Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

SIGNIFICADO DE LA ASIMETRÍA ESTADÍSTICA EN LOS ALUMNOS DE ECONOMÍA DE LA UNAC

Tesis para optar el grado académico de Magistra en Enseñanza de la Matemática que presenta la alumna

Teresa Sofía Oviedo Millones

ASESOR

Dr. Jorge Luis Bazán Guzmán

JURADO

Mg. Cecilia Gaita Iparraguirre

Dr. Uldarico Malaspina Jurado

Pando, Abril de 2013

"Nada hay en nuestro entendimiento que no haya entrado en él por la puerta de las emociones."

Jacobo Meleschott (1822-1893) médico y filósofo holandés

Resumen

El objetivo principal de esta investigación es conocer dos tipos de significado respecto a la Asimetría estadística: el significado institucional de la Universidad Nacional del Callao (UNAC) y los significados personales de los alumnos de tercer ciclo de Economía; con este conocimiento se pretende saber el nivel de concordancia de los significados personales con el significado institucional y de acuerdo a esto deducir la forma cómo los alumnos han adquirido los conocimientos respecto a la Asimetría estadística y así conocer su nivel de aprendizaje y los conflictos semióticos que presentan para poder mejorar la enseñanza-aprendizaje de los alumnos respecto a la Asimetría estadística. Se analizaron estos significados teniendo como marco teórico el Enfoque ontosemiótico de la instrucción y cognición matemática (EOS) utilizando el primer nivel de análisis: "Sistemas de prácticas y objetos matemáticos"; para conocer el significado institucional, se analizaron los libros de texto de Estadística recomendados a los alumnos mencionados haciendo la configuración epistémica y para conocer los significados personales se analizaron las respuestas de estos alumnos a un cuestionario – previamente validado por expertos en Estadística y/o en el EOS –. que contaba con 16 preguntas respecto a conocimientos previos (las medidas de tendencia central y de variabilidad) y a la Asimetría estadística haciendo la configuración cognitiva. Fueron 14 los alumnos evaluados (de edades entre 19 y 23 años) al final del ciclo académico 2012-II.

Como resultado de estos análisis respecto a la Asimetría estadística se pudo saber que el significado institucional no llegó a formar parte de los significados personales de los alumnos, y esto pudo ser debido, en parte, a la forma cómo se transmiten los conocimientos en los libros de texto, que es una forma tradicional de enseñanza en la que las situaciones problemáticas no están contextualizadas y no permite a los alumnos reflexionar, hacer argumentos y entender la aplicación de la Asimetría estadística; por lo tanto, los docentes podemos ver que es necesario hacer mejoras en la forma en que hagamos llegar los conocimientos de la Asimetría estadística a nuestros alumnos.

Finalmente, en esta investigación, se presentan diferentes recomendaciones para investigaciones futuras así como para la enseñanza de la Asimetría estadística.

Agradecimientos

Gracias:
A mi asesor de tesis Dr. Jorge Luis Bazán Guzmán por todo el apoyo brindado en la ejecución de esta tesis.

A mi profesora Mg. Cecilia Gaita Iparraguirre, por su apoyo moral, su asesoría oportuna en el desarrollo de esta tesis y sus sugerencias en la redacción del cuestionario.

A mis amigos que siempre estuvieron con sus consejos y compañía durante el desarrollo de esta tesis: Pedro Amao Cutipa, Profesor Moisés Lázaro Carrión, Profesor Armando Blanco Del Rosario.

A todos los profesores que me ayudaron en la evaluación del cuestionario: Mg. Augusta Osorio, Dr. Luis Valdivieso, Mg. Edwin Villogas, Dr. Roger Metzger.

A mis profesores de la Maestría en enseñanza de la Matemática, que me guiaron académicamente en la culminación de mi estudio.

Especialmente gracias a mis padres y hermanos:

A mi madre María Teresa, por su amor, su compañía en todo momento, su alegría, su ternura y su confianza en mí en todo sentido.
A mi padre Oswaldo José, por su amor, su confianza, su estímulo y por ser un padre que ha dado sus fuerzas y su amor en bien y en defensa de mi patria, sus conocimientos generales...; mi orgullo!
A mis hermanos, por su amor, su alegría, su apoyo moral y estímulo.

Y gracias al más grande de mis amigos, a mi niñito Jesús, que me enseña que siendo humana tengo que saber perdonarme y así poder perdonar, quererme y así poder querer, amarme y así poder amar; que la vida hay que saber apreciarla y todo lo que existe en este mundo; que el camino de la vida no es tan largo y tenemos que saber vivir siempre haciendo lo que nos gusta y pensando también en el bien de los demás.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

A mi familia

Capítulo 1

Introducción

La Estadística se aplica en la vida cotidiana, se enseña y se aplica en casi todas las carreras profesionales como son: Arquitectura, Ciencias Naturales y Exactas, Ciencias de la Salud, Ciencias Sociales y Administrativas, Educación, Humanidades e ingeniería (que tienen, en su plan de estudio, temas de la Estadística descriptiva e inferencial), es por ello que es importante que los alumnos aprendan la Estadística, pero este aprendizaje no es sencillo para los alumnos, ni tampoco es sencillo para los docentes enseñarlo. Se constata esto en Batanero (2001a)

> [. . .] Puesto que la Estadística no es sólo una colección de conceptos y técnicas, sino, sobretodo, una forma de razonar (el razonamiento que en situaciones de incertidumbre permite realizar inferencias y guiar la toma de decisiones a partir de los datos), no es sencillo enseñar esta materia a niños y jóvenes frecuentemente desmotivados y con pocos conocimientos matemáticos. (p.1)

La aplicación de la Estadística en una situación problemática no sólo incluye cálculos y procedimientos con valores numéricos dados, sino que estos valores numéricos intervienen dentro de un contexto y de acuerdo al contexto se interpretan los datos dados y los resultados, es por ello, que no es sencillo el aprendizaje y la enseñanza de la Estadística a los alumnos de cualquier nivel educativo.

Esta investigación se centrará en el aprendizaje de la Asimetría estadística – que es un objeto matemático básico de la Estadística descriptiva que se aplica también en la Estadística inferencial – de los alumnos de tercer ciclo de Economía de la Universidad Nacional del Callao (UNAC) que llevan un primer curso de Estadística denominado: "Estadística básica" (que tiene como pre-requisito el curso de "Matemática para Economistas II") y para ello se utilizará como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y Cognición Matemática (EOS) desarrollado por Godino y colaboradores J. D. Godino (2002),J. Godino (2009),J. D. Godino y Batanero (1998),J. Godino, Bencomo, Font, y Wilhelmi (1998),J. Godino, Contreras, y Font (2006).

En esta investigación se trata de hacer el reconocimiento de elementos de significado matemático que intervienen en las diversas prácticas matemáticas de los alumnos. Estos elementos son identificados como las situaciones, procedimientos, conceptos, definiciones, propiedades y argumentos (del primer nivel de análisis del EOS) que, regulados por el lenguaje, interactúan dialécticamente en las prácticas proporcionando la posibilidad, en esta investigación, de evidenciar los significados personales que tienen los alumnos mencionados; como también de ver la relación de estos significados personales con el significado institucional de la UNAC según los libros de texto recomendados para los alumnos en el sílabo del curso "Estadística básica". (Ver sílabo en el anexo D).
Esta investigación consta de 8 capítulos que se describen a continuación:

En el capítulo 2, se contextualiza el problema de investigación, presentando la importancia de la enseñanza de la Asimetría estadística para los alumnos de nivel superior como concepto básico en la aplicación tanto en la Estadística descriptiva como en la Estadística inferencial enfocando lo que debieran saber aplicar los alumnos para el aprendizaje de la Asimetría estadística que son los diferentes tipos de elementos de significado matemático, enfatizando que éstos son los significados personales que los alumnos deberían dominar y éstos deben estar acorde con los significados institucionales; también se mencionan la importancia, justificación, objetivos (un objetivo general y 4 objetivos específicos) de esta investigación y los antecedentes de la Asimetría estadística; se menciona la manera de contribuir con el aprendizaje de la Asimetría estadística y se hace la pregunta de investigación.

En el capítulo 3, se describe el fundamento teórico de la Asimetría estadística: conocimientos previos para entender la Asimetría estadística (los objetos matemáticos: variables aleatorias, funciones de distribución y de densidad, esperanza matemática de una variable aleatoria, momentos estadísticos poblacionales y muestrales) y se definen los 3 tipos de Asimetría estadística: Asimetría estadística de una variable aleatoria (de una población), Asimetría estadística de datos (de una muestra) y las Aproximaciones de los estimadores de la Asimetría estadística; también se hace un breve análisis de las definiciones dadas en donde se explica la necesidad para los alumnos del conocimiento de estos objetos matemáticos y que sepan distinguir entre Asimetría estadística de una variable aleatoria y de una muestra. Por otro lado, se explica el marco teórico que incluye el primer nivel de análisis (sistemas de prácticas y objetos matemáticos: elementos lingüísticos, situaciones problemáticas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y Cognición Matemática (EOS)

– que, en los capítulos 4 y 6, se utilizarán para el análisis del significado institucional de referencia y de los significados personales de los alumnos en mención – y se finaliza este capítulo describiendo la metodología de investigación.

En el capítulo 4, se explica el significado institucional de referencia de la Asimetría estadística, analizando, para esto, los objetos y procesos primarios en los libros de texto recomendados a los alumnos de Economía de tercer ciclo de la UNAC en el sílabo del curso “Estadística básica”, que servirá de base para conocer los conocimientos a evaluar en los alumnos respecto a la Asimetría estadística mediante un cuestionario y se finaliza este capítulo dando conclusiones generales, respecto a la Asimetría estadística, del significado institucional de referencia de los libros de texto de Estadística recomendados a los alumnos mencionados.

En el capítulo 5, se muestra el proceso de construcción del cuestionario - teniendo como base el análisis del significado institucional de referencia de los libros de texto recomendados a los alumnos de tercer ciclo de Economía de la UNAC - sobre la Asimetría estadística y conocimientos previos a este objeto matemático que debieran conocer estos alumnos (para poder analizar, en el capítulo 6, los significados personales de los alumnos mencionados), que implica hacer las especificaciones del contenido del cuestionario: se seleccionan 3 tipos de contenido (conceptual, procedimental y reflexivo) que se hace corresponder a los 10 contenidos evaluados a los alumnos mencionados, (ver cuadro 5.3). En un primer momento, se hicieron 10 preguntas (que se muestran en el apéndice A) que luego de ser validadas por 6 expertos en Estadística y/o en el EOS se modificaron a 16 preguntas (que se muestran en el apéndice B).

El capítulo 6, se muestran los significados personales declarados de los alumnos y se analiza cada una de las respuestas que hicieron los 14 alumnos en estudio a las 16 preguntas dadas en el cuestionario; para ello, se hizo la configuración cognitiva de las respuestas de los alumnos a las preguntas 12 y 16 del cuestionario, para las otras preguntas no se hizo la configuración cognitiva de las respuestas de los alumnos debido a que las respuestas a estas preguntas eran cortas y además los alumnos respondieron muy poco; también se dan las conclusiones de las respuestas de los alumnos a cada respuesta del cuestionario, teniendo en cuenta sus dificultades cognitivas. Al finalizar esta sección se indican los resultados cuantitativos respecto a las respuestas del cuestionario. (Ver apéndice C). También se analiza los significados personales teniendo en cuenta cada una de los 10 contenidos evaluados a los alumnos según las especificaciones del cuestionario (ver capítulo 5, cuadros 5.1 y 5.3).

En el capítulo 7, se muestra lo que implica los resultados de la investigación para la enseñanza de la Asimtetría estadística; para ello se muestra la relación entre la manera de enseñar la Asimetría en los libros de texto y lo que han aprendido los alumnos de acuerdo a 4 categorías de significados personales y se concluye este capítulo con los aportes y limitaciones de la investigación.

En el capítulo 8, se dan las conclusiones para cada uno de los capítulos de esta investigación y se dan las recomendaciones para la enseñanza-aprendizaje de la Asimetría estadística.

Capítulo 2

Problema de investigación

2.1. El problema de investigación

Las investigaciones respecto a la Asimetría estadística son escasas; sin embargo, este objeto matemático es básico y muy importante en el análisis de los datos tanto en la Estadística descriptiva, donde se asocia con las medidas de tendencia central: media, mediana y moda, como también en la Estadística Inferencial, donde se aplica en las distribuciones de probabilidad, especialmente para poder modelizar las características cuantitativas de casi todas las grandes poblaciones hacia la distribución normal. Además, gran número de fenómenos reales se pueden modelizar, conociendo la Asimetría estadística, hacia la distribución normal, que es la más importante de todas las distribuciones de probabilidad. Es importante conocer si una distribución es simétrica o asimétrica, ya que esto puede afectar la detección de inferencias; también es importante en la decisión de qué parámetros se van a estimar, etc. Así, hay varias razones que nos hacen ver la importancia de este conocimiento; de esta manera, los alumnos pueden aplicar el conocimiento de la Asimetría estadística ante situaciones problemáticas en su quehacer cotidiano y profesional.

El aprendizaje de este objeto matemático no solo incluye las definiciones (de la asimetría respecto a la variable aleatoria y a la muestra), y las propiedades, sino también - en las situaciones problemáticas relativas a la asimetría estadística - el saber emplear el concepto, los algoritmos y procedimientos para la estimación de los coeficientes de la asimetría y argumentar (justificar) las soluciones de los problemas. Todos estos diferentes tipos de elementos de significado matemático constituyen los significados personales de los alumnos, que en un aprendizaje adecuado deben estar acordes con los significados institucionales. Según J. Godino, Batanero, y Font (2008):

> [. . .] Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento. (p.11-12)

"[...] El diseño de la enseñanza y la evaluación del aprendizaje debe tener en cuenta estos diferentes tipos de significado y comprensión" Cobo (2003).

Una forma adecuada de contribuir a mejorar el aprendizaje de la Asimetría estadística consiste en hacer un seguimiento a los alumnos para conocer cómo aprenden y cuáles son las dificultades que se les presentan en tal proceso (incluyendo sus errores). Tomando en cuenta estas dificultades epistémicas y cognitivas de los alumnos podremos adecuar la enseñanza de la Asimetría estadística diseñando una mejor manera de impartir este conocimiento estadístico. Como indica J. D. Godino (1996):

> [. . .] Está claro que las posibles dificultades que los alumnos encuentren en el tema dependerán de la enseñanza recibida. Cuando queremos reflexionar sobre la dificultad que el aprendizaje de ciertos conceptos tiene para los alumnos, es necesario comenzar por hacer un análisis epistemológico se su significado. (p.418)

Algunos autores como Radatz (1980), consideran el análisis de errores como "una estrategia de investigación prometedora para clarificar cuestiones fundamentales del aprendizaje matemático" (p.16).

De todo lo expuesto anteriormente, vemos que se necesita conocer, respecto a la Asimetría estadística, los significados institucionales de las Instituciones de educación superior – que es donde se imparte la enseñanza de este objeto matemático en algunas carreras profesionales – que pretenden adquieran sus alumnos y los significados personales de los alumnos de estas instituciones de educación superior que adoptan respecto al objeto matemático mencionado.
En esta investigación, se tomó como muestra de estudio, alumnos de Economía de la UNAC del tercer ciclo académico 2012-II (de edades entre 19 y 22 años) a quienes se les enseñó la Asimetría estadística en el curso "Estadística básica".

Por lo tanto, el problema de investigación que se pretende resolver queda sintetizado en: ¿Cuáles son los significados institucionales de la Asimetría estadística que la Facultad de Economía de la UNAC pretende adquieran sus alumnos de tercer ciclo de la carrera profesional de Economía y cuáles son los significados personales adquiridos por estos alumnos respecto a la Asimetría estadística?

2.2. Antecedentes de estudio de la Asimetría estadística

En primer lugar debemos tener en cuenta la importancia que tiene la Estadística en la vida profesional y cotidiana, como refiere Bazán (2006):

> [. . .] No bastará que los alumnos entiendan los índices estadísticos como el crecimiento poblacional, las tasas de desempleo e inflación, sino que es preciso enseñarles a analizar y relacionar críticamente los datos que se les pueda presentar, para que sean capaces de cuestionar e interpretar la veracidad de los datos y hacer sus propias conclusiones. (p.91)

Debido a esta importancia de la estadística, es necesario tener presente las experiencias que se han tenido en la enseñanza-aprendizaje de esta disciplina tanto en el nivel básico como en el nivel superior. Esto permite conocer las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de las nociones estadísticas de modo que se pueda adecuar algunas maneras de abordar estos temas en la enseñanza y así lograr mejoras en el aprendizaje de los conceptos estadísticos.
Como refiere Bazán (2006), La estadística ha sido implementada en el Perú desde el año 1987 a la educación básica primaria y secundaria, habiéndose hecho una elaboración curricular acorde con el avance social y tecnológico del mundo actual. Sin embargo, en Batanero y Godino (2005) se afirma que los estudiantes de educación básica no comprenden conceptos aparentemente elementales.
Resulta necesario una reflexión sobre la manera de dar a conocer las significados institucionales de los temas estadísticos - uno de estos temas es la Asimetría estadística - y aplicaciones de la estadística inferencial teniendo un tiempo limitado para su enseñanza. Las investigaciones acerca de este tema son escasas y, en algunos casos, se aborda de manera indirecta.

