos de situaciones.

Transformación**:** ***de una medida en otra*** **y** ***de una relación*****.** Tenemos así, dos tipos adicionales de situaciones; y

Comparación: ***de dos medidas***. Tenemos así un tipo adicional de situación, con lo cual, en total, tenemos seis tipos diferentes de situaciones aditivas. (Durand y Vergnaud, 1976, p. 30)

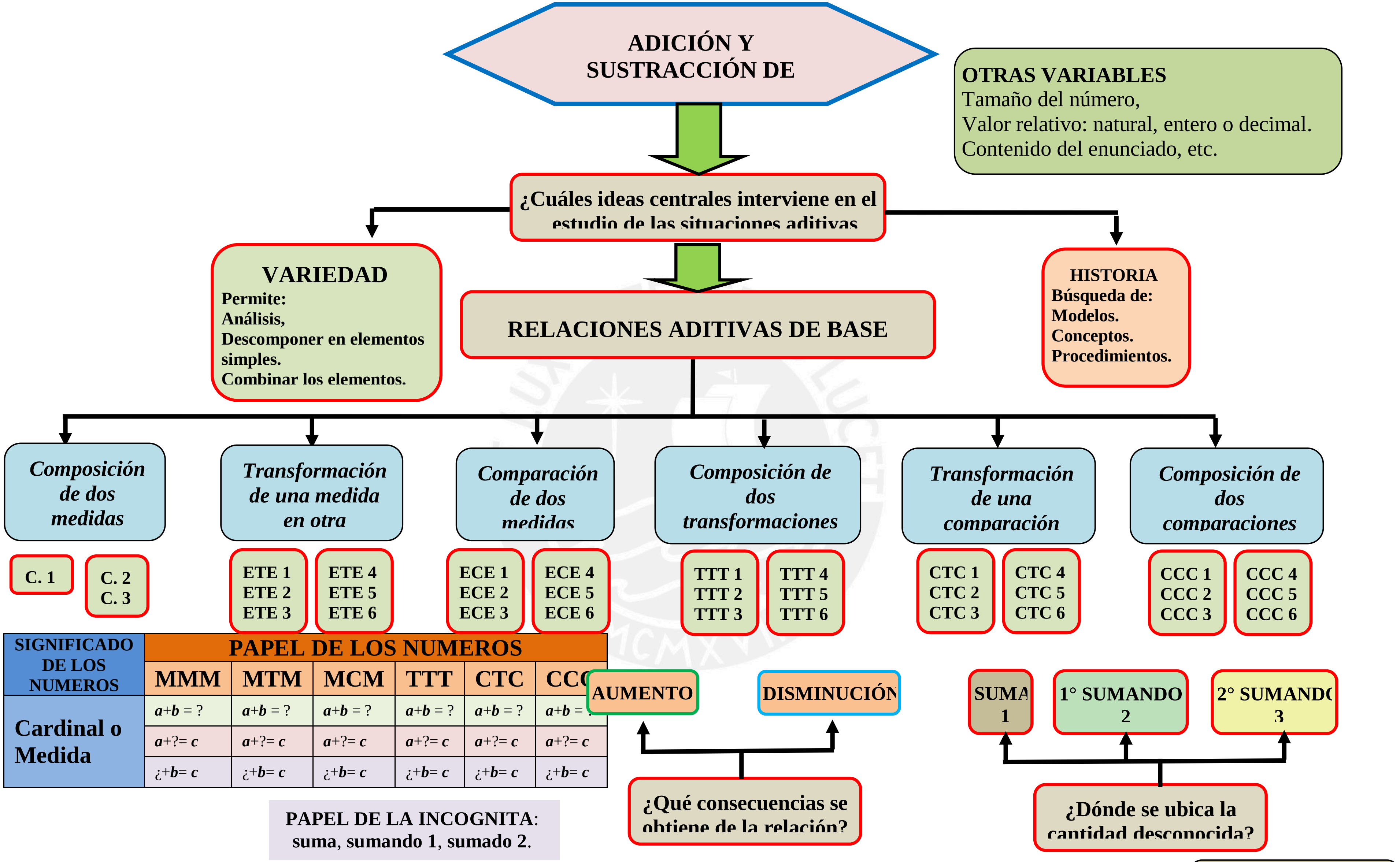


Figura 1. Las situaciones aditivas simples según G. Vergnaud.

Elaboración: Jorge Enrique Quiroz Q.

2.1.2 INVESTIGACIONES DE T. CARPENTER Y J. MOSER

Thomas Carpenter y James M. Moser profesores de la Universidad de Wisconsin, en 1982 en el libro Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective escribieron un informe de investigación sobre el desarrollo de habilidades para resolver problemas de adición y sustracción. Ellos consideran que hay dos supuestos básicos, muy difundidos en las prácticas escolares, que pueden ser falsos: el primero se refiere a que tanto la adición como la sustracción se aprenden utilizando material manipulativo y con representaciones gráficas utilizando la reunión conjuntos (juntar) o separar conjuntos (diferencia de conjuntos) (quitar). El segundo considera que los problemas verbales son difíciles para niños de todas las edades, y que, antes de intentar resolverlos, deben dominar las operaciones de adición y sustracción y previamente deben ser capaces de resolver aun los más simples problemas verbales. (p. 9)

Estos investigadores se apartaron de enfoques basados en el número de palabras en un problema, grado de dificultad, tamaño de los números, enunciados abiertos en el problema y más bien optaron por una alternativa al considerar las características semánticas del problema. En el análisis de los problemas verbales aditivos identifican tres dimensiones básicas:

1. La relación ***activa*** o ***estática*** entre los conjuntos implicados en el problema.
2. La relación de ***inclusión*** o de ***comparación*** entre conjuntos disjuntos.
3. La relación que implica ***aumento*** o ***disminución*** en la cantidad inicial dada.

La relación activa implica un cambio en el tamaño o la cantidad de un dato en el problema (aumentando o disminuyendo). Los autores, a este tipo de problemas, lo designan como problemas de ***cambio***. Si el problema se representa como una suma lo llaman problemas de ***juntar*** y si se representa como una resta, son problemas de ***separar***. (p. 10).

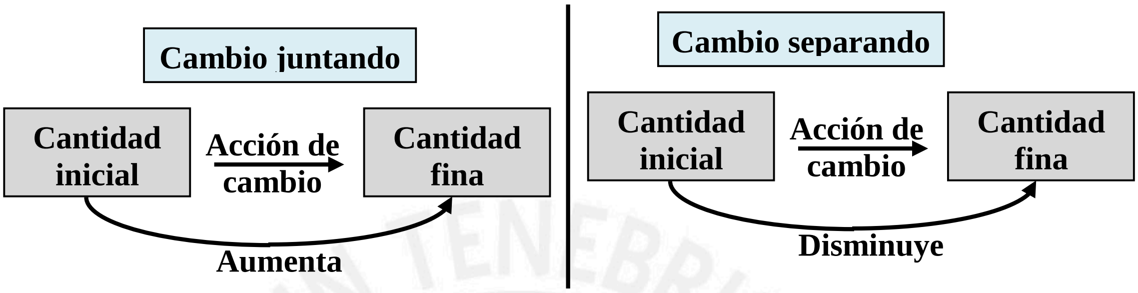
Más adelante nos dicen: *Sin embargo, para una completa caracterización de los problemas de adición y substracción, deberemos considerar una cuarta dimensión: La naturaleza de la cantidad desconocida (incógnita)*. (p. 11)

Carpenter y Moser (1983) llegaron a la conclusión que hay cuatro clases de problemas aditivos de enunciado verbal simple.

> … Este análisis propone cuatro grandes clases de problemas de adición y sustracción: *cambio*, *combinación*, *comparación* e *igualación*.

Cambio | **Combinación** | **Comparación** | **Igualación**

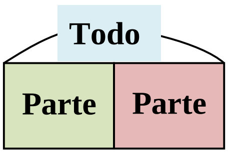
Hay dos tipos básicos de problemas de ***cambio*** y ambos involucran la acción de cambio. En problemas de ***cambio-juntando***, hay una cantidad inicial y una acción directa o implícita que provoca un aumento de esa cantidad; para problemas de ***cambio-separando***, un subconjunto se retira de un conjunto dado. En ambas clases de problemas, el cambio se produce con el tiempo. Hay una condición inicial (T1), que es seguida por un cambio que ocurre (T2), lo que resulta en un estado final (T3). (p. 15)



Tanto en los problemas de ***cambio-juntando*** como de ***cambio-separando***, hay tres tipos distintos de problemas dependiendo cuál es la incógnita.

PROBLEMAS DE CAMBIO	
JUNTANDO	**1.** Rita tenía 5 panes. Dora le dio 8 panes más. ¿Cuántos panes en total tiene Rita?
	2. Dora tiene 8 panes. ¿Cuántos panes más necesita ella para tener en total 13 panes?
	3. Rita tenía algunos panes. Compró 8 paness más. Ahora ella tiene 13 panes. ¿Cuántos panes tenía Rita al inicio?
SEPARANDO	**4.** Lolo tenía 9 naranjas. Él le dio 4 a Hugo. ¿Cuántos caramelos le queda a Lolo?
	5. Lalo tenía 12 caramelos. Él comió algunos caramelos. Ahora él tiene 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos comió Lalo?
	6. Lilo tenía algunos caramelos. Él le dio 5 a Lolo. Ahora Lilo tiene 8 caramelos. ¿Cuántos caramelos tuvo Lilo al inicio?

Tanto los problemas de ***combinación*** como los de ***comparación*** implican relaciones estáticas para los que no hay acción. Los problemas de *combinación* implican relaciones existentes entre un conjunto particular y dos subconjuntos disjuntos. Existen dos tipos de problemas: se dan los dos subconjuntos y se pide encontrar el cardinal de la unión, o se dan uno de los subconjuntos y la reunión y se pide encontrar el cardinal del otro subconjunto. (p. 15)



Problemas de combinación

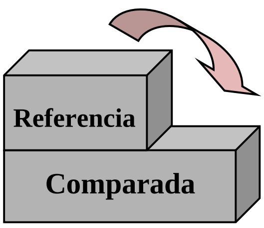
PROBLEMAS DE COMBINACIÓN
1. Carlos tiene 5 canicas rojas y 8 azules. ¿Cuántas canicas en total tiene Carlos?
2. Carlos tiene 13 canicas. 5 son rojas y el resto azules ¿Cuántas canicas azules tiene Carlos?

En el informe de 1982, los autores indicaban que la relación estática entre dos conjuntos disjuntos determina un tercer conjunto, cuyo cardinal era la reunión de ellos y los llamaron problemas del tipo ***parte-parte-todo***. La incógnita puede ser la suma o uno de los dos sumandos, si la incógnita es un sumando, el problema se puede representar como una una resta.

Los problemas de ***comparación*** involucran la comparación de dos conjuntos disjuntos. Debido a que un conjunto se compara con el otro, es posible etiquetar un conjunto como ***referente*** y el otro el conjunto de ***comparación***. La tercera entidad en estos problemas es la ***diferencia***, o la cantidad por la que el conjunto mayor excede al otro. En esta clase de problemas, cualquiera de las tres entidades podría ser la incógnita - la diferencia, el conjunto referente, o el conjunto de comparación. El conjunto más grande puede ser el conjunto referente o el conjunto de comparación. Por lo tanto, existen seis tipos diferentes de problemas de comparación. (p. 15)

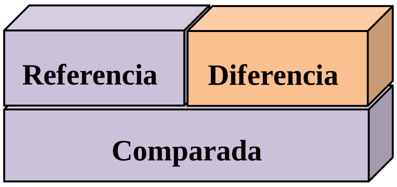
PROBLEMAS DE COMPARACIÓN
1. Coco tiene 13 canicas. Jaime tiene 5. ¿Cuántas canicas más que Jaime tiene Coco?
2. Jaime tiene 5 canicas. Coco tiene 8 más que Jaime. ¿Cuántas canicas tiene Coco?
3. Coco tiene 13 canicas. Él tiene 5 canicas más que Jaime. ¿Cuántas canicas tiene Jaime?
4. Coco tiene 13 canicas. Jaime tiene 5. ¿Cuántas canicas menos que Coco tiene Jaime?
5. Jaime tiene 5 canicas. Él tiene 8 canicas menos que Coco. ¿Cuántas canicas tiene Coco?
6. Coco tiene 13 canicas. Jaime tiene 5 menos que Coco. ¿Cuántas canicas tiene Jaime?

En cada uno de los seis tipos de problemas de comparación, un conjunto funciona como referencia, el otro como comparación y con la diferencia de ambos cardinales se forma la relación *más que* o *menos que*.



Los problemas de ***igualación*** son un híbrido de los *problemas de comparación* y *problemas de cambio*. No son del mismo tipo de acción que se encuentra en los problemas de cambio, sino que se basa en la comparación de dos conjuntos disjuntos. Al igual que en los problemas de comparación, se comparan dos conjuntos disjuntos; a continuación, se plantea la pregunta:

¿Qué podría hacerse para que uno de los conjuntos tenga igual cardinal que el otro?



Si la acción se realiza con el más pequeño de los dos conjuntos, entonces se convierte en un problema de ***igualación-sumando***. Por otro lado, si la acción se efectúa en el conjunto más grande, entonces el problema resulta ***igualación-quitando***. Al igual que con los problemas de comparación, la incógnita puede variar para producir tres distintos problemas de igualación de cada tipo. (p. 17)

PROBLEMAS DE IGUALACIÓN	
IGUALAR SUMANDO	**1.** Coco tiene 13 canicas. Jaime tiene 5 canicas. ¿Cuantas canicas tiene que ganar Jaime para tener tantas como Coco?
	2. Jaime tiene 5 canicas. Si gana 8 canicas, tendrá el mismo número de canicas que Coco. ¿Cuántas canicas tiene Coco?
	3. Coco tiene 13 canicas. Si Jaime gana 5 canicas,él tendrá el mismo número de canicas que Coco. ¿Cúantas canicas tiene Jaime?
IGUALAR RESTANDO	**4.** Coco tiene 13 canicas. Jaime tiene 5 canicas. ¿Cuantas canicas tiene que perder Coco para tener tantas como Jaime?
	5. Jaime tiene 5 canicas. Si Coco pierde 8 canicas, él tendrá el mismo número de canicas que Jaime. ¿Cuántas canicas tiene Coco?
	6. Coco tiene 13 canicas. Si él pierde 5 canicas, tendrá el mismo número de canicas que Jaime. ¿Cuántas canicas tiene Jaime?

Lo central en su trabajo es que nos describe la relación que interviene en las situaciones aditivas: ***estática*** o ***activa***. La primera, la relación estática proporciona dos tipos de situaciones: de ***combinación*** y ***comparación*** y la segunda, relación activa proporciona otros dos tipos diferentes de situaciones: de ***cambio*** y de ***igualación***. Este aporte es sustancial para la elaboración del significado de referencia. Además, nos dicen la cantidad desconocida puede ser la suma, el primer sumando o el segundo y las consecuencias de la relación en las situaciones aditivas pueden ser de aumento o de disminución. También nos muestra las diferentes estrategias asociadas a la solución de una situación aditiva.

A continuación presentamos un resumen del trabajo de estos investigadores. Hemos elaborado la estructura global de las situaciones aditivas simples.

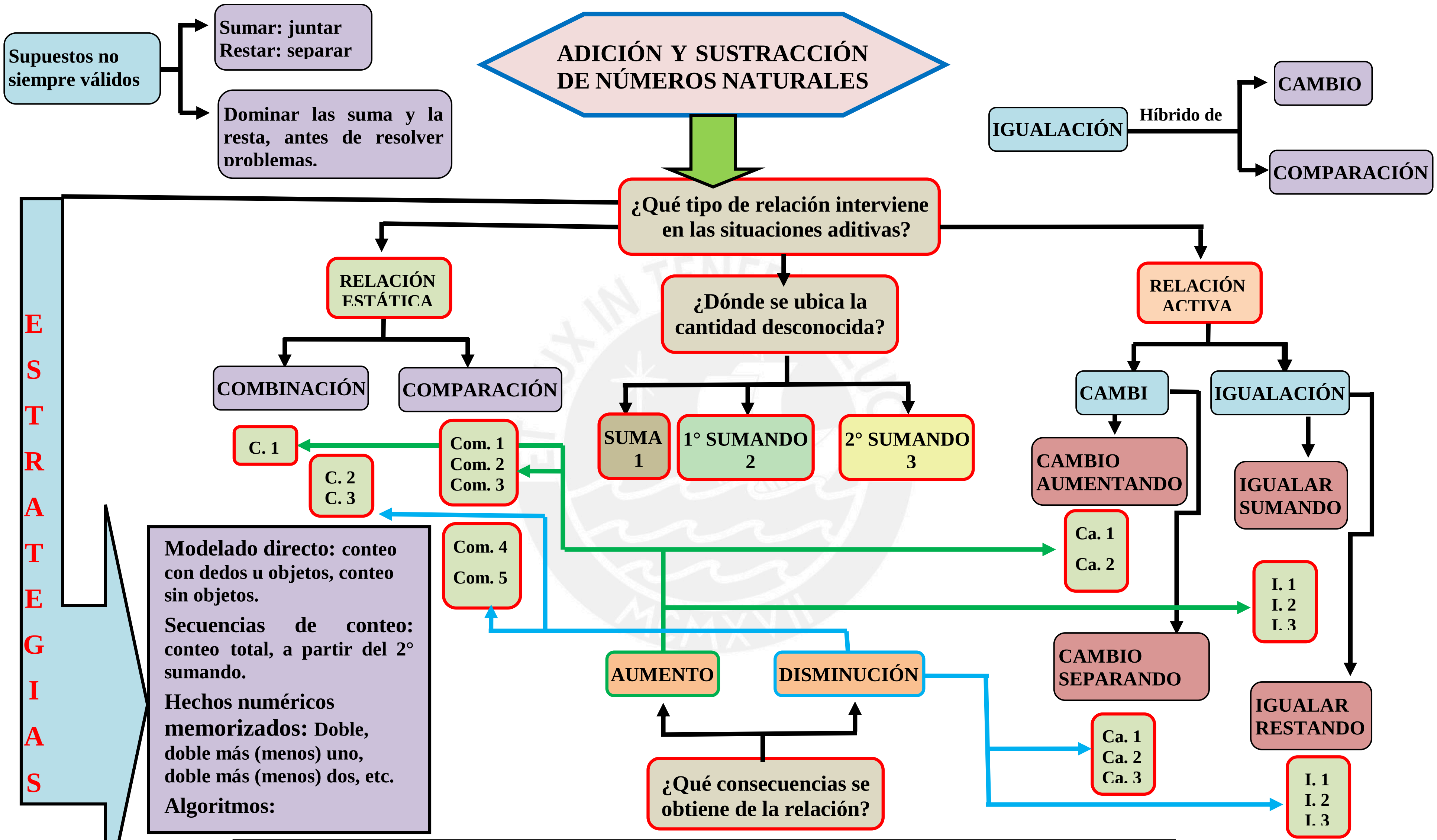


Figura 2. Las situaciones aditivas simples según Carpenter y Moser.

Elaboración: Jorge Enrique Quiroz Q.

2.1.3 INVESTIGACIONES DE CARLOS MAZA GÓMEZ

Carlos Maza Gómez, profesor titular en la Universidad de Sevilla, junto a 23 profesores de universidades españolas en 2001 escribieron el libro *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*, cuyo editor fue Enrique Castro. En este libro Carlos Maza le dedica un capítulo al análisis de la adición y sustracción (pp. 177-202).

2.1.3.1 Análisis de la adición y sustracción

Consta de tres subcapítulos: ***contextos y usos***, ***conceptos*** y ***representación de dichas operaciones***. En el primer subcapítulo *contextos y usos de la adición y sustracción*, el autor aborda la *fenomenología de la adición y sustracción*. Comenta las definiciones habituales de estas operaciones en los libros de texto aritméticos del siglo XIX y comienzos del XX: "Sumar es reunir varios números en uno solo", (p. 179). "La sustracción es el análisis de la adición, y tiene por objeto, dada la suma de dos sumandos y uno de éstos, hallar el otro" (p. 179). En el primer caso la definición hace alusión a la acción que debe hacer el sujeto, en cambio en la segunda, la resta se puede entender como una suma en la que se desconoce uno de los sumandos. Esto significa que para el autor las operaciones se pueden entender de dos maneras: desde las matemáticas mismas, como relación de objetos abstractos o como acciones del sujeto al resolver el problema. Por ejemplo: si Sonia tiene S/. 5 y si su padre le da de propina S/. 3. En total tiene S/. 8. En el primer caso, la suma 8 es el cardinal de la reunión de dos conjuntos disjuntos, uno cuyo cardinal es 5 y el otro de cardinal 3. En cambio en el segundo caso los S/. 3 que le da el padre aumenta (cambia, transforma o varía) los S/. 5, para obtener S/. 8. El primer caso es el significado de la ley de composición interna y en el segundo, la operación aritmética que describe la acción de cambio o transformación: aumentar, añadir, incrementar.

Lo importante, estriba en que pone de manifiesto las dos maneras frecuentes de enfrentar las operaciones aritméticas, la primera es heredera de la influencia del formalismo a través de la *Matemática Moderna*, primero debemos saber sumar, restar, multiplicar o dividir y luego aplicar el resultado de la operación a las situaciones concretas; en cambio la segunda tiene que ver con el significado de la acción que realiza el estudiante para obtener el resultado de la operación.

Una observación a lo que describe Carlos Maza: … *se efectúa una suma entendiéndola como la 'reunión de los números cinco y cuatro en uno solo, nueve*. Esta afirmación no es correcta. Nueve no es la reunión de cinco y cuatro. Nueve es el cardinal de la reunión de los conjuntos disjuntos A y B, cuyo cardinal de A es cinco y el cardinal de B es cuatro.

El autor continúa comparando el *currículo anterior* (1970) y los *nuevos contenidos curriculares*. Describe los enfoques del currículo anterior: "La enseñanza de la matemática… debe centrarse en el proceso de matematización de los problemas, creación de sistemas formales, utilización de las leyes de estos sistemas para obtener unos resultados e interpretación de los mismos" (p. 181). En la década del 90, el currículo se compone de conceptos, procedimiento y actitudes. Respecto a los conceptos de la Adición y Sustracción, nos dice: "Situaciones en las que intervienen estas operaciones: la suma como unión, incremento; la resta como disminución, comparación, complemento. La identificación de las operaciones inversas (suma y resta). Correspondencia entre lenguaje verbal, representación gráfica y notación numérica." (p. 181)

En el segundo subcapítulo: *Conceptos de las operaciones de adición y sustracción*, las define de dos maneras. La primera la hace como objetos matemáticos. La adición de números naturales es una ley de composición interna, es decir, como una aplicación de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ en $\mathbf{N}$. Tal que a cada par de números naturales $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ le hace corresponder el número natural $\boldsymbol{c}$. Describe que $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son los cardinales de los conjuntos disjuntos A, B y el conjunto $A \cup B$, respectivamente. ($A \cup B = \{\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x} \in A \text{ o } \mathbf{x} \in B\}$).

Para la sustracción, utiliza dos conjuntos A y B, tal que el conjunto B es subconjunto de A ($B \subset A$). "La sustracción en el conjunto $\mathbf{N}$ puede definirse como la correspondencia $\boldsymbol{h}$: $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, tal que si $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}$, es $\boldsymbol{c}$ = cardinal $(A - B)$ donde $A - B = \{\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x} \in A \text{ y } \boldsymbol{x} \not\in B\}$)." (Enrique Castro, 2001, p.182).

El autor pone de manifiesto, la diferencia entre las dos definiciones. La adición es una aplicación de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ en $\mathbf{N}$, mientras que la sustracción es una correspondencia. Esto quiere decir, que la adición cumple con la propiedad de clausura (ley interna totalmente definida) y la sustracción no verifica dicha propiedad (ley interna parcialmente definida), en $\mathbf{N}$ no hay la diferencia de 3 y 5. Esto hace que se adopte una definición abstracta de la diferencia de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, se dice que $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, significa que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

La equivalencia de estas últimas expresiones es la base para sostener que la sustracción es la inversa de la adición. Matemáticamente, sabemos que esto no es correcto, pues la adición es una aplicación de $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ y la inversa sería la aplicación de $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Sabemos que si 7 es la suma de dos números, estos números pueden ser 7 y 0, 6 y 1, 5 y 2, etc.

2.1.3.2 Tipos de situaciones aditivas

Luego define la adición y sustracción considerando los significados de las acciones que realiza el sujeto: ***cambio***, ***combinación*** y ***comparación***.

Lo que sigue es un resumen de lo que propone Carlos Maza en Castro (2001), en el cual mantenemos el nombre de los tipos de situaciones, las representaciones y las estrategias para la solución y presentamos nuevos ejemplos, análogos a los de Masa.

Situaciones de cambio

Cambio aumentando (final desconocido)

Javier tiene seis piñas. Compra dos piñas más. ¿Cuántas piñas tendrá al final?

Para este tipo de situaciones de ***cambio aumentando*** propone las estrategias:

Contar todo: disponer objetos que representen el primer dato (6 piñas en este caso) y añadirle a continuación los objetos del segundo dato (2 piñas), y luego, contar todo hasta el último. Este procedimiento es el más frecuente, por ser el más simple.

Contar a partir del primer sumando: estrategia que consiste en contar a partir de cualquier número, que en este caso es a partir del primer dato (6 piñas) y contar a partir de seis (siete, ocho).

Problemas de cambio aumentando

	Inicial	*Cambio*	*Final*
Situación	Un niño tiene 6 piñas	Compra dos piñas	¿Cuántas tiene al final?
Estrategia	Dispone 6 objetos Extiende 6 dedos	Coloca 2 objetos más Extiende 2 dedos más	Cuenta todos los objetos. Cuenta dedos extendidos
Cálculo	**6**	**+ 2**	**6 + 2 = 8**

Cambio disminuyendo (final desconocido)

Javier tiene piñas. Luego, vende dos piñas. ¿Cuántas piñas tendrá al final?

Esquemáticamente se pueden representar ambos problemas del modo siguiente:

$$\boxed{6} \xrightarrow{+2} \boxed{} \qquad\qquad \boxed{6} \xrightarrow{-2} \boxed{}$$

Cambio aumentado (cambio desconocido)

Javier tiene seis piñas. Luego, compra algunas piñas más. Si al final tiene ocho piñas, ¿cuántas ha comprado?

$$\boxed{6} \xrightarrow{+?} \boxed{8}$$

.El autor propone ***dos estrategias aditivas y una sustractiva*** para resolver este tipo de situación.

Contar a partir de lo dado: consiste en contar a partir de cualquier número, que en este caso es a partir del primer dato (6 piñas) y contar a partir de seis (siete, ocho).

__Separar de__. Se representa la cantidad mayor (ocho) y separar seis de los ocho objetos.

Estrategias sustractivas:

__Contar hacia atrás__: estrategia verbal. El niño cuenta desde la cantidad mayor (ocho) hasta llegar a la cantidad menor (seis).

Cambio aumentado (comienzo desconocido)

Javier tiene algunas piñas. Luego compra dos piñas. Al final tiene ocho piñas. ¿Cuántas tenía al inicio?

$\boxed{?} \xrightarrow{+2} \boxed{8}$

.

La solución de este problema, según el autor, es la más difícil de los problemas de cambio. Primero hay que aplicar la propiedad conmutativa de la adición y luego contar hacia atrás.

Situaciones de combinación

Combinación (total desconocido)

Lola tiene cinco naranjas y Diana tiene cuatro. Si juntan las naranjas de ambas, ¿cuántas tendrá en total?

5	4
?	

Las estrategias de solución son las mismas para las situaciones de cambio aumentando, es decir, ***contar todo, contar a partir de un sumando***.

Combinación (parte desconocida)

Lola tiene cinco naranjas. Si Diana tiene algunas naranjas y entre los dos tienen nueve en total, ¿cuántas naranjas tiene Diana?

5	?
9	

Las estrategias de solución son las mismas para las situaciones de cambio aumentando (cambio desconocido), es decir, ***contar a partir de lo dado, separar de***.

La característica fundamental en este tipo de situaciones es que participan dos cantidades estáticas que forman un todo (partes - todo).

Problemas de comparación

Comparación (diferencia desconocida)

5	?
7	

La estrategia más habitual para resolver acertadamente este problema reside en contar desde el número menor hasta obtener el mayor, es decir, la de contar a partir de lo dado" (p. 191)

Comparación (referente desconocido)

Pedro tiene siete lápices. Pedro tiene dos lápices más que Carmen. ¿Cuántos lápices tiene Carmen?

Comparación (referente conocido)

Carmen tiene cinco lápices. Pedro tiene dos lápices más que Carmen. ¿Cuántos lápices tiene Pedro?

Presentamos un resumen de los problemas aditivos y sustractivos en el cuadro siguiente:

Cuadro 8.3. Problemas aditivos y sustractivos

Situación	***Problema general***	***Variación de la incógnita***	***Operación aplicable***
Cambio	• **Cambio aumentado**	• Final desconocido • Cambio desconocido • Comienzo desconocido	• Adición • Sustracción • Sustracción
	• **Cambio disminuyendo**	• Final desconocido • Cambio desconocido • Comienzo desconocido	• Sustracción • Sustracción • Adición
Cálculo	• **Combinación**	• Total desconocido • Parte desconocida	• Adición • Sustracción
Comparación	• **Comparación**	• Diferencia desconocida • Referido desconocido • Referente desconocido	• Sustracción • Adición • Sustracción

(Enrique Castro, 2001, p.192)

Situaciones combinación (parte desconocida)

Combinación (parte desconocida)

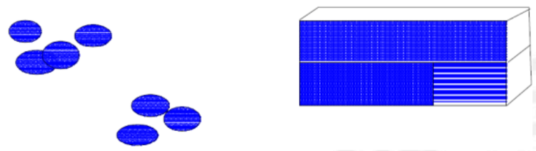
Javier tiene cuatro piñas. Si Juan tiene varias piñas y entre los dos tienen nueve piñas, ¿cuántas piñas tiene Juan?

Al indicar la estrategia de solución de los problemas de comparación (diferencia desconocida), el autor enuncia un problema como este: Luis tiene seis panes y Dina tiene cuatro. ¿Cuántos panes hay que dar a Dina para que tenga igual número que Luis?

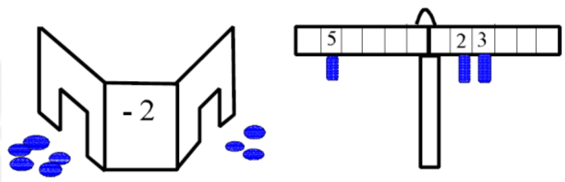
Este problema se denomina de igualación dado que la acción que lo resuelve y que se demanda en la pregunta planteada consiste en igualar la cantidad mayor añadiendo una cantidad desconocida a la menor. Los dos problemas no solo muestran una distinta formulación lingüística sino que son realmente diferentes: en el de comparación se dan dos cantidades y se pide una comparación estática entre ellas mientras que en el de igualación se demanda una transformación de una cantidad en otra, adoptando así un carácter dinámico que lo asemeja a los problemas de cambio aumentado (cambio desconocido). La similitud entre ambos problemas de comparación es debida a que se inscriben dentro de la misma situación. (Enrique Castro, 2001, p.191).

En el tercer subcapítulo, ***representaciones de las operaciones de adición y sustracción***, el autor aborda la ***transparencia*** y la ***opacidad*** de las representaciones de la adición y sustracción cuando son objetos didácticos. Describe la ***transparencia*** como la "propiedad de cualquier forma de representación de hacer ver al resolutor con facilidad los elementos del problema" (p. 193). No era suficiente que un material manipulativo sea adecuado para resolver el problema, sino que debía hacer notar con claridad los datos y las acciones involucrados en el problema.

Entre los materiales manipulativos para modelar problemas aditivos a resolver, el autor propone: ***fichas, regletas de Cuisenaire, máquina operadora de Dienes, balanza numérica***.



(p. 193)



(p. 194)

Las fichas y las regletas de Cuisenaire son más apropiadas para representar problemas de combinación, aunque las fichas son más transparentes para cantidades discretas (manzanas, canicas, lapiceros, etc.) y las regletas para cantidades continuas (kilogramos, metros, horas, etc.). La máquina operadora de Dienes es más transparente para los problemas de cambio, mientras que la balanza numérica representa mejor los problemas de comparación e igualación.

Entre las representaciones más abstractas propone utilizar dedos, dibujos y palabras.

> "**Dedos**: ***extender y flexionar los dedos***.
>
> ***Dibujos: diagramas de Venn, recta numérica***.
>
> ***Palabras***: uso de palabras como en el ejemplo siguiente:
>
> Pregunta. Juan tiene cinco cómics. En su cumpleaños le dan varios más de manera que al final tiene nueve cómics. ¿Cuántos le dieron en su cumpleaños?
>
> Respuesta: (Extiende los cinco dedos de su mano izquierda.) Uno, dos, tres, cuatro, cinco. ¿Cuántos le dan?
>
> P. Al final tiene nueve cómics.
>
> R. (mirando primero su mano izquierda.) Cinco (mira luego la derecha en la que va extendiendo los dedos al tiempo que subvocalmente pronuncia "Seis, siete, ocho, nueve" acompañándolo con gestos de la cabeza). ¿Cuatro!
>
> P. ¿Por qué?
> R. Porque cinco y cuatro son nueve."   (Enrique Castro, 2001, p. 196).

El uso de representaciones simbólicas constituye la culminación del proceso de abstracción que comienza con los materiales manipulativos, siguiendo un proceso de lo verbal a lo simbólico.

Cuatro y tres son siete

4 y 3 son 7

4 + 3 son 7

4 + 3 = 7

> Esta forma de introducción puede ser acertada a condición de que no se olvide que los símbolos son representaciones de acciones (+, –) o de una comparación (=) y que si estas acciones y comparación subsiguiente no se han comprendido difícilmente esta introducción a los símbolos dejará de ser otra cosa que una rutina escolar más sin significado para el niño. (Enrique Castro, 2001, p. 197).

El autor nos muestra representaciones simbólicas no canónicas de un problema aditivo mediante las expresiones:

$$[\ ] + b = c \qquad a + [\ ] = c \qquad a + b = [\ ]$$

> “Estas representaciones ‘no canónicas’ resultan más transparentes para describir las relaciones del problema de cambio aumentado: en el primer caso, se dispone de una cantidad *a* que se incrementa en una cantidad desconocida para resultar en una cantidad *c*. Los símbolos $c – a =$ representarían el proceso de resolución (siempre que fuera sustractivo) pero no el planteamiento del problema. Teniendo en cuenta que durante cierto tiempo la estrategia que resuelve este problema no sería sustractiva sino aditiva (‘Separar a’ por ejemplo) se puede comprender que la representación no canónica es más transparente que la canónica en la expresión de los términos del problema. (Enrique Castro, 2001, p.198).

Para el autor las estrategias más elaboradas y abstractas en la solución de problemas de adición o sustracción lo constituye el empleo de hechos numéricos básicos memorizados como: dobles: *doble de números de un dígito, doble más uno, doble menos uno, doble más dos, doble menos dos*, *compensación* (aumentar un número a un sumando y disminuir el mismo número en el otro sumando. “Esta memorización se puede favorecer con ejercicios específicos como el bingo, en el que la rapidez de la respuesta es importante.” (Enrique Castro, 2001, p. 198).

2.1.3.3 Configuración epistémica de las situaciones aditivas

En la actividad matemática al resolver problemas aditivos el lenguaje (verbal, gráfico o simbólico) describe las situaciones problemas y pone de manifiesto a los conceptos, reglas, definiciones, propiedades (adición, sustracción, suma, sumando, conmutativa, asociativa, …) y muestra procedimientos (algoritmos) y justificaciones (argumentos). Las notaciones, los gráficos utilizan el lenguaje, las definiciones y las propiedades propician el uso de algoritmos. Los argumentos justifican los algoritmos y el uso de las propiedades. Dos o más de estos elementos primarios: situaciones, lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos, articulados en una red, constituyen una configuración didáctica.

La siguiente configuración empírica de las situaciones aditivas hemos elaborado utilizando las herramientas del EOS.

LENGUAJE

Verbal

- ***Cambio***, cambio aumentando, cambio disminuyendo, final desconocido, cambio desconocido, comienzo desconocido, ***combinación***, total desconocido, comienzo desconocido, ***comparación***, diferencia desconocida, referido desconocido, referente desconocido, ***igualación***, adición, suma, sumando, reunir, conjunto, cardinal (A), cardinal ($A \cup B$), diagramas de Venn, contar: todo, a partir del primer sumando, a partir de lo dado, separar a, contar hacia atrás, sustracción, propiedad conmutativa.

Gráfico

- Dibujos: fichas, regletas de Cuisenaire, máquina operadora de Dienes, balanza numérica.

Simbólico

- +; –; $5 + 3 = 8$; $¿ + 3 = 8$; $5 + ? = 8$; $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$; Card. ($A \cup B$) = Card. A + Card. B; si, $A \cap B = \Phi$.

SITUACIONES

- Situaciones aditivas de combinación, en lo que se solicita: total desconocido, comienzo desconocido.
- Situaciones de cambio aumentando o cambio disminuyendo en los que se solicita final desconocido, cambio desconocido, comienzo desconocido.
- Situaciones de comparación en los que se solicita diferencia desconocida, referido desconocido, referente desconocido.
- Situaciones de igualación.

CONCEPTOS

Previos

- Suma, reunir, juntar, añadir, aumentar, incrementar.

Emergentes

- Situación aditiva simple, adición, sumando, conjunto, diagramas de Venn, cardinal, cardinal de ($A \cup B$), contar a partir del primer sumando, doble de un número, doble más uno, doble más 2, 10 menos 1, 10 menos 2, determinar la totalidad, propiedad asociativa, propiedad conmutativa.

PROPIEDADES

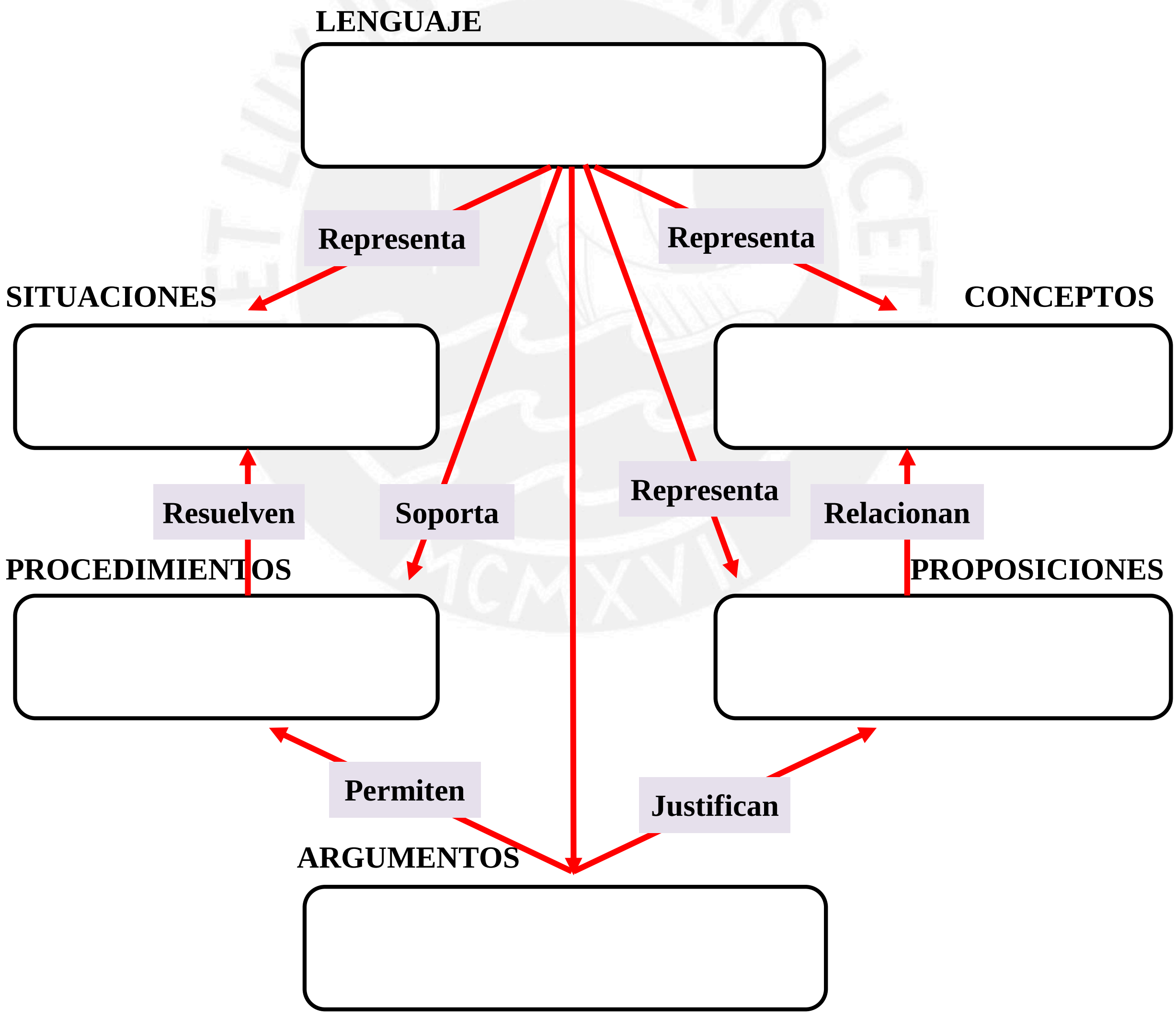
- La acción de un número natural en una situación aditiva simple: cambiar aumentando o disminuyendo, combinar, comparar o igualar cantidades.
- En un PAEV (problema aritmético de enunciado verbal) la incógnita es la suma o el primer o el segundo sumando.
- Las situaciones aditivas simples son de ***cambio***, ***combinación*** o ***comparación***.
- Las situaciones aditivas simples de ***combinación*** son: total desconocido o comienzo desconocido.
- Los PAEV de ***cambio aumentando*** son: final desconocido, cambio desconocido, comienzo desconocido y los PAEV de ***cambio disminuyendo*** son: final desconocido, cambio desconocido, comienzo desconocido.
- Las situaciones aditivas simples de ***comparación*** son: diferencia desconocida, referido desconocido, referente desconocido.

PROCEDIMIENTOS

- Cambiar una cantidad inicial: cambiar aumentando, cambiar disminuyendo, separar de.
- Combinar dos cantidades, contar todo, contar a partir del primer sumando, separar dos cantidades.
- Obtener: el doble, doble más/menos uno, doble más/menos/ dos, compensar.

ARGUMENTOS

- Comprobación de los procedimientos con materiales manipulativos.



CONFIGURACIÓN DE OBJETOS

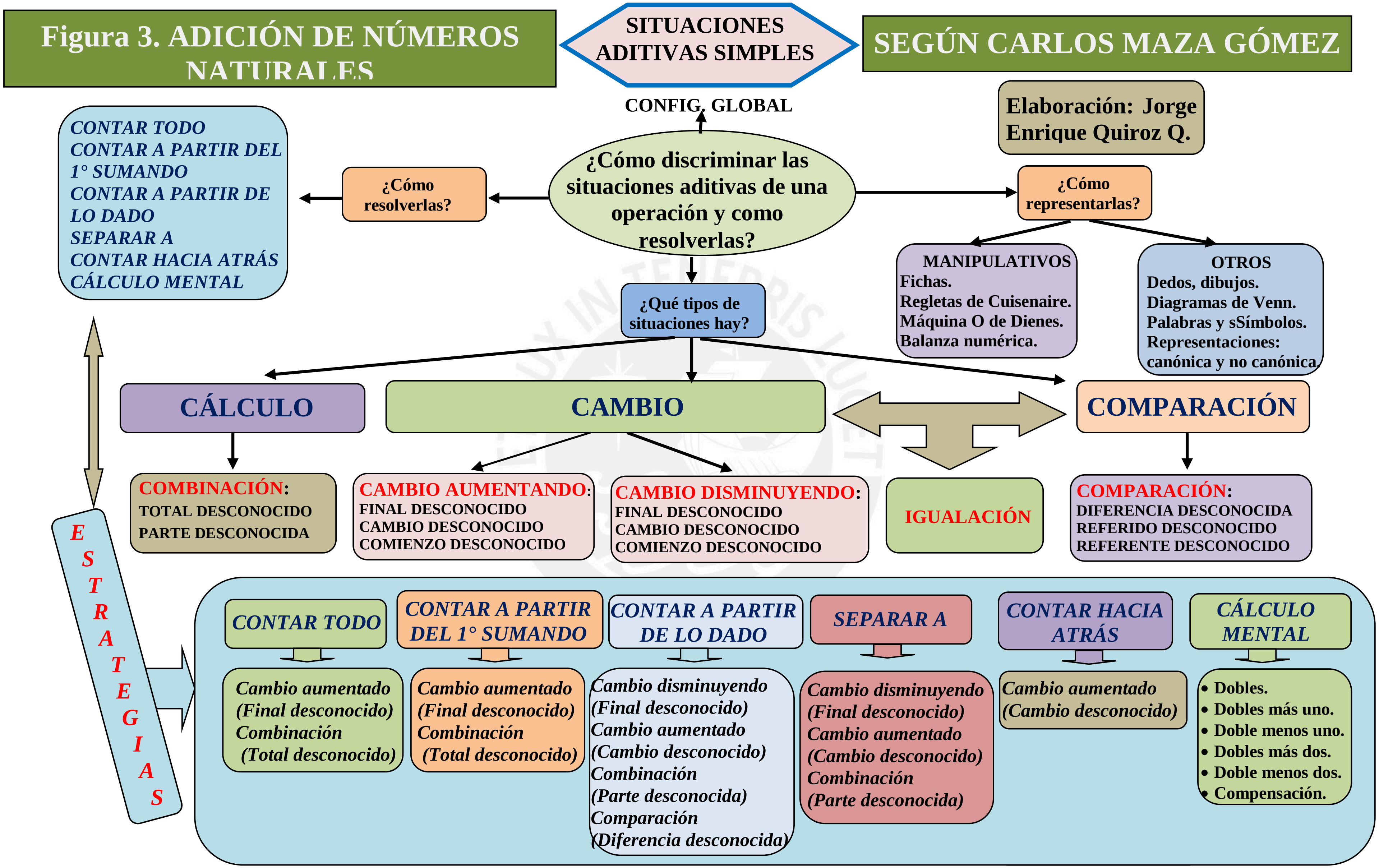


Figura 3. ADICIÓN DE NÚMEROS NATURALES
SITUACIONES ADITIVAS SIMPLES
SEGÚN CARLOS MAZA GÓMEZ
CONFIG. GLOBAL
Elaboración: Jorge Enrique Quiroz Q.
¿Cómo discriminar las situaciones aditivas de una operación y como resolverlas?
¿Cómo resolverlas?
CONTAR TODO
CONTAR A PARTIR DEL 1° SUMANDO
CONTAR A PARTIR DE LO DADO
SEPARAR A
CONTAR HACIA ATRÁS
CÁLCULO MENTAL
¿Cómo representarlas?
MANIPULATIVOS
Fichas.
Regletas de Cuisenaire.
Máquina O de Dienes.
Balanza numérica.
OTROS
Dedos, dibujos.
Diagramas de Venn.
Palabras y sSímbolos.
Representaciones: canónica y no canónica.
¿Qué tipos de situaciones hay?
CÁLCULO
CAMBIO
COMPARACIÓN
COMBINACIÓN:
TOTAL DESCONOCIDO
PARTE DESCONOCIDA
CAMBIO AUMENTANDO:
FINAL DESCONOCIDO
CAMBIO DESCONOCIDO
COMIENZO DESCONOCIDO
CAMBIO DISMINUYENDO:
FINAL DESCONOCIDO
CAMBIO DESCONOCIDO
COMIENZO DESCONOCIDO
IGUALACIÓN
COMPARACIÓN:
DIFERENCIA DESCONOCIDA
REFERIDO DESCONOCIDO
REFERENTE DESCONOCIDO
ESTRATEGIAS
CONTAR TODO
Cambio aumentado (Final desconocido)
Combinación (Total desconocido)
CONTAR A PARTIR DEL 1° SUMANDO
Cambio aumentado (Final desconocido)
Combinación (Total desconocido)
CONTAR A PARTIR DE LO DADO
Cambio disminuyendo (Final desconocido)
Cambio aumentado (Cambio desconocido)
Combinación (Parte desconocida)
Comparación (Diferencia desconocida)
SEPARAR A
Cambio disminuyendo (Final desconocido)
Cambio aumentado (Cambio desconocido)
Combinación (Parte desconocida)
CONTAR HACIA ATRÁS
Cambio aumentado (Cambio desconocido)
CÁLCULO MENTAL
Dobles.
Dobles más uno.
Doble menos uno.
Dobles más dos.
Doble menos dos.
Compensación.

2.1.4 INVESTIGACIONES DE EVA CID, JUAN D. GODINO Y CRMEN BATANERO

Eva Cid, Juan D. Godino y Carmen Batanero de la Universidad de Granada escribieron I. Sistemas Numéricos para Maestros en el libro Matemática para Maestros y el capítulo II: Didáctica de los Sistemas Numéricos para Maestros en el libro Didáctica de las Matemáticas para Maestros. La edición de ambos libros corresponde a octubre de 2004 y cuya dirección estuvo a cargo de Juan D. Godino. Con base en estos materiales describiremos los significados de estos académicos, respecto de la adición de números naturales.

2.1.4.1 Situaciones que dan sentido a la adición de números naturales

En el libro Matemática para Maestros esbozan la estructura lógica de las situaciones aditivas de una etapa. Comienzan indicando que, tanto la "adición como la sustracción, se construyen como un medio de evitar los recuentos o procesos de medida en situaciones parcialmente cuantificadas". (Cid, Godino y Batanero, 2004, p, 49)

Para elaborar una clasificación de las situaciones aditivas simples (de una operación) analizan el papel que desempeñan los números en una situación y que es variable. Este rol puede ser de ***estado***: cardinal de un conjunto (C), ordinal de un elemento en una secuencia (O) o medida de una magnitud (M); de ***transformación***, cuando un número cambia, varia o transforma un estado; o de ***comparación***, cuando el número indica la diferencia de dos estados que se comparan entre sí. (Cid et al, 2004, p, 49)

Los autores omiten enunciar el papel de transformación de una ***transformación*** y de una ***comparación***. Así como la *comparación* de una ***comparación***. Aun cuando en los prototipos si están presentes.

A continuación enunciaremos los seis tipos de situaciones aditivas simples concretas que presentan Eva Cid, Juan D. Godino y Carmen Batanero en el libro *Matemáticas para Maestros* en el *capítulo II*: *Sistemas numéricos y proporcionalidad*. *Se ha sustituido cantidad por estado.*

Tipo 1: Estado – Estado – Estado (EEE)

Un estado que se descompone en partes. Es decir una partición de un todo e_t en dos partes e_{p1} y e_{p2}. Se trata de una situación *parte – todo* en la que los tres números son estados: cardinales, ordinales o medidas.

Se representa mediante el diagrama:

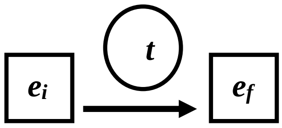
$$\left.\begin{array}{l}\boxed{e_{p1}}\\[1em] \boxed{e_{p2}}\end{array}\right\}\ \boxed{e_t}$$

Ejemplos:

- Lalo tiene 6 canicas en el bolsillo izquierdo y 5 en el derecho. ¿Cuántas tiene en total?
- Lalo tiene 11 canicas. 5 de ellas son verdes y las otras azules. ¿Cuántas son azules?

Tipo 2: Estado – Transformación – Estado (ETE)

Un estado inicial que es transformado por otro estado e_t en un estado final Es decir, un cambio que sufre un estado e_i en otro estado e_f. Se representa mediante el diagrama:

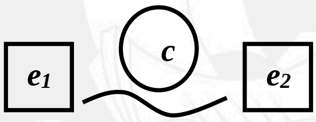


Ejemplos:

- Lola esta en el cuarto lugar en una cola para comprar entradas para el cine. Deja que cinco amigos entre delante de ella. ¿Qué lugar ocupa ahora?
- Rita tiene 8 caramelos. Regala 3 a su hermana. ¿Cuántos le quedan?

Tipo 3: Estado – Comparación – Estado (ECE)

Un número compara dos estados. El número *c* cuantifica la relación. Es decir, *c* es la comparación de los estados: e_1 y e_2. Representamos esta situación mediante el diagrama

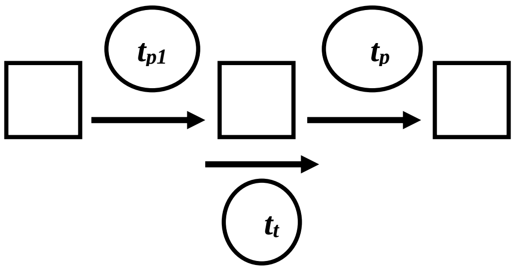


Ejemplos:

- Jaime tiene 9 panes. Tiene 4 más que Jorge. ¿Cuántos panes tiene Jorge?
- Jaime tiene 5 panes. Jorge tiene cuatro más. ¿Cuántos panes tiene Jaime?

Tipo 4: Transformación – Transformación – Transformación (TTT)

Es una situación parte-todo en la que el objeto sufre dos transformaciones. La primera t_{p1} y después una segunda t_{p2}; la cantidad t_t representa la transformación total. La situación se representa mediante el diagrama:

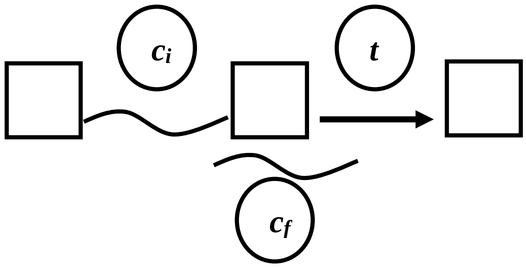


Ejemplos:

- Lalo pierde 4 canicas por la mañana. Gana 7 por la tarde. ¿Cuántas ha ganado o perdido en total?
- De propina a Rita su papá le da S/. 6 y su mamá S/. 5. ¿Cuánto dinero recibió en total?

Tipo 5: Comparación – Transformación – Comparación (CTC)

En esta situación c_i es una comparación inicial entre dos cantidades. Una de ellas sufre una transformación t y, finalmente, c_f representa la comparación entre las cantidades finales. La situación se representa mediante el diagrama:

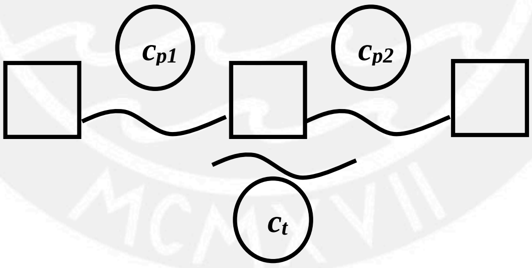


Ejemplos:

- Javier tiene 5 canicas más que Jaime. A Jaime le dan algunas más y ahora tiene dos canicas más que Javier. ¿Cuántas canicas le han dado a Jaime?
- Javier tiene 7 canicas menos que Jaime. A Jaime le dan tres. ¿Quién tiene ahora menos canicas? ¿Cuánto menos?

Tipo 6: Comparación – Comparación – Comparación (CCC)

Situación parte-todo en la que c_{p1} expresa la comparación entre una primera y una segunda cantidad, c_{p2} indica la comparación entre la segunda y una tercera cantidad y c_t establece la comparación entre la primera y la tercera cantidad. La situación se representa mediante el diagrama



Ejemplos:

- Lola tiene 6 años más que Rita. Rita tiene 5 más que Diana. ¿Quién tiene más, Lola o Rita? ¿Cuántos más?
- Pedro tiene 8 caramelos más que María. María tiene 5 menos que Juan. ¿Quién tiene más, Pedro o Juan? ¿Cuántos más?

En cada uno de los seis tipos de situaciones encontramos dos datos conocidos y uno desconocido (incógnita) que será deducido a partir de los datos conocidos, Dependiendo de la ubicación de la incógnita el problema será resuelto a partir de una suma o una resta.

Los problemas verbales son los escenarios de indagación sobre el significado, los procedimientos de solución y la representación de los diferentes tipos de problemas aditivos.

2.1.4.2 Desarrollo cognitivo y progresión del aprendizaje

Los autores nos dicen que para sumar y restar números naturales hay que basarse en: ***hechos numéricos básicos*** (tablas de sumar y restar); ***técnicas de cálculo***, orales y escritas; propiedades de las operaciones y en situaciones donde utilizarlas o aplicarlas de manera pertinente. Describiremos las variables de una situación aditiva, procedimientos, estructura lógica, contextualización y tamaño de los datos para elaborar la configuración epistémica.

El tránsito del conteo al uso de tablas de sumar o restar es un proceso paulatino con etapas intermedias que en el caso de la suma, la detallan:

- ***Recuento de todos***. *Se* representa los objetos de las dos colecciones mediante dedos, palotes, fichas u objetos diversos, las reúne y cuenta todo.
- ***Recuento de todos haciendo énfasis en el primer sumando***. El niño recita los números del primer sumando, luego sigue contando los objetos del segundo sumando.
- ***Recuento de todos haciendo énfasis en el sumando mayor***. *Como* en el caso anterior, pero eligiendo como primer sumando el sumando mayor.
- ***Recuento a partir del sumando mayor***. El niño construye una colección de objetos que representa el sumando menor y cuenta a partir del sumando mayor. (Cid et al, 2004b, p, 192)

Para la sustracción los procedimientos son diferentes de los de la adición y están en función de la situación propuesta y que pueden darse simultáneamente.

- *Recuento de lo que queda.* Se utiliza en situaciones de ETE (estado, transformación, estado) en las que al conjunto inicial se le quitan elementos. Consiste en representar mediante objetos el conjunto inicial, quitar los elementos que indica la transformación y volver a contar lo que queda.
- *Recuento hacia atrás.* Se utiliza en las mismas situaciones que el caso anterior y consiste en contar hacia atrás desde el minuendo tantas veces como indica el sustraendo (representado mediante una colección de objetos, frecuentemente dedos). Esta técnica se utiliza poco por la dificultad que supone para los niños contar hacia atrás.
- *Recuento de la diferencia.* En las situaciones de ECE (estado, comparación, estado) en las que la incógnita es el término de comparación, se construyen los dos conjuntos, se emparejan y se cuentan los objetos que quedan sin pareja.
- *Recuento desde el sustraendo hasta el minuendo.* Se usa en las mismas situaciones que el caso anterior y consiste en contar desde el sustraendo hasta el minuendo llevando la cuenta con una colección de objetos (generalmente dedos) de las palabras que se dicen. Posteriormente, se cuenta la colección de objetos. (Cid et al, 2004b, p, 192)

Los autores consideran que el desarrollo de la comprensión de las situaciones aditivas es consecuencia de tres variables: estructura lógica de la situación, grado de contextualización de la situación y el tamaño de los datos.

"*Con respecto a la estructura lógica de la situación*

Se observa que las dificultades de los niños a la hora de afrontar una situación aditiva dependen en gran medida de la estructura lógica de la situación y de la posición de la incógnita. Una gradación de menor a mayor dificultad podría ser la siguiente:

- EEE (con la incógnita en el estado final o en uno de los parciales) y ETE (con la incógnita en el estado final o la transformación).
- ECE (con la incógnita en la transformación o en el primer término de la comparación).
- ETE (con la incógnita en el estado inicial y ECE (con la incógnita en el segundo término de la comparación).
- TTT (cuando las tres transformaciones tienen el mismo sentido).
- TTT (cuando las transformaciones tienen diferente sentido)
- CTC y CCC.

Con respecto al grado de contextualización de la situación

Se observa que los niños entienden mejor las situaciones aditivas cuanto más contextualizadas están. La clasificación de las situaciones en función de un mayor a menor grado de comprensión de las mismas y, por consiguiente, de una mayor a menor capacidad de resolver con éxito…:

- Situación que se refiere a materiales presentes en el aula y con el niño como actor.
- Situación hipotética contextualizada, con material a disposición del niño para que pueda efectuar una representación simbólica.
- Situación hipotética contextualizada, sin material a disposición del niño. En una primera fase el niño recurre a los dedos o al dibujo de palotes para efectuar los recuentos necesarios. En una segunda fase recurre a técnicas de cálculo orales o escritas.
- Situación formal, es decir, situación en la que se pregunta sin más por el resultado de una suma o resta sin referirlo a ningún contexto físico o social.

Los tres primeros tipos de situaciones se engloban en la categoría de situaciones concretas -situaciones con un mayor o menor grado de contextualización-, en oposición a las situaciones formales o no contextualizadas.

Con respecto al tamaño de los datos

A los niños les resulta más difícil interpretar correctamente una situación aditiva cuanto mayor es el tamaño de los números que intervienen en ella. Se han realizado experiencias en las que se ha pedido a grupos de niños que resuelvan la misma situación, una vez con números pequeños y otra con números grandes, observándose que el porcentaje de resoluciones correctas disminuye sensiblemente en el segundo caso." (Cid et al, 2004b, pp, 193-194).

2.1.4.3 Situaciones y recursos

Los autores nos dicen que las situaciones aditivas concretas deben ir en paralelo con las situaciones aditivas formales; las primeras dan sentido y significado a las operaciones y las segundas consolidan la memorización de las técnicas orales y escritas. Las situaciones concretas permiten que el niño resuelva de manera autónoma (decidir qué operación utilizar) y pueda representarla con materiales manipulativos y las situaciones formales permiten aprender algoritmos y técnicas mentales que son útiles cuando el tamaño de los números aumentan.

Una posible forma de hacerlo sería:

- Comenzar trabajando las situaciones concretas de EEE, ETE, y ECE en el tramo numérico de 0 a 20, con materiales presentes en el aula y con el niño como actor. Además, familiarizarse con los materiales estructurados y trabajar, mediante situaciones formales, la memorización de las operaciones que caben en una mano, dobles de una cifra (5 + 5, 6 + 6, etc.) y los complementos a 10 (3 + 7, 6 + 4, etc.).
- Seguir con las situaciones concretas en el tramo 0 a 50, con casos en los que no haya posibilidad de recontar los dos términos para forzar la evolución de las técnicas de recuento y con presentación de situaciones hipotéticas contextualizadas referentes a números entre 0 y 20. A nivel formal continuar la consolidación de la tabla de sumar y restar y operaciones con términos y resultado menor que 20.
- Introducir material estructurado en situaciones concretas con términos entre 0 y 100. Las situaciones hipotéticas contextualizadas con material a disposición del niño se trabajan entre 0 y 50. Trabajar situaciones hipotéticas contextualizadas sin material entre 0 y 20, tratando que, en ese caso, los niños empiecen a expresar las soluciones en términos de sumas o restas. En la vía de operaciones formales se continúa con las sumas y restas de términos menores o iguales que 100 en forma oral.
- Introducir tramos cada vez más altos de la sucesión numérica, siguiendo pautas similares a items anteriores e introduciendo las técnicas escritas de cálculo.” (Cid et al, 2004b, pp, 196-197).

