

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**  
**ESCUELA DE POSGRADO**



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD**  
**CATÓLICA**  
DEL PERÚ

**Estudio del radón 222 y su progenie proveniente del  
suelo en la estación meteorológica Hipólito**

**Unanue – PUCP**

Tesis para Optar el Grado de:  
**MAGÍSTER EN FÍSICA**

Presentado por  
**JORDI OSCAR TORRES MALDONADO**

**ASESOR**

**Dra. María Elena López Herrera**

**JURADO**

**Dra. María Elena López Herrera**

**PhD. Daniel Palacios Fernández**

**MSc. Patrizia Edel Pereyra Anaya**

**Lima, mayo de 2018**



A mis paaas

### **Agradecimiento**

Mi profundo agradecimiento a mi asesora María Elena, por su dedicación y contribución a lo largo del proceso de investigación.

Mi especial agradecimiento a CienciActiva de Concytec que me apoyo con una beca y financió este trabajo de investigación.

Agradecimientos especiales a todos los miembros del grupo de investigación de huellas nucleares de la PUCP.

## Resumen

El estudio de la presencia del gas radón y su progenie en sitios relacionados con actividades de perforación de suelos como en ingeniería civil, arqueología, geología, minería, etc. es de interés actual, considerando que los trabajos que se realizan asociados a estas actividades son principalmente de excavación y remoción del suelo. Estas actividades originan que la salida de este gas desde el suelo se acentúe y se sume a la contribución producida por vibraciones naturales de los suelos. Se considera que la población o especialistas involucrados en estas actividades, están más expuestos a este gas radiactivo, debido a que la exposición es mayor que la que se produce en cualquier ambiente cotidiano.

Como tema de la presente investigación, se plantea hacer un estudio del gas radón y su progenie proveniente del suelo en la Estación Meteorológica Hipólito Unanue (EMHU), localizada cerca al Muro Inca, zona arqueológica protegida que atraviesa el campus de la PUCP en la ciudad de Lima.

La zona es elegida por su cercanía y fácil acceso para realizar las mediciones contando con los permisos respectivos y con el compromiso de no dañar o alterar los sitios de estudio.

Mediante la técnica de huellas nucleares, con una metodología propia, se detecta el gas radón y su progenie proveniente del suelo, a diferentes alturas en pozos construidos para tal fin.

El objetivo principal, es la medición de la concentración de radón a diferentes alturas que nos permite estudiar el proceso de exhalación de este gas desde el suelo. También se busca determinar si los niveles de radón están dentro de los niveles aceptables para la zona de estudio.

# ÍNDICE

INTRODUCCIÓN .....	8
<b>Capítulo 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....</b>	<b>10</b>
1.1. Descripción de la problemática del radón ambiental .....	10
1.2. Objetivos de la investigación .....	10
1.2.1. Objetivos específicos .....	11
<b>Capítulo 2: MARCO TEÓRICO.....</b>	<b>12</b>
2.1. Fundamentos teóricos .....	12
2.1.1. Radioactividad.....	12
2.1.2. Ley de la desintegración radiactiva.....	12
2.1.3. Series radiactivas naturales.....	14
2.1.4. Constante de desintegración.....	18
2.1.5. Periodo de semidesintegración .....	18
2.1.6. Decaimiento alfa.....	19
2.1.7. Energía cinética alfa.....	26
2.2. Teoría general de difusión de los gases en un medio .....	29
2.2.1. Difusión de los gases.....	29

2.2.2. Primera ley de Fick.....	29
2.2.3. Segunda ley de Fick .....	30
2.3. Teoría de difusión aplicada al radón .....	31
2.3.1. Teoría de difusión del radón para exposiciones relativamente cortas .....	31
2.3.2. Teoría de difusión del radón para exposiciones relativamente largas .....	37
<b>Capítulo 3: METODOLOGÍA .....</b>	<b>40</b>
3.1. Diseño metodológico .....	40
3.2. Muestra .....	40
3.3. Detectores e instrumentos utilizados .....	41
3.3.1. Polímero LR-115 tipo 2.....	41
3.3.2. Sistema de grabado químico de los detectores .....	42
3.3.3. Lectura de los detectores en un microscopio óptico LEICA modelo DDM LM.....	44
3.4. Sistema de detectores colocados al interior de los pozos .....	45
3.5. Procesamiento de los datos .....	47
<b>Capítulo 4: RESULTADOS.....</b>	<b>50</b>

4.1. Densidad de huellas y concentraciones de Rn 222 y su progenie .....	50
4.2. Comparación de las concentraciones de radón y su progenie en cada pozo, en verano e invierno 2017 .....	58
<b>Capítulo 5: DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES..</b>	<b>63</b>
5.1. Discusión.....	63
5.2. Conclusiones .....	66
5.3. Recomendaciones .....	67
<b>Capítulo 6: FUENTES DE INFORMACIÓN.....</b>	<b>68</b>
5.1. Referencias.....	68
5.2. Bibliografía.....	69
5.3. Fuentes electrónicas.....	71
<b>APÉNDICE.....</b>	<b>72</b>
<b>Ecuaciones de conexión .....</b>	<b>72</b>
<b>Función asintótica de Ayri.....</b>	<b>85</b>

## INTRODUCCIÓN

El radón  $^{222}\text{Rn}$  es un gas noble de la serie radiactiva natural del uranio  $^{238}\text{U}$ , proviene del decaimiento del radio  $^{226}\text{Ra}$ . Por ser un gas, el radón producido en el interior de las rocas y suelos con contenido de radio, se difunde con facilidad a través de las fisuras en las rocas aprovechando la porosidad del suelo y de las capas freáticas hasta alcanzar la superficie terrestre (Gascoyne & Wuschke, 1997).

Desde el punto de vista ambiental y de protección radiológica, el isótopo de radón  $^{222}\text{Rn}$  es el más importante a medir por poseer un periodo de semidesintegración relativamente largo de 3.82 días, en comparación a otros isótopos emisores alfas de su cadena, lo que le permite tener mayor acceso a diferentes ambientes, antes del decaimiento.

Si el material radiactivo yace en lo profundo del suelo, puede ser difícil identificar su existencia. Sin embargo, cuando se perforan pozos relativamente profundos con el propósito de caracterizar el suelo o por otras razones, es concebible que el radón salga a través del pozo y posteriormente se difunda hacia la superficie exterior. La identificación del  $\text{Rn-}^{222}$  que exhala hacia el pozo puede servir como indicador de la presencia de  $\text{U-}^{238}$  y su progenie. Si se encuentra concentraciones significativas de  $\text{Rn-}^{222}$  en pozos de estudio, podría ser una información adicional sobre la geología de la zona.

En el procedimiento de medición de radón y progenie, en este trabajo, se cavan pozos cilíndricos cerrados, donde se acumula y se difunde radón durante 31 días.

Para detectar las alfas provenientes del radón y su progenie se utiliza un sistema de detectores de estado sólido LR 115 tipo 2, colocados verticalmente a partir de 20 cm del fondo del pozo donde ocurre el proceso de exhalación. Al final de la exposición, los detectores son tratados químicamente y leídos en un microscopio óptico obteniéndose así la densidad de huellas correspondientes a las alfas del radón y su



progenie. Las densidades obtenidas, luego son traducidas a concentraciones usando un factor de conversión obtenido en el laboratorio. Las concentraciones medidas en los pozos representan la actividad del gas radón y podrían compararse con la concentración de radón en la atmósfera donde se realizan las medidas.

En la primera parte de este trabajo, se proporciona una solución analítica de la ecuación de difusión para el caso de la concentración de radón en un ambiente cerrado, que en nuestro caso es el pozo con tapa.

En la segunda parte del trabajo, se describe y muestran los resultados para la concentración de radón y su progenie, en dos periodos que corresponden a las estaciones de verano e invierno del 2017 de la ciudad de Lima.

Los datos obtenidos nos permiten determinar, cómo varía la densidad de huellas asociadas al radón y su progenie respecto a la altura del pozo cilíndrico, usado para estudiar la exhalación de radón desde el suelo.

El estudio del fenómeno de la exhalación, transporte y migración del gas radón desde el suelo es de interés actual considerando que su comportamiento tiene múltiples aplicaciones en arqueología, minería, sismología, etc. Siendo así, la principal razón para la realización de este estudio, la medición de la concentración de radón y su progenie en la estación meteorológica Hipólito Unanue de la PUCP.

## Capítulo 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1. Descripción de la problemática del radón ambiental

El radón 222 es un gas noble radiactivo insípido, incoloro e inodoro que se origina y emite desde el suelo y de todo material que contenga uranio y/o radio. En promedio, el radón representa aproximadamente el 55% de la dosis anual de radiación, y el resto proviene de fuentes médicas (11%), internas (11%), terrestres (8%), cósmicas (8%) y otras (NCRP, 1987).

La Agencia Internacional para la Investigación del Cáncer (IARC) clasificó al radón 222 como agente cancerígeno para los humanos. Lo declara como la principal causa de muerte entre los no fumadores y la segunda causa principal de cáncer de pulmón después del tabaquismo (National Research Council, 1999).

La característica principal, que hace necesaria la medición de este radioisótopo gaseoso, independientemente del tema de salud, es que la tasa de su exhalación juega un rol importante en la caracterización de la presencia de la fuente natural de radón en el suelo y en su proceso de difusión hacia la superficie. Así mismo su estudio es importante en la caracterización de los tipos de suelo. Otra justificación de esta investigación es la falta de documentación técnica de estudios de exhalación de radón y progenie en el Perú.

### 1.2. Objetivos de la investigación

El objetivo general es plantear una metodología para determinar la concentración de radón y progenie, proveniente del suelo en pozos localizados en la Estación Meteorológica Hipólito Unanue, para conocer el comportamiento del gas de acuerdo a las características del suelo de la zona.

### 1.2.1. Objetivos específicos

- a. Determinar la concentración de radón y progenie en suelo en 4 pozos localizados en la Estación Meteorológica Hipólito Unanue.
- b. Determinar la variación de la concentración de radón y progenie a diferentes alturas en el interior de los pozos en los periodos de estudios.
- c. Determinar la variación de la concentración de radón y progenie según las estaciones de verano e invierno en la Estación Meteorológica Hipólito Unanue-PUCP.



## Capítulo 2: MARCO TEÓRICO

### 2.1. Fundamentos teóricos

#### 2.1.1. Radioactividad

La radioactividad se define como la desintegración espontánea de un núcleo. Los núcleos radiactivos suelen clasificarse en dos grupos: núcleos inestables que se encuentran en la naturaleza llamados radioactividad natural y núcleos producidos en laboratorio a través de reacciones nucleares denominadas radioactividad artificial.

La radioactividad natural puede manifestarse a través de uno de los siguientes procesos: decaimiento  $\alpha$ , decaimiento  $\beta$ , captura electrónica y decaimiento  $\gamma$ . La radioactividad artificial puede incluir el decaimiento a través de protones, neutrones o fisión (Kamal, 2014).

#### 2.1.2. Ley de la desintegración radiactiva

La ley fundamental de la desintegración radiactiva se puede formular de la siguiente manera: Dada una población de nucleídos radiactivos, la probabilidad de que decaiga durante un intervalo  $dt$  es  $\lambda dt$ . Donde la constante  $\lambda$  se llama la constante de decaimiento. Esta ley es característica para eventos aleatorios y se aplica a todos los tipos de decaimiento radiactivo alfa, beta, gamma, captura electrónica, fisión espontánea y también en el proceso atómico de emisión de fotones por los átomos excitados (Segre, 1965).

La aplicación más simple de esta ley implica una sola sustancia radiactiva. De acuerdo con nuestra ley fundamental, si se tiene  $N$  núcleos radiactivos en el tiempo  $t$ , el número  $dN$  que decaen en el tiempo  $dt$  está dado por:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (1)$$

Integrando con la condición de que en un inicio se tiene  $N_0$  nucleones, se obtiene

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

Que puede tomar la forma exponencial

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) \quad (2)$$

La ecuación (2) es otra formulación de la ley fundamental de la desintegración radiactiva. Cuando se multiplica por  $\lambda$ , se convierte en

$$\lambda N(t) = \lambda N_0 \exp(-\lambda t) \quad (3)$$

Donde  $\lambda N_0 = A_0$  es la actividad inicial asociada a los  $N_0$  nucleones y  $\lambda N = A$  es la actividad en el tiempo  $t$ . En términos de la actividad

$$A = A_0 \exp(-\lambda t) \quad (4)$$

O, en forma logarítmica

$$\ln A = \ln A_0 - \lambda t \quad (5)$$

Más adelante se verá que para el caso del gas radón, se puede expresar como una actividad específica volumétrica,  $Bq/m^3$ .

### 2.1.3. Series radiactivas naturales

Las series naturales tienen su origen en nucleídos cuyas vidas son comparables con la vida de la tierra que es del orden de  $4.47 \times 10^9$  años. Estas series de elementos radiactivos decaen en hijas que son a su vez, radiactivos a través de varias generaciones, hasta que llegan a un núcleo estable. En la *tabla 1* se relacionan los nucleídos iniciales (padres) y finales de cada uno de las tres series radioactivas naturales existentes.

**Tabla 1.** Series radiactivas naturales

Serie	Isótopo inicial	$T_{1/2}$ [años]	Producto final
Torio	${}^{232}_{90}\text{Th}$	$1.40 \times 10^{10}$	${}^{208}_{82}\text{Pb}$
Actinio	${}^{235}_{92}\text{U}$	$7.04 \times 10^8$	${}^{207}_{82}\text{Pb}$
Uranio	${}^{238}_{92}\text{U}$	$1.47 \times 10^9$	${}^{206}_{82}\text{Pb}$

Fuente: Nuclear Data Services de la IAEA.

Cada elemento de la tabla 1 constituye una familia o serie radiactiva natural. Una de ellas es la familia del  ${}^{238}\text{U}$ , que empieza con este isótopo radiactivo emisor de partículas  $\alpha$ , después de 14 transformaciones llega a un producto final estable que en este caso se trata del isótopo de  ${}^{206}\text{Pb}$ . La masa atómica cambia en cuatro unidades en cada decaimiento  $\alpha$  y en una unidad el número atómico en el decaimiento  $\beta$ , las masas encontradas en varios miembros de esta familia, difieren en múltiplos de cuatro y una fórmula general para las masas aproximadas es  $4n + 2$ , donde  $n$  es un número entero. Por lo tanto, esta serie del uranio también se conoce como serie  $4n + 2$ , expresión que proporciona el número de

masa de cada nucleído de la serie con valores de  $n$  de 51 a 59 (Burcham & Joves, 1995).

La *tabla 2* representa a los radioisótopos y transformaciones de la serie del  $^{238}\text{U}$  así como sus periodos de semidesintegración y partículas que emiten.

**Tabla 2.** Familia radiactiva del  $^{238}\text{U}$ , o serie  $4n + 2$

Radioelemento y Rayos	$T_{1/2}$ [años, días, horas, minutos, segundos]
Uranium 238	4 500 000 000 y
↓ $\alpha$	
Thorium 234	24 d
↓ $\beta$	
Protactinium 234	1.2 m
↓ $\beta$	
Uranium 234	240 000 y
↓ $\alpha$	
Thorium 230	77 000 y
↓ $\alpha$	
Radium 226	1 600 y
↓ $\alpha$	
<b>Radon 222</b>	<b>3.8 d</b>
↓ $\alpha$	
Polonium 218	3.1 m
↓ $\alpha$ or ↘ $\beta$	
Lead 214      Astatine 218	27 m, 2 s
↓ $\beta$ ↙ $\alpha$	
Bismuth 214	20 m
↓ $\beta$ or ↘ $\alpha$	
Polonium 214      Thallium 210	0.00016 s, 1.3 m
↓ $\alpha$ ↙ $\beta$	
Lead 210	22 y
↓ $\beta$	
Bismuth 210	5.0 d
↓ $\beta$ or ↘ $\alpha$	
Polonium 210      Thallium 206	140 d, 4.2 m
↓ $\alpha$ ↙ $\beta$	
Lead 206	Not radioactive

El torio con masa atómica de 232 es el primer isótopo de otra serie o familia que se encuentra en la naturaleza, con fórmula general  $4n$  o serie del torio. El isótopo que se produce como producto final estable es el  $^{208}\text{Pb}$ . La familia radiactiva del torio se encuentra representada en la *tabla 3*, dentro de esta cadena se encuentra el isótopo de Rn 220 con periodo de semidesintegración de 56 s.