Para Manzano y Durán (2001), la simetría tiene una notable importancia para el análisis de los datos y en consecuencia se requiere que los alumnos tengan una aprendizaje suficiente sobre este tema y para lograr este aprendizaje, los alumnos deben tener conocimientos previos de las medidas de tendencia central: media, mediana y moda y las medidas de dispersión; entendiéndose como conocimiento al entendimiento, no solo algorítmico de estas medidas, sino a la comprensión del concepto aplicado a situaciones cotidianas y que diferencien los conceptos y los apliquen según la situación matemática dada. También los alumnos deben saber relacionar la gráfica con el índice de asimetría de Fisher (a usar). En la investigación mencionada, los autores deducen las dificultades de los estudiantes de Sicología de España.
Manzano y Durán (2001) en su investigación resalta que varios libros indican que si

la distribución de los datos de una población o una muestra de estudio es simétrica, entonces el índice de asimetría:

$$\begin{aligned}\sigma_1 =& \frac{m_3}{m_2\sqrt{m_2}}\\ =& \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^3}{\sigma_3}\\ \sigma_1 =& E(\frac{X-\mu}{\sigma})^3\end{aligned}$$

es 0, pero no aclaran que si el índice de asimetria es 0, entonces la distribución no tiene por qué ser simétrica. Manzano hizo esta investigación basándose en los textos de base para la explicación del concepto y medida de la simetría existentes en el banco bibliográfico de la Universidad de Sevilla, en las Facultades de Psicología y Economía, a disposición de los estudiantes universitarios. Fueron consultados 45 manuales sobre análisis de datos, de éstos, sólo Martín (1988) y Borrell (1997) indican que si la distribución es simétrica ocurrirá que el índice de asimetría es 0, pero lo contrario no necesariamente es cierto. También encontró que siete textos presentan el concepto de asimetria estadística únicamente mediante la representación gráfica y que exactamente el doble de textos lo hace solo con la expresión algebraica. Por tanto, concluye que la mayoría de los textos sobre análisis de datos transmiten la noción de que si el índice de asimetría es 0, es afirmar que la distribución es simétrica.
Otro antecedente que hemos considerado es: Batanero (2000b):

> [...] Por otro lado, se tiende a situar la media en el centro del recorrido de la distribución, propiedad que es cierta para distribuciones simétricas. Pero cuando la distribución es muy asimétrica la media se desplaza hacia uno de los extremos y la moda o la mediana serían un valor más representativo del conjunto de datos. Esto no es siempre comprendido por algunos alumnos quienes invariablemente eligen la media como mejor representante de los datos sin tener en cuenta la simetría de la distribución o la existencia de valores atípicos, como hemos observado en nuestra propia experiencia. (p.8)

2.3. Importancia de la investigación

Ser consciente de la manera cómo aprenden la Asimetría estadística los alumnos en la medida en que forman sus significados personales (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y conociendo sus conflictos semióticos (conflictos representacionales, conflictos conceptuales y conflictos procedimentales), analizando, mediante un cuestionario sobre la Asimetría estadística, las respuestas de los alumnos (significados personales) y viendo la concordancia de sus significados personales con los significados institucionales es un punto clave en la mejora de la enseñanza-aprendizaje de la Asimetría estadística porque, con este análisis, se puede diseñar una mejor manera de enfocarla y enseñarla a los alumnos en las instituciones de educación, especialmente de educación superior (que es donde ya se aplica la Asimetría estadística a la Estadística Inferencial). Así, con el análisis mencionado, en esta investigación se podrá contribuir mejorando la enseñanza-aprendizaje de la Asimetría estadística (mejorando la enseñanza en los conocimientos previos que necesitan saber para aplicar la Asimetría estadística, los significados personales: elementos lingüísticos, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos; dando sugerencias en la manera y el tiempo empleado en abordar la Asimetría estadística) de los alumnos de tercer ciclo de Economía de la UNAC (en este ciclo a estos alumnos se les imparte la enseñanza de la Asimetría estadística).

2.4. Justificación

Para que los alumnos lleguen a aplicar sus conocimientos estadísticos, en las diversas situaciones de su vida personal y profesional, deben empezar aprendiendo los conocimientos básicos estadísticos – que son los conocimientos dados en la Estadística descriptiva -; uno de estos conocimientos básicos es la Asimetría estadística, este es uno de los conocimientos fundamentales para el análisis de los datos y la inferencia.

En diferentes campos de aplicación de la Estadística (vida cotidiana y profesional), se hace uso de distribuciones asimétricas con fines de análisis, ajuste, inferencia y predicción; por tanto, los alumnos deben aprender todas las nociones estadísticas relacionadas con la Asimetría estadística, por ejemplo: variable aleatoria, medidas de tendencia central, función de probabilidad, etc. También deberán conocer las definiciones de la Asimetría estadística para una variable aleatoria y para una muestra.

En la medida en que conozcamos cómo aprenden los alumnos la Asimetría estadística, es decir, conociendo cómo forman sus significados personales respecto a la Asimetría estadística, podremos proponer maneras de abordar la mejora de la enseñanza de este objeto matemático y en consecuencia se podrá lograr una mejor concordancia de los significados personales de los alumnos con el significado institucional, así como la manera de subsanar las dificultades cognitivas y dificultades epistémicas.

2.5. Objetivos

2.5.1. Objetivo General:

Identificar, de acuerdo al EOS, los significados institucionales y personales asociados a la Asimetría estadística en alumnos del tercer ciclo de la carrera profesional de Economía de la Universidad Nacional del Callao.

2.5.2. Objetivos Específicos:

- Presentar los fundamentos teóricos de la Asimetría estadística.
- Analizar, de acuerdo al EOS, el significado institucional respecto a la Asimetría estadística, considerando los libros de texto recomendados a los alumnos de tercer ciclo de Economía de la UNAC según su sílabo.
- Analizar, de acuerdo al EOS, los significados personales de la Asimetría estadística considerando un cuestionario ad hoc validado por un grupo de expertos aplicado a un grupo de alumnos de tercer ciclo de Economía de la UNAC.
- Proponer recomendaciones para la enseñanza de la Asimetría estadística a partir de los resultados del análisis del significado institucional y personal.

Capítulo 3

Fundamento Teórico

3.1. Fundamento Teórico de la Asimetría estadística

En esta sección se define los conceptos estadísticos necesarios para comprender todo lo relacionado a la asimetría estadística de modo que este objeto matemático sea adecuadamente definido. Primero introducimos el concepto de variable aleatoria y su función de distribución. A partir de este concepto, definimos el concepto de Esperanza matemática de una variable aleatoria. Posteriormente, se presenta el concepto de momentos estadísticos (poblacionales y muestrales) de una variable aleatoria. Finalmente, presentamos la definición de la Asimetría estadística.
Seguiremos a James (2004):

3.1.1. Variables aleatorias, Funciones de distribución y Densidad

3.1.1.1. Variables aleatorias:

Definición 1. Sea Ω el espacio muestral del experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será llamado evento. Ω es el evento cierto, ϕ el evento imposible. Si $\omega \in \Omega$ el evento $\{\omega\}$ se llama elemental (o simple).

Definición 2. Un evento A al cual atribuimos una probabilidad será llamado evento aleatorio.

Definición 3. Sea Ω un conjunto no vacío. Una clase $\mathbb{A}$ de subconjuntos de Ω que satisface A1, A2 y A3 se llama álgebra de subconjuntos de Ω.
A1. $\Omega \in \mathbb{A}$.
A2. Si $A \in \mathbb{A}$, entonces $A^c \in \mathbb{A}$.
A3. Si $A \in \mathbb{A}$ y $B \in \mathbb{A}$, entonces $A \cup B \in \mathbb{A}$.

Sin pérdida de generalidad, se va a suponer que la clase de los eventos aleatorios también satisface:

A3'. Si A_n para n= 1, 2, 3, ..., entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$.

Definición *4.* Una clase $\mathbb{A}$ de subconjuntos de un conjunto no vacío Ω satisfaciendo A1, A2 y A3'se llama σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

Definición *5.* Una función P definida en un σ-álgebra $\mathbb{A}$ y que satisface los siguientes axiomas se llama medida de probabilidad en $\mathbb{A}$ o simplemente probabilidad en $\mathbb{A}$

Axioma 1. $P(A) \geq 0$.

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3. (σ-aditividad). Si $A_1, A_2 \ldots \in \mathbb{A}$ son disjuntos (es decir, mutuamente excluyentes), entonces:

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Definición *6.* La formulación del modelo matemático para un experimento, o modelo probabilístico está constituido por:

1. Un conjunto no vacío Ω, de resultados posibles, el espacio muestral.

2. Una σ-álgebra $\mathbb{A}$ de eventos aleatorios.

3. Una probabilidad P definida en $\mathbb{A}$.

Ahora se va a retirar el modelo del contexto de un experimento y se reformula como un concepto matemático abstracto.

Definición *7.* Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathbb{A}, P)$, donde:

1. Ω es un conjunto no vacío,

2. $\mathbb{A}$ es un σ-álgebra de subconjuntos de Ω, y

3. P es una probabilidad en $\mathbb{A}$.

Definición *8.* Una variable aleatoria X en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ es una función real definida en el espacio Ω tal que $[X \leqslant x]$ es un evento aleatorio para todo $x \in \mathbb{R}$; es decir, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria si $[X \leqslant x] \in \mathbb{A}, \forall x \in \mathbb{R}$.

De acuerdo Larson (1981):

Definición *9.* Se llama discreta a una variable aleatoria X si su rango R_x es un conjunto discreto de números reales.

Ejemplo 1. Se tira una vez un par de dados. Sea X la suma de los 2 números que aparecen. El espacio muestral es:

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1 = 1, 2, \ldots, 6; x_2 = 1, 2, ..., 6\}$$

y se ha definido:

$$X(w) = x_1 + x_2 \text{ para } w = (x_1, x_2) \in S$$

El rango de X es $R_X = \{2, 3, \ldots 12\}$ de manera que X es una variable aleatoria discreta. (p.92)

Definición 10. Se llama continua a una variable aleatoria X si su rango R_x es un intervalo o unión de intervalos sobre los números reales y si tiene probabilidad cero de igualar a cualquier valor aislado en R_x.

3.1.1.2. Funciones de distribución y funciones de densidad

Siguiendo a Canavos (1988):

Definición 11. Sea X una variable aleatoria discreta. Se llamará a $p(x) \equiv P(X = x)$ función de probabilidad de la variable aleatoria X, si satisface las siguientes propiedades:

1. $p(x) \geq 0$ para todos los valores x de X;
2. $\sum_x p(x) = 1$.

Definición 12. La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria discreta X es la probabilidad de que X sea menor o igual a un valor específico de x y está dada por:

$$F(x) \equiv P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Definición 13. La función de distribución acumulativa $F(x)$ de una variable aleatoria discreta es una función no decreciente de los valores de X, que satisface:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ para cualquier x;
2. $F(x_i) \geq F(x_j)$ si $x_i \geq x_j$;
3. $P(X > x) = 1 - F(x)$.
   Además, puede establecerse que para variables aleatorias de valor entero se tiene que:
4. $P(X = x) = F(x) - F(x - 1)$;

5. $P(x_i \leq X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_i - 1)$.

Definición 14. Dada una variable aleatoria continua X, esta se encuentra caracterizada si existe una función $f(x)$ que recibe el nombre de función de densidad de probabilidad que satisface:

1. $f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, y
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Definición 15. La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua X es la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a algún x específico. Esto es:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)d,$$

en donde t es una variable de integración.

Por lo tanto, la función de distribución acumulativa $F(x)$ es el área acotada por la función de densidad que se encuentra a la izquierda de la recta $X = x$.
Dado que para cualquier variable aleatoria continua X,

$$P(X = x) = \int_x^x f(t)dt = 0,$$

entonces:

$$P(X \leq x) = P(X < x) = F(x)$$

Definición 16. La distribución acumulativa $F(x)$, es una función no decreciente de los valores de la variable aleatoria continua X con las siguientes propiedades:

1. $F(-\infty) = 0$;
2. $F(\infty) = 1$;
3. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$;
4. $dF(x)/dx = f(x)$.

La propiedad de que la derivada de la función de distribución acumulativa es la función de densidad de probabilidad, es una consecuencia del teorema fundamental del cálculo integral.

3.1.2. Esperanza Matemática de una variable aleatoria

Si X es una variable aleatoria discreta, la función de distribución $F(x)$ o la función de probabilidad $p(x)$ se puede usar para evaluar afirmaciones de probabilidad de X. Por el contrario, si X es una variable aleatoria continua, se puede usar la función de distribución $F(x)$ o la función de densidad $f(x)$ para evaluar afirmaciones de probabilidad de X. Con frecuencia se necesita conocer el valor esperado o promedio de X y no solamente una afirmación de probabilidad de que X esté en un intervalo dado. De acuerdo a Larson (1981, p.112):

Definición 17. Si X es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(x)$, el valor esperado de $H(X)$ o esperanza matemática (que se escribe como $E[H(X)]$ se define como:

$$E[H(X)] = \sum_{R_X} H(x)p(x),$$

siempre y cuando la suma sea absolutamente convergente.

Definición 18. Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$, se define el valor esperado de $H(X)$ como

$$E[H(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)\,dx,$$

siempre y cuando la integral sea absolutamente convergente. Si la integral o la suma no es absolutamente convergente, se dice simplemente que no existe el valor esperado.

Definición 19. Se llama media o valor promedio de X al valor esperado de X,y se denota por μ_X; esto es, que $\mu_X = E[X]$.

El punto medio de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X es dado por la media de la variable aleatoria X. Es necesario conocer también una medida de variabilidad de la distribución de probabilidad (o de la propia variable aleatoria). La medida más usada para la variabilidad es la varianza.

Definición 20. La varianza de una variable aleatoria X (denotada por σ_X^2 se define como:

$$\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2];$$

Su raíz cuadrada positiva se denota por σ_X y se conoce como la desviación estándar de X. Por tanto, $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$.

3.1.3. Los momentos estadísticos de una variable aleatoria

De acuerdo con Obagi (2003): El concepto de momento estadistico de una variable aleatoria se fundamenta en la noción de la fisica (mecánica) de momento. Por lo tanto, puede hablarse de momento estadístico respecto de cualquier punto; sin embargo, existen dos momentos con significado especial: el momento alrededor de la media y el momento alrededor del origen de la variable aleatoria.
En cuanto a su obtención, un momento estadístico es un valor esperado de una potencia de la variable aleatoria o de una función de dicha variable.

3.1.3.1. Momentos poblacionales

Definición 21. El momento poblacional de orden r respecto de la media de una variable aleatoria X, también llamado momento poblacional central de orden r se define por:

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] \tag{3.1}$$

Cuando se tiene una variable aleatoria discreta el momento poblacional es:

$$\begin{aligned}\mu_r =& E\left[(X-\mu)^r\right]\\ =&\sum_i (x_i-\mu)^r f(x_i)\\ =&\sum_i (x_i-\mu)^r P(X=x_i)\end{aligned}$$

que es una suma de un número finito de sumandos si la variable aleatoria es discreta finita o la suma de una serie si la variable aleatoria es infinito-numerable, siempre que esa serie sea convergente.
Cualquiera sea la variable aleatoria X, en particular para el caso discreto, se verifica:

$$\begin{aligned}\mu_0 =& E\left[(x_i-\mu)^0\right]\\ =&\sum_i (x_i-\mu)^0 f(x_i)=1\\ \mu_1 =& E\left[(x_i-\mu)\right]\\ =&\sum_i (x_i-\mu) f(x_i)=0\end{aligned}$$

El momento poblacional central de orden 2 es la varianza μ_2:

$$\begin{aligned}\sigma^2 =&\mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right]\\ &=\sum_i (x_i-\mu)^2 f(x_i)\end{aligned}$$

Estos dos momentos dan información referente a la parte media de la ley de probabilidad y variabilidad relativa con relación a esse valor del medio. Los momentos de mayor orden $\mu_3, \mu_4, \mu_5, \ldots,$ dan información relativa a otros aspectos de la ley de probabilidad: la agudeza relativa, etc.