“Las variables didácticas de las situaciones aditivas concretas son las siguientes:

- *Significado de los números:* Cardinal, ordinal o medida.
- *Tamaño de los términos y resultado de la operación:* De 0 a 10, de 10 a 20, de 20 a 50, de 50 a 100, de 100 a 1 000, de 1 000 a 10 000, de 10 000 a 100 000, de 100 000 a 1 000 000, más de 1 000 000.
- *Estructura lógica de la situación:* Situaciones aditivas del tipo EEE, ETE, ECE, TTT, CTC o CCC.
- *Posición de la incógnita:* En el primer término, el término inicial o uno de los términos parciales; en el término medio de transformación o comparación; en el segundo término, el término final o el término total.
- *Sentido del término medio* (*sólo en las situaciones ETE, ECE* o *CTC*): creciente o decreciente; positivo o negativo.
- *Posibilidad de recuento de los términos:* posibilidad de recuento de los dos términos o de uno solo.
- *Grado de contextualización de la situación:* Situación con materiales presentes en el aula y el niño como actor; situación hipotética contextualizada con material para que pueda efectuar una representación simbólica; situación hipotética contextualizada sin material a disposición del niño.
- *Tipo de material utilizado:* Estructurado o no estructurado
- *Número de datos:* Dos, tres o más.” (Cid et al, 2004b, pp, 193-194)

“Las variables didácticas de las situaciones son las siguientes:

- Tipo de operación: Suma o resta.
- Dirección de la operación: directa (12 + 5 = ? , 15 - 11 = ?), inversa (? + 5 = 12, 15 - ? = 9), o descomposición (12 = 5 + ?, 11 = 15 - ?).
- Tamaño de los términos y del resultado de la operación:

- Operaciones que caben en una mano: 2 + 3, 5 – 1, etc.; que caben en las dos manos: 4 + 4,8 – 2, etc.
- Operaciones de la tabla de sumar o restar: 8 + 7, 11 – 6, etc.
- Operaciones con términos y resultado menor o igual que; con términos y resultado menor que 100; con términos y resultado menor o igual que 1000; con términos mayores que 1000.

• Número de cifras de los términos: Los dos términos de la operación tienen el mismo o distinto número de cifras.

• Número de cifras significativas concurrentes:

- Términos de cifras significativas no concurrentes: 40+5, 130-8, 200-45, 307+20, 4.000+324, etc.
- Términos con una cifra significativa concurrente: 60+30, 42-6, 343+20, 208-4, 7.000+5.000, etc.
- Términos con dos cifras significativas concurrentes: 82-24, 66+31, 128+32, 435-420, 7.282-11, etc.
- Términos con tres o más cifras significativas concurrentes: 347 + 482, 526 – 419, 11297 – 4762, etc.

• Existencia de llevadas: La operación implica o no llevadas.”

• Técnica de cálculo: Uso de material estructurado, técnica oral, técnica escrita, calculadora.

• Tipo de material estructurado: Dedos, regletas con tapa, regletas Cuisenaire, ábaco, etc.

Resumen

Tipo 1: E-E-E

ESTADO–ESTADO–ESTADO					
	e_{p1}	e_{p2}	e_t	***Crece***	***Decrece***
Caso 1	Dato	Dato	Incógnita	*	
Caso 2	Dato	Incógnita	Dato		*
Caso 3	Incógnita	dato	Dato		*

Tipo 2: E-T-E

ESTADO–TRANSFORMACIÓN–ESTADO					
	e_i	t	e_f	***Crece***	***Decrece***
Caso 1	Dato	Dato	Incógnita	*	
Caso 2	Dato	Dato	Incógnita		*
Caso 3	Dato	Incógnita	Dato	*	
Caso 4	Dato	Incógnita	Dato		*
Caso 5	Incógnita	Dato	Dato	*	
Caso 6	Incógnita	Dato	Dato		*

Tipo 3: E-C-E

ESTADO–COMPARACIÓN–ESTADO					
	e_1	***c***	***e_2***	***Mas que***	***Menos que***
Caso 1	Dato	Dato	Incógnita		*
Caso 2	Dato	Dato	Incógnita	*	
Caso 3	Dato	Incógnita	Dato		*
Caso 4	Dato	Incógnita	Dato	*	
Caso 5	Incógnita	Dato	Dato		*
Caso 6	Incógnita	Dato	Dato	*	

Tipo 4: T-T-T

TRANSFORMACIÓN–TRANSFORMACIÓN–TRANSFORMACIÓN					
	t_{p1}	***t_{p2}***	***t_t***	***Crece***	***Decrece***
Caso 1	Dato	Dato	Incógnita	*	
Caso 2	Dato	Dato	Incógnita		*
Caso 3	Dato	Incógnita	Dato	*	
Caso 4	Dato	Incógnita	Dato		*
Caso 5	Incógnita	Dato	Dato	*	
Caso 6	Incógnita	Dato	Dato		*

Tipo 5: C-T-C

COMPARACIÓN–TRANSFORMACIÓN–COMPARACIÓN					
	c_i	***t***	***c_f***	***Crece***	***Decrece***
Caso 1	Dato	Dato	Incógnita	*	
Caso 2	Dato	Dato	Incógnita		*
Caso 3	Dato	Incógnita	Dato	*	
Caso 4	Dato	Incógnita	Dato		*
Caso 5	Incógnita	Dato	Dato	*	
Caso 6	Incógnita	Dato	Dato		*

Tipo 6: C-C-C

COMPARACIÓN–COMPARACIÓN–COMPARACIÓN					
	c_{p1}	***c_{p2}***	***c_f***	***Mas que***	***Menos que***
Caso 1	Dato	Dato	Incógnita	*	
Caso 2	Dato	Dato	Incógnita		*
Caso 3	Dato	Incógnita	Dato	*	
Caso 4	Dato	Incógnita	Dato		*
Caso 5	Incógnita	dato	Dato	*	
Caso 6	Incógnita	dato	Dato		*

Hay situaciones, si los números son: cardinal, ordinal o medida. Hay 99 tipos diferentes.

Lo que sigue es una configuración didáctica que hemos elaborado con herramientas del EOS.

2.1.4.4 Configuración epistémica

LENGUAJE

Verbal

- ***Número***: cardinal, ordinal, medida, c***ombinación***: *estados*, parte todo, ***transformación***: estado inicial, estado final, primera transformación, segunda transformación, transformación total, sentido de la transformación, ***comparación***: comparación inicial, comparación final, ***término***: inicial, medio, final, adición, suma, sumando, reunir, conjunto, cardinal (A), cardinal de (A ∪ B), diagramas de Venn, ***recuento***: *de todos, de todos haciendo énfasis en el primer sumando, de todos haciendo énfasis en el sumando mayor, a partir del sumando mayor, de lo que queda, hacia atrás, recuento de la diferencia, desde el sustraendo hasta el minuendo,* tamaño de los datos.

Gráfico

- Diagramas de Venn, dibujos, recta numérica.

Simbólico

- +; –; 5 + 3 = 8; ? + 3 = 8; 5 + ? = 8; $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$; Card. (A ∪ B) = Card. A + Card. B; si, A ∩ B = Φ.

SITUACIONES

- *Concretas* o *formales*, cuyos números son: cardinales, ordinales o medidas.
- De combinación: *estado–estado–estado*, en lo que se solicita: parte 1, parte 2 o el total y cuyos números son: cardinales, ordinales o medidas.
- De transformación: *estado – transformación – estado*, en los que se solicita el estado inicial, la transformación o el estado final.
- De comparación: *estado – comparación – estado*, en los que se solicita estado primero, diferencia de estados, estado segundo.
- De transformación de comparaciones: *comparación – transformación – comparación*, en los que se solicita el comparación inicial, la transformación o la comparación final.
- De doble transformación: *transformación – transformación – transformación*, en los que se solicita la primera transformación, la segunda transformación o la transformación total.
- De doble comparación: *comparación – comparación – comparación*, en los que se solicita la primera, segunda o tercera comparación.

CONCEPTOS

Previos

- Suma, reunir, juntar, añadir, aumentar, incrementar, sistema de numeración decimal.

Emergentes

- Situación aditiva simple, adición, sumando, conjunto, diagramas de Venn, cardinal, cardinal de (A ∪ B), contar a partir del primer sumando, doble de un número, doble más uno, doble más 2, 10 menos 1, 10 menos 2, determinar la totalidad, propiedad asociativa, propiedad conmutativa.

PROPIEDADES

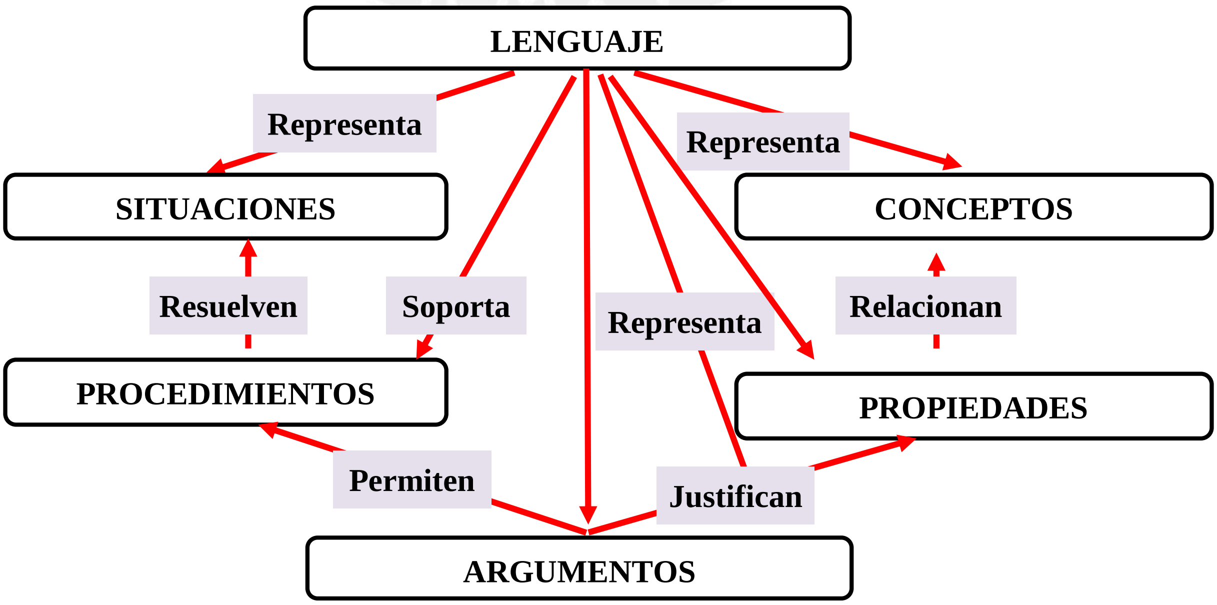
- El significado de un número natural en una situación aditiva es cardinal, ordinal o medida.
- El papel de los números en la situación: puede ser estado, transformación o comparación.
- Toda situación aditiva simple es concreta o formal.
- La incógnita en una situación aditiva puede ser el total o una de sus partes, o bien, el término inicial, medio o final.
- Las situaciones aditivas simples son de 6 tipos: ***estado–estado–estado***, ***estado – transformación – estado***, ***estado – comparación – estado***, ***comparación – transformación – comparación***, ***transformación – transformación – transformación*** y ***comparación – comparación – comparación***.

PROCEDIMIENTOS

- ***Recuento***: *de todos; de todos haciendo énfasis en el primer sumando; de todos haciendo énfasis en el sumando mayor.*
- ***Recuento*** *a partir del sumando mayor, de lo que queda*
- ***Recuento*** *hacia atrás, de la diferencia, desde el sustraendo hasta el minuendo.*
- ***Técnicas orales*** *(o mentales) de suma y resta.*
- ***Algoritmos***: extendido de la suma, de la suma con llevadas,

ARGUMENTOS

- Comprobación de los procedimientos con materiales manipulativos.
- Aplicación de propiedades del sistema de numeración escrito.
- Aplicación de propiedades de la adición: conmutativa, asociativa, del cero.
- Aplicación de propiedades de la sustracción: restar una suma es lo mismo que restar cada uno de los sumandos, etc.



SIGNIFICADO DE LOS NUMEROS	PAPEL DE LOS NUMEROS					
	EEE	ETE	ECE	TTT	CTC	CCC
Cardinal	$a+b=?$	$a+b=?$	$a+b=?$	$a+b=?$	$a+b=?$	$a+b=?$
	$a+?=c$	$a+?=c$	$a+?=c$	$a+?=c$	$a+?=c$	$a+?=c$
	$¿+b=c$	$¿+b=c$	$¿+b=c$	$¿+b=c$	$¿+b=c$	$¿+b=c$
Ordinal						
Medida	$a+b=?$	$a+b=?$	$a+b=?$	$a+b=?$	$a+b=?$	$a+b=?$
	$a+?=c$	$a+?=c$	$a+?=c$	$a+?=c$	$a+?=c$	$a+?=c$
	$¿+b=c$	$¿+b=c$	$¿+b=c$	$¿+b=c$	$¿+b=c$	$¿+b=c$

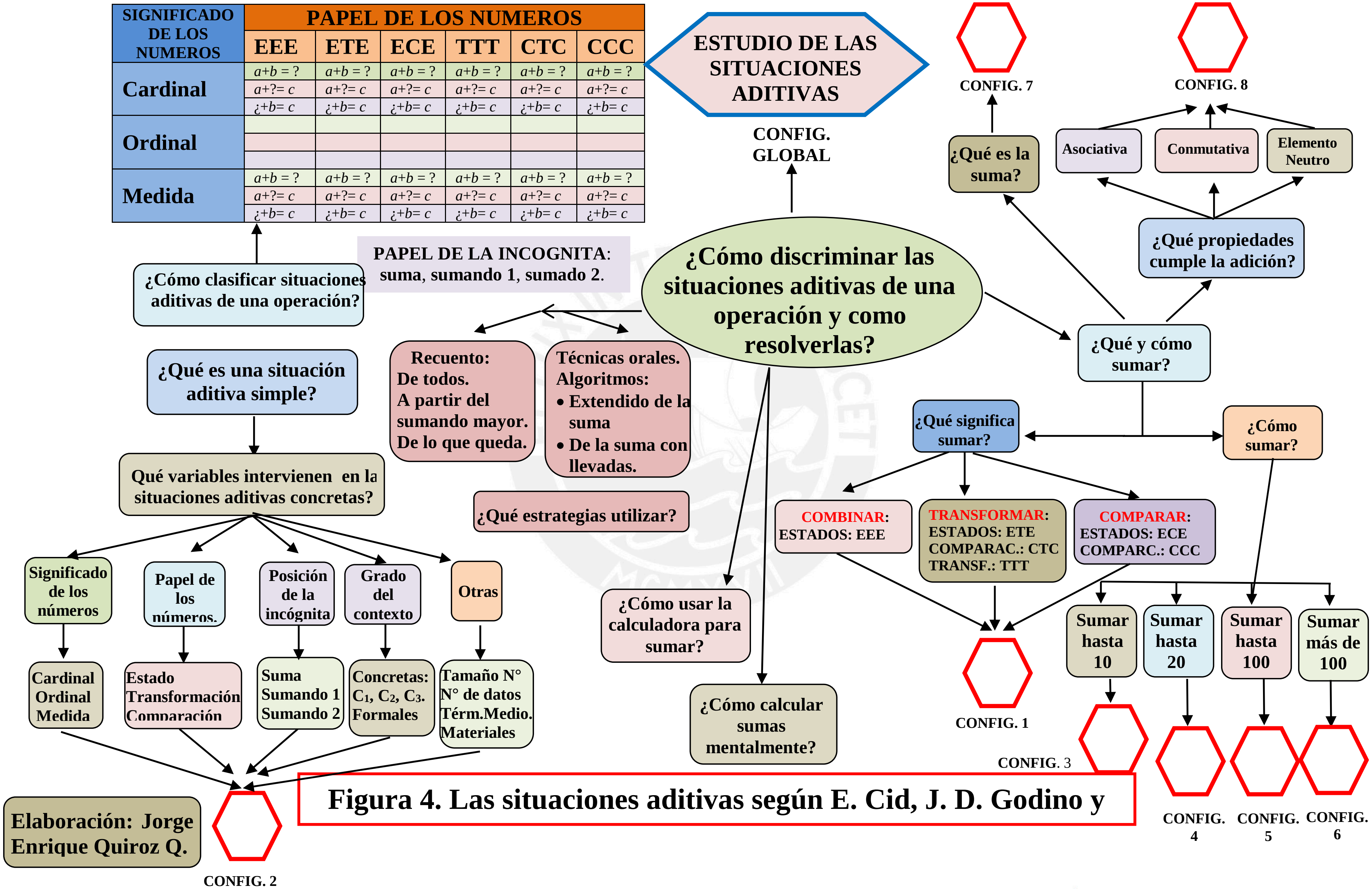


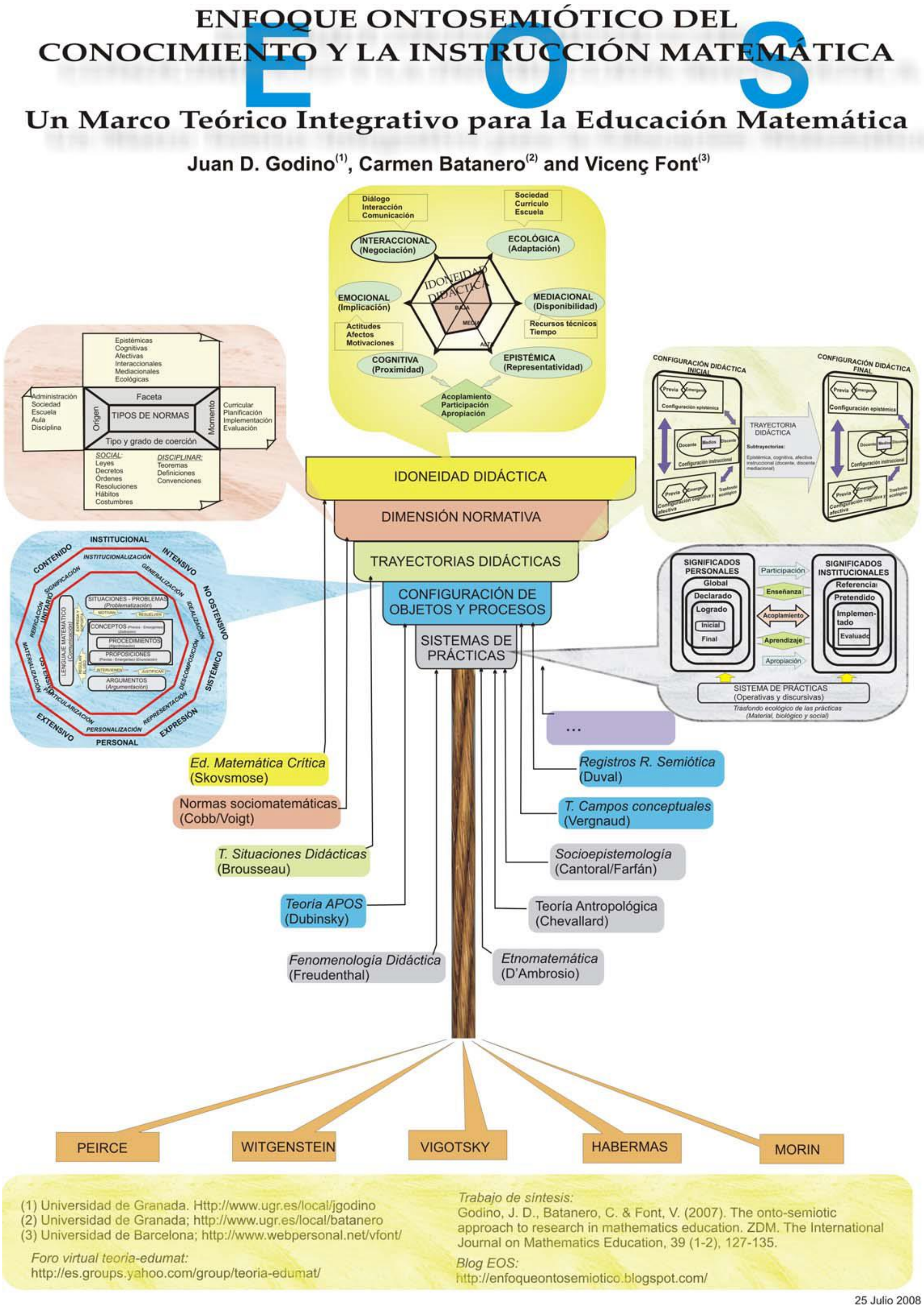
Figura 4. Las situaciones aditivas según E. Cid, J. D. Godino y

2.2 MARCO TEÓRICO

2.2.1 EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Godino, Batanero y Font. (2008) nos dicen:

> “El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un marco teórico que trata de integrar diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas, y adoptando principios didácticos de tipo socioconstructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje.
>
> El EOS fue iniciado por el grupo de investigación Teoría de la Educación Matemática de la Universidad de Granada a principios de los años 90 siendo en la actualidad desarrollado y aplicado por otros grupos de investigación españoles y latinoamericanos. El conjunto de nociones teóricas que actualmente componen el EOS se clasifican en cinco grupos cada uno de los cuales permite un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas:
>
> (1) Noción de *sistema de prácticas* (operativas y discursivas), que asume una concepción pragmatista – antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). La actividad de resolución de problemas se adopta como elemento central en la construcción del conocimiento matemático.
>
> (2) Noción de *configuración de objetos y procesos* matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas. La adopción de una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado (contenido de funciones semióticas) articula de manera coherente la concepción antropológica (Wittgenstein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos.
>
> (3) Noción de *configuración didáctica*, como sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación – problema, constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática. Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático.
>
> (4) La noción de *dimensión normativa*, sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, generaliza la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas. El reconocimiento del efecto de las normas y meta-normas que intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático es el principal factor explicativo de los fenómenos didácticos.
>
> (5) La noción de *idoneidad didáctica*, como criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático. El sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.
>
> El Enfoque Ontosemiótico permite articular de manera coherente diversos modelos teóricos usados habitualmente en Educación Matemática (fenomenología didáctica, etnomatemática, teoría antropológica, teoría de situaciones, campos conceptuales, registros de semiótica, socioepistemología, etc.)” (p. 1)



2.2.2 POSTER DEL EOS (Godino, Batanero y Font)

2.2.3 HERRAMIENTAS TEÓRICAS DEL EOS

2.2.3.1 Supuestos básicos del EOS

Se relacionan principalmente con la antropología, la ontología y la semiótica, los cuales se articulan de manera coherente con supuestos socioculturales y psicológicos.

2.2.3.2 Las matemáticas

Constituye una actividad intencionalmente orientada a la solución de cierta clase de situaciones-problemas, realizada en el seno de instituciones o comunidades de prácticas; dicha actividad está mediatizada de un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomático y deductivamente organizado y apoyado por recursos lingüísticos (en sus diversas modalidades), que tiene una función no sólo representacional sino también instrumental.

Equivale a decir que la matemática es:

- Una actividad de resolución de problemas, socialmente compartida,
- Un lenguaje simbólico, y
- Un sistema conceptual lógicamente organizado.

Para hacer patente y operativo el triple carácter de la matemática el EOS toma como *concepto primitivo* el término de ***situación–problemática***.

2.2.3.3 Sistemas de prácticas

El quehacer matemático realizado por individuos pertenecientes a comunidades o instituciones es un proceso complejo y es influido por muchos factores. Para describir e interpretar la cognición matemática el EOS a través de Godino y Batanero, 1994, entre otras nociones, propone: "Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas." (p. 8)

La actividad matemática puede corresponder a un solo individuo o ser compartidas con otros en una institución o comunidad. Cuando la práctica corresponde a un solo individuo se denomina *práctica personal*, en cambio cuando es compartida con otros se llama *práctica institucional*.

Como quiera que la actividad de resolución de problemas no es un proceso lineal, sino que en él se dan intentos fallidos, actuaciones de ensayo y error y procedimientos fallidos que luego son abandonados, el EOS introduce las nociones de:

> *Práctica matemática significativa: "*Diremos que una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas." (Godino y Batanero, 1994, p. 9).
>
> "Sistemas de prácticas Personales asociadas a un campo de problemas: Está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Representamos este sistema por la notación $P_p(C)$". (Godino y Batanero, 1994, p. 12).

Los miembros de un grupo que comparten actividades matemáticas forman una institución.

Institución: "Una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. (Godino y Batanero, 1994, p. 9).

Sistemas de prácticas Institucionales: Está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I. Su carácter social indica que son observables. (Godino y Batanero, 1994, p. 10).

2.2.3.4 Objetos y procesos

A los productos de la actividad matemática y de los procesos de comunicación el EOS les denomina objetos o entidades matemáticas. "Objetos matemáticos no son solo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática." (Godino y Font, 2007a, p. 2).

> "'Objeto matemático' es una metáfora que consiste en trasladar una de las características de las cosas físicas (la posibilidad de separación de otras 'cosas') a las matemáticas. Por tanto, de entrada, todo lo que se pueda 'individualizar' en matemáticas será considerado como objeto (un concepto, una propiedad, una representación, un procedimiento, etc.). (Godino y Font, 2007a, p. 2).

"Objeto personal O_P: Es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de P_pC." (Godino y Batanero, 1994, p. 12).

Objeto Institucional O_I: Es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de P_iC. Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos O_I. (Godino y Batanero, 1994, p. 11).

La didáctica de la Matemática al estudiar los procesos de instrucción (enseñanza - aprendizaje) se interesa por determinar el significado que los estudiantes atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como a la construcción de estos significados. Godino y Batanero para explicar que el *significado* está relacionado con la *comprensión* cita, entre otros, a Sierpinska (Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, p. 24-36):

> «Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la «estructura» del concepto (la «estructura» es la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión» (p. 27). «La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos» (p. 35). (Godino y Batanero, 1994, p. 22).

Para el EOS

> "… los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realicen determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de los «objetos matemáticos» y que el «significado» de estos objetos esté íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática." (Godino, 2010b, p. 8).

Describir e interpretar el significado de los objetos está estrechamente relacionado con el problema de las representaciones externas e internas de dichos objetos. Hay el *triángulo básico* de Ogden y Richards que describe la relación de significación.

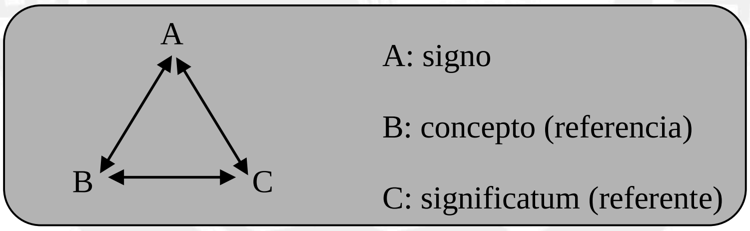


Figura 5. Triángulo de Ogden y Richards.

Para Kutschera el significado de los términos o expresiones puede explicarse siguiendo las teorías *realistas o figurativas* que conciben al significado a través de una relación convencional entre *signos* y *entidades concretas o ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos* Según estas teorías el significado no se rige por su uso en situaciones concretas, sino que el uso se rige por el significado, y existe una relación homeomórfica entre B y C pues se considera a la mente como un espejo que refleja los objetos del mundo exterior.

> Las teorías *operacionales* o *pragmáticas* consideran que el significado depende del contexto de uso. "Para una gran clase de casos de utilización de la palabra «significado» — aunque no para todos los casos de su utilización — puede explicarse esta palabra así: El significado de una palabra es su uso en el lenguaje. (Wittgenstein, 1999, p. 23).

Las teorías realistas suponen un realismo conceptual, mientras que para la pragmática no existe siempre una realidad en sí que sea reflejada por el lenguaje.

La importancia de definir el significado en términos contextuales, es decir, puramente empíricos nos lleva a indagar los usos típicos de los términos y expresiones en diferentes contextos y que nos permita llegar a una concepción referencial del significado.

El enfoque ontosemiótico propone las nociones: "*significado de un objeto personal*" y "*significado de un objeto institucional*", las que se identifican con los sistemas de prácticas personales o institucionales, respectivamente.

> "Significado de un objeto personal: Es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_P en un momento dado. Depende, por tanto, del sujeto y del tiempo estocásticamente.
>
> *Simbólicamente*, $S(O_p) = P_p(C)$*."* (Godino y Batanero, 1994, p. 13).

Una parte del significado es observable, a diferencia de las acciones interiorizadas.

> "Significado de un objeto institucional O_I para un sujeto p desde el punto de vista de la institución: Es el subsistema de prácticas institucionales asociadas a un campo de problemas que son consideradas en I como adecuadas y características para resolver dichos problemas.
>
> $S(O_I) \cap S(O_p)$". (Godino y Batanero, 1994, p. 13).

2.2.3.5 Tipos de significados institucionales

Para el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática el significado institucional de un objeto matemático lo constituye el sistema de prácticas operativas y discursivas que dicha institución utiliza al resolver problemas o comunica la solución sobre dicho objeto: El EOS distingue cuatro tipos de ***significado institucional***: ***de referencia***, ***pretendido***, ***implementado*** y ***evaluado***.

Significado de referencia de un objeto matemático

Significado elaborado por una institución, a partir de lo que las instituciones matemáticas y didácticas dicen sobre dicho objeto. Su construcción se basa en lo que dicen los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, y en general por lo que *los expertos* consideran qué son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo de instrucción.

Significado institucional pretendido

Sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instructivo, a partir del significado de referencia. La institución selecciona, ordena, y delimita la parte específica que va proponer a sus estudiantes durante un proceso de estudio determinado. Para ello toma en cuenta el tiempo asignado a dicho proceso, los conocimientos previos de los estudiantes y los recursos materiales disponibles.

Significado institucional implementado

Sistema de prácticas efectivamente realizada en las clases de matemáticas sobre un objeto matemático planificado, la cual servirá de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes. Como consecuencia de la intervención del profesor y de los alumnos el significado institucional pretendido cambia de hecho, por lo que finalmente se implementa un sistema de prácticas que puede diferir respecto de las planificadas.

Significado institucional evaluado

Muestra representativa del sistema de prácticas operativas y discursivas del significado implementado que incluye las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes.

El concepto de *sumar* es un buen ejemplo para mostrar la diversidad de sistemas de prácticas y contextos de uso, progresivamente más amplios, en los cuales podemos mostrar la pluralidad de significados derivados de cada subsistema de prácticas. La reconstrucción del *significado de sumar* es un primer paso necesario para poder comprender los procesos de enseñanza efectivamente implementados y elaborar criterios para su mejora.

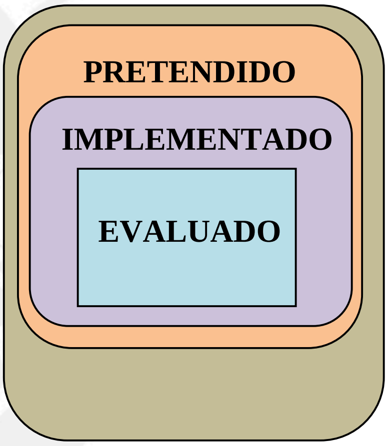


Figura 6. Significados institucionales

2.2.3.6 Conflicto semiótico, error, dificultad y obstáculo

Conflicto semiótico

> "Es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales.*"*
> Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009, *p. 13.*

Error

Para el EOS el *error* es una práctica realizada por un sujeto (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar.

Dificultad

> "El término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja" (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 69).

Obstáculo

> "A veces el error no se produce por una falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras en las cuales se aplica indebidamente. Decimos que existe un obstáculo." (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 70).

2.2.3.7 Instrucción matemática

La *instrucción* o *estudio dirigido* es el proceso de la enseñanza aprendizaje en clases. En un proceso de instrucción intervienen: el *contenido*, los *sujetos* que se apropian o construyen dicho contenido, el *profesor* y los *recursos didácticos* o recursos instruccionales.

Para el EOS el aprendizaje

> "es el resultado de la construcción personal del sujeto enfrentado a tareas problemáticas. Pero es preciso tener también en cuenta el papel de la interacción entre los propios alumnos y la de éstos con el profesor. Esta última es crucial para orientar e impulsar el aprendizaje, debido a que el conocimiento matemático tiene un componente discursivo (basado en reglas y argumentos) y no sólo un componente práctico (basado en problemas y acciones)." (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 65).

Cuando la instrucción matemática consigue los resultados deseados, el EOS la denomina *instrucción matemática significativa*, en ella un papel clave es la interacción social, la cooperación, el discurso y la comunicación.

2.2.3.8 TIPOS DE OBJETOS PRIMARIOS

Para un análisis más preciso del quehacer matemático el EOS considera seis tipos de objetos primarios: *lenguaje*, *situaciones*, *conceptos*, *propiedades*, *procedimientos* y *argumentos*.

- El *lenguaje* puede ser oral, escrito, gestual o gráfico y se refiere a los términos, expresiones, notaciones, gráficos.
- Las *situaciones* pueden ser problemas de contexto extra o intra matemático, ejercicios, es decir constituyen las tareas que caracterizan la actividad matemática.
- Los *conceptos* se dan mediante definiciones, reglas o descripciones (número real, potencia, punto, recta, segmento, evento, probabilidad, etc.).
- Las *propiedades* suelen darse como enunciados o proposiciones que describen atributos de los objetos. (Q es un conjunto denso. La recta real es completa).

- Los *procedimientos* pueden ser algoritmos, procedimientos heurísticos, técnicas de cálculo o acciones de los sujetos ante las situaciones que caracterizan la actividad matemática.
- Los *argumentos* son las justificaciones y sirven para probar, validar o explicar las proposiciones y procedimientos matemáticos.

2.2.3.9 CONFIGURACIONES DIDÁCTICAS

Los objetos primarios cuando se relacionan entre sí forman *configuraciones* y permiten describir los sistemas de prácticas. Una *configuración* se define como una red de dos o más objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Las configuraciones pueden ser cognitivas, si pertenecen a un individuo, o epistémicas, si son institucionales.

2.2.3.10 DIMENSIONES DE LOS OBJETOS

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan pueden ser considerados desde las siguientes dimensiones duales: *personal-institucional, elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo* y *extensivo-intensivo*.

- ***Personal-institucional***: si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran «*objetos institucionales*», mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como «*objetos personales*»
- ***Extensivo-intensivo***: expresa la relación *particular - general*. Si en un juego de lenguaje un objeto interviene como un caso particular participa en su dimensión extensiva, en cambio si el objeto es más general participa en su dimensión intensiva (Por ejemplo, la función $y = 2x + 1$ y una clase más general es la familia de funciones $y = mx + b$).
- ***Ostensivo-no ostensivo***. Los objetos institucionales y personales se pueden considerar como objetos no-ostensivos. Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, …). Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).

- ***Elemental-sistémico***: en algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio del área de una figura geométrica, la longitud de un segmento, se considera como algo conocido y en consecuencia como entidad elemental. Sin embargo, cuando se presenta la longitud de un segmento, al inicio de la medida, tienen que ser considerado de manera sistémica para su aprendizaje. De igual manera, área es objeto sistémico al inicio del estudio de las áreas de figuras geométricas, in embargo es elemental cuando estudiamos el volumen de un sólido geométrico.
- ***Expresión-contenido***: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica. La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestos en relación unos con otros. La distinción entre expresión y contenido nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

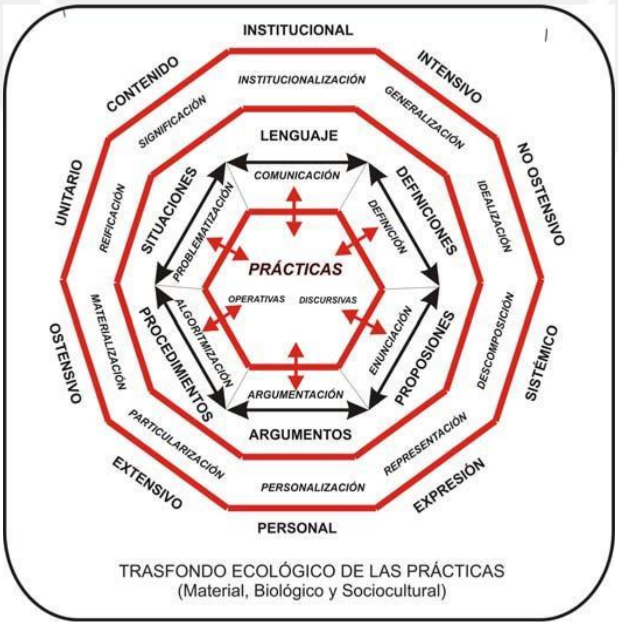


Figura 7. Objetos y procesos matemáticos. (Godino, y Font, 2007, p. 6).

En la figura 7 se representan las diferentes nociones teóricas descritas anteriormente.

2.2.3.9. RELACIONES ENTRE OBJETOS: FUNCIÓN SEMIÓTICA

Se adopta de Hjemslev (1943) la noción de función de signo (Descrita por Eco como función semiótica en Tratado de Semiótica General.) como la dependencia entre un texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Se trata, por tanto, de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante, representante) y un consecuente (contenido o significado, representado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

La relación de dependencia entre expresión y contenido puede ser:

- ***Representacional***: un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito.
- ***Instrumental u operatoria***: un objeto usa a otro u otros como instrumento.
- ***Estructural***: dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos.

De esta manera, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada, tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las matemáticas y generalizan de manera radical la noción de representación.

2.2.3.10. IDONEIDAD DIDÁCTICA

El EOS propone seis criterios para valorar la idoneidad de los procesos de instrucción.

- ***Idoneidad epistémica***, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.
- ***Idoneidad cognitiva***, expresa el grado en que los significados pretendidos o implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados institucionales (pretendidos o implementados).
- ***Idoneidad interaccional***, grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción mediante la negociación de significados.
- ***Idoneidad mediacional***, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

- ***Idoneidad emocional***, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.
- ***Idoneidad ecológica***, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

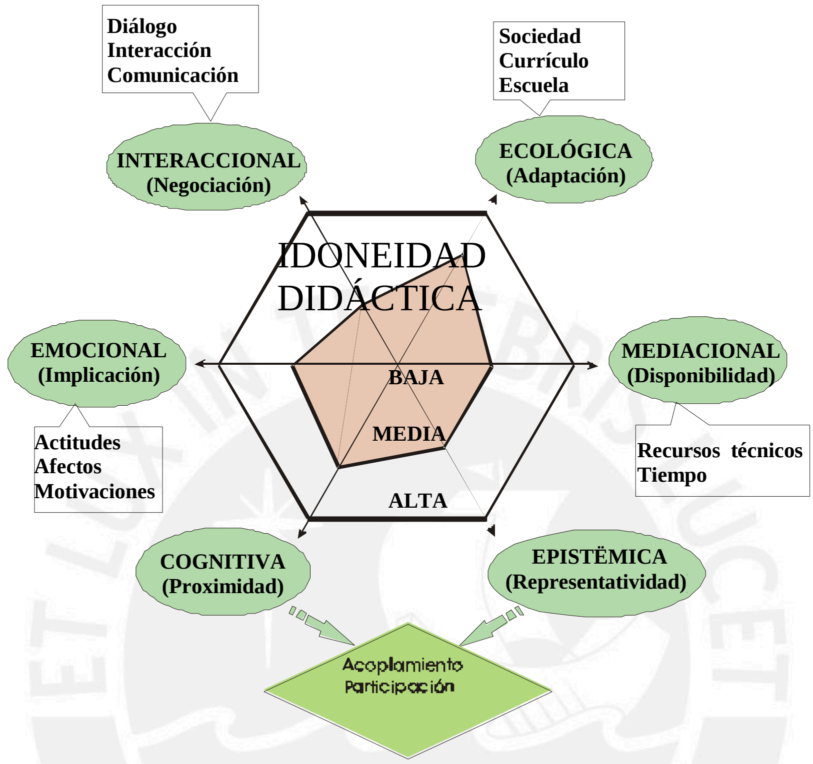


Figura 8. Componentes de la idoneidad didáctica
(Godino, Bencomo, Font, y Wilhelmi, 2007, p. 6).

La idoneidad didáctica supone la articulación coherente y armónica de las siguientes idoneidades parciales: *epistémica*, *cognitiva*, *mediacional*, *emocional*, *interaccional* y *ecológica*. Representamos mediante un hexágono regular la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido o programado, donde *a priori* se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono irregular interno correspondería a las idoneidades efectivamente logradas en la realización de un proceso de estudio implementado.

Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos/ implementados.

Situamos en la base las idoneidades epistémica y cognitiva al considerar que el proceso de estudio gira alrededor del desarrollo de unos conocimientos específicos. En el EOS, cuando se habla de conocimiento se incluye *comprensión* y *competencia*. La dimensión epistémica se refiere a los conocimientos institucionales (o sea, compartidos en el seno de instituciones o comunidades de prácticas) mientras que la dimensión cognitiva se refiere a los conocimientos personales (o del sujeto individual). El aprendizaje tiene lugar mediante la *participación* del sujeto en las comunidades de prácticas, el *acoplamiento* progresivo de los significados personales a los institucionales y la apropiación de los significados institucionales por los estudiantes.

En la figura 9 se indican los distintos tipos de significados institucionales y personales que se ponen en juego en el diseño, implementación y evaluación de procesos de instrucción matemática. Los significados aquí mencionados son interpretados como "los sistemas de prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego por una persona (o compartidas en el seno de una institución) para resolver una cierta clase de situaciones – problemas"

En la parte central de la figura 9 indicamos las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Así mismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados. Godino, et al 2007, p.6.

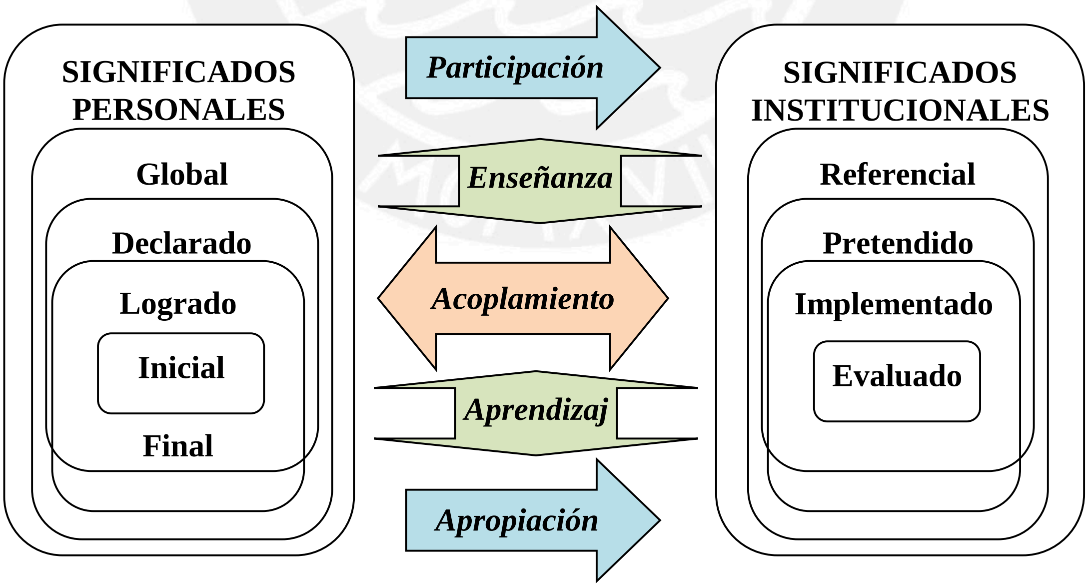


Figura 9. Tipos de significados institucionales y personales
(Godino, Bencomo, Font, y Wilhelmi, 2007, p. 7).

Capítulo 3

3 LAS SITUACIONES ADITIVAS EN EL SISTEMA CURRICULAR PERUANO

RESUMEN

En este capítulo describimos las intenciones y los significados de las situaciones aditivas en el sistema curricular peruano. En la sección 3,1 resumimos lo que plantea el Diseño Curricular Nacional, respecto a las situaciones aditivas en los seis grados de la educación peruana. En la sección 3.2 describimos lo que propone como significados de las situaciones aditivas para la educación primaria y en la sección 3.3 resumimos el enfoque de las Rutas del Aprendizaje como propuesta a los docentes para desarrollarla con los estudiantes peruanos y en las concepciones de los profesores en la sección 3.4. En este capítulo respondemos a la primera pregunta y al primer objetivo específico de investigación.

3.1 EN EL DISEÑO CURRICULAR NACIONAL

El DCN sobre la *adición de números naturales* propone:

PRIMER GRADO

CAPACIDADES	CONOCIMIENTOS
Interpreta y representa la adición de números y calcula su suma con resultado menor que 100. Calcula mentalmente la suma de dos números naturales cuyo resultado sea de hasta dos cifras. Resuelve problemas de adición de números naturales con resultados de hasta dos cifras.	Adición de números: juntar, agregar, avanzar. Adición de números con resultado de hasta dos cifras. Sustracción de números: separar, quitar, retroceder. Sustracción de números de hasta dos cifras, sin canjes. Operaciones combinadas de adición y sustracción. Equivalencias y canjes con monedas de: S/. 1,00, S/. 2,00 y S/. 5,00. Sistema monetario: equivalencias y canjes con monedas.

(MED, 2009, p. 190).

Las situaciones aditivas están referidas a las acciones de: *juntar*, *agregar*, *avanzar* y las de sustracción a las acciones de: *separar*, *quitar*, *retroceder*.

SEGUNDO GRADO

CAPACIDADES	CONOCIMIENTOS
Identifica e interpreta patrones aditivos con números naturales de hasta dos cifras. Interpreta las propiedades conmutativa y asociativa de la adición de números naturales. Calcula mentalmente la suma y la diferencia de dos números naturales de hasta dos cifras. Resuelve problemas de adición y sustracción con números naturales de hasta tres cifras.	Propiedades conmutativa y asociativa de la adición. Adición de números naturales de hasta tres cifras. Sustracción con números naturales de hasta tres cifras. Sumandos de un número de hasta tres cifras. Equivalencias y canjes con monedas y billetes en el sistema monetario nacional.

(MED, 2009, p. 193).

Se aborda las propiedades conmutativa y asociativa y se aumenta a 3 cifras los sumandos.

TERCER GRADO

CAPACIDADES	CONOCIMIENTOS
Resuelve problemas de adición y sustracción con números naturales de hasta cuatro cifras.	Adición y sustracción de números con resultados de hasta cuatro cifras.

(MED, 2009, p. 195).

Ahora, las sumas y restas deben tener resultados con números de cuatro cifras.

CUARTO GRADO

CAPACIDADES	CONOCIMIENTOS
Resuelve y formula problemas de estimación y calculo con operaciones combinadas de números naturales.	Operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales de hasta tres cifras.

(MED, 2009, p. 197).

Se abordan situaciones con operaciones combinadas con números de hasta tres cifras.

QUINTO GRADO

CAPACIDADES	CONOCIMIENTOS
Resuelve y formula problemas de estimación y cálculo con operaciones combinadas de números naturales y decimales.	Propiedades conmutativa, asociativa y distributiva en operaciones combinadas de adición y multiplicación.

(MED, 2009, p. 200).

Se aborda las propiedades: asociativa, conmutativa y distributiva de la adición y multiplicación.

SEXTO GRADO

CAPACIDADES	CONOCIMIENTOS
Resuelve y formula problemas que implican operaciones combinadas con números naturales, fracciones y decimales.	Operaciones combinadas con números naturales, fracciones y decimales.

(MED, 2009, p. 203).

3.2 EN LOS MAPAS DE PROGRESO DEL APRENDIZAJE

El MED en setiembre de 2013 a través del Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Educación Básica (IPEBA) publicó los Mapas de Progreso del Aprendizaje de matemática para la Educación Básica Regular. Este instrumento, junto con el Marco Curricular y las Rutas del Aprendizaje, componen el sistema curricular peruano.

El Marco curricular está constituido por el conjunto de aprendizajes fundamentales que todos los peruanos deben alcanzar en la educación básica. Los Mapas de Progreso tienen la finalidad de coadyuvar el mejoramiento de la calidad del servicio educativo de las instituciones públicas y privadas del país y cumple el papel de orientador y articulador de los currículos regionales. Los mapas, *describen con precisión lo que los estudiantes deben saber, saber hacer y valorar, de manera graduada en cada ciclo de la educación básica, y ofrecen criterios claros y comunes para monitorear y evaluar dichos aprendizajes*. Las Rutas del Aprendizaje apoyan la labor de los docentes y orientan sus estrategias específicas de enseñanza con el fin de favorecer el aprendizaje. (MED, 2013a, p.5).

Los mapas de progreso constituyen los estándares de aprendizaje nacionales. Los estándares con metas claras de aprendizaje que se espera que logren los estudiantes del país a lo largo de su escolaridad básica. Son herramientas que deben contribuir a lograr la calidad y equidad en el sistema educativo peruano. Los estándares describen el progreso de las competencias ciclo a ciclo. La formulación se ha hecho como mapas de progreso del aprendizaje. (MED, 2013a, p.6)

Las situaciones aditivas prescritas en los mapas de progreso están como sigue.

Previo	… Resuelve, situaciones problemáticas de contextos cotidianos referidas a acciones de agregar y quitar[1] objetos de una misma clase, explicando que hizo para encontrar su respuesta.
III Ciclo (1° y 2° de P.)	… Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de juntar, separar, agregar, quitar, igualar o comparar cantidades[2]…
IV Ciclo (3° y 4° de P.)	… Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de agregar, quitar, igualar o comparar dos cantidades[3],…
V Ciclo (5° y 6° de P.)	… Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de comparar e igualar dos cantidades[4],…

[1] *Según la clasificación de los PAEV: Cambio 1 y 2.*
[2] *Segun la clasificacion de los PAEV: Cambio 3 y 4 , Combinacion 2 y Comparacion e Igualacion 1 y 2.*
[3] *Segun la clasificacion de los PAEV: Cambio 5 y 6, Comparacion e Igualacion 3 y 4.*
[4] *Segun la clasificacion de los PAEV: Comparacion e Igualacion 3 y 4.*

(MED, 2013a, p.9)

En lo que sigue mostraremos los diferentes tipos de situaciones aditivas propuestas en los Mapas de Progreso del Aprendizaje, Matemática: Números y Operaciones.

3.2.1 PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA

Son situaciones problemáticas que se pueden resolver con la adición o la sustracción. Con base en lo que propone Carlos Maza, los Mapas de Progreso nos dicen que hay una variedad de problemas aditivos que ayudan a conectar la adición y la sustracción y su recomendación es utilizar situaciones de *combinación*, *cambio*, *comparación* e *igualación*. Analicemos:

"**Situaciones de combinación**: Situaciones en las que los datos son las cantidades parciales o la cantidad total" (MED, 2013a, p. 37). Esta descripción es válida para toda situación aditiva simple de: *combinación*, *transformación*, *comparación*, *doble transformación*, *transformación de una comparación* y *doble comparación*. Pero, solo es válida para situaciones donde intervienen 3 cantidades (cardinales o medida), pero no para números ordinales. No nos dice ¿cómo se relacionan los números en una situación aditiva de combinación? No describe la relación estática de parte – todo. En esta relación estática el todo o total se descompone en dos partes. Esto, no se pone de manifiesto.

CASO	Ejemplos	PARTE	PARTE	TODO
Combinación 1	Juan tiene 3 globos verdes y 8 azules. ¿Cuántos globos tiene Juan?	3	8	desconocido
Combinación 2	Rosa tiene 6 naranjas y algunas manzanas. Entre naranjas y manzana, tiene 12 frutas. ¿Cuántas manzanas tiene Rosa?	6	desconocido	12

"**Cambio o transformación**: Situaciones en las que hay un aumento o disminución de una cantidad en una secuencia de tiempo. La incógnita puede estar en el estado inicial, en el cambio o en el final" (MED, 2013a, p. 37). Los mapas solo consideran cardinales y medida, no ordinales. Luego, enuncia 6 tipos diferentes: 3 de aumento y 3 de disminución, como:

CASO	Ejemplos	Cantidad INICIAL	Cambio	Cantidad FINAL
Cambio 1	Dina tenía 12 soles; luego recibe 3 soles. ¿Cuántos soles tiene ahora?	12	aumentó 3	desconocida
Cambio 2	Pilar tiene S/. 14; compra un pastel por S/. 6. ¿Cuánto le quedan?	14	disminuyó 6	desconocida
Cambio 3	Luis tenía 15 peras. Hugo le dio algunas. Ahora tiene 24 peras. ¿Cuántas le dio Hugo?	15	desconocida	24
Cambio 4	Tania tenía S/. 18. Compra un pastel y ahora tiene S/, 12. ¿Cuánto costó el pastel?	18	desconocida	12
Cambio 5	Paco tenía algunos panes. Luis le dio 9 panes. Ahora tiene 15 panes ¿Cuántas panes tuvo Paco al inicio?	desconocida	aumentó 9	23
Cambio 6	Paco tenía algunos panes. Le dio a Luis 9 panes. Ahora tiene 7 panes ¿Cuántas panes tuvo Paco al inicio?	desconocida	disminuyó 9	7

Igualación: Situaciones en las que se requiere igualar una cantidad con respecto a otra. La incógnita puede estar en la referencia, en lo que se iguala o en la diferencia.

CASO	Ejemplos	REFERENCIA	COMPARADA	DIFERENCIA
Igualación 1	Tito tiene 18 chapitas. Carlos juntó 12 chapitas. ¿Cuántas chapitas debe conseguir Carlos para tener tanto como Adolfo?	18	12	desconocida
Igualación 2	Adolfo tiene 18 chapitas. José tiene 12 chapitas. ¿Cuántas chapitas debe dejar Adolfo para tener tantas como José?	18	12	desconocida
Igualación 3	Paty tiene 15 semillas. Si Luisa consigue 4 semillas, tendrá tantas semillas como Paty. .Cuantas semillas tiene Luisa?	15	desconocida	4 más
Igualación 4	Paty tiene 15 semillas. Si Camila pierde 6 semillas, tendrá tantas semillas como Paty. ¿Cuántas semillas tiene Camila?	15	desconocida	6 menos
Igualación 5	Rosa tiene 19 pulseras. Si Rosa obtiene 7 pulseras, tendrá tantas pulseras como Carmen. Cuántas pulseras tiene Carmen?	desconocida	19	7 más
Igualación 6	Rosa tiene 19 pulseras. Si Rosa regala 3 pulseras, tendrá tantas pulseras como Carmen. ¿Cuántas pulseras tiene Carmen?	desconocida	19	3 menos

Comparación: Situaciones en las que se comparan dos cantidades. La incógnita puede estar en la referencia, en lo que se compara o en la diferencia.

CASO	Ejemplos	REFERENCIA	COMPARADA	DIFERENCIA
Comparación 1	César tiene 8 caramelos. Manolo tiene 13 chocolates. ¿Cuántos dulces más que Manolo tiene Cesar?	8	13	desconocida
Comparación 2	Cesar tiene 8 caramelos. Manuel tiene 5 galletas. ¿Cuántos dulces tiene Manuel menos que César?	8	5	desconocida
Comparación 3	Carola tiene 11 años. Ernesto tiene 3 años más que Carola. ¿Cuántos años tiene Ernesto?	11	desconocido	3 más
Comparación 4	Carola tiene 11 años. Verónica tiene 3 años menos que Carola. ¿Cuántos años tiene Verónica?	11	desconocida	3 menos
Comparación 5	Juan tiene 16 bolitas. Juan tiene 7 bolitas más que Percy. ¿Cuántas bolitas tiene Percy?	desconocido	16	7 más
Comparación 6	Juan tiene 16 bolitas. Juan tiene 6 bolitas menos que Tomás. .Cuantas bolitas tiene Tomás?	desconocido	16	6 menos

(Las cuatro tablas anteriores son adaptaciones de MED, 2013a, pp. 37-39)

3.3 EN LAS RUTAS DEL APRENDIZAJE

En el fascículo 1, Número y Operaciones, Cambio y Relaciones, III Ciclo, Primer y segundo grado de Educación Primaria, respecto a las situaciones aditivas, prescribe:

> … Resuelve, modela y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de separar, agregar, quitar, igualar o comparar dos cantidades[1], usa distintas estrategias de solución y explica cómo llegó a la respuesta y si esta guarda relación con la situación planteada.

(1) Según clasificación de los PAEV: Cambio 3 y 4, Combinación 2 y Comparación e Igualación 1 y 2.

(MED, 2013b, p. 15)

Las situaciones aditivas están relacionadas a acciones de *separar*, *agregar*, *quitar*, *igualar* o *comparar* dos cantidades. No considera a los ordinales.

Sobre el significado de las operaciones encontramos lo siguiente:

5 AÑOS
Construcción del significado y uso de las operaciones en situaciones problemáticas referidas a agregar-quitar[4] y juntar.[5]
Explora en situaciones cotidianas las acciones de juntar, agregar-quitar, hasta 5 objetos. Dice con sus palabras lo que comprende al escuchar el enunciado de problemas cotidianos referidos agregar-quitar y juntar hasta 5 objetos, presentados en forma verbal y concreta. Usa estrategias de conteo (conteo de uno en uno y agrupando) para resolver problemas de contexto cotidiano que implican acciones de agregar-quitar y juntar con resultados hasta 5 objetos. Menciona los procedimientos usados al resolver problemas de contexto cotidiano que implican las acciones de agregar-quitar y juntar hasta 5 objetos, con apoyo de material concreto.

(4) Según clasificación de los PAEV: Cambio 1 y 2.
(5) Combinación 1. (MED, 2013a, p. 17)

PRIMER GRADO
Construcción del significado y uso de las operaciones en situaciones problemáticas referidas a agregar-quitar, juntar, avanzar-retroceder.
Describe en situaciones cotidianas las acciones de juntar, agregar-quitar, avanzar-retroceder de números naturales con resultados de hasta 20. Formula el enunciado de problemas cotidianos que implican acciones de juntar, agregar-quitar, avanzar-retroceder, doble y triple, con cantidades hasta 20, con apoyo de material concreto o gráfico. Dice con sus palabras lo que comprende al escuchar o leer enunciados de problemas cotidianos con resultados hasta 20, presentados en diferentes formatos (gráficos y cuadros, y en forma escrita y verbal). Utiliza diversas estrategias de conteo, cálculo escrito, mental y de estimación para resolver problemas de contexto cotidiano (cambio 1,2; combinación 1 y doble) con resultados hasta 20. Expresa con material concreto, gráfico y simbólico problemas de contexto cotidiano (cambio 1,2; combinación 1 y doble) con números naturales hasta 20. Comprueba y explica los procedimientos usados al resolver problemas de contexto cotidiano (cambio 1,2; y combinación 1 y doble) con números naturales hasta 20, con apoyo de material concreto o gráfico.

(MED, 2013a, p. 17)

Se desarrolla situaciones aditivas de *cambio 1* y *2*. En ambos casos se conoce el estado inicial que es aumentado, en el tipo 1, o disminuido, en el tipo 2, por un número para obtener un estado final que es la incógnita. Están asociadas a las acciones de *agregar* (*cambio 1*) y *quitar* (*cambio 2*). Además las situaciones de combinación 1, situaciones de parte todo, se conoce las dos partes y se pide por el todo. Están asociadas a las acciones de juntar. En estas situaciones se considera hasta cinco objetos, para inicial de 5 años y con resultados hasta 20 para el primer grado. Debemos observar que para este grado se considera las acciones de *avanzar* y *retroceder*.

SEGUNDO GRADO
Construcción del significado y uso de las operaciones en situaciones problemáticas referidas a agregar-quitar[6], juntar-separar[7], comparar e igualar[8].
Describe en situaciones cotidianas las acciones de juntar-separar, agregar-quitar, avanzar-retroceder de números naturales con resultados hasta 100. Formula el enunciado de problemas cotidianos que implican acciones de juntar- separar, agregar- quitar, avanzar-retroceder, doble, mitad y triple, con cantidades hasta 100, con soporte de material concreto y gráfico. Dice con sus palabras lo que comprende al leer y escuchar enunciados de problemas cotidianos con resultados hasta 100, presentados en diferentes formatos (gráficos, cuadros, esquemas, y en forma escrita y verbal). Utiliza diversas estrategias de conteo, cálculo escrito, mental y de estimación para resolver problemas de contexto cotidiano (cambio 3,4; combinación 1,2; comparación e igualación 1,2; doble, mitad y triple) con resultados hasta 100. Expresa con material concreto, gráfico y simbólico problemas de contexto cotidiano (cambio 3,4; combinación 1,2; comparación e igualación 1,2; doble, mitad y triple) con números naturales hasta 100. Comprueba y explica los procedimientos usados al resolver problemas de contexto cotidiano (cambio 3,4; combinación 1,2; comparación e igualación 1,2; doble, mitad y triple) con números naturales hasta 100, con apoyo de material concreto o gráfico.

(6) Cambio 3 y 4
(7) Combinación 1 y 2
(8) Comparación e igualación 1 y 2. (MED, 2013a, p. 17)

Para este grado se añade las situaciones de *cambio 3* y *4*, asociadas a las acciones de *agregar-quitar*: las de combinación 1 y 2; asociadas a las acciones de *juntar-separar*; *comparación 1* y *2* e *igualación 1* y *2*. Los resultados de las operaciones deben ser números hasta 100.

El estándar de aprendizaje del IV ciclo, respecto a las situaciones aditivas, prescribe:

Resuelve, modela y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de agregar, quitar, igualar o comparar dos cantidades[4] …

(4) Según clasificación de los PAEV: Cambio 5 y 6, Comparación e Igualación 3 y 4.
(MED, 2013b, p. 14)

Las situaciones aditivas están relacionadas a acciones de *agregar*, *quitar*, *igualar* o *comparar* dos cantidades. No considera a los ordinales.