**Tabla 3.** Familia radiactiva del  $^{232}\text{Th}$ , o serie  $4n$

Radioelemento y Rayos	$T_{1/2}$ [años, días, horas, minutos, segundos]
Thorium 232	14 000 000 000 y
↓ $\alpha$	
Radium 228	5.8 y
↓ $\beta$	
Actinium 228	6.1 h
↓ $\beta$	
Thorium 228	1.9 y
↓ $\alpha$	
Radium 224	3.7 d
↓ $\alpha$	
<b>Radon 220</b>	<b>56 s</b>
↓ $\alpha$	
Polonium 216	0.15 s
↓ $\alpha$ or      ↘ $\beta$	
Lead 212      Astatine 216	11 h, 0.0003 s
↓ $\beta$ ↙ $\alpha$	
Bismuth 212	61 m
↓ $\beta$ or      ↘ $\alpha$	
Polonium 212      Thallium 208	0.0000003 s, 3.1 m
↓ $\alpha$ ↘ $\beta$	
Lead 208	Not radioactive



La serie del  $^{235}\text{U}$  es conocida también como serie o familia del actinio o serie  $4n + 3$ , siendo el  $^{235}\text{U}$  el isótopo padre el cual después de varios procesos de decaimientos tiene como producto final el isótopo estable  $^{207}\text{Pb}$ .

**Tabla 4.** Familia radiactiva del  $^{235}\text{U}$ , o serie  $4n + 3$

Radioelemento y Rayos	$T_{1/2}$ [años, días, horas, minutos, segundos]
Uranium 235	710 000 000 y
↓ $\alpha$	
Thorium 231	26 h
↓ $\beta$	
Protactinium 231	33 000 y
↓ $\alpha$	
Actinium 227	22 y
↓ $\beta$ or ↘ $\alpha$	
Thorium 227    Francium 223	19 d, 22m
↓ $\alpha$ ↙ $\beta$	
Radium 223	11 d
↓ $\alpha$	
<b>Radon 219</b>	<b>4.0 s</b>
↓ $\alpha$	
Polonium 215	0.0018 s
↓ $\alpha$ or ↘ $\beta$	
Lead 211            Astatine 215	36 m, 0.0001 s
↓ $\beta$ ↙ $\alpha$	
Bismuth 211	2.1 m
↓ $\beta$ or ↘ $\alpha$	
Polonium 211)    Thallium 207	0.005 s, 4.8 m
↓ $\alpha$ ↙ $\beta$	
Lead 207	Not radioactive

Fuentes: Malley, M. (2011). *Radioactivity, a history of a mysterious*. United States of America: Oxford University Press, Inc.

#### 2.1.4. Constante de desintegración

La constante de desintegración o constante de decaimiento  $\lambda$ , se define como la probabilidad de que un núcleo radiactivo se desintegre en la unidad de tiempo.

Si  $N$  representa el número de núcleos radiactivos presentes en un tiempo dado y  $dN$  representa el número de desintegraciones durante un intervalo de tiempo  $dt$ , entonces la probabilidad de desintegración de dichos núcleos es

$$-\frac{dN}{N} \quad (6)$$

Donde el signo menos indica que  $dN$  siempre es negativo. Siendo la constante de desintegración

$$\lambda = -\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \quad (7)$$

En el Sistema Internacional, su unidad es  $s^{-1}$ .

#### 2.1.5. Periodo de semidesintegración

El periodo de semidesintegración,  $t_{1/2}$  se define como el intervalo de tiempo en el que el número original de núcleos se reduce a la mitad (Meyerhof, 1967), o el tiempo en el cual la actividad disminuye a la mitad de la actividad inicial (Acosta, Cowan, & Graham, 1983).

Cuando  $t = t_{1/2}$ , entonces, el número de átomos presentes de una clase dada es  $N = 1/2 N_0$ , y de la ecuación de las desintegraciones radioactivas

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 \exp(-\lambda t_{1/2}) \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} = \exp(-\lambda t_{1/2})$$

Tomando logaritmo natural en ambos lados

$$-\ln 2 = -\lambda t_{1/2} \quad (9)$$

Se obtiene el periodo de semidesintegración, dado por

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (10)$$

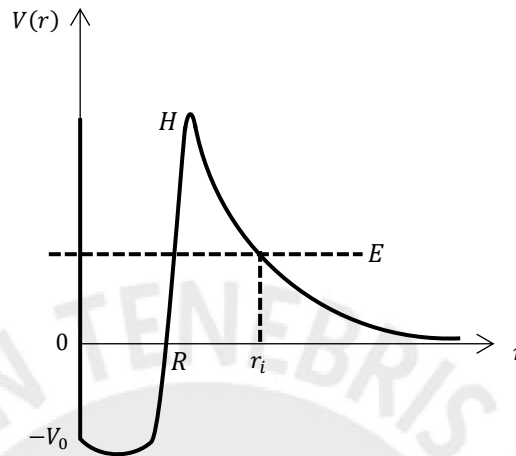
Cantidad que, en el Sistema internacional de unidades se mide en (s). Este valor es característico para cada isótopo radiactivo, y según el caso puede variar desde millonésimas de segundo a miles de millones de años.

#### 2.1.6. Decaimiento alfa

Aunque no se conoce la naturaleza exacta de las fuerzas que actúan en el decaimiento alfa, sí se sabe que hay fuerzas repulsivas debido a las cargas y fuerzas atractivas muy fuertes de un carácter específicamente nuclear. El efecto de estas fuerzas podría explicarse considerando una energía potencial negativa  $-V_0$  a una distancia  $R$  del centro del núcleo ( $R =$  radio del núcleo).

Las fuerzas nucleares son de tan corto alcance que fuera del núcleo solo actúan las fuerzas de repulsión electrostática entre la partícula alfa que lleva consigo la carga  $+2e$  y el núcleo hija que queda después de la

desintegración. Por otra parte, la energía potencial  $V_0$  de una partícula alfa fuera del núcleo varía inversamente con su distancia  $r$  desde el centro del núcleo, donde  $r > R$ , como se muestra en *Figura 1*.



**Figura 1.** Energía Potencial de una partícula alfa en función de su distancia al centro del núcleo.

Por simplicidad, en la figura 1, el potencial de Coulomb y el potencial nuclear constante  $-V_0$  se unen en  $r = R$ . El valor de la energía potencial en  $r = R$  se designa por la letra  $H$ , denominada también altura de la barrera de potencial para la partícula alfa.

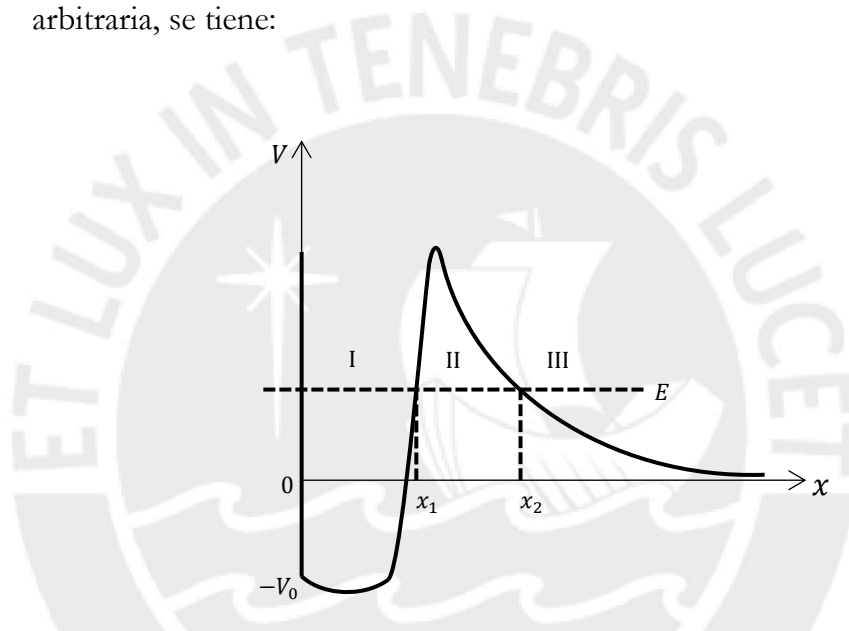
El orden de magnitud de la altura de la barrera de potencial para la mayoría de los elementos pesados es de aproximadamente 30 MeV. Esto representa la energía mínima que una partícula alfa debe tener, de acuerdo con las ideas clásicas, para poder escapar del núcleo.

Por otra parte, las partículas alfa emitidas por los núcleos radiactivos tienen energías del orden de 5 o 6 MeV, y en casos raros, aproximadamente 11 MeV. Por tanto, podemos imaginar que la partícula alfa recibe suficiente energía en su interacción con otros núcleos para

elevantarla a un nivel de energía  $E$  igual a la energía cinética que tiene cuando está a una gran distancia al núcleo (Semat & Albright, 1972).

Las propiedades de onda de una partícula en una barrera de potencial hicieron posible la penetración de una partícula, a pesar de que la energía podría ser demasiado baja para la transmisión de acuerdo con la mecánica clásica.

Para un solo encuentro entre una partícula y una barrera de forma arbitraria, se tiene:



**Figura 2. Barrera de potencial**

La onda transmitida en la región III, tiene un solo componente del momento, por lo que dentro de la aproximación WKB, podemos escribir

$$\psi_{III}(x) = \frac{E}{\sqrt{p}} \exp i \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx - \frac{\pi}{4} \right] , \quad r > r_2$$

$$\psi_{III}(x) = \frac{E}{\sqrt{p}} \left[ \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx - \frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (11)$$

De acuerdo con (Hecht, 2000), a la izquierda del punto de inflexión  $x = x_2$ , la solución exponencial creciente conecta en una solución oscilatoria según

$$\frac{1}{\sqrt{p(x)}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx - \frac{\pi}{4}\right) \leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p| dx\right) \quad (12)$$

Mientras que una solución exponencial decreciente conecta a una solución oscilatoria según, ver apéndice

$$\frac{1}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx - \frac{\pi}{4}\right) \leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p| dx\right) \quad (13)$$

Aplicando estas dos primeras ecuaciones de conexión y reescribiendo nuestra función  $\psi_{III}(x)$ , tenemos

$$\psi_{III}(x) = \frac{E}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p| dx\right) - \frac{iE}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p| dx\right)$$

Factorizando y utilizando propiedad de la integral definida

$$\psi_{II}(x) = \frac{E}{\sqrt{|p(x)|}} \left[ \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} |p| dx\right) - i \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} |p| dx\right) \right] \quad (14)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} |p| dx = \int_{x_1}^x |p| dx + \int_x^{x_2} |p| dx \Rightarrow \int_x^{x_2} |p| dx = \int_{x_1}^{x_2} |p| dx - \int_{x_1}^x |p| dx$$

$$\begin{aligned} \psi_{II}(x) = \frac{E}{\sqrt{|p(x)|}} & \left[ \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |p| dx + \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx\right) \right. \\ & \left. - i \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |p| dx - \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx\right) \right] \quad (15) \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |p| dx$$

Haciendo el cambio de variable  $L$  y reemplazando en nuestra función de onda  $\psi_{II}(x)$ , podemos escribir

$$\psi_{II}(x) = \frac{E}{\sqrt{|p(x)|}} \left[ \frac{1}{2} \exp(-L) \cdot \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx\right) - i \exp(L) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx\right) \right] \quad (16)$$

Por otra parte, al igual que el caso anterior. A la derecha del punto de inflexión,  $x = x_1$ , la solución exponencial decreciente conecta así a una solución oscilatoria según

$$\frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx\right) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4}\right) \quad (17)$$

Mientras que la solución exponencial creciente conecta a una oscilatoria de acuerdo a

$$\frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx\right) \leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{p(x)}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4}\right) \quad (18)$$

Reemplazando (17) y (18) en (16), tenemos

$$\psi_{II}(x) = \frac{-E}{2\sqrt{p(x)}} \exp(-L) \cdot \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2iE}{\sqrt{p(x)}} \exp(L) \cdot \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z = \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4}$$

Reemplazando el cambio de variable,  $Z$ , en nuestra función de onda  $\psi_{II}(x)$ , escribimos

$$\psi_{II}(x) = \frac{-E}{2\sqrt{p(x)}} \exp(-L) \operatorname{sen}(Z) - \frac{2iE}{\sqrt{p(x)}} \exp(L) \cdot \cos(Z)$$

$$\psi_I(x) = \frac{-E}{2\sqrt{p(x)}} \exp(-L) \left\{ \frac{\exp(iZ) - \exp(-iZ)}{2i} \right\}$$

$$- \frac{2iE}{\sqrt{p(x)}} \exp(L) \left\{ \frac{\exp(iZ) + \exp(-iZ)}{2} \right\}$$

$$\psi_I(x) = \frac{iE}{\sqrt{p(x)}} \left[ \frac{1}{4\exp(L)} - \exp(L) \right] \exp(iZ)$$

$$- \frac{iE}{\sqrt{p(x)}} \left[ \frac{1}{4\exp(L)} + \exp(L) \right] \exp(-iZ) \quad (19)$$

Desarrollando la integral  $Z$ , podemos expresar esta última ecuación en  $\psi_{inc}(x)$

$$k = \frac{p(x)}{\hbar} = \text{cte} \Rightarrow Z = \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4} = -k(x - x_1) - \frac{\pi}{4}$$

$$\psi_{inc}(x) = - \frac{iE}{\sqrt{p(x)}} \left( \frac{1}{4\exp(L)} + \exp(L) \right) \exp(-iZ) \quad (20)$$

Por tanto, la probabilidad transmisión de la partícula alfa, es aproximadamente



$$T = \left| \frac{\psi_{trans}}{\psi_{inc}} \right|^2 = \left| \frac{\frac{iE}{\sqrt{p(x)}}}{-\frac{iE}{\sqrt{p(x)}} \left( \frac{1}{4\exp(L)} + \exp(L) \right)} \right|^2$$

$$T = \frac{1}{\exp(2L) + \frac{1}{2} + \frac{1}{16\exp(2L)}} \approx \exp(-2L)$$

$$T = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[V-E]} dx\right) \quad (21)$$

En el interior del pozo de potencial, la partícula alfa oscila periódicamente y golpea la pared potencial. Si se asume que se mueve con velocidad  $v_0$ , entonces la frecuencia con que golpea la pared es  $v_0/2R$ . Por tanto, la multiplicación de la frecuencia con la probabilidad de escape será igual a la probabilidad de escape por unidad de tiempo de la partícula alfa, se expresa en la forma siguiente

$$\lambda = \frac{v_0}{2R} \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_R^{r_i} \sqrt{2m[V(r)-E]} dr\right) \quad (22)$$

Donde  $V(r)$  es la energía potencial como función de  $r$  y  $m$  la masa de la partícula del alfa. Esta última ecuación es muy útil; pues su uso permite calcular radios nucleares mediante la sustitución de los valores medios de  $\lambda$  y  $E$ .

### 2.1.7. Energía cinética alfa

En física nuclear, la emisión espontánea de una partícula  $\alpha$  se puede representar mediante el siguiente proceso



Si se asume que el núcleo padre,  $P$ , se encuentra en reposo. Entonces la energía inicial del sistema es solo la energía en reposo de  $P$

$$m_p c^2$$

El estado final se compone de  $D$  y  $He$ , cada uno de los cuales estará en movimiento. Por lo tanto, la energía total final es:

$$m_d c^2 + K_d + m_\alpha c^2 + K_\alpha$$

Donde  $K_D$  y  $K_\alpha$  representan las energías cinéticas de la partícula hija y de la partícula  $\alpha$ , respectivamente. Por lo tanto, en términos de conservación de la masa energía (Krane, 1987), tenemos

$$m_p c^2 = m_d c^2 + K_d + m_\alpha c^2 + K_\alpha \quad (24)$$

$$(m_p - m_d - m_\alpha) c^2 = K_d + K_\alpha$$

La cantidad en el lado izquierdo de esta última ecuación es la energía neta liberada en la desintegración, llamado el valor  $Q_\alpha$

$$Q_\alpha = (m_p - m_d - m_\alpha) c^2 \quad (25)$$

El valor  $Q_\alpha$  es también igual a la energía cinética total dado a los fragmentos de desintegración:

$$Q_\alpha = K_d + K_\alpha \quad (26)$$

Para partículas no relativistas, las energías cinéticas se pueden escribir como:

$$K_d = \frac{1}{2} m_d v_d^2$$
$$K_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \quad (27)$$

Donde  $v_d$  y  $v_\alpha$  representan las magnitudes de las velocidades de la hija y de la partícula  $\alpha$ .