3.1.3.2. Momentos Muestrales

De acuerdo a Gonzáles y Pérez de Vargas (2009):

Definición 22. Para una variable aleatoria, considere una muestra aleatoria $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de tamaño n se definen los momentos muestrales de orden r respecto de la media muestral como:

$$m_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\overline{x})^r}{n} \tag{3.2}$$

En particular, para el caso discreto, con valores registrados x_i con frecuencias absolutas n_i en una muestra de tamaño n, y designados por la frecuencia relativa de x_i, se definen los momentos de orden r respecto de la media:

$$\begin{aligned}m_r &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\overline{x})^r n_i}{n}\\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i-\overline{x})^r \frac{n_i}{n}\\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i-\overline{x})^r f_i\end{aligned}$$

El momento muestral central de orden 2 es:

$$m_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\overline{x})^2}{n} \tag{3.3}$$

Note que $\frac{n\times m_2}{n-1} = s^2$ que es la varianza muestral conocida.
Notemos que los momentos muestrales se basan en la media de datos obtenidos en una muestra mientras que los momentos poblacionales se basan en el concepto de esperanza matemática para una variable aleatoria. En cierta forma, los momentos poblaciones son teóricos mientras que los momentos muestrales son empíricos. Es decir, dada una

variable aleatoria, por ejemplo, la distribución normal, hallar el momento poblacional de orden 2, de dicha variable, significa hacer uso de la definición 17. En este caso, se demuestra que este tiene valor 0 ($E(X-\mu)^2 = \sigma^2$) y esto teóricamente para cualquier distribución normal. Otra cosa diferente es si tengo un conjunto de 20 datos que vienen de la distribución normal y deseo obtener el momento muestral de orden 2 para estos datos. En este caso este momento es el valor $\frac{(n-1)\times s^2}{n}$ que se obtiene del particular conjunto de datos considerados. Cuando el tamaño de muestra crece, entonces $\frac{(n-1)\times s^2}{n} \approx s^2$ y entonces decimos que el segundo momento muestral es un estimador del segundo momento poblacional σ^2, es decir $s^2 \to \sigma^2$ cuando $n \to \infty$.

3.1.4. La Asimetría estadística

3.1.4.1. La asimetría estadística de una variable aleatoria

De acuerdo a Rial y Varela (2008):

Definición 23. La asimetría estadística de una variable aleatoria es definida como:

$$\sigma_1 = E(\frac{X-\mu}{\sigma})^3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} \tag{3.4}$$

donde μ es el valor esperado de la variable aleatoria X y σ es la varianza de la variable aleatoria X.

Note que la segunda expresión está basada en el concepto de momentos poblacionales.

La asimetría estadística informa el grado en que las observaciones se reparten proporcional y equitativamente por encima y por debajo del punto central (más alto) de la distribución. En el caso que dicho reparto sea equilibrado, se dice que la distribución es simétrica. En particular para una variable aleatoria discreta tenemos:

$$\sigma_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^3 f_i}{\sigma^3} \tag{3.5}$$

- Si $\sigma_1 > 0$, la asimetría es positiva, esto quiere decir que las frecuencias más altas se encuentran en el lado izquierdo de la media, mientras que en la parte derecha hay frecuencias más pequeñas.

- si $\sigma_1 < 0$, la asimetria es negativa, esto quiere decir que las frecuencias más altas se encuentran en el lado derecho de la media, mientras que en la parte izquierda hay frecuencias más pequeñas.

σ_1 es un índice adimensional.

Una propuesta para corregir la medida anterior es usar la siguiente corrección

$$G_1 = \frac{\sqrt{n}(n-1)}{n-2}\sigma_1 \tag{3.6}$$

De acuerdo a Bonato (2010), otras medidas de asimetría estadística de una variable aleatoria propuestas en la literatura son:

Definición 24. a) La propuesta por Bowley (1920):

$$\sigma_2 = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} \tag{3.7}$$

donde Q_i es el i-ésimo cuartil de la variable aleatoria X, por lo tanto $Q_1 = F^{-1}(0{,}25), Q_2 = F^{-1}(0{,}5)$ (la mediana de los datos) y $Q_3 = F^{-1}(0{,}75)$, donde F es la distribución acumulada de esta variable aleatoria.

- Si $\sigma_2 = -1$, la asimetría es negativa.
- Si $\sigma_2 = 0$, la distribución es simétrica.
- Si $\sigma_2 = -1$, la asimetría es negativa.

b) La propuesta de Hinkley (1975), que es una generalización del coeficiente de Bowley:

$$\sigma_3(\alpha) = \frac{F^{-1}(1-\alpha) + F^{-1}(\alpha) - 2Q_2}{F^{-1}(1-\alpha) - F^{-1}(\alpha)}, \tag{3.8}$$

donde $F^{-1}(1-\alpha)$ y $F^{-1}(\alpha)$ corresponden al percentil $(1-\alpha)$ y α respectivamente, para cualquier α entre 0 y 0.25.

c) El coeficiente de asimetría de Groeneveld y Meeden (1984):

$$\sigma_4 = \frac{\int_0^{0,5}\{F^{-1}(1-\alpha) + F^{-1}(\alpha) - 2Q_2\}\, d\alpha}{\int_0^{0,5}\{F^{-1}(1-\alpha) - F^{-1}(\alpha)\}\, d\alpha} = \frac{\mu - Q_2}{E \mid X - Q_2 \mid} \tag{3.9}$$

d) El coeficiente de asimetria de Pearson:

$$\sigma_5 = \frac{\mu - Q_2}{\sigma} \tag{3.10}$$

donde μ es la esperanza de la variable aleatoria X, σ es la desviación estandar de la variable aleatoria X, Q_2 es la mediana de la población.

3.1.4.2. La asimetría estadística de una muestra aleatoria: Estimadores de la Asimetría estadística:

Considere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valores de una muestra aleatoria de la variable aleatoria X. Los estimadores de la Asimetría estadística presentados en la sección anterior son los siguientes:

- Un estimador de σ_1 es:

$$\widehat{\sigma}_1 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i - \widehat{\mu}}{\widehat{\sigma}})^3 = \frac{m_3}{(m_2)^{3/2}}, \tag{3.11}$$

donde $\widehat{\mu} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i$ y $\widehat{\sigma}^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\mu})^2$

Note que la segunda expresión se basa en los momentos muestrales.

- Un estimador de σ_2 es:

$$\widehat{\sigma}_2 = \frac{\widehat{Q}_3 + \widehat{Q}_1 - 2\widehat{Q}_2}{\widehat{Q}_3 - \widehat{Q}_1.} \tag{3.12}$$

donde $\widehat{Q}_i$ es el i-ésimo cuartil de X, por lo tanto $\widehat{Q}_1 = \widehat{F}^{-1}(0{,}25)$, $\widehat{Q}_2 = \widehat{F}^{-1}(0{,}5)$, $\widehat{Q}_3 = \widehat{F}^{-1}(0{,}75)$, esto significa que $\widehat{Q}_1$, $\widehat{Q}_2$ y $\widehat{Q}_3$ corresponden al valor del dato que ocupa el puesto 25 %, 50 %, 75 % respectivamente y $\widehat{F}$ es la función de distribución empírica de los datos. $\widehat{Q}_2$ también es denotado como la mediana de los datos o Me.

- Un estimador de σ_3 es:

$$\widehat{\sigma}_3(\alpha) = \frac{\widehat{F}^{-1}(1-\alpha) + \widehat{F}^{-1}(\alpha) - 2\widehat{Q}_2}{\widehat{F}^{-1}(1-\alpha) - \widehat{F}^{-1}(\alpha)}, \tag{3.13}$$

- Un estimador de σ_4 es:

$$\widehat{\sigma}_4 = \frac{\int_0^{0,5}\{\widehat{F}^{-1}(1-\alpha) + \widehat{F}^{-1}(\alpha) - 2\widehat{Q}_2\}\,d\alpha}{\int_0^{0,5}\{\widehat{F}^{-1}(1-\alpha) - \widehat{F}^{-1}(\alpha)\}\,d\alpha} \tag{3.14}$$

- Un estimador de σ_5 es:

$$\widehat{\sigma}_5 = \frac{\overline{x} - \widehat{Q}_2}{\widehat{\sigma}} \tag{3.15}$$

donde $\widehat{Q}_2 = Me$ es la mediana de los datos.

3.1.4.3. Aproximaciones de los estimadores de la Asimetría estadística

Habiendo hecho una revisión bibliográfica de los libros usados en el nivel superior para la enseñanza de la Asimetría estadística, se tienen los siguientes aproximaciones de los estimadores de la asimetría:

- **Coeficiente de Pearson:**

$$A_s = \frac{\overline{x} - Mo}{s} \cong \frac{3(\overline{x} - Me)}{s}, \tag{3.16}$$

  Note que estas expresiones son aproximaciones del estimador $\widehat{\sigma}_5$de el estimador σ_5 donde s es la desviación estándar, $\overline{x}$ es la media de la muestra, Mo es la moda y Me es la mediana de los datos.
  Si $A_s = 0$, la distribución es simétrica.
  Si $A_s > 0$, la distribución es sesgada hacia la derecha.
  Si $A_s < 0$, la distribución es sesgada hacia el lado izquierdo.

- **Índice de asimetría de Pearson**
  Considerando el estimador $\widehat{\sigma}_1$ de σ_1 otra variante conocida como índice de Asimetría de Pearson es:

$$A_s = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2}\widehat{\sigma}_1 \tag{3.17}$$

  Esta expresión aparece en la versión en Inglés de Wikipedia.
  Adicionalmente, la mayoría de programas estadísticos y el propio excel presentan la siguiente expresión

$$A_s = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^3}{s^3} = \frac{n^{7/2}}{(n-1)^{5/2}(n-2)}\widehat{\sigma}_1 \tag{3.18}$$

- **Coeficiente de Fisher**
  Para el caso de tener una distribución discreta de k datos con frecuencia f_i una aproximación del coeficiente anterior es:

$$A_s = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^3}{ns^3}, \tag{3.19}$$

  donde s es la desviación estándar, $\overline{x}$ es la media muestral, k es el número de datos de la muestra, f_i es la frecuencia absoluta.

3.2. Breve Análisis de las definiciones dadas

Para conocer el objeto matemático: asimetría estadística, como en todo conocimiento, se necesita conocimientos previos; para el caso del estudio del objeto matemático en mención, los conocimientos previos que requiere un alumno son: la definición de variables, la manera de hacer una distribución de datos mediante gráficos, las medidas de tendencia central (media aritmética, mediana y moda), las medidas de dispersión (varianza, desviación típica), las variables aleatorias, la esperanza matemática, los momentos estadísticos de una variable aleatoria, los momentos muestrales y los alumnos deben distinguir y aprender:

- La Asimetría de una variable aleatoria.
- La Asimetría de datos (de una muestra).
- Las aproximaciones de los estimadores de la Asimetría estadística.

y cuando apliquen o quieran comprender la distribución de los datos, los alumnos también tienen que haber aprendido las funciones de probabilidad, de densidad. Además, para el conocimiento de la asimetría estadística se requiere un estudio riguroso y no pasajero - como se notará más adelante en la evaluación de los libros de texto -, los alumnos tienen que conocer la diferencia entre análisis de datos entre población y muestra de estudio. No se trata de un tema que puede ser enseñado en poco tiempo y con poco contenido - se constata el poco tiempo asignado de este tema en el sílabo del curso y el poco contenido en los libros de texto - Es un objeto matemático que es una parte de la introducción al conocimiento de la Estadística inferencial, que es la parte más importante de la Estadística y por lo tanto, para entender esta parte de la Estadística, los conocimientos previos que deben tener los alumnos deben ser rigurosos, con base sólida; así lograrán aplicar sus conocimientos estadísticos y comprender lo que están haciendo. Estos conocimientos previos, según el sílabo de los alumnos en estudio, sí se han enseñado desde la primera hasta la séptima semana del ciclo académico 2012-II.

La idea principal aquí es que el concepto de Asimetría estadística no es definido de manera única ni es dado sobre el mismo contexto. Así, desde un punto de vista de modelos probabilísticos existe la definición de la Asimetría estadística de una variable aleatoria, que en el área de estadística es conocido como parámetros, mientras que desde el punto de vista de los datos de una muestra existen las correspondientes definiciones basados en los datos que son estimadores de los parámetros. Ahora, finalmente, dado que la mayoría de estimadores propuestos son complejos de obtener en forma manual, muchas veces se presentan aproximaciones o correcciones de esos estimadores que resultan intuitivas y más simples de presentar y obtener con datos. Estos aspectos son importantes de reconocer y por ello hemos realizado esta revisión teórica que servirá como referencia para nuestros análisis dentro de la tesis.

3.3. Fundamentos Teóricos del EOS

Godino y Batanero (1996), definen los siguientes tipos de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática llamados tipos de elementos de significado y facilitan su análisis.

Elementos de significado

- Extensivos: las situaciones y campos de problemas de donde emerge el objeto.
- Ostensivos: los recursos lingüísticos, graficos para representar u operar con los problemas y objetos involucrados.
- Actuativos: procedimientos y estrategias para resolver los problemas.
- Intensivos: propiedades, características y relaciones con otras entidades.
- Validativos: Argumentos que sirven para justificar o validar las soluciones

En diversos trabajos realizados en el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (Font y Godino (2006); Contreras, Godino, y Font (2006); Bencomo, Godino, Font, y Wilhelmi (2007)) se han propuesto cinco niveles o tipos de análisis aplicables a un proceso de estudio matemático (ya planificado o bien ya implementado).

1. Sistemas de prácticas y objetos matemáticos (previos y emergentes). Este nivel de análisis:
    - Se aplica, sobre todo, a la planificación y a la implementación de un proceso de estudio y pretende estudiar las prácticas matemáticas planificadas y realizadas en dicho proceso.
    - Permite descomponer el proceso de estudio en una secuencia de episodios y, para cada uno de ellos, describir las prácticas realizadas siguiendo su curso temporal.
    - Permite describir una configuración epistémica global (previa y emergente) que determina las prácticas planificadas y realizadas.
2. Procesos matemáticos y conflictos semióticos. En toda práctica se identifica un sujeto o agente (institución o persona) y un medio en el que dicha práctica se realiza

(que puede contener otros sujetos u objetos). Puesto que el sujeto agente realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones-problema es necesario considerar también los objetos, procesos y significados matemáticos involucrados. Este nivel de análisis:

- Se centra en los objetos y, sobre todo, procesos que intervienen en la realización de las prácticas y también en los que emergen de ellas.
- La finalidad es describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflctos semióticos que se producen en su realización

3. Configuraciones y trayectorias didácticas. Este nivel de análisis:

   - Contempla el estudio de las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas, puesto que el estudio de las matemáticas tiene lugar bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros estudiantes.
   - Se orienta, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción y su puesta en relación con los aprendizajes de los estudiantes (trayectorias cognitivas).

4. Sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio. Este nivel de análisis:

   - Estudia la compleja trama de normas que soportan y condicionan las configuraciones didácticas, así como su articulación en trayectorias didácticas (según las dimensiones epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica).
   - Se intenta dar explicaciones plausibles del por qué un sistema didáctico funciona de una forma y no de otra.

5. Idoneidad didáctica del proceso de estudio. Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas para una didáctica descriptiva - explicativa, es decir, sirven para comprender y responder a la pregunta, ¿qué está ocurriendo en un determinado sistema didáctico o por qué? La Didáctica de la Matemática debe aspirar además a la mejora del funcionamiento de estos sistemas, aportando una racionalidad axiológica o valorativa en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc. Necesita criterios de "idoneidad" que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y "guiar" su mejora.

Para esta investigación, como en otros trabajos identificados, se hará uso del primer nivel de análisis del EOS el cual se detalla a continuación.

3.3.1. Primer nivel de análisis: Sistemas de prácticas y objetos matemáticos

Este primer nivel de análisis se basa en la aplicación de las nociones de práctica matemática ligada a la solución de un tipo de problemas, objetos emergentes (e intervinientes), significados sistémicos institucionales y personales.

3.3.1.1. Sistemas de prácticas

"Consideramos práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" J. Godino (2009, p.334). Las prácticas pueden ser idiosincráticas de una persona o compartidas en el seno de una institución.

3.3.1.2. Significados institucionales de los objetos matemáticos

Una institución está constituída por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento. Los significados institucionales en el EOS son:

- **Referencial:** Sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referenacia será una parte del significado holístico del objeto matemático.
- **Pretendido:** Sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- **Evaluado:** El subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- **Implementado:** En un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.

3.3.1.3. Significados personales de los objetos matemáticos

Como indica J. D. Godino (2003) "La génesis del conocimiento personal se produce para nosotros como consecuencia de la interacción del sujeto con tipos de problemas, mediatizada por los contextos institucionales en que tiene lugar dicha actividad" (p.102) y J. D. Godino (2003). "Un sistema de prácticas personales asociada a un campo de problemas está constituído por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas" (p.99)

J. Godino, Batanero, y Font (2007, p.5) dan las definiciones de los distintos tipos de significados personales:

- **Significados personales globales:** Corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- **Significados personales declarados:** Da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- **Significados personales logrados:** Corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis de cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

3.3.1.4. Objetos y procesos primarios de los objetos matemáticos

Los objetos y procesos primarios, llamados también objetos previos y emergentes, que intervienen en las prácticas, según el EOS son los siguientes:

- **Elementos lingüísticos:** Términos, expresiones, notaciones, gráficos,etc. en sus diversos registros: escrito, oral, gestual, etc.
- **Situaciones - problemas:** Aplicaciones extra - matemáticas, tareas, ejercicios, etc.
- **Conceptos - definiciones:** Introducidos mediante definiciones o descripciones
- **Proposiciones:** Enunciados sobre conceptos, etc.
- **Procedimientos:** Algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.
- **Argumentos:** Enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo, etc.