Sobre el significado de las operaciones encontramos lo siguiente:

TERCER GRADO	
Construcción del significado y uso de la operaciones con números naturales en situaciones problemáticas de agregar, quitar, igualar y comparar, repetir una cantidad para aumentarla o repartirla en partes iguales.	
•	Experimenta y describe las operaciones con números naturales en situaciones cotidianas que implican las acciones de agregar, quitar, igualar o comparar dos cantidades[1],…
•	Usa diversas estrategias de cálculo escrito y mental, para resolver situaciones problemáticas aditivas… con números naturales de hasta tres cifras.
•	Explica la relación entre la adición y la sustracción… como operaciones inversas.
•	Explica sus procedimientos al resolver diversas situaciones problemáticas.

PAEV: Cambio 5, comparación 3 y 4. (MED, 2013b, p. 18)

Las situaciones aditivas están referidas a *cambio 5*, relacionadas a acciones de *agregar*, *quitar* y *comparar* cantidades.

CUARTO GRADO
Construcción del significado y uso de las operaciones con números naturales en situaciones problemáticas de agregar, quitar, igualar, comparar, repetir una cantidad para aumentarla o repartirla en partes iguales.
• Experimenta y describe las operaciones con números naturales en situaciones cotidianas que implican las acciones de agregar, quitar, igualar o comparar dos cantidades[3], repetir una cantidad para aumentarla o repartirla en partes iguales, quitar sucesivamente[4]. • Usa diversas estrategias de cálculo escrito y mental para resolver problemas aditivos, multiplicativos y de combinación de las cuatro operaciones con números naturales hasta cuatro cifras. • Elabora y aplica diversas estrategias para resolver situaciones problemáticas[3] que implican el uso de material concreto, gráfico (dibujos, cuadros, esquemas, gráficos, etc.) • Explica la relación entre la adición y la sustracción, la división y la multiplicación como operaciones inversas. • Justifica el uso de las operaciones aditivas y multiplicativas, y sus propiedades, en la resolución de situaciones problemáticas. • Explica sus procedimientos al resolver diversas situaciones problemáticas.

PAEV: Cambio 5 y 6, comparación 3 y 4, igualación. (MED, 2013b, p. 18)

Las situaciones aditivas están referidas a *cambio 5* y *6*, relacionadas a acciones de *agregar*, *quitar*, *comparación 3* y *4*, *r* dos cantidades. No considera a los ordinales.

El estándar de aprendizaje del V ciclo, respecto a las situaciones aditivas, prescribe:

… Resuelve, modela y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de comparar e igualar dos cantidades[7]…

(7) Según clasificación de los PAEV: Comparación e Igualación 5 y 6.

(MED, 2013b, p. 15)

Sobre el significado de las operaciones encontramos lo siguiente:

QUINTO GRADO
Construcción del significado y uso de las operaciones con números naturales en situaciones problemáticas aditivas de igualar y comparar y situaciones multiplicativas de combinación y división
• Experimenta y describe, el significado y uso de las operaciones con números naturales en situaciones cotidianas que implican las acciones de igualar o comparar dos cantidades[5]. • Usa diversas estrategias de cálculo escrito y mental que impliquen la descomposición aditiva … para resolver problemas con números naturales hasta seis cifras. • Justifica el uso de las operaciones y propiedades de los números y operaciones, en la resolución de situaciones problemáticas.

(5) PAEV: Igualación 5 y 6. (MED, 2013b, p. 19)

Se incorpora el estudio de las situaciones aditivas de *igualación 5* y *6*.

SEXTO GRADO
Construcción del significado y uso de las operaciones con números naturales en situaciones problemáticas aditivas de igualar y comparar y situaciones multiplicativas de combinación, división y comparación y repetición de factores iguales.
• Experimenta y describe el significado y uso de las operaciones con números naturales en situaciones cotidianas que implican las acciones de igualar o comparar dos cantidades[7], • combinar elementos de dos conjuntos, repartir una cantidad en partes iguales o dividirla en grupos iguales, y acciones combinadas. • Usa estrategias que implican el uso de la representación concreta y gráfica (dibujos, cuadros, esquemas, gráficos, etc.), para resolver situaciones problemáticas de Igualación y comparación 5 y 6 y situaciones multiplicativas de combinación-división (producto cartesiano) y comparación. • Usa diversas estrategias de cálculo escrito y mental que impliquen la descomposición aditiva y multiplicativa, propiedades de la multiplicación, para resolver problemas con números naturales hasta seis cifras. • Explica la relación entre la potenciación y la multiplicación de factores. • Usa estrategias que implican el uso de productos con factores iguales para resolver situaciones problemáticas. • Usa y explica diversas estrategias heurísticas que implican el cálculo escrito y mental para resolver problemas aditivos, multiplicativos, de cuadrados y cubos perfectos con números naturales de más de seis cifras.

(7) PAEV: Igualación y Comparación 5 y 6. (MED, 2013b, p. 19)

Se incorpora el estudio de las situaciones aditivas de *comparación 5* y *6*.

Las Rutas del Aprendizaje que corresponde al III ciclo (1° y 2° grados), IV ciclo (3° y 4° grados), y V ciclo (5° y 6° grados) considera 4 tipos de situaciones aditivas: *combinación*, *cambio*, *comparación* e *igualación*.

GRADO / TIPO DE PROBLEMA	PRIMER GRADO	SEGUNDO GRADO	TERCER GRADO	CUARTO GRADO	QUINTO GRADO	SEXTO GRADO
COMBINACIÓN	**1**	**1; 2**				
CAMBIO	**1; 2**	**1; 2; 3; 4**	**5**	**5; 6**		
COMPARACIÓN		**1; 2**	**3; 4**			**5; 6**
IGUALACIÓN		**1; 2**			**5; 6**	**5; 6**

Respecto al significado las Rutas del Aprendizaje nos dicen que:

> "LA ADICIÓN comprende dos significados:
>
> a) Como incremento, implica la transformación de una cantidad inicial por acciones de agregar, avanzar, recibir, ganar, comprar, etc. Ejemplo, María tenía tres polos y en su cumpleaños le regalaron dos polos. ¿Cuántos polos tiene ahora María?
>
> b) Como parte-todo que está vinculado a las acciones de juntar o unir las partes en un todo. Para nombrar al todo se requiere recurrir a la noción de inclusión de clase. Ejemplo, Josefina compró 8 manzanas y 12 melocotones. ¿Cuántas frutas compró Josefina?" (MED, 2013b, p. 35)

La adición significa ***incremento*** e implica transformación de una cantidad inicial por acciones de agregar, avanzar, recibir, ganar, comprar, etc. Considera solo las situaciones de cambio 1. Obvia a las situaciones de cambio 3 y 5. Y como parte-todo vinculado a las acciones de juntar o unir las partes en un todo. Los ordinales están omitidos en las situaciones aditivas. Debemos decir que la adición se realiza para evitar el conteo. Si Luis tiene 5 panes y compra 3 más. ¿Cuántos panes tiene en total? Para responder a la pregunta no necesito reunir los 5 panes con los tres más y contarlo todo, solo requiero saber sumar: $3 + 5 = 8$. Algo parecido ocurre en la situación de combinación.

> "LA SUSTRACCIÓN aparece de manera natural vinculada a las acciones de dar, perder, bajar, disminuir, etc., que son transformaciones que tienen significado por sí mismas. Un buen aprendizaje de la sustracción pasa por la comprensión del carácter inverso de la adición." (MED, 2013b, p. 35)

El significado de la sustracción está vinculada a las acciones de dar, perder, bajar, disminuir, etc. También nos dice que un buen aprendizaje pasa por la comprensión del carácter inverso de la adición.

Debemos decir que la sustracción se realiza para evitar realizar la suma. Si Luis tiene 5 panes y compra algunos. En total tiene 8 panes. ¿Cuántos panes compró Luis? El problema que se tiene es: $5 + ? = 8$. Pero si resto $8 – 5$, puedo responder a la pregunta. Esta circunstancia es la razón para considerar que la sustracción es la operación inversa de la adición. El hecho más importante radica que toda suma de números naturales se puede expresar como una resta. En realidad hay dos restas asociadas a la suma.

Las Rutas del Aprendizaje recomienda utilizar los Problemas Aritméticos de Enunciado Verbal (PAEV): combinación, cambio, comparación e igualación.

> **"Problemas aditivos de enunciado verbal**:
>
> **Situaciones de Combinación**
>
> **Combinación 1**: Se conocen las dos partes y se pregunta por el todo.
>
> **Combinación 2**: Se conocen el todo y una de sus partes. Se pregunta por la otra parte." (MED, 2013b, p. 33)

No describen la relación que se establece entre las partes y el todo. Relación estática que no varía con el tiempo. Solo considera dos tipos: cuando la incógnita es la suma o una de sus partes. Sin embargo, creemos que es necesario considerar tres tipos diferentes, dependiendo si la incógnita es la suma (todo), el segundo sumando o el primer sumando. La distinción es necesaria, pues Carpentier y Moser nos dicen que cuando la incógnita es el primer sumando el problema es de mayor dificultad para los estudiantes que en los otros casos.

> **“Situaciones de Cambio**
>
> **Cambio 1**: Se conoce la cantidad inicial y luego se le aumenta. Se pregunta por la cantidad final.
>
> **Cambio 2**: Se conoce la cantidad inicial y luego se le hace disminuir. Se pregunta por la cantidad final.
>
> **Cambio 3**: Se conoce la cantidad inicial y la final (mayor). Se pregunta por el aumento.
>
> **Cambio 4**: Se conoce la cantidad inicial y la final (menor). Se pregunta por la disminución.
>
> **Cambio 5**: Se conoce la cantidad final y su aumento. Se pregunta por la cantidad inicial.
>
> **Cambio 6**: Se conoce la cantidad final y su disminución. Se pregunta por la cantidad inicial.” (MED, 2013b, p. 33)

Las situaciones de cambio son 6, 3 de aumento y 3 de disminución.

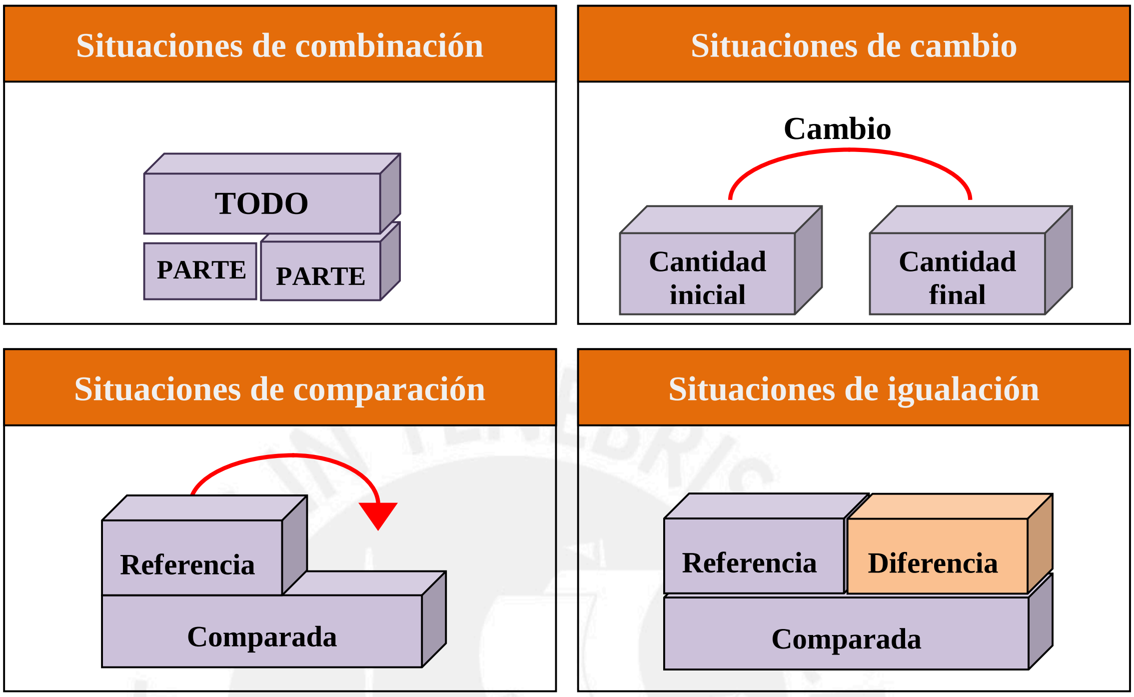
> **“Situaciones de Comparación**
>
> **Comparación 1**: Se conoce la cantidad referente y comparada. Se pregunta por la diferencia en más.
>
> **Comparación 2**: Se conoce la cantidad referente y comparada. Se pregunta por la diferencia en menos.
>
> **Comparación 3**: Se conoce la cantidad referente y la diferencia en más. Se pregunta por la cantidad comparada.
>
> **Comparación 4**: Se conoce la cantidad referente y la diferencia en menos. Se pregunta por la cantidad comparada.
>
> **Comparación 5**: Se conoce la cantidad referente y la diferencia en más con la cantidad comparada. Se pregunta por la cantidad comparada.
>
> **Comparación 6**: Se conoce la cantidad referente y la diferencia en menos con la cantidad comparada. Se pregunta por la cantidad comparada.” (MED, 2013b, p. 34)

Las situaciones de comparación son 6, 3 de diferencia en más y 3 de diferencia en menos.

> **“Situaciones de igualación**
>
> **Igualación 1**: Se conocen las dos cantidades. Se pregunta por el aumento de la cantidad menor para igualarla a la mayor.
>
> **Igualación 2**: Se conocen las dos cantidades. Se pregunta por la disminución de la cantidad mayor para igualarla a la menor.
>
> **Igualación 3**: Se conoce la 1ª cantidad y lo que hay que añadir a la 2ª cantidad para igualarla con la 1ª. Se pregunta por la 2ª cantidad.
>
> **Igualación 4**: Se conoce la 1ª cantidad y lo que hay que quitar a la 2ª para igualar la 1ª cantidad. Se pregunta por la cantidad del 2ª.”

Igualación 5: Se conoce la 1ª cantidad y lo que hay que añadirle para igualarla con la 2ª cantidad. Se pregunta por la cantidad del 2ª.

Igualación 6: Se conoce la 1ª cantidad y lo que hay que quitarle para igualarla con la 2ª. Se pregunta por la 2ª cantidad”. (MED, 2013b, p. 34)



A continuación, mostramos algunos ejemplos:

“Situaciones de combinación

Se trata de problemas que se plantean a partir de "combinar" dos cantidades, las cuales se diferencian en alguna característica, en los que podemos desconocer una parte o el todo.

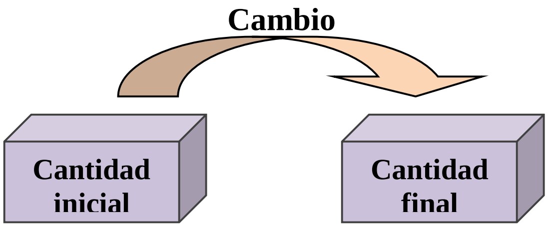
Luís tiene 6 camioncitos y José 8 trompos. ¿Cuántos juguetes tienen los dos juntos?

PAEV de combinación 1. (MED, 2013a, p. 37)

En la situación de combinación existe una relación estática entre los términos de la situación parte – todo. En ejemplo mostrado se pone de manifiesto la relación estática, pero la descripción anterior, solo dice combinar cantidades.

“Situaciones de cambio

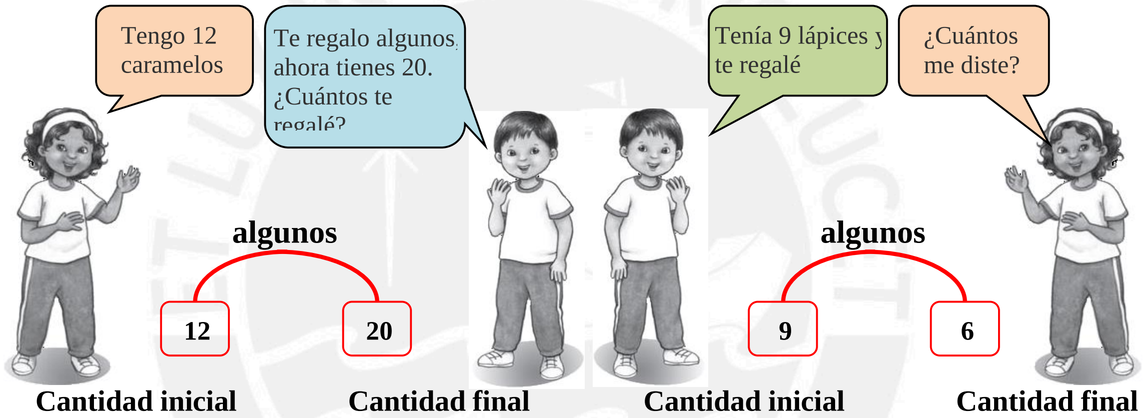
Se trata de problemas en los que se parte de una cantidad, a la que se añade o se le quita otra de la misma naturaleza.



Tampoco en la descripción se dice explícitamente el cambio o transformación del estado inicial, y no necesariamente cantidad (cardinal o medida), pues puede ser ordinal. El estado inicial es transformado por un número en un estado final.

Naty tenía 12 caramelos. Pedro le dio algunos más. Ahora tiene 20 caramelos. ¿Cuántos caramelos le dio Pedro?

Pedro tenía 9 lápices. Dio algunos a Rosa. Ahora tiene 6. Cuántos lápices le dio a Rosa



PAEV 3 de cambio

PAEV 4 de cambio

(MED, 2013a, p. 37)

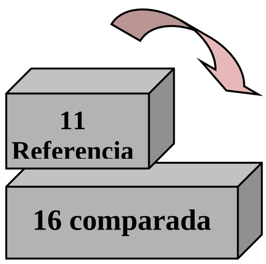
Estos ejemplos ponen de manifiesto la transformación del estado inicial.

Situaciones de comparación

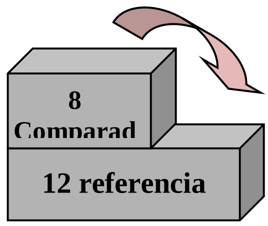
En esta categoría se comparan dos cantidades. Los datos son las cantidades y la diferencia que existe entre ellas. De estas dos cantidades, una es la comparada y la otra es la referencia. La diferencia es la distancia que se establece entre ambas.

Roger tiene 11 nuevos soles. Oscar tiene 16. ¿Cuántos soles más que Roger tiene Oscar?

Luis tiene 12 aviones de papel y José tiene 8. ¿Cuántos aviones menos que Luis tiene José?



PAEV de comparación 1



PAEV de comparación 2

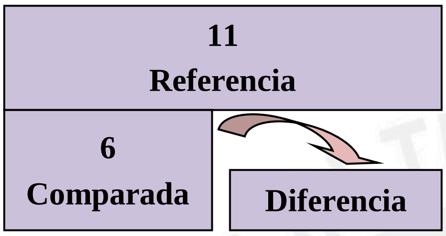
(MED, 2013a, p. 38)

¿Qué caracterizan a las situaciones de comparación, según la Rutas del Aprendizaje? La comparación de cantidades. No mencionan la relación estática de comparación de dos estados.

Situaciones de igualación

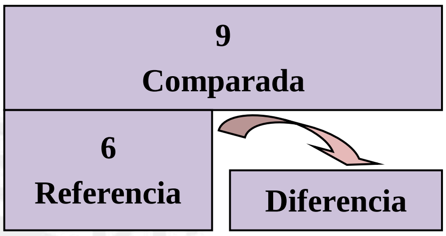
Se trata de problemas que contienen dos cantidades diferentes y sobre una de las cuales se actúa aumentándola o disminuyéndola hasta hacerla igual a la otra. De estas dos cantidades una es la cantidad a igualar y la otra es la cantidad referente. La transformación que se produce en una de dichas cantidades es la igualación.

Ana tiene 11 fichas y Mariela tiene 6. ¿Cuántas fichas más tiene que ganar Mariela para tener tantas como Ana?



PAEV de igualación 1

José tiene 9 caramelos. Julio tiene 5 caramelos, ¿cuántos caramelos le falta comer a José, para tener tantos caramelos como Julio?



PAEV de igualación 2

(MED, 2013a, p. 38)

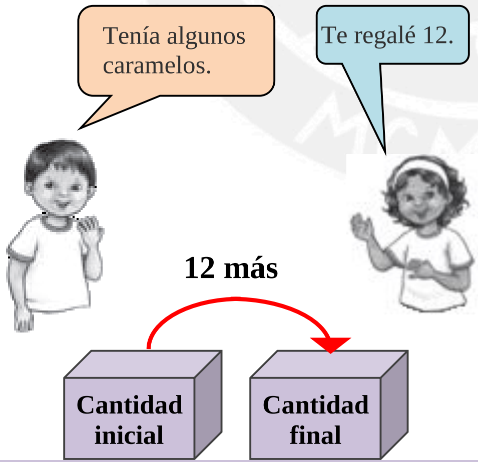
A continuación presentamos ejemplos de situaciones de cambio, comparación e igualación.

Situación de cambio 5 y 6

Se trata de problemas en los que se parte de una cantidad, a la que se añade o se le quita otra de la misma naturaleza.

Cambio 5

Pedro tenía algunos caramelos Nati le regaló 12, ahora tiene 20. ¿Cuántos caramelos tenía Pedro?



Se conoce la cantidad final y el aumento. Se pregunta por la cantidad inicial.

Cambio 6

Rosa tenía algunos lápices, le dio a Carlos 6, ahora tiene 9. ¿Cuántos lápices tenía Rosa?

Se conoce la cantidad final y la disminución. Se pregunta por la cantidad inicial.

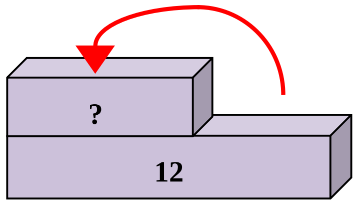
(MED, 2013b, p. 35)

Adecúa los datos numéricos según el campo numérico en el que estés trabajando, es decir, números naturales, fracciones o decimales.

SITUACIONES DE COMPARACIÓN 3 y 4

Comparación 3

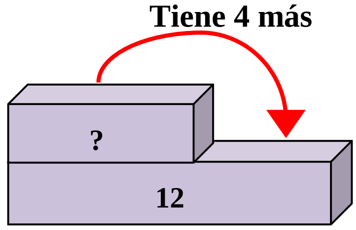
Roger tiene 12 nuevos soles. Óscar tiene 5 nuevos soles menos que Roger. ¿Cuánto dinero tiene Óscar?



Se conoce la cantidad del 1°. La diferencia en menos con el 2°. Se pregunta por la cantidad del 2°.

Comparación 4

Pedro tiene 12 aviones de papel. Samuel tiene 4 más que Pedro. ¿Cuántos aviones tiene Samuel?



Se conoce la cantidad del 1°. La diferencia en más con el 2°. Se pregunta por la cantidad del 2°.

Situaciones de comparación 5 y 6	
5	Juan ha leído 12 libros. Juan ha leído 4 libros más que Iván. ¿Cuántos libros ha leído Iván?
6	Juan tiene 10 años. Juan tiene 3 años menos que Iván. ¿Cuántos años tiene Iván?

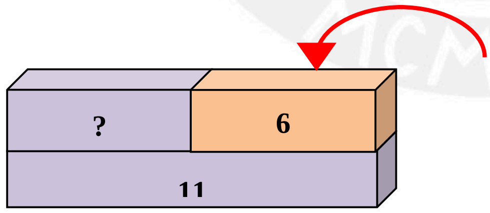
(MED, 2013b, p. 36)

SITUACIONES DE IGUALACIÓN

Problemas que contienen dos cantidades diferentes, sobre una de las cuales se actúa aumentándola o disminuyéndola hasta hacerla igual a la otra. De estas dos cantidades, una es la cantidad a igualar y la otra es la cantidad referente.

Igualación 3

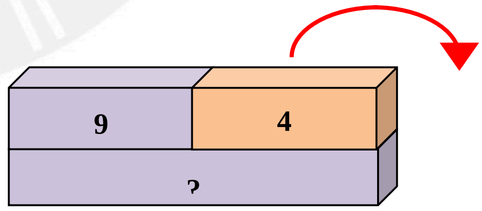
Ana tiene 11 fichas. Si Mariela gana 6 más, tendría tantas como Ana. ¿Cuántas tiene Mariela?



Se conoce la cantidad del 1° y lo que hay que añadir al 2° para igualarla con la del 1°. Se pregunta por la cantidad del 2°.

Igualación 4

Yarina tiene 9 fichas. Si Félix pierde 4 fichas, tendría tantas como Yarina. ¿Cuántas fichas tiene Félix?



Se conoce la cantidad del 1° y lo que hay que quitar a la del 2° para igualarla con la del 1° Se pregunta por la cantidad del 2°.

Situaciones de igualación 5 y 6	
5	Eduardo tiene 28 taps. Si Eduardo gana 17, tendrá tantos como Raúl. ¿Cuántos tiene Raúl?
6	Raquel tiene 25 globos. Si Raquel revienta 9, tendrá tantos como Sonia. ¿Cuántos globos tiene Sonia?

(MED, 2013b, p. 36)

Resumiendo, las situaciones aditivas son de *combinación*, *cambio*, *comparación* e *igualación*. En todas ellas intervienen cantidades que se combina, se transforman, se comparan e igualan. No pone de manifiesto las relaciones entre los estados: relación estática (combinación y comparación) y relación dinámica (cambio e igualación).

3.4 EN LAS CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES

Para recabar información de los docentes peruanos de educación primaria sobre sus conocimientos y concepciones de las situaciones aditivas simples elaboramos un cuestionario con 36 situaciones aditivas. Con la revisión de un experto -el asesor- se planteó a un docente de educación primaria y luego de los reajustes, el cuestionario final consideró 18 situaciones aditivas, 3 para cada una de los tipos: EEE, ETE, ECE, TTT, CTC y CCC. (Instrumento 2, anexo 3) Estos 6 tipos y en el mismo orden, lo tomamos de Cid, Godino y Batanero (2004a). Observamos que el origen de esta clasificación se encuentran en Vergnaud (1976 y 2001) y Carpenter y Moser (1982 y 1983).

En cada tipo hay situaciones con cardinales, ordinales y medida, en 7 situaciones la incógnita es la suma, 5 el primer sumando y 6 el segundo sumando. Nos basamos en los tipos planteados. El cuestionario se aplicó a 11 profesores de Instituciones Públicas y a 10 de Instituciones Privadas. La muestra, por la facilidad, respecto a los otros tipos es intencional.

En el cuestionario se incorporó dos preguntas:

Este año, ¿con tus alumnos trabajaste problemas de este tipo? Sí o No.

¿Qué tan difícil consideras que es este problema para tus alumnos?

Para esta pregunta se propuso cuatro niveles de dificultad:

1. Muy fácil. **2.** Fácil **3.** Difícil. **4.** Muy difícil.

Con esta pregunta intentamos determinar el grado de dificultad de la situación aditiva.

CUESTIONARIO DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1.	Javier tiene 2 canicas rojas y otras azules. En total tiene 9. ¿Cuántas canicas son azules?
2.	Hugo está en 7° lugar en una cola, Pedro es el 4° después de Hugo. ¿En qué lugar está Pedro?
3.	En dos cajas, una grande y una chica caben 20 piñas. En la grande caben 12 piñas ¿Cuántas piñas caben en la chica?
4.	Tengo un número de truchas y Luis me regaló 5 más. En total tengo 11. ¿Cuántas truchas tenía al inicio?
5.	Laura es la 4ª en una carrera. Antes de llegar a la meta es adelantada por siete competidoras. Todas llegaron en lugares diferentes. ¿Qué lugar ocupó Laura?

6.	En una caja entran 12 piñas. Se agranda la caja para 4 piñas más. ¿Cuántas piñas entran en la nueva caja.
7.	Mi tía me dio algo de dinero y mi papá me dio S/. 5. Entre los dos me dieron S/. 11? ¿Cuánto me dio mi tía?
8.	Pepe está 4 lugares después que Hugo y Paco 6 lugares después que Pepe. ¿Cuántos lugares después que Hugo está Paco?
9.	Después de dos ampliaciones, una caja admite 14 crayolas más. En la 2ª ampliación entran 8 crayolas más que la 1ª. ¿Cuántas crayolas más admite la 1ª ampliación?
10.	Doris trabajó 9 días. Juana trabajó 3 días más que Doris. ¿Cuántos días trabajó Juana?
11.	En la lista alfabética de mi aula, Pedro está 6 lugares después que yo y ocupa el 20° lugar. ¿Qué lugar ocupo yo?
12.	En una bolsa roja caben 16 ejemplares del libro A. En la bolsa azul caben 6 ejemplares más. ¿Cuántos ejemplares del libro A caben en la bolsa azul?
13.	Paco tiene 5 truchas más que Pepe. Pepe compró algunas truchas más y ahora tiene 7 truchas más que Paco. ¿Cuántas truchas compró Pepe?
14.	Tito está algunos lugares después que Rita. Tito deja que se coloquen delante de él 8 personas. Ahora Tito está 15 lugares después que Rita ¿Cuántos lugares después que Rita está Tito?
15.	El cuaderno rojo tiene 5 cm de largo más que el cuaderno verde. Si al cuaderno rojo se le aumenta 6 cm de largo, ¿cuántos cm más tiene el cuaderno rojo que el verde?
16.	Rita compró algunas peras más que Dora. Rosa compró 9 peras más que Rita y 15 más que Dora. ¿Cuántas peras más compró Rita que Dora?
17.	En la cola para comprar entradas, Pepe está cuatro lugares después que Hugo y Luis 6 lugares después que Pepe. ¿Cuántos lugares después que Hugo está Luis?
18.	El polo rojo tiene 5 cm de largo más que el polo verde. El polo azul tiene 6 cm más de largo que el polo rojo. ¿Cuántos cm más tiene el polo azul que el verde?

RESPUESTAS AFIRMATIVAS A LA PREGUNTA 1

PROFESORES DE INSTITUCIONES PÚBLICAS

E–E–E			E–T–E			E–C–E			T–T–T			C–T–C			C–C–C		
C	O	M	C	O	M	C	O	M	C	O	M	C	O	M	C	O	M
10	6	10	10	4	9	11	8	7	11	5	2	7	5	5	8	6	5

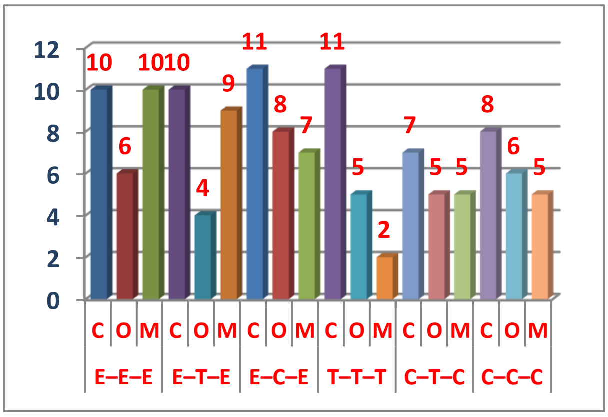
C: cardinal **O: ordinal** **M: medida**

PROFESORES DE INSTITUCIONES PRIVADAS

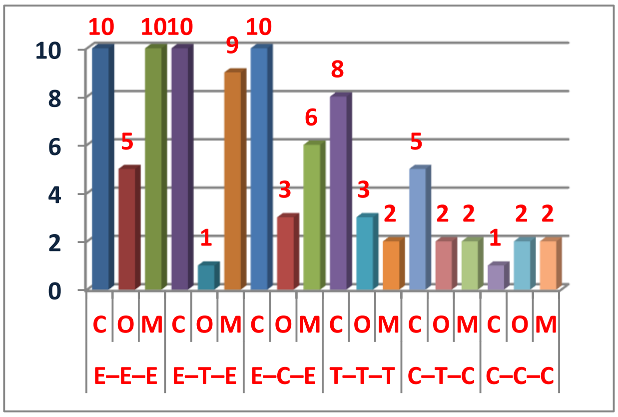
E–E–E			E–T–E			E–C–E			T–T–T			C–T–C			C–C–C		
C	O	M	C	O	M	C	O	M	C	O	M	C	O	M	C	O	M
10	5	10	10	1	10	10	3	6	8	3	5	5	2	2	1	2	2

Esta pregunta permite descubrir prácticas matemáticas sobre situaciones aditivas simples.

PROFESORES DE I. E. PÚBLICAS



PROFESORES DE I. E. PRIVADAS



Situaciones de combinación

COMBINACIÓN					
CARDINALES		ORDINALES		MEDIDA	
PUB.	PRIV.	PUB.	PRIV.	PUB.	PRIV.
91%	100%	55%	50%	91%	100%

Casi la totalidad de docentes de instituciones públicas y privadas manifiestan que durante el año trabajaron con situaciones aditivas de combinación con cardinales y medida y aproximadamente la mitad con números ordinales.

Situaciones de transformación

TRANSFORMACIÓN					
CARDINALES		ORDINALES		MEDIDA	
PUB.	PRIV.	PUB.	PRIV.	PUB.	PRIV.
91%	100%	36%	10%	82%	90%

Casi la totalidad de docentes manifiestan trabajar con situaciones aditivas de transformación con cardinales y medida y con números ordinales cerca de la tercera y décima parte los docentes de I. E. públicas y privadas, respectivamente.

Situaciones de doble transformación

DOBLE TRANSFORMACIÓN					
CARDINALES		ORDINALES		MEDIDA	
PUB.	PRIV.	PUB.	PRIV.	PUB.	PRIV.
100%	80%	73%	30%	64%	20%

Casi la totalidad de docentes de instituciones públicas manifiestan que durante el año trabajaron con situaciones aditivas de doble transformación con cardinales; con ordinales la distribución es 73% y 30% para docentes de I. E. Públicas y Privadas, respectivamente; con medida, la distribución es de 64% y 20% para los docentes de I. E. Públicas y Privadas, respectivamente.

Situaciones de comparación

COMPARACIÓN					
CARDINALES		ORDINALES		MEDIDA	
PUB.	PRIV.	PUB.	PRIV.	PUB.	PRIV.
100%	100%	45%	30%	18%	60%

Las situaciones aditivas de comparación con cardinales son trabajadas por la totalidad de docentes tanto de instituciones públicas como privadas. Las situaciones con ordinales y medida es aproximadamente el 50%. (45% y 30% con ordinales y 18% y 60% con medida).

Situaciones de transformación de una comparación

TRANSFORMACIÓN DE UNA COMPARACIÓN					
CARDINALES		ORDINALES		MEDIDA	
PUB.	PRIV.	PUB.	PRIV.	PUB.	PRIV.
64%	50%	45%	20%	45%	20%

Las situaciones aditivas de transformación de una comparación con cardinales son trabajadas por alrededor de la mitad de docentes tanto de instituciones públicas como privadas. Las situaciones con ordinales y medida es aproximadamente la tercera parte (45% y 20%, tanto con ordinales como medida).

Situaciones de doble comparación

DOBLE TRANSFORMACIÓN					
CARDINALES		ORDINALES		MEDIDA	
PUB.	PRIV.	PUB.	PRIV.	PUB.	PRIV.
73%	10%	55%	20%	45%	30%

Las situaciones de doble comparación son trabajadas en menor proporción. Las situaciones con cardinales son trabajan por el 73%, los docentes de las I. E. Públicas y el 10% de las I. E. Privadas. En promedio este tipo de situaciones son trabajadas por menos del 50%.

En resumen, diremos que las situaciones aditivas de combinación, transformación, doble transformación y comparación con cardinales son trabajadas por casi la totalidad de los docentes, tanto de las instituciones públicas como privadas. Las situaciones aditivas con ordinales son trabajadas por aproximadamente el 50% de docentes, tanto de las instituciones públicas, como privadas. Un porcentaje mayor corresponde para las situaciones aditivas con números que cumplen el rol de medida.

En las prácticas matemáticas, los profesores de instituciones educativas públicas manifiestan que desarrollan situaciones aditivas con mayor énfasis en los tipos: *combinación*, *transformación*, *comparación*, el énfasis es menor en los tipos: *doble transformación*, *transformación de comparación*, y *comparación de comparaciones*. Igualmente el énfasis se da en el significado de los números. Es mayor el énfasis con cardinales, que los ordinales y con números que cumplen el rol de medida.

Muchas de las preguntas no exigen conexiones a conceptos o significados subyacentes. Otras preguntas requieren de una representación adecuada, como el uso de la recta numérica o un gráfico de barras como para los problemas con ordinales.

El término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja.

Las preguntas de mayor dificultad para los alumnos consideradas por los profesores son las de tipo: ***transformación de comparación***, y ***comparación de comparaciones*** y fundamentalmente las referidas a números ordinales. Es necesario recordar que en los textos analizados no se ha encontrado alguna situación aditiva con número ordinales. Los problemas de ordinales están referidos al uso en secuencias o sucesiones, pero no a adiciones. Los problemas con medida son muy pocos. Preguntas de *igualación* solo en pequeña escala (8 situaciones aditivas).

En los cuadernos y textos entregados por el MED no hay situaciones aditivas de transformación de una comparación o doble comparación. Sin embargo los docentes afirman que trabajaron con situaciones similares a las propuestas, indicando que son preguntas difíciles o muy difíciles para los alumnos.

A continuación describiremos las respuestas de los docentes, tanto de las instituciones educativas públicas como privadas, respecto a la segunda pregunta: ***¿Qué tan difícil consideras que es este problema para tus alumnos?***

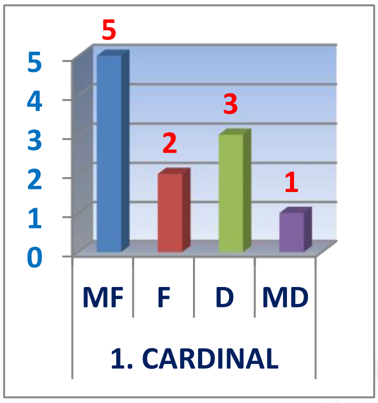
Debemos indicar el significado de: MF: muy fácil, F: fácil, D: difísicl y MF: muy difícil.

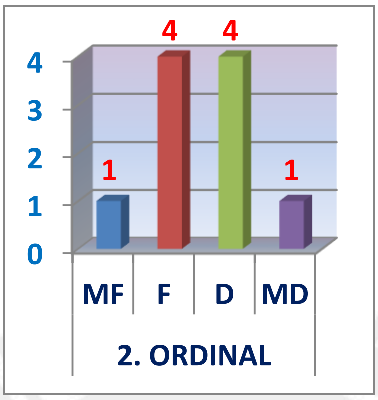
GRADO DE DIFICULTAD

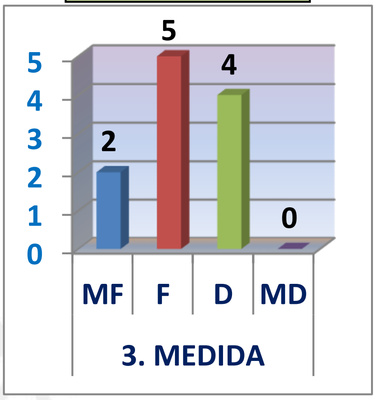
ESTADO – ESTADO – ESTADO

PROFESORES DE INSTITUCIONES PÚBLICAS

PREGUNTA 1 **PREGUNTA 2** **PREGUNTA 3**

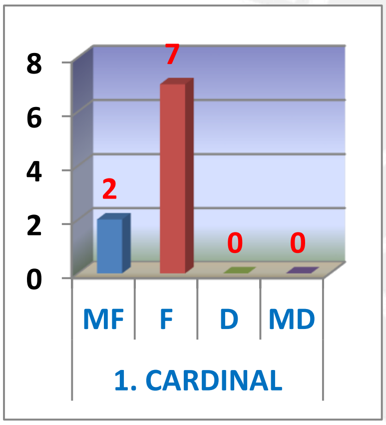


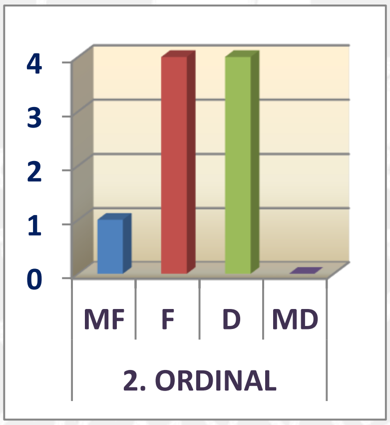


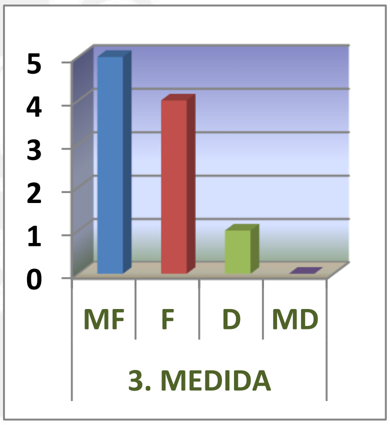


PROFESORES DE INSTITUCIONES PRIVADAS

PREGUNTA 1 **PREGUNTA 2** **PREGUNTA 3**







Los problemas 1, 2 y 3 (E–E–E) son ***combinación de estados***. El problema 1, con cardinales para los docentes, tanto de instituciones públicas (I. P.) como privadas (I. Priv.) son de dificultad baja (muy fácil o fácil), 7 para los docentes de I. P. y 9 para los de I. Priv.

El problema 2, con ordinales para los docentes, tanto de instituciones públicas (I. P.) como privadas (I. Priv.) son de dificultad mediana (4, fácil y 4 difícil), tanto para los docentes de I. P. como los de I. Priv.

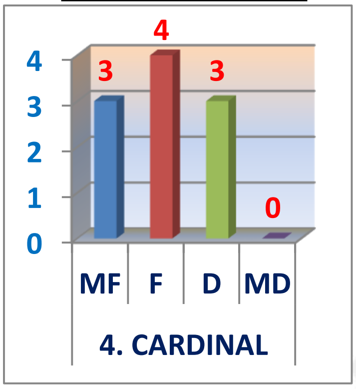
El problema 3, con medidas para los docentes de I. P. son de dificultad mediana, (5, fácil y 4 difícil), mientras que para los de I. Priv. son de dificultad baja (5 muy fácil y 4 fácil).

.

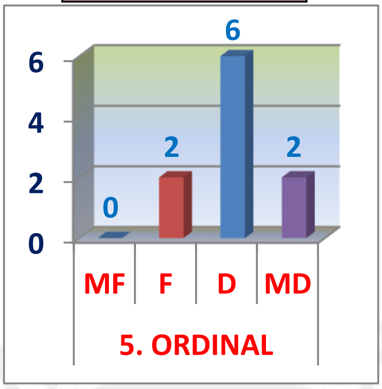
ESTADO – TRANSFORMACIÓN – ESTADO

PROFESORES DE INSTITUCIONES PÚBLICAS

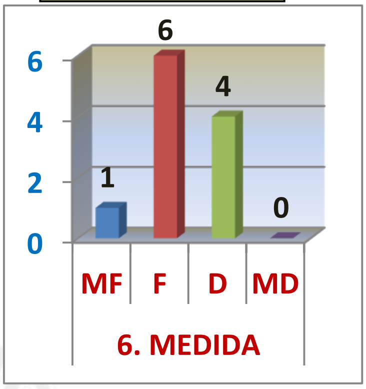
PREGUNTA 4



PREGUNTA 5

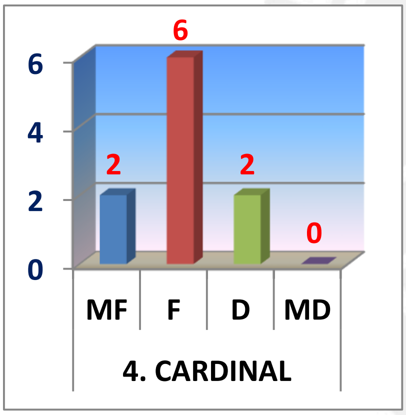


PREGUNTA 6

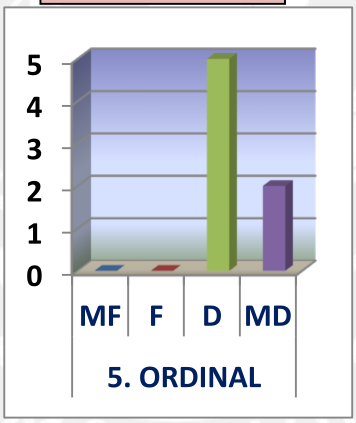


PROFESORES DE INSTITUCIONES PRIVADAS

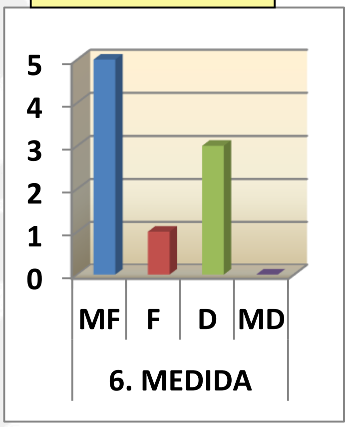
PREGUNTA 4



PREGUNTA 5



PREGUNTA 6



Los problemas 4, 5 y 6 (E–T–E) son ***transformación de estados***. El problema 4, con cardinales para los docentes de I. P. son 3 muy fáciles, 4 fáciles y 3 difíciles, mientras que para los de I. Priv. Son 2 muy fáciles, 6 fáciles y 2 difíciles.

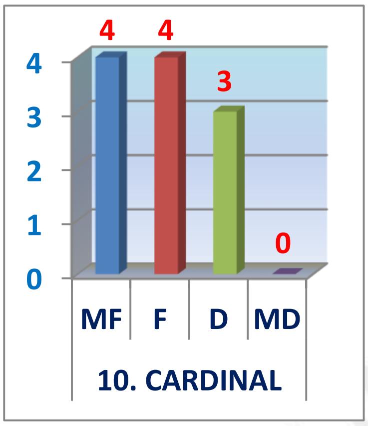
El problema 5, con ordinales para los docentes, tanto de instituciones públicas como privadas son de dificultad alta (2, fáciles, 6, difíciles y 2 muy difíciles) para I. P. y (5 difíciles y 2 muy difíciles) para los de I. Priv.

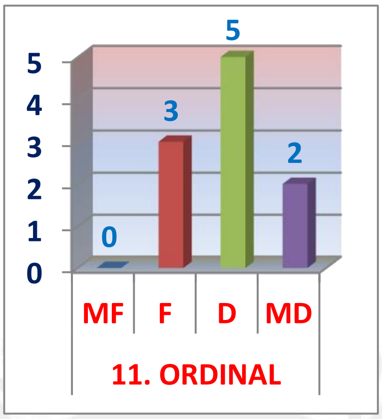
El problema 6, con medidas para los docentes de I. P. son de dificultad mediana, (6, fáciles y 4 difíciles), mientras que para los de I. Priv. son de dificultad baja (5 muy fáciles 1 fácil y 4 difíciles).

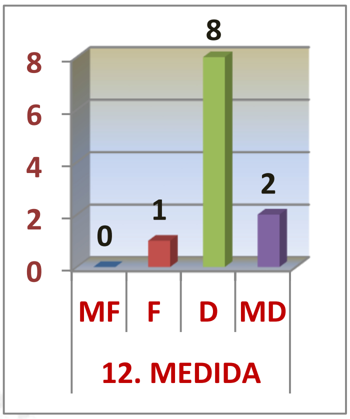
TRANSFORMACIÓN – TRANSFORMACIÓN – TRANSFORMACIÓN

PROFESORES DE INSTITUCIONES PÚBLICAS

PREGUNTA 7 | **PREGUNTA 8** | **PREGUNTA 9**

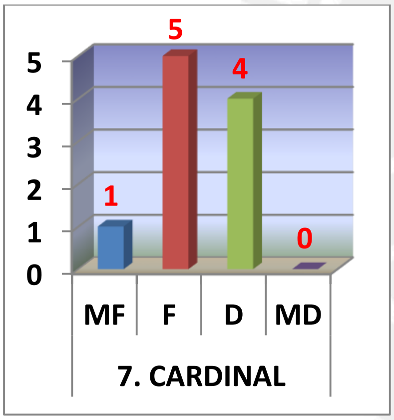


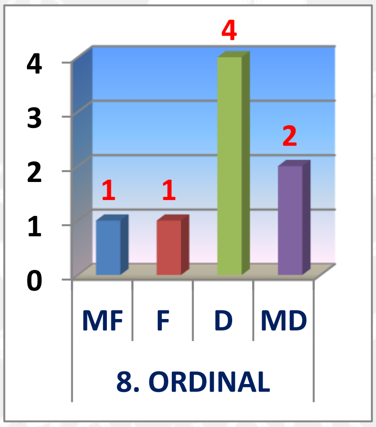


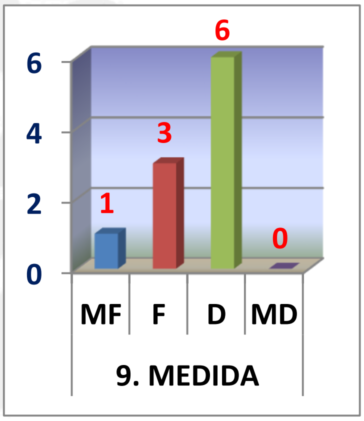


PROFESORES DE INSTITUCIONES PRIVADAS

PREGUNTA 7 | **PREGUNTA 8** | **PREGUNTA 9**







Los problemas 7, 8 y 9 (T–T–T) son de ***doble transformación***. El problema 7, con cardinales para los docentes de I. P. son 4 muy fáciles, 4 fáciles y 3 difíciles, mientras que para los de I. Priv. Son 1 muy fáciles, 5 fáciles y 4 difíles.

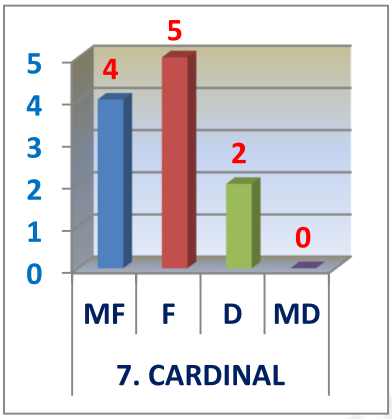
El problema 8, con ordinales para los docentes, tanto de instituciones públicas como privadas son de dificultad alta (3, fáciles, 5 difíciles y 2 muy difíciles) para I. P. y (1 muy fácil, 1 fácil y 6 difíciles) para los de I. Priv.

El problema 9, con medidas para los docentes de I. P. son de dificultad alta, (8, difíciles y 2 muy difíciles), mientras que para los de I. Priv. son de dificultad mediana (1 muy fácil 3 fáciles y 6, difíciles).

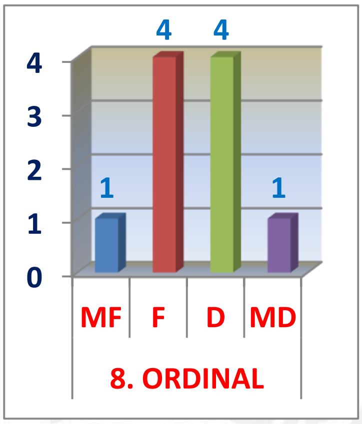
ESTADO – COMPARACIÓN – ESTADO

PROFESORES DE INSTITUCIONES PÚBLICAS

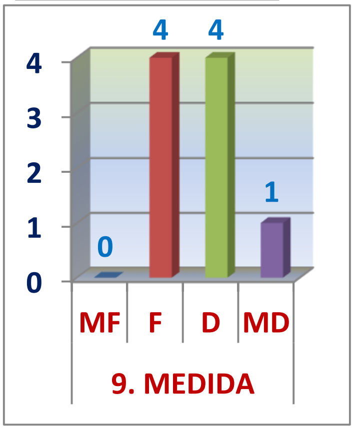
PREGUNTA 10



PREGUNTA 11

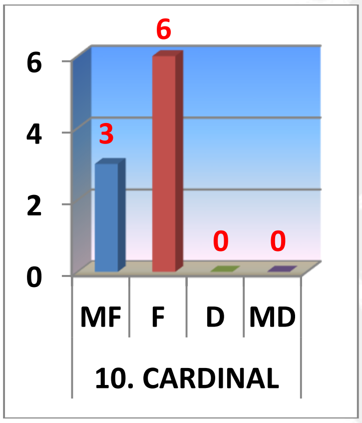


PREGUNTA 12

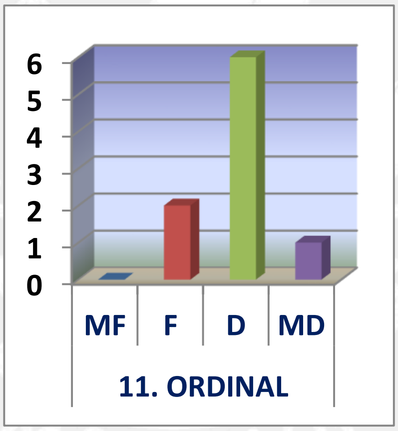


PROFESORES DE INSTITUCIONES PRIVADAS

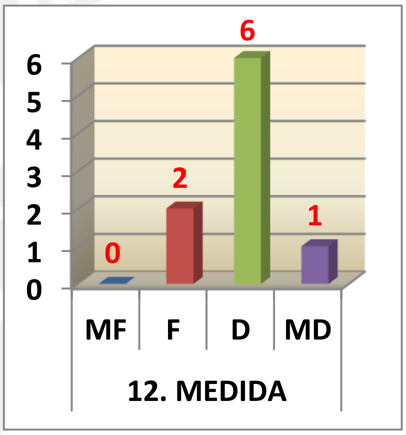
PREGUNTA 10



PREGUNTA 11



PREGUNTA 12



Los problemas 10, 11 y 12 (E–C–E) son de ***comparación de estados***. El problema 10, con cardinales para los docentes de I. P. son 4 muy fáciles, 5 fáciles y 2 difíciles, mientras que para los de I. Priv. Son 3 muy fáciles y 6 fáciles.

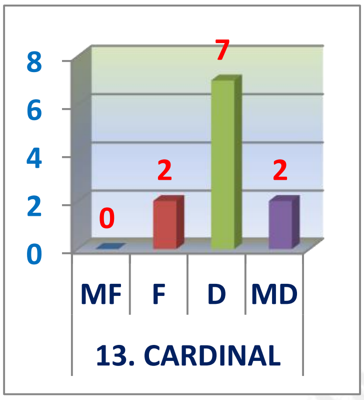
El problema 11, con ordinales para los docentes, tanto de instituciones públicas como privadas son de dificultad mediana (1, muy fácil; 4, fáciles, 4 difíciles y 1 muy difícil) para I. P. y (2, fáciles; 6, difíciles y 1 muy difícil) para los de I. Priv.

El problema 12, con medidas, tanto para los docentes de I. P. como de I. Priv. son de dificultad mediana, (4, difícil; 4, difícil y 1, muy difícil), y (2, fácil; 6 difícil y 1 muy difícil) para los de I. Priv.

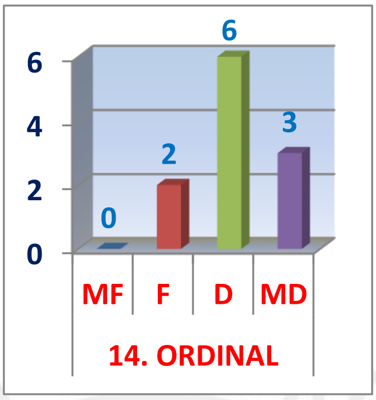
COMPARACIÓN – TRANSFORMACIÓN – COMPARACIÓN

PROFESORES DE INSTITUCIONES PÚBLICAS

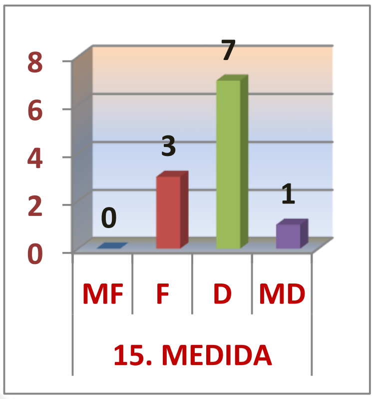
PREGUNTA 13



PREGUNTA 14

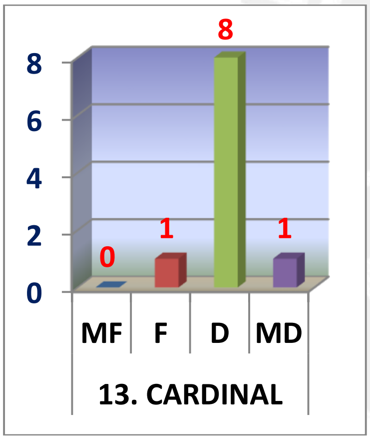


PREGUNTA 15

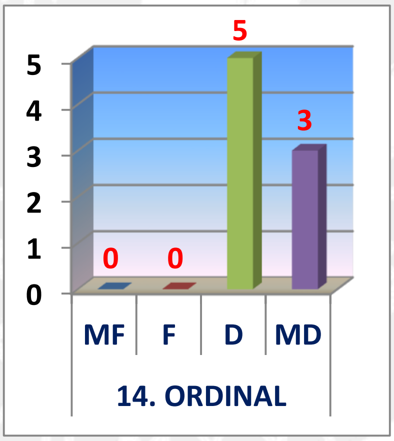


PROFESORES DE INSTITUCIONES PRIVADAS

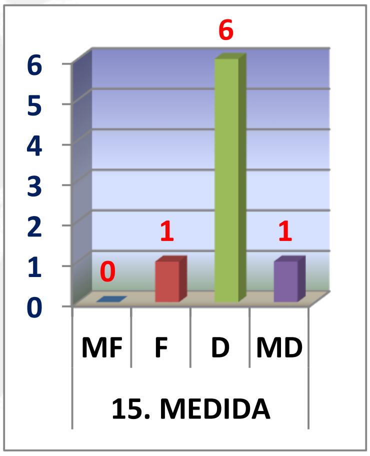
PREGUNTA 13



PREGUNTA 14



PREGUNTA 15



Los problemas 13, 14 y 15 (C–T–C) son de ***transformación de una comparación***. El problema 13, con cardinales para los docentes de I. P. son 2 fáciles, 7 difíciles y 2 muy difíciles, mientras que para los de I. Priv. Son 1, fáciles; 8, difíciles y 1 muy difíciles.

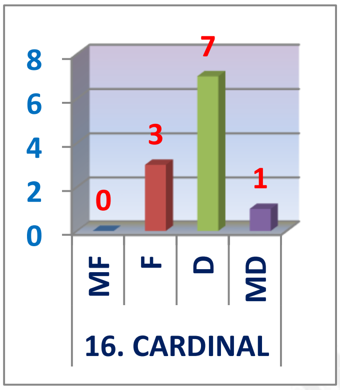
El problema 14, con ordinales para los docentes, tanto de instituciones públicas como privadas son de dificultad alta (2, fáciles; 6, difíciles, 3 muy difíciles) para I. P. y (5, difíciles y 3 muy difíciles) para los de I. Priv.

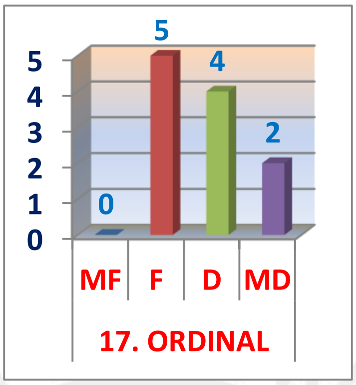
El problema 15, con medidas, tanto para los docentes de I. P. como de I. Priv. son de dificultad mediana, (3, fáciles; 7, difíciles y 1, muy difícil), y (1, fácil; 6 difíciles y 1 muy difícil) para los de I. Priv.

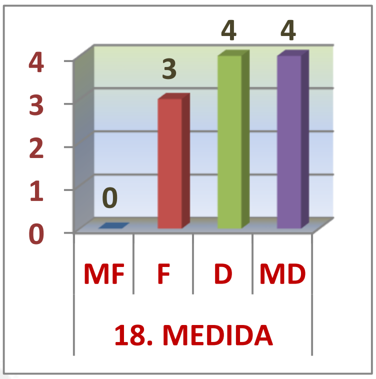
COMPARACIÓN – TRANSFORMACIÓN – COMPARACIÓN

PROFESORES DE INSTITUCIONES PÚBLICAS

PREGUNTA 16 **PREGUNTA 17** **PREGUNTA 18**

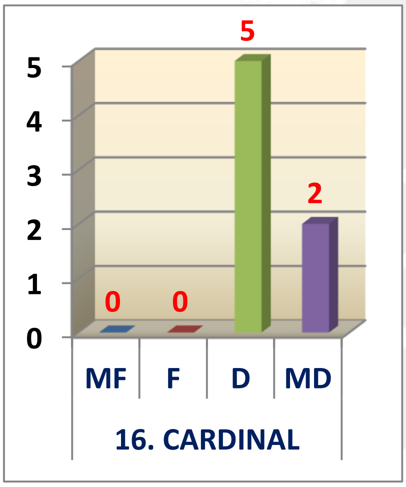


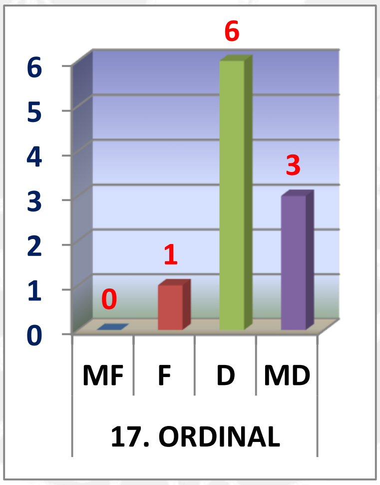


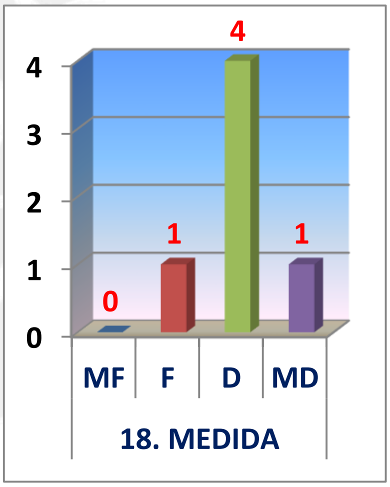


PROFESORES DE INSTITUCIONES PRIVADAS

PREGUNTA 16 **PREGUNTA 17** **PREGUNTA 18**







Los problemas 16, 17 y 18 (C–C–C) son de ***doble comparación***. El problema 16, con cardinales para los docentes de ambas instituciones son de dificultad alta. Para los de I. P. hay 3 fáciles, 7 difíciles y 1 muy difícil,y para los de I. Priv. son 5, difíciles y 2 muy difíciles.