Dado que el núcleo padre se desintegra desde el reposo, el núcleo hija y la partícula deben moverse necesariamente en direcciones opuestas para conservar el momento lineal, satisfaciendo

$$m_d v_d = m_\alpha v_\alpha$$
$$v_d = \frac{m_\alpha}{m_d} v_\alpha \quad (28)$$

Cuando la masa del núcleo hija es mucho mayor que la de la partícula  $\alpha$ , entonces,  $v_d \ll v_\alpha$ . Eliminemos  $v_d$  y escribamos expresiones para  $K_d$  y  $K_\alpha$  en términos del valor  $Q_\alpha$  (Das & Ferbel, 2005)

$$K_d + K_\alpha = \frac{1}{2} m_d v_d^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

$$\begin{aligned}
K_d + K_\alpha &= \frac{1}{2} m_d \left( \frac{m_\alpha}{m_d} v_\alpha \right)^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \\
&= \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \left( \frac{m_\alpha}{m_d} + 1 \right) \\
K_d + K_\alpha &= K_\alpha \left( \frac{m_\alpha}{m_d} + 1 \right) \tag{29}
\end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (26), esto puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
K_\alpha &= \frac{m_d}{m_\alpha + m_d} Q_\alpha \\
K_\alpha &= \frac{Q_\alpha}{1 + \frac{m_\alpha}{m_d}} \tag{30}
\end{aligned}$$

La energía cinética de la partícula  $\alpha$  emitida no puede ser negativa, es decir,  $K_\alpha \geq 0$ . En consecuencia, para que se produzca un decaimiento alfa, se debe liberar energía.

Para el caso de las energías de las partículas alfa asociadas al radón 222, este decae a polonio 218. De acuerdo a la ecuación (30), tenemos

$$K_\alpha = 5.5 \text{ MeV}$$

## 2.2. Teoría general de difusión de los gases en un medio

### 2.2.1. Difusión de los gases

La difusión es la dispersión de un gas al interior de otro gas, o de una zona de alta concentración a otra de baja concentración de algún componente del gas y se debe principalmente a movimientos moleculares aleatorios. La velocidad de difusión muestra la rapidez con la que el material puede difundirse y es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su masa molar (Ley de Graham).

En los gases, los procesos de difusión son rápidos ( $10\text{cm}/\text{min}$ ) mientras que son mucho más lentos en líquidos ( $0.05\text{cm}/\text{min}$ ) y en sólidos ( $0,00001\text{cm}/\text{min}$ ) (Cussler, 1997).

El primer modelo matemático de difusión fue establecido por Adolf Fick que desarrolló una ley en analogía al trabajo de Fourier (Fourier, 1822) para la difusión en una dimensión como se aprecia en su primera ley.

### 2.2.2. Primera ley de Fick

Esta primera ley puede ser enunciada de la siguiente manera: bajo la hipótesis de un estado estacionario el flujo de partículas en un proceso de difusión es proporcional al gradiente de concentración, de la forma

$$J(x, t) = -D \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \quad (31)$$

La constante de proporcionalidad  $D$  se denomina coeficiente de difusión y se expresa en metros cuadrados por segundo. El signo negativo de esta

expresión indica que la dirección de difusión es contraria al gradiente de la concentración.

Para dos o más dimensiones espaciales, podemos hacer uso del operador  $\nabla$ , la cual generaliza la primera derivada, obteniéndose

$$\mathbf{J}(x, t) = -D\nabla C(x, t) \quad (32)$$

Donde  $\mathbf{J}$  denota al vector de difusión.

### 2.2.3. Segunda ley de Fick

La ecuación central de este análisis es la ecuación de difusión, también llamada segunda ley de Fick que relaciona la velocidad del cambio de la concentración en un punto con la variación espacial de la concentración en ese punto:

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} \quad (33)$$

Es decir, predice cómo la difusión hace que la concentración cambie con el tiempo. Para el caso de difusión en más de una dimensión, la Segunda Ley de Fick se convierte en:

$$\frac{\partial C(r, t)}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C(y, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C(z, t)}{\partial z^2} \right) \quad (34)$$

Introduciendo el operador laplaciano, tenemos

$$\frac{\partial C(\vec{r}, t)}{\partial t} = D\nabla^2 C(\vec{r}, t) \quad (35)$$

La ecuación anterior es análoga a la ecuación del calor, donde en lugar de concentración  $C$ , se expresa en función de la temperatura  $T$ . La solución de esta ecuación diferencial parcial será la línea base para nuestro análisis.

## 2.3. Teoría de difusión aplicada al radón

### 2.3.1. Teoría de difusión del radón para exposiciones relativamente cortas

Se consideran exposiciones relativamente cortas a los tiempos menores al periodo de semidesintegración del radón 222,  $t_{1/2} = 3.83$  días.

Un objetivo de este trabajo es determinar cómo varía la concentración de radón con respecto a la altura en pozos cilíndricos diseñados para estudiar la exhalación de radón desde el suelo, ver figura 2.

Los pozos cilíndricos son tubos de PVC enterrados en el suelo a diferentes alturas, abiertos en la base y con tapa en la parte superior, permaneciendo cerrado durante los periodos de medición. Esto determina la geometría utilizada en este análisis.

Esto nos permite que la forma general, ecuación (36), de la ecuación de difusión para este estudio pueda ser considerada como un caso unidimensional:

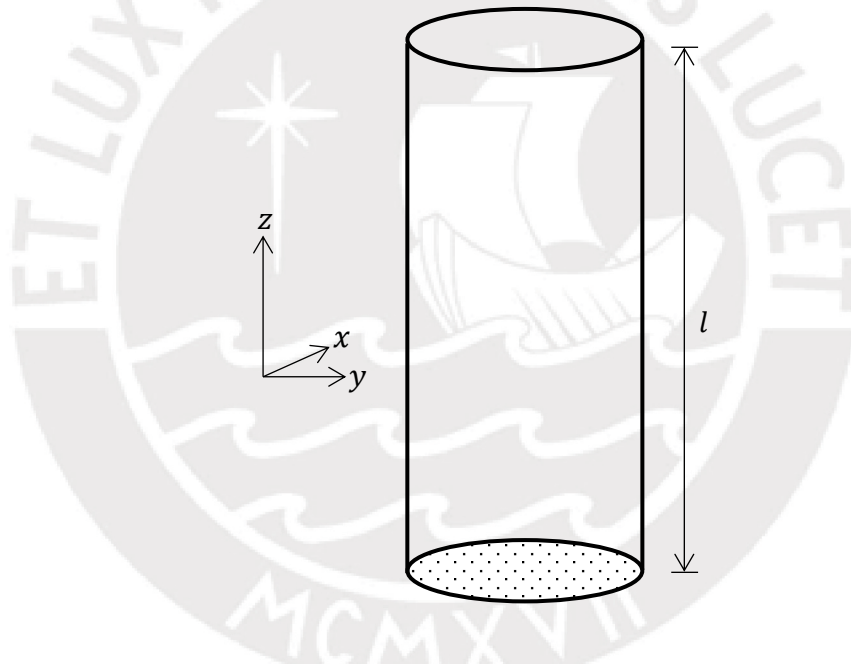
$$\frac{\partial C(\vec{r}, t)}{\partial t} = D\nabla^2 C(\vec{r}, t) - \lambda C(\vec{r}, t) \quad (36)$$

La difusión a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$  (sección transversal del tubo) puede ser ignorada y nos permite asumir que la concentración no cambia significativamente en estas direcciones a lo largo de la altura del pozo. El

ingreso del gas radón por exhalación del suelo entonces solo ocurre en la dirección del eje del pozo, eje  $z$ . Por tanto, se considera que la difusión ocurre principalmente a lo largo del eje  $z$ , y además como se sabe que el gas radón decae en el tiempo entonces la ecuación se transforma en:

$$\frac{\partial C(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(z, t)}{\partial z^2} - \lambda C(z, t) \quad (37)$$

Donde  $C$  [actividad/longitud] denota la concentración de radón en el aire;  $t$  es el tiempo;  $D$  [ $m^2/s$ ] es el coeficiente de difusión del radón;  $\lambda$  [ $s^{-1}$ ] es la constante de desintegración del radón.



**Figura 3. Geometría adoptada para las condiciones iniciales y de contorno para la ecuación de difusión.**

Para desarrollar la ecuación (37) se considera en la interfaz aire del pozo - tierra una concentración de radón  $C_0$  en el tiempo  $t$

$$C(z_0, t) = C_0 \quad (38)$$



La segunda condición, está relacionada con lo que sucede en el otro extremo del recipiente en  $z = l$  donde se supone que el radón no puede escapar (pozo con tapa). Por lo que el flujo de salida del gas radón es igual a cero:

$$\left. \frac{\partial C(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = 0 \quad (39)$$

Para resolver la ecuación de difusión con la condición inicial y de contorno para el caso de exposición a corto plazo del radón, se considera:

$$\frac{\partial C(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(z, t)}{\partial z^2} \quad (40)$$

Utilizando el método separación de variables

$$C(z, t) = Z(z)T(t) \quad (41)$$

$$\frac{\partial C(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial (Z(z)T(t))}{\partial t} = \frac{Z(z)\partial T(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 C(z, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 (Z(z)T(t))}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 Z(z)T(t)}{\partial z^2}$$

Sustituyendo y reordenando términos tenemos

$$\frac{Z(z)\partial T(t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 Z(z)T(t)}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{DT(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \quad (42)$$

Suponiendo que ambos lados de la ecuación son iguales a cierta constante  $-a^2$

$$\frac{1}{DT(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = -a^2$$

$$T(t) = C' e^{-a^2 Dt} \quad (43)$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -a^2$$

$$Z(z) = A \operatorname{sen} az + B \operatorname{cos} az \quad (44)$$

Por tanto, reemplazando (43) y (44) en (41) obtenemos

$$C(z, t) = (A \operatorname{sen} az + B \operatorname{cos} az) C' e^{-a^2 Dt} + C_1 z + C_2 \quad (45)$$

Los términos  $C_1 z$  y  $C_2$  pueden incluirse ya que estas desaparecen después de la segunda derivada en  $z$ . También se transforman a cero cuando la derivada está en  $t$ , esto es

$$\frac{\partial^2 C(z, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \left( (A \operatorname{sen} az + B \operatorname{cos} az) C' e^{-a^2 Dt} \right)}{\partial z^2} \quad (46)$$

$$\frac{\partial C(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial \left( (A \operatorname{sen} az + B \operatorname{cos} az) C' e^{-a^2 Dt} \right)}{\partial t} \quad (47)$$

Aplicando nuestra primera condición inicial en la interfaz  $z_0 = 0$

$$C(z_0, t) = C_0 = B C' e^{-a^2 Dt} + C_2 \quad (48)$$

Eliminando la dependencia del tiempo ( $B = 0$ ), podemos escribir

$$C_2 = C_0 \quad (49)$$

En este caso la solución (45) se convierte en

$$C(z, t) = C_0 + AC'e^{-a^2Dt} \text{sen } az + C_1z \quad (49)$$

Aplicando nuestra segunda condición frontera en  $z = l$

$$\left. \frac{\partial C(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = \left. \frac{\partial (C_0 + AC'e^{-a^2Dt} \text{sen } az + C_1z)}{\partial z} \right|_{z=l} = 0$$

$$aAC'e^{-a^2Dt} \cos al + C_1 = 0 \quad (50)$$

Esta expresión será verdadera siempre y cuando  $C_1 = 0$  y  $\cos al = 0$ . Por tanto

$$al = n\pi + \frac{\pi}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Entonces la solución es

$$C(z, t) = C_0 + AC'e^{-\frac{(2n+1)^2}{4l^2}\pi^2Dt} \text{sen} \frac{(2n + 1)\pi z}{2l} \quad (50)$$

En general podemos escribir la solución como la suma de todas las soluciones parciales, esto es

$$C(z, t) = C_0 + \sum_{n=0}^{\infty} C'_n e^{-\frac{(2n+1)^2}{4l^2}\pi^2Dt} \text{sen} \frac{(2n + 1)\pi z}{2l} \quad (51)$$

La ausencia de átomos de radón en el pozo en el momento inicial  $t = 0$ , da

$$0 = C_0 + \sum_{n=0}^{\infty} C'_n \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi z}{2l}$$

Donde la constante  $C'_n$  son desarrollos de Fourier de la función  $-C_0$

$$-C_0 = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi z}{2l}$$

Donde

$$C'_n = \frac{2}{l} \int_0^l -C_0 \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi z}{2l} dz \quad (52)$$

$$C'_n = -\frac{2C_0}{l} \left( \frac{2l}{(2n+1)\pi} \cos \frac{(2n+1)\pi l}{2l} + \frac{2l}{(2n+1)\pi} \cos 0 \right)$$

$$C'_n = -\frac{4C_0}{(2n+1)\pi} \quad (53)$$

Finalmente, reemplazando (53) en (51) se obtiene

$$C(z, t) = C_0 \left( 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} e^{-\frac{(2n+1)^2}{4l^2} \pi^2 D t} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi z}{2l} \right) \quad (54)$$

Este resultado ha sido obtenido por otros autores, la diferencia en este estudio es que se aplican las condiciones de frontera propias de la geometría de los pozos en estudio.

### 2.3.2. Teoría de difusión del radón para exposiciones relativamente largas

Se consideran exposiciones relativamente grandes a los tiempos mayores al periodo de semidesintegración del radón 222,  $t_{1/2} = 3.83$  días.

Las condiciones iniciales y de frontera son las mismas que para el caso de exposición a corto plazo. En este caso se tiene en cuenta la ecuación constante de desintegración, ecuación (37)

$$\frac{\partial C(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(z, t)}{\partial z^2} - \lambda C(z, t)$$

Planteando una solución del tipo

$$C(z, t) = u(z, t)e^{-\lambda t} \quad (55)$$

Derivando respecto al  $t$  y  $z$ , tenemos

$$\frac{\partial C(z, t)}{\partial t} = u(z, t)[- \lambda e^{-\lambda t}] + e^{-\lambda t} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \quad (56)$$

$$\frac{\partial C(z, t)}{\partial z} = e^{-\lambda t} \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2 C(z, t)}{\partial z^2} = e^{-\lambda t} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} \quad (57)$$

Reemplazando (56) y (57) en (37), nuestra ecuación tenemos

$$u(z, t)[- \lambda e^{-\lambda t}] + e^{-\lambda t} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = D e^{-\lambda t} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} - \lambda u(z, t)e^{-\lambda t}$$

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} \quad (58)$$

El resultado de la concentración del gas radón es

$$u(z, t) = C_0 \left( 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} e^{-\frac{(2n+1)^2}{4l^2} \pi^2 D t} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi z}{2l} \right) \quad (59)$$

Reemplazando (55) en (59) y dando forma los términos constantes de la exponencial

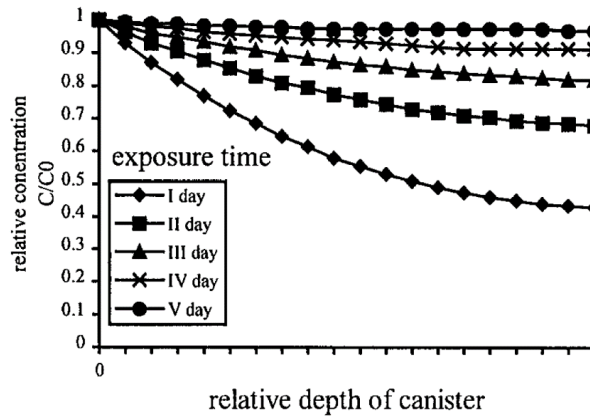
$$C(z, t) e^{\lambda t} = C_0 \left( 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} e^{-\frac{(2n+1)^2}{4l^2} \pi^2 D t} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi z}{2l} \right)$$

$$C(z, t) = C_0 \left( e^{-\lambda t} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} e^{-\left[\frac{(2n+1)^2}{4l^2} \pi^2 D + \lambda\right] t} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi z}{2l} \right) \quad (60)$$

Lo que da una distribución espacial y temporal de la concentración de radón para un tiempo de exposición mucho mayor al periodo de semidesintegración del Rn 222.

Donde  $C(z, t)$ : es la concentración de radón a una determinada altura,  $C_0$ : es la concentración de radón constante en el tiempo, a la máxima profundidad del pozo,  $\lambda$ : es la constante de decaimiento del radón,  $t$ : es el tiempo,  $D$ : es la constante de difusión,  $l$ : la altura del pozo y  $n$ : es un número entero de la serie.

En el trabajo de (Nikezić & Urošević, 1998), se describe el modelo de adsorción de radón usando carbón activado durante periodos de un día hasta completar cinco días. Durante esos periodos, el radón se difundió a través de los poros del carbón activado, es decir fue adsorbido en la superficie de los gránulos de carbón. Los resultados de la simulación del proceso se presentan en la *Figura 4*.



**Figura 4.** Distribución de la concentración de radón vs por altura relativa del recipiente del carbón activado.

La gráfica de la *Figura 4* muestra los resultados de la simulación, considerando que el carbón activado se encuentra en un recipiente expuesto a una concentración exterior de  $200 \text{ Bq/m}^3$  para diferentes tiempos de exposición. Por tanto, las curvas están dadas para tiempos fijos de 1, 2, 3, 4 y 5 días.