Estas nociones de sistemas de prácticas, significados institucionales y significados personales, así como la noción de objetos y procesos primarios están desarrolladas y precisadas en Godino y Font (2007). Estos se sintetizan en las figuras 3.1 y 3.2.

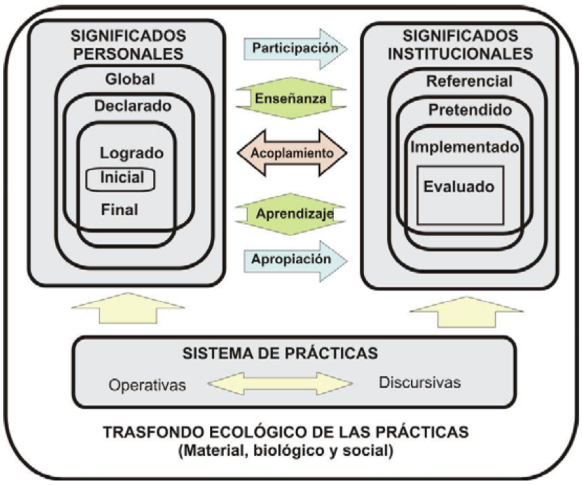


FIGURA 3.1: Tipos de significados institucionales y personales, tomado de J. D. Godino y cols. (2008)

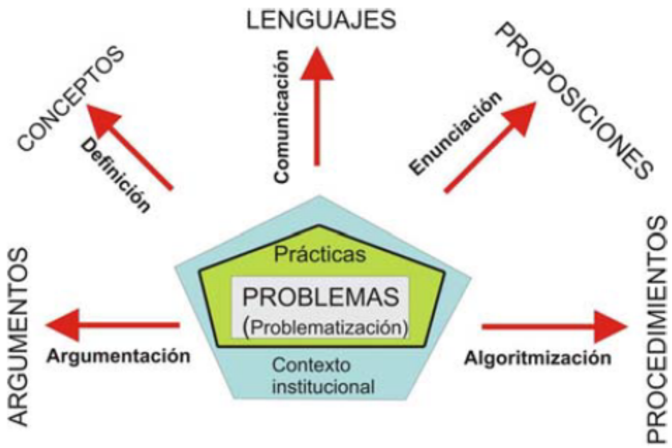


FIGURA 3.2: Objetos y procesos primarios, tomado de J. D. Godino y cols. (2008)

3.4. Metodología de la investigación

Esta investigación se centró en el análisis de las relaciones entre los significados institucionales de los objetos matemáticos y los significados personales construidos por los alumnos de tercer ciclo de Economía de la UNAC, respecto a la Asimetría estadística, en correspondencia con los objetivos planteados. Para ello se desarrollaron las siguientes fases:

1. Fase de la presentación del fundamento teórico (capítulo 3)
2. Fase del análisis del significado institucional de referencia (capítulo 3): Esta fase consta de 3 partes:

- ***Selección de los libros de texto recomendados a los alumnos en estudio:*** Se seleccionó estos textos de acuerdo al sílabo de la UNAC del curso "Estadística básica" para los alumnos de tercer ciclo de Economía; se hizo dos cuadros que muestran el contenido de estos libros de texto respecto a la Asimetría estadística. En el primer cuadro: se muestra el título del libro, el (la) autor (a) o los (las) autores (as), la editorial, la edición y la reimpresión (en el caso de que algún libro la tenga); en el segundo cuadro: para cada libro, se menciona el número de capítulos, número de páginas, capítulos con el concepto de la Asimetría estadística, capítulos con la asimetría de datos, número de secciones de los capítulos donde aborda la asimetría de datos, numeral de las secciones de los capítulos donde aborda la asimetría de datos, número de páginas de las secciones donde aborda la asimetría de datos, números de página de inicio y página final del capítulo de la Asimetría estadística, partes de la sección y numeral de las figuras de la asimetría de datos.
  Todos estos datos se sacaron de los libros de texto del sílabo mencionado con el fin de ver qué tanto se aborda respecto a la Asimetría estadística.
- ***Análisis de los contenidos respecto a la Asimetría estadística en los libros de texto recomendados a los alumnos en estudio:*** Este análisis se hizo para tener una visión aproximada de lo que se les enseña a los alumnos en mención, analizando los objetos y procesos primarios de la Asimetría estadística (notaciones y símbolos, situaciones, definiciones, propiedades y proposiciones, procedimientos y argumentos) en los libros de texto.
- ***Conclusiones respecto al significado institucional de referencia:*** Con estas conclusiones se tuvo una base para determinar la correspondencia de todo lo que supuestamente se enseña en la UNAC a los alumnos mencionados, con las conclusiones del análisis de los significados personales declarados (fase 4, segunda parte) de estos alumnos.

3. Fase del análisis de los significados personales declarados (capítulo 5 y 6): Esta fase consta de 2 partes:

   - ***Construcción del cuestionario (capítulo 5):*** De acuerdo al significado institucional de referencia, se hicieron las preguntas (en un cuestionario) para los alumnos en estudio, estas preguntas se clasificaron de acuerdo a unas especificaciones (se dieron 10 contenidos a evaluar clasificados en 3 tipos de contenido: conceptual, procedimental y reflexivo – que se muestran en el cuadro 5.3). Se hicieron 10 preguntas de acuerdo a las especificaciones que, antes de ser aplicadas a los alumnos, fueron validadas por un grupo de expertos de Estadística y/o el EOS; estos expertos validaron el cuestionario según la pertinencia y la redacción de las preguntas (en una escala de 1 a 5: en orden creciente de satisfacción) y se les pidió también que hicieran las sugerencias que crean convenientes. Una vez validado el cuestionario por estos expertos, se procedió a depurar las preguntas que tuvieron de apreciación, en general, escala baja y quedaron las preguntas que tuvieron de apreciación escala alta; también se tuvo en cuenta las sugerencias que hicieron estos expertos. Este cuestionario se aplicó al finalizar el semestre académico 2012-II de los alumnos en estudio.

- ***Análisis de los significados personales declarados (capítulo 6):*** En esta fase se tuvo en cuenta, para el mencionado análisis, los diferentes tipos de elementos de significado matemático (elementos lingüísticos, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos); Para ello fue considerada una muestra de estudiantes del curso que decidieron colaborar voluntariamente con el estudio. El propósito principal fue elaborar la configuración cognitiva de las respuestas del conjunto de alumnos colaboradores a dos de las preguntas dadas en el cuestionario (pregunta 12 y 16) sin pretender representar la configuración de la clase. Adicionalmente, para las otras preguntas se analizó las respuestas de los alumnos sin considerar la configuración cognitiva por ser respuestas muy cortas.

4. Fase de las conclusiones del significado institucional y de los significados personales declarados (capítulo 7): En esta fase se dieron las recomendaciones para la enseñanza-aprendizaje de la Asimetría estadística y consta de 2 partes:

   - ***Conclusiones respecto al análisis cognitivo: significados personales declarados:*** En esta fase, se dieron las respectivas conclusiones de acuerdo a los 10 contenidos evaluados (del cuadro 5.4) en el cuestionario (de 16 preguntas) a los alumnos mencionados. Así también se pudo conocer qué conflictos epistémicos y dificultades cognitivas tienen los alumnos de acuerdo a sus respuestas dadas al cuestionario (las respuestas en la realización de las prácticas matemáticas respecto a los conocimientos previos a la Asimetría estadística y si saben cuándo utilizar las propiedades, en qué contextos, bajo qué condiciones) y se pudo conocer la forma en que ellos construyen su conocimiento.
   - ***Conclusiones respecto a la relación entre el análisis epistémico (significado institucional) y el análisis cognitivo (significado personal):*** En esta fase, se dieron las conclusiones de los significados mencionados, relacionando la manera de enseñar y lo que han aprendido los alumnos respecto a la Asimetría estadística y se dieron los aportes y limitaciones de la investigación.

Capítulo 4

Significado Institucional de referencia de la Asimetría estadística

4.1. Introducción

En este capítulo se considera un análisis de los objetos y procesos primarios de la Asimetría estadística considerando para este análisis los libros de texto del curso: “Estadística básica” recomendados a los alumnos del tercer ciclo de Economía de la UNAC en su sílabo.
La asimetría de datos se enseña a estos alumnos en la séptima semana de clase, exactamente en la unidad denominada: “Estadígrafos de forma y de concentración”.(Ver el sílabo en el apéndice D).

4.2. Objetivos específicos del análisis

- Identificar los libros de texto del curso.
- Seleccionar las partes de los libros de texto que tratan la Asimetría estadística.
- Identificar los objetos y procesos primarios de la Asimetría estadística en los libros de texto.
- Analizar los objetos y procesos primarios de los libros considerando tablas comparativas.

4.3. Metodología

Para el análisis del significado institucional que en la UNAC se imparte, se consideró 4 etapas:

- Identificación de los libros de texto del curso.
- Se seleccionó los capítulos que tratan el tema de Asimetría estadística en los libros de texto.
- Se identificó los "objetos y procesos primarios" respecto a la Asimetría estadística en los libros de texto.
- Se analizó los "objetos y procesos primarios" de los libros de texto del curso, considerando tablas comparativas.

4.4. Identificación de los libros de texto

Según el sílabo del curso de "Estadística básica", se recomienda 8 libros de texto para los alumnos de Economía del tercer ciclo de la UNAC.

4.4.1. Descripción general de los libros de texto

Los datos generales de estos libros se muestran en el cuadro 4.1 cuyos contenidos son: El título del libro, el (la) autor (a) o los (las) autores (as), la editorial, la edición y la reimpresión (en el caso de que algún libro la tenga).

4.4.2. Descripción de las partes de los libros de texto que tratan la Asimetría Estadística

En el cuadro 4.2 se muestra el contenido para cada uno de los libros de texto que se muestran en el cuadro 4.1 respecto a la Asimetría estadística. Estos contenidos son:

I : Nº de capítulos.

II : Nº de páginas.

III : Nº del capítulo con el concepto de Asimetría de una variable aleatoria.

IV : Nº del capítulo con el concepto de Asimetría de datos.

V : Nº de secciones de la Asimetría de variable aleatoria y/o de datos.

VI : Nº de sección del capítulo donde aborda la Asimetría de una variable aleatoria y/o de datos.

VII : Nº de páginas de la sección donde aborda la Asimetría de una variable aleatoria y/o datos.

VIII : Página de inicio/página de final de la sección donde aborda la Asimetría de una variable aleatoria.

IX : Página de inicio/página de final de la sección donde aborda la Asimetría de datos.

X : Partes de la sección de la Asimetría de una variable aleatoria y/o datos.

XI : Numeral de las figuras de la sección donde aborda la Asimetría de datos.

En el cuadro 4.2 se observa que el libro de Sweeney, A. y Williams, T. (libro A) y el libro de Quispe, R. (libro G) no contienen el tema de la Asimetría estadística. Por otro lado, el libro de Martín, F. (que es un libro de texto recomendado para los alumnos en estudio, según el sílabo) no se encontró en la biblioteca de la UNAC y por eso no se lo ha considerado en el análisis.

4.5. Objetos y procesos primarios de la Asimetría estadística en los libros de texto

Con el análisis de los libros de texto, que es el significado institucional que ha sido elegido por la UNAC para la enseñanza de los temas estadísticos (que incluye la enseñanza de la Asimetría estadística) se verá qué tanto se aborda respecto a la Asimetría estadística; también, de acuerdo a la enseñanza con estos libros de texto, se pretende ver la manera que abordan esta enseñanza los docentes de la UNAC, y con las conclusiones de este análisis, se tendrá una base para determinar, más adelante, la correspondencia de todo lo que supuestamente se ha enseñado en la UNAC, es decir, la correspondencia del significado institucional con las conclusiones del análisis de los significados personales (de los alumnos) respecto a la Asimetría y a conocimientos previos a este objeto matemático (segunda parte de la fase 4 de la metodología de investigación) de estos alumnos.

Libro	Título	Autores	Editorial	Edición	Reimpresión
A	Estadística para administración y economía	Anderson, David; Sweeney, Dennis; Williams, Thomas	Editorial Cengage Learning (México)	2009	
B	Estadística descriptiva e inferencial	Córdova, Manuel	Mochera (Lima)	2003	2008
C	Estadística descriptiva y probabilidades	Chué, Jorge; Barreno, Emma, Castillo, Carlos; Millones, Rosa; Vásquez, Félix	Fondo Editorial Universidad de Lima (Lima)	2009	
D	Estadística descriptiva con soporte del SPSS y MATLAB	Adriazola, Ysabel; Cárdenas, Ana; Condado, Jorge; Depaz, Pilar; Gómez, Doris; Martínez, Blanca.; Solano, Olga	Fondo Editorial Universidad Nacional Mayor de San Marcos (Lima)	2006	
E	Estadística económica y empresarial	Montiel, A; Rius, F; Barón, F.	Prentice Hall (Madrid - España)	1997	
F	Probabilidad e inferencia estadística	Moya R. y Saravia Gregorio	Fondo Editorial Universidad Nacional Mayor de San Marcos (Lima)	1998	
G	Medición de la Economía con los números índices	Quispe, Renán	Concytec (Lima)	2003	

Cuadro 4.1: Descripción general de los libros de texto de Estadística para los alumnos en estudio.

Libro	I.	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
A	21	1080	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	10	503	0	3	6	3.3	3	0	75-77	Definición (Índice de asimetría de Pearson, Interpretación (de la medida de Asimetría), Nota: Otros índices de asimetría, ojivas asimétricas y simétricas.	Figura 3.1, Figuras 3.2a, 3.2b
C	4	294	0	7	1	7.1	2	0	60-61	Medidas de forma, coeficiente de asimetría, ejemplo 36, 37.	Figura 32
D	8	459	0	3	1	1	3	0	168-170	Definición, ejemplo	s/nº
E	11	419	4	4	1	4.4	9	97-98	93-96, 99-101	Criterios de asimetría, diagramas de caja, índice basado en los tres cuartiles, coeficiente de asimetría de Yule - Bowley, índice de asimetría de Pearson e índice basado en el momento central de tercer orden o coeficiente de asimetría de Fisher	Figura 4.1: Simetría y asimetría de distribuciones de frecuencias, Figura 4.2: Asimetría positiva y asimetría negativa, Figura 4.3: Diagrama de caja en el que se observa la asimetría positiva, Figura 4.4: Uso de los cuartiles para medir la asimetría.
F	9	807	3	3	7	3.2.7	2	351-352; 357-358	0	Definición.	Figura 3.2.7, Figura 3.2.8
G	1080	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Cuadro 4.2: Contenido de los libros de texto A, B, C, D, E, F y G mencionados en el cuadro 4.1

4.5.1. Elementos lingüísticos:

4.5.1.1. Notaciones y símbolos

a) **Presentación de las notaciones y símbolos en los libros de texto:**
Las notaciones y símbolos que se presentan en los 5 libros de texto analizados se muestran en los cuadros 4.3, cuadro 4.4, cuadro 4.5, cuadro 4.6 y 4.7:

1. Libro de Córdova, M. (Libro B):
En el cuadro 4.3 se muestra la notación y símbolos de las definiciones de las aproximaciones de los estimadores de la Asimetría estadística, que se vio en el capítulo 3, sección 3.1.4.3; este libro muestra a estas definiciones como las definiciones de la Asimetría estadística de una muestra.

Índice de asimetría de Pearson	$A_s = \frac{\overline{x}-Mo}{s}$ Como en distribuciones simétricas se verifica: $\overline{x} - Mo \cong 3(\overline{x} - Me)$, entonces otra forma de dar el índice de asimetría es: $A_s = \frac{3(\overline{x}-Me)}{s}$ Si $A_s = 0$ coinciden los tres promedios: $\overline{x} = Me = Mo$. Si $A_s \neq 0$, la distribución es asimétrica. Es asimétrica positiva o sesgada a la derecha, si $A_s > 0$, donde $Mo < Me < \overline{x}$ Es asimétrica negativa o sesgada a la izquierda si $A_s < 0$, donde $\overline{x} < Me < Mo$
Índice de asimetría de Pearson utilizando momentos	$A_s = \frac{nM_3}{(n-1)(n-2)s^3}$ donde $M_3 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3$,
Índice de asimetría de Fisher (para n datos tabulados en k intervalos)	$A_s = \frac{M_3/n}{s^3}$ donde $M_3 = \sum_{i=1}^{k} f_i(m_i - \overline{x})^3$. Si la distribución es simétrica $A_s = 0$. Si $A_s > 0,$ es simétrica positiva Si $A_s < 0,$ es asimétrica negativa

CUADRO 4.3: Notación y símbolos en el libro B. $A_s, \overline{x}, s, Mo, Me, M_3, x_i, f_i, m_i, n$ denotan la Asimetría, la media, la desviación estándar, la moda, la mediana, el tercer momento, los valores de la muestra, los valores de la frecuencia absoluta, los momentos y el número de casos, respectivamente.