El problema 17, con ordinales para los docentes, tanto de instituciones públicas como privadas son de dificultad alta (2, fáciles; 6, difíciles, 3 muy difíciles) para I. P. y (5, difíciles y 3 muy difíciles) para los de I. Priv.

El problema 18, con medidas para los docentes de I. P. como de I. Priv. son de dificultad alta, (3, fáciles; 4, difíciles y 4, muy difíciles), y (1, fácil; 4 difíciles y 1 muy difícil) para los de I. Priv.

SIGNIFICADO DE LOS NUMEROS	PAPEL DE LOS NUMEROS			
	COMB.	CAMBIO	COMP.	IGUAL.
Cardinal	$a+b=?$	$a+b=?$	$a+b=?$	$a+b=?$
	$a+?=c$	$a+?=c$	$a+?=c$	$a+?=c$
	$¿+b=c$	$¿+b=c$	$¿+b=c$	$¿+b=c$
Medida	$a+b=?$	$a+b=?$	$a+b=?$	$a+b=?$
	$a+?=c$	$a+?=c$	$a+?=c$	$a+?=c$
	$¿+b=c$	$¿+b=c$	$¿+b=c$	$¿+b=c$

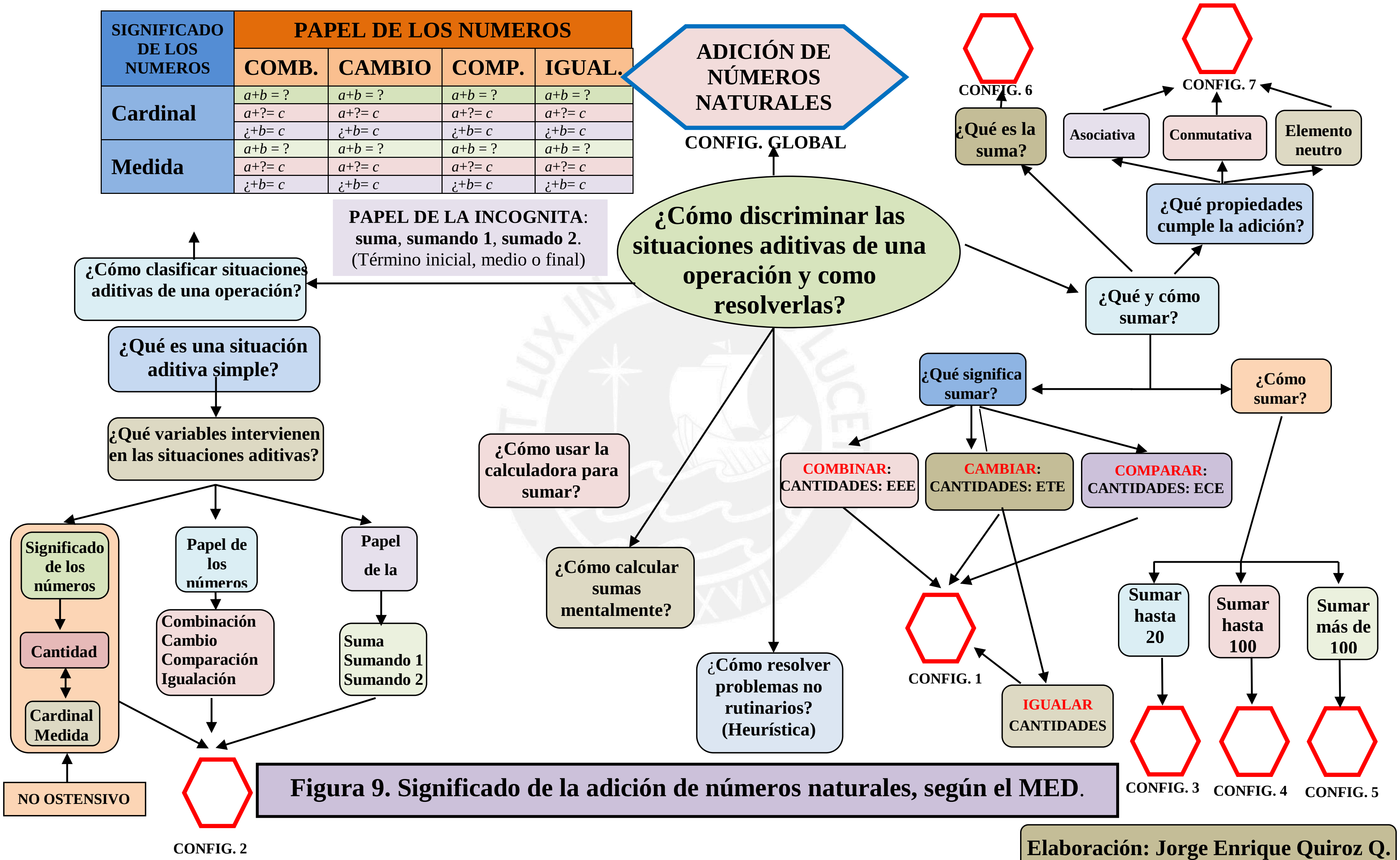


Figura 9. Significado de la adición de números naturales, según el MED.

Elaboración: Jorge Enrique Quiroz Q.

Capitulo 4

4 SIGNIFICADO DE REFERENCIA

RESUMEN

Este capítulo se ha elaborado a partir de los aportes realizados por investigadores y cuyos resúmenes se dan en la primera sección del capítulo 2 y los significados que propone el sistema curricular peruano descritos en el capítulo 3. Consta de dos secciones, en la primera se describe una configuración formal, que ubica al objeto matemático: situación aditiva en las Matemáticas como estructura científica, la misma que no es útil para la enseñanza en el nivel de la educación primaria. En la segunda se estudian las situaciones aditivas: tipos de situaciones aditivas simples, significados de la suma y escenarios de aprendizaje. En este capítulo respondemos a la segunda pregunta de investigación y al objetivo general.

4.1 CONFIGURACIONES FORMALES

En una configuración de este tipo, según Godino, Font y Wilhelmi (2006):

> Las entidades matemáticas que se ponen en juego en las situaciones aditivas son analizadas de manera formal o estructural en el marco interno de las matemáticas. Para ello, los números dejan de ser considerados como medios de expresión de cantidades de magnitudes (número de personas o cosas, papel que cumplen en una situación, etc.) y son interpretados bien como elementos de una estructura caracterizada según la teoría de conjuntos, bien según los axiomas de Peano. (p. 137)

N es el menor de los semigrupos conmutativos totalmente ordenado.

En este contexto de formalización matemática se plantean preguntas tales como:

- ¿Qué es un número natural?
- ¿Qué es la suma de dos números naturales?
- ¿Qué es la adición de dos números naturales?
- ¿Qué propiedades verifica la adición de números naturales?
- ¿Qué tipo de estructura algebraica tiene el conjunto de los números naturales dotado de la ley de composición interna de adición y de la relación de orden menor o igual que?

- ¿Cómo se debería definir la suma, cuando los números naturales son definidos como cardinales de conjuntos finitos?
- ¿Qué situaciones problemáticas se resuelven con la adición de números naturales?

Para responder a estas preguntas necesitamos elaborar ***recursos lingüísticos*** específicos, técnicas operatorias (recursión, función de recursividad, suma de dos números naturales.) ***conceptos*** (número natural, ley de composición interna, semigrupo, semigrupo ordenado.), ***propiedades*** (asociativa, conmutativa, elemento neutro, elemento regular) y ***argumentaciones*** (deductivas), en definitiva una configuración epistémica con rasgos o características específicas, adaptadas a la generalidad y rigor del trabajo matemático.

LOS NÚMEROS NATURALES

Definición

Denominamos ***sucesor del conjunto A***, al conjunto simbolizado por A^+ y definido por:

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

> Según Halmos (1976), ahora se puede definir a los números naturales
>
> "Para definir al 0 como un conjunto con cero elementos no tenemos alternativa; debemos escribir, (como lo hicimos)
>
> $0 = \phi$
>
> Si cada número natural ha de ser igual al conjunto de sus predecesores, tampoco tenemos alternativa al definir 1, al 2, al 3; debemos escribir
>
> $1 = 0^+ \ (= \{0\})$
>
> $2 = 1^+ \ (= \{0, 1\})$
>
> $3 = 2^+ \ (= \{0, 1, 2\})$" (p. 67)

Definición

Decir que **S** es un ***conjunto sucesor*** significa que **S** tiene al 0 y al sucesor de cada uno de sus elementos.

Es decir: i) $0 \in \mathbf{S}$.

ii) $n \in \mathbf{S} \Rightarrow n^+ \in \mathbf{S}$

Teorema

Si A y B son conjuntos sucesores, entonces $A \cap B$ es también un conjunto sucesor.

Axioma del infinito

Existe un conjunto que contiene al 0 y al sucesor de cada uno de sus elementos.

Como 0 pertenece a cada conjunto sucesor, 0 está en la intersección de toda familia no vacía de conjuntos sucesores. Por otro lado, si $\boldsymbol{x}$ pertenece a la intersección de toda familia no vacía de conjuntos sucesores, entonces $\boldsymbol{x}$ está en cada conjunto sucesor. Luego, $\boldsymbol{x}^+$ está en cada conjunto sucesor. Por lo tanto, $\boldsymbol{x}^+$ está en la intersección de toda familia no vacía de conjuntos sucesores.

Estas ideas permiten definir al conjunto de los números naturales.

Definición

N = $\cap$\{A $\in \mathscr{P}$(S)/ A es conjunto sucesor\}.

$\mathscr{P}$(S): partes de S, indica al conjunto de todos los conjuntos incluidos en S.

N es la intersección de todos los conjuntos sucesores incluidos en S.

Teorema

N es el menor conjunto sucesor.

ARITMÉTICA

SUMA

Para cada número natural ***m***, existe una función S_m de N en N, tal que la imagen de cero es *m* y la imagen del sucesor de *n* es el sucesor de la imagen de *n*,

Es decir:

$$\forall m \in \mathrm{N},\ \exists\ S_m\colon\ \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{N}\quad \text{tq.}\quad \begin{cases} \boldsymbol{S_m(0) = m} \\ \wedge \\ \boldsymbol{S_m(n^+) = [S_m(n)]^+} \end{cases}$$

Observación

A la imagen de *n* por la función S_m la denominamos suma de *m* y *n* y escribimos: $m + n$. Es decir:

$$\boldsymbol{S_m(n) = m + n}$$

$$\boldsymbol{S_m(0) = m \Leftrightarrow m + 0 = m}$$

$$\boldsymbol{S_m(n^+) = [S_m(n)]^+ \Leftrightarrow m + n^+ = (m + n)^+}$$

Ejemplo

$5 + 3 = S_5(3)$	$(S_m(n) = m + n)$
$= S_5(2^+)$	$(2^+ = 3)$
$= [S_5(2)]^+$	$(S_m(n^+) = (S_m(n))^+$
$= [S_5(1^+)]^+$	$(1^+ = 2)$
$= [[S_5(1)]^+]^+$	$(S_m(n^+) = (S_m(n))^+$
$= [[S_5(0^+)]^+]^+$	$(0^+ = 1)$
$= [[[S_5(0)]^+]^+]^+$	$(S_m(n^+) = (S_m(n))^+$
$= [[5^+]^+]^+$	$(S_m(0) = m)$
$= [6^+]^+$	$(6 = 5^+)$
$= 7^+$	$(7 = 6^+)$
$= 8$	$(8 = 7^+)$

La operación, o ley de composición interna, que a cada par de números naturales le hace corresponder su suma se denomina *Adición de números naturales*. (Ver anexos 1 y 2.)

Este tipo de configuración formal no es útil para elaborar el significado de referencia ni para determinar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción planificado de una institución escolar de enseñanza primaria. Investigaciones sobre problemas de la aritmética elemental han puesto de manifiesto, sino el fracaso, muchas dificultades que demuestran lo inadecuado de la noción de ley interna para caracterizar estas operaciones en los niveles de inicial o primaria.

> "Para este tipo de institución necesitamos una configuración, que llamaremos intuitiva (o contextualizada), que presuponga una cierta concepción empírica de las matemáticas. Es decir, una concepción que considere que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones y formalizaciones de la experiencia; una concepción de las matemáticas que suponga que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales." (Godino, Font, y Wilhelmy, 2006, p. 138)

4.2 SITUACIONES ADITIVAS

4.2.1 EXPRESIONES FORMALES ADITIVAS SIMPLES

La expresión formal: $a + b = c$, tal que $a, b, c \in$ N es la representación simbólica de la suma de los números naturales a y b.

Ejemplos:

8 + 5 = 13; 12 + 7 = 19; 34 + 71 = 105; 6 + 0 = 6; 452 + 720 = 1 722.

La ***suma*** de dos números naturales es el resultado de la adición de números naturales, operación que consisten en determinar un tercer natural a partir de un par de números dados. La determinación de la *suma* de números naturales es un medio de evitar el conteo o de medición en situaciones parcialmente cuantificadas.

Sin embargo, debemos preguntarnos ¿cómo obtiene un niño la suma de números del 0 al 9? La respuesta es que muchas veces debe resolver situaciones desafiantes del entorno familiar y con ayuda de materiales manipulativos o juegos aprender que 2 más 3 es igual a 5; 4 más 5 es igual a 9; 6 más 7 es igual a 13, y así sucesivamente. En algunos casos los adultos pretenden que los niños aprendan solo con el uso de su memoria.

También deben aprender un hecho importante: *que 0 más 0 es igual a 0*.

En el ábaco, tales sumas pueden llevarse a cabo teniendo que aprender solamente la suma de 1 y 1 y siendo necesario únicamente saber contar hasta el 10. Ciertamente, la ventaja que tienen los números escritos sobre el ábaco parece estar bien escondida en esta etapa.

4.2.2 HISTORIAS ADITIVAS CONCRETAS SIMPLES

Son enunciados verbales que describen situaciones de la realidad o de la imaginación que son representadas por expresiones aditivas formales.

Ejemplo: *Juan pescó 5 truchas y Roy 7, en total, los dos pescaron 12 truchas*. Se simboliza por la expresión formal aditiva: 5 + 7 = 12.

Si el lunes, Pedro gana 45 y el martes S/. 50 y nos preguntamos cuanto ganó en total. Podemos afirmar que Pedro, en total, ganó S/. 95 sin tener que realizar algún conteo, debido a que conocemos técnicas o procedimientos de sumar. Si alguien nos pregunta: ¿Cuánto más ganó Pedro el martes que el lunes? Podemos afirmar que el martes, Pedro ganó S/. 5 más. Esta operación también la hacemos sin necesidad de contar.

Toda *historia aditiva simple*, por el lugar de la incógnita, determina, por lo menos, tres *situaciones aditivas concretas simples*:

Juan pescó 5 truchas y Roy 7. ¿Cuántas truchas en total pescaron los dos? Su representación simbólica: $5 + 7 = x$. La incógnita es la suma

Si Juan pescó 5 truchas y entre Juan y Roy pescaron 12. ¿Cuántas truchas pescó Roy? Su representación simbólica: $5 + x = 12$. La incógnita es el segundo sumando.

Juan pescó algunas truchas y Roy pescó 7. Si los dos pescaron 12 truchas. ¿Cuántas truchas pescó Juan? Su representación simbólica: $x + 7 = 12$. La incógnita es el primer sumando

Los aprendices al resolver situaciones aditivas concretas utilizan modelos que requieren de una situación aditiva formal. Es decir, el aprendizaje de la adición de números naturales implica, por tanto, el dominio de las situaciones formales y de procedimientos o algoritmos de sumar.

4.2.3 SITUACIONES ADITIVAS SIMPLES

Siguiendo a Carpenter y Moser (1982), Vergnaud (1990, Castro (2001), Cid, Godino y Batanero (2004a), entre otros, las situaciones concretas, que dan sentido a la adición de números naturales (situaciones aditivas de una sola operación) se clasifican atendiendo al papel que juegan los números que intervienen en ella, que es variable y puede ser:

Estado: *cuando los números del problema son cardinales, ordinales o medida.*

Transformación: cuando un número expresa la ***variación***, ***cambio*** o ***transformación*** que sufre un *estado*, una ***comparación*** o una ***transformación*** (***doble transformación***).

Comparación: cuando el número indica la ***diferencia que existe entre dos estados que se comparan*** o ***dos comparaciones*** (***doble comparación***).

En un problema aditivo simple, es decir, en un problema aditivo en el que están implicados tres números, se puede distinguir diferentes aspectos que los hacen distintos entre ellos. Así, se puede considerar su ***estructura***, la ***posición de la incógnita***, los ***tipos de números*** y el ***contexto*** en que está redactado.

Consideramos cuatro tipos de estructura en la enseñanza de los problemas aditivos: ***combinación***, ***transformación*** (***cambio*** o ***variación***), ***comparación*** e ***igualación***.

Analicemos las siguientes situaciones aditivas simples cuya representación simbólica es:

$$5 + 7 = 12$$

1. Alicia vende 5 sandías y Rocío 7. ¿Cuántas sandías vendieron Alicia y Rocío?
   El significado de los números en esta situación es de ***cardinales***.
   La estructura de esta situación aditiva es: ***Estado*** – ***Estado*** – ***Estado***.
2. *Liz está en el 7° piso, entra al ascensor y sube 5 pisos. ¿En qué piso se encuentra Liz?*
   El significado de los números en esta situación es de ***ordinales***.
   La estructura de esta situación aditiva es: ***Estado*** – ***Transformación*** – ***Estado***.
3. *El lunes Daniel recorre 7 km. El martes recorre 5 km más que el lunes. En los dos días, ¿Cuánto recorre Daniel?*
   El significado de los números en esta situación es de ***medida***.
   La estructura de esta situación aditiva es: ***Estado*** – ***Comparación*** – ***Estado***.
4. *Juan pesca 7 truchas por la mañana y 5 por la tarde. ¿Cuántas truchas pescó Juan?*
   El significado de los números en esta situación es de ***cardinales***.
   La estructura de esta situación es: ***Transformación*** – ***Transformación*** – ***Transformación***.
5. *Rita está en el 7° lugar después de Pepe y Rita va algunos 5 lugares más atrás. ¿En qué lugar después de Pepe está Rita?*
   El significado de los números en esta situación es de ***ordinales***.
   La estructura de esta situación es: ***Comparación*** – ***Transformación*** – ***Comparación***.
6. *Dina tiene 7 años más que Sara. Sara tiene 5 más que Tita. ¿Cuántos más que Tita tiene Dina?*
   El significado de los números en esta situación es de ***ordinales***.
   La estructura de esta situación es: ***Comparación*** – ***Comparación*** – ***Comparación***.

7. Juan tiene 7 piñas y Dina tiene 12. ¿Cuántas piñas debe comprar Juan para tener igual número de piñas que Dina?

   El significado de los números en esta situación es de ***ordinales***.

La estructura de esta situación es: ***Comparación*** – ***Comparación*** – ***Comparación***.

4.2.4 VARIABLES EN UNA SITUACIÓN ADITIVA CONCRETA DE NÚMEROS NATURALES

Con base en Cid, Godino y Batanero (2004a) consideramos las variables:

Significado de los números: ***cardinales***, ***ordinales*** o ***medidas***.

Papel de los números en la situación: ***estado***, ***transformación*** o ***comparación***.

Estructura de la situación: *acción que realiza el resolutor de problemas:* ***combinación***, ***transformación***, ***comparación e igualación***.

Posición de la incógnita: en una situación de parte-todo la incógnita puede ser el *total* o *una de sus partes*, en las otras es el término ***inicial***, ***medio*** **o** ***final***.

Sentido del término medio: puede indicar un aumento o disminución del término inicial (si se trata de una transformación o igualación) o bien, puede indicar que el término inicial es mayor igual o menor que el término final (si es una comparación).

Contexto: ***matemático***, ***de la realidad*** (en el aula de clase o fuera de ella); ***semirrealidad*** (realidad construida)

4.2.5 TIPOS DE SITUACIONES ADITIVAS CONCRETAS

Para determinar los diferentes tipos de situaciones aditivas simples haremos interactuar dos variables: ***papel de los números*** en una situación aditiva: ***estado***, ***transformación*** o ***comparación*** y ***estructura de las situaciones aditivas***: ***combinación***, ***transformación***, ***comparación*** o ***igualación***.

ESTRUCTURA DE LAS SITUACIONES ADITIVAS	**PAPEL DE LOS NÚMEROS**		
	ESTADO	**TRANSFORMACION**	**COMPARACION**
COMBINACIÓN EEE, TTT, CCC.	**E–E–E**	**T–T–T**	**C–C–C**
TRANSFORMACIÓN ETE; TTT; CTC.	**E–T–E**	**T–T–T**	**C–T–C**
COMPARACIÓN ECE; CCC.	**E–C–E**		**C–C–C**
IGUALACIÓN EEE.	**E–I–E**		

En total hay 7 tipos diferentes de situaciones aditivas concretas simples: EEE, ETE, ECE, EIE (combinación, transformación, comparación e igualación de estados); TTT, CTC, TIT (combinación, comparación e igualación de transformaciones) y CTC, CCC, CIC (combinación, y comparación de comparaciones). La combinación de transformaciones (TTT) es transformación de una transformación y la combinación de comparaciones (CCC) es una comparación de comparaciones.

Si a estos 7 tipos incorporamos la variable ***posición de la incógnita***: ***parte o todo*** (***combinación***), ***término inicial***, ***medio*** o ***final*** para la otras Hay 21 situaciones distintas.

ESTRUCTURA DE LAS SITUACIONES ADITIVAS	PAPEL DE LOS NÚMEROS		
	ESTADO	TRANSFORMACION	COMPARACION
COMBINACIÓN EEE, TTT, CCC	E–E–E	T–T–T	C–C–C
	$a + b = ?$	$a + b = ?$	$a + b = ?$
	$a + ? = c$	$a + ? = c$	$a + ? = c$
	$¿ + b = c$	$¿ + b = c$	$¿ + b = c$
TRANSFORMACIÓN (CAMBIO O VARIACIÓN) ETE; TTT; CTC	E–T–E	T–T–T	C–T–C
	$a + b = ?$	$a + b = ?$	$a + b = ?$
	$a + ? = c$	$a + ? = c$	$a + ? = c$
	$¿ + b = c$	$¿ + b = c$	$¿ + b = c$
COMPARACIÓN ECE; CCC	E–C–E		C–C–C
	$a + b = ?$		$a + b = ?$
	$a + ? = c$		$a + ? = c$
	$¿ + b = c$		$¿ + b = c$
IGUALACIÓN EEE, TTT, CCC	E–I–E		
	$a + b = ?$		
	$a + ? = c$		
	$¿ + b = c$		

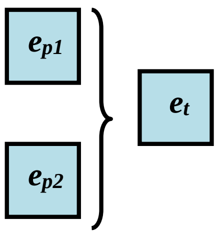
Si a estas 21 situaciones incorporamos la variable ***significado de los números***: ***cardinales***, ***ordinales*** o ***medidas*** obtenemos 63 situaciones aditivas simples. Finalmente consideramos el sentido del término medio: aumenta o disminuye el término inicial. Duplicamos las situaciones, excepto para el tipo: E–E–E. En total hay 117 situaciones aditivas concretas simples.

Tipo 1: COMBINACIÓN DE ESTADOS

Estado –□ *Estado* –□ Estado (EEE)

Es una situación parte-todo. El todo: e_t se ha partido en dos partes: e_{p1} y e_{p2}. Todos los números son *estados*

Representamos esta situación mediante el diagrama:

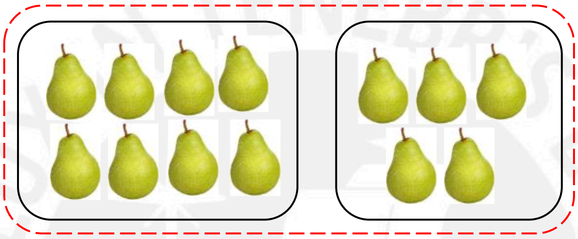


Hay 3 subtipos de problemas, dependiendo de la ubicación de la incógnita. La suma, el segundo o primer sumando.

SUBTIPOS DE PROBLEMAS DE ESTADO – ESTADO – ESTADO (EEE)				
Sub tipos	e_{p1}	e_{p2}	e_f	**Forma**
EEE3	Dato	Dato	Incógnita	$a + b = \boxed{\_\_}$
EEE2	Dato	Incógnita	Dato	$a + \boxed{\_\_} = b$
EEE1	Incógnita	Dato	Dato	$\boxed{\_\_} + b = c$

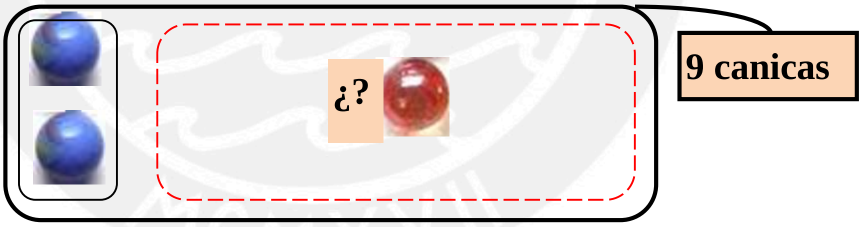
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***cardinales***.

EEE3C.Luisa compró 8 peras y David compró 5. ¿Cuántas peras compraron en total?



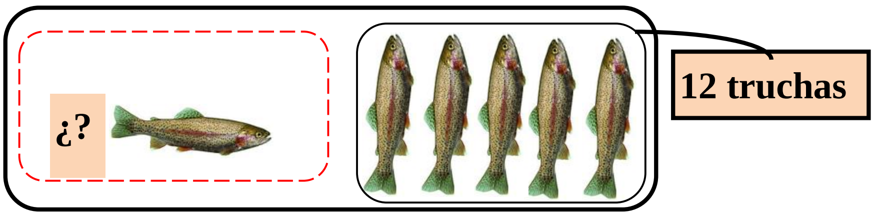
$8 + 5 = \boxed{\_\_}$

EEE2C. Javier tiene 2 canicas azules y otras rojas. En total tiene 9 canicas. ¿Cuántas canicas son azules?



$2 + \boxed{\_\_} = 9$

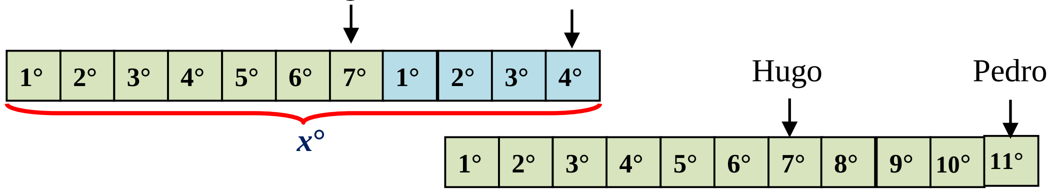
EEE1C. Hugo pescó algunas truchas y Luis pescó 5 truchas. En total pescaron 12 truchas. ¿Cuántas truchas pescó Hugo?



$\boxed{\_\_} + 5 = 12$

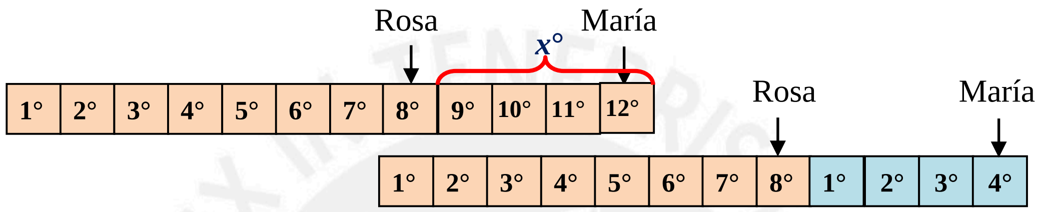
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***ordinales***.

ETE3O. Hugo está en 7° lugar en una cola, Pedro es el 4° después de Hugo. ¿En qué lugar está Pedro?



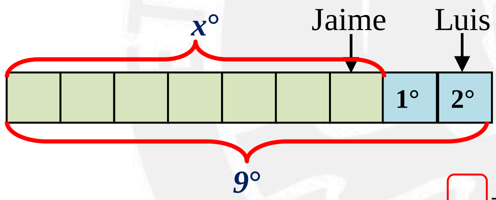
$7 + 4 = \boxed{\_\_}$

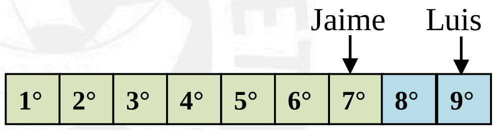
ETE2O. Rosa está en 8° lugar y María en el 12°. ¿En qué lugar, después de Rosa está María?



$8 + \boxed{\_\_} = 12$

ETE1O. Roy es el 2° después de Luis y Luis ocupa el 9° de la cola. ¿Qué lugar ocupa Roy?

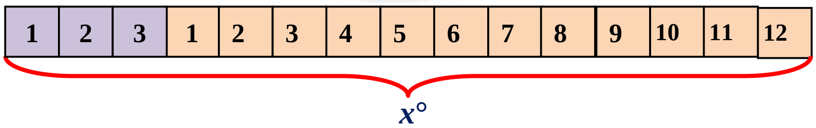




$\boxed{\_\_} + 2 = 9$

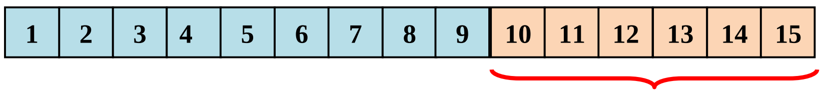
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***medida***.

ETE3M. Para ir de su casa al colegio, Diana camina 3 km y luego va en auto 12 km. ¿Cuántos km dista de la casa de Diana al Colegio?



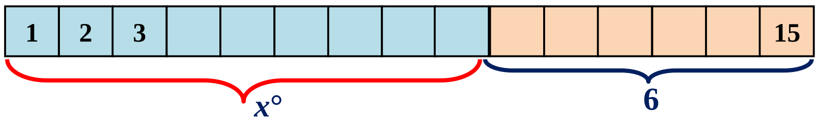
$12 + 8 = \boxed{\_\_}$

ETE2M. Compré 9 kg de papa amarilla y algunos kg de papa blanca. En total compré 15 kg de papa. ¿Cuántos kg de papa blanca compré?



$20 + \boxed{\_\_} = 50$ *x°*

ETE1M. Roy tiene un número de soles. Liz tiene S/. 6. Los dos tienen S/. 15. ¿Cuánto tiene Roy?

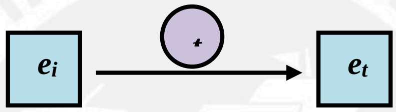


$\boxed{\_\_}$ = 6 = 15

Tipo 2: TRANSFORMACIÓN DE ESTADOS

Estado - *Transformación* - Estado (ETE)

Un número que juega el papel de *estado inicial* e_i (*cardinal*, *ordinal* o *medida*) es transformado por otro número *t* en un tercer número en el papel de estado final e_f. La transformación de e_i puede ser de aumento o de disminución. Representamos esta situación mediante el diagrama:



También hay 6 subtipos de problemas: 3 por el lugar de la incógnita. Cada uno de estos subtipos se subdivide en dos, considerando si la transformación es positiva o negativa, es decir si la cantidad inicial crece o disminuye.

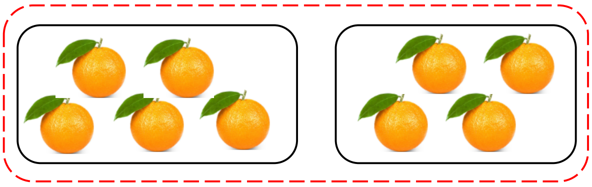
- Conociendo el estado inicial y la transformación, hallar el estado final.
- Conociendo el estado inicial y el estado final, hallar la transformación.
- Conociendo el estado final y la transformación, hallar el estado inicial.

SUBTIPOS DE PROBLEMAS DE ESTADO – *TRANSFORMACIÓN* – ESTADO (ETE)					
Sub tipos	e_i	t	e_f	e_i	**Forma**
ETEA3	Dato	Dato	Incógnita	Aumenta*	$a + b = \boxed{\_\_}$
ETED3	Dato	Dato	Incógnita	Disminuye**	$a = c + \boxed{\_\_}$
ETEA2	Dato	Incógnita	Dato	Aumenta	$a + \boxed{\_\_} = c$
ETED2	Dato	Incógnita	Dato	Disminuye	$a = c + \boxed{\_\_}$
ETEA1	Incógnita	Dato	Dato	Aumenta	$\boxed{\_\_} + b = c$
ETED1	Incógnita	Dato	Dato	Disminuye	$\boxed{\_\_} = c + b$

* Aumenta el estado inicial.
** Disminuye el estado inicial.

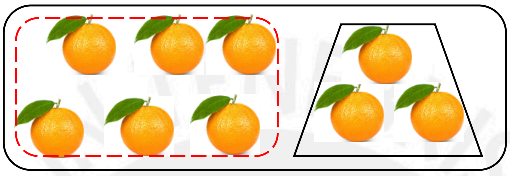
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***cardinales***.

ETE$_{A3}$. Luisa tenía 5 naranjas. Su amigo Javier le regaló 4 naranjas. ¿Cuántas naranjas, en total, tiene Luisa?



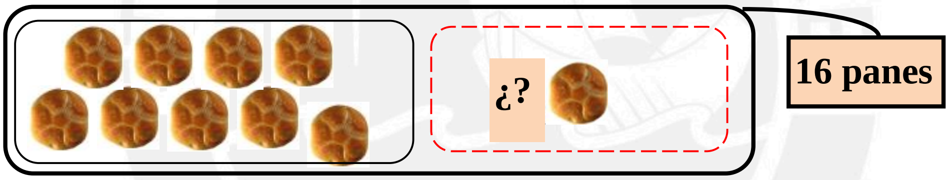
$5 + 4 = \boxed{\_\_}$

ETE$_{D3}$. Luisa tenía 9 naranjas. Ella come 3. ¿Cuántas naranjas le queda a Luisa?



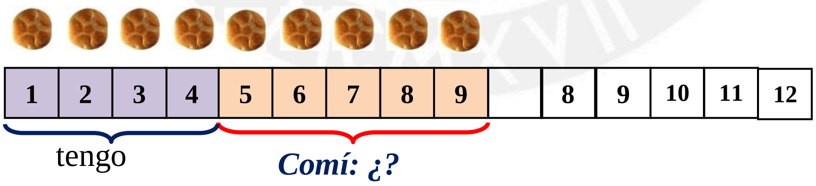
$9 = 4 + \boxed{}$

ETE$_{A2}$. Tenía 9 panes y compré otros más. ¿Ahora tengo 16 panes? ¿Cuántos panes compré?



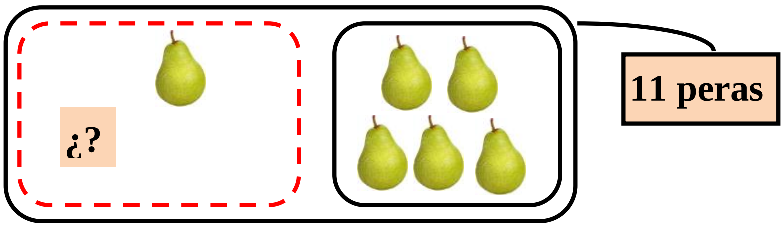
$9 + \boxed{\_\_} = 16$

ETE$_{D2}$. Tenía 9 panes. Comí algunos, ahora tengo 4 panes. ¿Cuántos panes comí?



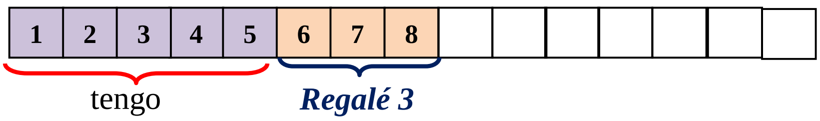
$9 = 4 + \boxed{\_\_}$

ETE$_{A1}$. Tenía un número de peras y Roy me dio 5. Ahora, tengo 11. ¿Cuántas tenía al inicio?



$\boxed{\_\_} + 5 = 11$

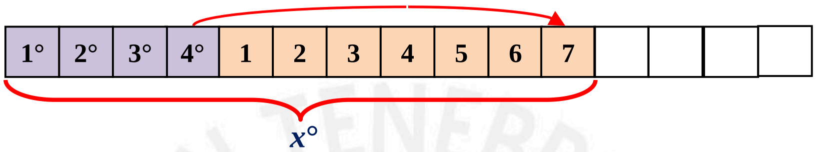
ETE$_{D1}$. Tenía un número de peras y regalé 3. Ahora, tengo 5 peras. ¿Cuántas tuve al inicio?



$\boxed{\_\_} = 5 + 3$

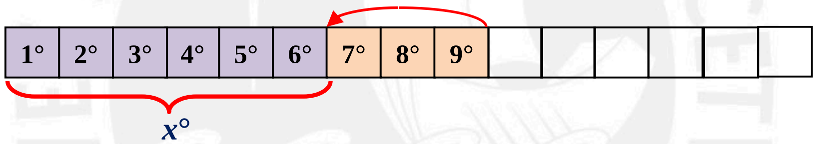
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***ordinales***.

ETE$_{A3}$. Laura es la cuarta en una carrera. Antes de llegar a la meta es adelantada por siete competidoras. Todas llegaron en lugares diferentes. ¿Qué lugar ocupó Laura?



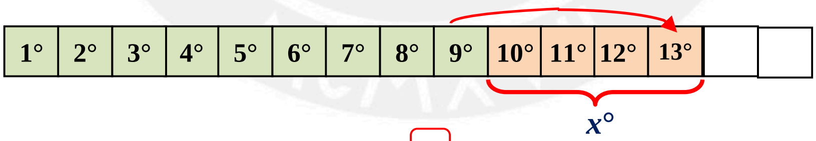
$4 + 7 = \boxed{\_\_}$

ETE$_{D3}$. Laura es la novena en una carrera. Antes de llegar a la meta, se retiran tres que estaban delante de ella. ¿Ahora, qué lugar ocupa Laura?



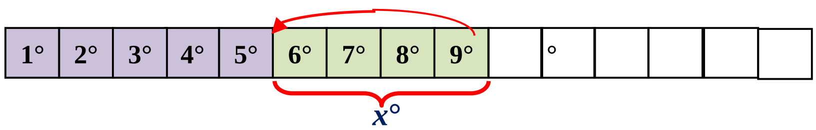
$9 = 3 + \boxed{\_\_}$

ETE$_{A2}$. Luis estaba en el noveno lugar de la cola para entrar al cine. Él dejó entrar a algunas personas. Luis entró en décimo tercer lugar. ¿A cuántas personas dejó entrar Luis?



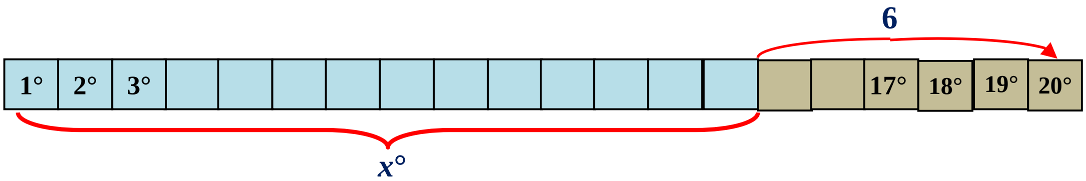
$9 + \boxed{\_\_} = 13$

ETE$_{D2}$. Luis estaba en el noveno lugar de la cola, cuando se retiran algunas personas delante de él y Luis queda en quinto lugar. ¿Cuántas personas se retiraron?



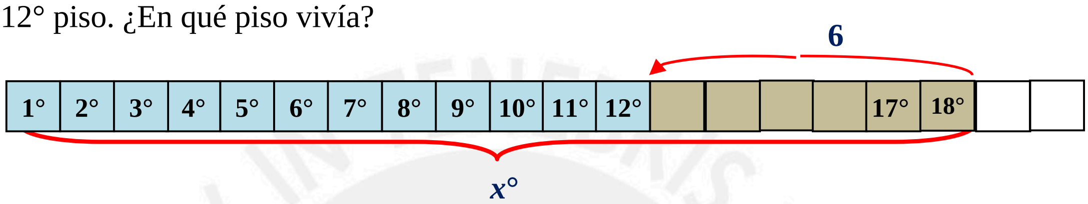
$9 = 5 + \boxed{\_\_}$

ETE$_{A1}$. Vivía en un piso de un edificio. Me mudé y vivo 6 pisos más arriba. Ahora, vivo en el 20° piso. ¿En qué piso vivía?



$$\boxed{} + 6 = 20$$

ETE$_{D1}$. Vivía en un piso de un edificio. Me mudé y vivo 6 pisos más abajo. Ahora, vivo en el 12° piso. ¿En qué piso vivía?



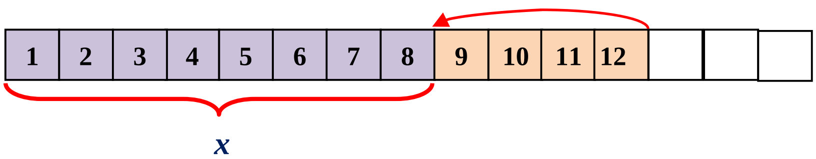
$$\boxed{} = 6 + 12$$

Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***medida***.

ETE$_{A3}$. En una caja entran 12 chocolates. Se agranda la caja para 4 chocolates más. ¿Cuántos chocolates entran en la nueva caja?

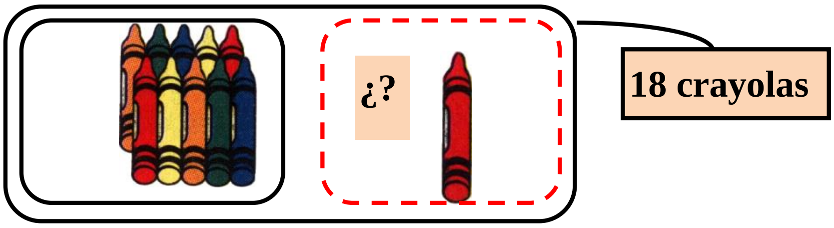
$$12 + 4 = \boxed{}$$

ETE$_{D3}$. En una caja entran 12 chocolates. Se modifica la caja para 4 chocolates menos. ¿Cuántos chocolates entran en la nueva caja?



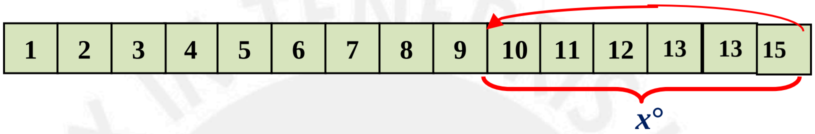
$$12 = 4 + \boxed{}$$

ETE$_{A2}$. En una caja entran 10 crayolas. Se agranda la caja para algunas más. En la nueva caja entran 18 crayolas. ¿Cuántas crayolas más caben en la nueva caja?



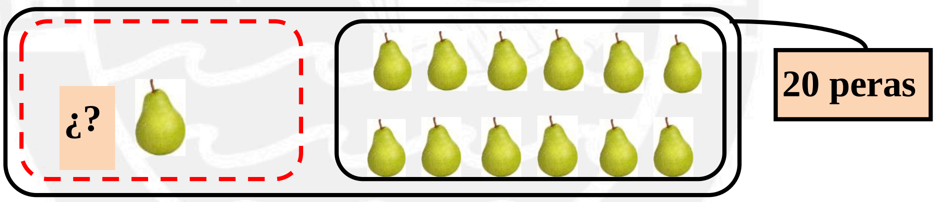
$$10 + \boxed{\_\_} = 18$$

ETE$_{D2}$. En una caja entran 15 crayolas. Se modifica la caja y en la nueva entran 9 crayolas. ¿Cuántas crayolas menos caben en la nueva caja?



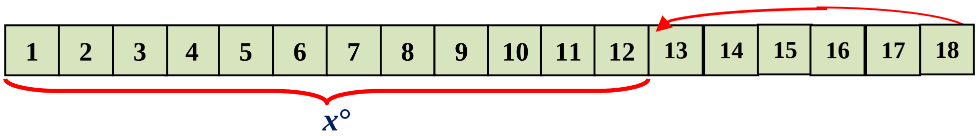
$$15 = 9 + \boxed{\_\_}$$

ETE$_{A1}$. En una caja entran un número de peras. Se agranda la caja para 12 más. En la nueva caja entran 20 peras. ¿Cuántas peras caben en la primera caja?



$$\boxed{\_\_} + 12 = 20$$

ETE$_{D1}$. En una caja entran un número de peras. Se modifica la caja para 6 menos. En la nueva caja entran 12 peras. ¿Cuántas peras caben en la primera caja?

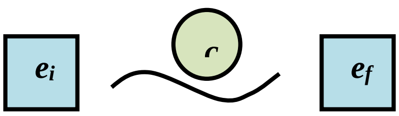


$$\boxed{\_\_} = 12 + 6$$

Tipo 3: COMPARACIÓN DE ESTADOS

Estado - *Comparación* - Estado (ECE)

Un número c compara dos números en los papeles de ***estado inicial*** y ***estado final***. Representamos esta situación mediante el diagrama:

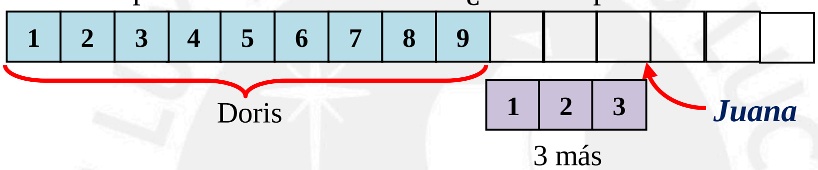


SUBTIPOS DE PROBLEMAS DE ESTADO – *COMPARACIÓN* – ESTADO (ECE)					
Sub tipos	e_i	c	e_f	c	**Forma**
ECEA3	Dato	Dato	Incógnita	Más que*	$a + b = \boxed{\ \ }$
ECED3	Dato	Dato	Incógnita	Menos que**	$a = c + \boxed{\ \ }$
ECEA2	Dato	Incógnita	Dato	Más que	$a + \boxed{\ \ } = c$
ECED2	Dato	Incógnita	Dato	Disminuye	$a = c + \boxed{\ \ }$
ECEA1	Incógnita	Dato	Dato	Más que	$\boxed{\ \ } + b = c$
ECED1	Incógnita	Dato	Dato	Menos que	$\boxed{\ \ } = c + b$

*La comparación: más que.
** La comparación: menos que.

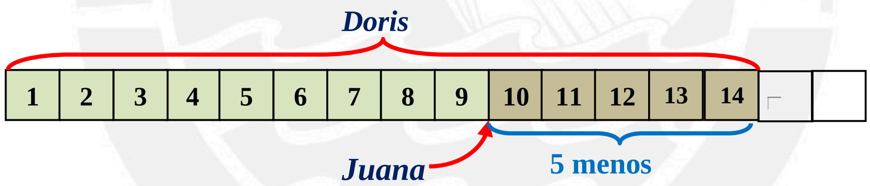
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***cardinales***.

ECEA3. Doris tiene 9 pavos. Juana tiene 3 más. ¿Cuántos pavos tiene Juana?



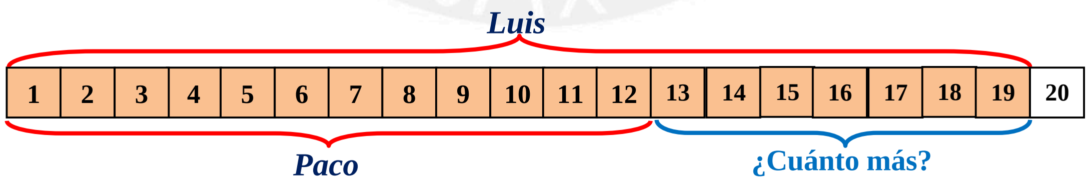
$9 + 3 = \boxed{\ \ }$

ECED3. Doris tiene 14 pavos. Juana tiene 5 menos. ¿Cuántos pavos tiene Juana?



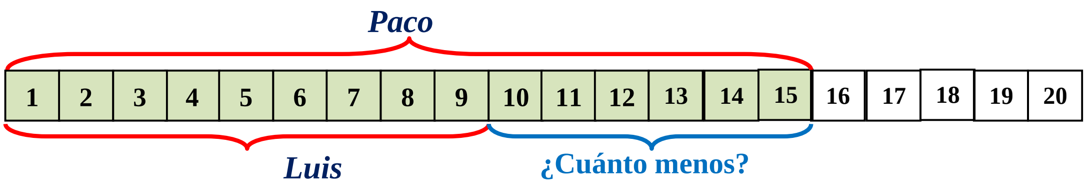
$14 = 5 + \boxed{\ \ }$

ECEA2. Paco tiene 12 canicas y Luis tiene 19. ¿Cuántas canicas más tiene Luis?



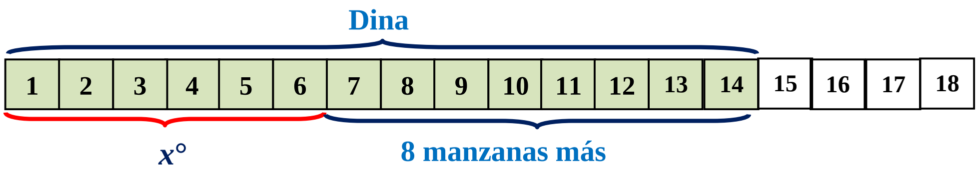
$12 + \boxed{\ \ } = 19$

ECED2. Paco tiene 15 canicas y Luis tiene 9. ¿Cuántas canicas menos tiene Luis?



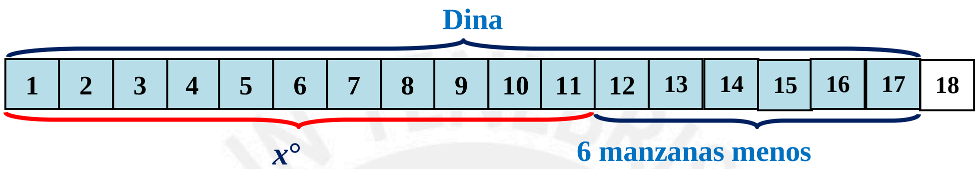
$15 = 9 + \boxed{\ \ }$

ECEA1. Pili tiene un número de manzanas y Dina tiene 8 más que Pili. Si Dina tiene 14 manzanas, ¿cuántas manzanas tiene Pili?



$\boxed{\_\_} + 8 = 14$

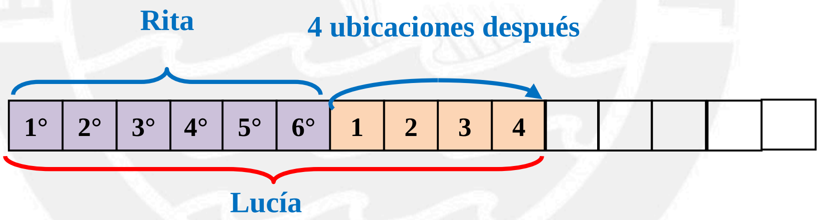
ECED1. Pili tiene un número de manzanas y es 6 manzanas menos que Dina. Si Dina tiene 17 manzanas, ¿cuántas manzanas tiene Pili?



$17 = 6 + \boxed{\_\_}$

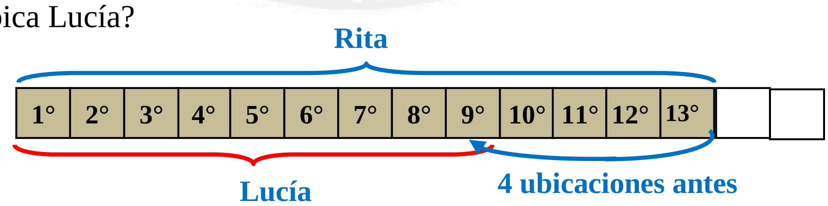
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***ordinales***.

ECEA3. Rita es la sexta en una carrera. Lucía está 4 ubicaciones después de Rita. ¿En qué lugar se ubica Lucía?



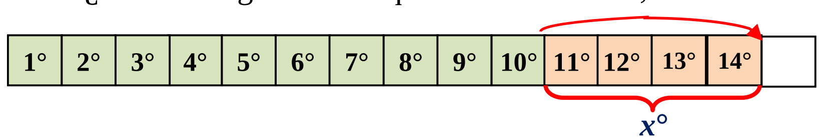
$+ 4 = \boxed{\_\_}$

ECED3. Rita es la décimo tercera en una carrera. Lucía está 4 ubicaciones antes de Rita. ¿En qué lugar se ubica Lucía?



$13 = 4 + \boxed{\_\_}$

ECEA2. Dante es el 10°. ¿Cuántos lugares antes que Luis está Dante, si Luis es el 14°?



$10 + \boxed{\_\_} = 14$

ECE$_{D2}$. Dante es el 12°. ¿Cuántos lugares antes que Dante está Luis, si Luis es el 7°?

1°	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**	**8°**	**9°**	**10°**	**11°**	**12°**			

Luis $x°$

$12 = 7 + \boxed{\_\_}$

ECE$_{A1}$. Estoy en la lista alfabética de mi aula. Mi amigo Pedro está 6 lugares después que yo y ocupa el décimo quinto lugar. ¿Qué lugar ocupo en la lista alfabética?

6 ubicaciones después

1°	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**	**8°**	**9°**	**10°**	**11°**	**12°**	**13°**	**14°**	**15°**

$x°$

$\boxed{\_\_} + 6 = 15$

ECE$_{D1}$. Estoy en la lista alfabética de mi aula. Mi amigo Pedro está 4 lugares delante que yo y ocupa el séptimo lugar. ¿Qué lugar ocupo en la lista alfabética?

1°	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**	**8°**	**9°**	**10°**	**11°**	**12°**			

$x°$ **4 ubicaciones delante**

$\boxed{\_\_} = 7 + 4$

Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de **medida**.

ECE$_{A3}$. Doris trabajó 11 días. Juana trabajó 5 días más. ¿Cuántos días trabajó Juana?

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**								

Doris

1	**2**	**3**	**4**	**5**

5 más

Juana

$10 + 5 = \boxed{\_\_}$

ECE$_{D3}$. Doris trabajó 17 días. Juana trabajó 5 días menos. ¿Cuántos días trabajó Juana?

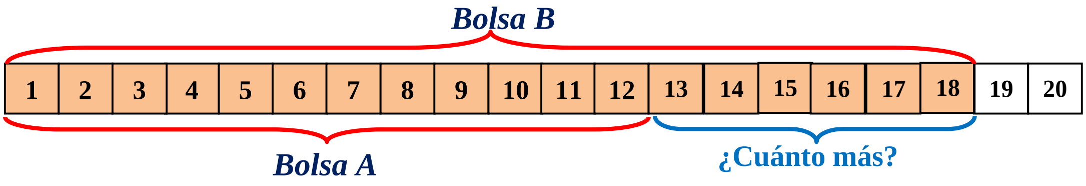
Doris

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**

Juana **5 menos**

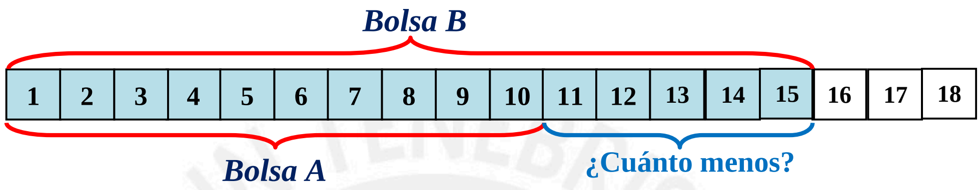
$17 = 5 + \boxed{\_\_}$

ECE$_{A2}$**.** En una bolsa A entran 12 panes. En la bolsa B entran 18 panes. ¿Cuántos panes más caben en la bolsa B?



12 + $\boxed{\_\_}$ = 18

ECE$_{D2}$**.** En una bolsa A entran 15 panes. En la bolsa B entran 10 panes. ¿Cuántos panes menos caben en la bolsa B?



15 = 10 + $\boxed{\_\_}$

ECE$_{A1}$**.** Un camión pequeño puede llevar un número de toros. Un camión mediano lleva 4 más y en él caben 12 toros. ¿Cuántos toros caben en un camión pequeño?

$\boxed{\_\_}$ + 4 = 12

ECE$_{D1}$**.** Un camión mediano puede llevar un número de toros. Un camión pequeño lleva 4 menos y en él caben 8 toros. ¿Cuántos toros caben en un camión mediano?

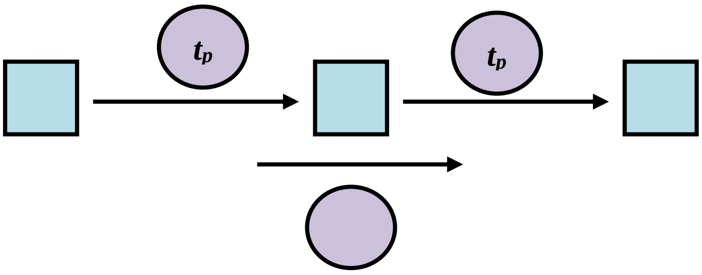
$\boxed{\_\_}$ = 4 + 8

Tipo 4: DOBLE TRANSFORMACIÓN

Transformación - *Transformación* - Transformación (TTT)

Una transformación que se descompone en partes. Es decir una partición de un todo t_t en dos partes t_{p1} y t_{p2}. Se trata de una situación *parte – todo* en la que los tres números son transformaciones.

La situación se representa mediante el diagrama:

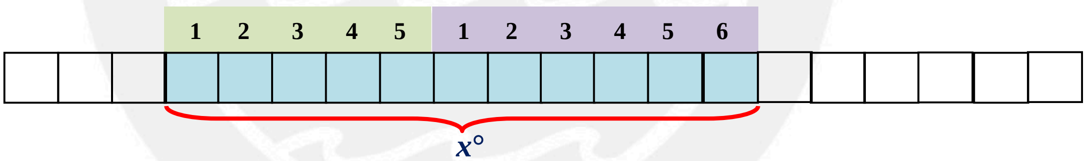


SUBTIPOS DE PROBLEMAS DE TRANSFORMACIÓN – TRANSFORMACIÓN – TRANSFORMACIÓN (TTT)					
Sub tipos	t_{p1}	t	t_{p2}	t_{p1}	**Forma**
TTTA3	Dato	Dato	Incógnita	Aumenta*	$a + b = \boxed{\_\_}$
TTD3	Dato	Dato	Incógnita	Disminuye**	$a = c + \boxed{\_\_}$
TTA2	Dato	Incógnita	Dato	Aumenta	$a + \boxed{\_\_} = c$
TTD2	Dato	Incógnita	Dato	Disminuye	$a = c + \boxed{\_\_}$
TTA1	Incógnita	Dato	Dato	Aumenta	$\boxed{\_\_} + b = c$
TTD1	Incógnita	Dato	Dato	Disminuye	$\boxed{\_\_} = c + b$

*Aumenta la primera transformación.
** Disminuye la primera transformación

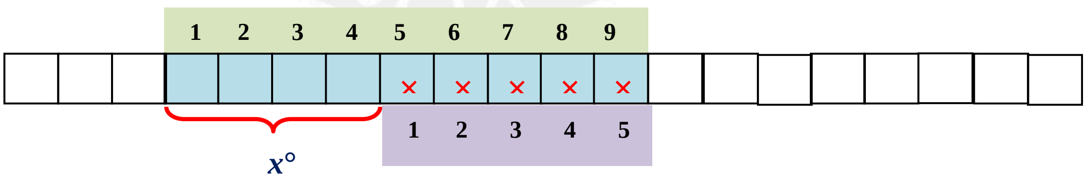
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***cardinales***.

TTTA3. Katy, el lunes vendió 6 pavos y el martes 8. ¿Cuántos pavos vendió en los dos días?



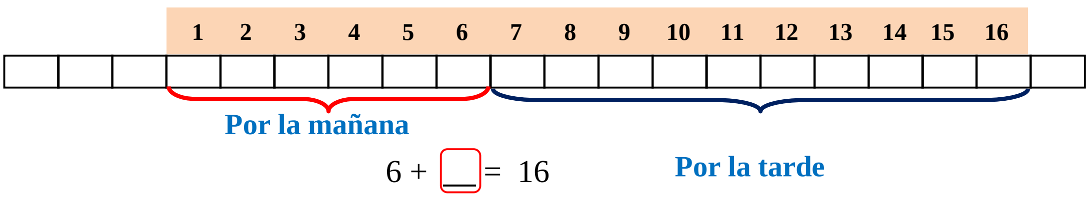
$6 + 8 = \boxed{\_\_}$

TTTD3. Katy, el lunes ganó 9 canicas y perdió 5. El lunes, ¿ganó o perdió? ¿Cuánto?



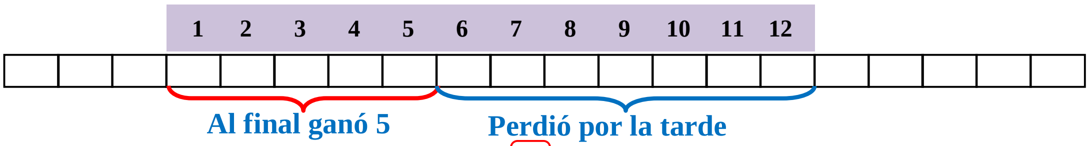
$9 = 5 + \boxed{\_\_}$

TTTA2. Javier ganó 6 canicas por la mañana. En la tarde ganó algunas más. Al final ganó 16 canicas ¿Cuántas canicas ganó por la tarde?



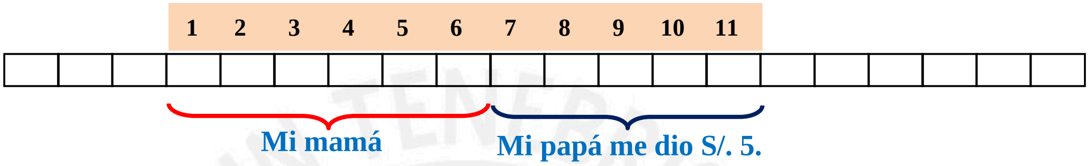
$6 + \boxed{\_\_} = 16$

TTT$_{\mathbf{D2}}$**.** Javier ganó 12 canicas por la mañana. En la tarde perdió algunas. Al final ganó 5 canicas ¿Cuántas canicas perdió por la tarde?