En cambio, en este trabajo de investigación, los resultados se darán para tiempos fijos. Y no se mide directamente la concentración del gas radón correspondiente a  $C(z, t)$  de la ecuación (60), sino se mide la densidad de partículas alfa emitidas por el radón 222 y su progenie usando la técnica de huellas nucleares y aplicando la metodología que se describe en el siguiente capítulo.

Conociendo la densidad de partículas alfa detectadas con el arreglo vertical de detectores que se describe en la metodología aplicada y usando un factor de calibración, se puede calcular en forma indirecta, la concentración del radón y su progenie.

## Capítulo 3: METODOLOGÍA

### 3.1. Diseño metodológico

Es una investigación aplicada, porque se utiliza leyes, principios y teorías para construir un modelo que relaciona las variables de estudio y nos permite procesar los datos experimentales mediante una técnica de simulación.

El método empleado en la investigación es el deductivo, dado que en el desarrollo del modelo de difusión se han utilizado teorías y modelos dejados por otros autores que tienen alguna relación con el tema. Y en una parte de la investigación, se aplica el método inductivo, debido a que se utilizan datos de tiempo y de densidad de huellas que correlacionados dan lugar a un modelo semiempírico que constituye un aporte del presente estudio, permitiendo así obtener nueva información; en este caso, las variaciones de la concentración de radón con las alturas del pozo.

Lo expuesto en el párrafo anterior tiene un matiz experimental debido a que en la modelación se utilizan datos obtenidos con la técnica de huellas nucleares obteniendo finalmente los resultados buscados.

### 3.2. Muestra

Nuestra muestra comprende cuatro pozos ubicados dentro del recinto de la estación meteorológica Hipólito Unanue, en los cuales se ha estudiado el proceso de exhalación del radón y progenie.



### 3.3. Detectores e instrumentos utilizados

#### 3.3.1. Polímero LR-115 tipo 2

El detector usado, LR-115 tipo 2, consta de una película delgada de nitrato de celulosa color rojo intenso depositada sobre una base de poliéster de 100  $\mu\text{m}$  de espesor. Solo un lado del detector corresponde a la película sensible. El grosor de la película sensible de este tipo es de 12  $\mu\text{m}$ . Estas películas son usadas principalmente en la detección de pequeñas cantidades de partículas ionizantes, principalmente partículas alfa o neutrones.

Cuando la película se expone y es procesada en las condiciones sugeridas por el fabricante, se puede observar cada partícula registrada, mostrándose como un punto brillante de luz que puede observarse fácilmente con un microscopio óptico, incluso si este se encuentra en medio de una gran área de película.

Además, tales huellas se distinguen fácilmente de los defectos superficiales en la superficie sensible como los causados por el polvo o arañazos producidos durante el manipuleo.

La saturación del detector está determinada por la capacidad de distinguir huellas individuales entre sí, es decir sin superponerse. Se estima una densidad de huellas máxima de 600 *huellas/mm*<sup>2</sup> con diámetros de 5 a 15  $\mu\text{m}$  para el LR-115 tipo 2 para no llegar a una densidad de saturación.

### 3.3.2. Sistema de grabado químico de los detectores

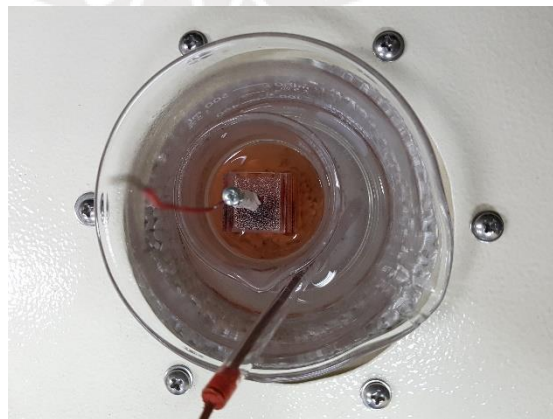
Para el grabado químico de los detectores, se usa un sistema termostático marca RELEX, el cual consta de vasos acondicionados para colocar los detectores al interior de la sustancia grabadora, en un baño María, permitiendo así el tratamiento químico necesario para el grabado de huellas. El procedimiento protocolar de laboratorio usado es el siguiente:

- El sistema de baño es un sistema abierto, se normaliza la temperatura del ambiente donde se encuentra el sistema a 25 °C, teniendo puertas y ventanas cerradas, evitando así la existencia de factores externos que perturben la temperatura durante el proceso de grabado.
- Se vierte 200 ml de agua bidestilada en un vaso de vidrio PYREX® de 500 ml dentro del cual se posa un vaso PYREX® pequeño de 150 ml con 110 ml de la solución de NaOH a 2.5N.
- Luego de haber colocado ambos vasos en el sistema, se prende el sistema a una potencia del 40 %, se coloca el termómetro dentro del vaso de vidrio con agua, con la finalidad de programar el sistema a la temperatura de 60 °C. Esto nos lleva a esperar aproximadamente 1 hora para que la temperatura se estabilice a  $60 \pm 0,5$  °C.



**Figura 5.** Sistema termostático estabilizado a 60°C

- Luego de haber preparado y codificado los detectores, estos se colocan en la solución del sistema de baño María. Después de 90 min de grabado, los detectores son retirados y se apaga el sistema de calentamiento.
- Los detectores retirados son colocados en envases de plástico Corning de 600 ml con agua de caño termalizada a 40 °C para poder realizar el proceso de neutralización de la solución alcalina sobre los detectores y eliminar productos que puedan quedar adheridos en estos, durante el proceso de grabado. Este proceso dura aproximadamente 20 min.



**Figura 6.** Vista interior del sistema de baño María

- Luego, los detectores se enjuagan repetidamente con agua destilada en otros envases plásticos Corning de 600 ml, eliminando de esta manera residuos e impurezas que hayan quedado desde el primer enjuague. Este proceso dura aproximadamente 30 min.
- Posteriormente se dejan secar los detectores por un periodo de 24 horas.

### 3.3.3. Lectura de los detectores en un microscopio óptico LEICA modelo DM LM

El microscopio óptico LEICA modelo DM LM es un microscopio moderno de iluminación halógena de 100W con alcances de 5X, 10X y 20X diseñado para tareas de investigación en el ámbito de las ciencias de los materiales que facilita al investigador contabilizar y adoptar criterios de aceptación de las huellas nucleares visibles desde un monitor de una PC usando un software adecuado.



**Figura 7.** Microscopio óptico LEICA modelo DM LM

Para el enfoque del microscopio en un alcance de 10X, en el cual se basa esta investigación, las dimensiones del campo de visión a través de la cámara es de  $1.19 \times 0.891 \text{ mm}^2$ . Mediante una plantilla determinada a través parámetros de realce del software como brillo, contraste, niveles de exposición, saturación y otros filtros; se homogeniza las imágenes de los detectores en la pantalla.

Con este procedimiento descrito se contabilizó las huellas en cada detector.

### **3.4. Sistema de detectores colocados al interior de los pozos**

Las medidas realizadas en el procedimiento experimental fueron hechas dentro de las instalaciones de la estación meteorológica Hipólito Unanue de la Pontificia Universidad Católica del Perú, localizada en el distrito de San Miguel - Lima Perú.

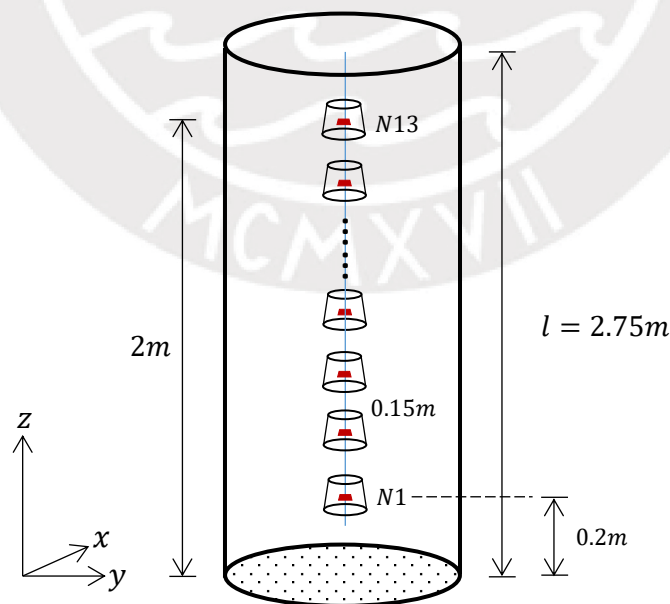
El suelo de San Miguel presenta afloramientos rocosos, estratos de grava que conforman los conos de deyección de los ríos Rímac y Chillón y los estratos de grava coluvial-eluvial de los pies de las laderas. Este suelo tiene un comportamiento rígido con periodos de vibración natural. El perfil estratigráfico de terreno corresponde a un estrato superior de un suelo limoso, arcilla de baja a alta plasticidad semirrígida o relleno con cascotes de gravas y otros, donde por debajo de estos estratos se encuentra el conglomerado del río Rímac.

En cuanto al clima, San Miguel es cálido en verano y templado con mucha humedad y muy escasas precipitaciones pluviales en el invierno, que definen la carencia absoluta de lluvias, un alto grado de humedad que llega hasta un 98 %. En verano la temperatura llega hasta los 28 grados y en invierno desciende hasta los 13 grados. Fuente CISMID y municipalidad de San Miguel.

En este trabajo, se utilizan cuatro pozos cilíndricos cavados en el suelo con alturas similares de 2.25, 2.20, 2.36 y 2.35m, diseñados especialmente para el estudio de la exhalación del radón y progenie desde el suelo en la estación EMHU- PUCP. Los pozos se identifican en adelante como pozos 1, 2, 3 y 4.

Los pozos 1 y 2 se encuentran instalados en una zona seca de la estación (sin ningún riego periódico), los pozos 3 y 4 se encuentran instalados en una zona húmeda de la estación (con riegos periódicos con HR del orden del 98% de acuerdo a las mediciones).

Al interior de estos pozos de tierra, se colocaron tubos de PVC con la base abierta de longitudes 2.65, 2.60, 2.76 y 2.75m respectivamente, cada tubo tiene una tapa en el extremo exterior. En cada pozo, se instalaron los detectores en un sistema de arreglo vertical, cada arreglo consta de 12 a 13 detectores aproximadamente, a fin de medir la exhalación de radón en puntos espaciados equidistantes de 0.15m entre cada detector y desde 0.2m del suelo, se mide la distribución vertical de una cantidad proporcional a la concentración de radón y progenie, como se observa en la *Figura 8*.



**Figura 8.** Detalle del sistema de arreglo vertical de detectores

El sistema de arreglo vertical de detectores permaneció al interior de cada pozo, durante 31 días, en los meses de febrero a marzo (13/02 al 17/03) y de agosto a setiembre (26/08 al 25/09) del 2017.

### 3.5. Procesamiento de los datos

Los datos obtenidos de los detectores procesados según el protocolo correspondiente, son las densidades de huellas. Se utiliza para su procesamiento, técnicas computacionales y estadísticas, las cuales permiten construir el modelo experimental basado en la data procesada. Se obtiene gráficos y se aplica estadística de correlación exponencial.

El análisis de la información se realiza a través de la lectura de estos gráficos y de las ecuaciones de regresión exponencial obtenidas con sus respectivos parámetros.

El cálculo de las densidades de huellas de las partículas alfa provenientes del radón y su progenie se calcula mediante la expresión:

$$\rho = \frac{\sum N}{n \cdot A} \quad (61)$$

Donde  $\sum N$  es la suma total de los números de huellas en los campos ópticos de visión,  $n$  la cantidad de campos ópticos analizados,  $A$  el área del campo óptico en  $mm^2$ .

La ecuación que permite transformar la densidad de huellas en concentración de radón en  $Bq/m^3$  es:

$$C = \frac{\rho}{k \cdot t} \quad (62)$$

Donde  $\rho$  es la densidad de huellas,  $k$  es el factor de calibración y  $t$  el tiempo de exposición del detector en horas.

El factor de calibración utilizado en el presente estudio es  $(0.00412 \pm 0,000595) \frac{\text{huellas/mm}^2}{\text{kBq/m}^3}$  el cual ha sido determinado para condiciones similares y validado para esos tipos de pozos por el grupo de investigación GITHUNU-PUCP.

Las incertidumbres asociadas, a las densidades de huellas y concentraciones de radón y progenie, se determinaron mediante el cálculo de la incertidumbre estándar combinada, donde para el caso de la densidad de huellas es:

$$u_{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \cdot u_P\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P_f} \cdot u_{P_f}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial A} \cdot u_A\right)^2} \quad (63)$$

$$u_P = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} ; u_{P_f} = \frac{\sigma_f}{\sqrt{N_f}}$$

Donde:

$\sigma$ : es la desviación estándar del promedio de huellas.

$\sigma_f$ : es la desviación estándar del promedio de huellas de fondo.

$N$ : es la cantidad de campos analizados del detector expuesto.

$N_f$ : es la cantidad de campos analizados del detector testigo.

$u_P$ : es la incertidumbre estándar del promedio de huellas.

$\frac{\partial \rho}{\partial P}$ : es la derivada parcial de la densidad de trazas con respecto al promedio de huellas.

$u_{P_f}$ : es la incertidumbre estándar del promedio de huellas de fondo.

$\frac{\partial \rho}{\partial P_f}$ : es la derivada parcial de la densidad de trazas con respecto al promedio de huellas de fondo.



$u_A$ : es la incertidumbre estándar del área de campo de visión

$\frac{\partial \rho}{\partial A}$ : derivada parcial de la densidad de trazas con respecto al del área de campo de visión.

Y para el cálculo de la incertidumbre de la concentración de radón y progenie, se usa la expresión:

$$u_c = \sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial \rho} \cdot u_\rho\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial k} \cdot u_k\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial t} \cdot u_t\right)^2} \quad (64)$$

Donde

$u_\rho$ : es la incertidumbre estándar de la densidad de huellas.

$\frac{\partial C}{\partial \rho}$ : es la derivada parcial de la concentración con respecto a la densidad de huellas.

$u_k$ : es la incertidumbre estándar del factor de calibración.

$\frac{\partial C}{\partial k}$ : es la derivada parcial de la concentración con respecto al factor de calibración.

$u_t$ : es la incertidumbre estándar del tiempo.

$\frac{\partial C}{\partial t}$ : es la derivada parcial de la concentración con respecto al tiempo.

## Capítulo 4: RESULTADOS

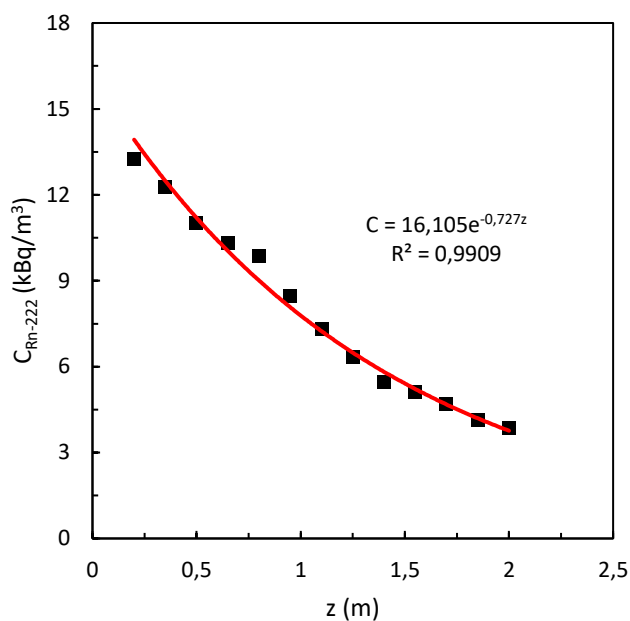
### 4.1. Densidad de huellas y concentraciones de Rn 222 y su progenie

Usando las expresiones (61) y (62) se determina las densidades de huellas de partículas alfa y concentraciones del radón y su progenie. Los datos se presentan en las siguientes tablas.

#### 4.1.1. Densidad de huellas y concentración de Rn 222 y su progenie correspondiente al periodo de verano 2017 (31 días desde el 13/02 al 17/03).