2. Libro de Chué, J.; Barreno, E., Castillo, C.; Millones, R.; Vásquez, F. (Libro C):
En el cuadro 4.4 se muestra la notación y símbolos de una de las definiciones de las aproximaciones de los estimadores de la Asimetría estadística, que se vio en el capítulo 3, sección 3.1.4.3; este libro muestra a estas definiciones como las definiciones de la Asimetría estadística de una muestra.

Coeficiente de asimetría	$CA = \frac{3(\overline{x}-me)}{s}$ Si $CA < 0$, entonces la distribución es asimétrica a la izquierda (negativa). Si $CA > 0$, entonces la distribución es asimétrica a la derecha (positiva). Si $CA = 0$, entonces la distribución es simétrica.

Cuadro 4.4: Notación y símbolos en el libro C. CA es el coeficiente de asimetría, $\overline{x}, me$ y s son la media, mediana y desviación estándar respectivamente.

3. Libro de Adriazola, Y.; Cárdenas, A.; Condado, J.; Depaz, P.; Gómez, D.; Martínez, B.; Solano, O. (Libro D):

   En el cuadro 4.5 se muestra la notación y símbolos de las definiciones de las aproximaciones de los estimadores de la Asimetría estadística, que se vio en el capítulo 3, sección 3.1.4.3; este libro muestra a estas definiciones como las definiciones de la Asimetría estadística de una muestra.

Primer coeficiente de asimetría	$a_1 = \frac{\overline{x}-Mo}{s}$ Si $a_1 > 0$, la asimetría de la distribución de frecuencias es positiva. Si $a_2 < 0$, la asimetría de la distribución de frecuencias es negativa. Si $a = 0$, la distribución de frecuencias es simétrica.
Segundo coeficiente de asimetría	$a_2 = \frac{3(\overline{x}-Me)}{s}$
Tercer coeficiente de asimetría	$a_3 = \frac{\sum(x_i-\overline{x})/n)}{s^3}$

Cuadro 4.5: Notación y símbolos en el libro D. a_1, a_2 y a_3 denotan el primer, segundo y tercer coeficiente de asimetría; $\overline{x}, Mo, Me, s$ son la media, moda, mediana y desviación estándar respectivamente y x_i y n son los valores de la muestra y la cantidad de datos respectivamente.

4. Libro de Montiel, A; Rius, F; Barón, F. (Libro E):

   En el cuadro 4.6 se muestra la notación y símbolos de una de las definiciones de la Asimetría estadística de una variable aleatoria (en la primera fila) y las definiciones de las aproximaciones de los estimadores de la Asimetría estadística, que se vio en el capítulo 3, sección 3.1.4.3; este libro muestra a estas definiciones como las definiciones de la Asimetría estadística de una muestra.

5. Libro de Moya, R. y Saravia, G. (Libro F):

   En el cuadro 4.7 se muestra una de las definiciones de la Asimetría estadística de una variable aleatoria que se vio en el capítulo 3, sección 3.1.4.1.

Índice basado en los tres cuartiles Coeficiente de asimetría de Yule-Bowley	$A_s = \frac{(Q_3-Q_2)-(Q_2-Q_1)}{Q_3-Q_1}$. Si A_s es positivo, la distribución es asimétrica positica. Si A_s es negativo, la distribución es asimétrica negativa.
Primer coeficiente de asimetría de Pearson	$A_{s1} = \frac{\overline{x}-Moda}{s}$. Si $A_{s1} > 0$, la asimetría es positiva. Si $A_{s1} < 0$, la asimetría es negativa.
Segundo coeficiente de asimetría de Pearson	$A_{s2} = \frac{3(\overline{x}-Med)}{s}$. Si $A_{s2} > 0$, la asimetría es positiva. Si $A_{s2} < 0$, la asimetría es negativa.
Índice basado en el momento central de tercer orden o Coeficiente de asimetría de Fisher	$\gamma_1 = \frac{m_3}{s^3}$. Si $\gamma_1 > 0$, la asimetría es positiva. Si $\gamma_2 < 0$, la asimetría es negativa.

Cuadro 4.6: Notación y símbolos en el libro E. $A_s, A_{s1}, A_{s2}, \gamma_1$ denotan el coeficiente de Asimetría de Yule-Bowley, el primer, segundo y tercer coeficiente de asimetría de Pearson y el coeficiente de asimetría de Fisher, respectivamente; $\overline{x}, Moda, Med, s, Q_1, Q_2, Q_3$ denotan la media, la mediana, la desviación estándar, el primer, segundo y tercer cuartil respectivamente; m_3 denota el tercer momento muestral.

Asimetría o sesgo	$S_k = \frac{E\ [(X-\mu)^3\ ]}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$. Si $S_k > 0$, la distribución está sesgada a la derecha (asimetría positiva). Si $S_k < 0$, la distribución está sesgada a la izquierda (asimetría negativa). Si $S_k = 0$, la distribución es simétrica respecto a la media.

Cuadro 4.7: Notación y símbolos en el libro F. S_k denota la asimetría o sesgo, μ_3 denota el tercer momento de la variable aleatoria y σ denota la desviación estándar de la variable aleatoria.

b) **Análisis de las notaciones y símbolos de los libros de texto para la Asimetría:**

1. Comparando las notaciones de los 5 libros de texto analizados, se ha agrupado según las similitudes

   - Los libros de Córdova, M. (Libro B), Gómez, D.; Martínez, B.; Solano, O. (Libro D) y Montiel, A; Rius, F; Barón, F. (Libro E) dan la definición de la Asimetría en relación a la media y a la moda como también en relación a la media y a la mediana:

     Libro B:

     $$A_s = \frac{\overline{x} - Mo}{s} \cong \frac{3(\overline{x} - Me)}{s}$$

     Libro D:

     $$a_1 = \frac{\overline{x} - Mo}{s}$$

     $$a_2 = \frac{3(\overline{x} - Me)}{s}$$

Libro E:

$$A_{s1} = \frac{\overline{x} - Moda}{s}$$

$$A_{s3} = \frac{3(\overline{x} - Med)}{s}$$

- En los libros de Córdova, M. (Libro B); Gómez, D.; Martínez, B.; Solano, O. (Libro D) y de Montiel, A; Rius, F; Barón, F. (Libro E) dan la definición de la Asimetría mediante el coeficiente de Fisher para una muestra; en el libro de Moya, R. y Saravia, G. (Libro F) da la definición mediante el coeficiente de Fisher para una población:

  Libro B:

  $$A_s = \frac{M_3/n}{s^3}$$

  donde $M_3 = \sum_{i=1}^{k} f_i(m_i - \overline{x})^3$

  Libro D:

  $$a_3 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})/n}{s^3}$$

  Libro E:

  $$\gamma_1 = \frac{m_3}{s^3}$$

  Libro D:

  $$A_s = \frac{M_3/n}{S^3} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^3}{nS^3}$$

  Libro E:

  $$CA_s = \frac{M_3}{S^3}$$

- En el libro de Córdova, M. da la definición de la Asimetría con el índice de Asimetría de Pearson utilizando momentos:

  $$A_s = \frac{nM_3}{(n-1)(n-2)s^3},$$

  donde $M_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^3$

- Los únicos dos libros que dan una de las definiciones de la Asimetría estadística para una variable aleatoria son: El libro de Montiel, A; Rius, F; Barón, F. (Libro E) que da la definición del Coeficiente de asimetría de Yule-Bowley o índice basado en los tres momentos y el libro de Moya, R. y Saravia, G. (Libro F) que da la definición con el nombre de asimetría o sesgo:

  $$A_s = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

2. Comparando los símbolos para la Asimetría en los 5 libros de texto:

   Los símbolos que se utilizan para cada uno de estos libros son:

   - Para el libro de Córdova, M. (Libro B): A_s
   - Analizando el libro de Chué, J.; Barreno, E., Castillo, C.; Millones, R.; Vásquez, F. (Libro C): CA
   - Analizando el libro de Adriazola, Y.; Cárdenas, A.; Condado, J.; Depaz, P.; Gómez, Doris; Martínez, B.; Solano, O. (Libro D): $a_i, i = 1, 2, 3$
   - Analizando el libro de Montiel, A; Rius, F; Barón, F. (Libro E): $A_{s_i}, i = 1, 2$ y γ_1
   - Para el libro de Moya, R. y Saravia, G. (Libro G): S_k

   Con la notación de índice de asimetría de Pearson (libro B), primer y segundo coeficiente de asimetría (libro D) y primer y segundo coeficiente de asimetría de Pearson (libro E).

c) **Conclusiones del análisis de las notaciones y símbolos de los libros de texto para la Asimetría:**

- De lo anterior se deduce que el significado institucional para la Asimetría estadística está constituído por 6 definiciones, de éstas, 5 definiciones son para datos de una muestra y la segunda y quinta definición es para una variable aleatoria. Estas definiciones son:

  1. El Índice de Asimetría de Pearson o Primer coeficiente de asimetría de Pearson o Coeficiente de asimetría (que es la misma definición con variación de nombre y tiene dos formas diferentes de expresión).
  2. El Segundo coeficiente de Pearson.
  3. Índice basado en los tres momentos o Coeficiente de asimetría de Yule-Bowley.
  4. El Índice de Asimetría de Fisher o Tercer coeficiente de asimetría o Coeficiente de Asimetría de Fisher.
  5. El Índice de Asimetría de Pearson utilizando momentos.
  6. Asimetría o sesgo.

- La definición de Asimetría estadística para una variable aletoria, como se vio en el capítulo 3, no es única, son varias las definiciones para la Asimetría estadística, dos de los cinco libros de texto analizados dan solo una de las definiciones de la Asimetría estadística de una variable aleatoria, estos libros son:

- El libro de Montiel, A; Rius, F; Barón, F. (Libro E):
  Índice basado en los tres cuartiles o Coeficiente de asimetría de Yule-Bowley:
  $$A_s = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1},$$
  donde $Q_i, i = 1, 2, 3$ son el primer, segundo y tercer cuartil respectivamente.
- El libro de Moya, R. y Saravia, G. (libro G)
  La Asimetría o sesgo:
  $$S_k = \frac{E\ [(X - \mu)^3\ ]}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$
  donde μ_3 es el tercer momento, σ es la desviación estándar y es la definición del Coeficiente de Asimetría de Fisher para una población.

- El significado institucional para la asimetría estadística dada en la UNAC, para la mayoría de los libros, se refiere a aproximaciones de los estimadores de la Asimetría estadística (esto se vió en el capítulo 3, sección 3.1.4.3); este significado institucional no es la definición teórica para la Asimetría estadística (como se vió en el capítulo 3, sección 3.1.4.2).

4.5.1.2. Gráficos:

- **Análisis de las figuras en los libros de texto:**
  En todos los 5 libros de texto, las gráficas muestran la ubicación de las medidas de tendencia central: media, mediana y moda según el tipo de asimetría: ya sea simetría, asimetría positiva o asimetría negativa. Para la simetría: $Mo = Me = \overline{x}$, para la asimetría positiva: $Mo < Me < \overline{x}$ y para la asimetría negativa: $\overline{x} < Me < Mo$. Un solo libro, el de Montiel, A; Rius, F; Barón, F. (Libro E) da un gráfico de diagrama de caja (Figura 4.6) en la que se muestra un tipo de asimetría (asimetría positiva).

1. Las gráficas en el libro de Córdova, M. (Libro B), se muestran en la Figura 4.1:

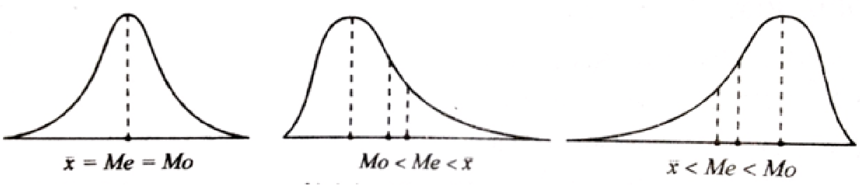


FIGURA 4.1: Gráfica simétrica, asimetría positiva y asimetría negativa (Libro B)

2. Las gráficas en el libro de Chué, J.; Barreno, E., Castillo, C.; Millones, R.; Vásquez, F. (Libro C) se muestran en la Figura 4.2.

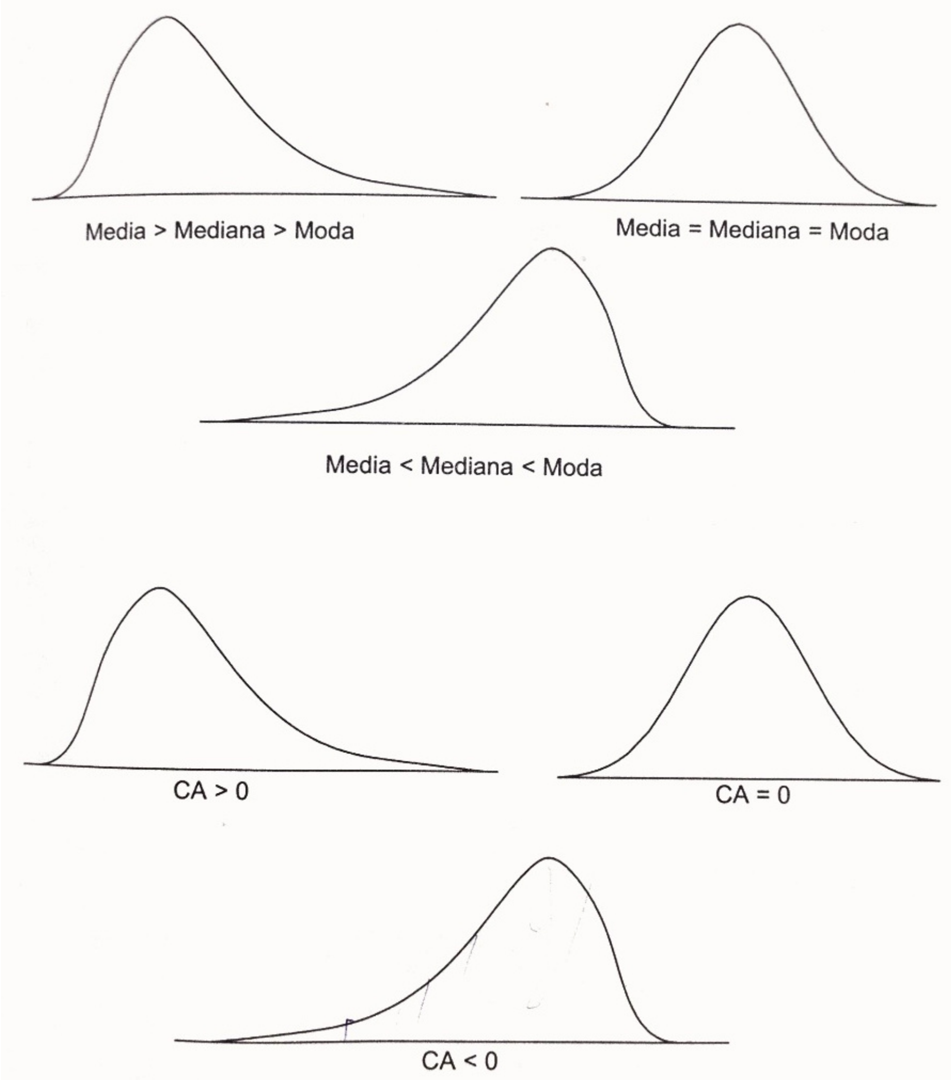


FIGURA 4.2: Asimetría positiva, simétrica, asimetría negativa (de Izq. a Der.- Libro C)

3. Las gráficas en el libro de Adriazola, Y.; Cárdenas, A.; Condado, J.; Depaz, P.; Gómez, D.; Martínez, B.; Solano, O. (Libro D) se muestran en la Figura 4.3.

4. Las gráficas en el libro de Montiel, A; Rius, F; Barón, F. (Libro E) se muestran en las figuras 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8.