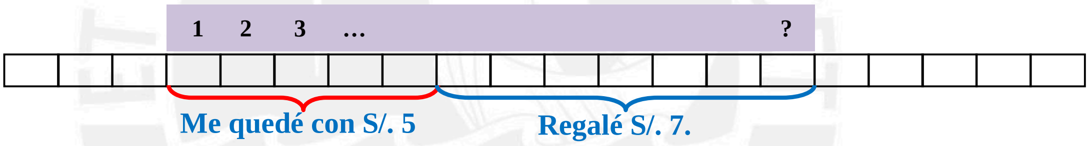
12 = 5 + $\boxed{\_\_}$

TTT$_{\mathbf{A1}}$**.** Ayer, mi mamá me dio algo de dinero y mi papá me dio S/. 5. Entre los dos me dieron S/. 11? ¿Cuánto me dio mi mamá?



$\boxed{\_\_}$ + 5 = 11

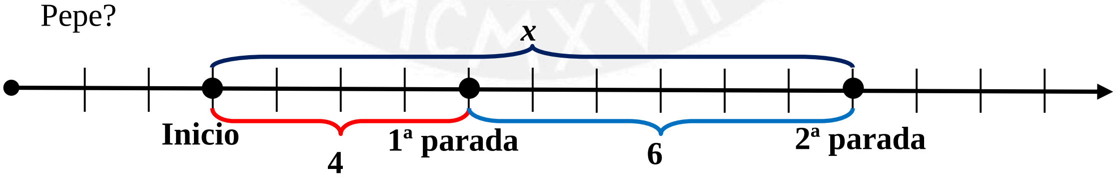
TTT$_{\mathbf{D1}}$**.** Ayer, mi mamá me dio algo de dinero. De ese dinero regalé S/. 7 y me queda S/. 5. ¿Cuánto me dio mi mamá?



$\boxed{\_\_}$ = 5 + 7

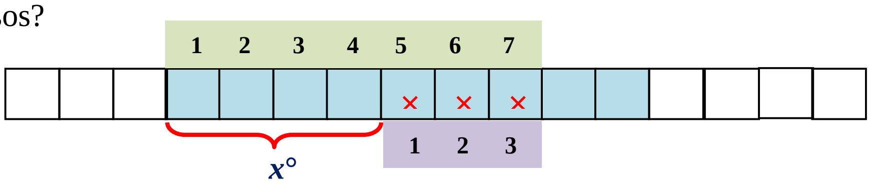
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***ordinales***.

TTT$_{\mathbf{A3}}$**.** Pepe está en un ascensor, primero sube 4 pisos; luego sube 6 pisos. ¿Cuántos pisos subió Pepe?



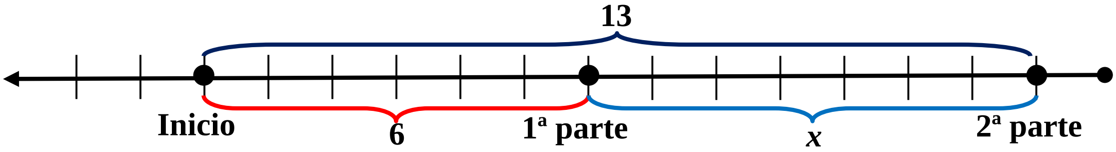
4 + 6 = $\boxed{\_\_}$

TTT$_{\mathbf{D3}}$**.** Pepe está en un ascensor, primero sube 7 pisos; luego baja 3 pisos. ¿Pepe, subió o bajó? ¿Cuántos pisos?



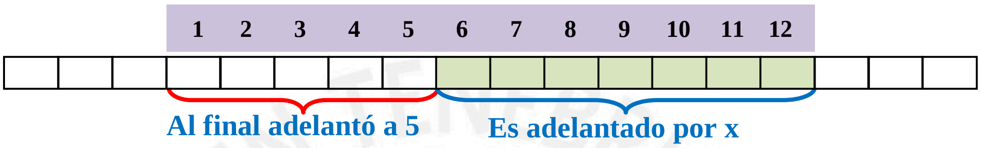
7 = 3 + $\boxed{\_\_}$

TTT$_{A2}$. En la 1ª parte de la carrera, Luis adelantó a 6 corredores. En la 2ª parte adelantó a otros más. Al final adelantó a 13 corredores. ¿A cuántos adelantó Luis en la 2° parte?



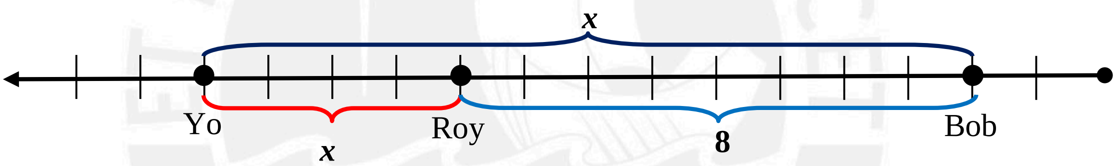
$$6 + \boxed{\quad} = 13$$

TTT$_{D2}$. En la 1ª parte de la carrera, Luis adelantó a 12 corredores. En la 2ª es adelantado por algunos. Al final Luis adelantó a 5. ¿Cuántos adelantaron a Luis en la 2° parte?



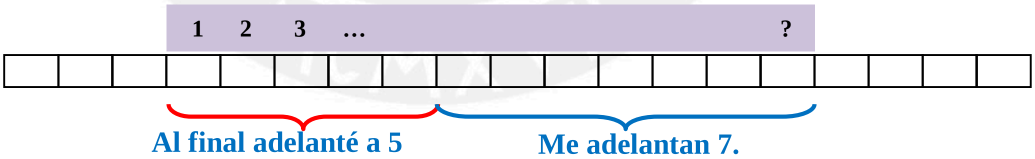
$$12 = 5 + \boxed{\quad}$$

TTT$_{A1}$. Estoy algunos lugares después de Roy. Roy está 8 lugares después de Bob. Estoy 12 lugares después de Bob. ¿Cuántos lugares después de Roy, estoy?



$$\boxed{\quad} + 8 = 12$$

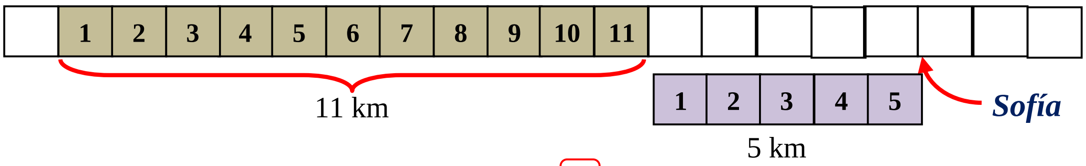
TTT$_{A1}$. En la 1ª parte de la carrera, adelanto a algunos corredores. En la 2ª parte me adelantan 7. Al final adelanté a 5 corredores. ¿A cuántos adelanté en la 1ª parte?



$$\boxed{\quad} = 7 + 5$$

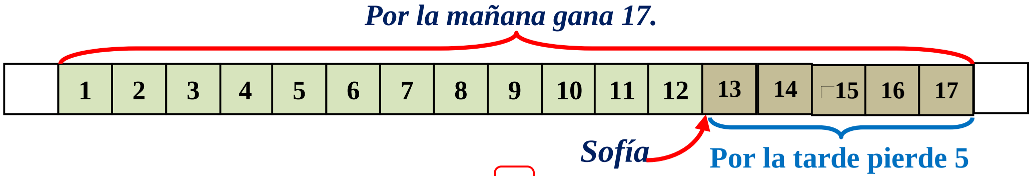
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***medida***.

TTT$_{A3}$. Sofía, en la mañana camina 11 km, en la tarde 5 km. ¿En total, cuántos km caminó?



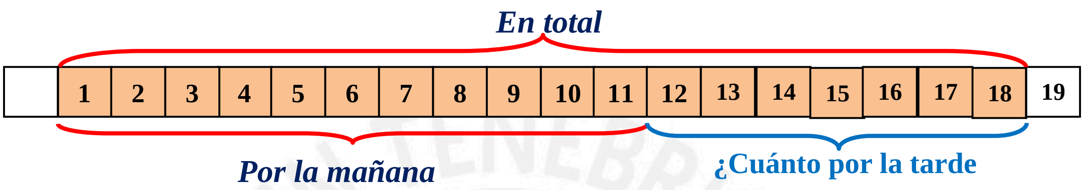
$$11 + 5 = \boxed{\quad}$$

TTT$_{D3}$. Sofía, por la mañana gana S/. 17. Por la tarde pierde S/. 5. Sofía, en total, ¿gana o pierde? ¿Cuánto?



17 = 5 + $\boxed{\_\_}$

TTT$_{A2}$. Sofía, por la mañana camina 11 km, por la tarde camina algunos km. Sofía, en total camina 18 km. ¿Cuánto km camina por la tarde?

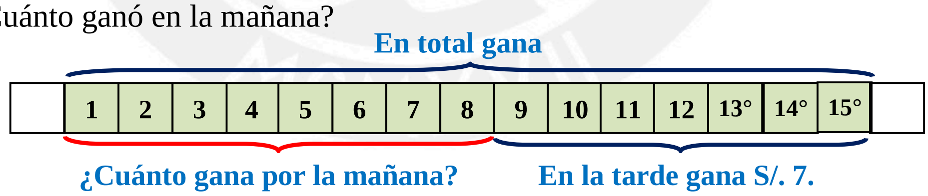


11 + $\boxed{\_\_}$ = 18

TTT$_{D2}$. Sofía, por la mañana gana S/. 15. Por la tarde pierde algunos soles. Sofía, en total, gana S/. 10. ¿Cuánto pierde Sofía por la tarde?

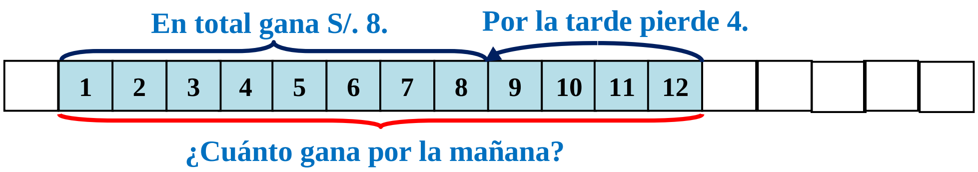
15 = 10 + $\boxed{\_\_}$

TTT$_{A1}$. Sofía, por la mañana gana algunos soles. Por la tarde gana S/: 7, En total, Sofía gana S/. 15. ¿Cuánto ganó en la mañana?



$\boxed{\_\_}$ + 7 = 15

TTT$_{D1}$. Sofía, por la mañana gana algunos soles. Por la tarde pierde S/: 4, En total, Sofía gana S/. 8. ¿Cuánto gana por la mañana

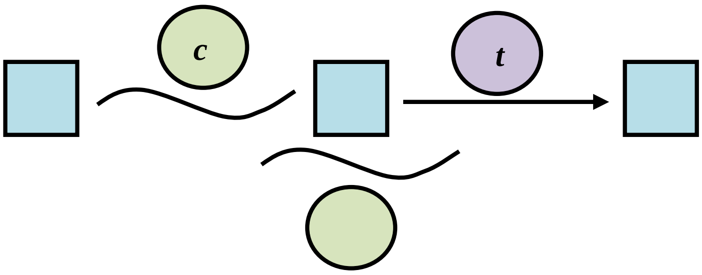


$\boxed{\_\_}$ = 8 + 4

Tipo 5: TRANSFORMACIÓN DE UNA COMPARACIÓN

Comparación - Transformación - Comparación (CTC)

Es una situación en la que se hace una comparación inicial c_1 entre dos estados, luego uno de ellos es transformado por *t*, finalmente los dos estados últimos es comparado por c_f:

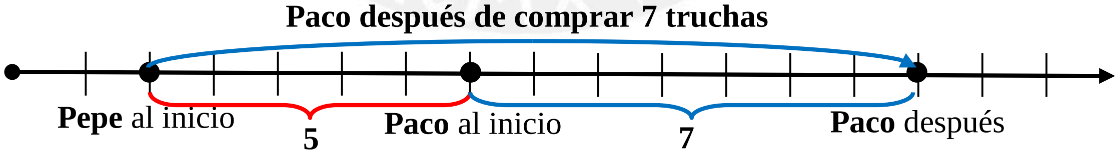


SUBTIPOS DE PROBLEMAS DE COMPARACIÓN – TRANSFORMACIÓN – COMPARACIÓN (CTC)					
Sub tipos	c_i	t	c_f	c_i	Forma
CTCA3	Dato	Dato	Incógnita	Aumenta*	$a + b = \boxed{\_\_}$
CTCD3	Dato	Dato	Incógnita	Disminuye**	$a = c + \boxed{\_\_}$
CTCA2	Dato	Incógnita	Dato	Aumenta	$a + \boxed{\_\_} = c$
CTCD2	Dato	Incógnita	Dato	Disminuye	$a = c + \boxed{\_\_}$
CTCA1	Incógnita	Dato	Dato	Aumenta	$\boxed{\_\_} + b = c$
CTCD1	Incógnita	Dato	Dato	Disminuye	$\boxed{\_\_} = c + b$

*Aumenta la comparación inicial.
** Disminuye la comparación inicial.

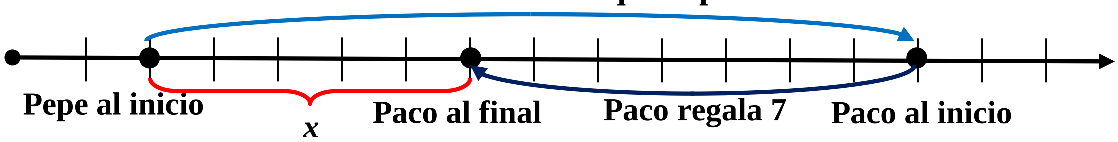
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***cardinales***.

CTCA3. Paco tiene 5 truchas más que Pepe. Paco compró 7 truchas más. ¿Cuántas truchas más que Pepe tiene Paco?



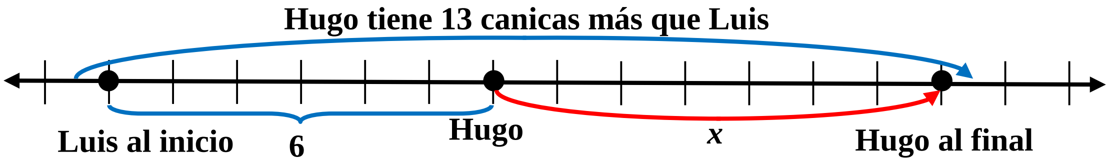
$5 + 7 = \boxed{\_\_}$

CTCD3. Paco tiene 12 truchas más que Pepe. Paco regala 7 truchas. ¿Cuántas truchas más que Pepe tiene Paco?



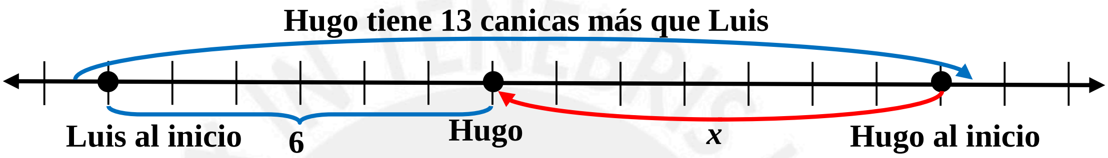
$12 = 7 + \boxed{\_\_}$

CTC$_{A2}$. Hugo tiene 6 canicas más que Luis. Hugo compró algunas canicas. Ahora Hugo tiene 13 canicas más que Luis. ¿Cuántas canicas compró Hugo?



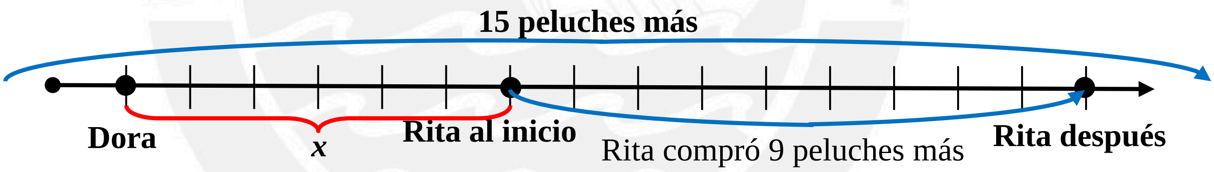
$$6 + \boxed{\_\_} = 13$$

CTC$_{D2}$. Hugo tiene 13 canicas más que Luis. Luego, Hugo vende algunas canicas y tiene 6 canicas más que Hugo. ¿Cuántas canicas vendió Hugo?



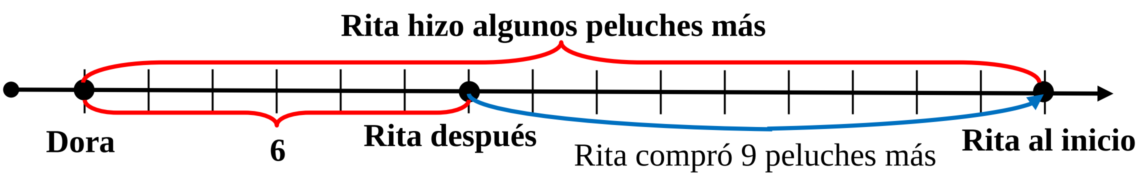
$$13 = 6 + \boxed{\_\_}$$

CTC$_{A1}$. Rita hizo algunos peluches más que Dora. Rita compró 9 peluches más. Ahora tiene 15 peluches más que Dora. ¿Cuánto peluches más hizo Rita?



$$\boxed{\_\_} + 9 = 16$$

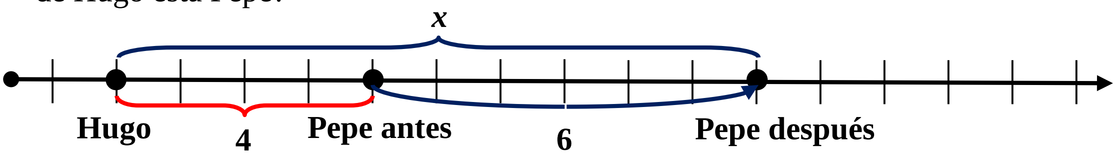
CTC$_{D1}$. Rita hizo algunos peluches más que Dora. Luego, Rita regaló 9 peluches. Ahora tiene 6 peluches más que Dora. ¿Cuánto peluches más hizo Rita?



$$\boxed{\_\_} + 9 = 16$$

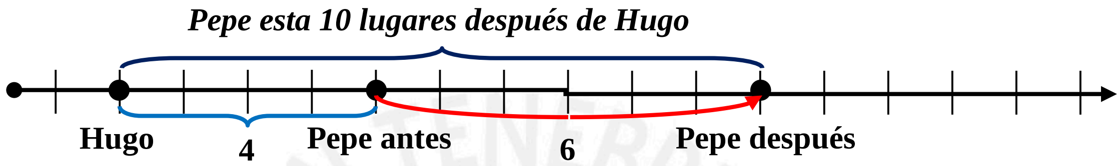
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***ordinales***.

CTCA3. Pepe es el cuarto después de Hugo y Pepe va 6 lugares más atrás. ¿Qué lugar después de Hugo está Pepe?



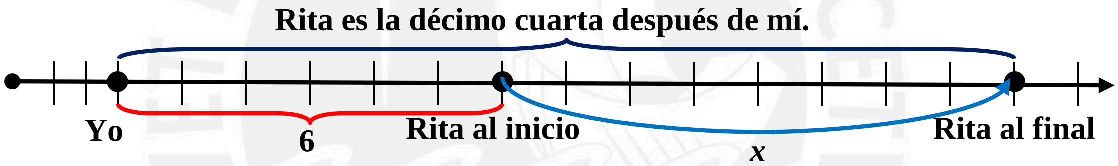
4 + 6 = ___

CTCD3. Pepe es el cuarto después de Hugo y Pepe va algunos lugares más atrás. Ahora, Pepe esta 10 lugares después de Pepe. ¿Cuántos lugares más atrás fue Pepe?



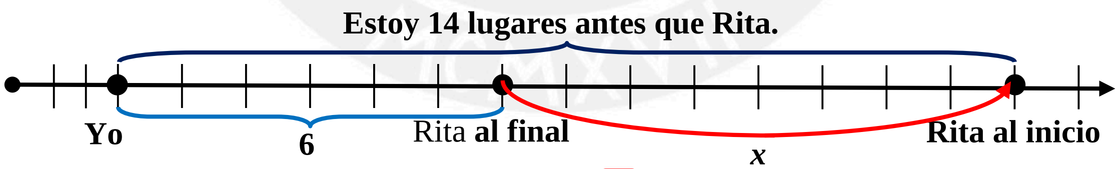
10 = 6 + ___

CTCA2. Estoy 6 lugares antes que Rita, Rita deja entrar algunas personas. Ahora Rita es la décimo cuarta, después de mí. ¿A cuántas personas dejó entrar Rita?



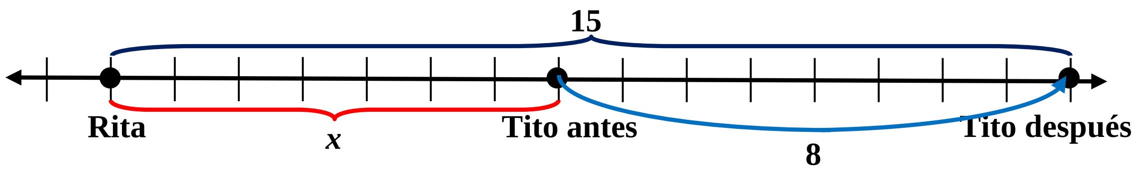
6 + ___ = 14

CTCD2. Estoy 14 lugares antes que Rita, De las personas entre Rita y yo, se retiran algunas. Ahora Rita es la sexta, después de mí. ¿Cuántas personas se retiraron?



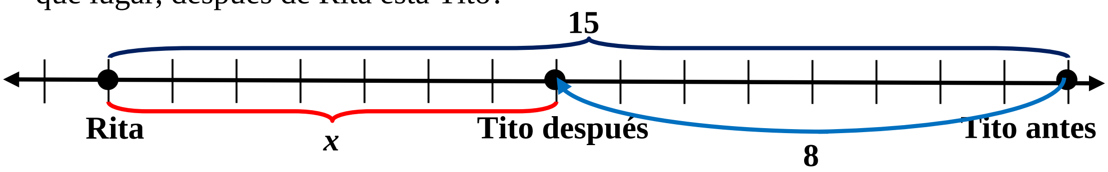
14 = 6 + ___

CTCA1. Tito está algunos lugares después que Rita, Tito deja entrar 8 personas. Ahora Tito está 15 lugares después de Rita ¿Cuántos lugares después de Rita está Tito?



___ + 8 = 15

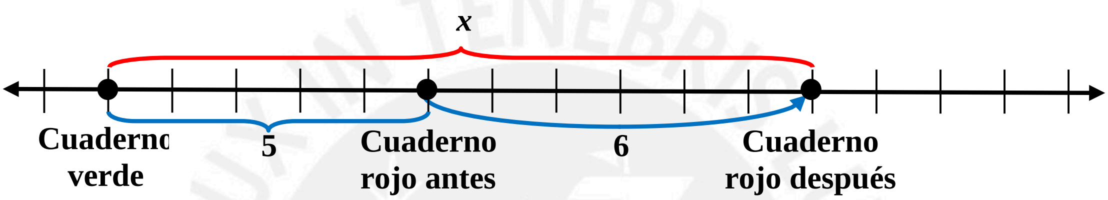
CTCD1. Tito está 15 lugares después que Rita, De las personas entre Rita y yo, se retiran 8. ¿En qué lugar, después de Rita está Tito?



$$15 = 8 + \boxed{\_\_}$$

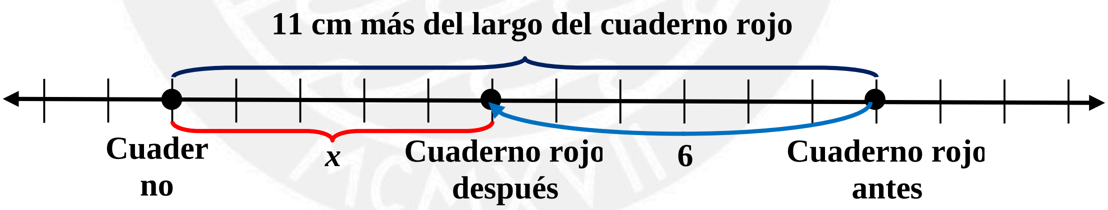
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***medida***.

CTCA3. El largo del cuaderno rojo tiene 5 cm más que el largo del cuaderno verde. Si aumenta 6 cm al largo del cuaderno rojo. ¿Cuántos cm más tiene el largo del cuaderno rojo?



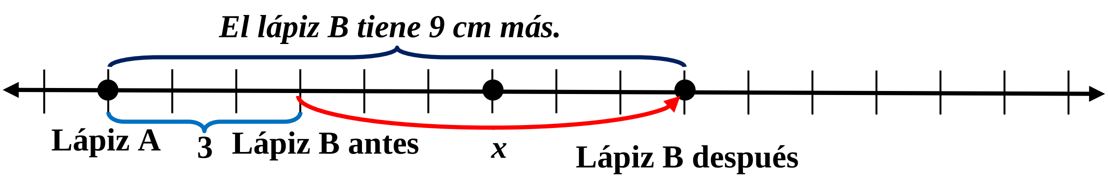
$$5 + 6 = \boxed{\_\_}$$

CTCD3. El largo del cuaderno rojo tiene 11 cm de más que el largo del cuaderno verde. Si al largo del cuaderno rojo se le disminuye 6 cm. ¿Cuántos cm más tiene el largo del cuaderno rojo?



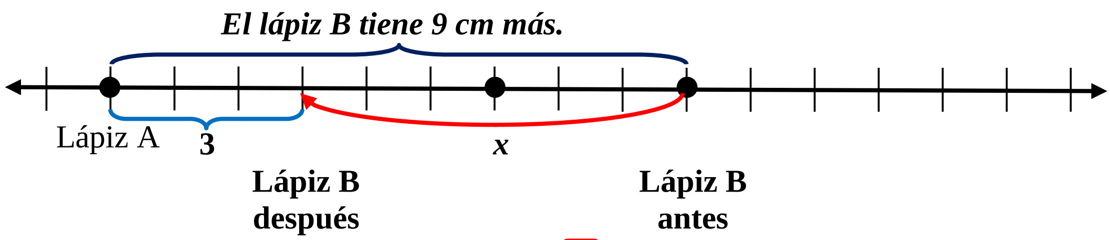
$$11 = 5 + \boxed{\_\_}$$

CTCA2. El lápiz B tiene 3 cm más que el lápiz A. Después de alargar al lápiz B, ahora tiene 9 cm más que el lápiz A. ¿Cuántos centímetros aumentó el lápiz B?



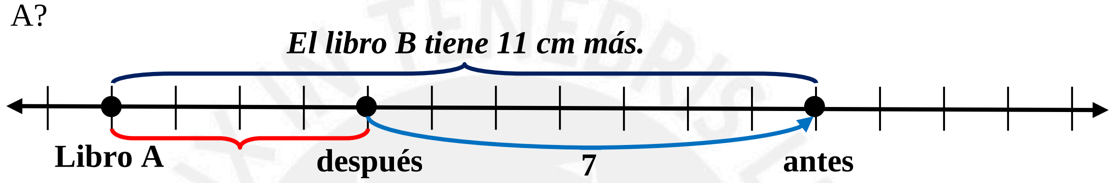
$$3 + \boxed{\_\_} = 9$$

CTCA2. El lápiz B tiene 9 cm más que el lápiz A. Después de acortar al lápiz B, ahora tiene 3 cm más que el lápiz A. ¿Cuántos centímetros disminuyó el lápiz B?



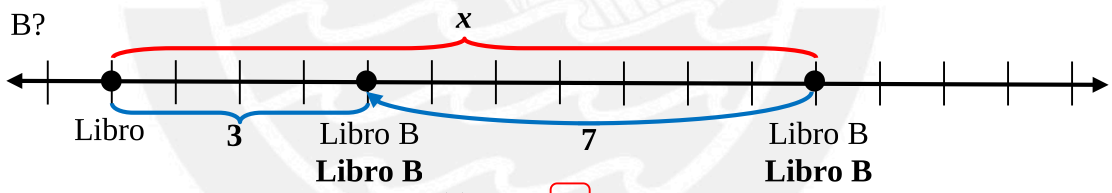
$9 = 3 + \boxed{\_\_}$

CTCA1. El libro B tiene algunos cm más que el libro A. Después, se aumenta 7 cm al libro B. Ahora el libro B tiene 11 cm más. ¿Al inicio, cuántos cm más tuvo el libro B que el libro A?



$\boxed{\_\_} + 7 = 11$

CTCA1. El libro B tiene algunos cm más que el libro A. Después, se disminuye al libro B 7 cm. Ahora el libro B tiene 3 cm más que el libro A. ¿Cuántos cm más tiene, ahora el libro B?

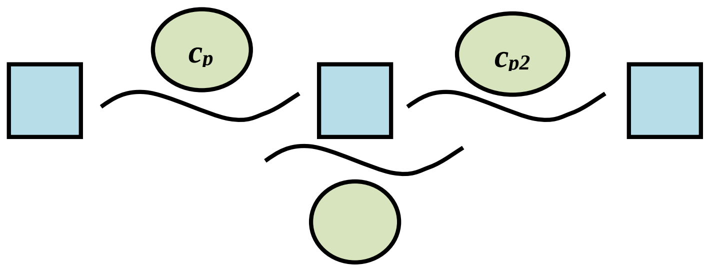


$11 = 7 + \boxed{\_\_}$

Tipo 6: *DOBLE COMPARACIÓN*

Comparación - Comparación - Comparación (CCC)

Es una situación parte-todo en la que c_{p1} compara dos estados, un primero y un segundo y c_{p2} compara el segundo estado con un tercero. Finalmente c_f compara el primer y tercer estado. La situación se representa mediante el diagrama:

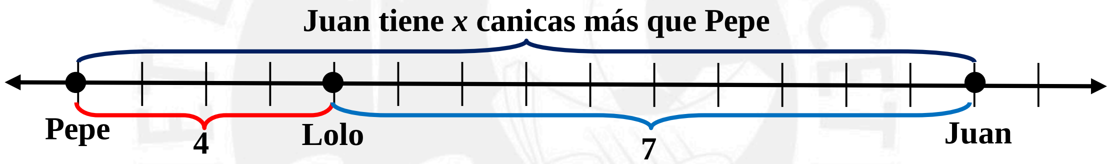


SUBTIPOS DE PROBLEMAS DE COMPARACIÓN – COMPARACIÓN – COMPARACIÓN (CCC)					
Sub tipos	c_{p1}	c_{p2}	c_f		**Forma**
CCCA3	Dato	Dato	Incógnita	***Más que****	$a + b = \boxed{\_\_}$
	Dato	Dato	Incógnita	***Menos que****	$a + b =$ __
CCCA2	Dato	Incógnita	Dato	***Más que***	$a + \boxed{\_\_} = c$
	Dato	Incógnita	Dato	***Menos que***	$a +$ __ $= c$
CCCA1	Incógnita	Dato	Dato	***Más que***	$\boxed{\_\_} + b = c$
	Incógnita	Dato	Dato	***Menos que***	__ $+ b = c$

*Comparación más que.
** Comparación menos que

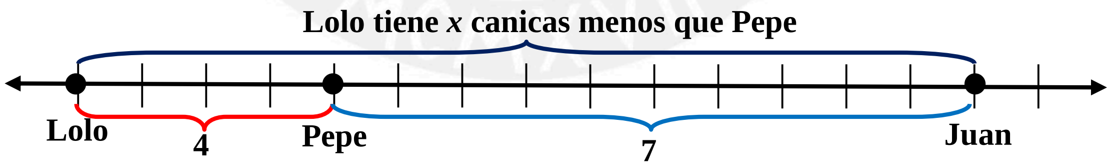
Ejemplos de números que juegan el papel de cardinales.

CCCA3. Lolo tiene 4 canicas más que Pepe y Juan tiene 7 canicas más que Lolo. ¿Cuántas canicas más que Pepe, tiene Juan?



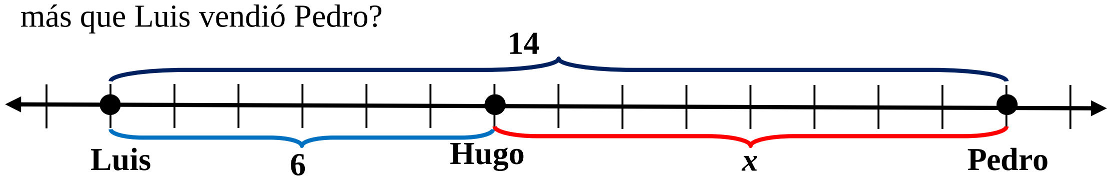
$$4 + 7 = \boxed{\_\_}$$

CCCD3. Lolo tiene 4 canicas menos que Pepe y Pepe tiene 7 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas menos que Juan, tiene Lolo?



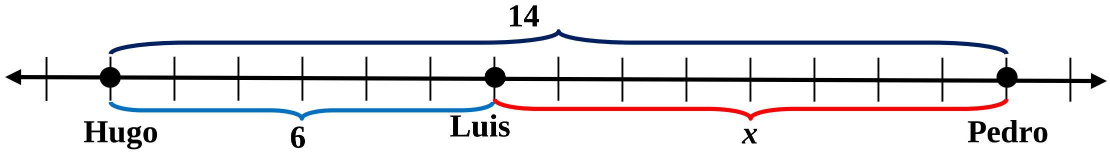
$$4 + 7 = \boxed{\_\_}$$

CCCA2. Hugo vendió 6 piñas más que Luis. Pedro vendió 14 piñas más que Luis. ¿Cuántas piñas más que Luis vendió Pedro?



$$6 + \boxed{\_\_} = 14$$

CCC$_{D2}$. Hugo vendió 6 piñas menos que Luis. Hugo vendió 14 piñas menos que Pedro. ¿Cuántas piñas menos que Pedro vendió Luis?



$6 + \boxed{\_\_} = 14$

CCC$_{A1}$. Rita compró algunas peras más que Dora. Rosa compró 9 peras más que Rita y 15 más que Dora. ¿Cuántas peras más que Dora compró Rita?

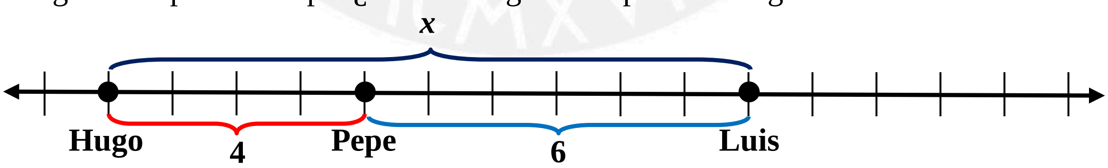
$\boxed{\_\_} + 9 = 15$

CCC$_{D1}$. Rita compró algunas peras menos que Dora. Dora compró 9 peras menos que Rosa y Rita 15 menos que Rosa. ¿Cuántas peras menos que Rosa compró Rita?

$\boxed{\_\_} + 9 = 15$

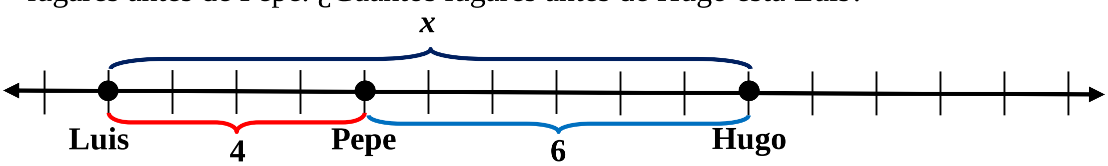
Ejemplos de números que juegan el papel de ***ordinales***.

CCC$_{A3}$. En la cola para comprar entradas. Pepe está cuatro lugares después de Hugo y Luis 6 lugares después de Pepe. ¿Cuántos lugares después de Hugo está Luis?



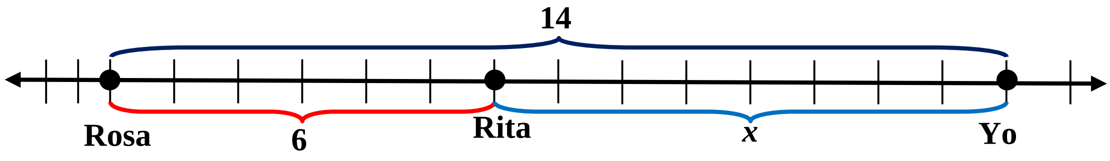
$4 + 6 = \boxed{\_\_}$

CCC$_{D3}$. En la cola para comprar entradas. Pepe está seis lugares antes de Hugo y Luis cuatro lugares antes de Pepe. ¿Cuántos lugares antes de Hugo está Luis?



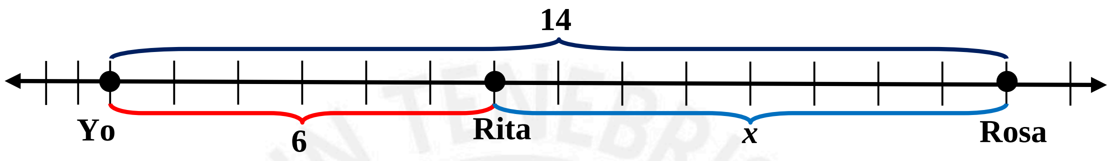
$4 + 6 = \boxed{\_\_}$

CCC_{A2}. Rita está 6 lugares despué s de Rosa. Yo estoy alunos lugares después de Rita. Si estoy después de 14 lugares después de Rosa.¿Cuántos lugares después de Rita estoy yo?



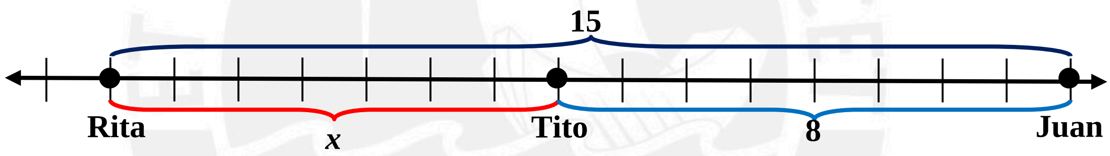
6 + $\boxed{\_\_}$ = 14

CCC_{D2}. Estoy 6 lugares antes que Rita. Rita está algunos lugares antes que Rosa. Yo estoy 14 lugares antes que Rosa. ¿Cuántos lugares antes que Rosa está Rita?



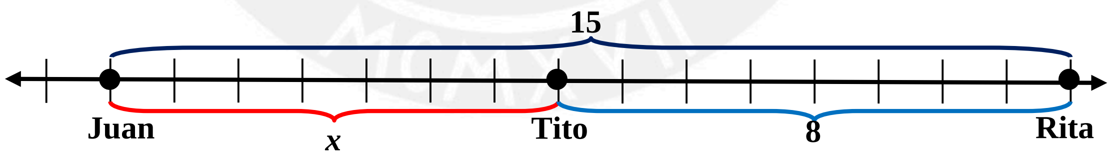
6 + $\boxed{\_\_}$ = 14

CCC_{A1}. Tito está algunos lugares después que Rita, Juan está 8 lugares después de Tito. Juan está 15 lugares después de Rita ¿Cuántos lugares después de Rita está Tito?



$\boxed{\_\_}$ + 8 = 15

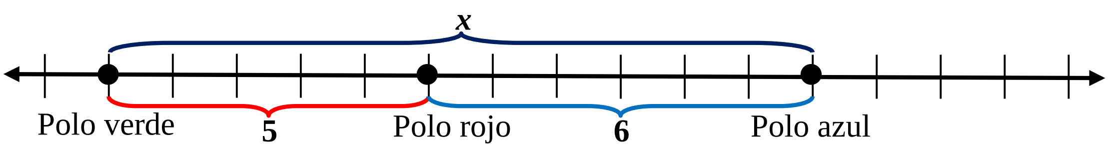
CCC_{A1}. Juan está algunos lugares antes que Tito, Tito está 8 lugares antes que Rita. Juan está 15 lugares antes de Rita ¿Cuántos lugares antes de Tito está Juan?



$\boxed{\_\_}$ + 8 = 15

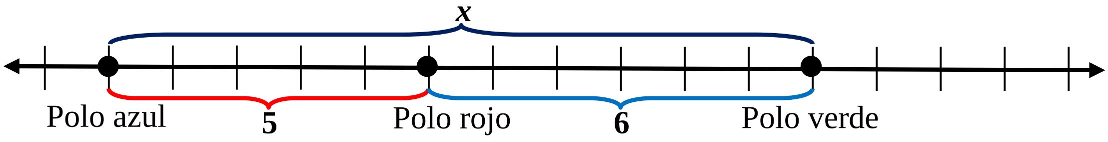
Ejemplos de números que juegan el papel de **medida**.

CCC_{A3}. El polo rojo tiene 5 cm de largo más que el polo verde. El polo azul tiene 6 cm más de largo que el polo rojo. ¿Cuántos cm más tiene el polo azul que el verde?



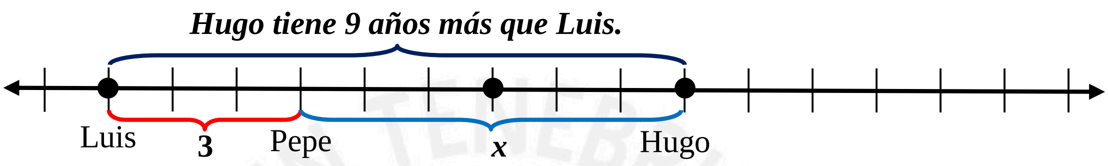
5 + 3 = $\boxed{\_\_}$

CCC$_{D3}$. El polo rojo tiene 6 cm de largo menos que el polo verde. El polo azul tiene 5 cm menos de largo que el polo rojo. ¿Cuántos cm menos tiene el polo azul que el verde?



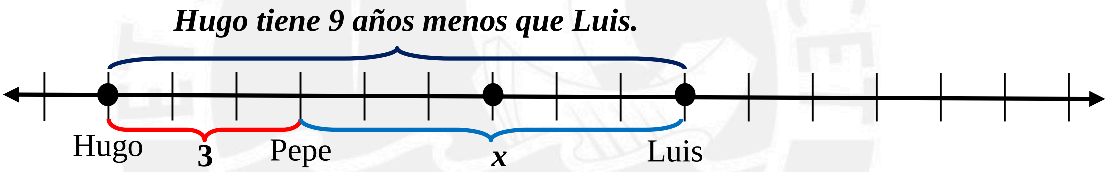
$5 + 3 = \boxed{\_\_}$

CCC$_{A2}$. Pepe tiene 3 años más que Luis y Hugo algunos años más que Pepe. Si Hugo tiene 9 años más que Luis. ¿Cuántos años más que Pepe, tiene Hugo?



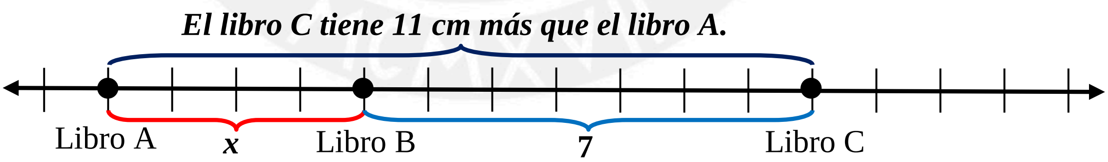
$3 + \boxed{\_\_} = 9$

CCC$_{D2}$. Hugo tiene 3 años menos que Pepe y Pepe algunos años menos que Luis. Si Hugo tiene 9 años menos que Luis. ¿Cuántos años menos que Luis, tiene Pepe?



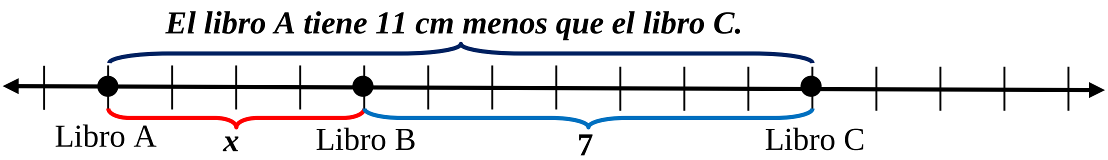
$3 + \boxed{\_\_} = 9$

CCC$_{A1}$. El libro B tiene algunos cm más que el libro A. El libro C tiene 7 cm más que el libro B y 11 cm más que el libro A. ¿Cuántos cm más tiene el libro B que el libro A?



$\boxed{\_\_} + 7 = 11$

CCC$_{A1}$. El libro A tiene algunos cm menos que el libro B y 11 menos que el libro C. El libro B tiene 7 cm menos que el C. ¿Cuántos cm menos tiene el libro A que el libro C?

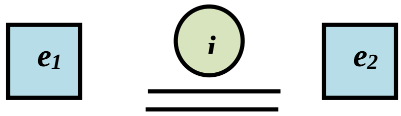


$\boxed{\_\_} + 7 = 11$

Tipo 7: *IGUALACIÓN DE ESTADOS*

Estado – *Igualación* – Estado (EIE)

Un número ***i iguala*** dos estados en los papeles de ***referencia*** y de ***comparación***. Representamos esta situación mediante el diagrama:

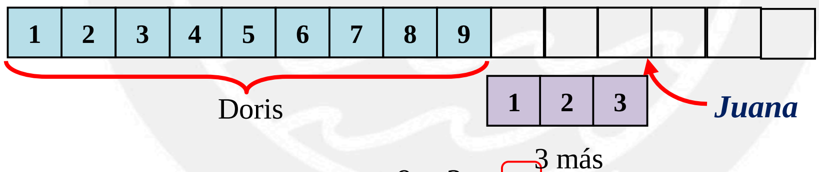


SUBTIPOS DE PROBLEMAS DE ESTADO – *IGUALACIÓN* – ESTADO (EIE)					
Sub tipos	e_r	***i***	e_c	e_i	**Forma**
EIE3	Dato	Dato	Incógnita	Aumenta*	$a + b = \boxed{\_\_}$
EIE3	Dato	Dato	Incógnita	Disminuye**	$a = c + \boxed{\_\_}$
EIE2	Dato	Incógnita	Dato	Aumenta	$a + \boxed{\_\_} = c$
EIE2	Dato	Incógnita	Dato	Disminuye	$a = c + \boxed{\_\_}$
EIE1	Incógnita	Dato	Dato	Aumenta	$\boxed{\_\_} + b = c$
EIE1	Incógnita	Dato	Dato	Disminuye	$\boxed{\_\_} = c + b$

*Aumenta el estado de referencia.
** Disminuye el estado de comparación.

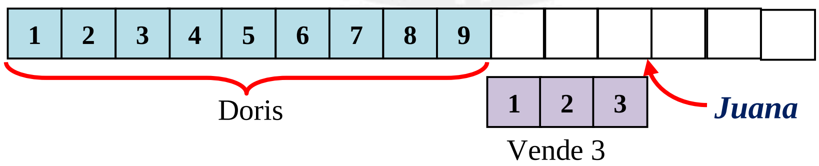
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***cardinales***.

EIEA3. Doris tiene 9 pavos y compra 3 más. Ahora tiene igual número que Juana.



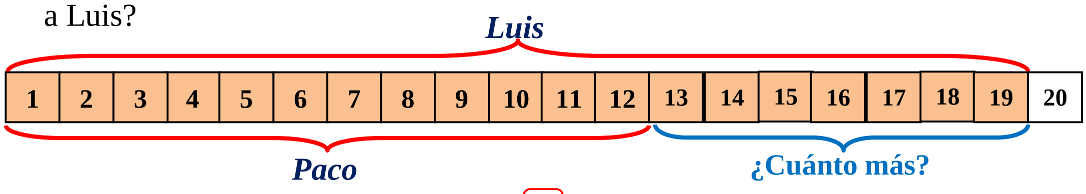
$9 + 3 = \boxed{\_\_}$

EIED3. Doris tiene 9 pavos. Si Juana vende 3, tiene igual que Doris. ¿Cuántos tiene Juana?



$9 + 3 = \boxed{\_\_}$

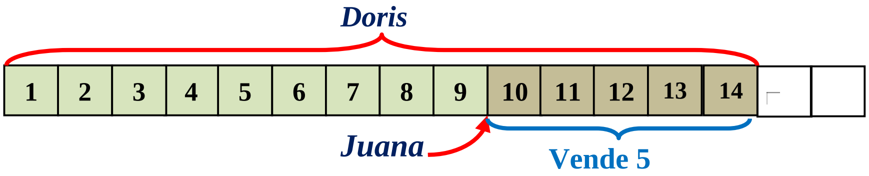
EIEA2. Paco tiene 12 canicas y Luis tiene 19. ¿Cuántas canicas más debe tener Paco, para igualar a Luis?



$\boxed{}$

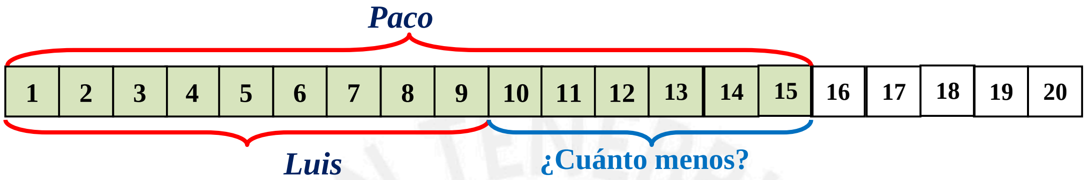
12 + __ = 19

EIE$_{A2}$. Doris tiene 14 pavos. Si vende 5, tiene igual que Juana. ¿Cuántos pavos tiene Juana?



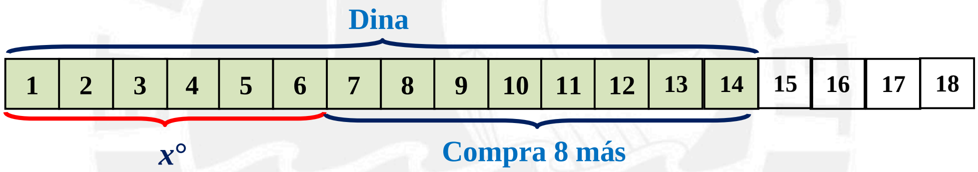
14 = 5 + $\boxed{}$

EIE$_{D2}$. Paco tiene 15 canicas y Luis tiene 9. ¿Cuántas canicas menos debe tener Paco para igualar a Luis?



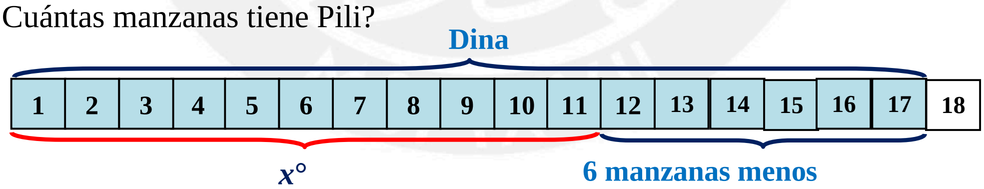
15 = 9 + $\boxed{}$

EIE$_{A1}$. Pili tiene un número de manzanas y Dina tiene 14. Si Pili compra 8 más tiene igual que Dina. ¿Cuántas manzanas tiene Pili?



$\boxed{}$ + 8 = 14

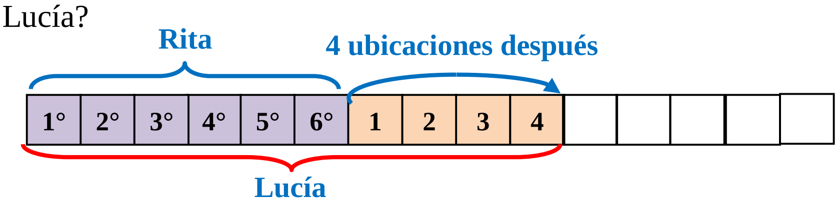
EIE$_{D1}$. Pili tiene un número de manzanas y Dina tiene 17. Si Dina vende 6 tiene igual que Pili. ¿Cuántas manzanas tiene Pili?



17 = 6 + $\boxed{}$

Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ordinales.

EIE$_{A3}$. Rita está en el 6° piso sube 4 pisos. Ahora, está en el mismo piso que Lucía. ¿En qué piso está Lucía?



6 + 4 = $\boxed{}$

EIE$_{D3}$. Rita está en el piso 13°. Ella baja 4 pisos y ahora está en el mismo piso que Lucía. ¿En qué piso está Lucía?

Rita

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°		

Lucía

4 ubicaciones antes

$$13 = 4 + \boxed{}$$

EIE$_{A2}$. Dante está en el 10° lugar. ¿Cuántos lugares antes que Luis está Dante, si Luis está en el 14°?

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	

x°

$$10 + \boxed{} = 14$$

EIE$_{D2}$. Dante está en el 12°. ¿Cuántos lugares antes que Dante está Luis, si Luis está en el 7° lugar?

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°			

Luis

x°

$$12 = 7 + \boxed{}$$

EIE$_{A1}$. Estoy en la lista alfabética de mi aula. Mi amigo Pedro está 6 lugares después que yo y ocupa el décimo quinto lugar. ¿Qué lugar ocupo en la lista alfabética?

6 ubicaciones después

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°

x°

$$\boxed{} + 6 = 15$$

EIE$_{D1}$. Estoy en la lista alfabética de mi aula. Mi amigo Pedro está 4 lugares delante que yo y ocupa el séptimo lugar. ¿Qué lugar ocupo en la lista alfabética?

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°			

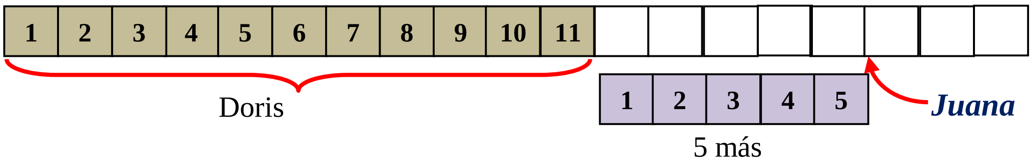
x°

4 ubicaciones delante

$$\boxed{} = 7 + 4$$

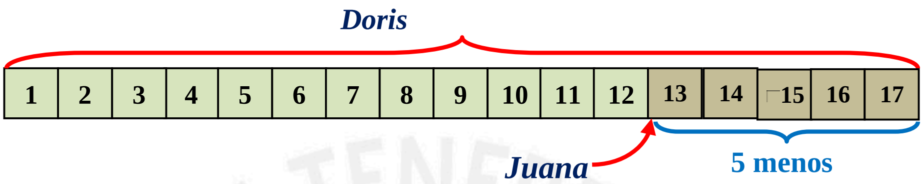
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de medida.

EIEA3. Doris trabajó 11 días. Juana trabajó 5 días más. ¿Cuántos días trabajó Juana?



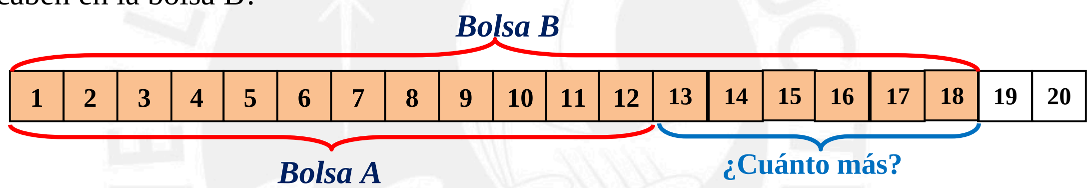
$10 + 5 = \boxed{\ }$

EIED3. Doris trabajó 17 días. Juana trabajó 5 días menos. ¿Cuántos días trabajó Juana?



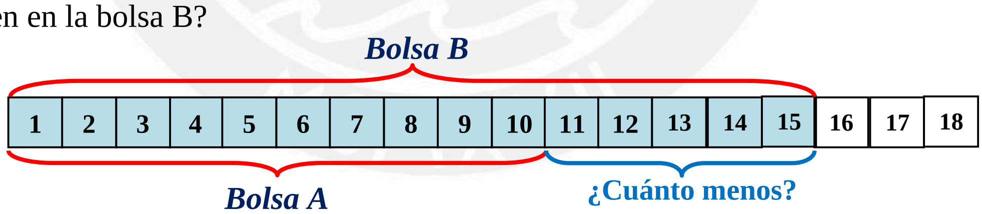
$17 = 5 + \boxed{\ }$

EIEA2. En una bolsa A entran 12 panes. En la bolsa B entran 18 panes. ¿Cuántos panes más caben en la bolsa B?



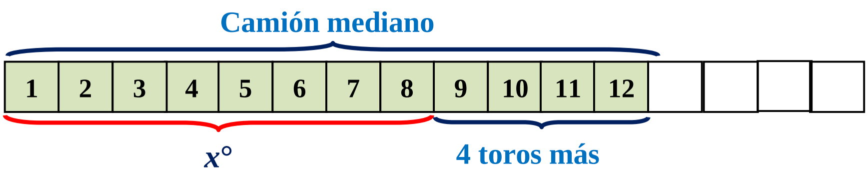
$12 + \boxed{\ } = 18$

EIED2. En una bolsa A entran 15 panes. En la bolsa B entran 10 panes. ¿Cuántos panes menos caben en la bolsa B?



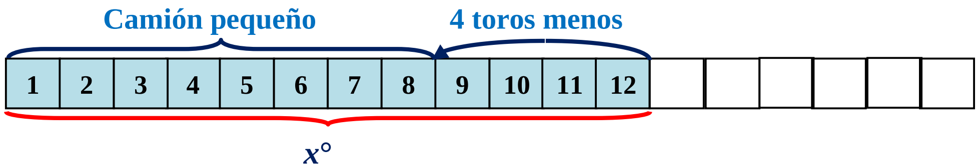
$15 = 10 + \boxed{\ }$

EIEA1. Un camión pequeño puede llevar un número de toros. Un camión mediano lleva 4 más y en él caben 12 toros. ¿Cuántos toros caben en un camión pequeño?



$\boxed{\ } + 4 = 12$

EIE$_{D1}$. Un camión mediano puede llevar un número de toros. Un camión pequeño lleva 4 menos y en él caben 8 toros. ¿Cuántos toros caben en un camión mediano?



$$\boxed{\_\_} = 4 + 8$$

4.2.6 SIGNIFICADOS DE SUMAR Y SUMA

4.2.6.1 ¿Qué significa sumar?

Dadas situaciones con cardinales, ordinales o medida, *sumar*, significa *combinar, transformar, comparar o igualar cardinales, ordinales o medida*. Los cardinales o medidas corresponden a conjuntos disjuntos y los ordinales pertenencen a secuencias diferentes. El significado de sumar es: reunir, juntar, agrupar, aumentar, agregar, etc..

Debemos aclarar que los cardinales y ordinales corresponden a magnitudes discretas y los números que representan medida corresponden números naturales de magnitudes continuas: kilómetros, gramos, edad, talla, etc.

4.2.6.2 ¿Qué significa suma y sumandos?

Cardinales

Dada una situación aditiva con cardinales, el significado de suma es el cardinal de la reunión de los dos conjuntos disjuntos. Si los conjuntos no son disjuntos, la suma es el cardinal de la reunión de los dos conjuntos menos el cardinal de la intersección de dichos conjuntos. Sumando es cualquiera de los cardinales de los conjuntos disjuntos. Si los conjuntos no son disjuntos, un sumando es el cardinal de cualquiera de los conjuntos y el otro sumando es la diferencia del cardinal del otro sumando menos el cardinal de la intersección.

Jim tiene 5 canicas azules y otras rojas. En total tiene 9 canicas. ¿Cuántas canicas son azules?

$$5 + \boxed{\_\_} = 9$$

Ordinales

Dada una situación aditiva con ordinales, el significado de *suma es el ordinal de la reunión de dos secuencias yuxtapuestas*. Al yuxtaponer dos secuencias se renombra la nueva *secuencia*. Sumando es cualquiera de los ordinales de las secuencias que se yuxtaponen.

Medida

Dada una situación aditiva con medidas, el significado de *suma es la medida después de haber yuxtapuesto (juntar) dos medidas.* Sumando es cualquiera de las medidas que se juntan o yuxtaponen.

4.2.6.3 SIGNIFICADOS DE LA SUMA

Situación problema: Las mascotas de Vilma lo conforman 3 gatos y 5 periquitos.

¿Entre gatos y periquitos, cuántas mascotas en total tiene Vilma?

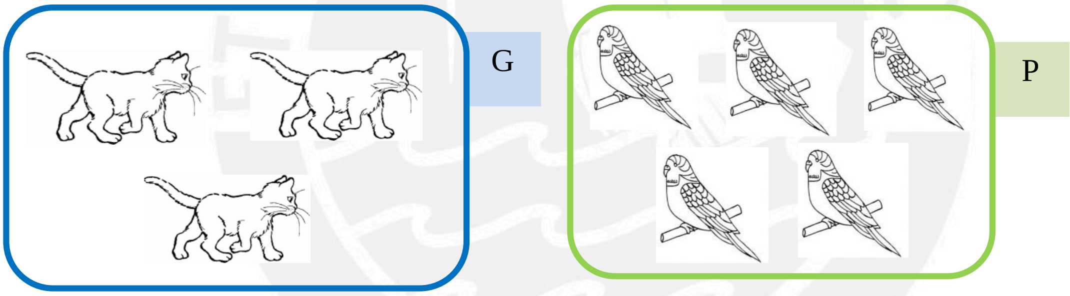
Para determinar el número total de mascotas se realiza una ***suma***.

¿Qué significa sumar?

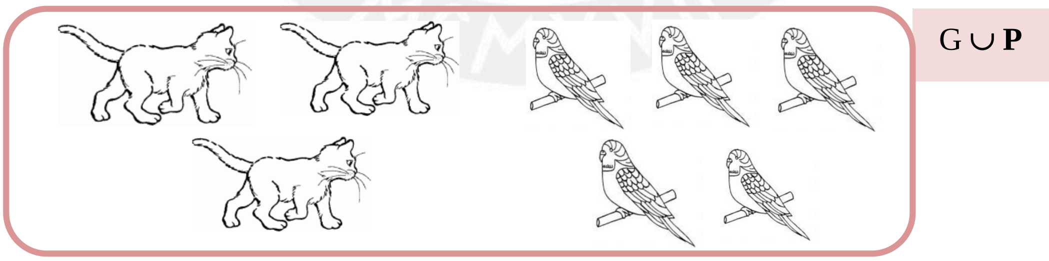
Sumar significa reunir, juntar, agrupar, añadir, aumentar, incrementar, determinar la totalidad.