**Tabla 5.** Densidad de huellas y concentración de Rn 222 y progenie en el pozo 1 – EMHU - Periodo verano 2017.

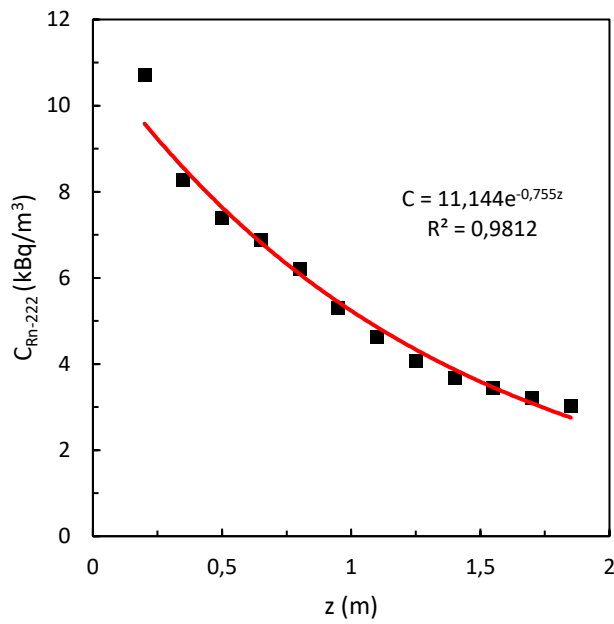
Altura [m±0.05]	Densidad [Huellas/mm <sup>2</sup> ]	Concentración [kBq/m <sup>3</sup> ]
0,20	40,65 ± 1,49	13,26 ± 1,98
0,35	37,63 ± 1,07	12,28 ± 1,81
0,50	33,76 ± 2,80	11,02 ± 1,83
0,65	31,60 ± 1,56	10,31 ± 1,57
0,80	30,27 ± 0,49	9,88 ± 1,43
0,95	25,94 ± 0,53	8,46 ± 1,23
1,10	22,45 ± 0,22	7,32 ± 1,06
1,25	19,43 ± 0,20	6,34 ± 0,92
1,40	16,79 ± 0,70	5,48 ± 0,82
1,55	15,66 ± 0,21	5,11 ± 0,74
1,70	14,34 ± 0,34	4,68 ± 0,68
1,85	12,73 ± 0,13	4,15 ± 0,60
2,00	11,79 ± 0,47	3,85 ± 0,58



**Grafica 1.** Concentración de Rn 222 y su progenie vs la altura del pozo 1 – EMHU - Periodo verano 2017.

**Tabla 6.** Densidad de huellas y concentración de Rn 222 y progenie en el pozo 2 – EMHU - Periodo verano 2017.

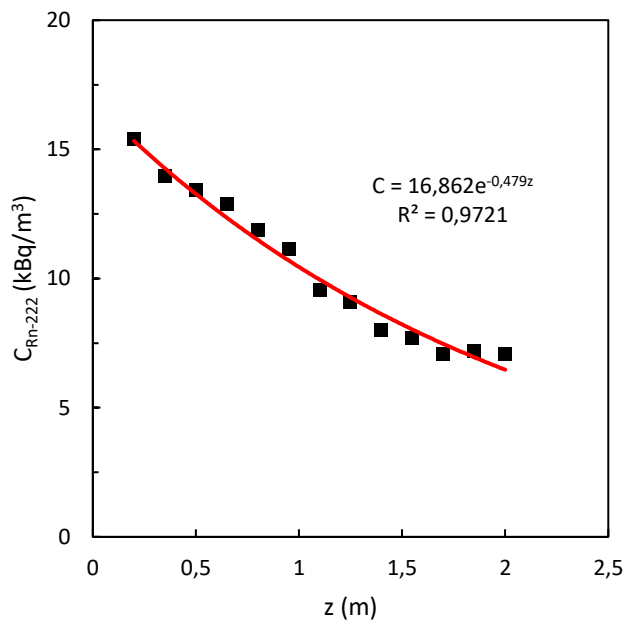
Altura [m±0.05]	Densidad [Huellas/mm²]	Concentración [kBq/m³]
0,20	32,82 ± 1,81	10,71 ± 1,65
0,35	25,37 ± 1,92	8,28 ± 1,35
0,50	22,64 ± 1,73	7,38 ± 1,21
0,65	21,13 ± 0,46	6,89 ± 1,01
0,80	19,05 ± 0,77	6,22 ± 0,93
0,95	16,22 ± 0,19	5,29 ± 0,77
1,10	14,15 ± 0,48	4,62 ± 0,68
1,25	12,45 ± 0,26	4,06 ± 0,59
1,40	11,22 ± 0,31	3,66 ± 0,54
1,55	10,56 ± 0,32	3,45 ± 0,51
1,70	9,81 ± 0,21	3,20 ± 0,47
1,85	9,24 ± 0,16	3,02 ± 0,44



**Grafica 2.** Concentración de Rn 222 y su progenie vs la altura del pozo 2 – EMHU - Periodo verano 2017.

**Tabla 7.** Densidad de huellas y concentración de Rn 222 y progenie en el pozo 3 – EMHU - Periodo verano 2017.

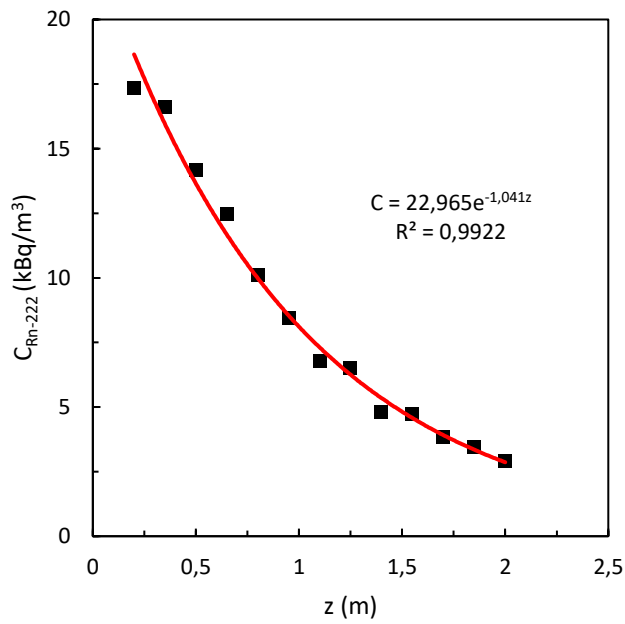
Altura [m±0.05]	Densidad [Huellas/mm²]	Concentración [kBq/m³]
0,20	47,16 ± 1,71	15,38 ± 2,29
0,35	42,82 ± 1,66	13,97 ± 2,09
0,50	41,12 ± 0,80	13,42 ± 1,95
0,65	39,52 ± 0,20	12,89 ± 1,86
0,80	36,41 ± 0,35	11,88 ± 1,72
0,95	34,14 ± 1,12	11,14 ± 1,65
1,10	29,24 ± 1,74	9,54 ± 1,49
1,25	27,82 ± 0,75	9,08 ± 1,33
1,40	24,52 ± 0,70	8,00 ± 1,18
1,55	23,58 ± 0,28	7,69 ± 1,11
1,70	21,69 ± 0,24	7,08 ± 1,02
1,85	22,07 ± 0,58	7,20 ± 1,06
2,00	21,69 ± 0,85	7,08 ± 1,06



**Grafica 3.** Concentración de Rn 222 y su progenie vs la altura del pozo 3 – EMHU - Periodo verano 2017.

**Tabla 8.** Densidad de huellas y concentración de Rn 222 y progenie en el pozo 4 – EMHU - Periodo verano 2017.

Altura [m±0.05]	Densidad [Huellas/mm <sup>2</sup> ]	Concentración [kBq/m <sup>3</sup> ]
0,20	53,19 ± 6,65	17,35 ± 3,31
0,35	50,93 ± 1,18	16,61 ± 2,43
0,50	43,48 ± 1,86	14,18 ± 2,14
0,65	38,20 ± 1,88	12,46 ± 1,90
0,80	30,93 ± 3,38	10,09 ± 1,83
0,95	25,94 ± 0,71	8,46 ± 1,24
1,10	20,75 ± 1,25	6,77 ± 1,06
1,25	19,99 ± 0,23	6,52 ± 0,94
1,40	14,71 ± 0,29	4,80 ± 0,70
1,55	14,52 ± 0,21	4,74 ± 0,69
1,70	11,79 ± 0,25	3,85 ± 0,56
1,85	10,56 ± 0,18	3,45 ± 0,50
2,00	8,96 ± 0,15	2,92 ± 0,42

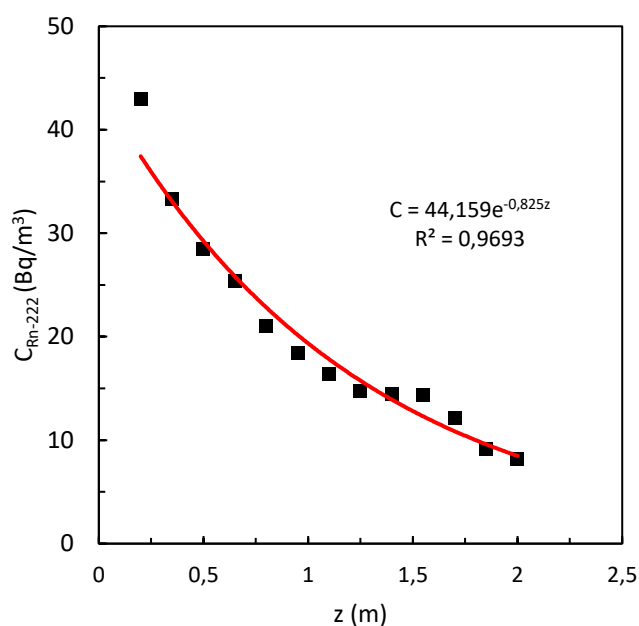


**Grafica 4.** Concentración de Rn 222 y su progenie vs la altura del pozo 4 – EMHU - Periodo verano 2017

4.1.2. Densidades y concentraciones de huellas correspondientes al periodo de invierno 2017 (31 días desde el 26/08 al 25/09).

**Tabla 9.** Densidad de huellas y concentración de Rn 222 y progenie en el pozo 1 – EMHU - Periodo invierno 2017.

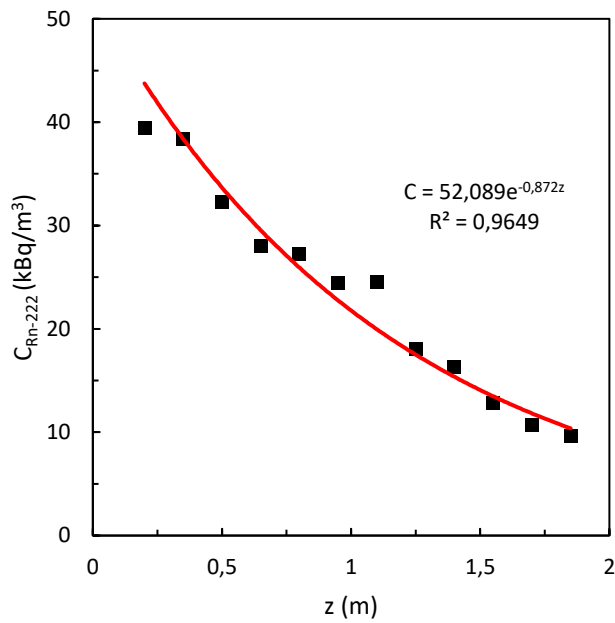
Altura [m±0.05]	Densidad [Huellas/mm²]	Concentración [kBq/ m³]
0,20	131,85 ± 3,18	43,01 ± 6,30
0,35	102,14 ± 3,46	33,32 ± 4,94
0,50	87,15 ± 19,18	28,43 ± 7,48
0,65	77,81 ± 16,27	25,38 ± 6,45
0,80	64,42 ± 12,74	21,01 ± 5,14
0,95	56,40 ± 34,29	18,40 ± 11,50
1,10	50,36 ± 1,81	16,43 ± 2,44
1,25	45,36 ± 3,15	14,80 ± 2,37
1,40	44,23 ± 1,39	14,43 ± 2,13
1,55	44,04 ± 7,05	14,37 ± 3,10
1,70	37,25 ± 2,92	12,15 ± 2,00
1,85	28,01 ± 3,85	9,14 ± 1,82
2,00	24,99 ± 6,80	8,15 ± 2,51



**Grafica 5.** Concentración de Rn 222 y su progenie vs la altura del pozo 1 – EMHU - Periodo invierno 2017.

**Tabla 10.** Densidad de huellas y concentración de Rn 222 y progenie en el pozo 2 – EMHU - Periodo invierno 2017.

Altura [m±0.05]	Densidad [Huellas/mm²]	Concentración [kBq/m³]
0,20	120,82 ± 13,14	39,41 ± 7,12
0,35	117,70 ± 1,72	38,40 ± 5,57
0,50	98,94 ± 33,14	32,28 ± 11,77
0,65	85,92 ± 12,65	28,03 ± 5,78
0,80	83,56 ± 8,77	27,26 ± 4,86
0,95	75,07 ± 13,64	24,49 ± 5,68
1,10	75,26 ± 3,26	24,55 ± 3,70
1,25	55,36 ± 3,97	18,06 ± 2,91
1,40	49,99 ± 2,87	16,31 ± 2,53
1,55	39,42 ± 4,20	12,86 ± 2,31
1,70	32,92 ± 1,88	10,74 ± 1,67
1,85	29,33 ± 1,75	9,57 ± 1,49

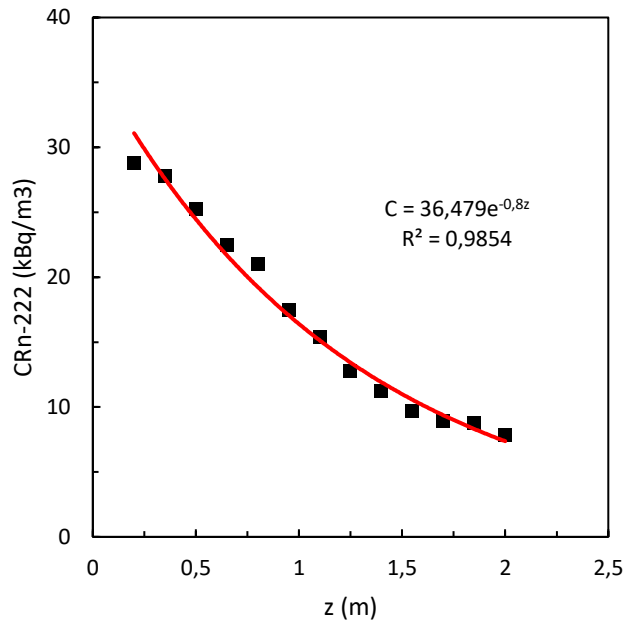


**Grafica 6.** Concentración de Rn 222 y su progenie vs la altura del pozo 2 – EMHU - Periodo invierno 2017.

**Tabla 11.** Densidad de huellas y concentración de Rn 222 y progenie en el pozo 3 – EMHU - Periodo invierno 2017.

Altura [m±0.05]	Densidad [Huellas/mm <sup>2</sup> ]	Concentración [kBq/m <sup>3</sup> ]
0,20	88,37 ± 11,26	28,83 ± 5,55
0,35	85,17 ± 10,79	27,78 ± 5,34
0,50	77,43 ± 4,38	25,26 ± 3,92
0,65	68,94 ± 2,28	22,49 ± 3,33
0,80	64,32 ± 6,19	20,98 ± 3,64
0,95	53,66 ± 7,86	17,51 ± 3,60
1,10	47,06 ± 10,71	15,35 ± 4,14
1,25	39,05 ± 2,75	12,74 ± 2,05
1,40	34,52 ± 1,58	11,26 ± 1,71
1,55	29,80 ± 1,31	9,72 ± 1,47
1,70	27,26 ± 0,90	8,89 ± 1,32
1,85	26,88 ± 0,28	8,77 ± 1,27
2,00	24,05 ± 0,88	7,85 ± 1,17