5. Finalmente en el libro de Moya, R. y Saravia, G. (Libro F), se tiene la Figura 4.9.

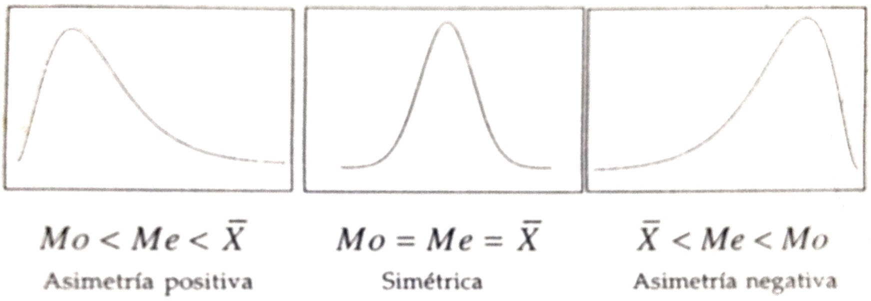


FIGURA 4.3: Tipos de Asimetría (Libro D)

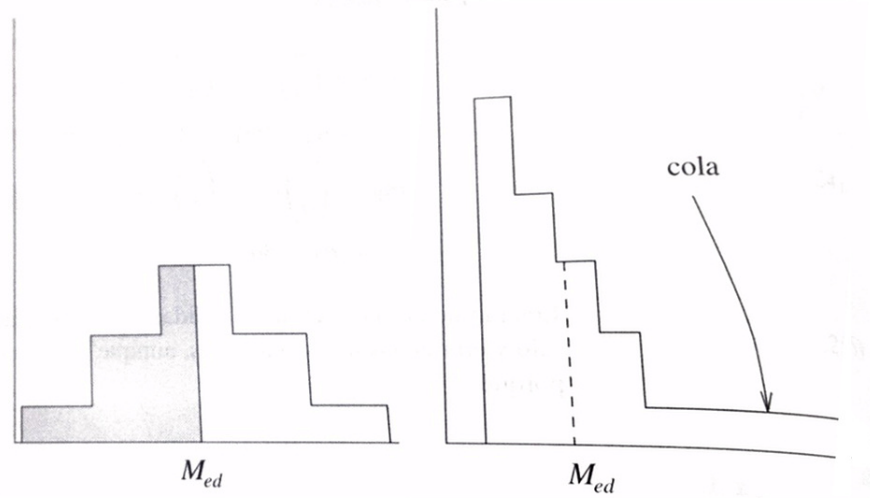


FIGURA 4.4: Simetría y asimetría de distribuciones de frecuencias (Libro E)

4.5.2. Situaciones problemáticas

a) **Presentación de las situaciones problemáticas:**

En los 5 libros de texto, se tienen las siguientes situaciones problemáticas:

1. En el libro de Córdova, M. (Libro B) (p.78):

Ejemplo1 (Ejemplo 1.3 p.15): Los ingresos quincenales en dólares (variable X) de 45 personas:

63	89	36	49	56	64	59	35	78
43	53	70	57	62	43	68	62	26
64	72	52	51	62	60	71	61	55
59	60	67	57	67	61	67	51	81
53	64	76	44	73	56	62	63	60

Esta distribución de frecuencias no es simétrica.

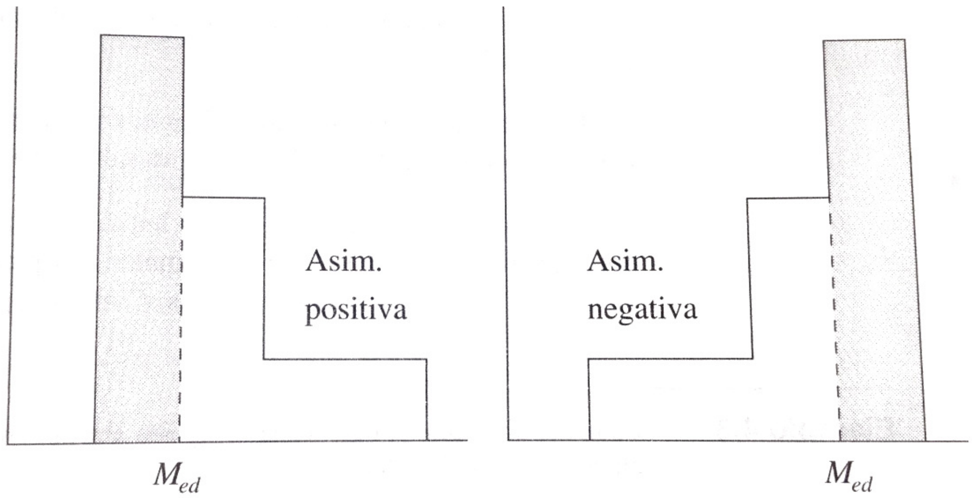


FIGURA 4.5: Asimetría positiva y asimetría negativa (Libro E)

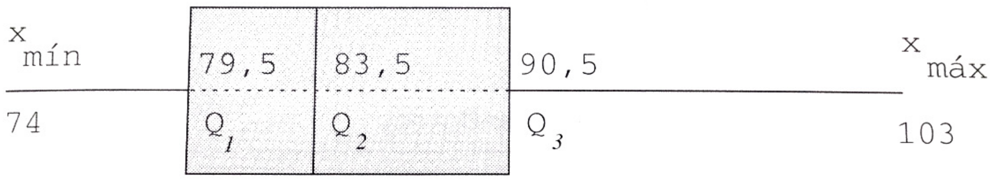


FIGURA 4.6: Ejemplo particular: Diagrama de caja en la que se muestra la asimetría positiva (Libro E)

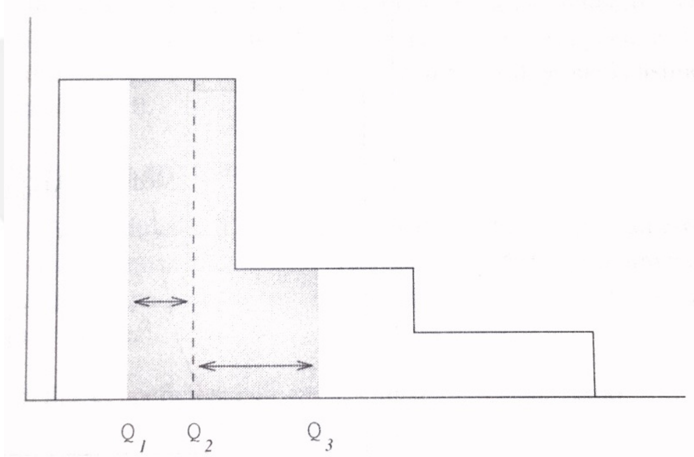


FIGURA 4.7: Uso de los cuartiles para medir la asimetría (Libro E)

Ejercicio propuesto (p.81): La distribución de las notas resultantes en un examen de conocimientos tiene media igual a 10, la mediana igual a 8, moda igual a 4 y desviación estándar igual a 3.

- Describa y calcule la asimetría de la distribución

- **Análisis de los enunciados de las situaciones dadas:**

  Para el cálculo de la asimetría, en la situación del ejemplo 1, se dan datos

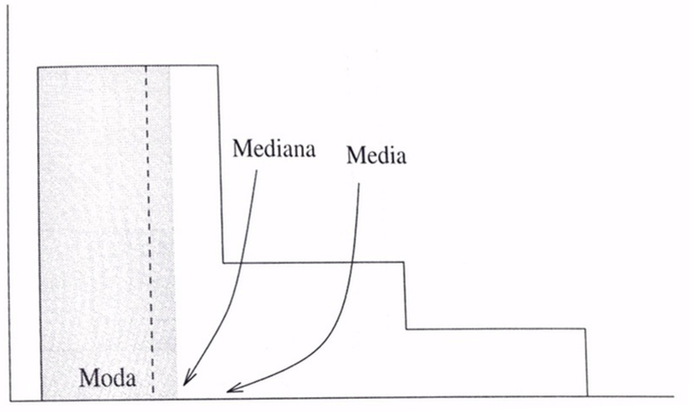


FIGURA 4.8: Asimetría a la derecha (Libro D)

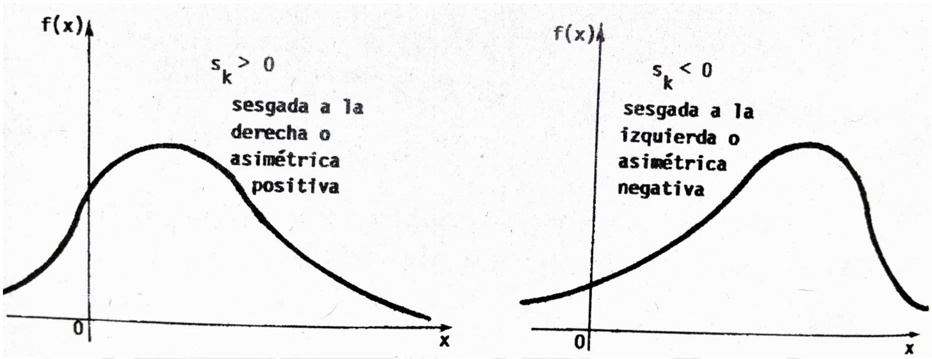


FIGURA 4.9: Asimetría positiva y Asimetría negativa

no agrupados; y, en el ejercicio propuesto, se dan datos de las medidas de tendencia central y se da una medida de variabilidad: la desviación estándar. Estos son conocimientos previos a la asimetría estadística que los alumnos en estudio deberían conocer.

2. Analizando el libro de Chué, J.; Barreno, E., Castillo, C.; Millones, R.; Vásquez, F. (Libro C):

> **Ejemplo 1 (Ejemplo 37, p.62):** Los siguientes valores corresponden a una muestra aleatoria de los ingresos familiares (en nuevos soles) de los estudiantes de un centro educativo estatal de educación inicial:
>
> $$650, 850, 700, 900, 1200, 650, 840, 760, 900, 1100, 1500, 680, 800$$
>
> Calcule el coeficiente de asimetría de los datos.

Ejemplo 2 (Ejemplo 46, p.73): La siguiente distribución de frecuencias corresponde a los gastos en pasajes de los técnicos de una compañía de reparaciones de televisores:

Monto del pasaje	[5-15[	[15-25[	[25-35[	[35-45[	[45-55]
Frecuencia	2	8	7	2	1

Calcule lo siguiente:

a) La varianza muestral de los gastos.

b) El coeficiente de variabilidad de los gastos.

c) El coeficiente de asimetría de los gastos.

d) El tercer cuartil de los gastos.

e) El gráfico de caja de los gastos.

Problema 1 (Problema 5, p.82): Los siguientes datos corresponden a los rendimientos (en unidades producidas por hora) de los operarios de dos fábricas competidoras. La empresa A tiene implementado un sistema de calidad y la empresa B no tiene dicho sistema.

Fábrica A	70	76	69	69	72	66	66	70	76	68
	69	70	72	74	67	70	72	73	70	69
Fábrica B	60	57	67	71	68	62	69	70	76	66
	59	71	61	68	79	65	60	66	69	69

a) Utilice Minitab para completar el siguiente cuadro

Fábrica	Promedio	Mediana	Cuartil 1	Cuartil3	Desviación estándar
A					
B					

b) De acuerdo con el cuadro anterior, justificando con técnicas estadísticas responda:

a) ¿Es la distribución de los rendimientos de los operarios de la fábrica A menos asimétrica que la correspondiente a la fábrica B?

b) ¿Hay menor homogeneidad en los rendimientos de los operarios de la fábrica B que en aquellos de la fábrica A?

c) Luego de construir diagramas de caja para las dos distribuciones, ¿tiene la caja A más amplitud que la caja B?

Ejemplo 1 (Ejemplo 37, p.62): Los siguientes valores corresponden a una muestra aleatoria de los ingresos familiares (en nuevos soles) de los estudiantes de un centro educativo estatal de educación inicial:

$$650, 850, 700, 900, 1200, 650, 840, 760, 900, 1100, 1500, 680, 800$$

Calcule el coeficiente de asimetría de los datos.

Problema propuesto (Problema propuesto 1, p.98): En una distribución de frecuencias de los puntajes de un examen de matemáticas, el percentil 75 es la puntuación 12.7, el percentil 50 es 11 y el percentil 25 es la puntuación 7.8. Analice el tipo de asimetría de la distribución e interprete.

- **Análisis de los enunciados de las situaciones dadas:** En los enunciados de las situaciones problemáticos de este texto, los alumnos requieren conocer un programa estadístico: el Minitab, deben tener como conocimientos previos la media, la mediana y desviación estándar, pues solo utilizarán para la solución de los problemas el coeficiente de asimetría de Pearson que utiliza estos tres conocimientos previos y también los diagramas de caja, la interpretación de los percentiles en los diagramas de caja.

3. Analizando el libro de Adriazola, Y.; Cárdenas, A.; Condado, J.; Depaz, P.; Gómez, D.; Martínez, B.; Solano, O. (Libro D):

Problema 1 (Ejemplo 47, p.170): Para la variable edad de los estudiantes de maestría del ejemplo 4:

Edades	Marca de clase	Frecuencia absoluta
[23-32[	27.5	6
[32-41[	36.5	12
[41-50[	45.5	8
[50-59[	54.5	2
[59-68]	63.5	2

se obtuvieron los valores de las siguientes medidas: media = 40,1; mediana = $38,75$; moda $= 37,4$ y desviación estándar $= 9,915$. Obtener el coeficiente de asimetría.

Problema 2 (Ejemplo 48, p.172): Las siguientes medidas corresponden a las edades de un grupo de 100 estudiantes universitarios.

Medidas

Media = 26.7

Mediana = 27

Moda = 27

Desviación estándar = 8,11

Cuartil uno = 23

Cuartil tres = 31

Percentil diez = 15

Percentil noventa = 38,6

Para saber qué forma tiene la distribución, calcularemos los coeficientes de asimetría y curtosis.

Problema 3 (Ejemplo 49, p.173): Con la base de DATOS1-maestría y usando los comandos del SPSS obtenemos los coeficientes de sesgo y curtosis.

Problema propuesto 1 (Ejemplo 3, p.186): Los datos de la siguiente tabla son las puntuaciones de una prueba de relaciones espaciales a dos grupos de adolescentes.

Intervalos de puntuaciones	Grupo A	Grupo B	Intervalos de puntuaciones	Grupo A	Grupo B
[4-8[	1	1	[36-40[	18	10
[8-12[	0	2	[40-44[	20	8
[12-16[	0	2	[40-48[	38	5
[16-20[	2	3	[48-52[	36	4
[20-24]	4	3	[52-56[	18	2
[24-28]	6	4	[56-60[	12	0
[28-32]	8	4	[60-64[	2	1
[32-36]	10	6			

a) Calcular la media aritmética, mediana y moda para cada grupo de adolescentes.

b) ¿Cuál es la medida de tendencia central?

c) Calcular el percentil 10 y percentil 90. Interpretar en cada caso.

d) Calcular el coeficiente de asimetría y curtosis.

Problema propuesto 2 (Ejemplo 16, p.190): Un maestro aplicó la misma prueba de Estadística a dos secciones de un mismo grado. Los resultados fueron los siguientes:

	Sección A	Sección B
Mediana	64.6	64.3
Media	65	63.2
Percentil 25	61	54.0
Percentil 75	69	70.0
Desviación estándar	6.0	10.5

a) Calcular el rango semiintercuartílico. Interprete el resultado.

b) ¿En cuál de las dos secciones los resultados fueron más homogéneos?

c) Calcular el coeficiente de asimetría y curtosis. Indicar la forma de la distribución.

d) ¿Qué puede concluir usted acerca del desempeño de las dos secciones?

d) Calcular la media y varianza global para las dos secciones.

- **Análisis de los enunciados de las situaciones dadas:**
  En los enunciados de las situaciones problemáticos de este texto, los alumnos requieren conocer un programa estadístico: el SPSS, deben tener como conocimientos previos el cálculo de la marca de clase, el algoritmo para el cálculo de la media, mediana y moda para datos agrupados, el cálculo de la desviación estándar.

4. Analizando el libro de Montiel, A; Rius, F; Barón, F. (Libro E):

Ejercicio 1 (Ejemplo 4.2, p.111): Las edades de los alumnos de un centro dedicado a la enseñanza de idiomas se reflejan en la tabla siguiente:

Int.	[7-9[	[9-11[	[11-12[	[12-13[	[13-14[	[14-15[	[15-17[	[17-19[
n_i	4	18	14	27	42	31	20	1

Determinar la variabilidad de la edad mediante los estadísticos varianza, desviación típica, coeficiente de variabilidad y rango intercuartílico. Estudiar la simetría de la variable.

Problema propuesto 1 (Problema propuesto 4.3, p.115): A continuación se dan los resultados obtenidos con una muestra de 10 universitarios. La variable en estudio es el tiempo de reacción-en décimas de segundo-ante un estímulo auditivo:

$$1{,}10, 1{,}26, 1{,}12, 1{,}17, 1{,}13, 1{,}35, 1{,}07, 1{,}22, 1{,}13, 0{,}98$$

Calcular:

a) Medidas de variabilidad absoluta más frecuentes.

b) Alguna medida de variabilidad relativa.

c) El índice de asimetría de Fisher.

- **Análisis de los enunciados de las situaciones dadas:**
  En los enunciados de las situaciones problemáticos de este texto, los alumnos deben tener como conocimientos previos el algoritmo para calcular los cuartiles, la mediana, la media, el cálculo de la desviación estándar y luego tienen que aplicar estos datos al cálculo de la asimetría estadística.

5. En el libro de libro de Moya, R; Saravia, G. (Libro F):

Ejemplo (Ejemplo 35, p.358) Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad

x	2	4	6	8
p(x)	0.4	0.3	0.2	0.1

Hallar

- Los cuatro primeros momentos iniciales.
- Los cuatro primeros momentos centrales.
- La asimetría.

Ejercicio propuesto 1 (Problema 3.2, 34, p.367): Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es la siguiente:

x	0	1	2	3	4
p(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Calcular

- $E(2X+1), V(X), V(2X+1), E(X^2+2X+1)$
- La moda y la mediana de X.
- El tercer momento alrededor de la media.

Ejercicio propuesto 2 (Problema 3.2, 35, p.367): La siguiente tabla representa el número de televisores vendidos en cierta semana en una tienda.

x	0	1	2	3	4	5
p(x)	0.05	0.1	0.35	0.25	0.2	0.05

Halllar

- $E(3X-2), E(-6X+10), E(2X^2+3X-5)$
- La media, la varianza y la desviación estándar de X.
- La moda y el tercer momento alrededor de la media de X.