Sumar significa reunir, juntar, agrupar

Utilizamos los diagramas de Venn para modelar la situación problema.



G: *Los gatos de Vilma* P: *Los periquitos de Vilma*



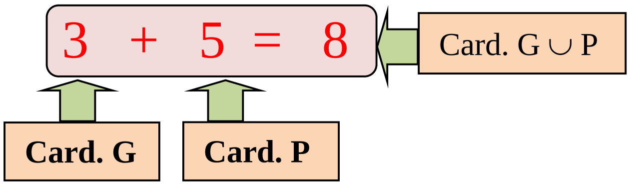
G ∪ P: *las mascotas de Vilma*

La reunión del conjunto G, los gatos de Vilma, con el conjunto P: los periquitos de Vilma es el conjunto G ∪ P: las mascotas de Vilma.

El cardinal de G es 3. (Card. G = 3) y el cardinal de P es 5, (Card. P = 5).

Los cardinales de G y P, número de elementos de los conjuntos G y P, respectivamente son los término de la adición. El cardinal de la reunión de G y P constituye la suma de 3 y 5.

Simbólicamente:



Esta definición es correcta cuando la suma es el cardinal de la reunión de dos conjuntos disjuntos. Si los conjuntos no son disjuntos, entonces la situación no es de suma.

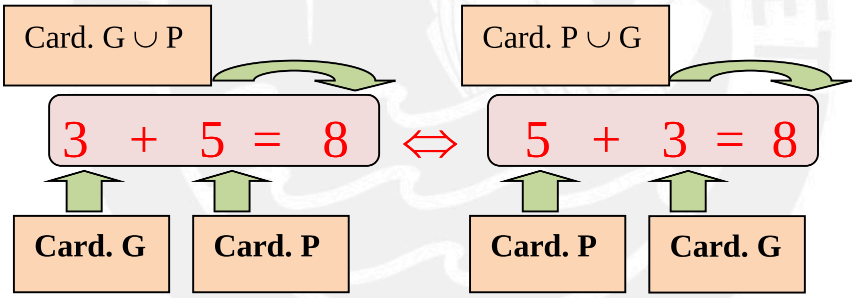
¿Cuál es la condición para que Card. (G ∪P) = Card. G + Card. P?

G y P deben ser conjuntos disjuntos; es decir, G ∩ P = Φ.

Sumar en cualquier orden

La suma es la misma cuando se cambia el orden de los sumandos.

Esta propiedad se denomina conmutativa.



Sumar en cualquier orden se basa en la propiedad conmutativa de la reunión de conjuntos.

Sumar significa añadir, aumentar, incrementar

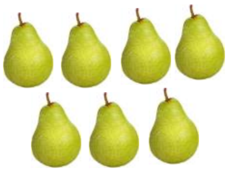
Puedo sumar 1, 2, 3, 4, 5, … etc. contando a partir del primer sumando.

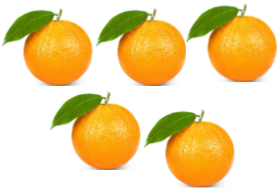
6 + 3 = ?

A partir de 6 cuento 3: 7 8 9

Sumar, significa determinar la totalidad

Hay 7 peras y 5 naranjas.





7 peras y 5 naranjas

Entre peras y naranjas, en total hay 12 frutas.

Hay 7 llamas y 6 vicuñas. Entre llamas y vicuñas, en total hay 13 animales.

De los animales en el corral 8 son gallinas y 9 son pavos.

Entre gallinas y pavos, en total son 8 + 9 = 17 animales.

¿Qué es sumar números naturales?

Es la operación que consiste en asignar un número natural dados otros dos. A los dos números naturales dados se les denomina *sumandos* y al resultado se le llama *suma*. Esta operación se le denomina *adición de números naturales*.

¿Cuáles son los términos de la adición de números naturales?

Sumandos: Números que se quiere sumar. En el ejemplo: 3 y 5.

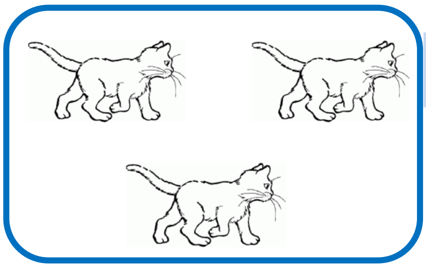
Suma: Resultado de la operación. En el ejemplo: 8.

¿Cómo determinamos el cardinal de un conjunto?

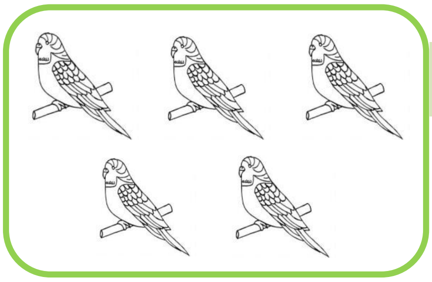
Procedimientos para sumar dos números hasta 20

Contar todo

Las mascotas de Vilma lo conforman 3 gatos y 5 periquitos.



G

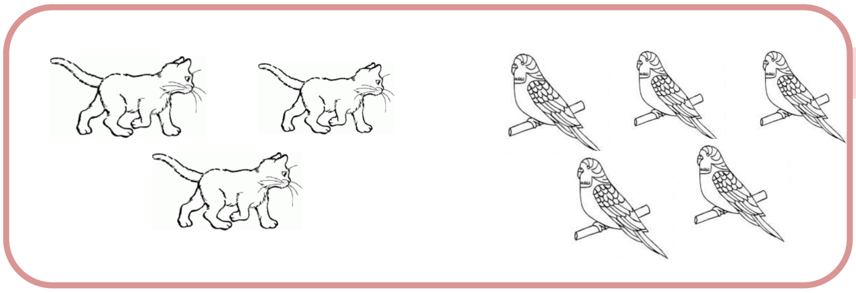


P

Cardinal de G= 3: Cardinal de P = 5

¿Cuántas mascotas en total tiene Vilma?

Para determinar la ***suma*** contamos el número de elementos de G ∪ P.



G ∪ **P**

Cardinal de G ∪ P = 8

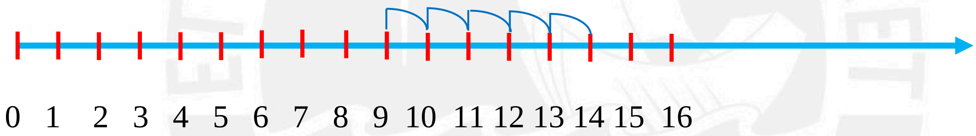
La suma de 3 y 5 es 8.   3 + 5 = 8

Contar a partir de un sumando

Sumar: 9 + 5 = ?

Puedo sumar contando a partir del número mayor

Utilizamos la recta numérica para modelar la situación problema.



A partir de 9 cuento 5:   1 → 10   2 → 11   3 → 12   4 → 13   5 → 14

c. Obtener el doble de un número

Sumar: 5 + 5 = ?	6 + 6 = ?	7 + 7 = ?	8 + 8 = ?	9 + 9 = ?	10 + 10 = ?
5 + 5 = 10	6 + 6 = 12	7 + 7 = 14	8 + 8 = 16	9 + 9 = 18	10 + 10 = 20

¿Cuál es el patrón?

La cifra de las unidades: 0; 2; 4; 6; 8; 0.

Obtener el doble más uno

Sumar: 7 + 8 = ?

Obtener el doble de 7 más 1:

7 + 8 = 7 + 7 + 1 = 14 + 1 = 15

Sumar 10 a un número natural

Sumar: 10 + 1 = ?   10 + 2 = ?   10 + 3 = ?   10 + 4 = ?   10 + 5 = ?

10 + 6 = ?   10 + 7 = ?   10 + 8 = ?   10 + 9 = ?   10 + 10 = ?

¿Cuál es el patrón?

La suma de 10 con un dígito *a* es el número 1***a***.

Obtener 10 para sumar 9

Sumar: 9 + 6 = ?

A 9 aumentamos 1 y a 6 le disminuimos 1.

9 + 6 = ? equivale 10 + 5 = 15.

Obtener 10 para sumar 8

Sumar: 8 + 5 = ?

A 8 aumentamos 2 y a 5 le disminuimos 2.

8 + 5 = ? equivale 10 + 3 = 13.

Obtener 10 para sumar 7

Sumar: 7 + 4 = ?

A 7 aumentamos 3 y a 4 le disminuimos 3.

7 + 4 = ? equivale 10 + 1 = 11.

Sumar tres números

Podemos agrupar los números en cualquier orden y obtener la misma suma.

Sumar: 4 + 9 + 4 = ?

13 + 4 = 17 Sumamos los dos primeros y luego el tercero.

4 + 13 = 17 Sumamos los dos últimos y luego con el primero.

8 + 9 = 17 Sumamos los extremos, luego el doble más 1.

4.2.6. ESCENARIOS DE APRENDIZAJE

Venero y Skovsmose (2012) nos dice: En sus observaciones de salones de clase en Inglaterra, Cotton (1998) percibió que una clase de matemáticas normalmente se divide en dos partes: en primer lugar el profesor presenta algunas ideas y técnicas matemáticas y, a continuación, los estudiantes trabajan en ejercicios seleccionados por el profesor. Sin embargo, también percibió variaciones de ese patrón, que van desde la presentación por parte del profesor hasta el trabajo de los estudiantes, durante toda una sesión de clase. Por esta y otras observaciones, la educación matemática tradicional se ubica en el *paradigma del ejercicio*. Con gran frecuencia, el libro de texto de matemáticas se toma como un "hecho" en las prácticas del salón de clase. Los ejercicios que se resuelven son determinados por una autoridad externa a la clase en sí. Esto significa que la justificación de la relevancia del ejercicio no es parte de la lección de matemáticas como tal. Más aún, una premisa central del paradigma del ejercicio es que hay una y una sola respuesta correcta. (p. 110).

Como una alternativa al monopolio del paradigma del ejercicio, la Educación Matemática Crítica plantea *escenarios de investigación*.

Mi interés en el enfoque investigativo se relaciona con la educación matemática crítica, que se puede caracterizar en términos de las siguientes preocupaciones (cf. Skovsmose y Nielsen, 1996). En primer lugar, la educación matemática crítica considera el desarrollo de la *alfabetización matemática* como una competencia similar a la de la alfabetización descrita por Freire. Esta alfabetización matemática no solo se refiere a unas destrezas matemáticas, sino también a la competencia para interpretar y actuar en una situación social y política que ha sido estructurada por las matemáticas. En segundo lugar, la educación matemática crítica se preocupa por el desarrollo de una educación matemática que sustente la democracia, lo cual quiere decir que la microsociedad del salón de clase de matemáticas debe encarnar aspectos democráticos. La educación matemática crítica recalca el hecho de que las matemáticas no son simplemente una materia que debe enseñarse y aprenderse (sin importar si los procesos de aprendizaje se organizan de acuerdo con los principios de los enfoques constructivistas o socioculturales del aprendizaje). En cambio, las matemáticas se perciben como un tema que en sí necesita ser reflexionado, puesto que las matemáticas son una parte central de nuestra cultura basada en la tecnología y puesto que ellas ejercen muchas funciones, las cuales quizás pueden caracterizarse con una pequeña reformulación de la Primera Ley de Kranzberg: lo que hacen las matemáticas no es ni bueno ni malo, ni tampoco neutral (véase Kranzberg, 1997). D'Ambrosio (1994) ha usado una formulación más fuerte que enfatiza que las matemáticas hacen parte de nuestras estructuras tecnológicas, militares, económicas y políticas, y como tal se convierten en una fuente tanto de maravillas como de horrores (D'Ambrosio, 1998; Skovsmose, 1998a y 1999b). Construir una crítica a las matemáticas como parte de la educación matemática es una preocupación central de la educación matemática crítica. Parece que tales preocupaciones se pueden manejar de una manera más apropiada por fuera del paradigma del ejercicio. (Venero y Skovsmose, 2012, p. 111).

Las situaciones de aprendizaje, ya sean las del *paradigma del ejercicio* o de *escenarios de investigación* pueden referirse a la *matemática misma*, a la *vida real* o la *semirrealidad*.

Ejemplos de situaciones basadas en el paradigma del ejercicio:

a) 45 + 34 =

b) (43 – 76) + (85 – 42) =

c) Luis tiene 5 canicas rojas y 8 azules. ¿Cuántas canicas tiene en total?

d) Rita tiene 12 naranjas más que Betty, pero Betty tiene 8 naranjas menos que Rosa. ¿Quién tiene más, Rita o Rosa? ¿Cuánto más?

La carretera Interoceánica une Perú y Brasil, un ramal de la parte de Perú va del puerto de San Juan de Marcona hasta Iñapari, frontera con el Brasil. Esta carretera tiene tres tramos que se describen en la tabla siguiente:

	TRAMO	**Km**
1.	San Juan de Marcona - Urcos	763
2.	Urcos - Inambari	300
3.	Inambari - Iñapari	403
	TOTAL	¿?

Elaboración basada en la exposición del Ing. Néstor Palacios Lanfranco, viceministro de Transportes, 2006. http://www.mtc.gob.pe/portal/especiales/Documentos/exposicion_viceministro.pdf.

e) ¿Cuántos km más tiene el tramo Inambari – Iñapari que el tramo Urcos – Inampari.

f) ¿Cuántos km constituye el recorrido peruano de la Interoceánica?

Las situaciones a) y b) corresponde a la matemática. Las situaciones c) y d) corresponden a la semirrealidad o realidad construida por el autor. Las situaciones e) y f) corresponden a la vida real.

Ejemplos de situaciones basadas en escenarios de investigación:

g). En la Tabla 100, dibuja un rectángulo cuyos vértices nombrados en forma cíclica son *a*, *b*, *c*, *d*, como se muestra y calculamos D = (*a* + *d*) – (*b* + *c*):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a: extremo superior izquierdo.
b: extremo superior derecho.
c: extremo inferior izquierdo.
d: extremo inferior izquierdo.

En el primer rectángulo $D_1 = (22 + 34) – (24 + 32) = 56 – 56 = 0$. Si trasladamos el rectángulo a la segunda posición, cuyos vértices son: 36, 38, 46, 28.

En el segundo rectángulo $D_2 = (36 + 48) – (38 + 46) = 84 – 84 = 0$.

¿Será, siempre cero en todos los rectángulos trasladados?

h) Al nacer el jaguar pesa entre 1 y 2 kg. De adulto pesa entre 60 y 120 kg. ¿Cuánto aumenta desde que nace hasta adulto?

i) Dante compra y vende naranjas. A las 8:00 a.m. tiene 16 y a la 12:00 m. 20 naranjas. ¿Vendió o compró y cuántas?

j) **MATEMÁTICAS Y EL MUNDO ANIMAL**

¿Alguna vez has sentido la picazón de una hormiga?

Muchas personas tiene miedo de las hormigas por la picazón.

Todas las personas admiran el espíritu de trabajo de las hormigas.

Una hormiga puede vivir de uno a tres años.

Una hormiga puede vivir dentro del agua hasta 15 días.

Números en las hormigas

Escribe un enunciado numérico para responder cada problema.

1. *Una hormiga tiene una antena en cada lado de su cuerpo. ¿Cuántas antenas tiene en total?*

   ______ + ______ = ______ *antenas en total.*

2. *Una hormiga tiene 3 patas en cada lado de su cuerpo.*

¿Cuántas patas tiene en total?

______ + ______ = ______ *patas en total.*

3. *Una hormiga tiene dos ojos.*

   ¿Cuántos ojos en total habrá en 3 hormigas?

   ______ + ______ + ______ = ______ *ojos en total.*

4. *Una hormiga tiene 6 patas en su cuerpo.*

   ¿Cuántas patas en total habrá en 4 hormigas?

   ______ + ______ + ______ + ______ = ______ *patas en total.*

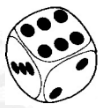
k) **RESTA DE 12 Y SUMA 11**.

¿Qué necesitas?
1 dado.
2 juegos de marcadores.

¿Cómo se juega?

1. Cada jugador lanza un dado. El que obtiene el número menor es el *Jugador 1* y el que obtiene el número mayor es el *Jugador 2*.

   Si ambos obtuvieron el mismo número se repite los lances.



2. Por turnos se lanza el dado. El número del *Jugador 1* se obtiene restando de 12 el número que obtiene del lance. El número del *Jugador 2* se obtiene sumando 11 el número que obtiene del lance.

3. Los números ganadores del *Jugador 1* son: *6*, *7*, *8*, *9*, *10* y *11*. Los números ganadores del *Jugador 2* son *12*, *13*, *14*, *15*, *16*, y *17*.

4. El primer jugador en conseguir los 6 lances ganadores es el ganador del juego.

Jugador 1: 12 – ___

6	7	8	9
10	11	12	13
14	15	16	17

Jugador 2: 11 + ___

La situación g) corresponde a la matemática, las situaciones h) e i) a la semirrealidad y la situación j) y *k)* a la vida real.

SIGNIFICADO DE LOS NUMEROS	PAPEL DE LOS NUMEROS								
	EEE	ETE	ECE	TTT	CTC	TCT	CCC	EIE	ITI
Cardinal	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b =
	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c
	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c
Ordinal	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?
	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c
	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c
Medida	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?	a+b = ?
	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c	a+?= c
	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c	¿+b= c	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	¿+b= c

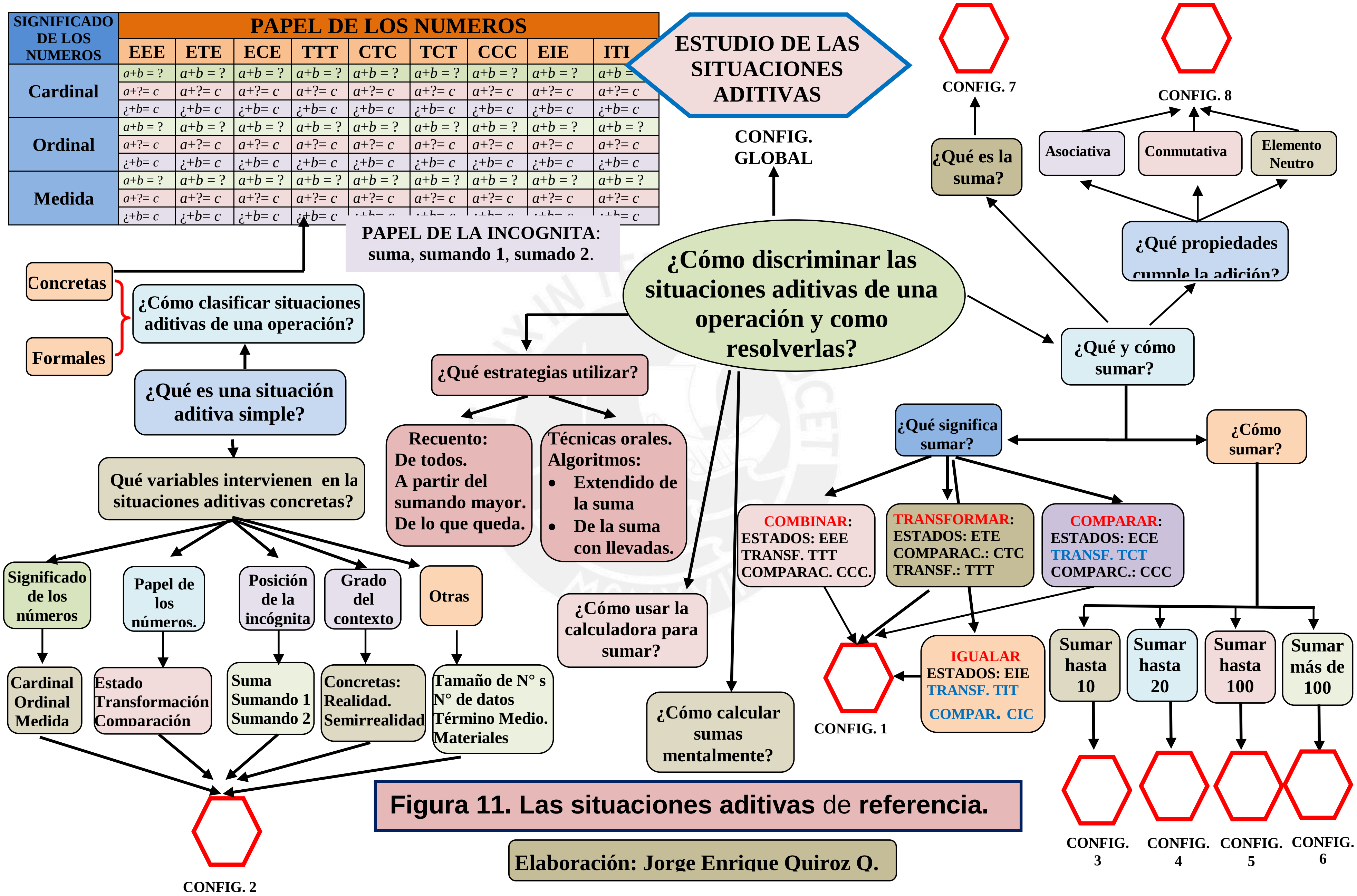


Figura 11. Las situaciones aditivas de referencia.

Elaboración: Jorge Enrique Quiroz Q.

Capítulo 5

5 PRESENCIAS Y AUSENCIAS DEL SIGNIFICADO DE REFERENCIA EN EL SISTEMA CURRICULAR PERUANO

RESUMEN

En este capítulo describimos las presencias y ausencias del significado de referencia en el DCN en la sección 6.1, en los Mapas de Progreso y las Rutas del aprendizaje en la sección 6.2, y en los cuadernos y textos escolares oficiales en la sección 6.3. En este capítulo respondemos a la tercera pregunta y al segundo específico de investigación.

5.1 EN EL DISEÑO CURRICULAR NACIONAL

5.1.1 CONTEXTO DE LAS SITUACIONES

El DCN prescribe la interpretación y representación de la adición y sustracción de números naturales de hasta dos cifras –primer grado–, tres cifras –segundo grado–, cuatro cifras –tercer grado; operaciones combinadas de adición y sustracción –primer grado–, adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales –quinto grado–, operaciones combinadas de números naturales, fracciones y decimales –sexto grado–. En todos los grados considera la resolución de problemas de adición y sustracción de números naturales.

5.1.2 TIPOS DE SITUACIONES ADITIVAS

No hay alusión a las estructuras semánticas, pero al indicar la acción de la *adición* como *juntar*, *agregar*, *avanzar* y la *sustracción* como *separar*, *quitar*, *retroceder*, implícitamente nos dice los tipos de *combinación*: *juntar*, *separar* (partes-todo), *transformar*: *agregar*, *avanzar*, *quitar*, *retroceder* y *comparar*: *separar*.

PRESENCIAS		***AUSENCIAS***
Situaciones de combinación, de Transformación. y, de Comparación.	**No ostensivas**	***Situaciones de Doble Transformación, de Transformación de Combinación, y de Doble comparación.***

5.1.3 SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS EN LAS SITUACIONES ADITIVAS

No hay alusión al significado de los números en las situaciones aditivas: *cardinal*, *ordinal* y *medida*. Los profesores podrían adoptar uno, dos o los tres significados.

PRESENCIAS		AUSENCIAS
Números cardinales, *Números medida.*	**No ostensivas**	*Números ordinales.*

5.1.4 NÚMERO DE OPERACIONES

No hay indicación alguna, deja al docente que aplique situaciones de una o más operaciones. El DCN propone operaciones combinadas: *adición y sustracción*; *adición, sustracción, multiplicación y división con números naturales* y *operaciones combinadas de números naturales, fracciones y decimales*.

PRESENCIAS	
Una operación, dos, tres, cuatro o más operaciones.	**No ostensivas**

5.1.5 LUGAR DE LA INCÓGNITA

El DCN propone las operaciones de adición y sustracción en forma separada. En la adición la incógnita es la suma y en la sustracción es la diferencia. No propone la conexión entre estas dos operaciones.

PRESENCIAS	AUSENCIAS
Suma, *Sumando 2.*	*Sumando 1,* *Sumando 1 y Sumando 2.*

5.1.6 NÚMERO DE RESPUESTA CORRECTAS

No hay indicación alguna sobre el número de respuestas correctas, deja al docente que aplique situaciones con una o más respuestas correctas.

PRESENCIAS	
Una operación, *Dos operaciones,* *Tres operaciones,* *Cuatro o más operaciones.*	**No ostensivas**

5.1.7 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

En el DCN encontramos: *representa la adición de números y calcula su suma con resultado menor de hasta dos cifras*. No hay más indicación sobre las diferentes formas de representar gráficamente.

PRESENCIAS		PRESENCIAS:
Colecciones *Mat. Base Diez* *Recta numérica,* *Gráfico de barras,* *Yupana,* *Matriz.*	**No ostensivas**	*Tabla de doble Entrada,* *Dinero* *Balanza,* *Tabla 50,* *Almanaque,* *Reloj.*

5.1.8 SIGNIFICADO DE SUMAR

Para el DCN, sumar es *juntar*, *agregar*, *avanzar* y restar es *separar*, *quitar*, *retroceder*.

PRESENCIAS		AUSENCIAS
Combinación: juntar *Transformación: agregar* *Comparación: separar*	**No ostensivas**	*Doble Transformación,* *Transformación de Combinación,* *Doble comparación.*

5.2 EN LOS MAPAS DE PROGRESO Y EN LA RUTAS DEL APRENDIZAJE

5.2.1 CONTEXTO DE LAS SITUACIONES

Las situaciones propuestas son concretas y formales.

PRESENCIAS
Concretas,
Formales

5.2.2 TIPOS DE SITUACIONES ADITIVAS

Los Mapas de Progreso considera cuatro tipos: *combinación*, *transformación*, *comparación* e *igualación*.

	PRESENCIAS	AUSENCIAS
COMBINACIÓN	E–E–E (*cardinales*) Incógnita: suma y 2° sumando.	E–E–E (*ordinales y medida*) Incógnita: 1° sumando.
TRANSFORMACIÓN	E–T–E (*cardinales y medida*) Incógnita: suma, 1° y 2° sumando.	E–T–E (*ordinales*) Incógnita: suma, 1° y 2° sumando. T–T–T (*cardinales, ordinales y medida*) Incógnita: suma, 1° y 2° sumando.
COMPARACIÓN	E–C–E (*cardinales y medida*) Incógnita: suma, 1° y 2° sumando.	E–C–E (*ordinales*) Incógnita: suma, 1° y 2° sumando. C–C–C (*cardinales, ordinales y medida*) Incógnita: suma, 1° y 2° sumando.
IGUALACIÓN	EIE (*cardinales*)	CTC (*cardinales, ordinales y medida*) Incógnita: suma, 1° y 2° sumando.

5.2.3 SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS

En las situaciones propuestas considera números cardinales y medida. No hay situaciones con números ordinales.

PRESENCIAS	***AUSENCIAS***
Cardinal, ***Medida.***	***Ordinal.***

5.2.4 NÚMERO DE OPERACIONES

Todas las operaciones propuestas constituyen situaciones aditivas simples, es decir de una operación.

PRESENCIAS	***AUSENCIAS***
Una operación.	***Dos, tres o más operaciones.***

5.2.5 LUGAR DE LA INCÓGNITA

Los Mapas de Progreso consideran situaciones aditivas con la incógnita en la suma, primer sumando y segundo sumando.

PRESENCIAS
Suma, ***Sumando 1,***

5.2.6 NÚMERO DE RESPUESTAS CORRECTAS

Las situaciones aditivas propuestas consideran problemas con una solución correcta.

PRESENCIAS	***AUSENCIAS***
Una solución correcta.	***Dos, tres o más soluciones correctas.***

5.2.7 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Encontramos representaciones con colecciones, gráfico de barras, calendario, recta numérica,

PRESENCIAS	AUSENCIAS
Colecciones	*Regletas, dinero*
MBD	*Gráfico de barras,*
Recta numérica,	*Yupana.*

5.2.8 SIGNIFICADO DE SUMAR

Sumar significa; juntar, agregar, avanzar, separar, quitar, retroceder.

5.3 EN LOS CUADERNOS Y TEXTOS OFICIALES

El Ministerio de Educación dentro de su política de apoyo al mejoramiento de los aprendizajes de los niños y adolescentes peruanos otorga, entre otros materiales, cuadernos y textos oficiales en varias áreas curriculares como la de Matemática.

Para describir los usos y el significado de las situaciones aditivas en los cuadernos de trabajo (1° y 2° grado) y libros de texto (3°; 4°; 5° y 6° grado) se elaboró un instrumento que permitiera analizar cada página. Los ítemes consignados en el instrumento fueron:
Contexto: (extra o intra matemático).
Tipo de situación aditiva: de combinación (combinación de estados: EEE); de transformación (transformación de estado: ETE, transformación de comparación: CTC, transformación de transformaciones (o doble transformación: TTT), de comparación (comparación de estados: ECE) y comparación de comparaciones (o doble comparación: CCC) y situación formal. (7 tipos de situaciones aditivas simples. La situación aditiva simple es de una operación.
Significado de los números: (Cardinal, ordinal o medida).
(Los números en una situación aditiva son *cardinal*es, *ordinales* y *medidas*)
Número de operaciones: ___
(La solución de la situación aditiva requiere 1, 2, 3 o más operaciones)

Posición de la incógnita: (Suma, sumando 1 o sumando 2))

(La incógnita en una situación aditiva simple puede ser: suma, sumando 1 o sumando 2)

Número de respuestas correctas: ____.

(La situación aditiva admite una, dos, tres, … etc. soluciones correctas.)

Representación: (Colecciones, regletas, recta numérica, MBD, reloj, dinero, etc.)

Número de situaciones problema.

En la página analizada, cuántas situaciones problemas están planteadas: ___.

RESUMEN DE LA INFORMACIÓN

5.3.1 CONTEXTO DE LAS SITUACIONES

Según Malaspina (2014), el contexto de un problema puede ser extra matemático o intra matemático. En el primer caso el problema tiene relación con la vida cotidiana, en el segundo el contexto es formal o estrictamente matemático. A las situaciones de contexto extra matemático las llamamos *concretas* y *formales* a las de contexto intra matemático.

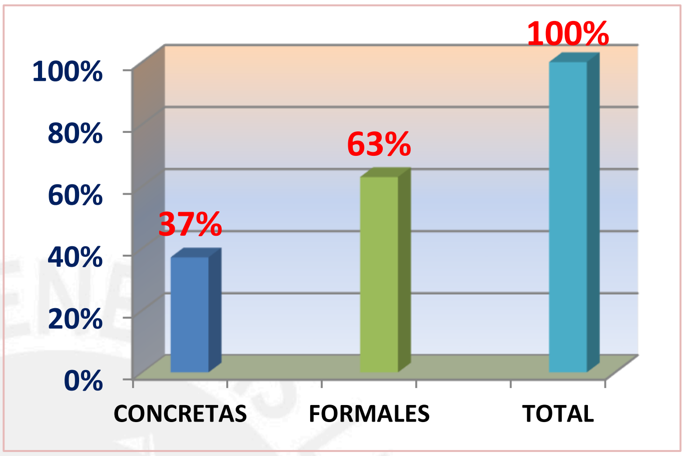


GRÁFICO 1

	S	TOTAL
		1220
37 %	63 %	100%

FUERTE PRESENCIA

Formales: 63%.

DÉBIL PRESENCIA

Concretas: 37%.

5.3.2 TIPOS DE ... ADITIVAS

Las situaciones aditivas simples se clasifican en *concretas* y *formales*. Las primeras se subdividen en situaciones de *combinación* (EEE), *transformación* (ETE), ***comparación*** (ECE), *doble transformación* (TTT), *transformación de comparación* (CTC) y *doble comparación* (CCC). Existe, además, las situaciones de *igualación*, las que son un híbrido de las situaciones de comparación y transformación. Es caso particular de *transformación de comparación* CTC.

CONCRETAS							FORMALES	TOTAL
CONCRETAS SIMPLES								
EEE	ETE	ECE	TTT	CTC	CCC	IGUAL		
13%	14%	5%	4%	0%	0%	1%	63%	100%
164	173	59	48	0	0	8	768	1220

Doble transformación: Transformación–Transformación– Transformación.

Transformación de una comparación: Comparación – Transformación – Comparación

Doble comparación: Comparación – Comparación – Comparación.

La situación de igualación es un híbrido, una transformación de una comparación.

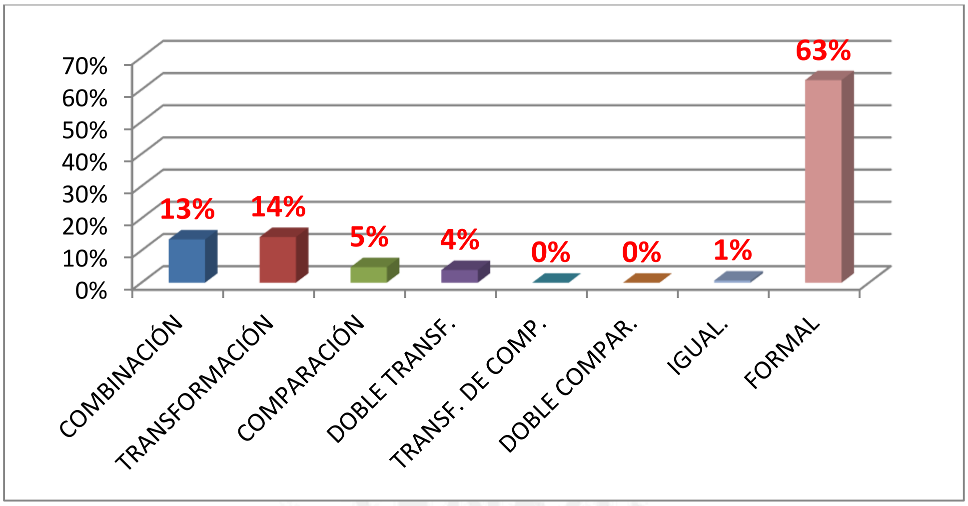


GRÁFICO 2

14% EEE; 15% ETE, 5% ECE, 4% TTT 1% CTC y 61% Formales.

FUERTE PRESENCIA:
FORMALES: 63%.

PRESENCIA ADECUADA:
Combinación: 13%.
Transformación: 14%.

DÉBIL PRESENCIA:
Comparación: 5%.
Doble Transformac.: 4%.
Igualación. 1%

AUSENCIA:
Transformación de Comparación 0%
Doble comparación: 0%.

5.3.3 TIPO DE SITUACIONES ADITIVAS CONCRETAS

Considerando solo las situaciones aditivas concretas, cuya presencia es débil: 39% de todas las situaciones, veamos la distribución de las situaciones simples, más la de igualación.

CONCRETAS							TOTAL
CONCRETAS SIMPLES							
COMB.	TRANS.	COMP.	DOB. TRANS.	TRANS. C.	DOB. C.	IGUAL	
36%	38%	13%	11%	0%	0%	%	100%
164	173	59	48	0	0	8	452

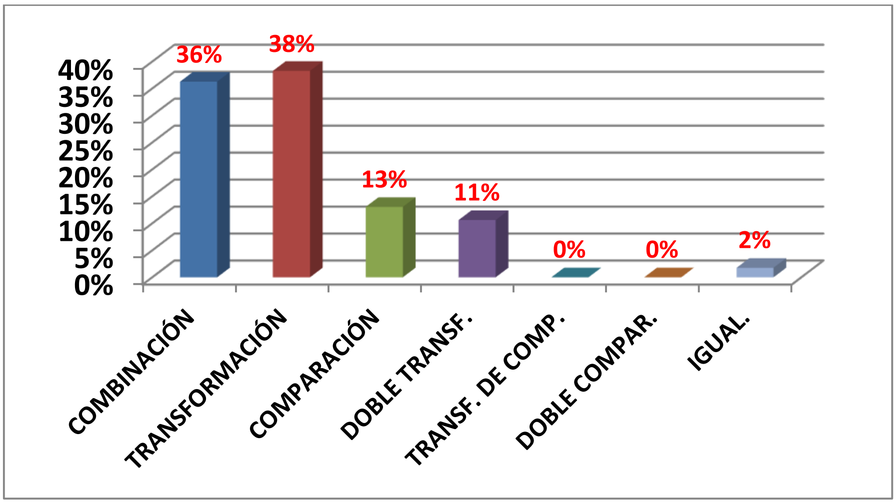


GRÁFICO 3

36% EEE; 38% ETE, 13% ECE, 11% TTT y 2% Igualación.

FUERTE PRESENCIA
Transformación: 38%.
Combinación: 36%.

PRESENCIA ADECUADA
Comparación: 13%.
Doble comparación: 11%.

DÉBIL O NULA PRESENCIA
Igualación: 2%
Transf. de Compaación 0%
Doble comparación: 0%.

5.3.4 SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS EN LAS ADICIONES

Un número en una situación aditiva concreta es: cardinal, ordinal o medida

SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS EN LAS SITUACIONES ADITIVAS CONCRETAS							
CARDINAL		ORDINAL		MEDIDA		Total	
373	83%	0	0%	79	17%	452	100%

83% involucran números cardinales, 17% medida y 0% ordinales.

FUERTE PRESENCIA:
Cardinales: 83%.

DÉBIL PRESENCIA:
Medida: 17%.

AUSENCIA
Ordinales: 0%.

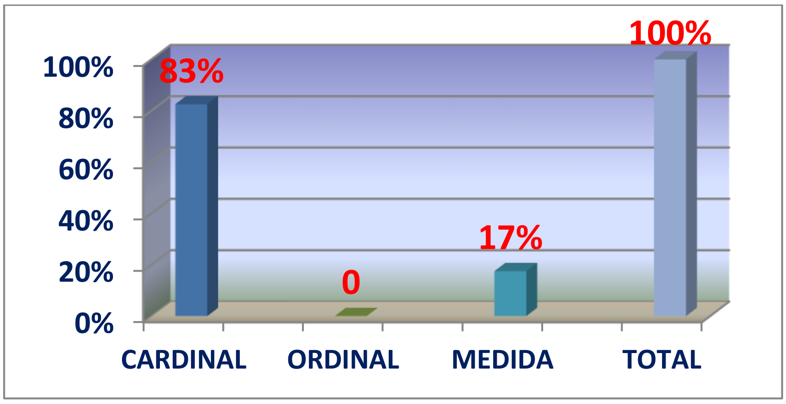


GRÁFICO 4

5.3.5 NÚMERO DE OPERACIONES

Las situaciones aditivas, por el número de operaciones las hemos clasificado en 4 clases: *Una*, *dos*, *tres* y *cuatro operaciones*. En la clase cuatro operaciones hemos considerado aquellas que se resuelven con cuatro o más operaciones.

NÚMERO DE OPERACIONES EN SITUACIONES ADITIVAS								
1 OPERACIÓN		2 OPERACIONES		3 OPERACIONES		4 OPERACIONES		TOTAL
884	72%	243	20%	40	3%	53	4%	1220

72% corresponde a una operación, 20% a dos operaciones, 3% a tres operaciones y 4% a cuatro operaciones o más.

FUERTE PRESENCIA:
Una operación: 72%.
ADECUADA PRESENCIA:
Dos operaciones: 20%.

DÉBIL PRESENCIA
Cuatro operaciones: 4%.
Tres operaciones: 3%.

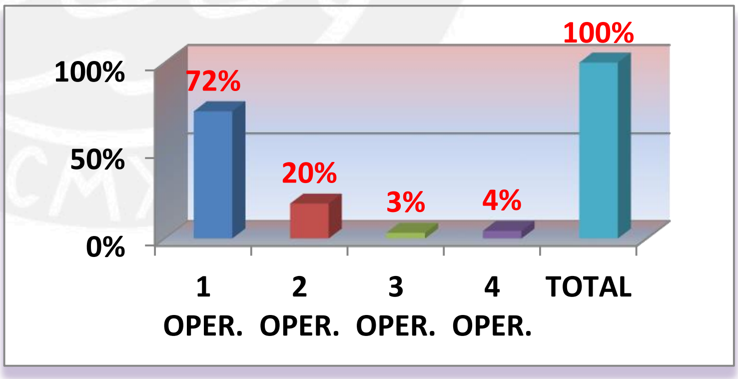


GRÁFICO 5

5.3.6 EN SITUACIONES CONCRETAS

NÚMERO DE OPERACIONES EN SITUACIONES CONCRETAS								
1 OPERACIÓN		2 OPERACIONES		3 OPERACIONES		4 OPERACIONES		TOTAL
297	66%	102	23%	28	6%	25	6%	452

66% corresponde a una operación, 23% a dos operaciones, 6% a tres operaciones y 6% a cuatro operaciones o más.

FUERTE PRESENCIA:
Una operación: 66%.

ADECUADA PRESENCIA:
Dos operaciones: 23%.

DÉBIL PRESENCIA
Tres operaciones: 6%.
Cuatro operaciones: 6%.

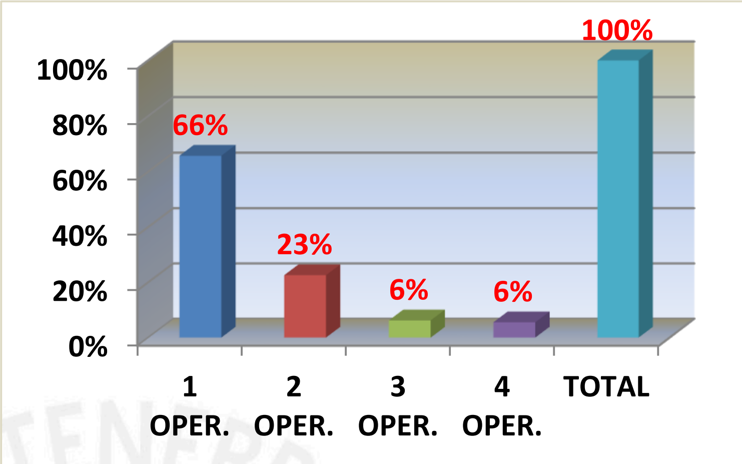


GRÁFICO 6

5.3.7 LUGAR DE LA INCÓGNITA

Las situaciones aditivas pueden ser historias (no hay incógnita) y las que requieren una respuesta. La respuesta puede ser determinación de la suma, un sumando (primero o segundo).*

LUGAR DE LA INCÓGNITA EN SITUACIONES ADITIVAS								
SUMA		SUMANDO 1		SUMANDO 2		S1;S2		Total
638	63%	33	3%	232	23%	114	11%	1017

*Hay 203 situaciones en las que se solicita representar, formular un problema o determinar la verdad o falsedad de un enunciado.

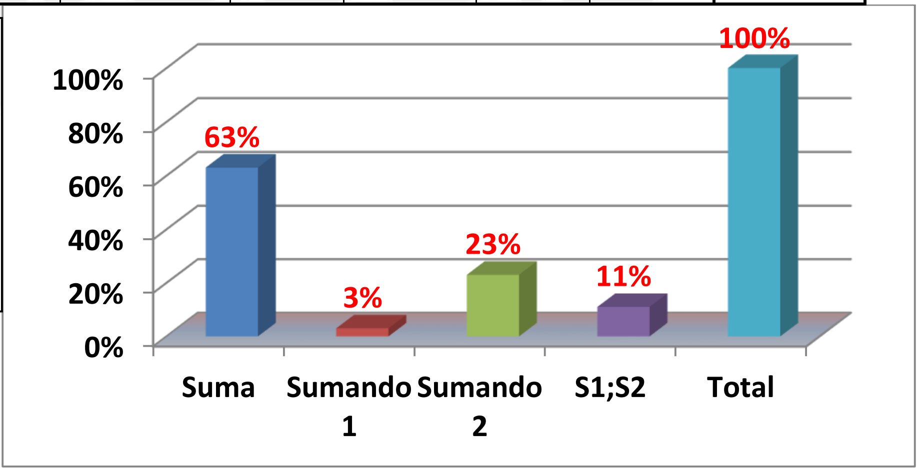


GRÁFICO 7

63% está en la suma, 3% en el primer sumando, 23% en el segundo sumando y 11% en ambos sumandos.

FUERTE PRESENCIA:
SUMA: 63%.

PRESENCIA ADECUADA
SUMANDO 2: 23%.
S1 y S2: 11%.

DÉBIL PRESENCIA:
SUMANDO 1: 3%.

5.3.7.1 INCÓGNITA EN SITUACIONES CONCRETAS

Ahora, consideraremos solo las situaciones concretas.

LUGAR DE LA INCÓGNITA EN SITUACIONES ADITIVAS								
SUMA		SUMANDO 1		SUMANDO 2		S1;S2		Total
227	58%	11	3%	122	33%	29	7%	389

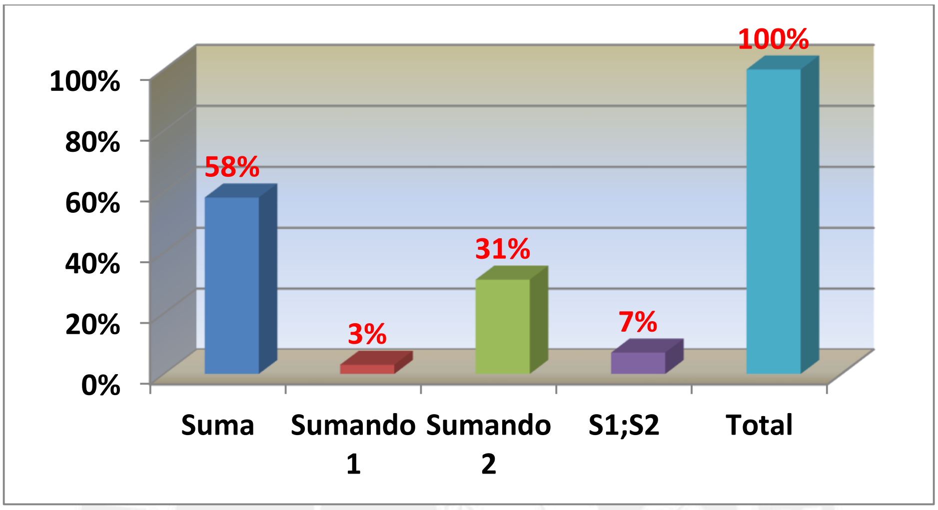


GRÁFICO 8

58% está en la suma y 3% en el primer sumando, 31% en el segundo sumando y 7% en ambos sumandos.

FUERTE PRESENCIA:
SUMA: 58%.

PRESENCIA ADECUADA
SUMANDO 2: 31%.

DÉBIL PRESENCIA:
SUMANDO 1: 3%.
S1 y S2: 7%.

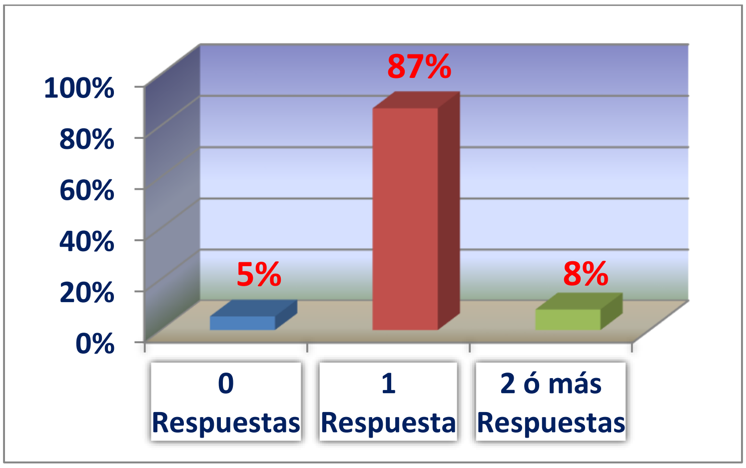
5.3.8 NÚMERO DE RESPUESTAS CORRECTAS

Las situaciones aditivas por el número de respuestas correctas las hemos clasificado en dos clases:

Una respuesta correcta (paradigma del ejercicio)*;* y

Dos *o más respuestas correctas* (escenario de indagación o investigación).

NÚMERO DE RESPUESTAS CORRECTAS		
0 RESPUESTAS	1 RESPUESTA	2 O MÁS RESPUESTAS
65	1057	98
5%	87%	8%



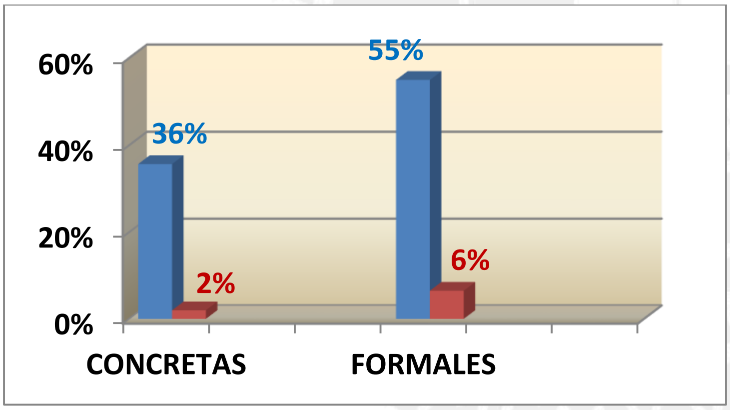
FUERTE PRESENCIA:
1 RESPUESTA: 87%.

PRESENCIA ADECUADA:
0 RESPUESTAS: 5%.

DÉBIL PRESENCIA:
2º MÁS RESPUESTAS: 87%.

GRÁFICO 9

NÚMERO DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	CONCRETAS		FORMALES	
1 Respuesta	412	36%	645	55%
2 o más Respuestas	23	2%	75	6%



FUERTE PRESENCIA:
1 RESPUESTA:
FORMALES: 55%

PRESENCIA ADECUADA:
1 RESPUESTA:
CONCRETAS: 36%

DÉBIL PRESENCIA:
1 RESPUESTA:
CONCRETAS: 2%.

GRÁFICO 10

DÉBIL PRESENCIA: 2 O MÁS RESPUESTAS
FORMALES: 6%.

5.3.8.1 NÚMERO DE OPERACIONES EN SITUACIONES CONCRETAS

	NÚMERO DE RESPUESTAS CORRECTAS					
	Combinación	Transf.	Comparac.	Doble Transf.	Igualación.	Doble Comp.
1 Respuesta	34%	36%	14%	10%	2%	0%
2 o más Resp.	1%	3%	0%	1%	0%	0%

FUERTE PRESENCIA
1 RESPUESTA
Combinación: 34%
Transformación 36%

ADECUADA PRESENCIA
1 RESPUESTA
Comparación: 14%
Doble Transformac.: 10%

DÉBIL PRESENCIA
1 RESPUESTA
Igualación: 2%.
2 RESPUESTAS:
Comb., Transf., Doble Transf.

AUSENCIAS
1 RESPUESTA
Transformación de Comparación.,
Doble Comparación.
2 RESPUESTAS:
Comparación,
Igualación,
Transformación de comparac.,
Doble Transformación.

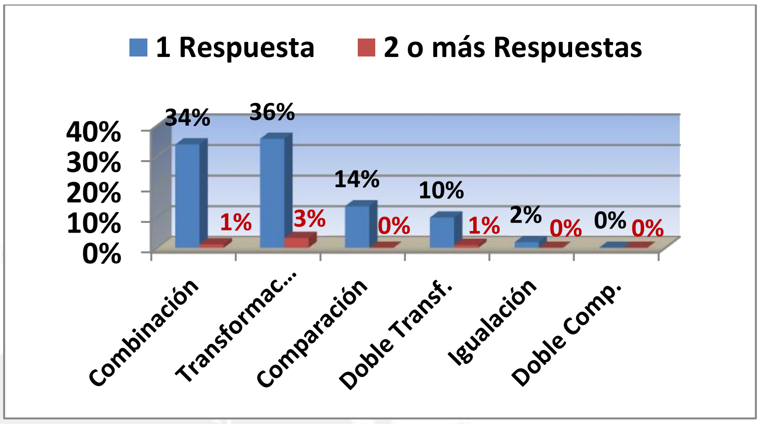


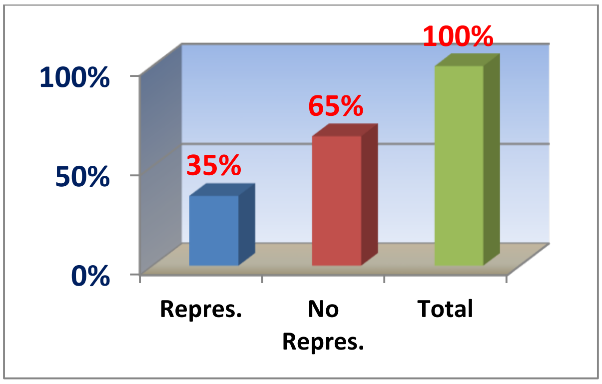
GRÁFICO 11

5.3.9 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Para representar gráficamente los cuadernos y textos analizados utilizaron: colecciones, regletas, rectas numéricas, material de base diez (MBD), gráficos de barras, almanaques, relojes, tablas de doble entrada, dinero, matrices, dibujos, yupana, balanzas, tablas 50, etc.

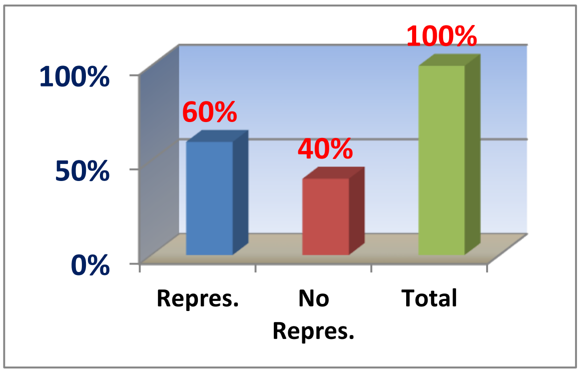
CONCRETAS Y FORMALES					SOLO CONCRETAS				
REPRESENT.		NO REPRES.		Total	REPRESENT.		NO REPRES.		Total
429	35%	791	65%	1220	270	58%	182	47%	452

GRÁFICO 12



Situaciones concreta y formales

GRÁFICO 13



Situaciones concretas

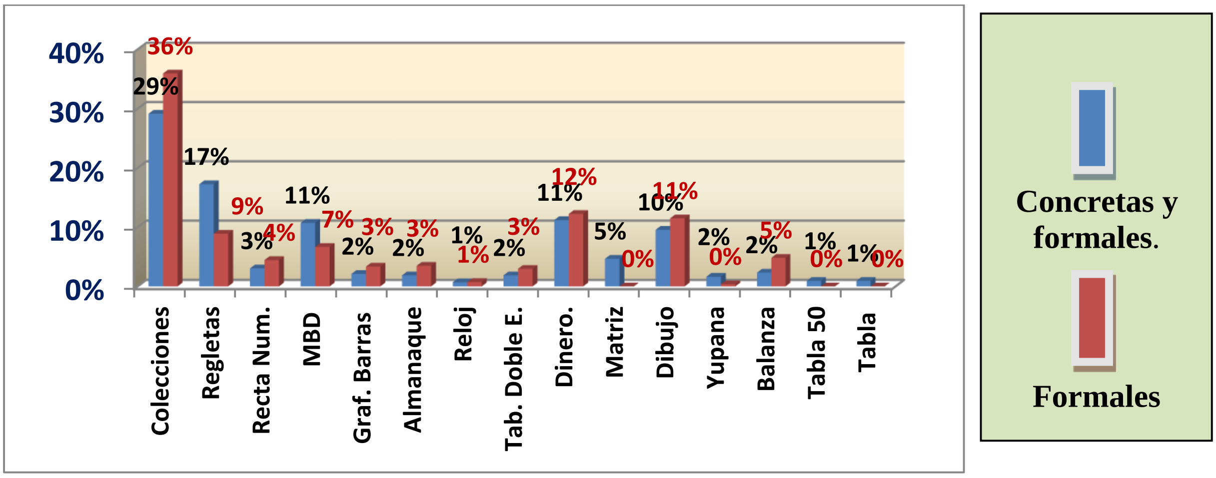


GRÁFICO 14

FUERTE PRESENCIA:	
Colecciones:	*30% y 37%*

DÉBIL PRESENCIA:	
Tabla 50:	*1% y 0%.*
Almanaque:	*2% y 3%.*

PRESENCIA ADECUADA	
Regletas:	*18% y 9%.*
MBD	*11% y 7%.*
Dinero	*11% y 13%.*

DÉBIL PRESENCIA:	
Recta numérica:	*3% y 5%.*
Gráfico de barras:	*2% y 3%*
Yupana	*2% y 0%*
Matriz:	*5% y 0%.*
Tabla de doble E.	*2% y 3%.*
Balanza:	*2% y 5%.*

5.3.10 SIGNIFICADO DE SUMAR

Sumar, significa combinar, transformar, comparar e igualar números (cardinales y medidas).

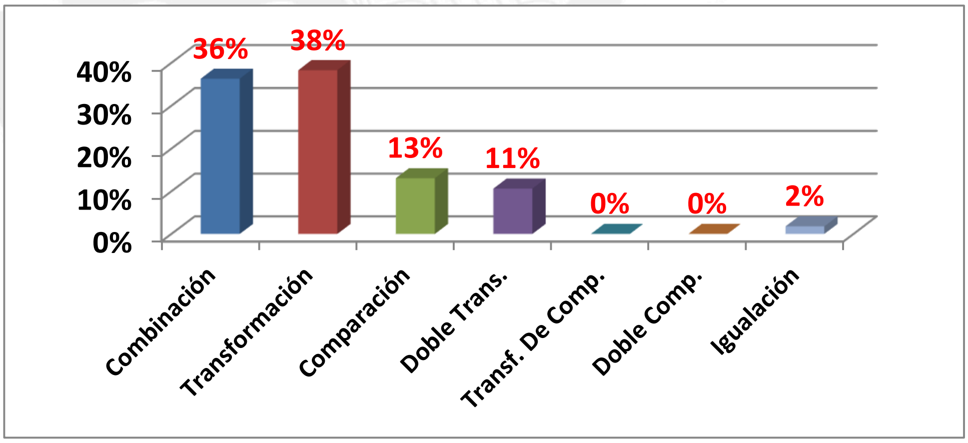


GRÁFICO 15

36% son combinación, 38% transformación, 13% comparación 11 doble transformación y 1% igualación.

FUERTE PRESENCIA:	
TRANSFORMACIÓN:	***38%***
COMBINACIÓN:	***36%.***

PRESENCIA ADECUADA	
COMPARACIÓN:	***13%.***

DÉBIL PRESENCIA:	
DOBLE TRANSFORMACIÓN:	***11%.***
IGUALACIÓN:	***2%.***

NULA PRESENCIA	
TRANSFORMACIÓN DE COMPARACIÓN:	***0%.***
DOBLE COMPARACIÓN:	***0%.***

Capítulo 6

6 IDONEIDAD DIDÁCTICA EN EL CUADERNOS Y TEXTOS ESCOLARES DEL MED

RESUMEN

En este capítulo caracterizamos la idoneidad epistémica y cognitiva de las situaciones aditivas analizadas en los cuadernos y textos escolares entregados por el MED. En la sección primera abordamos la idoneidad epistémica y en la segunda la idoneidad cognitiva. En este capítulo respondemos a la cuarta pregunta y al tercer objetivo específico de investigación.

6.1 IDONEIDAD EPISTÉMICA

Grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

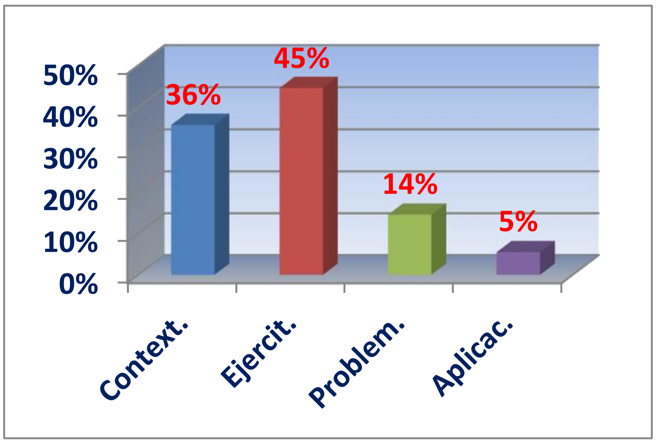
COMPONENTE 1: Situaciones problemas

DESCRIPTOR:	**Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.**
DESCRIPTOR:	***Propuesta de situaciones de generación de problemas (problematización).***

De las 1222 situaciones aditivas, la mayor parte de ellas, el 44% constituyen problemas de ejercitación (544), el 36% son situaciones de contextualización (436) y el 5% son problemas de aplicación (66).

14% constituyen situaciones de problematización.

GRÁFICO 16



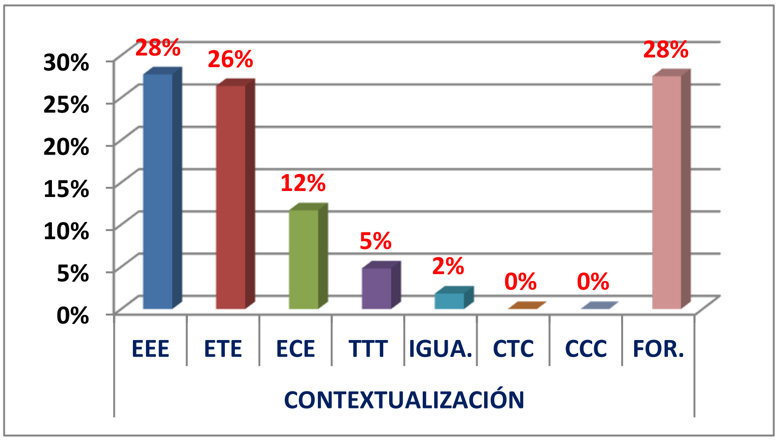


GRÁFICO 17

Entendemos la contextualización como la utilización de los entornos lingüísticos del cual depende el sentido de sumar: *combinar estados* 28% (121), *transformar estados* 26% (115), *comparar estados* 12% (51), *doble transformación* 5% (21), *igualar estados* 2% (8), 28% formales (117), 0% de *transformación de una comparación* y de *doble comparación*. En total hay 436 situaciones de contextualización.

Las situaciones de ejercitación son las mayoritarias 544, (44% del total de situaciones aditivas) y de ellas el 92% son formales (504); 3% son de combinación y de transformación (18 y 16, respectivamente), 1% de doble transformación (6) y 0% de comparación, doble transformación, doble comparación e igualación.