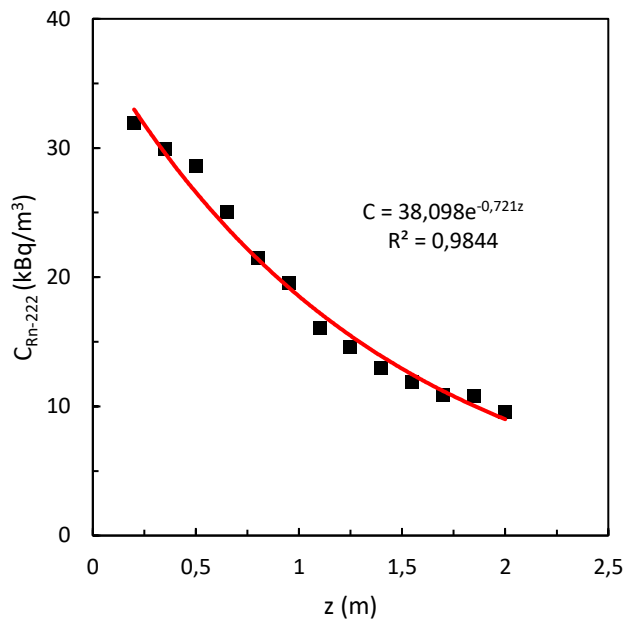




**Grafica 7.** Concentración de Rn 222 y su progenie vs la altura del pozo 3 – EMHU - Periodo invierno 2017.

**Tabla 12.** Densidad de huellas y concentración de Rn 222 y progenie en el pozo 4 – EMHU - Periodo invierno 2017.

Altura [m±0.05]	Densidad [Huellas/mm <sup>2</sup> ]	Concentración [kBq/m <sup>3</sup> ]
0,20	97,90 ± 3,87	31,94 ± 4,78
0,35	91,77 ± 15,50	29,94 ± 6,65
0,50	87,62 ± 4,12	28,58 ± 4,34
0,65	76,68 ± 6,93	25,01 ± 4,26
0,80	65,83 ± 4,95	21,48 ± 3,50
0,95	59,98 ± 6,57	19,57 ± 3,54
1,10	49,33 ± 2,75	16,09 ± 2,49
1,25	44,80 ± 1,17	14,61 ± 2,14
1,40	39,80 ± 0,88	12,98 ± 1,90
1,55	36,50 ± 1,17	11,91 ± 1,76
1,70	33,48 ± 0,65	10,92 ± 1,59
1,85	33,20 ± 0,23	10,83 ± 1,57
2,00	29,33 ± 0,64	9,57 ± 1,40



**Grafica 8.** Concentración de Rn 222 y su progenie vs la altura del pozo 4 – EMHU - Periodo invierno 2017

#### 4.2. Comparación de las concentraciones de radón y su progenie en cada pozo, en verano e invierno 2017

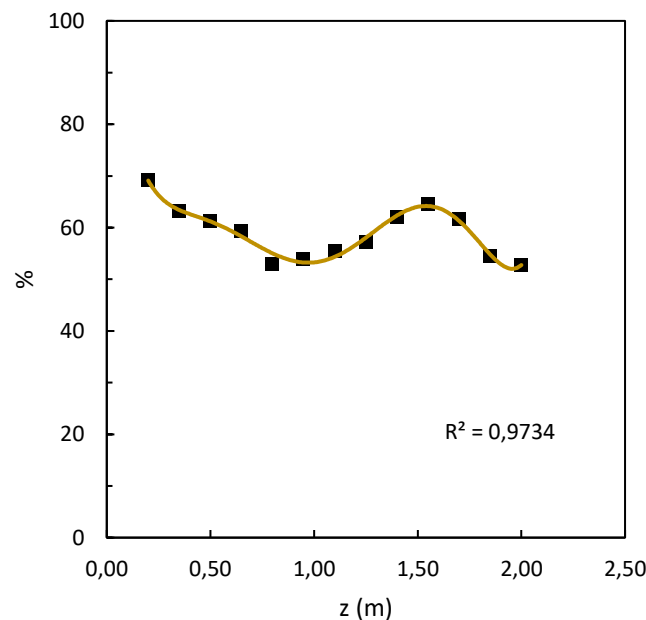
Se comparan las variaciones de las concentraciones de radón y su progenie en cada pozo en los periodos estudiados:

$$\% = \left| \frac{C_{invierno} - C_{verano}}{C_{invierno}} \right| \times 100$$

Esta comparación se realiza para determinar los efectos de la humedad en el proceso de la exhalación de radón desde el suelo. Tomando en cuenta que los pozos 1 y 2 están en una zona relativamente seca (zona sin césped y sin riego) y los pozos 3 y 4 están en una zona siempre húmeda (zona con césped y riego periódico).

**Tabla 13.** Variación en porcentaje de las concentraciones de Rn 222 y progenie en el pozo 1, durante los periodos verano e invierno 2017.

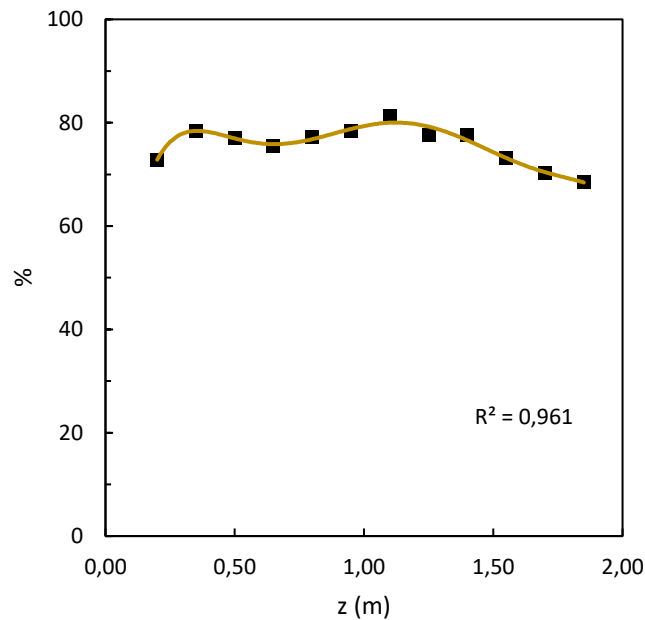
Altura [m±0.05]	$C_{\text{verano}}$ [kBq/m <sup>3</sup> ]	$C_{\text{invierno}}$ [kBq/m <sup>3</sup> ]	Variación de C [%]
0,20	13,26	43,01	69
0,35	12,28	33,32	63
0,50	11,02	28,43	61
0,65	10,31	25,38	59
0,80	9,88	21,01	53
0,95	8,46	18,40	54
1,10	7,32	16,43	55
1,25	6,34	14,80	57
1,40	5,48	14,43	62
1,55	5,11	14,37	64
1,70	4,68	12,15	62
1,85	4,15	9,14	55
2,00	3,85	8,15	53



**Grafica 9.** Variación en porcentajes de las concentraciones de Rn 222 y su progenie en el pozo 1 durante los periodos de verano e invierno del año 2017.

**Tabla 14.** Variación en porcentaje de las concentraciones de Rn 222 y progenie en el pozo 2, durante los periodos verano e invierno 2017.

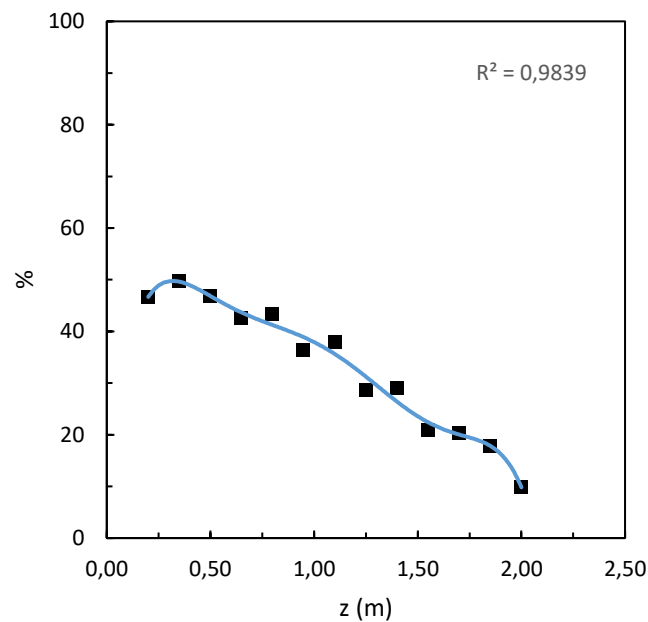
Altura [m±0.05]	$C_{\text{verano}}$ [kBq/m <sup>3</sup> ]	$C_{\text{invierno}}$ [kBq/m <sup>3</sup> ]	Variación de C [%]
0,20	10,71	39,41	73
0,35	8,28	38,40	78
0,50	7,38	32,28	77
0,65	6,89	28,03	75
0,80	6,22	27,26	77
0,95	5,29	24,49	78
1,10	4,62	24,55	81
1,25	4,06	18,06	78
1,40	3,66	16,31	78
1,55	3,45	12,86	73
1,70	3,20	10,74	70
1,85	3,02	9,57	68



**Grafica 10.** Variación en porcentajes de las concentraciones de Rn 222 y su progenie en el pozo 2 durante los periodos de verano e invierno del año 2017.

**Tabla 15.** Variación en porcentaje de las concentraciones de Rn 222 y progenie en el pozo 3, durante los periodos verano e invierno 2017.

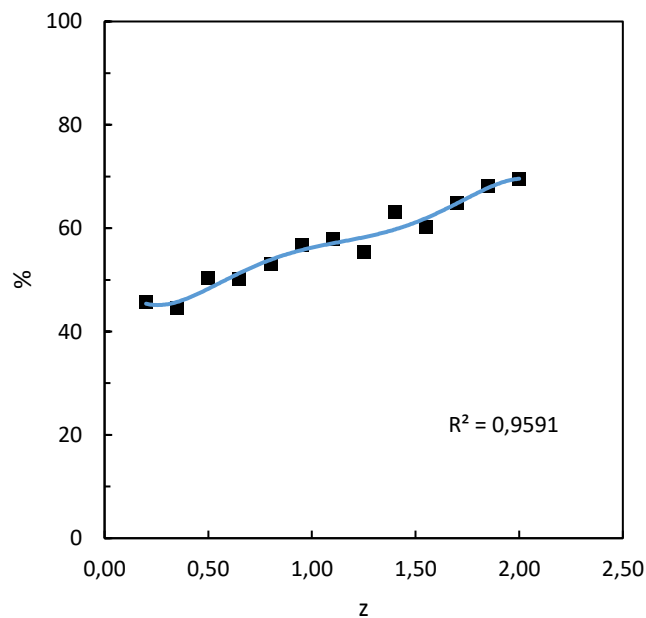
Altura [m±0.05]	$C_{\text{verano}}$ [kBq/m <sup>3</sup> ]	$C_{\text{invierno}}$ [kBq/m <sup>3</sup> ]	Variación de C [%]
0,20	15,38	28,83	47
0,35	13,97	27,78	50
0,50	13,42	25,26	47
0,65	12,89	22,49	43
0,80	11,88	20,98	43
0,95	11,14	17,51	36
1,10	9,54	15,35	38
1,25	9,08	12,74	29
1,40	8,00	11,26	29
1,55	7,69	9,72	21
1,70	7,08	8,89	20
1,85	7,20	8,77	18
2,00	7,08	7,85	10



**Grafica 11.** Variación en porcentajes de las concentraciones de Rn 222 y su progenie en el pozo 3 durante los periodos de verano e invierno del año 2017.

**Tabla 16.** Variación en porcentaje de las concentraciones de Rn 222 y progenie en el pozo 4, durante los periodos verano e invierno 2017.

Altura [m±0.05]	$C_{\text{verano}}$ [kBq/m <sup>3</sup> ]	$C_{\text{invierno}}$ [kBq/m <sup>3</sup> ]	Variación de C [%]
0,20	17,35	31,94	46
0,35	16,61	29,94	45
0,50	14,18	28,58	50
0,65	12,46	25,01	50
0,80	10,09	21,48	53
0,95	8,46	19,57	57
1,10	6,77	16,09	58
1,25	6,52	14,61	55
1,40	4,80	12,98	63
1,55	4,74	11,91	60
1,70	3,85	10,92	65
1,85	3,45	10,83	68
2,00	2,92	9,57	69



**Grafica 12.** Variación en porcentajes de las concentraciones de Rn 222 y su progenie en el pozo 4 durante los periodos de verano e invierno del año 2017.

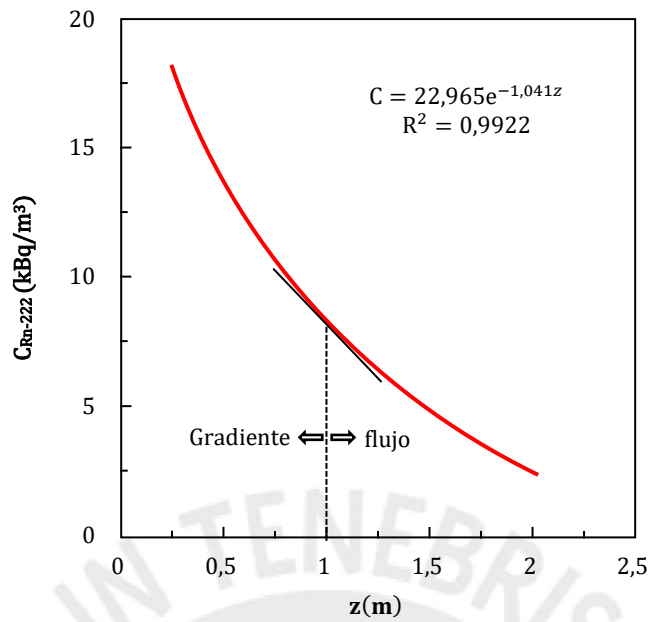
## Capítulo 5: DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 5.1. Discusión

A todas las gráficas de concentraciones de radón y progenie en función de la altura del pozo, obtenidas en los cuatro casos, se aplicó un modelo de ajuste empírico, ecuación exponencial. Los ajustes de los datos son bastante buenos, su coeficiente de regresión exponencial es en promedio  $R^2 = 0.98$ , esto indica una incertidumbre de solo 1%. Lo cual prueba que el modelo de ajuste elegido es correcto y responde muy bien a la descripción del comportamiento del radón y su progenie en función de la altura de los pozos donde han sido medidos.

Por otro lado, si se comparan estas curvas exponenciales, con la solución del modelo teórico, ecuación 60, se encuentra que no coinciden con este resultado puesto que en ese caso se trata de una dependencia temporal y espacial, y lo que se ha encontrado experimentalmente, es una variación espacial con la altura, debido a que se trabajó para un tiempo fijo.

Cuando se grafica el valor de la concentración en función de la altura para un tiempo fijo de 31 días en cada pozo, resulta que la variación de la concentración del radón y su progenie varía exponencialmente con la altura. Donde las rectas tangentes en cualquier punto de la curva obtenida representan los gradientes de la concentración en esos puntos.



**Grafica 13.** Variación de las concentraciones de Rn 222 y su progenie

Se observa también que estas rectas tangentes tienen pendiente negativa, por lo que el vector gradiente apunta hacia la izquierda, hacia el punto de mayor concentración. Por tanto, el vector flujo difusivo,  $J$ , moviéndose hacia la zona de menor concentración es proporcional al diferencial de concentración en ese punto y tiene sentido contrario al gradiente, esto es:

$$J = -D\nabla C$$

Como se explica teóricamente en el capítulo 2, esto corresponde a la primera ley de Fick.

Las curvas experimentales obtenidas para las concentraciones de radón y su progenie en función de la altura en cada pozo, son también exponenciales como las curvas correspondientes a la simulación de la adsorción de radón usando carbón activado en función de las alturas del recipiente (*Figura 4*) (Nikezić & Urošević, 1998).



Las concentraciones de radón y progenie medidas en verano e invierno son mayores a  $10 \text{ kBq/m}^3$ , llegando a valores límites del orden de  $43 \text{ kBq/m}^3$  en la zona seca y de  $32 \text{ kBq/m}^3$  en los pozos húmedos.

La comparación de las variaciones en porcentaje de la concentración de Rn 222 y su progenie en función de la altura de los pozos 1 y 2 (zona seca - EMHU) en los periodos verano e invierno del año 2017 siguen los comportamientos esperados donde las concentraciones de radón y su progenie son mayores en invierno (Duggal, Rani, & Mehra, 2014).

Por otro lado, la comparación de las variaciones en porcentaje de la concentración de Rn 222 y su progenie en función de la altura de los pozos 3 y 4 (zona húmeda - EMHU) en los periodos de verano e invierno del año 2017 no siguen los mismos comportamientos del caso anterior donde las concentraciones de radón y su progenie son mayores en invierno. En este caso, los porcentajes en función de la altura de los pozos siguen un comportamiento distinto en cada pozo.

Las diferencias en los comportamientos de la exhalación de radón y su progenie en los pozos 1 y 2 (secos 68% HR) y los pozos 3 y 4 (húmedos 98% HR) probablemente se debe a la diferencia en el porcentaje de la humedad; las otras variables climáticas de presión y temperatura fueron las mismas en todos los pozos en cada periodo.