Ejercicio propuesto 3 (Problema 3.2, 36, p.368): Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad está dado por:

x	1	3	5	7	9
p(x)	0.1	0.4	0.2	0.2	0.1

- Los primeros tres momentos iniciales (o alrededor del origen)
- Los primeros cuatro momentos centrales (o alrededor de la media).
- La asimetría.

Ejercicio propuesto 4 (Problema 3.2, 44, p.369): Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{3x^2}{2}, -1 < x < 1$$

Calcular

- La mediana.
- La moda
- El momento de orden 3 alrededor de la media.

- **Análisis del enunciado de las situaciones dadas:**
  En estas situaciones se dan como datos los conocimientos previos (a la Asimetría estadística) la distribución de probabilidad y la función de densidad.

b) **Conclusiones de las situaciones dadas en los libros de texto:**
En general, en los 5 libros de texto analizados, se pide a los alumnos hallar la asimetría de datos sin un contexto extramatemático que permitiría la emergencia de un nuevo objeto matemático: la asimetría estadística, es decir, se hace una enseñanza tradicional, porque se pide al alumno repetir el proceso

que se ha enseñado en la Institución, mediante los ejercicios resueltos de los libros de texto, para calcular la Asimetría estadística (exactamente la asimetría de datos) dándose ejercicios puntuales y descontextualizados; no se presentan situaciones con problemáticas reales que permitan enfrentar a los alumnos al razonamiento estadístico (reflexión, interpretación, etc).

4.5.3. Definiciones de la Asimetría estadística dadas en los libros de texto

a) **Conceptos previos, presentación y análisis de las definiciones dadas**

1. Analizando el libro de Córdova, M. (Libro B):

a.1) **Conceptos citados en el capítulo de asimetría:** Frecuencia, distribución de frecuencias, intervalos equidistantes, media, mediana, moda y desviación estándar.

a.2) **Definición de la Asimetría estadística (Libro B):** Se dice que una distribución de frecuencias es simétrica, si los intervalos equidistantes del intervalo central tienen iguales frecuencias. También se dice que una distribución es simétrica si su curva de frecuencias es simétrica con respecto al centro de datos.

1.1 El índice de asimetría de Pearson:

$$A_s = \frac{\overline{x} - Mo}{s} \cong \frac{3(\overline{x} - Me)}{s}$$

1.2 El índice de asimetría de Pearson utilizando momentos:

$$A_s = \frac{nM_3}{(n-1)(n-2)s^3},$$

donde $M_3 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3$

1.3 El índice de asimetría de Fisher:

$$A_s = \frac{M_3/n}{s^3},$$

donde $M_3 = \sum_{i=1}^{k} f_i(m_i - \overline{x})^3$

Ver el cuadro 4.3 para el significado de las notaciones.

a.3) **Análisis de la definición:** La primera definición corresponde a la definición del Coeficiente de Pearson dada en el marco teórico (ecuación 3.16); la segunda definición corresponde a la definición del Índice de asimetría de Pearson dada en el marco teórico (ecuación 3.18); la tercera definición corresponde a la definición del Coeficiente de Fisher dada en el marco teórico (ecuación 3.19). Todas estas definiciones corresponden a las definiciones de las aproximaciones de los estimadores de la Asimetría estadística (para una muestra aleatoria).

2. Analizando el libro de Chué, J.; Barreno, E., Castillo, C.; Millones, R.; Vásquez, F. (Libro C):

   a.1) **Conceptos citados en el capítulo de asimetría:** Desviación, distribución, distribución normal, distribución unimodal, media, mediana y desviación estándar.

   a.2) **Definición de la Asimetría estadística (Libro C):** La asimetría de un conjunto de datos puede definirse de diversas formas. En este texto se utiliza la desviación que tiene la distribución de un conjunto de datos con respecto a la distribución normal para juzgar si un conjunto de datos es simétrico o no.

   2.1 El coeficiente de asimetría es:

$$CA = \frac{3(\overline{x} - me)}{s}$$

   La fórmula CA debe utilizarse solo en aquellos datos que son unimodales. Ver el cuadro 4.4 para el significado de las notaciones.

   a.3) **Análisis de la definición:** Esta definición corresponde a la definición del Coeficiente de Pearson dada en el marco teórico (ecuación 3.16) que corresponde a una de las definiciones de las aproximaciones de los estimadores de la Asimetría estadística (para una muestra aleatoria).

3. Analizando el libro de Adriazola, Y.; Cárdenas, A.; Condado, J.; Depaz, P.; Gómez, D.; Martínez, B.; Solano, O. (Libro D):

   a.1) **Conceptos citados en el capítulo de asimetría:** Distribuciones unimodales, sesgo, distribución de frecuencias, media, mediana, moda y desviación estándar.

   a.2) **Definición de la Asimetría estadística (Libro D):** La asimetría de las distribuciones unimodales se mide con el sesgo de Pearson y se define como la diferencia entre la media y la moda.

   3.1 Primer coeficiente de asimetría:

$$a_1 = \frac{\overline{x} - Mo}{s}$$

3.2 Segundo coeficiente de asimetría:

$$a_2 = \frac{3(\overline{x} - Me)}{s}$$

3.3 Coeficiente de asimetría de tercer orden:

$$\frac{\sum(x_i - \overline{x})^3/n}{s^3}$$

Ver el cuadro 4.4 para el significado de las notaciones.

a.3) **Análisis de la definición:** La primera y segunda definición corresponde a la definición del Coeficiente de Pearson dada en el marco teórico (ecuación 3.16); la tercera definición corresponde a la definición del Coeficiente de Fisher dada en el marco teórico (ecuación 3.19). Todas estas definiciones corresponden a las definiciones de las aproximaciones de los estimadores de la Asimetría estadística (para una muestra aleatoria).

4. Analizando el libro de Montiel, A; Rius, F; Barón, F. (Libro E):

a.1) **Conceptos citados en el capítulo de asimetría:** Histograma de frecuencias, área, media, mediana, moda y cuartiles.

a.2) **Definición de la Asimetría estadística (Libro E):** Una distribución de frecuencias es simétrica si el lado derecho de la gráfica (a partir de la mediana) es la imagen del lado izquierdo dada por un espejo).

4.1 Índice basado en los tres cuartiles o coeficiente de asimetría de Yule-Bowley:

$$\frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

4.2 Primer coeficiente de asimetría de Pearson:

$$A_{s1} = \frac{\overline{x} - Moda}{s}$$

4.3 Segundo coeficiente de asimetría de Pearson:

$$A_{s2} = \frac{3(\overline{x} - Med)}{s}$$

4.3 Índice basado en el momento central de tercer orden o coeficiente de asimetría de Fisher:

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{s^3}$$

Ver el cuadro 4.5 para el significado de las notaciones.

a.3) **Análisis de la definición:** La primera definición corresponde a una de las definiciones de la Asimetría estadística de Bowley de una variable aleatoria (ecuación 3.7); la segunda y tercera definición corresponden a la definición del Coeficiente de Pearson dada en el marco teórico (para una muestra, ecuación 3.16) y la cuarta definición corresponde a la definición del Coeficiente de Fisher dada en el marco teórico (para una muestra, ecuación 3.19).

5. Analizando el libro de Moya, R; Saravia, G. (Libro F):

a.1) **Conceptos citados en el capítulo de asimetría:** Distribución de frecuencia, media, mediana, moda, medidas de dispersión, desviación estándar.

a.2) **Definición de la Asimetría estadística (Libro F):** Se llama asimetría o sesgo a la relación:

5.1
$$S_k = \frac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Ver el cuadro 4.6 para el significado de las notaciones.

a.3) **Análisis de la definición:** Esta definición corresponde a una de las definiciones de la Asimetría estadística de una variable aleatoria dada en el marco teórico (ecuación 3.4).

b) **Conclusiones de las definiciones presentadas en los libros de texto:** La mayoría de las definiciones que se presentan en los cinco libros de texto analizados, son realmente aproximaciones de los estimadores de la Asimetría estadística, es decir, estas definiciones no son las definiciones de la Asimetría estadística de una variable aleatoria, sino que estas definiciones que se dan en estos libros son para datos de una muestra y esto no lo hacen ver a los alumnos; los libros de texto que dan solo una de las definiciones de la Asimetría estadística para una variable aleatoria son los libros de Montiel, A; Rius, F; Barón, F. (Libro E) y Saravia, G. de la Asimetría (Libro F).

4.5.4. Propiedades y proposiciones

Se tienen las siguientes propiedades y proposiciones:

1. En el libro de Córdova, M. (Libro B):

- Si la distribución es simétrica, entonces, la media, la mediana y la moda coinciden. En contraposición, si estos 3 promedios no coinciden la distribución tiene que ser asimétrica.
- Si la distribución de los datos es simétrica, $A_s = 0$, además que coinciden los tres promedios: $\overline{x} = Me = Mo$

- Si $A_s \neq 0$, la distribución es asimétrica. Además, es asimétrica positiva o sesgada a la derecha, se $A_s > 0$ (donde $Mo < Me < \overline{x}$). Y, es asimétrica negativa o sesgada a la izquierda si $A_s < 0$ (donde $\overline{x} < Me < Mo$).
- Dos distribuciones pueden tener la misma media y la misma desviación estándar, pero pueden diferir en el grado de asimetría.
- Si la distribución es simétrica, entonces, la media, la mediana y la moda coinciden. En contraposición, si estos 3 promedios no coinciden la distribución tiene que ser asimétrica.
- Las ojivas o curvas de frecuencias acumuladas presentan formas particulares según el tipo de asimetría.
- Si la distribución de los datos es simétricas, $A_s = 0$, además que coinciden los tres promedios: $\overline{x} = Me = Mo$.
- Si $A_s \neq 0$, la distribución es asimétrica. Además, es asimétrica positiva o sesgada a la derecha, si $A_s > 0$, donde $Mo < Me < \overline{x}$.
- Es asimétrica negativa o sesgada a la izquierda si $A_s < 0$ donde $\overline{x} < Me < Mo$.

2. En el libro de Chué, J.; Barreno, E., Castillo, C.; Millones, R.; Vásquez, F. (Libro C):

   - La distribución es simétrica y unimodal cuando $\overline{x} = me = mo$
   - Si $CA < 0$, entonces la distribución es asimétrica a la izquierda o negativa. $(Media < mediana < moda)$
   - Si $CA > 0$, entonces la distribución es asimétrica a la derecha o positiva. $(Media > mediana > moda)$
   - Si $CA = 0$, entonces la distribución es simétrica. $(Mo = Me = \overline{x})$

3. En el libro de Adriazola, Y.; Cárdenas, A.; Condado, J.; Depaz, P.; Gómez, D.; Martínez, B.; Solano, O. (Libro D):

   - Si la diferencia entre la media y la moda es positiva, se dice que la asimetría es positiva y gráficamente la curva presenta la cola más larga a la derecha.
   - Si la diferencia entre la media y la moda es negativa, se dice que la asimetría es negativa y gráficamente la curva presenta la cola más larga a la izquierda.
   - Si $a_1 > 0, a_2 > 0$ y $a_3 > 0$, la asimetría de la distribución de frecuencias es positiva. $(Mo < Me < \overline{x})$
   - Si $a_1 > 0, a_2 < 0$ y $a_3 > 0$, la asimetría de la distribución de frecuencias es negativa. $(\overline{x} < Me < Mo)$

- Si $a_1 = 0, a_2 = 0$ y $a_3 = 0$, la distribución de frecuencias es simétrica. $(Mo = Me = \overline{x})$

4. En el libro de M., A; Rius, F; Barón, F. (Libro E):

- Si A_s es positivo, la distribución es asimétrica positiva.
- Si A_s es negativa, la distribución es asimétrica negativa.
- Si $A_{s2} > 0$ hay asimetría positiva.
- Si $A_{s2} < 0$ hay asimetría negativa.
- Si $\gamma_1 > 0$ hay asimetría positiva.
- Si $\gamma_1 < 0$ hay asimetría negativa.
- En una distribución asimétrica a la derecha se verifica que: $Moda < Med < \overline{x}$.
- En las distribuciones unimodales se verifica de modo aproximado la siguiente relación: $Moda \cong 3Med - 2\overline{x}$. Se puede decir entonces que: $\overline{x} - Moda \cong 3(\overline{x} - Med)$.

5. En el libro de Moya, R.; Saravia, G. (Libro F):

- Si la distribución de probabilidad es simétrica respecto a la media, entonces todos los momentos centrales de orden impar son iguales a cero, o sea $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \ldots = 0$
- Para la asimetría S_k (dada en el cuadro 4.6) , si $S_k > 0$, la distribución está sesgada a la derecha (asimétrica positiva);$S_k < 0$, la distribución está sesgada a la izquierda (asimétrica negativa) y si $S_k = 0$, la distribución es simétrica con respecto a la media.

4.5.5. Procedimientos

1. Analizando el libro de Córdova, M. (Libro B):
Solución del ejemplo 1 (p.78):
En esta distribución, los 45 ingresos quincenales tabulados en ocho intervalos tiene asimetria negativa:

$$A_s = \frac{3(\overline{x} - Me)}{s} = \frac{3(60{,}44 - 60{,}75)}{11{,}079} = -0{,}191$$

El proceso que se utiliza es de algoritmización Para hallar estos datos se procedió a:

- Construir una distribución de frecuencias de 8 intervalos:
Para ello, se determinó el rango (R) de variación de los datos y usó la definición respectiva: $R = X_{max} - X_{min}$ (p.14), donde X_{max} es el dato máximo y X_{min} es el dato mínimo:$R = 89 - 26$

- Se calculó la amplitud del intervalo a partir de la fórmula: $A = \frac{R}{k} = \frac{63}{8} =$ 7,875 y como los datos son enteros, se eligió A = 8.
- Se hizo un cuadro de distribución de frecuencias (de los ingresos de las 45 personas) mostrando en una columna el conteo.

Intervalos I_i	Conteo	Frec.absoluta f_i	Frec. relativah_i	Porcentaje p_i %
[26,34[		1	0,02	2,2
[34,42[		2	0,044	4,4
[42,50[		4	0,089	8,9
[50,58[		10	0,222	22,2
[58,66[		16	0,356	35,6
[66,74[		8	0,178	17,8
[74,82[		3	0,067	6,7
[82,90[		1	0,022	2,2
Total		45	1,00	100

- Calcular la mediana de los 45 ingresos quincenales. Para ello se utilizó la fórmula de la mediana:

  Primero Se determina el intervalo $I_i = [L_i, U_i[$ que contiene a la mediana Me. Para esto, se determinan las frecuencias acumuladas

$$F_{i-1} \leqslant n/2 < F_i$$

A partir de $n/2$ en el eje vertical, se traza una paralela a la ojiva, y de la ojiva se traza una vertical al eje de los intervalos.
La mediana $M_e \in [L_i, U_i]$. intervalo de amplitud A, cuya frecuencia absoluta acumulada es F_i, y la no acumulada es $f_i = F_i - F_{i-1}$
Segundo La mediana $M_e \in [L_i, U_i]$. Luego,

$$Me = L_i + a$$

donde a se obtiene por interpolación (semejanzas de triángulos ABE y ACD de la figura 2.1) comparando intervalos de frecuencias:

$$\frac{a}{A} = \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i}, \text{de donde } a = \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} A$$

Luego,

$$Me = L_i + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} A$$

donde:
L_i es el límite inferior del intervalo de la mediana.

n es el número de datos observados.

F_{i-1} es la frecuencia acumulada absoluta del intervalo inmediatamente anterior al intervalo de la mediana.

f_i es la frecuencia absoluta del intervalo de la mediana.

A es la amplitud del intervalo de la mediana. Así, en el ejercicio dado $n/2 = 45/2 = 22{,}5$. El valor 22.5 está entre las frecuencias acumuladas 17 y 33, luego, la mediana, $Me \in [58, 66]$. Además $L_i = 58, F_{i-1} = 17, f_i = 16, A = 8$, luego

$Me = 58 + 8\frac{22{,}5-17}{16} = 58 + 2{,}75 = 60{,}75$

- Calcular la media aritmética de la distribución de frecuencias de los 45 ingresos quincenales.

  Para ello se usó la fórmula $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i m_i}{n}$, donde $\frac{2702}{45} = 60{,}04$

- Cálculo de la Asimetría:

$$A_s = \frac{3(\overline{x} - Me)}{s} = \frac{3(60{,}44 - 60{,}75)}{11{,}079} = -0{,}191$$

a) **Algoritmos usados:**

Para la solución de las situaciones problemáticas se usó los algoritmos para hallar la media, la mediana, la varianza; también se tubo que agrupar los datos en intervalos, para ello, se tuvo que usar la fórmula para hallar el rango y luego la fórmula para hallar la amplitud.

b) **Operaciones usadas:**

Se realizó cálculo aritméticos básicos (las cuatro operaciones básicas) y sustitución de valores en las fórmulas para calcular la media, la mediana, la varianza y la asimetría.

c) **Técnicas usadas:**

Se hizo referencia al uso del paquete estadistico MCEST para construir distribuciones de frecuencia y se uso la técnica de interpolación para calcular la mediana.