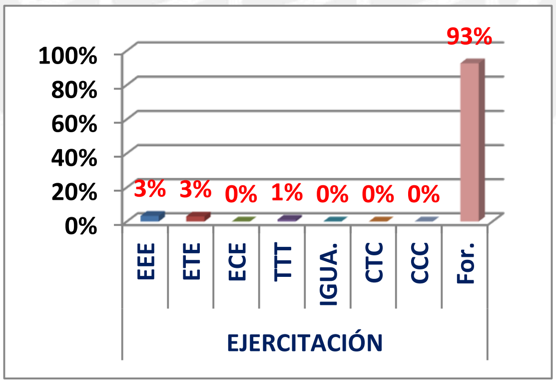


GRÁFICO 18

Las situaciones de aplicación son las minoritarias 66, (5% del total de situaciones aditivas) y de las 66, 23% son de combinación (15), 24% de transformación (16) y 26% de doble transformación (17) y 27% formales (18).

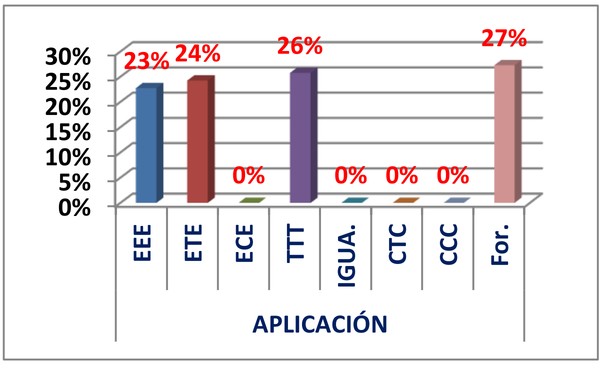


GRÁFICO 19

DESCRIPTOR:	*Propuesta de situaciones de generación de problemas (problematización).*

Las situaciones de problematización son las de indagación: o investigación (problemas con dos o más soluciones correctas, situaciones de formulación de problemas, búsqueda de estrategias, cálculo mental, determinación de patrones, representaciones más adecuadas, etc.).

Solo 176 de las situaciones propuestas constituye potenciales fuente de conjeturas y generalización (14% del total); la gran mayoría son formales (138), muy pocas de combinación 7% (12), 11% de transformación (20), 1% de comparación (2) y 2% doble transformación (4).

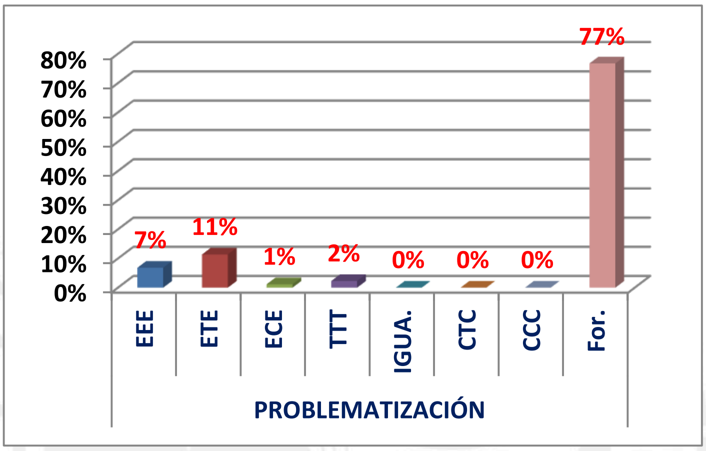


GRÁFICO 20

Observación

De las 1222 situaciones aditivas, 442 son situaciones concretas (situaciones de la semi realidad o de la vida real) esto equivale al 36%, mientras que el 64% son situaciones formales, (780), estas son situaciones de la matemática misma, es decir, aproximadamente un tercio son concretas y dos tercios son formales.

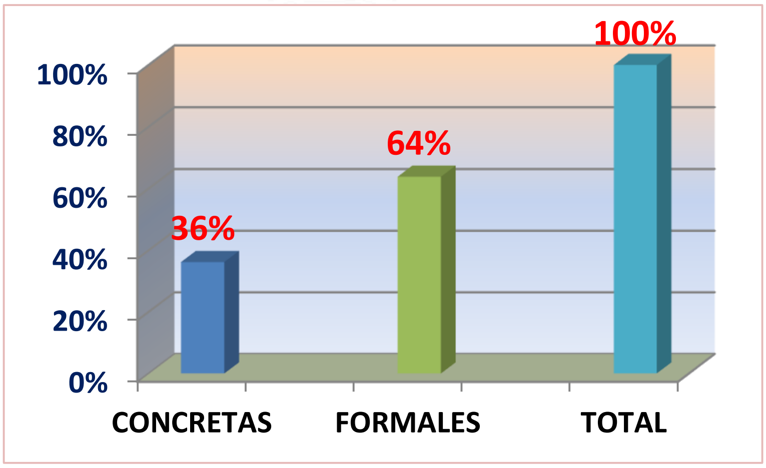


GRÁFICO 21

COMPONENTE 2: Lenguaje

DESCRIPTOR:	***Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos.***

Hay diferentes usos de registros de lenguaje: verbal–simbólico, simbólico, gráfico–simbólico, y verbal–gráfico–simbólico. Entendemos el lenguaje verbal como el lenguaje cotidiano, el simbólico como el lenguaje matemático y el gráfico al que usa dibujos. De las 1222 situaciones problemáticas:

47% solo utilizan lenguaje simbólico. Esto corresponde a 579 problemas formales.

26 % utilizan lenguaje verbal y simbólico. (313 situaciones.)

13% utilizan lenguaje gráfico y simbólico. (182 situaciones.)

16% utilizan lenguaje verbal-gráfico-simbólico. (147 situaciones.)

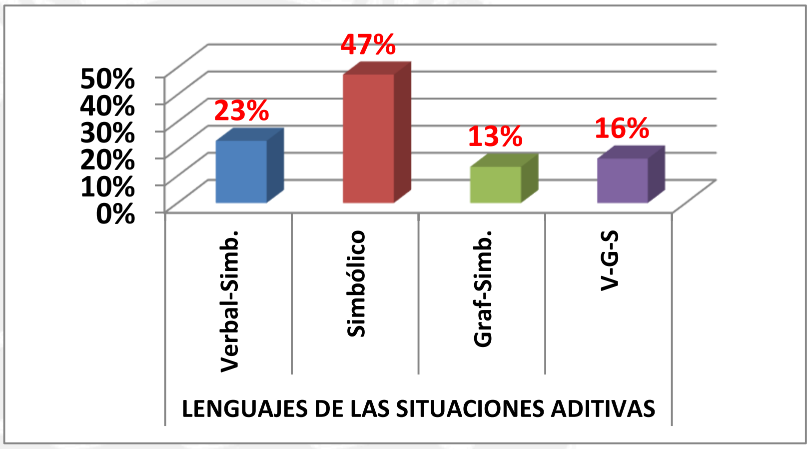


GRÁFICO 22

Hay traducciones de un registro lingüístico a otro. De las 1222 situaciones aditivas el 52% de ellas, 636 problemas, requieren realizar alguna traducción.

No basta una serie de problemas para que los estudiantes manejen con responsabilidad un problema aditivo de números naturales; es imprescindible trabajar diferentes registros semióticos que admiten un tratamiento en cada uno de ellos.

SITUACIONES ADITIVAS		
Con traducción	636	52%
Sin traducción	586	48%
Total	1222	100%

Si se logra un pasaje fluido entre registros y un tratamiento natural en ellos se le permitirá al alumno que examine sus ideas y controle sus resultados.

TRADUCCIÓN DE REGISTROS LINGÜISTICOS EN LAS SITUACIONES ADITIVAS						
Verbal→Simb.	Graf.→Simb.	V-G→S	Simb.→Graf.	V→S-G	Otros	Total
42%	18%	31%	3%	3%	3%	100%
266	115	196	20	21	18	636

Del 100% de las situaciones aditivas que realizan traducciones, el 42% convierte el registro verbal en registro simbólico, el 18% del registro gráfico al simbólico. El 31% de los registros verbal-gráfico al simbólico. Solo el 3% de las situaciones aditivas son convertidas del registro simbólico al gráfico. También el 3% son convertidas del registro verbal al los registros gráfico-simbólico.

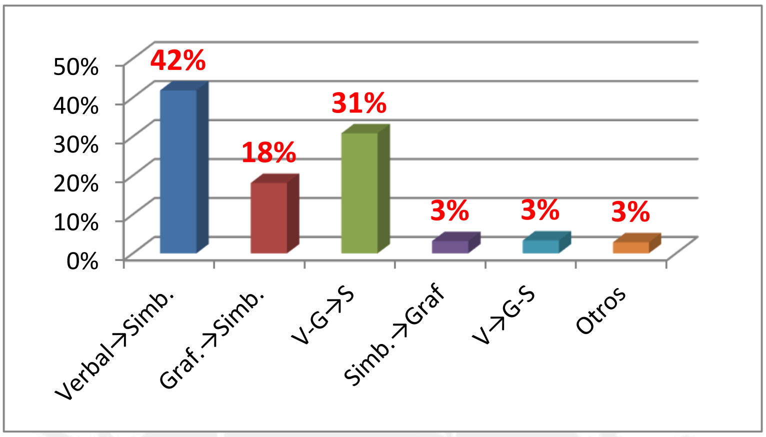


GRÁFICO 23

DESCRIPTOR:	***Nivel del lenguaje adecuado a quienes se dirige.***

En el lenguaje cotidiano el uso es variado: hay uso adecuado como:

En el aula, tienen 7 marionetas y 10 títeres. ¿Cuántos juguetes tienen en el aula entre títeres y marionetas? (Matemática 1. Cuaderno de trabajo, p. 192.)

Pedro elabora figuras de arcilla. El día lunes elaboró 10 figuras y el martes el doble. ¿Cuántas figuras elaboró Pedro en los dos días? _________ (Matemática 2. Cuaderno de trabajo, p. 199.)

El día martes José puso abono a 12 plantas y el día miércoles puso abono a otras 7 plantas. ¿Cuántas plantas abonó en los dos días? (Matemática 2. Cuaderno de trabajo, p. 33.)

Uso no adecuado del lenguaje cotidiano que puede producir confusión como en:

Una niña y un niño tienen frutas. La niña tiene 3 papayas, El niño tiene 4 manzanas. Entre los dos tienen …. frutas. (Matemática 1. Cuaderno de trabajo, p. 81.) El subrayado es nuestro.

Mejoraría la redacción así. Entre papayas y manzanas los dos tienen …. frutas.

Mejor aún: Juana y Luis tienen manzanas. Juana tiene 3 manzanas verdes y Luis tiene 4 manzanas rojas. ¿Cuántas manzanas tienen entre los dos?

Pág. 105

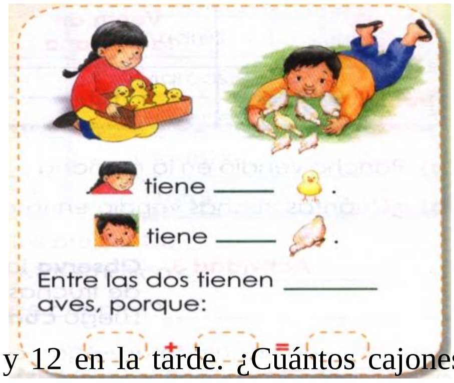
Describiremos algunas alternativas de mejora en el uso del registro verbal en situaciones.

La parte final del problema de la derecha:

Entre pollos y palomas, los dos tienen _____ aves, porque:

Una mejor alternativa sería la situación siguiente:

Rita y César tienen pollos. Rita tiene 5 pollos amarillos y Luis tiene 7 pollos blancos. Entre los dos tienen _____ pollos, porque:



- Martín descargó 7 cajones de piñas en la mañana y 12 en la tarde. ¿Cuántos cajones descargó en total? (Matemática 1. Cuaderno de trabajo, p. 155.)

Pregunta:

¿Cuántos cajones de piña descargó en total, entre la mañana y la tarde?

- Flora vendió 4 papayas y 14 piñas. ¿Cuántas frutas vendió Flora en total? (Ministerio de Educación, Perú, 2014, Matemática 1. Cuaderno de trabajo, p. 155.)

Pregunta:

¿Entre papayas y piñas, cuántas frutas vendió Flora en total?

Alternativa: Flora vendió 4 papayas grandes y 14 papayas chicas ¿Cuántas papayas vendió Flora en total?

- Para pintar, 12 estudiantes usan lápices de colores, 4 usan témperas y 10 usan crayones. ¿Cuántos estudiantes están pintando. (Matemática 1. Cuaderno de trabajo, p. 192.)

  Imposible saber cuántos estudiantes están pintando.

Alternativa: Un grupo de estudiantes están pintando, de ellos, 12 usan solo lápices de colores, 4 solo témperas y los 10 restantes, crayones. En total ¿cuántos estudiantes están pintando?

- Encuentra 2 o 3 números que juntos sumen el número que está en recuadro verde y píntalos de un mismo color, como en el ejemplo. (Matemática 1. Cuaderno de trabajo, p. 84.)

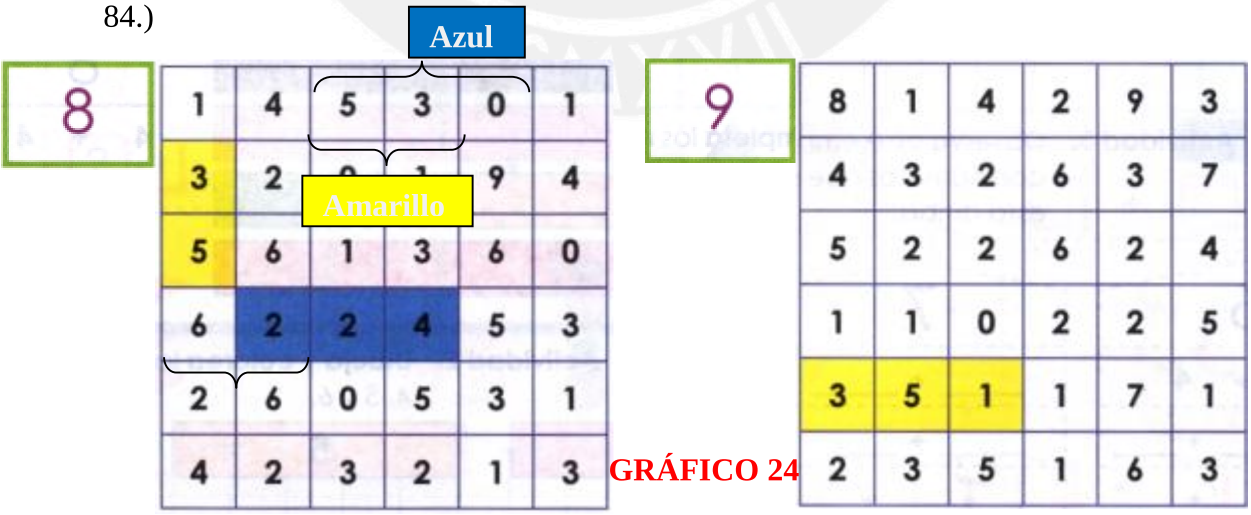


GRÁFICO 24

OJO: ¿Los (recuadros de los) números pintados deben determinar rectángulos? ¿Qué pasa si los (recuadros de los) números están separados por un punto (vértice) o están “alejados”.

Alternativa: Encuentra 2 o 3 números que juntos sumen el número que está en recuadro verde y enciérralos con líneas de un mismo color, como en el ejemplo,

- Observa el calendario del mes de agosto y responde.

  Si el 12 de agosto regresas al colegio de tus vacaciones, ¿cuántos días asistirás a clases hasta fin de mes?

  En agosto asistiré a clase __________ días. (Matemática 1. Cuaderno de trabajo, p. 130.)

Este problema de la vida real es heurístico:

Suponiendo que asisto a clases de lunes a viernes y que no falto día alguno, entonces el problema quedaría planteado así. Del 1 al 11 no asistí. Luego:

$11 + x = 31 \Leftrightarrow x = 31 - 11 \Leftrightarrow x = 20$

Debo restar los días que no hay clases (sábados y domingos). Debo restar 5 días.

Luego, $20 - 5 = 15$ días.

Respuesta: suponiendo que no falte ningún día asistiré 15 días. Si falto un día asistiré 14 días- Si falto dos días asistiré 13 días, etc.

Otra forma de resolverlo es: $12 + x = 31 + 1 \Leftrightarrow x = 32 - 12 \Leftrightarrow x = 20$. Luego restar 5.

Como está planteado el problema, dentro del paradigma del ejercicio, no es posible determinar los días que asistiré. (Puedo enfermarme o realizar otras actividades) Este es un problema que permite hacer conjeturas y que puede ser generalizado utilizando los números relativos.

- Juan construye una figura con 5 piezas de bloques lógicos. Mariana construye una figura con el doble de piezas que Juan.

<u>Dibuja la figura que construyó Mariana</u>

¿Cuántas piezas tiene la figura de Mariana? __________
(Matemática 1. Cuaderno de trabajo, p. 199.). El subrayado es nuestro.

No es posible saber la figura que construyó Mariana, La situación aditiva queda bien redactada si eliminamos la expresión subrayada.

Esta situación constituye un problema que requiere ser generalizada: Trabajé entre el 5 del mes y el 20. ¿Cuántos días trabajé?

(Matemática 1. Cuaderno de trabajo, p. 154.)

Su trabajo duró: $x + 4 = 12 + 1 \Leftrightarrow x + 4 = 13 \Leftrightarrow x = 13 – 4 \Leftrightarrow x = 9$.

En la página 205 del cuaderno de trabajo 1, encontramos: Jugamos al caminito:

¿Cómo se juega?

- Cada jugador lanza la moneda en su turno.
- En la primera jugada se avanza 5 casilleros si sale cara y se pierde un turno si sale sello.
- En las siguientes jugadas:
- Si sale cara, se avanza cinco casilleros.
- <u>Si sale sello, se retrocede un casillero</u>.
- Gana quien llega al casillero 20. (Matemática 1. Cuaderno de trabajo, p. 205.) El subrayado es nuestro.

Observación: ¿Si un jugador en las dos primeras jugadas saca sello? ¿Retrocede un casillero? ¿De dónde?

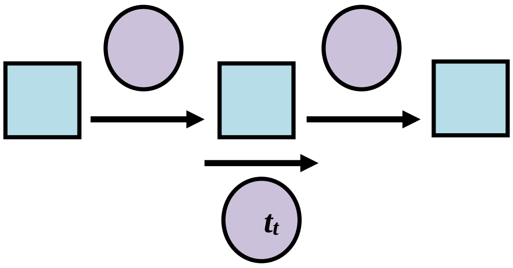
Mejorar la redacción la expresión subrayada: Si sale sello, se retrocede un casillero o pierde un turno si no tiene de donde retroceder.

- Florencio compra en el mercado 48 latas de leche y vende en su tienda 16. <u>¿Cuántas latas le falta vender?</u> (Matemática 2. Cuaderno de trabajo, p. 111.) El subrayado es nuestro.

Mejorar la redacción la expresión subrayada: ¿Cuántas latas le falta vender de las 48 latas que compró en el mercado?

- Pedro gana S/. 48 y gasta S/. 23 en comida y movilidad. <u>¿Cuánto dinero le queda?</u> Respuesta: _________________________ (Matemática 2. Cuaderno de trabajo, p. 112.) El subrayado es nuestro.

Mejorar la redacción la expresión subrayada: ¿Cuánto dinero le queda de lo que ganó? En este caso la situación aditiva es de doble transformación. Situación que no está contemplada en los Mapas de Progreso, las Rutas del Aprendizaje o el DCN.

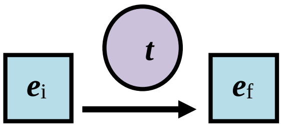


La situación quedaría del modo siguiente:

Pedro gana S/. 48 y gasta S/. 23 en comida y movilidad. ¿Cuánto dinero le queda de lo que ganó? TTT.

La situación puede ser de transformación: ETE. La redacción puede ser:

Pedro tiene S/. 48 y gasta S/. 23 en comida y movilidad. ¿Cuánto dinero le queda? ETE



En la página 102 del cuaderno de trabajo de segundo grado leemos la situación aditiva y la utilización correcta del verbo faltar.

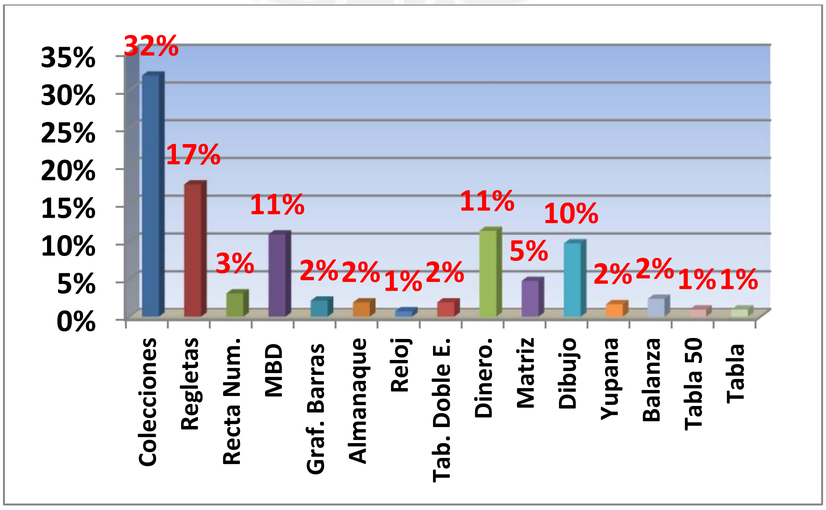
- Julia tiene 37 semillas y le faltan 99 para hacer 4 collares. ….
  Sin embargo hay situaciones que merecen ser comentadas.
- ¿Cuánto le falta a 16 para llegar a 30?
  De 16, faltan ________ para llegar a 30.
- ¿Cuánto le falta a 17 para llegar a 25?
  De 16, faltan ________ para llegar a 30. (Matemática 2. Cuaderno de trabajo, p. 146.)

El nivel del lenguaje simbólico, en general, es adecuado.

DESCRIPTOR:	***Propuesta de situaciones de expresión e interpretación*.**

El 35 % (429) de las situaciones aditivas se expresan, además de la forma simbólica, con soporte concreto o gráfico. Este soporte se refiere fundamentalmente a colecciones 32% (135), regletas de Cuisenaire 17% (74) Material de Base diez 11% (46), dinero 11% (48), dibujo 10% (41). Hay porcentajes muy pequeños sobre el uso de la recta numérica, gráfico de barras, almanaque, reloj, tablas de doble entrada, la yupana, la tabla del 100 o tabla del 50.

GRÁFICO 25



Además se encuentra situaciones en las que un número o una cantidad se expresan como la suma de dos, tres o más números o cantidades. Notando un aspecto importante es la equivalencia de monedas y billetes.

Las situaciones aditivas se interpretan mayoritariamente como situaciones formales: 64% (777 situaciones problemas) y solo el 36% como situaciones concretas (442). Estas últimas se interpretan por las acciones que realizan los estudiantes al resolver los problemas.

A continuación, mostramos cantidades y los porcentajes por grado:

SITUACIONES ADITIVAS - PRIMER GRADO								
Combin.	Transf.	Comparac.	Doble Trans.	Transf. De Comp.	Doble Comp.	Igualación	Formal	Total
13%	19%	4%	11%	0%	0%	1%	52%	100%
43	63	13	35	0	0	4	168	326

SITUACIONES ADITIVAS – SEGUNDO GRADO								
Combin.	Transf.	Comparac.	Doble Trans.	Transf. De Comp.	Doble Comp.	Igualación	Formal	Total
16%	16%	4%	2%	0%	0%	1%	61%	100%
61	59	14	7	0	0	2	228	371

SITUACIONES ADITIVAS - TERCER GRADO								
Combin.	Transf.	Comparac.	Doble Trans.	Transf. De Comp.	Doble Comp.	Igualación	Formal	Total
11%	9%	4%	0%	0%	0%	0%	76%	100%
28	22	10	1	0	0	0	194	255

SITUACIONES ADITIVAS – CUARTO GRADO								
Combin.	Transf.	Comparac.	Doble Trans.	Transf. De Comp.	Doble Comp.	Igualación	Formal	Total
14%	9%	3%	1%	0%	0%	1%	73%	100%
30	19	6	3	0	0	2	160	220

SITUACIONES ADITIVAS - QUINTO GRADO								
Combin.	Transf.	Comparac.	Doble Trans.	Transf. De Comp.	Doble Comp.	Igualación	Formal	Total
12%	10%	20%	4%	0%	0%	0%	54%	100%
6	5	10	2	0	0	0	27	50

Si desagregamos en los diferentes tipos de situaciones aditivas tenemos que el 14% corresponde tanto a combinación (168) como de transformación o cambio (168) y el 4% para las situaciones de comparación (53) y doble comparación (48) y el 1% para las situaciones de igualación (8). No hay situaciones de transformación de una comparación o doble comparación.

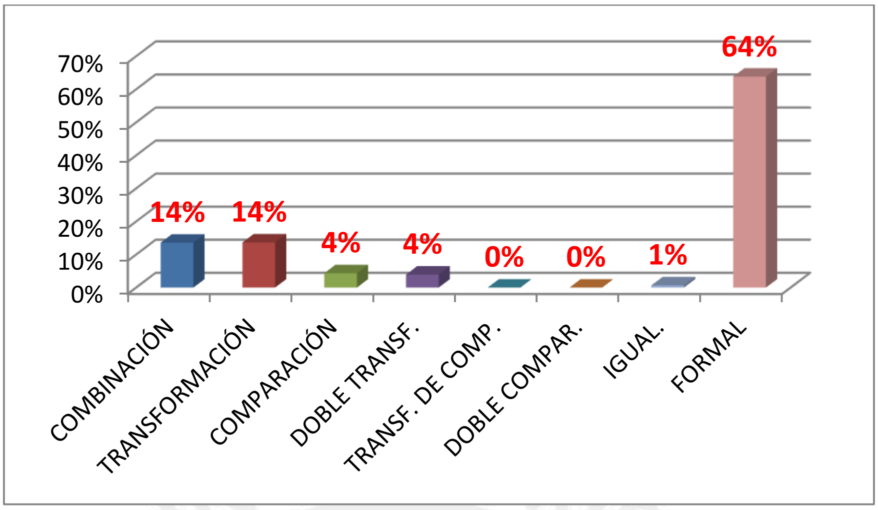


GRÁFICO 26

***COMPONENTE 3**: Elementos regulativos (definiciones, proposiciones procedimientos)*

DESCRIPTOR	***Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen.***

No encontramos definiciones ostensivas de la adición, sustracción, suma, diferencia de dos números naturales, sin embargo nos muestra que:

Sumar está relacionado con las acciones de *juntar*, *agregar*, *avanzar*, *igualar*.

Juntar: (1° grado, pp. 81, 82, 105, 133–138, 155, 156, 161, 162, 169, 192.)

Agregar: (1° grado, pp. 85, 106, 108, 161, 163, 169, 172, 192, 194, 195)

Avanzar: (1° grado, pp. 86, 119, 174).

Igualar: 1° grado, 170, 171)

Restar está relacionado con las acciones de *quitar*, *retroceder*.

Quitar: (1° grado, pp. 133–138, 155, 156, 163, 169, 192, 193, 194, 195).

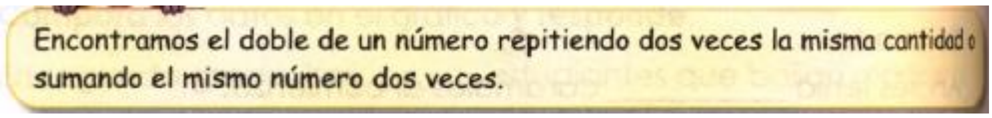
Retroceder: (1° grado, 171, 174)

Utilizamos la adición para juntar o agrupar dos o más cantidades o agregar una cantidad a otra ya existente. (3° grado, p. 38).

La adición se aplica para juntar o reunir cantidades.

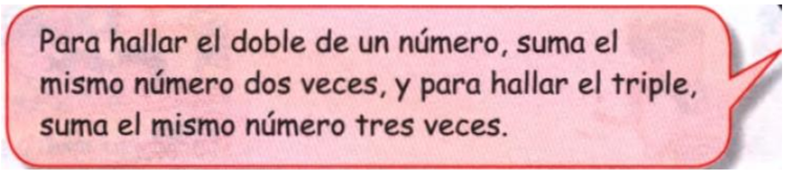
- Para un resultado exacto, se usa la técnica operativa.
- Para un resultado rápido, se aproxima por redondeo y luego, se usa la técnica operativa. (4° grado, p. 36).

Doble de un número



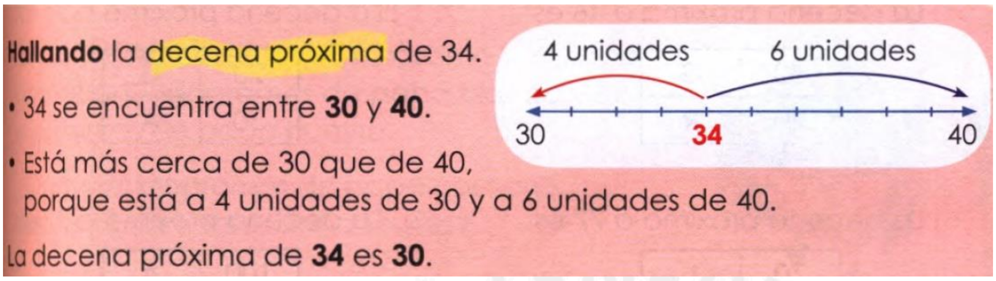
(1° grado, p. 196)

Triple de un número



(1° grado, p. 210)

Decena próxima,



(2° grado, p. 121)

> Cuando las cifras terminan en el número 5, que está a la misma distancia de ambas decenas, la decena próxima a ese número será la mayor. (2° grado, p. 121)

Los autores activan la dualidad extensivo-intensivo. Un caso particular da la idea del caso general.

La noción de sumar está relacionada a *juntar*, *agregar* colecciones o conjuntos. Sin embargo, esta puede constituir un conflicto semiótico, pues si las colecciones no son disjuntas, la situación problema no constituye un problema de adición.

La noción de restar está relacionada a *quitar* objetos de una colección o conjunto o *retroceder* en la recta numérica o en una sucesión.

La definición de decena próxima se define como la decena más cercana. Debería definirse como la decena más cercana en la recta numérica.

Las definiciones del ***doble*** y el ***triple de un número*** es falsa al utilizar el verbo ***repetir***.
El doble de 5 es 5 + 5: He repetido el sumando 5 una vez y no dos veces.

El triple de 4 es 4 + 4 + 4: He repetido el sumando 4 dos veces y no tres veces.

Respecto a los procedimientos encontramos actividades que incentiva la formulación de estrategias de cálculo (conteo, composiciones, descomposiciones y gráficos) *para sumar y restar* números de dos cifras.

> Para sumar con mayor facilidad descomponemos los números. Luego los agrupamos para sumar: decenas con decenas y unidades con unidades.
>
> 45 + 37 = 40 + 5 + 30 + 7 = 40 + 30 + 5 + 7 = 70 + 12 = 70 + 10 + 2 = 80 + 2 = 82.
>
> (Cuaderno de trabajo 2, p. 97)

Luisa, tengo 28 semillas y necesito 9 más para completar la pulsera. ¿Me puedes dar 9 semillas?

Tengo bolsitas con 10 semillas cada una. Te doy una bolsita y me devuelves una semilla.

28 + 9 = 28 + 10 – 1 = 38 – 1= 37. (Cuaderno de trabajo 2, p. 101)

Completamos 10 para sumar

7 + 5 = (7 + 3) + 2 = 10 + 3 = 13 8 + 5 = (8 + 2) + 3 = 10 + 3 = 13

Julia tiene 37 semillas y le faltan 99 para hacer 4 collares. Luisa le da 10 bolsitas con 10 semillas cada una y le pide que le devuelva una semilla. ¿Cuántas semillas tiene ahora Julia?

37 + 99 = 37 + 100 – 1 = 137 – 1 = 136. (Cuaderno de trabajo 2, p. 102)

Hallamos lo que falta

Si estás en 5, para llegar a 9, ¿cuánto te falta? 5 + $\boxed{}$ = 9.

			1	2	3	4	5	6	7	8	9								

Si estás en el 5° casillero, ¿cuánto te falta para estar en el 9°?

Si tienes S/. 5, ¿cuánto te falta para tener S/. 9? 5 + $\boxed{}$ = 9.

Descomponemos para sumar:

13 = 10 + 3

<u>4 = 2 + 2</u>

17 = 12 + 5

Aplicamos la **descomposición de números** y las **propiedades** conocidas para crear nuestras estrategias de cálculo escrito y mental. (3° grado, p. 40)

Al resolver situaciones de sustracción, encontramos:

Para restar: regalar, perder, significa: tachar el número indicado.

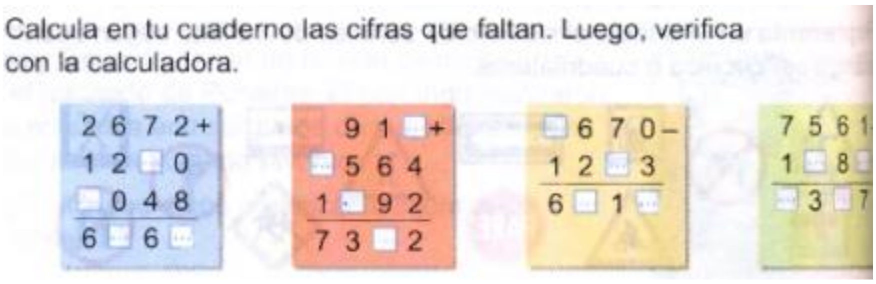
La diferencia es el número de objetos no tachados.

Utilizamos la **sustracción** para **quitar** una cantidad a otra mayor o hallar lo que le falta a una cantidad menor para ser igual a otra mayor. (3° grado, p. 44).

La sustracción se aplica para **quitar** una cantidad de otra.

- Para un resultado exacto, se usa la técnica operativa.
- Para un resultado rápido, se aproxima por redondeo y luego, se usa la técnica operativa. (4° grado, p. 36).

El uso de la calculadora para realizar operaciones es limitado. Como en estas situaciones



(4° grado, p, 50)

8 IDENTIFICAMOS E INTERPRETAMOS PATRONES MATEMÁTICOS CON EL USO DE LA CALCULADORA

DESCUBRIMOS E INVESTIGAMOS SUCESIONES NUMÉRICAS

Luis, sin utilizar la calculadora, cuenta de 3 en 3 empezando por el 1 y escribe en su cuaderno: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...

Enseguida, Luis piensa que también podría obtener esta sucesión de números con su calculadora. Para ello, digita el 1 y se pregunta: "¿Qué debo digitar enseguida para obtener esa sucesión?".

Haz otra sucesión de números. Empezando por 4, cuenta de 5 en 5, primero mentalmente y luego con una calculadora. Registra en tu cuaderno lo que obtienes. Si estás en el 49, ¿qué puedes hacer con la calculadora para regresar al 4?

Sucesiones de los múltiplos de un número

Luis ahora presiona la siguiente secuencia de teclas:

+ 2 = = = = = = = = = = o

+ 2 + + = = = = = = = =

De este modo, genera en el visor los diez primeros múltiplos de 2: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

(5° grado, p. 29)

EXPLORANDO PATRONES MATEMÁTICOS CON UNA CALCULADORA

Patrones aditivos

1. **Copia** en tu cuaderno y **halla** cada adición usando una calculadora.

10 + 1 = 11
100 + 10 + 1 = 111
1000 + 100 + 10 + 1
10 000 + 1000 + 100 + 10 + 1
100 000 + 10 000 + 1000 + 100 + 10 + 1

NO ESCRIBIR

2. **Copia** en tu cuaderno y **calcula** cada adición sin usar la calculadora. Luego **verifica** tus respuestas con la calculadora.

300 + 3 = 303
33 000 + 33
3 330 000 + 333
3 33 300 000 + 3333

(5° grado, p. 30)

1. **Calcula** la suma en cada caso, usando una calculadora.

40 + 4 | 4000 + 400 + 40 + 4
400 + 40 + 4 | 40 000 + 4000 + 400 + 40 + 4

NO ESCRIBIR

¿Cuál es el patrón que observas?

Escribe una regla que explique cómo determinar cada suma.

TRABAJO EN GRUPO CLASE

Todos juntos jugamos a encontrar sumas máximas y mínimas en compañía del profesor o profesora.

1. Elijan cinco cifras diferentes. Utilizando solamente esas cinco cifras, sin repetir, formen dos números. Sumen esos dos números.

   Observen un ejemplo.

   Cifras escogidas: 1, 2, 6, 7 y 9.

   Formamos dos números: 29 y 167.

   → 29 + 167 = 196

   Formamos otros dos números: 67 y 291.

   → 67 + 291 = 358

   Utilizando solamente las cinco cifras que escogieron, formen dos números cuya suma sea la mayor posible.

   Formen otros pares de números con las cifras escogidas y súmenlos hasta encontrar los dos que dan la menor suma.
2. Comiencen otra vez, eligiendo otras cinco cifras, y realicen la misma tarea.
3. ¿Existe alguna estrategia en la que, haciendo un solo intento, se consiga la mayor suma posible?
4. Elijan cinco cifras diferentes. Esta vez formen dos números cuya suma sea la menor posible.
5. Realicen la misma tarea, eligiendo seis cifras diferentes y formando con ellas dos números.

(5° grado, p. 29)

De las 1222 situaciones aditivas en los seis grados hay 20 en las cuales interviene la calculadora., menos del 2%. ¿Porqué la calculadora solo es se usa en el 4° y 5° grado. En el 4° grado para comprobar 4 situaciones 2 de suma y 2 de resta. Solo en el 5° grado la calculadora es un instrumento de indagación e investigación.

La propuesta incorpora un conjunto de procedimientos y estrategia para sumar y restar, algunas de ellas favorecen el cálculo mental, sin embargo la propuesta, no sistematizada, carece de claridad para desarrollar el cálculo mental y la estimación.

Respecto a proposiciones encontramos, las que se refieren a las propiedades de la adición: conmutativa, asociativa, elemento neutro y reglas para realizar operaciones combinadas, como:

> ***Cambiamos el orden para sumar***
>
> Si cambias el orden de los sumandos no se altera la suma. 6 + 5 + 4 = 6 + 4 + 5 = 10 + 5 =
>
> Si se cambia el orden de los sumandos, se obtiene la misma suma. Esta es la propiedad conmutativa de la adición.
>
> Si se agrupan los sumandos de distintas formas, se obtiene la misma suma. Esta es la propiedad asociativa de la adición. (3° grado, p. 42).
>
> Cuando no hay paréntesis, las operaciones de adición y sustracción se resuelven en el orden en que aparecen, de izquierda a derecha.
>
> Si hay paréntesis, se resuelven primero las operaciones que están dentro de ellos, y después las adiciones y sustracciones en el orden en que aparecen. (3° grado, p. 48) y (4° grado, p. 42).

COMPONENTE 4: Argumentos

DESCRIPTOR	***Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen.***

De las 1222 situaciones 429 poseen representación con material concreto, gráficos o dibujos que explican las situaciones, de ellas 697 corresponden a los cuadernos de los estudiantes (1° y 2° grados) y 390 poseen representación. El material concreto o los gráficos sirven también para comprobar las operaciones. En los textos (3°, 4° y 5° grados) hay 525 situaciones de las cuales 39 poseen representación. Solo en el 4° grado se utiliza la calculadora para comprobar 2 sumas y dos resta. En el 5° grado la calculadora es medio de indagación e investigación, aunque su uso es muy limitado.

DESCRIPTOR	***Se promueven momentos de validación.***

La validación de situaciones aditivas se puede conseguir realizando estimaciones. Para ello se utiliza números compatibles. Números cuyas operaciones son más fáciles, muchas de tales operaciones se pueden realizar mentalmente.

No hay momentos de validación.

COMPONENTE 5: Relaciones (conexiones, significados)

DESCRIPTOR	***Relación y articulación significativa de los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan***

Hay pocas conexiones entre objetos primarios: situaciones, lenguaje, reglas -definiciones y propiedades- con los procedimientos y argumentos. La suma como un proceso de conteo, la multiplicación como sumas repetidas, la diferencia como una suma de términos cambiados. Los procedimientos mentales de la suma de números de un dígito extenderlos a decenas, centenas, etc.; los procesos de estimación y cálculo exacto; procedimientos usando la calculadora para resolver enunciados abiertos de adición o sustracción Hay pocos organizadores visuales sobre las situaciones aditivas.

Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas útiles o estimulantes. Sin embargo, aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención, como propone el EOS, a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas. Tales tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, y requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten y justifiquen las soluciones. (Godino, J. D., 2011, p. 9.)

Al comparar los significados institucionales pretendidos con los significados de referencia descritos en el apartado 4.2 encontramos:

Pocas situaciones de problematización y las de contextualización están enfocadas principalmente en situaciones de transformación, combinación y formales.

Si bien hay uso de diferentes modos de expresión: verbal, gráfico, simbólico..., las traducciones y conversiones entre los mismos están referidos fundamentalmente a pasar del verbal al simbólico y del verbal-gráfico al simbólico. El uso del lenguaje cotidiano es variado, hay uso adecuado en muchas situaciones como uso inadecuado que genera confusión en otras. Las situaciones de expresión e interpretación está fuertemente enfocada en la formales, combinación, transformación; es muy poca las de doble transformación comparación, e igualación y las de transformación de una comparación y de doble comparación es nula.

No hay definiciones ostensivas de la adición, sustracción, suma, diferencia de dos números naturales. La noción de sumar está relacionada a *juntar*, *agregar* colecciones o conjuntos. Sin embargo, esta puede constituir un conflicto semiótico, pues si las colecciones no son disjuntas, la situación problema no constituye un problema de adición. Los procedimientos incentivan la formulación de estrategias de cálculo (conteo, composiciones, descomposiciones y gráficos) para sumar y restar. No encontramos estrategias de cálculo mental y estimación.

Los argumentos mostrados están referidos al uso de material concreto, gráfico o dibujos. Los momentos de validación son escasos. La calculadora está, casi ausente. No encontramos situaciones de estimación y el cálculo mental.

Muestra reducida de relaciones entre situaciones, lenguaje, definiciones, propiedades procedimientos y argumentos. Relaciona la suma como un proceso de conteo, la multiplicación como suma de sumandos repetidos. La diferencia como una suma de términos cambiados. Solo hay dos organizadores visuales (3° y 4° grados).

Por estas consideraciones, concluimos que el grado de idoneidad epistémica es bajo,

IDONEIDAD COGNITIVA

Grado en que los significados pretendidos (implementados) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.

COMPONENTE 1: Conocimientos previos

DESCRIPTOR	***Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema.***

Los cuadernos y los textos analizados consideran los conocimientos previos, antes de presentar las nuevas situaciones problema. Hacen un recuento de lo estudiado anteriormente. Los estudiantes anteriormente han abordado los conocimientos previos necesarios.

DESCRIPTOR	***Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.***

Son 437 situaciones de contextualización (36%), 44% constituyen de ejercitación, la mayor parte, el 14% son situaciones de problematización. (Situaciones potencialmente más ricas) y el 5% constituyen situaciones de aplicación. Todas estas situaciones buscan dar el significado pretendido.

La base de los significados lo constituyen las situaciones de contextualización. El 28% corresponden a situaciones de combinación, 26% a cambio, 12% a comparación, 5% a doble transformación 2% a igualación y 27% son formales.

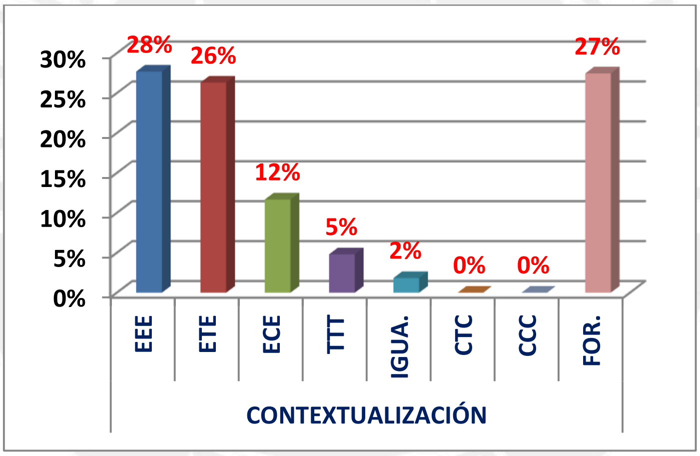


GRÁFICO 27

Esta distribución no es la mejor para los estudiantes.

La dificultad de las situaciones es relativamente baja. La gran mayoría son problemas formales o concretas, estas se refieren a los tipos de combinación o transformación y generalmente con solución correcta única y con números que cumplen el papel de cardinales o medida. Están ausentes las situaciones de transformación de una comparación o de comparación. Hay poco espacio para el uso de la heurística.

COMPONENTE 2: Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales

DESCRIPTOR	***Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.***

De las 544 situaciones aditivas de ejercitación (45%). En ellas se incluyen situaciones de ampliación y de refuerzo. Sin embargo el 93% son situaciones formales, 3% para las situaciones de combinación, 3% para las de transformación y 1% de doble transformación.

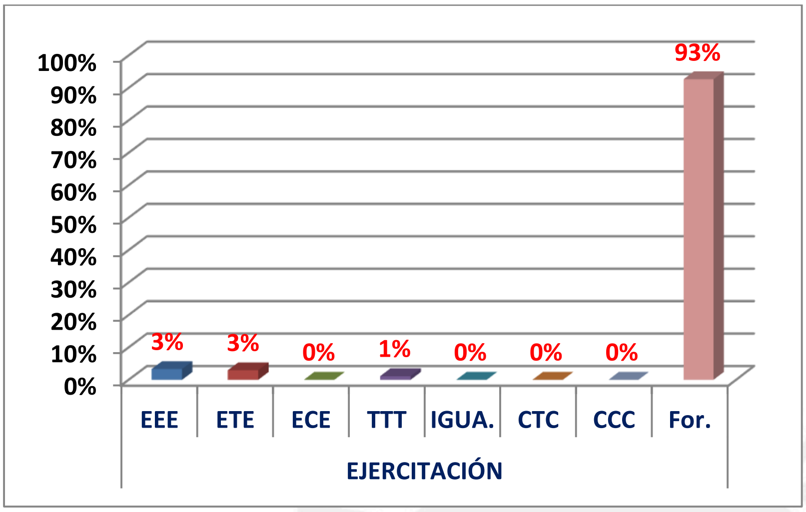


GRÁFICO 28

La distribución está sesgada para las situaciones formales.

> Tres de los seis principios formulados por el NCTM (2000) sobre la enseñanza de las matemáticas tienen relación con la idoneidad cognitiva. El principio de igualdad indica, "La excelencia en la educación matemática requiere igualdad, grandes expectativas y un fuerte apoyo para todos los estudiantes". Se exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas, y que sean incluidos contenidos motivadores para promover el acceso y el logro de todos los estudiantes." (Godino, J. D., 2011, p. 10.)

COMPONENTE 3: Aprendizaje

DESCRIPTOR	***Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas o implementadas.***

- Los cuadernos de trabajo no presentan situaciones de evaluación, los textos del 3°, 4° y 5° grado si contienen.
- La evaluación del 3° grado contiene 7 ítemes: 9 problemas formales y 10 concretas.
- Las formales: 2 sumas de tres sumandos y 2 restas con números de hasta 4 cifras; 6 operaciones combinadas, 3 con signos de colección y 3 sin ellos; 1 suma máxima y 1 suma.
- Las concretas: 4 situaciones de combinación y 3 de transformación. Información en una tabla de doble entrada; 2 formulaciones de problemas cuyo resultado se obtiene con operaciones combinadas; 1 problema de combinación y 1 de transformación; 3 patrones: 1 de suma y 2 de resta.

- El número de respuestas correctas es 1 (paradigma del ejercicio), 18 problemas utilizan cardinales y 1 problema números que representan medida. No hay números ordinales. El tipo de situaciones concretas de esta evaluación corresponden al 1° grado. (Combinación y cambio).
- La evaluación del 4° grado contiene 6 ítemes. Hay 6 situaciones formales y 6 concretas.
- Formales: 6 operaciones combinadas, 3 con signos de colección y 3 sin ellos.
- Concretas: 3 situación de combinación /2 sumas y 1 resta), 1 de transformación (suma), 1 de comparación y 1 de igualación. Información en una tabla de doble entrada.

Hay una situación que tiene más de una respuesta correcta. Esta situación no corresponde al paradigma del ejercicio. No hay propuestas de este tipo

> Felipe vendió ayer 975 kg de pulpo y algunos kilogramos de calamar. Hoy vendió 1476 kg de calamar y algunos kilogramos de pulpo. Si la venta total de kilogramos del primer día es igual a la del segundo día, ¿cuántos kilogramos en total vendió en los dos días? (p, 56).

La evaluación del 5° grado sobre situaciones aditivas contiene 3 ítemes. Hay 5 situaciones 4 formales y 1 concreta.

Situaciones formales: 1 patrón aditivo y 3 referidas a las propiedades. Asociativa, conmutativa y elemento neutro.

Concretas: 1 situación de transformación con dos operaciones. Una suma y una resta.

> Así mismo, el principio de evaluación afirma que, "La evaluación debe apoyar el aprendizaje de matemáticas relevantes y proveer de información útil tanto a profesores como estudiantes". (Godino, J. D., 2011, p. 10.)

Las situaciones concretas de evaluación del 3°, 4° y 5° grados no corresponden a lo propuesto en los Mapas de Progreso ni a las Rutas del Aprendizaje.

La apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planificados.

- Los cuadernos y los textos analizados consideran los conocimientos previos, antes de presentar las nuevas situaciones problema.
- Las situaciones aditivas concretas planteadas está referidas fundamentalmente a las de cambio y combinación, son pocas las de doble transformación, de comparación e igualación. Están ausentes las situaciones de transformación de una comparación y las de doble comparación. Los números de los problemas son mayoritariamente cardinales

pocos los números que son medida y ausentes los cardinales. Son pocos los problemas heurísticos y los que tienen soluciones correctas dos o más..

- Las situaciones concretas de evaluación del 3°, 4° y 5° grados no corresponden a lo propuesto en los Mapas de Progreso ni a las Rutas del Aprendizaje.
- Por estas consideraciones, concluimos que el grado de idoneidad cognitiva es bajo.

Capítulo 7

7 CONCLUSIONES

RESUMEN

En este capítulo presentamos las conclusiones obtenidas en el presente trabajo como respuesta a las preguntas de investigación planteadas en el primer capítulo sobre: el significado de las situaciones aditivas en el Sistema Curricular Peruano y las concepciones de los profesores de educación primaria en la sección 7.1, el significado de referencia de las situaciones aditivas en la sección 7.2, las presencias y ausencias en el sistema curricular peruano en la sección 7.3 y la idoneidad epistémica y cognitiva de las situaciones aditivas en los cuadernos y textos escolares entregados por el MED a los estudiantes primarios de instituciones públicas en la sección 7. 4.

7.1 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LA PRIMERA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La primera pregunta de investigación *¿Cuál es el significado de la adición de números naturales en el Sistema Curricular Peruano para la educación primaria?* nos llevó a identificar y describir los significados de las situaciones aditivas en el DCN, los Mapas de Progreso y las Rutas del Aprendizaje. Para recoger la información elaboramos el instrumento 1 (Ver anexo 3), cuya elaboración estuvo basado en lo propuesto por Cid, Godino y Batanero (2004a).

Arribamos a las conclusiones siguientes:

1. Las situaciones aditivas con números naturales son ***concretas*** o ***formales***. Las concretas para los Mapas de Progreso y las Rutas del Aprendizaje son de 4 tipos: de combinación, de cambio, de comparación y de igualación. Para el DCN son acciones de juntar, agregar, quitar o separar.
2. La incógnita puede ser la suma o uno de los sumandos (sumando 1 o sumando 2). El rol de un número en una situación aditiva es: cardinal o medida. No considera el papel de ordinal. Sobre el número de operaciones hay libertad para plantear problemas de una, dos, tres o más operaciones.

3. El tipo situación aditiva corresponde fundamentalmente al paradigma del ejercicio: el número de soluciones de una situación aditiva es una, situaciones de la semi realidad.
4. Sobre la representación gráfica el DCN, los Mapas de Progreso y las Rutas de aprendizaje promueven el uso de material manipulativo de Material de Base Decimal, Regletas de Cuisenaire, objetos o gráficos de colecciones, tabla de doble entrada, gráfico de barras.
5. El significado de sumar para el DCN es ***juntar***, ***agregar***, ***avanzar*** y restar es ***separar***, ***quitar***, ***retroceder***; para los Mapas de Progreso y las Rutas de Aprendizaje ***sumar*** significa combinar (acciones de ***juntar***), transformar (acciones de ***agregar***), ***igualar*** o ***comparar cantidades*** y restar significa: ***separar***, ***quitar***.

7.2 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LA SEGUNDA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La segunda pregunta de investigación *¿Cuál sería un significado de referencia de la adición de números naturales en el sistema curricular peruano de la educación primaria?* Ha sido un trabajo de sistematización basado en los aportes de las investigaciones de Catherine Durand y Gerard Vergnaud de los Campos Conceptuales; de Thomas Carpentier y James Moser de la Universidad de Wisconsin, de Carlos Maza de la Universidad de Sevilla y de Eva Cid, Juan D. Godino y Carmen Batanero de la Universidad de Granada y en algunas herramientas del EOS, como las configuraciones de objetos y procesos (configuración epistémica). Arribamos a las conclusiones siguientes:

1. La adición y sustracción de números naturales se puede abordar considerando dos facetas:
   - Describir las acciones realizadas al sumar o restar: combinar, transformar. comparar, transformar una transformación, transformar una comparación, comparar doblemente, igualar números que cumplen papeles de: cardinales, ordinales o medida.
   - Interpretar formalmente la adición de números naturales: definición conjuntista – cardinal de la reunión de dos conjuntos disjuntos, definición recursiva basada en los axiomas de Peano o en los axiomas de conjuntos. Interpretar la sustracción de números naturales como el cardinal de la diferencia de conjuntos, tal que uno es subconjunto del otro, o la diferencia de dos números como uno de los sumandos, el minuendo es la suma y el sustraendo es el otro sumando.
2. Toda ***historia aditiva simple***, por el lugar de la incógnita, determina, por lo menos, tres ***situaciones aditivas simples***:

La historia aditiva simple:

Juan pescó 5 truchas y Roy 7. Entre los dos pescaron 12 truchas.

Esta historia determina tres situaciones aditivas simples:

- Juan pescó 5 truchas y Roy 7. ¿En total, cuántas truchas pescaron los dos? $5 + 7 = x$.
- Si Juan pescó 5 truchas y entre Juan y Roy pescaron 12. ¿Cuántas truchas pescó Roy? $5 + x = 12$.
- Juan pescó algunas truchas y Roy pescó 7. Si los dos pescaron 12 truchas. ¿Cuántas truchas pescó Juan? $x + 7 = 12$.

3. Los aprendices al resolver situaciones aditivas concretas utilizan modelos que requieren de una situación aditiva formal. Es decir el aprendizaje de la adición de números naturales implica, por tanto, el dominio de las situaciones formales y de procedimientos o algoritmos de sumar.

4. En una situación aditiva concreta simple, es decir, en un problema aditivo concreto en el que están implicados tres números, se puede distinguir diferentes aspectos que los hacen distintos entre ellos. Así, se puede considerar su *estructura*, la *posición de la incógnita*, los *tipos de números* y el *contexto* en que está redactado. Consideramos tres tipos de estructuras en la enseñanza de los problemas aditivos: ***Combinación***, ***Transformación*** (***Cambio*** o ***variación***) y ***Comparación***.

5. Las variables que intervienen en las situaciones aditivas concretas son las siguientes:

- ***Significado de los números***: ***cardinales***, ***ordinales*** o ***medidas***.
- ***Papel de los números en la situación***: ***estado***, ***transformación*** o ***comparación***.
- ***Posición de la incógnita***: en una situación de parte-todo la incógnita puede ser el ***total*** o ***una de sus partes***, en las otras es el término ***inicial***, ***medio*** o ***final***.
- ***Sentido del término medio***: puede indicar un aumento del término inicial (si se trata de una transformación) o bien, puede indicar que el término inicial es mayor igual o menor que el término final (si es una comparación).
- ***Contexto***: ***situaciones de la realidad*** (en el aula de clase o fuera de ella); ***semirrealidad*** (realidad construida)

ESTRUCTURA DE LAS SITUACIONES ADITIVAS	PAPEL DE LOS NÚMEROS		
	ESTADO	**TRANSFORMACION**	**COMPARACION**
COMBINACIÓN EEE, TTT, CCC	EEE	TTT	CCC
	$a + b = ?$	$a + b = ?$	$a + b = ?$
	$a + ? = c$	$a + ? = c$	$a + ? = c$
	¿ + $b = c$	¿ + $b = c$	¿ + $b = c$
TRANSFORMACIÓN (CAMBIO o VARIACIÓN) ETE; TTT; CTC	ETE	TTT	CTC
	$a + b = ?$	$a + b = ?$	$a + b = ?$
	$a + ? = c$	$a + ? = c$	$a + ? = c$
	¿ + $b = c$	¿ + $b = c$	¿ + $b = c$
COMPARACIÓN ECE; CCC	ECE		CCC
	$a + b = ?$		$a + b = ?$
	$a + ? = c$		$a + ? = c$
	¿ + $b = c$		¿ + $b = c$
IGUALACIÓN IEI; TIT, CIC	EIE		
	$a + b = ?$		
	$a + ? = c$		
	¿ + $b = c$		

6. Hay siete tipos de situaciones aditivas concretas simples (situación de una sola operación). Hay 9 subtipos: cardinales, ordinales y medida

- ***Combinación de estados***: E–E–E. 9 subtipos: significado de los números y lugar de la incógnita.
- ***Transformación de estados***: E–T–E. 18 subtipos: significado de los números, lugar de la incógnita y aumento o disminución.
- ***Comparación de estados***: E–C–E. 18 subtipos: significado de los números, lugar de la incógnita y aumento o disminución.
- ***Doble Transformación***: T–T–T. 18 subtipos: significado de los números, lugar de la incógnita y aumento o disminución.
- ***Transformación de una comparación***: C–T–C. 18 subtipos: significado de los números, lugar de la incógnita y aumento o disminución.
- ***Doble Comparación***: C–C–C. 18 subtipos: significado de los números, lugar de la incógnita y aumento o disminución.
- ***Igualación***: EIE. 18 subtipos: significado de los números, lugar de la incógnita y aumento o disminución.

  En total hay 117 subtipos: 9 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18.

7. Los escenarios de aprendizaje están determinados por dos paradigmas: del ejercicio y de la indagación e investigación:

- En el ***paradigma del ejercicio*** las situaciones problemas que se resuelven son determinadas por una autoridad externa a la clase, es decir, que la justificación de la relevancia del ejercicio no es parte de la sesión de aprendizaje de matemáticas como tal. Una premisa central es que hay una y una sola respuesta correcta. (Venero y Skovsmose, 2012, p. 110).
- En ***escenarios de investigación*** se considera la *alfabetización matemática* no solo como destrezas matemáticas, sino también como la competencia para interpretar y actuar en una situación social y política que ha sido estructurada por las matemáticas. Considera que la microsociedad del salón de clase de matemáticas debe encarnar aspectos democráticos. Las matemáticas al ser parte central de nuestra cultura basada en la tecnología se convierten en una fuente tanto de maravillas como de horrores Parece que tales preocupaciones se pueden manejar de una manera más apropiada por fuera del paradigma del ejercicio. (Venero y Skovsmose, 2012, p. 111).

8. Las situaciones problema en escenarios de investigación superan, las limitaciones del paradigma del ejercicio pues, el problema tiene una o más de una solución, permite realizar conjeturas, descubrir procedimientos, algoritmos, patrones o regularidades, generalizaciones, formular problemas y cuestionar y reflexionar sobre las condiciones relacionadas con la realidad que dio origen a la situación problema.

9. El contexto de las situaciones de aprendizaje pueden referirse a la ***matemática misma***, a la ***semirrealidad*** y a la ***vida real***. Las situaciones de la matemática misma corresponden a las *situaciones formales* y los de la semirrealidad y los de la vida real a las *situaciones concretas*.

10. Hay seis tipos de situaciones problemáticas considerando el ***contexto*** *y* ***los escenarios de aprendizaje***:

TIPOS DE SITUACIONES PROBLEMAS		
	Paradigma del ejercicio	***Escenarios de Investigación***
Matemática	**(1)**	**(2)**
Semirrealidad	**(3)**	**(4)**
Vida Real	**(5)**	**(6)**

11. Sumar significa: combinar, transformar, comparar, transformar una transformación, transformar una comparación o comparar una comparación de cardinales, ordinales o medidas.

12. Las situaciones aditivas de combinación están relacionadas con reunir, juntar; las de transformación con aumentar, agregar y las de comparación con aparear y/o separar.

7.3 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LA TERCERA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La tercera pregunta de investigación ¿Cuáles son las presencias y ausencias de los significados parciales de la adición de números naturales en el Sistema Curricular Peruano para la educación primaria, respecto del significado de referencia? nos permitió aplicar las herramientas teóricas del EOS para interpretar las situaciones aditivas en el DCN, los Mapas de Progreso, las Rutas del Aprendizaje y los cuadernos y textos escolares entregados por el MED a los estudiantes de instituciones públicas. Arribamos a las conclusiones siguientes:

PRESENCIAS DEL SIGNIFICADO DE REFERENCIA

13. Tanto el DCN, como los Mapas de Progreso y las Rutas del Aprendizaje prescriben resolver ***situaciones concretas*** y ***formales aditivas*** con números naturales.
14. ***Fuerte presencia*** **de las** ***situaciones formales 64%*** **y** ***débil presencia*** **de las** ***situaciones concretas 36%*** en los cuadernos y textos escolares, que el MED distribuye a los estudiantes de las I. E. públicas.
15. De forma ostensiva de las ***situaciones aditivas de combinación***, ***transformación***, ***comparación*** e ***igualación*** en los Mapas de Progreso y las Rutas de Aprendizaje y no ostensiva en el DCN.
16. ***Fuerte presencia de las situaciones formales 64%*** **y** ***débil presencia de la situaciones concretas 36%*** en los cuadernos y textos escolares. De estas últimas, corresponden ***14% a combinación***, ***14% a transformación 4% a comparación, 4% a doble transformación*** **y** ***1% a igualación***.
17. Sobre el ***significado de los números en las adiciones*** observamos que en el DCN, las Mapas de Progreso y las Rutas del Aprendizaje hablan de los números naturales, sin precisar si son ***cardinales***, ***ordinales*** o ***medidas***. En los ejemplos mostrados están presentes los números cardinales y los que desempeñan el papel de medida.