## 5.2. Conclusiones

- Se ha cumplido con el objetivo principal, planteando una metodología adecuada para determinar la concentración de radón y progenie, proveniente del suelo.
- La técnica de huellas nucleares y el arreglo vertical de detectores LR 115 tipo 2, han permitido medir las densidades de huellas y, por consiguiente, las concentraciones de radón y su progenie, en función de las alturas en los pozos estudiados.
- La curva experimental obtenida con los datos del radón y progenie siguen un comportamiento exponencial, comportamiento que se repite en todos los pozos y en las diferentes estaciones.
- Las fluctuaciones en las mediciones del radón y su progenie, en invierno y verano, es posible que se deban al hecho de que los pozos no son herméticos y abiertos a la exhalación del radón y su progenie desde el suelo.
- La humedad del suelo que produce saturación de humedad en el aire encerrado en el pozo, es un parámetro influyente en el comportamiento de la exhalación y difusión del radón.

### 5.3. Recomendaciones

- La misma metodología de estudio puede ser aplicada para obtener curvas de concentraciones en función del tiempo que pueden ser comparadas con las obtenidas en simulaciones.
- Sería recomendable hacer estudios comparativos en zonas secas y húmedas características de la ciudad de Lima.



## Capítulo 6: FUENTES DE INFORMACIÓN

### 5.1. Referencias

- Acosta, V., Cowan, C., & Graham, B. (1983). *Curso de física moderna*. México D. F.: HARLA, S.A. de C.V.
- Burcham, W. E., & Jobes, M. (1995). *Nuclear and particle physics*. London, United Kingdom: Pearson Education.
- Cussler, E. L. (1997). *CussDiffusion, mass transfer in fluids systems* (2 ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Das, A., & Ferbel, T. (2005). *Introduction to nuclear and particle physics* (2 ed.). Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Duggal, V., Rani, A., & Mehra, R. (2014). A study of seasonal variations of radon levels in different types of dwellings in Sri Ganganagar district, Rajasthan. *Journal of Radiation Research and Applied Sciences*, 7(2), 201-206.
- Gascoyne, M., & Wuschke, D. (1997). Gas migration through water-saturated, fractured rock: results of a gas injection test. *Journal of Hydrology*, 196(1-4), 76-98.
- Hecht, K. T. (2000). *Quantum mechanics*. United States of America: Springer.
- IAEA. (2015, 09 15). *Nuclear Data Services*. Retrieved from [www.nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html](http://www.nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html)
- Kamal, A. (2014). *Nuclear physics*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Malley, M. (2011). *Radioactivity, a history of a mysterious*. United States of America: Oxford University Press, Inc.

Meyerhof, W. E. (1967). *Elements of nuclear physics*. United States of America: McGraw-Hill.

National Research Council. (1999). *Health Effects of Exposure to Radon: BEIR VI*. Washington: National Academy Press.

NCRP. (1987). *NCRP Report No. 93: Ionizing Radiation Exposure of the Population of the United States*. Bethesda: National Council of Radiological Protection and Measurements.

Nikezić, D., & Urošević, V. (1998). A theoretical study of radon measurement with activated charcoal. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 406(3), 486-498.

Segre, E. (1965). *Nuclei and particles*. New York: W.A. Benjamin, Inc.

Semat, H., & Albright, J. (1972). *Introduction to atomic and Nuclear physics* (5 ed.). London: Chapman and Hall.

## 5.2. Bibliografija

Beiser, A. (2003). *Concepts of modern physics* (6 ed.). United States: McGraw Hill.

Durrani, S. A., & Bukll, R. (1987). *Solid state nuclear track detection principles, methods and applications*. Great Britain: Pergamon Press.

- Gascoyne, M., & Wuschke, D. M. (1997). Gas migration through water-saturated, fractured rock: results of a gas injection test. *Journal of Hydrology*, 196(1-4), 76-98.
- Jha, D. (2004). *Radioactivity and radioactive decay*. New Delhi: Discovery Publishing House.
- Kaplan, I. (1977). *Nuclear physics* (2 ed.). United States: Addison Wesley Publishing Company.
- Krane, K. (1987). *Introductory nuclear physics*. Singapore: John Wiley & Sons.
- Migdal, A., & Krainov, V. (1969). *Approximation methods in quantum mechanics*. New York: W. A. Benjamin, Inc.
- Karnakov, B., & Krainov, V. (1972). *WKB approximation in atomic physics*. Berlin: Springer.
- Liboff, R. (1980). *Introductory quantum mechanics*. United States of America: Addison-Wesley Publishing Company.
- Razavy, M. (2003). *Quantum theory of tunneling*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Sokolov, A. A., Loskutov, Y. M., & Temov, I. V. (1966). *Quantum mechanics*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Vallee, O., & Soares, M. (2004). *Airy functions and applications in physics*. London: World Scientific Publishing Company.
- Zettili, N. (2001). *Quantum mechanics: concepts and applications*. Great Britain, England: John Wiley & Sons, Ltd.

Zhang, J. (1999). *Theory and application of quantum molecular dynamics*. Singapore: World Scientific Pub Co Inc.

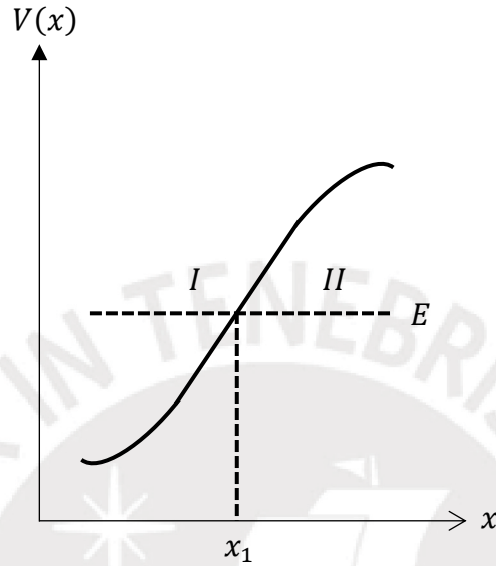
### 5.3. Fuentes electrónicas

IAEA. (2017, 09 15). *Nuclear Data Services*. Retrieved from <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>



## APÉNDICE

### Ecuaciones de conexión



**Figura 1.** Potencial en la vecindad a  $x_1$

La solución en la región *I* (región clásicamente accesible) tiene la forma

$$\psi_I = \frac{A}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx\right) + \frac{B}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx\right), \quad x < x_1 \quad (65)$$

En la región *II*, la onda transmitida tiene solo un componente de momento, de modo que dentro de la aproximación WKB, podemos escribir

$$\psi_{II} = \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x)| dx\right), \quad x > x_1 \quad (66)$$

Escribiendo la ecuación de Schrödinger en la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \quad (67)$$



$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \quad (68)$$

Si consideremos la ecuación (67) en una región pequeña a la vecindad de  $x_1$ , podemos expandir la energía potencial en esa región en una serie de potencias

$$V(x) = V(x_1) + \frac{\partial V(x_1)}{\partial x} (x - x_1) + \dots \quad (69)$$

De la *Figura 9*, podemos escribir

$$V(x_1) = E, \quad F_{x_1} = \frac{\partial V(x_1)}{\partial x} \quad (70)$$

Por tanto, reemplazando (70) en (69) tenemos

$$V(x) = V_1(x) \approx E + F_{x_1} (x - x_1) \quad (71)$$

Reescribiendo nuestra ecuación para vecindades próximas a  $x_1$

$$\frac{d^2 \psi(x - x_1)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - E - F_{x_1} (x - x_1)] \psi(x - x_1) = 0$$

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} F_{x_1} (x - x_1) \right] \psi(x - x_1) = 0 \quad (72)$$

$$\varphi(z) = \psi(x - x_1) \quad (73)$$

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} - \frac{2m}{\hbar^2} F_{x_1} z \right] \varphi(z) = 0 \quad (74)$$

Haciendo

$$\alpha = \left( \frac{2m F_{x_1}}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (75)$$

Podemos representar la ecuación (74) como

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \alpha^3(x - x_1) \right] \varphi(z) = 0 \quad (76)$$

Donde  $\alpha$  puede ser absorbido por la variable independiente mediante la definición

$$z = \alpha(x - x_1) \quad (77)$$

Utilizando la regla de la cadena, podemos escribir la segunda derivada respecto a  $x$  como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \frac{dz}{dx} \frac{d}{dz} = \alpha \frac{d}{dz} \\ \frac{d^2}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \alpha \frac{d}{dz} \right) = \frac{dz}{dx} \frac{d}{dz} \left( \alpha \frac{d}{dz} \right) = \alpha^2 \frac{d^2}{dz^2} \end{aligned} \quad (78)$$

Reemplazando (78) en (76) llegamos a la ecuación diferencial de Airy

$$\left[ \alpha^2 \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^3(x - x_1) \right] \varphi(z) = 0$$

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} - \alpha(x - x_1) \right] \varphi(z) = 0$$

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} - z \right] \varphi(z) = 0 \quad (79)$$

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} - z \right] \begin{Bmatrix} Ai(z) \\ Bi(z) \end{Bmatrix} = 0$$

Donde la solución puede ser escrita como una combinación lineal de las funciones de Airy

$$\varphi(z) = aA_i(z) + bB_i(z) \quad (80)$$

Estas funciones tienen expansiones asintóticas en los límites de  $z \gg 0$  ( $x \gg x_1$ ), ver función asintótica Ayri

$$A_i(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \quad (81)$$

$$B_i(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \quad (82)$$

Y para  $z \ll 0$  ( $x \ll x_1$ )

$$A_i(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-z)^{-1/4} \sin\left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \quad (83)$$

$$B_i(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-z)^{-1/4} \cos\left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \quad (84)$$

En la región clásicamente accesible  $I$  ( $x \ll x_1$ ), la solución puede ser escrita en términos de número de onda como

$$\psi_I = \frac{A}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(i \int_x^{x_1} k(x) dx\right) + \frac{B}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(-i \int_x^{x_1} k(x) dx\right), \quad x < x_1 \quad (85)$$

$$k(x) = \frac{p(x)}{\hbar} \quad (86)$$

En la vecindad de  $x_1$  de (71), obtenemos

$$p^2 = 2m(E - V_1) \simeq -2mF_{x_1}(x - x_1) \quad (87)$$

Y de las ecuaciones (75) y (77)

$$(x - x_1) = \frac{z}{(2mF_{x_1})^{1/3}} \hbar^{2/3} \quad (88)$$

Por tanto, reemplazando (88) en (87)

$$p^2 = -2mF_{x_1} \frac{z}{(2mF_{x_1})^{1/3}} \hbar^{2/3} = -(2mF_{x_1} \hbar)^{2/3} z \quad (89)$$

$$\begin{aligned} -2mF_{x_1} dx &= -(2mF_{x_1} \hbar)^{2/3} dz \\ dx &= (2mF_{x_1})^{-1/3} \hbar^{2/3} dz \end{aligned} \quad (90)$$

Por otra parte, a la izquierda de  $x_1$

$$p^2 = \hbar^2 k^2 \quad (91)$$

Igualando las ecuaciones (89) y (91)

$$\begin{aligned} \hbar^2 k^2 &= -(2mF_{x_1} \hbar)^{2/3} z \\ \hbar k &= (2mF_{x_1} \hbar)^{1/3} iz^{1/2} \end{aligned}$$

$$k = (2mF_{x_1})^{1/3} \hbar^{-2/3} iz^{1/2} \quad (92)$$

Podemos escribir la integral como

$$\int_x^{x_1} k dx = \int_0^z \left[ (2mF_{x_2})^{1/3} \hbar^{-2/3} iz^{1/2} \right] \left[ (2mF_{x_1})^{-1/3} \hbar^{2/3} dz \right]$$

$$\int_x^{x_1} k dx = \int_0^z iz^{1/2} dz = \frac{2}{3} iz^{3/2} = \frac{2}{3} (-z)^{3/2} \quad (93)$$

De la ecuación (92) podemos reescribir  $k$  como

$$k = \left( \frac{2mF_{x_1}}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}} iz^{1/2} = i\alpha z^{1/2} = i\alpha [\alpha(x - x_1)]^{1/2} = i\alpha^{3/2} (x - x_1)^{1/2}$$

$$k = i\alpha^{3/2} (x - x_1)^{1/2} \quad (94)$$

Por tanto, reemplazando las ecuaciones (94) y (93) en la ecuación (85) nuestra función de onda puede escribirse como

$$\psi_I(x) = \frac{A}{\sqrt{i\alpha^{3/2}(x - x_1)^{1/2}}} \exp\left[\frac{2i}{3} (-z)^{3/2}\right] + \frac{B}{\sqrt{i\alpha^{3/2}(x - x_1)^{1/2}}} \exp\left[-\frac{2i}{3} (-z)^{3/2}\right]$$

$$\psi_I(x) = \frac{A}{[-\alpha^3(x - x_1)]^{1/4}} \exp\left(\frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2}\right)$$

$$+ \frac{B}{[-\alpha^3(x - x_1)]^{1/4}} \exp\left(-\frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2}\right)$$

$$\psi_I(x) = \frac{1}{[-\alpha^3(x - x_1)]^{1/4}} \{A \exp\left(\frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2}\right)$$

$$+ B \exp\left(-\frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2}\right)\} \quad (95)$$

Por otra parte, reemplazando (83) y (84) en la ecuación (80) la solución asintótica es expresada como

$$\varphi(z) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} [-\alpha(x - x_1)]^{-1/4} \sin\left[\frac{2}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]$$

$$+ \frac{b}{\sqrt{\pi}} [-\alpha(x - x_1)]^{-1/4} \cos \left[ \frac{2}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \quad (96)$$

Para  $b = 0$

$$\varphi(z) \cong \frac{a}{\sqrt{\pi} [-\alpha(x - x_1)]^{1/4}} \sin \left[ \frac{2}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \quad (97)$$

Utilizando la fórmula de Euler y dando forma tenemos

$$\begin{aligned} \sin \left[ \frac{2}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] &= \frac{1}{2i} \left[ \exp \left( \frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} + \frac{i\pi}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. - \exp \left( -\frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} - \frac{i\pi}{4} \right) \right] \\ \sin \left[ \frac{2}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] &= \frac{1}{2i} \left[ \exp \left( \frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} \right) \exp \left( \frac{i\pi}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. - \exp \left( -\frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} \right) \exp \left( -\frac{i\pi}{4} \right) \right] \\ \varphi(z) &\cong \frac{a}{\sqrt{\pi} [-\alpha(x - x_1)]^{1/4}} \frac{1}{2i} \left[ \exp \left( \frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} \right) \exp \left( \frac{i\pi}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. - \exp \left( -\frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} \right) \exp \left( -\frac{i\pi}{4} \right) \right] \quad (98) \end{aligned}$$

Estableciendo comparaciones entre la ecuación (95) y (98), podemos escribir

$$\frac{A}{\alpha^{3/4} [-(x - x_1)]^{1/4}} = \frac{a}{\sqrt{\pi} \alpha^{1/4} [-(x - x_1)]^{1/4}} \frac{1}{2i} \exp \left( \frac{i\pi}{4} \right)$$

$$\frac{A}{\alpha^{3/4}} = \frac{a}{2i\sqrt{\pi}\alpha^{1/4}} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$$

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha}} = \frac{a}{2i\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \quad (99)$$

$$\frac{B}{\alpha^{3/4}} = -\frac{a}{2i\sqrt{\pi}\alpha^{1/4}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)$$

$$\frac{B}{\sqrt{\alpha}} = -\frac{a}{2i\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \quad (100)$$

En la región clásicamente prohibida II ( $x \gg x_1$ ), la solución puede escribir en la forma

$$\psi_{II} = \frac{D}{\sqrt{|k(x)|}} \exp\left(-\int_{x_1}^x |k(x)| dx\right) \quad (101)$$

A la derecha de  $x_1$

$$p^2 = -\hbar^2 k^2 \quad (102)$$

Igualando las ecuaciones (89) y (102) podemos escribir

$$\hbar^2 k^2 = (2mF_{x_1} \hbar)^{2/3} z$$

$$\hbar k = (2mF_{x_1} \hbar)^{1/3} z^{1/2}$$

$$k = (2mF_{x_1})^{1/3} \hbar^{-2/3} z^{1/2}$$

$$|k| = (2mF_{x_1})^{1/3} \hbar^{-2/3} z^{1/2} \quad (103)$$

Por tanto, es desarrollo de la integral de la ecuación (101) es

$$\int_{x_1}^x |k| dx = \int_0^z [(2mF_{x_1})^{1/3} \hbar^{-2/3} z^{1/2}] [(2mF_{x_1})^{-1/3} \hbar^{2/3} dz]$$

$$\int_{x_1}^x |k| dx = \int_0^z z^{1/2} dz = \frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3} (z)^{3/2} \quad (104)$$

Reemplazando la ecuación (77) en (103), podemos expresar  $|k|$  como

$$|k| = \left( \frac{2mF_{x_1}}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}} z^{1/2} = \alpha z^{1/2} = \alpha [\alpha(x - x_1)]^{1/2} = \alpha^{3/2} (x - x_1)^{1/2}$$

$$|k| = \alpha^{3/2} (x - x_1)^{1/2} \quad (105)$$

Por tanto, podemos expresar nuestra función de onda como

$$\psi_{II} = \frac{D}{\sqrt{\alpha^{3/2} (x - x_1)^{1/2}}} \exp \left[ -\frac{2}{3} (z)^{3/2} \right]$$

$$\psi_{II} = \frac{D}{\alpha^{3/4} (x - x_1)^{1/4}} \exp \left( -\frac{2}{3} [\alpha(x - x_1)]^{3/2} \right) \quad (106)$$

En los puntos de inflexión

$$\varphi(z) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp \left( -\frac{2}{3} z^{3/2} \right) + \frac{b}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp \left( \frac{2}{3} z^{3/2} \right) \quad (107)$$

Reemplazando la ecuación (77) en (107)

$$\varphi(z) = \frac{a}{2\sqrt{\pi} [\alpha(x - x_1)]^{1/4}} \exp \left( -\frac{2}{3} [\alpha(x - x_1)]^{3/2} \right)$$



$$+ \frac{b}{\sqrt{\pi}[\alpha(x-x_1)]^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}[\alpha(x-x_1)]^{3/2}\right) \quad (108)$$

Para  $b = 0$

$$\varphi(z) \cong \frac{a}{2\sqrt{\pi}[\alpha(x-x_1)]^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}[\alpha(x-x_1)]^{3/2}\right) \quad (109)$$

Al igual que en el caso anterior, en el punto de inflexión, las Ecuaciones (107) y (109) deben ser iguales. Esto se garantizará si

$$\frac{D}{\alpha^{3/4}(x-x_1)^{1/4}} = \frac{a}{2\sqrt{\pi}\alpha^{1/4}[(x-x_1)]^{1/4}}$$

$$\frac{D}{\alpha^{3/4}} = \frac{a}{2\sqrt{\pi}\alpha^{1/4}}$$

$$a = \frac{2\sqrt{\pi}\alpha^{1/4}}{\alpha^{3/4}} D = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} D \quad (110)$$

Por tanto, de (99), (100) y (110) tenemos

$$A = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) a = \left[ \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \right] \left[ \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} D \right]$$

$$A = \frac{1}{i} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) D = -i \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) D \quad (111)$$

$$B = -\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) a = \left[ -\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \right] \left[ \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} D \right]$$

$$B = -\frac{1}{i} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) D = i \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) D \quad (112)$$

Reemplazando las ecuaciones (111) y (112) en la ecuación (65)

$$\psi_I = \frac{-i}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx\right) \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) D + \frac{i}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx\right) \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) D$$

$$\psi_I = \frac{-iD}{\sqrt{p(x)}} \exp\left[i\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{iD}{\sqrt{p(x)}} \exp\left[-i\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\psi_I = \frac{D}{\sqrt{p(x)}} \left\{ -i \exp\left[i\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4}\right)\right] + i \exp\left[-i\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4}\right)\right] \right\}$$

$$\psi_I = \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \left\{ \frac{\exp\left[i\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4}\right)\right] - \exp\left[-i\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4}\right)\right]}{2i} \right\}$$

$$\psi_I = \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (113)$$

Utilizando propiedades trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx\right) \cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx\right) \sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx\right) = \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

En la ecuación (113) para  $x < x_1$

$$\psi_I = \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4}\right) \quad (114)$$

Mostrando la ecuación (66), para  $x > x_1$

$$\psi_{II} = \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x)| dx\right)$$

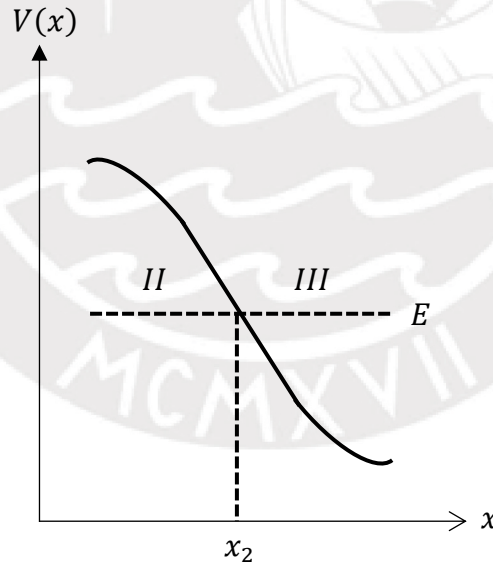
Por tanto, a la derecha del punto de inflexión,  $x = x_1$ , la solución exponencial decreciente se conecta a la solución oscilatoria según

$$\frac{2}{\sqrt{p(x)}} \cos\left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4}\right] \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx\right] \quad (115)$$

Mientras que la solución exponencial creciente conecta a una oscilatoria de acuerdo a

$$\frac{1}{\sqrt{p(x)}} \sin\left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4}\right] \leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx\right] \quad (116)$$

Haciendo un análisis similar para  $x_2$ , tenemos



**Figura 10.** Potencial en la vecindad a  $x_2$

A la izquierda del punto de inflexión (Fig. 10),  $x = x_2$ , la solución exponencial creciente conecta en una solución oscilatoria según

$$\frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p| dx \right] \leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{p(x)}} \cos \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx - \frac{\pi}{4} \right] \quad (117)$$

Mientras que una solución exponencial decreciente conecta a una solución oscilatoria según

$$-\frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p| dx \right] \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \text{sen} \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx - \frac{\pi}{4} \right] \quad (118)$$

Las ecuaciones (115) y (117) significan que los exponenciales crecientes o decrecientes han de empalmarse con funciones sinusoidales de fase y amplitud dadas al otro lado de la barrera de potencial.



## Función asintótica de Ayri

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

$$y(x) = \int_{\Gamma}^N f(z)e^{xz} dz$$

$$y'(x) = \int_{\Gamma}^{\Gamma} f(z)ze^{xz} dz, \quad y''(x) = \int_{\Gamma}^{\Gamma} f(z)z^2e^{xz} dz$$

$$y''(x) - xy(x) = \int_{\Gamma}^n f(z)z^2e^{xz} dz - \int_{\Gamma}^n xf(z)e^{xz} dz = 0$$

$$u = xf(z), \quad dv = e^{xz} dz$$

$$du = f'(z), \quad v = \int_{\Gamma}^N e^{xz} dz = \frac{1}{x} e^{xz} \Big|_{\Gamma}$$

$$y''(x) - xy(x) = \int_{\Gamma}^N z^2 f(z)e^{xz} dz - f(z)e^{xz} \Big|_{\Gamma} + \int_{\Gamma}^N f'(z)e^{xz} dz$$

$$f(z)e^{xz} \Big|_{\Gamma} = 0$$

$$\int_{\Gamma}^n [z^2 f(z) + f'(z)]e^{xz} dz = 0$$

$$z^2 f(z) + f'(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(z) = ce^{-z^3/3}$$

$$\Rightarrow f(z)e^{xz} \Big|_{\Gamma} = ce^{-z^3/3} e^{xz} \Big|_{\Gamma} = 0$$

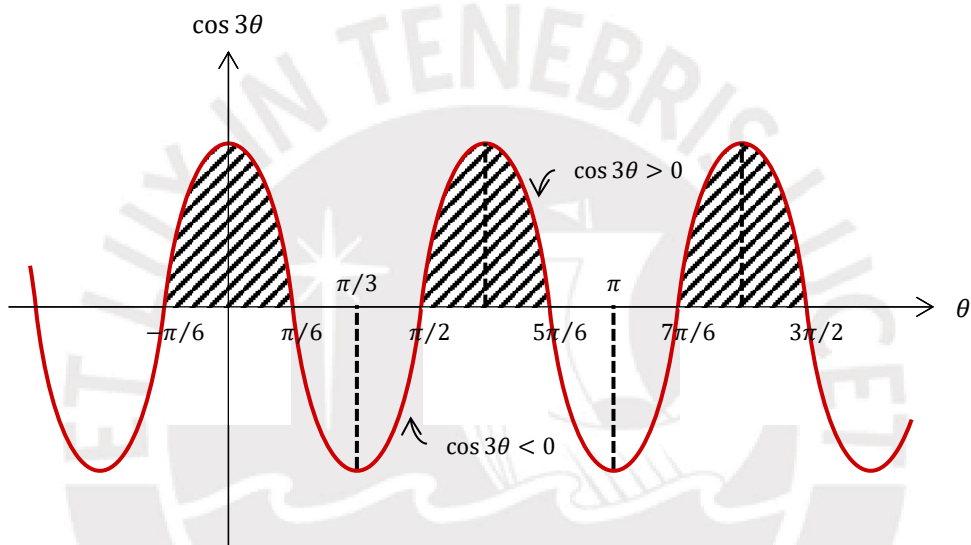
$$f(z) = 0 \text{ si } \operatorname{Re}(z^3) > 0$$

$$z = r e^{i\theta}$$

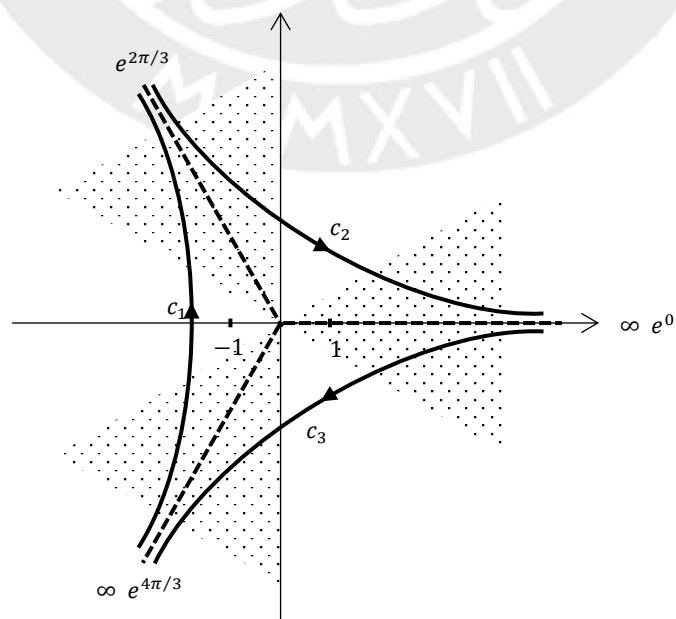
$$z^3 = r^3 e^{i3\theta} = r^3 [\cos(3\theta) + i \operatorname{sen}(3\theta)]$$

$$\operatorname{Re}(z^3) = r^3 \cos(3\theta)$$

$$\operatorname{Re}(z^3) > 0 \rightarrow r^3 \cos(3\theta) > 0$$



$$\theta \in \langle -\pi/6, \pi/6 \rangle \cup \langle \pi/2, 5\pi/6 \rangle \cup \langle 7\pi/6, 3\pi/2 \rangle$$



$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_n}^N e^{-\frac{z^3}{3} + xz} dz ; n = 1, 2, 3$$

$$f_1(z) = A_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1}^N e^{-\frac{z^3}{3} + xz} dz$$

$$x = v^2, v > 0, z = v\xi$$

$$A_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1}^N e^{-\frac{(v\xi)^3}{3} + v^3\xi} v d\xi = \frac{v}{2\pi i} \int_{c_1}^N e^{v^3(\xi - \xi^3/3)} d\xi$$

$$A_i(z) = \frac{v}{2\pi i} \int_{c_1}^1 e^{v^3(z - z^3/3)} dz$$

$$h(z) = z - z^3/3$$

$$h'(z) = 1 - z^2 = 0 \rightarrow z = z_0 = \pm 1$$

Considerando  $z_0 = -1$

$$h(-1) = -1 - \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{2}{3} \rightarrow \beta = \text{Im } h(z) = \text{Im } h(-1) = \text{Im} \left( -\frac{2}{3} \right) = 0 = \beta_0$$

Con  $z = u + iv$

$$h(z) = u + iv - (u + iv)^3/3$$

$$h(z) = u + iv - \frac{1}{3} [u^3 + 3u^2(iv) + 3u(iv)^2 + (iv)^3]$$

$$h(z) = \frac{1}{3} u [3v^2 - u^2 + 3] + i \left[ \frac{1}{3} v (v^2 - 3u^2 + 3) \right]$$

$$\text{Im}[h(z)] = \beta(u, v) = \frac{1}{3}v(v^2 - 3u^2 + 3) = 0$$

$$v = 0 \quad \vee \quad (v^2 - 3u^2 + 3) = 0$$

$$\text{Re}[h(z)] = \alpha(u, v) = \frac{1}{3}u[3v^2 - u^2 + 3]$$

$$\text{Caso: } v = 0 \rightarrow \alpha(u, 0) = u - \frac{u^3}{3}$$

$$\alpha = \alpha(-1, 0) = -\frac{2}{3} = \alpha_0 \quad ; \quad \alpha = \alpha(1, 0) = \frac{2}{3} > \alpha_0$$

$v = 0$  es el steepest ascennt panth

$$\text{Caso: } v^2 - 3u^2 + 3 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{3(u^2 - 1)} \quad , \quad u < 0$$

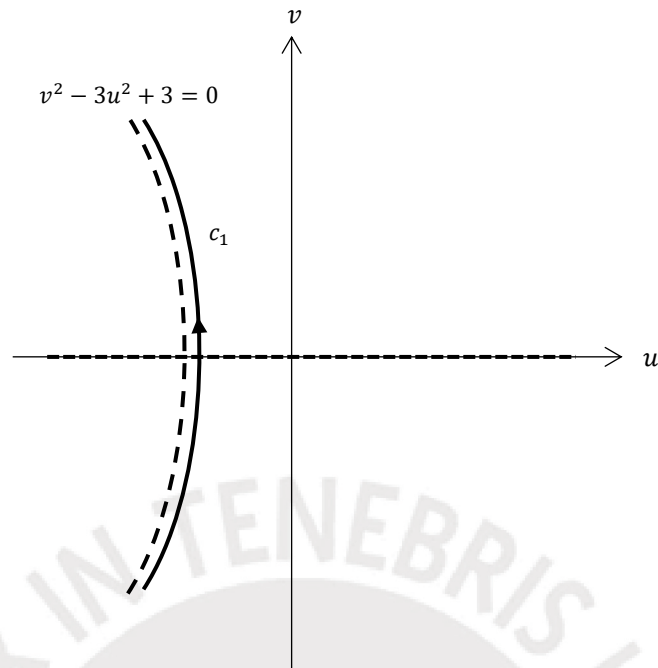
$$\alpha(u, v) = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{v^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(3v^2 - 1 - \frac{v^2}{3} + 3\right) = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{v^2}{6} + \dots\right) \left(\frac{8v^2}{3} + 2\right)$$

Cerca de  $z = -1$  ,  $u = -1$  y  $v \rightarrow 0$

$$\alpha = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{18}v^2 + \dots\right) \left(\frac{8}{3}v^2 + 2\right) = -\frac{8}{9}v^2 - \frac{4}{27}v^4 - \frac{2}{3} - \frac{1}{9}v^2 = -\frac{2}{3} - v^2 + \dots < -\frac{2}{3} = \alpha$$

$v = \sqrt{3(u^2 - 1)}$  es el steepest descent





$$h(z) - h(-1) = \tau^2, \quad h(z) = z - z^3/3$$

$$h(z) = h(-1) - \tau^2$$

$$h(-1) + h'(-1)(z - (-1)) + \frac{1}{2}h''(-1)(z - (-1))^2 + 0(z - (-1))^3 = h(-1) - \tau^2$$

$$(z + 1)^2 = -\tau^2 + \dots \Rightarrow z + 1 = \pm i\tau + \dots$$

$$z = -1 + i\tau + o(s^2)$$

$$A_i(v^2) = \frac{v}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{v^3(z - z^3/3)} dz = \frac{v}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{v^3 \operatorname{Re}(z - z^3/3)} dz$$

$$z = -1 + i\tau$$

$$z^3 = (-1 + i\tau)^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2(i\tau) + 3(-1)(i\tau)^2 + (i\tau)^3 = -1 + 3is + 3s^2 - is^3$$

$$z - \frac{z^3}{3} = -1 + i\tau + \frac{1}{3} - i\tau + \tau^2 + i\frac{s^2}{3} = -\frac{2}{3} - s^2 + i\frac{s^2}{3}$$

$$A_i(v^2) = \frac{v}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^3(\frac{2}{3} + \tau^2)} i d\tau$$

$$A_i(v^2) = \frac{v}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}v^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^3 \tau^2} d\tau, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$A_i(v^2) = \frac{v}{\pi} e^{-\frac{2}{3}v^3} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{v^3}} = \frac{v}{2\sqrt{\pi}} v^{-1/2} e^{-\frac{2}{3}v^3}$$

$$A_i(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}, \quad x \rightarrow \infty$$