18. En los cuadernos y textos escolares del MED, hay ***fuerte presencia de situaciones aditivas con cardinales, 82%,*** **una** ***débil presencia con números que cumplen el papel de medida, 18%*** **y** ***ausencia con números ordinales 0%***.

19. Sobre el ***número de operaciones***, tanto el DCN como los Mapas de Progreso y las Rutas del Aprendizaje prescriben resolución de problemas de adición y sustracción, así como operaciones combinadas. Esto significa que hay libertad para plantear problemas de una, dos, tres o más operaciones.

20. En los cuadernos y textos escolares del MED hay ***fuerte presencia*** **de** ***situaciones de una operación, 72%; débil presencia de dos operaciones 20%, casi nula presencia de tres y cuatro operaciones*** **con 3% y 4%**, respectivamente.

21. Sobre el lugar de la incógnita, el DCN, los Mapas de Progreso y las Rutas del Aprendizaje prescriben las situaciones con incógnita en la suma, el primer o segundo sumando.

22. En los cuadernos y textos escolares del MED hay ***fuerte presencia*** **de** ***situaciones con incógnita en la suma, 60%; presencia adecuada de situaciones con incógnita en el segundo sumando 30% y débil presencia con incógnita en el primer sumando 3%. Además hay situaciones con incógnita en los dos sumandos 7%.***

23. Sobre el número de respuestas correctas, el DCN, los Mapas de Progreso y en las Rutas de aprendizaje no mencionan el número de respuestas correctas de las situaciones aditivas. Queda a discreción de los docentes.

24. En los cuadernos y textos escolares del MED hay ***fuerte presencia*** **de** ***situaciones aditivas formales con una solución correcta 55%, presencia adecuada de situaciones concretas con una solución correcta, 36%; débil presencia de situaciones aditivas con dos soluciones correctas 6% las formales y 2% las concretas***.

25. Sobre la representación gráfica el DCN, los Mapas de Progreso y las Rutas de aprendizaje promueven el uso de material manipulativo de Material de Base Decimal, Regletas de Cuisenaire, objetos o gráficos de colecciones, tabla de doble entrada, gráfico de barras.

26. En los cuadernos y textos escolares del MED de las 1220 situaciones aditivas el 35% tienen representación simbólica o utiliza materiales manipulativos (429) y el 65% no posee ninguna de estas condiciones (791). Del total de las situaciones con representación gráfica o uso de materiales manipulativos hay ***fuerte presencia*** **de** ***29% por colecciones, presencia adecuada*** **con** ***Regletas de Cuisenaire 17%*** **y** ***MBD 11%*** **y** ***dinero 11%; débil presencia*** con la recta numérica, gráfico de barras, almanaque, reloj, yupana, balanza.

27. El significado de sumar para el DCN es ***juntar***, ***agregar***, ***avanzar*** y restar es ***separar***, ***quitar***, ***retroceder***; para los Mapas de Progreso y las Rutas de Aprendizaje ***sumar*** significa combinar (acciones de ***juntar)***, transformar (acciones de ***agregar***), ***igualar*** o ***comparar cantidades*** y restar significa: ***separar***, ***quitar***.

AUSENCIAS DEL SIGNIFICADO DE REFERENCIA

28. ***Situaciones aditivas de doble transformación***, en el DCN, los mapas de progreso y las rutas del aprendizaje.

29. ***Situaciones aditivas de transformación de una combinación*** y ***doble comparación*** en el DCN, los mapas de progreso, las rutas del aprendizaje y los cuadernos y textos escolares analizados.

30. Situaciones aditivas simples de combinación, de transformación, de comparación, de doble transformación, de comparación, de igualación, de transformación de una comparación, de doble comparación con números ordinales en el DCN, Mapas de Progreso, Rutas del Aprendizaje y cuadernos y textos escolares analizados. No hay problemas con números ordinales.

7.4 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LA CUARTA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La cuarta pregunta de investigación referida a la idoneidad didáctica (epistémica y cognitiva) de la adición de números naturales en los cuadernos de trabajo y textos escolares entregados por el MED a estudiantes de Instituciones Públicas de educación primaria? Nos pemitió utilizar los indicadores de idoneidad didáctica propuestos por el EOS a las situaciones aditivas analizads. Arribamos a las conclusiones siguientes:

32. El grado de idoneidad epistémica es bajo, por las razones siguientes:

- La mayoría de las situaciones son de ejercitación, aceptables las de contextualización, (aunque enfocadas principalmente a las de transformación y combinación). pocas de problematización y muy pocas de aplicación.
- Las traducciones y conversiones entre registros del lenguaje (verbal, gráfico y simbólico) están referidos fundamentalmente a pasar del verbal al simbólico y del verbal-gráfico al simbólico. Hay un uso variado del lenguaje cotidiano. En muchas situaciones el uso es adecuado, mientras que en otras genera confusión. Las situaciones de expresión e interpretación está restringida fundamentalmente a dos

tipos de situaciones concretas, es nula las de transformación, de una comparación y de doble comparación.

- La noción de sumar está relacionada a *juntar*, *agregar* colecciones o conjuntos. Sin embargo, esta puede constituir un conflicto semiótico, pues si las colecciones no son disjuntas, la situación problema no constituye un problema de adición. Los procedimientos incentivan la formulación de estrategias de cálculo (conteo, composiciones, descomposiciones y gráficos) para sumar y restar. No encontramos estrategias de cálculo mental y estimación.
- Los argumentos mostrados están referidos al uso de material concreto, gráfico o dibujos. Los momentos de validación son escasos. No hay situaciones de estimación y de cálculo mental.
- Pocas conexiones entre situaciones, lenguaje, definiciones, propiedades procedimientos y argumentos. Solo hay dos organizadores visuales (3° y 4° grados).

33. El grado de idoneidad cognitiva es bajo, pues la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planificados.

- Los cuadernos y los textos analizados consideran los conocimientos previos, antes de presentar las nuevas situaciones problema.
- Las situaciones aditivas concretas planteadas están referidas fundamentalmente a las de cambio y combinación, son pocas las de doble transformación, de comparación e igualación. Están ausentes los otros tipos de situaciones. Los números de los problemas son mayoritariamente cardinales poca presencia de medida y ausencia de ordinales.
- Las situaciones concretas de evaluación del 3°, 4° y 5° grados no corresponden a lo propuesto en los Mapas de Progreso ni a las Rutas del Aprendizaje.

7.5 SUGERENCIAS Y PREGUNTAS ABIERTAS

34. Formular una propuesta de estudio de las situaciones aditivas simples por el nivel de dificultad a partir de experiencia empírica.

35. Proponer material manipulativo para estudiar los diferentes tipos de situaciones aditivas simples con representaciones más transparentes, a partir de experiencia empírica.

36. Realizar un estudio sobre la comprensión de las situaciones aditivas a partir de escenarios de investigación.

37. Realizar un estudio de las situaciones aditivas no simples en diferentes contextos y en cuya solución se utilice herramientas heurísticas. (Cálculo mental, estimación, algoritmos no estándar).

38. Realizar un análisis teórico de las situaciones de *comparación de transformaciones*, *igualación de transformaciones* e *igualación de comparaciones* que dilucide si constituyen situaciones simples. Después de entregar al asesor y jurado de la tesis el informe final, encontramos estos tres tipos más de situaciones. Si consideramos las otras variables significado de los números, lugar de la incógnita y aumento o disminución. 18 por cada tipo, debemos agregar 54 subtipos a los 117. En total hay 171 (117 + 54).

8 REFERENCIAS

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1982). *The Development of Addition and Subtraction Problem Solving Skills* en T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (eds.) Addition and Subtraction: A cognitive perspective, pp. 9-24. Hillsdale, N. J. LEA.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1983). *The Acquisition of Addition and Subtraction concepts*, en R. Lesh & M. Landau (eds) Adquisition of Mathematics Concepts and Processes, pp. 7-44. Orlando Florida: Academia Press.

Castro, Enrique (editor) (2001) *Didáctica de la matemática en Educación Primaria*. Editorial Síntesis. Madrid.

Cid, E., Godino D. J. y Batanero, C. (2004a). Sistemas numéricos. En Juan D. Godino, Director, *Matemática para Maestros*. Proyecto Edumat-Maestros, Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/.

Cid, E., Godino D. J. y Batanero, C. (2004b). Sistemas numéricos. En Juan D. Godino, Director, *Didáctica para Maestros*. Proyecto Edumat-Maestros, Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/.

Durand Catherine, Vergnaud Gérard. (1976) Structures addictives et complexité psychogénétique. En: *Revue française de pédagogie. Volumen 36*, pp. 28-43. http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rfp_0556-7807_1976_num_36_1_1622

Godino, J. D. (2010) (1) *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf.

Godino, J. D. (2010b). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/marcos_teoricos_ddm.pdf.

Godino, J. D. (2011) Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* **(**CIAEM-IACME), Recife (Brasil).

Godino, J. D. y Batanero C. (1994) *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_ RDM94.pdf.

Godino J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas*. http://www. ugr.es/ ~jgodi no/funciones-semioticas/idoneidad-didactica.pdf

Godino, J. D. y Font, V. (2007). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*.http://www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/anexo1_significados%20sistemicos.pdf.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_ Fundamentos.pdf.

Godino, J. D., Batanero C. y Font, V. (2008). *Poster EOS* (Síntesis actualizada del EOS en formato poster, se muestran las fuentes y conexiones con otros marcos teóricos. http://www.ugr.es/~jgodino/eos/poster_EOS_19diciembre08.pdf

Godino J. D., Batanero C. y Font V. (2009). *Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. http:/www.ugr.es/local/godino/índice_eos.htm

Godino, J. D. y Font, V. (2007). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*. http://www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/anexo1_significados%20sistemicos.pdf.

Godino, J. D. y Font, V. (2007a). *Algunos desarrollos y aplicaciones de las funciones semióticas*, http://www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/anexo2enfoque%20 ontosemi%F3tico%20cognici%F3n.pdf.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). *Análisis Ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Distrito Federal, México pp. 131-155. *http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_textos_suma_resta.pdf.*

Godino, J. D., Font, V., Wilhemi, M. R. y Castro, C. (2009) *Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico.* Enseñanza de la Ciencias, 27(1), 59-76. http://www.ugr.es/~jgodino/eos/dimension_normativa.pdf.

Halmos, Paul R. (1967). *Teoría Intuitiva de los conjuntos*. Compañía Editorial Continental S. A. México. España.

Malaspina, J. Uldarico, (Editor) (2014), *Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática*. Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM). PUCP.

Masa, C. (2001). Adición y sustracción en Castro, E (Editor). *Didáctica de la Matemática en Educación Primaria*. Editorial Síntesis. Madrid.

Ministerio de Educación, Perú (2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. *Ministerio de Educación*. Lima. http://www.minedu.gob.pe/normatividad/ reglamentos/DisenoCurricularNacional.pdf.

Ministerio de Educación, Perú (2013). *Mapas de progreso del aprendizaje, Matemática: Números y operaciones*. Ipeba – Programa Estándares de aprendizaje. http://www. ipeba.gob.pe/estandares/Mapas Progreso_Matematica_NumerosOperaciones.pdf

Ministerio de Educación, Perú (2013a). *Rutas del Aprendizaje:* Fascículo 1. Números y operaciones. Cambios y Relaciones. III Ciclo. *Ministerio de Educación*. Lima.

Ministerio de Educación, Perú (2013b). *Rutas del Aprendizaje:* Fascículo 1. Números y operaciones. Cambios y Relaciones. IV y V Ciclo. *Ministerio de Educación*. Lima.

Ministerio de Educación, Perú (2014). *Matemática 1: Cuaderno de Trabajo*. Primer grado *Ministerio de Educación*. Lima. www.minedu.gob.pe.

Mosterín, Jesús, España (1971). *Teoría axiomática de los conjuntos*. Ediciones Ariel. Barcelona.

Queysanne, Michel, (1971). *Álgebra Básica*. Edición Vicens-vives. Barcelona.

Ministerio de Educación, Perú (2014a), *Matemática 2: Cuaderno de Trabajo*. Segundo grado *Ministerio de Educación*. Lima. www.minedu.gob.pe.

Quiroz, Jorge Enrique, Perú (1996). *Teoría de conjuntos*. La Cantuta. Lima.

Venero, Paola y Skovsmose, Ole. (2012). *Educación Matemática Crítica. Una Visión Sociopolítica del Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*. Editorial: Una Empresa Docente. Universidad de los Andes. http://www.etnomatematica.org/home/? p=2580.

Vergnaud, G. (1990). *La teoría de los campos conceptuales*. CNRS y Université René Descartes. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10*, nº 2, 3, pp. 133-170. http://fundesuperior.org/Articulos/Pedagogia/Teoria_campos_conceptuales.pdf

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E (2004) *Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reale*s. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27 (1): 77 - 120.* http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/igualdad_ wilhelmi.pdf.

Wittgenstein, Ludwig, (1999). *Investigaciones filosóficas*. Editorial Crítica S. A. Aragón 385, 08013. Barcelona 13 © 1999, Ediciones Atalaya. S. A. http://www.uruguaypiensa.org. uy/imgnoticias/765.pdf.

ANEXO 1

AXIOMAS DE LA TEORIA DE CONJUNTOS

Lo que sigue es un resumen del folleto: ***Teoría de conjuntos*** (Enrique Quiroz, 1996). Para la elaboración se tomó en cuenta los libros: *Teoría intuitiva de los conjuntos* de Paul R. Halmos (1967), *Teoría axiomática de conjuntos* de Jesús Mosterín (1971) y *Algebra Básica* de Michel Queysanne (1971).

1. Etapas de la Teoría de Conjuntos

Las teorías matemáticas generalmente han transitado por tres etapas sucesivas:

- La etapa intuitiva.
- La etapa axiomática.
- La etapa formalizada.

Etapa intuitiva

George Cantor. 1845-1918.

En 1874 prueba que el conjunto de los números algebraicos es numerable.

En 1878 demuestra la equipotencia entre un continuo y el producto de un número finito o numerable de dicho continuo.

El viejo principio *el todo es mayor que cualquiera de sus partes* es desechado.

Entre 1879 y 1884, Cantor publica en una serie de memorias sus resultados fundamentales: cardinalidad, equipotencia, buen orden, números ordinales, aritmética transfinita, etc. Sin embargo se resistía a todos sus esfuerzos *el problema del continuo.*

Crisis de la teoría intuitiva

Hilbert declara: *Nadie nos sacará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros*.

A fines del siglo XIX se descubren paradojas o antinomias como: $\Omega + 1$ es mayor que Ω y $\Omega+1$ no es mayor que Ω.

En 1899, Cantor comunica a Dedekind la paradoja: *la cardinalidad de las partes de la clase universal es mayor que la de la clase universal como que es menor o igual que ella.*

Sin embargo, es en 1903 cuando B. Russell esboza la conocida antinomia. Antinomia que no se presenta ni en los cardinales ni en los ordinales, sino en los conceptos centrales de la teoría: ***elemento*** y ***conjunto***.

Por ejemplo: El conjunto **A** formado por todos los conjuntos infinitos.

$$\mathbf{F} = \{\boldsymbol{x} / \boldsymbol{x} \text{ es conjunto infinito}\}$$

Elementos de **F** son: **N**, **Z**, **Q**, **R**, etc.

¿Es **F** infinito?

Sí, pues:

$\mathbf{N} \in \mathbf{F}$, $\mathbf{N} - \{0\} \in \mathbf{F}$, $\mathbf{N} - \{1\} \in \mathbf{F}$, $\mathbf{N} - \{2\} \in \mathbf{F}$, $\mathbf{N} - \{3\} \in \mathbf{F}$, ..., etc.

Es decir

$$\mathbf{F} \in \mathbf{F}$$

A conjuntos como éste o al conjunto de todos los conjuntos (conjunto universal) le denominamos *conjuntos extraordinarios*, pues su característica es $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$.

Además, de este tipo, encontramos otro tipo de conjuntos como $\mathbf{V} = \{a, e, i, o, u\}$, conjunto de la vocales. En este conjunto $\mathbf{V} \notin \mathbf{V}$, pues $\mathbf{V}$ no es una vocal. A conjuntos como este, se les denomina *conjunto ordinario*, su característica es: $\mathbf{V} \notin \mathbf{V}$.

Formemos el conjunto de todos los conjuntos ordinarios:

$$\mathbf{O} = \{\boldsymbol{x} / \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{x}\}$$

¿**O** *es ordinario*? ¿**O** *es extraordinario*?

O *es Ordinario* $\Rightarrow \mathbf{O} \notin \mathbf{O}$	(Definición de conjunto ordinario.)
$\Rightarrow \mathbf{O} \in \mathbf{O}$	(Definición del conjunto **O**)
$\therefore$ **O** es Extraordinario	(Definición de conjunto extraordinario.)
O *es extraordinario* $\Rightarrow \mathbf{O} \in \mathbf{O}$	(Definición de conjunto extraordinario.)
$\Rightarrow \mathbf{O} \notin \mathbf{O}$	(Definición del conjunto **O**)
$\therefore$ **O** es Ordinario	(Definición de conjunto ordinario.)

Con esta paradoja se pone de manifiesto la llamada ***crisis de los fundamentos de la matemática***. Pues todo el edificio de esta ciencia se sustenta en la teoría de conjuntos y ésta presenta contradicciones en su base.

Etapa axiomática

Las respuestas planteadas para resolver la crisis son tres:

1. ***Brower*** rechaza la lógica clásica y el infinito actual y postula una nueva lógica y una nueva matemática. Su propuesta se conoce como intuicionismo.
2. ***Russell*** pretendió que los conceptos básicos de la Matemática podían definirse mediante recursos puramente lógicos. formuló una ***teoría de tipos*** basándose en el *principio del círculo vicioso*: un elemento cuya definición implica la totalidad de los elementos de un conjunto, no puede pertenecer a este conjunto.
3. ***Zermelo*** por el contrario propone un conjunto de axiomas ad hoc que impidan la aparición de las contradicciones conocidas, conservando en lo posible la riqueza y agilidad de la teoría intuitiva.

Etapa formalizada

Se formalizó la teoría a través de un lenguaje de primer orden con igualdad.

La Teoría de Conjuntos que adoptamos es una versión modificada del sistema de Zermelo-Fraenkel-Skolem.

1.2 Alfabeto de la teoría de conjuntos

El alfabeto del lenguaje de la teoría de conjuntos (L_c) posee:

1. Los conectivos proposicionales: $-$(no), $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;
2. Los cuantificadores: $\exists$, $\forall$;
3. Las variables individuales: x_0, x_1, x_2, ... (un conjunto infinito y numerable);
4. Los símbolos relacionales: $\in$ (pertenencia), $\subset$ (inclusión), $=$ (igualdad);

$\therefore$ Alf. $L_c = \{-, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \exists, \forall, x_0, x_1, x_2, ..., \in, \subset, =\}$

Además usamos el descriptor: / (tal que), llaves:{} , paréntesis: ( ) y coma: **,**.

Observación 1

No se requiere admitir todos los conectivos y los cuantificadores. Es suficiente, por ejemplo, dar los conectivos $-$(no) e $\wedge$ (y) y el cuantificador $\forall$ (para todo -).

$$x_0 \vee x_1 = -(-x_0 \wedge -x_1)$$

$$x_0 \Rightarrow x_1 = -x_0 \vee x_1$$

$$x_0 \Leftrightarrow x_1 = (x_0 \Rightarrow x_1) \wedge (x_1 \Rightarrow x_0)$$

$$\exists x\, \mathbf{A} = -(\forall x - \mathbf{A})$$

1.3 Términos primitivos

El concepto principal de la Teoría de Conjuntos, en estudios completamente axiomáticos, es el de pertenencia. Nosotros lo adoptaremos como un término primitivo. Si x pertenece a **A** se simboliza así:

$$x \in \mathbf{A}$$

El otro término primitivo es el de conjunto. No existe razón alguna para emplear exclusivamente letras mayúsculas para simbolizar conjuntos y letras minúsculas para elementos. Se puede escribir $x \in y$, $\mathbf{A} \in z$, $\mathbf{A} \in \mathbf{B}$.

1.4 Oraciones gramaticales

En teoría de conjuntos una **oración gramatical** o **fórmula** es **atómica** o **simple**, si es una de los dos tipos siguientes:

$\mathbf{A} = \mathbf{B}$: Fórmula de igualdad.

$x \in \mathbf{A}$: Fórmula de pertenencia

Todas las demás fórmulas se obtienen a partir de las oraciones atómicas por medio de aplicaciones repetidas de los operadores lógicos, sujetas a las reglas:

1. Si **F** es fórmula, entonces $-\mathbf{F}$ también lo es.
2. Si **F** y **G** son fórmulas, entonces $\mathbf{F} \vee \mathbf{G}$, $\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}$, $\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}$, $\mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{G}$, son fórmulas.
3. Si **F** es fórmula y x es variable individual, entonces $\exists x\mathbf{F}$ y $\forall x\mathbf{F}$ también son fórmulas.

1.5 Variable libre y variable ligada

Sea F una fórmula de L_c sea x una variable, entonces una OCURRENCIA de x es **libre** si no está en alguna parte de F precedida de algún cuantificador. Si la ocurrencia de x en F no es libre, entonces se dice que la ocurrencia es **ligada**.

Ejemplo

$$-\exists y\,(x \in y)$$

Ocurrencia ligada de y Ocurrencia libre de x

1.6 Proposición o sentencia

Es la oración gramatical carente de variables libres. Es verdadera o falsa.

Teorema

Es una proposición que tiene una demostración.

Todo teorema puede ser expresado como un enunciado condicional: $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$.

Axiomas de Zermelo-Fraenkel

Trataremos en lo sucesivo de entes nuevos, aunque llevan los nombres corrientes de conjuntos, elementos o números. De ellos nada sabemos por el momento y sus propiedades, aun las más sencillas, nos son desconocidas. Será algo así como un juego: sobre estos seres tendremos algunos datos y de cada uno sabremos alguna cualidad que lo caracterice y lo describa, aunque sea parcialmente; vuestra participación en el juego consistirá en descubrir cuál ha de ser el comportamiento de estos seres en determinadas circunstancias.

1. Axioma de extensión

Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos.

$$\forall \mathbf{A}\ \forall \mathbf{B}\ (\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \mathbf{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \mathbf{B}))$$

Este axioma no es solo una propiedad lógica necesaria de la igualdad, sino una proposición no trivial acerca de la pertenencia

2. Axioma de especificación

A todo conjunto **A** *y a toda fórmula* $\mathbf{F}(\boldsymbol{x})$, con $\boldsymbol{x}$ posible variable libre corresponde un conjunto **B** cuyos elementos son precisamente aquellos elementos $\boldsymbol{x}$ de **A** para los cuales se cumple $F(\boldsymbol{x})$.

Simbólicamente

$$\mathbf{B} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A} / \mathbf{F}(\boldsymbol{x})\}$$

Teorema

Para todo conjunto **A** *existe un conjunto* **B**, *tal que* **B** *no es elemento de* **A**.

$$\forall \mathbf{A},\ \exists \mathbf{B} \ / \ \mathbf{B} \notin \mathbf{A}$$

Demostración:

1. $\forall \mathbf{A}, \exists \mathbf{B} / \mathbf{B} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{A} / \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{x}\}$ $(*)$ (Axioma de Especificación)

Es decir: $\boldsymbol{y} \in \mathbf{B} \Leftrightarrow (\boldsymbol{y} \in \mathbf{A} \wedge \boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{y})$
Por reducción al absurdo.

2. $\mathbf{B} \in \mathbf{A}$ (Hipótesis auxiliar)
3. $\mathbf{B} \in \mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{B} \in \mathbf{B} \vee \mathbf{B} \notin \mathbf{B})$ (Ley del tercio excluido)
4. $\mathbf{B} \in \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \in \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \notin \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \notin \mathbf{B}$ $(\rightarrow \leftarrow)$ por $(*)$ (Pasos 1 y 3)
5. $\mathbf{B} \notin \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \in \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \in \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \in \mathbf{B}$ $(\rightarrow \leftarrow)$ por $(*)$ (Pasos 1 y 3)
6. $\therefore\ \mathbf{B} \notin \mathbf{A}$ (Pasos 2, 4 y 5)

Esto significa que existe algo: **B**, que no pertenece a **A**.

Es decir: **No hay algo que contenga todo.** O, mejor, en los conjuntos **no hay universo.**

El axioma de especificación es incompatible con el ***conjunto universal*** o el ***conjunto de todos los conjuntos***. En teorías no axiomáticas se supone la existencia de un universo, y el razonamiento del párrafo anterior se conocía como la *paradoja de Russell*.

3. Axioma de apareamiento

Para dos conjuntos cualesquiera **A** *y* **B**, *existe un conjunto al cual ambos pertenecen.*

$$\forall \mathbf{A}, \forall \mathbf{B}, \exists \mathbf{C}\ (\mathbf{A} \in \mathbf{C} \wedge \mathbf{B} \in \mathbf{C})$$

4. Axioma de unión

Dado un conjunto cualquiera existe otro que tiene a todos los elementos que pertenecen cuando menos a uno de lo elementos del conjunto dado.

$$\forall \mathbf{A}, \exists \mathbf{B}, \forall \boldsymbol{x}\ (\exists \mathbf{C}\ (\mathbf{C} \in \mathbf{A} \wedge \mathbf{x} \in \mathbf{C}) \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{B})$$

5. Axioma de Potencia

Dado un conjunto cualquiera existe otro conjunto que tiene entre sus elementos a todos los subconjuntos del conjunto dado.

$$\forall \mathbf{A}\ \exists \mathbf{B}\ (\mathbf{X} \subset \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{X} \in \mathbf{B})$$

Sucesor

Denominamos sucesor del conjunto A, al conjunto simbolizado por A^+ y definido por:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} \cup \{\mathbf{A}\}$$

Definición

$0 = \phi$

$1 = 0^+ = 0 \cup \{0\} = \phi \cup \{0\} = \{0\}$

$2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$

$3 = 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$

…

Definición

Decir que S es un ***conjunto sucesor*** significa que S tiene al 0 y al sucesor de cada uno de sus elementos.

Es decir: i) $0 \in S$.

ii) $n \in S \Rightarrow n^+ \in S$

Teorema

Si A y B son conjuntos sucesores, entonces $A \cap B$ es también un conjunto sucesor.

6. Axioma del infinito

Existe un conjunto sucesor **S**.

LOS NÚMER0S NATURALES

$\mathbf{N} = \cap\{A \in \mathcal{P}(S)/\ A \text{ es conjunto sucesor}\}$

7. Axioma de elección

El producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos es no vacío.

$$(\forall \mathbf{A} \neq \phi \wedge \phi \notin \mathbf{A}) \Rightarrow \mathsf{X}\mathbf{A} \neq \phi$$

8. Axioma de sustitución

Si **F**($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$) *es una fórmula tal que para cada* $\boldsymbol{x}$ *de* **A** *el conjunto* {$\boldsymbol{y}$: **F**($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$)} *puede ser formado, entonces existe una función* $\boldsymbol{f}$ *con dominio* **A** *tal que* **F**(x) = {$\boldsymbol{y}$: **F**($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$)} para cada $\boldsymbol{x}$ de **A**.

ANEXO 2

LEYES DE COMPOSICIÓN INTERNA Y ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Este resumen se ha hecho a partir del libro Algebra Básica de Michel Queysanne (1971).

ESTRUCTURA ALGEBRAICA

Definición 1

Se llama estructura algebraica sobre un conjunto E, toda estructura determinada sobre E por una o más leyes de composición internas entre elementos de E, y una o más leyes de composición externas entre los dominios de operadores Ω, θ, ..., y E, estas leyes pueden estar sujetas a satisfacer unas ciertas condiciones (por ejemplo la asociatividad, la conmutatividad, etc.) o tener entre ellas ciertas relaciones.

El nombre de las leyes internas y de las leyes externas de una estructura algebraicas, así como las condiciones y relaciones a las cuales están sujetas (y que constituyen los ***axiomas*** de la estructura) caracterizan la ***especie*** de la estructura investigada.

Así, consideraremos las estructuras algebraicas de *monoide*, *semigrupo*, *grupo*, *semianillo*, *anillo*, *cuerpo*, *campo*, *espacio vectorial*, *álgebra*, entre otras. Estas estructuras, que son las que estudiaremos en el álgebra, se llaman ***estructuras algebraicas***. Hay otras estructuras, por ejemplo, la estructura de orden, la estructura de espacio métrico.

Cuando definamos un conjunto provisto de varias estructuras por los axiomas de estas estructuras, distinguiremos cuidadosamente los axiomas de cada una de ellas y los axiomas de compatibilidad entre ellas.

MONOIDE

Definición 2

Un conjunto **M** *provisto de una ley interna totalmente definida* **T** *tiene la estructura de* ***monoide*** *si la ley* **T** *es asociativa.*

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbf{M},\ (\boldsymbol{a}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{b})\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\ \mathbf{T}\ (\boldsymbol{b}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{c})$$

Si además, la ley es conmutativa, se dice que M tiene una estructura de ***monoide conmutativo*** o ***abeliano***.

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{M},\ \boldsymbol{a}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{a}$$

Algunos autores denominan ***monoide*** a un conjunto provisto de una ley totalmente definida, es decir, al par (**M**, **T**), tal que **T** es totalmente definida.

Ejemplos

$(\mathbb{N}, +)$; $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$; $(\mathbb{C}, +)$.

$(\mathbb{N}, \times)$; $(\mathbb{Z},\times)$; $(\mathbb{Q},\times)$; $(\mathbb{R},\times)$; $(\mathbb{C},\times)$.

SEMIGRUPO

Definición 3

Un conjunto **S** *provisto de una ley interna* **T** *posee la estructura de* ***semigrupo*** *si*:

- **S** posee la estructura de monoide.
- **S** está provisto de elemento neutro.

Algunos autores denominan semigrupo a un conjunto provisto de una ley totalmente definida, asociativa.

Es decir,

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbf{M}, (\boldsymbol{a}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{b})\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\ \mathbf{T}\ (\boldsymbol{b}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{c})$

$(\exists \boldsymbol{e} \in \boldsymbol{M})\ (\forall \boldsymbol{a} \in \mathbf{M})\ \boldsymbol{a}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

Si además, la ley **T** *es conmutativa, se dice que* **S** *tiene una estructura de* ***semigrupo conmutativo*** o ***abeliano***.

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathrm{M}, \boldsymbol{a}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{a}.$

Ejemplos

$(\mathbb{N}, +); (\mathbb{Z}, +); (\mathbb{Q}, +); (\mathbb{R}, +); (\mathbb{C}, +).$

$(\mathbb{N}, .); (\mathbb{Z}, .); (\mathbb{Q}, .); (\mathbb{R}, .); (\mathbb{C}, .).$

GRUPO

Definición 4

Un conjunto **G** *provisto de una ley interna* $*$ *tiene la estructura de* ***grupo*** *si*:

- la ley $*$ es *asociativa*.
- **G** está provisto de elemento neutro.
- Todo elemento de **G** es simetrizable.

Es decir,

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{M}, (\boldsymbol{a}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{b})\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\ \mathbf{T}\ (\boldsymbol{b}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{c})$

$(\exists \boldsymbol{e} \in \mathbf{M})\ (\forall \boldsymbol{a} \in \mathbf{M})\ \boldsymbol{a}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

$(\forall \boldsymbol{a} \in \mathbf{M})\ (\exists \boldsymbol{a}' \in \mathbf{M}), \boldsymbol{a}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}'\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}$

Si además, la ley es conmutativa, se dice que **G** tiene una estructura de *grupo conmutativo* o *abeliano*.

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{M}, \boldsymbol{a}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\ \mathbf{T}\ \boldsymbol{a}$

Ejemplos

$(\mathbb{Z}, +, .); (\mathbb{Q}, +, .); (\mathbb{R}, +, .); (\mathbb{C}, +, .).$

$(\mathbb{Q}^*, .); (\mathbb{R}^*, .); (\mathbb{C}^*, .).$

SUBGRUPO

Definición 5

Una parte no vacía H del grupo G es un subgrupo de G si y sólo si.

$\forall a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H.$

ANEXO 3

INSTRUMENTO 1: SIGNIFICADOS Y USOS DE LAS SITUACIONES ADITIVAS

Instrumento para recoger información del Sistema Curricular Peruano: DCN, Mapas de Progreso, Rutas del Aprendizaje y cuadernos y textos escolares entregado por el MED.

Contexto

a. ***E***xtra matemático. ***b.*** Intra matemático.

Tipo de situación aditiva:

a. E–E–E (Combinación de estados) ***b.*** E–T–E (Transformación de estado:

c. E–C–E (Comparación de estados) ***d.*** C–T–C (Transformación de comparación)

e. TTT (Doble transformación) ***f.*** C–C–C (Doble comparación)

g. E–I–E (Igualación de estados) ***h.*** Formal

Significado de los números:

a. Cardinal ***b.*** Ordinal ***c.*** Medida

Los números en una situación aditiva son *cardinal*es, *ordinales* y *medidas*.

Número de operaciones: ___

a. Una operación. ***b.*** Dos operaciones. ***c.*** Tres o más operaciones.

(La solución de la situación aditiva requiere 1, 2, 3 o más operaciones)

Posición de la incógnita:

b. Suma. ***b.*** Sumando 1. ***c.*** Sumando 2.

La incógnita en una situación aditiva simple puede ser: suma, sumando 1 o sumando 2.

Número de respuestas correctas: ____.

a. Una. ***b.*** Dos. ***c.*** Tres o más soluciones.

La situación aditiva admite una, dos, tres, … etc. soluciones correctas.

Representación:

a. Colecciones.	**b.** Regletas	**c.** Almanaque	***d.*** MBD
e. Recta numérica	***f.*** Dinero	**g.** Matriz	***h.*** Yupana
i. Gráfico de barras	***j.*** Balanza	***k.*** Dibujo	***l.*** Tabla

Para realizar un control del número de situacines analizadas incorporamos el ítem:

Número de situaciones problema: ___

En la página analizada, cuántas situaciones problemas están planteadas: ___.

INSTRUMENTO 2: CONOCIMIENTOS Y USOS DE LOS DOCENTES

Este año, ¿con tus alumnos trabajaste problemas de este tipo? Sí o No.

¿Qué tan difícil consideras que es este problema para tus alumnos?

Para esta pregunta se propuso cuatro niveles de dificultad:

2. Muy fácil. **2.** Fácil **3.** Difícil. **4.** Muy difícil.

CUESTIONARIO DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1. Javier tiene 2 canicas rojas y otras azules. En total tiene 9. ¿Cuántas canicas son azules?
2. Hugo está en 7° lugar en una cola, Pedro es el 4° después de Hugo. ¿En qué lugar está Pedro?
3. En dos cajas, una grande y una chica caben 20 piñas. En la grande caben 12 piñas ¿Cuántas piñas caben en la chica?
4. Tengo un número de truchas y Luis me regaló 5 más. En total tengo 11. ¿Cuántas truchas tenía al inicio?
5. Laura es la 4ª en una carrera. Antes de llegar a la meta es adelantada por siete competidoras. Todas llegaron en lugares diferentes. ¿Qué lugar ocupó Laura?
6. En una caja entran 12 piñas. Se agranda la caja para 4 más. ¿Cuántas piñas entran en la nueva caja.
7. Mi tía me dio algo de dinero y mi papá me dio S/. 5. Entre los dos me dieron S/. 11? ¿Cuánto me dio mi tía?
8. Pepe está 4 lugares después que Hugo y Paco 6 lugares después que Pepe. ¿Cuántos lugares después que Hugo está Paco?
9. Después de dos ampliaciones, una caja admite 14 crayolas más. En la 2ª ampliación entran 8 crayolas más que la 1ª. ¿Cuántas crayolas más admite la 1ª ampliación?
10. Doris trabajó 9 días. Juana trabajó 3 días más que Doris. ¿Cuántos días trabajó Juana?
11. En la lista alfabética de mi aula, Pedro está 6 lugares después que yo y ocupa el 20° lugar. ¿Qué lugar ocupo yo?
12. En una bolsa roja caben 16 ejemplares del libro A. En la bolsa azul caben 6 ejemplares más. ¿Cuántos ejemplares del libro A caben en la bolsa azul?
13. Paco tiene 5 truchas más que Pepe. Pepe compró algunas truchas más y ahora tiene 7 truchas más que Paco. ¿Cuántas truchas compró Pepe?
14. Tito está algunos lugares después que Rita. Tito deja que se coloquen delante de él 8 personas. Ahora Tito está 15 lugares después que Rita ¿Cuántos lugares después que Rita está Tito?
15. El cuaderno rojo tiene 5 cm de largo más que el cuaderno verde. Si al cuaderno rojo se le aumenta 6 cm de largo, ¿cuántos cm más tiene el cuaderno rojo que el verde?
16. Rita compró algunas peras más que Dora. Rosa compró 9 peras más que Rita y 15 más que Dora. ¿Cuántas peras más compró Rita que Dora?
17. En la cola para comprar entradas, Pepe está cuatro lugares después que Hugo y Luis 6 lugares después que Pepe. ¿Cuántos lugares después que Hugo está Luis?
18. El polo rojo tiene 5 cm de largo más que el polo verde. El polo azul tiene 6 cm más de largo que el polo rojo. ¿Cuántos cm más tiene el polo azul que el verde?

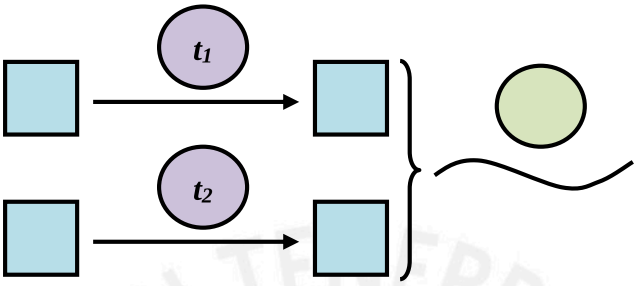
ANEXO 4

OTROS TIPOS DE SITUACIONES ADITIVAS

Tipo 8: COMPARACIÓN DE TRANFORMACIONES

Transformación - Comparación - Transformación (TCT)

Situación que compara dos transformaciones. Las transformaciones t_1 y t_2 son comparadas por c.



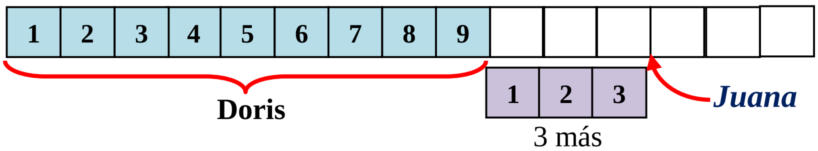
SUBTIPOS DE PROBLEMAS DE TRANSFORMACIÓN – COMPARACIÓN – TRANSFORMACIÓN (TCT)					
Sub tipos	t_1	c	t_2	t_1	Forma
TCTA3	Dato	Dato	Incógnita	Aumenta*	$a + b = \boxed{\_\_}$
TCTD3	Dato	Dato	Incógnita	Disminuye**	$a = c + \boxed{\_\_}$
TCTA2	Dato	Incógnita	Dato	Aumenta	$a + \boxed{\_\_} = c$
TCTD2	Dato	Incógnita	Dato	Disminuye	$a = c + \boxed{\_\_}$
TCTA1	Incógnita	Dato	Dato	Aumenta	$\boxed{\_\_} + b = c$
TCTD1	Incógnita	Dato	Dato	Disminuye	$\boxed{\_\_} = c + b$

*Comparación más que.

** Comparación menos que.

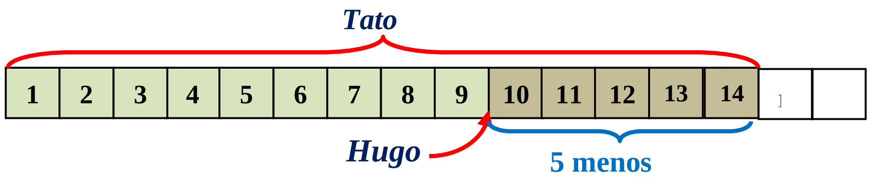
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***cardinales***.

TCT$_{\mathbf{A3}}$**.** Doris compra 9 pavos. Juana compra 3 más que Doris. ¿Cuántos pavos compra Juana?



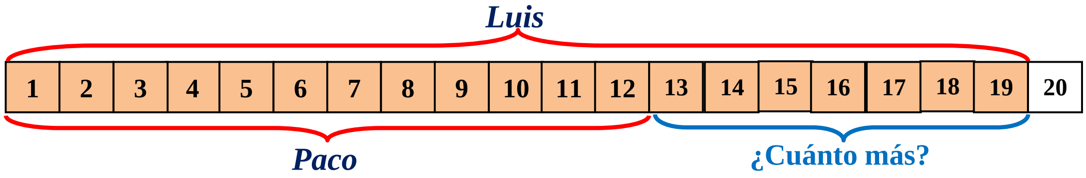
$9 + 3 = \boxed{\_\_}$

TCT$_{\mathbf{D3}}$**.** Tato gana S/. 14. Hugo gana 5 menos que Tato. ¿Cuánto gana Hugo?



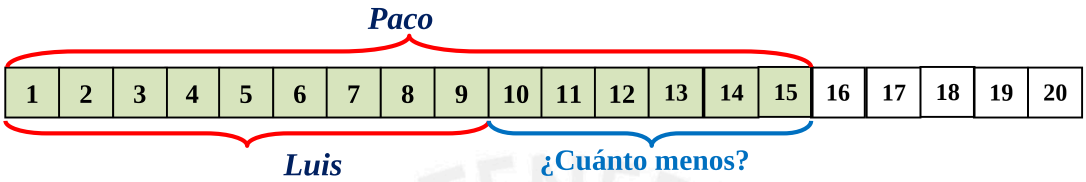
$14 = 5 + \boxed{\_\_}$

TCTA2. Paco gana 12 canicas y Luis gana 19. ¿Cuántas canicas más que Paco ganó Luis?



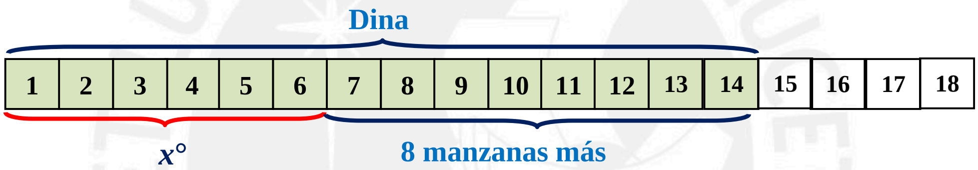
$12 + \boxed{\_\_} = 19$

TCTD2. Paco compra 15 canicas y Luis 9. ¿Cuántas canicas menos que Luis compra Paco?



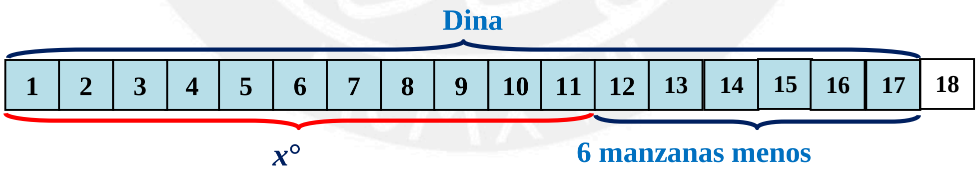
$15 = 9 + \boxed{\_\_}$

TCTA1. Pili vende un número de manzanas y Dina vende 8 más que Pili. Si Dina vendió 14 manzanas, ¿cuántas manzanas vendió Pili?



$\boxed{\_\_} + 8 = 14$

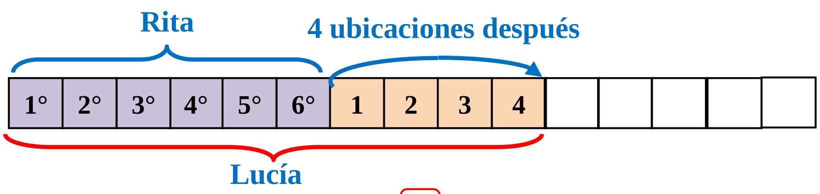
TCTD1. Pili compra un número de manzanas y es 6 manzanas menos que Dina. Si Dina compra 17 manzanas, ¿cuántas manzanas compra Pili?



$17 = 6 + \boxed{\_\_}$

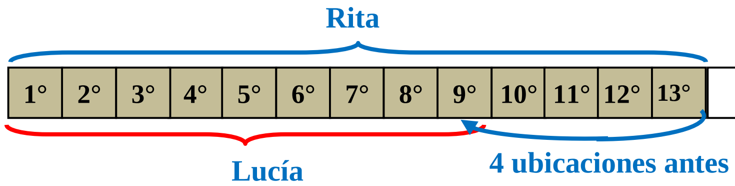
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***ordinales***.

TCTA3. Rita sube 6 pisos y Lucía sube 4 pisos más que Rita. ¿Cuántos pisos sube Lucía?



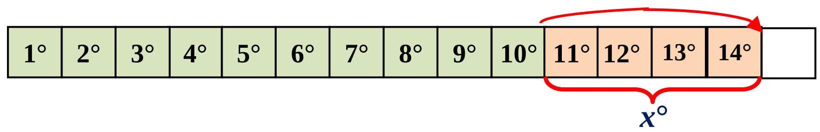
$6 + 4 = \boxed{\_\_}$

TCT$_{D3}$. Rita sube 10 pisos y Lucía sube 4 pisos menos que Rita. ¿Cuántos pisos sube Rita?



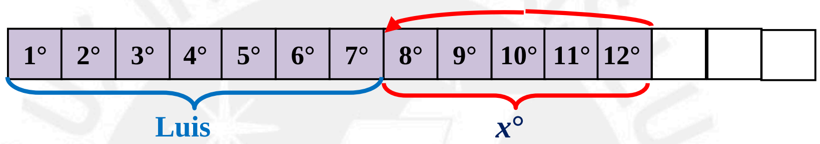
$13 = 4 + \boxed{\_\_}$

TCT$_{A2}$. Dante sube 10 pisos. ¿Cuántos pisos más que Dante sube Luis, si Luis subió 14 pisos?



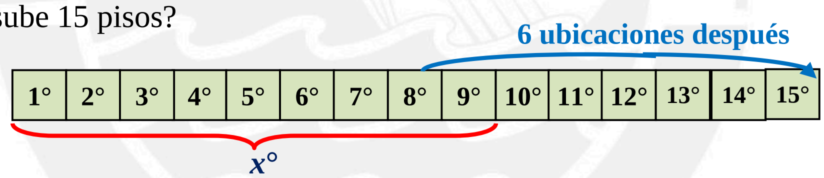
$10 + \boxed{\_\_} = 14$

TCT$_{D2}$. Dante sube 12 pisos. ¿Cuántos pisos menos que Dante sube Luis, si Luis sube 7 pisos?



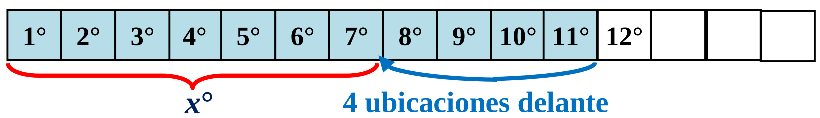
$12 = 7 + \boxed{\_\_}$

TCT$_{A1}$. Dante sube algunos pisos. Pedro sube 6 pisos más que Dante. ¿Cuántos pisos sube Dante si Pedro sube 15 pisos?



$\boxed{\_\_} + 6 = 15$

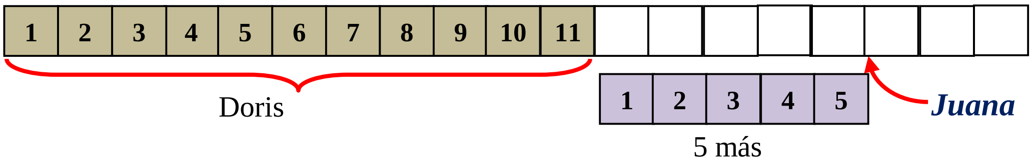
TCT$_{D1}$. Dante sube algunos pisos. Pedro sube 4 pisos menos que Dante. ¿Cuántos pisos sube Dante si Pedro sube 11 pisos?



$\boxed{\_\_} = 7 + 4$

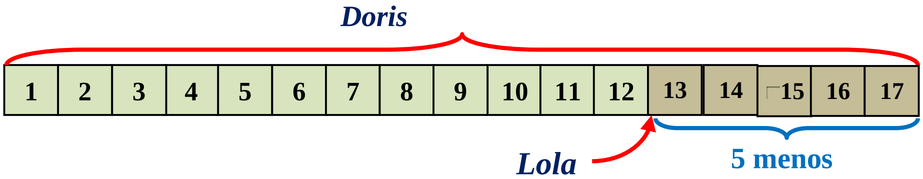
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de **medida**.

TCT$_{A3}$. Doris compra 11 kg.de papa y Juana 5 kg más que Doris. ¿Cuántos kg compra Juana?



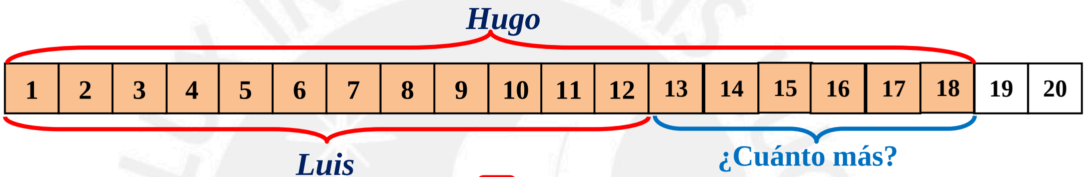
10 + 5 = $\boxed{}$

TCTD3**.** Doris vende 17 kg de papa y Lola 5 kg menos que Doris. ¿Cuántos kg ccompra Lola?



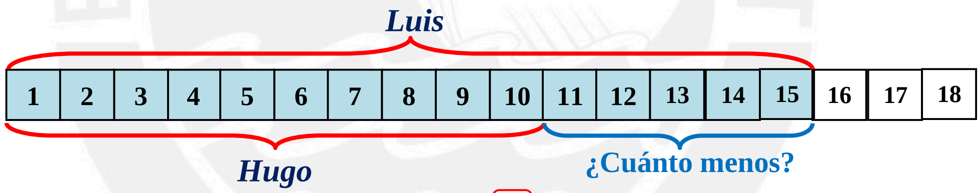
17 = 5 + $\boxed{}$

TCTA2**.** Luis vende 12 litros de miel y. Hugo 18. ¿Cuántos litros más vende Hugo que Luis?



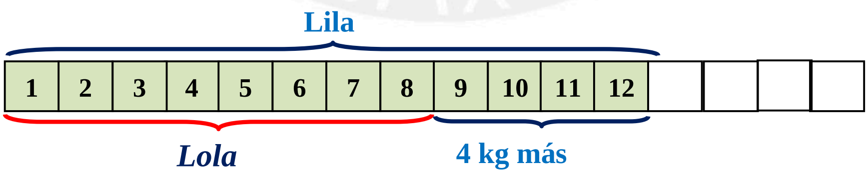
12 + $\boxed{}$ = 18

TCTD2**.** Luis vende 15 litros de miel y. Hugo 10. ¿Cuántos litros menos vende Luis que Hugo?



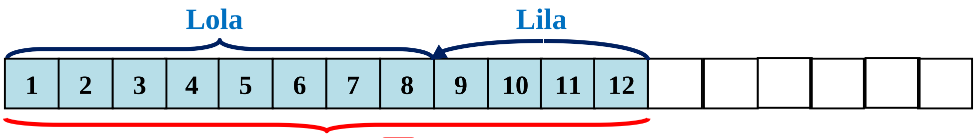
15 = 10 + $\boxed{}$

TCTA1**.** Lola compra un número de kg de peras y Lila 12 kg. Si Lila compra 4 kg más que Lila. ¿Cuántos kg compra Lola?



$\boxed{}$ + 4 = 12

TCTD1**.** Lola compra un número de kg de peras y Lila 8 kg. Si Lila compra 4 kg menos que Lila. ¿Cuántos kg compra Lola?

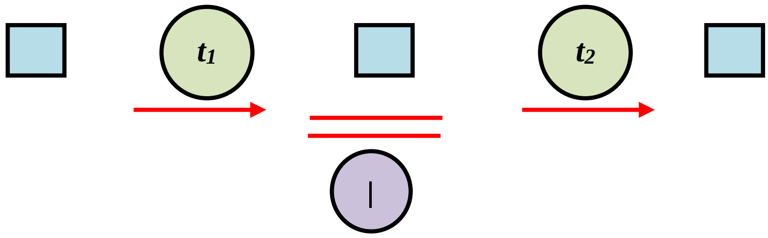


Lola $\boxed{}$ = 4 + 8

Tipo 9: *IGUALACIÓN DE TRANSFORMACIONES*

Transformación – *Igualación* – Transformación (TIT)

Un número ***i iguala*** dos transformaciones en los papeles de ***referencia*** y de ***comparación***. Representamos esta situación mediante el diagrama:

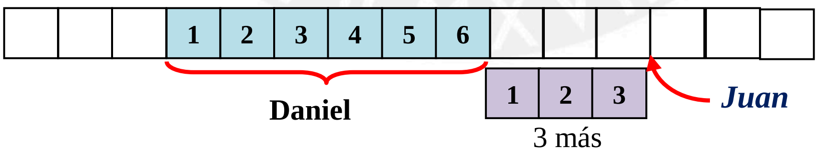


SUBTIPOS DE PROBLEMAS DE TRANSFORMACIÓN – *IGUALACIÓN* – TRANSFORMACIÓN (TIT)					
Sub tipos	t_r	*i*	t_c	t_i	**Forma**
EIE3	Dato	Dato	Incógnita	Aumenta*	$a + b = \boxed{}$
EIE3	Dato	Dato	Incógnita	Disminuye**	$a = c + \boxed{}$
EIE2	Dato	Incógnita	Dato	Aumenta	$a + \boxed{} = c$
EIE2	Dato	Incógnita	Dato	Disminuye	$a = c + \boxed{}$
EIE1	Incógnita	Dato	Dato	Aumenta	$\boxed{} + b = c$
EIE1	Incógnita	Dato	Dato	Disminuye	$\boxed{} = c + b$

*Aumenta la tranformación de referencia.
** Disminuye la tranformación de referencia.

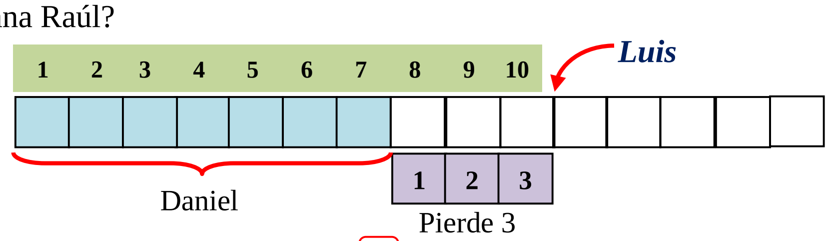
Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***cardinales***.

TIT$_{A3}$. Daniel gana 6 canicas, después gana 3 más. Ahora, Juan tiene la misma cantidad que Daniel. ¿Cuántas canicas tiene Juan?



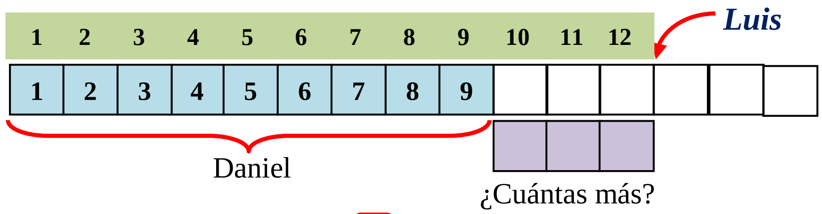
$$6 + 3 = \boxed{}$$

TIT$_{D3}$ Luis gana 10 canicas y luego, pierde 3, ahora gana la misma cantidad que Raúl. ¿Cuántas canicas gana Raúl?



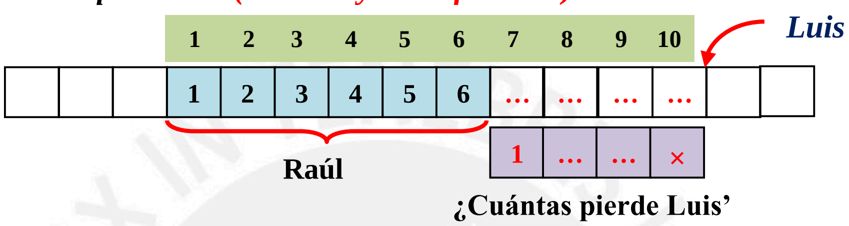
$$4 + \boxed{} = 10$$

TIT$_{A2}$. Daniel gana 9 canicas y Luis 12. ¿Cuántas canicas más necesita ganar Daniel para tener el mismo número de canicas que Luis?



9 + $\boxed{\_\_}$ = 12

TIT$_{D2}$. ***Raúl gana 6 canicas y Luis 10. ¿Cuántas canicas necesita perder Luis para ganar la misma cantidad que Raúl? (Disminuye la referencia)***



TIT$_{A1}$. ***¿Cuántas canicas gana Raúl, si necesita ganar 4 más para tener igual que Luis que tiene 10? (Aumenta la referencia)***

TIT$_{D1}$. ***¿Cuántas canicas gana Raúl, si Luis que gana 10 necesita regalar 4 para ganar la misma cantidad que Raúl? (Disminuye la referencia)***

Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***ordinales***.

TIT$_{A3}$. ***Raúl sube 6 pisos y luego sube 4 más. Ahora, Raúl sube el mismo número de pisos que Luis. ¿Cuántos pisos sube Luis? (Aumenta la referencia)***

TIT$_{A2}$. ***Raúl sube 6 pisos y Luis 10. ¿Cuántos pisos más necesita subir Raúl para subir el mismo número de pisos que Luis? (Aumenta la referencia)***

TIT$_{A1}$. ***¿Cuántos pisos sube Raúl, si necesita subir cuatro pisos más para subir el mismo número de pisos que Luis? (Aumenta la referencia)***

TIT$_{D3}$. ***Luis sube 10 pisos y luego, baja 4. Ahora, Luis sube el mismo número de pisos que Raúl. ¿En total, cuántos pisos subió Raúl? (Disminuye la referencia)***

TIT$_{D2}$. ***Raúl sube 6 pisos y Luis 10. ¿Cuántos pisos necesita bajar Luis para subir el mismo número de pisos que Raúl? (Disminuye la referencia)***

TIT$_{D1}$. ***¿Cuántos pisos sube Raúl, si Luis que sube 10 pisos necesita bajar cuatro para subir el mismo número de pisos que Raúl? (Disminuye la referencia)***

Ejemplos de situaciones aditivas con números que desempeñan el papel de ***medida***.

TITA3. ***Raúl gana 6 canicas, después gana 4 más. Ahora, Raúl tiene la misma cantidad que Luis. ¿Cuántas canicas tiene Luis?*** ***(Aumenta la referencia)***

TITA2. ***Raúl gana 6 canicas y Luis 10. ¿Cuántas canicas más necesita ganar Raúl para tener el mismo número de canicas que Luis?*** ***(Aumenta la referencia)***

TITA1. ***¿Cuántas canicas gana Raúl, si necesita ganar 4 más para tener igual que Luis que tiene 10?*** ***(Aumenta la referencia)***

TITD3. ***Luis gana 10 canicas y luego, pierde 4, ahora gana la misma cantidad que Raúl. ¿Cuántas canicas gana Raúl?*** ***(Disminuye la referencia)***

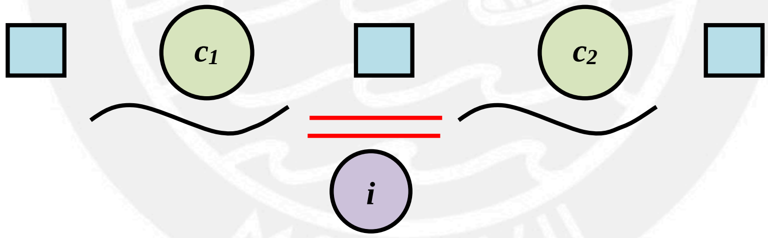
TITD2. ***Raúl gana 6 canicas y Luis 10. ¿Cuántas canicas necesita perder Luis para ganar la misma cantidad que Raúl?*** ***(Disminuye la referencia)***

TITD3. ***¿Cuántas canicas gana Raúl, si Luis que gana 10 necesita regalar 4 para ganar la misma cantidad que Raúl?*** ***(Disminuye la referencia)***

Tipo 10: *IGUALACIÓN DE COMPARACIONES*

Comparación – *Igualación* – Comparación (CIC)

Un número ***i iguala*** dos transformaciones en los papeles de ***referencia*** y de ***comparación***. Representamos esta situación mediante el diagrama:



SUBTIPOS DE PROBLEMAS DE COMPARACIÓN – *IGUALACIÓN* – COMPARACIÓN (CIC)					
Sub tipos	e_r	i	e_c	e_i	**Forma**
CIC3	Dato	Dato	Incógnita	Aumenta*	$a + b = \boxed{\_\_}$
CIC3	Dato	Dato	Incógnita	Disminuye**	$a = c + \boxed{\_\_}$
CIC2	Dato	Incógnita	Dato	Aumenta	$a + \boxed{\_\_} = c$
CIC2	Dato	Incógnita	Dato	Disminuye	$a = c + \boxed{\_\_}$
CIC1	Incógnita	Dato	Dato	Aumenta	$\boxed{\_\_} + b = c$
CIC1	Incógnita	Dato	Dato	Disminuye	$\boxed{\_\_} = c + b$

*Aumenta el estado de referencia.
** Disminuye el estado de comparación.

Juan tiene 12 canicas más que Pedro. Luis tiene 7 más que Hugo. Luis compra 5 canicas y ahora tiene tantas más que Hugo, así como Juan tiene más que Pedro. (Aumenta la segunda comparación)

Juan tiene 12 canicas más que Pedro. Luis tiene 7 más que Hugo. Juan regala 7 canicas y ahora tiene tantas más que Pedro, así como Luis tiene más que Hugo. (Disminuye la segunda comparación)