2. Analizando el libro de Chué, J.; Barreno, E., Castillo, C.; Millones, R.; Vásquez, F. (Libro C):

Solución del Ejemplo 1 (Ejemplo 37, p.62):

Utilizando Minitab, se obtiene que:

Descriptive Statistics: C1

Luego: $CA = \frac{3(\overline{x}-me)}{s} = \frac{3(886{,}9-840)}{247{,}8} = 0{,}56779$

Este valor indica que los datos tienen un comportamiento asimétrico a la derecha.

Variable	Count	Mean	StDev	Median
C1	13	886.9	247.8	840.0

Solución del Ejemplo 2 (Ejemplo 46, p.73):

Se va a resolver la parte c) que corresponde a la asimetría.

El valor de la mediana es:

$me = LI_{me} + C\frac{\frac{n}{2}-F_{me-1}}{f_me} = 15 + 10\frac{10-2}{8} = 25$ $CA = \frac{3(\overline{x}-me)}{s} = \frac{3(26-25)}{9{,}94723} = 0{,}30159$

Solución del Problema 1 (Problema 5, p.82): Se analizará la respuesta a la pregunta b.1

Se aplica la fórmula del coeficiente de asimetría en ambas fábricas:

$$CA = \frac{3(70{,}4-70)}{2{,}854} = 0{,}42046250$$

$$CA = \frac{3(66{,}65-67{,}5)}{5{,}65} = -0{,}45132743$$

Los valores de CA indican que la asimetría es ligeramente menor en A que en B.

a) **Algoritmos usados:**

En las situaciones problemáticas que se dan en este texto, se aplicó el algoritmo para hallar la media y la mediana para datos agrupados, se calculó la desviación estándar y se aplicó a la definición de coeficiente de asimetría. Estos algoritmos son:

- $Media = \overline{x} = \frac{\sum_{i1}^{n} f_i y_i}{n}$, donde
  - i) y_i son las marcas de la clase,
  - ii) f_i son las frecuencias absolutas y
  - iii) n es el tamaño de la muestra.
- $Mediana = me = LI_{me} + C\frac{\frac{n}{2}-F_{me-1}}{f_{me}}$, donde
  - i) LI_{me} es el límite inferior de la clase donde se encuentra la mediana.
  - ii) F_{me-1} es la frecuencia acumulada absoluta de la clase anterior a la clase donde se encuentra la mediana.
  - iii) f_{me} es la frecuencia absoluta de la clase donde se encuentra la mediana.
- $Varianza = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}$, donde: $x_i - \overline{x}$ es la desviación de una observación con respecto a la media.
- $CA = \frac{3(\overline{x}-me)}{s}$

b) **Operaciones usadas:**

Para calcular la media, la mediana y la desviación estándar se usó las operaciones usuales de adición, multiplicación y división.

c) **Técnicas usadas:**

Uso del software Minitab para el ejemplo 1 (Ejemplo 37, p.62)

3. Analizando el libro de Adriazola, Y.; Cárdenas, A.; Condado, J.; Depaz, P.; Gómez, D.; Martínez, B.; Solano, O. (Libro D):

Solución del Problema 1 (Ejemplo 47, p.170):

Se considerará para la solución de este problema la asimetría, no la curtosis (que es otro tema). Segundo coeficiente de asimetría

$$= a_2 = \frac{3(\overline{x} - Me)}{s}$$

$$= \frac{3(40{,}1 - 38{,}75)}{9{,}915} = 0{,}4085,$$

por lo tanto la distribución de las edades es moderadamente asimétrica positiva.

Solución del Problema 2 (Ejemplo 48, p.172):

$a_3 = \frac{3(\overline{x}-Me)}{s} = \frac{3(26{,}68-27)}{8{,}11} = -0{,}118$ La distribución tiene una ligera asimetría negativa, pero se podría decir que es casi simétrica.

$k = \frac{\frac{1}{2}(P_{75}-P_{25})}{P_{90}-P_{10}} - 0{,}263 = \frac{\frac{1}{2}(31-23)}{38{,}6-15} - 0{,}263 = 0{,}2 - 0{,}263 = -0{,}063$

Solución del Problema 3 (Ejemplo 49, p.173):

Se desarrollará la parte correspondiente a la asimetría.

Se abre la base de DATOS1-maestría y usando los comandos del SPSS del capítulo VII (procedimientos estadísticos) se tiene: El coeficiente de asimetría (sesgo) toma

Coeficientes de inteligencia		
N	Valid	70
	Missing	0
Skewness	1.301	

el valor 1.3, indicando que los datos tienen sesgo positivo.

a) **Algoritmos usados:**

En las situaciones problemáticas de este texto solo fue necesario reemplazar los datos dados en la definición del segundo coeficiente de asimetría:

$$a_2 = \frac{3(\overline{x} - Me)}{s}$$

b) **Operaciones usadas:**

Se usó las operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división.

c) **Técnicas usadas:**

Se hizo uso del software estadístico SPSS

4. Analizando el libro de Montiel, A; Rius, F; Barón, F. (Libro E):

   Solución del Ejercicio 1 (Ejemplo 4.2, p.111):

   Se resolverá la parte de la asimetría.

   $Q_1 = 12 + \frac{39{,}25-36}{27}(1) = 12{,}12$

   $Med = Q_2 = 13 + \frac{78{,}5-63}{42}(1) = 13{,}37$

   $Q_3 = 14 + \frac{117{,}75-105}{31}(1) = 14{,}41$

   $A_s = \frac{(Q_3-Q_2)-(Q_2-Q_1)}{Q_3-Q_1} = \frac{(14{,}41-13{,}37)-(13{,}37-12{,}12)}{14{,}41-12{,}12} = -0{,}09$

   Este resultado nos indica que existe una ligera asimetría a la izquierda.

   a) **Algoritmos usados:**

      En la situación problemática dada en este texto se aplicó los algoritmos para hallar los cuartiles:

      $Q_1 = C_{1/4}$ es el valor que ocupa el lugar $N/4$

      $Q_2 = C_{2/4}$ es el valor que ocupa el lugar 2 $N/4$

      $Q_3 = C_{3/4}$ es el valor que ocupa el lugar 3 $N/4$

      $Q_1 = l_{i-1} + \frac{\frac{N}{4}-N_{i-1}}{n_i}a_i$

      $Q_2 = l_{i-1} + \frac{\frac{2N}{4}-N_{i-1}}{n_i}a_i$

      $Q_3 = l_{i-1} + \frac{\frac{3N}{4}-N_{i-1}}{n_i}a_i$,

      donde:

      i) $[l_{i-1}; l_i[$ es el intervalo que contiene al cuartil;

      ii) $a_i = l_i - l_{i-1}$ es la amplitud del intervalo;

      iii) n_i es la frecuencia de intervalo;

      iv) N_{i-1} es la frecuencia acumulada antes del intervalo.

   b) **Operaciones usadas:**

      Se usó las operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división.

   c) **Técnicas usadas:**

      No se aplicó técnicas.

5. Analizando el libro de Moya, R.; Saravia, G. (Libro F):

   Solución del Ejemplo (Ejemplo 35, p.358):

   - Los cuatro primeros momentos iniciales son:

     El primer momento inicial de primer orden:

     $$\mu'_1 = 2(0{,}4) + 4(0{,}3) + 6(0{,}2) + 8(0{,}1) = 4$$

     El momento inicial de segundo orden:

     $$\mu'_2 = 4(0{,}4) + 16(0{,}3) + 36(0{,}2) + 64(0{,}1) = 20$$

El momento inicial de tercer orden:

$$\mu'_3 = 8(0{,}4) + 64(0{,}3) + 216(0{,}2) + 512(0{,}1) = 116{,}8$$

El momento inicial de cuarto orden:

$$\mu'_4 = 16(0{,}4) + 256(0{,}3) + 1296(0{,}2) + 4096(0{,}1) = 752$$

- Los cuatro primeros momentos centrales son:

  El primer momento central:

$$\mu_1 = 0$$

  El segundo momento central:

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu'_1 = 20 - 4^2 = 4$$

  El tercer momento central:

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_1\mu'_2 + 2\mu^3_{1'} = 116{,}8 - 3x4x20 + 2x4^3 = 4{,}8$$

  El cuarto momento central:

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6\mu^2_{1'}\mu'_2 - 3\mu^4_{1'}$$

- La asimetría es:

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{4{,}8}{8} = 0{,}6$$

a) **Algoritmos usados:**
   Se usó la fórmula para hallar los momentos.

b) **Operaciones usadas:**
   Se usaron las operaciones aritméticas básicas.

c) **Técnicas usadas:**
   No se hizo uso de técnicas.

4.5.6. Argumentos

Los argumentos que se usan en los libros de texto para resolver tanto las situaciones problemáticas de la sección 4.5.2 como en el capítulo de la Asimetría estadística en cada uno de estos textos son:

1. En el libro de Córdova, M. (Libro B):
   En la solución del ejemplo 1 (p.78) el autor, argumenta: "[...] Por ser la distribución de frecuencias asimétrica, la distribución de los datos dados no puede ser relacionada con la distribución normal.

2. En el libro de Chué, J.; Barreno, E., Castillo, C.; Millones, R.; Vásquez, F. (Libro C):
   El argumentos que da este texto respecto a la asimetría estadística es:
   - Se utiliza la desviación que tiene la distribución de un conjunto de datos con respecto a la distribución normal para juzgar si un conjunto de datos es simétrico o no. (p.61)

3. En el libro de Adriazola, Y.; Cárdenas, A.; Condado, J.; Depaz, P.; Gómez, D.; Martínez, B.; Solano, O. (Libro D):
   Los argumentos que da este texto respecto a la asimetría estadística son:
   - En la práctica casi nunca se encuentran polígonos o histogramas perfectamente simétricos, por lo que el grado en el cual la distribución no es simétrica constituye su sesgo.
   - La medida obtenida (para la asimetría) depende de las unidades que en cada caso se usen, por lo que, para comparar la asimetría de dos o más curvas, es necesario estandarizar los sesgos, obteniéndose la siguiente fórmula:
     Primer coeficiente de asimetría $a_1 = \frac{\overline{x}-Mo}{s}$
   - En distribuciones que no son muy asimétricas se cumple la siguiente relación empírica:
     $$moda = \overline{x} - 3(media - mediana)$$
     Usando esta relación, el sesgo de Pearson se aproxima con la siguiente fórmula:
     Segundo coeficiente de asimetría $= a_2 = \frac{3(\overline{x}-Me)}{s}$ (p.169)

4. En el libro de Montiel, A; Rius, F; Barón, F. (Libro E): Los argumentos que da este texto respecto a la asimetría estadística son:
   - Cuando realizamos un estudio descriptivo es improbable que la distribución de frecuencias sea totalmente simétrica. En la práctica diremos que la distribución de frecuencias es simétrica si lo es de un modo aproximado. (p.97)
   - Es fácil comprobar que los momentos centrales de orden r impar, son siempre nulos en el caso de variables simétricas, ya que a cada i que esté a un lado de la media, con $(x_i - x) < 0$, le corresponde una observación j del otro lado de la media tal que $(x_j - \overline{x}) = -(x_i - \overline{x})$. Elevando cada una de esas cantidades a r impar, y sumando resulta que:

$m_r = 0$ si la distribución es simétrica.
Si la distribución fuese asimétrica positiva, las cantidades $(x_i - \overline{x})^r$, con $r \geq 3$ impar positivas estarían muy aumentadas al elevarse r. Esto nos indica que un índice de asimetría posible consiste en tomar $r = 3$ y definir: $\gamma_1 = \frac{m_3}{s^3}$ (p.100)

5. Analizando el libro de Moya, R. y Saravia, G. (Libro F):
No se presentan argumentos.

4.6. Conclusiones del análisis de contenido: Análisis epistémico

Habiendo analizado los 5 libros de texto del sílabo correspondiente a la asignatura de Estadística y probabilidades, se ve que :

1. En las situaciones ha predominado el rigor matemático y no el pensamiento reflexivo estadístico, es decir, los números que se dan en los datos en las situaciones son valores a los que no se les ha dado interpretación.

2. En general, los libros de texto no profundizan en dar aplicaciones de la Asimetría estadística, se limitan a dar ejercicios resueltos y/o ejemplos en donde se calcule la Asimetría estadística utilizando las aproximaciones de los estimadores para la Asimetría estadística.

3. Las definiciones para la Asimetría estadística que se da en total en los 5 libros de texto son 6; 4 de estas definiciones corresponden a una muestra y 2 de estas definiciones corresponden a una variable aleatoria.

   a) El primer coeficiente de asimetría de Pearson (que corresponde a la ecuación 3.16 del Capítulo 3).

   b) El segundo coeficiente de asimetría de Pearson (que corresponde a la ecuación 3.16 del Capítulo 3).

   c) El coeficiente de Fisher o coeficiente de asimetría de tercer orden (para una muestra, que corresponde a la ecuación 3.19 del Capítulo 3).

   d) El índice de Asimetría de Pearson utilizando momentos (que corresponde a la ecuación 3.18 del capítulo 3).

   e) El índice basado en los tres cuartiles o coeficiente de asimetría de Yule-Bowley (que corresponde a la ecuación 3.7 del Capítulo 3).

f) El índice de asimetría de Fisher (para una población, que corresponde a la ecuación 3.4 del Capítulo 3)

las 4 primeras definiciones, desde la a) hasta la d), corresponden a las aproximaciones de los estimadores para la Asimetría estadística del marco teórico que se vio en el capítulo 3, sección 3.1.4.3 y las 2 últimas definiciones corresponden a las definiciones de la Asimetría estadística que se mostró en el marco teórico en el capítulo 3, sección 3.1.4.1.
Las definiciones de la Asimetría estadística para una variable aleatoria se da solo en dos libros de texto: En Montiel, A; Rius, F; Barón, F. (Libro E) y en Moya, R. y Saravia, G. (Libro F). Estas definiciones se muestran en las ecuaciones 3.7 y 3.4 del capítulo 3 y son:

$$A_s = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1},$$

donde $Q_i, i = 1, 2, 3$ son el primer, segundo y tercer cuartil respectivamente.

$$S_k = \frac{E\ [(X-\mu)^3\ ]}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

donde σ es la varianza y μ_3 es el tercer momento poblacional.

4. Las demostraciones formales en el capítulo de la Asimetría estadística están ausentes en estos libros de texto analizados, es decir, se carece de rigor matemático y por lo mismo los libros de texto carecen de argumentaciones.

5. En general, las situaciones dadas en los libros de texto no hacen ver a los alumnos la relación de las medidas de tendencia central con la Asimetría.(Sólo se menciona la relación de estas medidas con la Asimetría al dar la definición de la Asimetría estadística).

Capítulo 5

Cuestionario acerca de los significados personales de la Asimetría estadística

5.1. Introducción

Para la construcción del cuestionario se tuvo en cuenta lo que se pretende que entiendan los alumnos en estudio respecto a la Asimetría estadística – que se ha visto en el capítulo 3 – y para ello se elaboró una tabla de especificaciones y de acuerdo a esta tabla se elaboraron las preguntas, éstas fueron 10 preguntas, luego estas preguntas serían validadas por docentes expertos en Estadística y/o en el EOS; se consideró a 6 expertos quienes validaron las preguntas según dos niveles de adecuación: pertinencia y redacción, también se les pidió dar sugerencias. Habiendo hecho ellos la validación, se procedió a depurar las preguntas que tenían en el criterio de pertinencia puntuación baja y a adecuar las preguntas según el criterio de los expertos en el nivel de redacción y según sus sugerencias. Luego de esto, se consideraron 16 preguntas que fueron aplicadas mediante un cuestionario a los alumnos de tercer ciclo de Economía de la UNAC al final del ciclo académico 2012-II.

5.2. Objetivos

El objetivo de aplicar este cuestionario a los estudiantes de Economía de la UNAC es ver qué conocimientos favorables tienen respecto al objeto matemático en estudio y ver los conflictos semióticos con relación a este objeto, mediante el respectivo análisis de las respuestas de éstos al cuestionario diseñado con tal fin; además, se pretende sugerir con este cuestionario lo que los docentes del curso de Estadística -que enseñan la Asimetría estadística - deben lograr en el aprendizaje de los estudiantes con respecto a este objeto matemático. Este instrumento de medida – el cuestionario – podría también ser aplicado a otros estudiantes de carreras de ciencia, ingeniería, administración, etc. que llevan cursos de Estadística.

5.3. Proceso de selección de las preguntas para el cuestionario

Se redactó preguntas respecto al objeto matemático en estudio, considerando el contenido conceptual que se supone deben conocer los alumnos y el contenido procedimental que se refiere a los procesos que efectúan los estudiantes para responder a las respectivas preguntas; para ello se tuvo como referencia el análisis de los libros de texto (capítulo 4).

5.3.1. Clasificación del cuestionario

Este cuestionario es un instrumento de investigación y diagnóstico. Se investiga el aprendizaje de los alumnos y se diagnostica los conflictos semióticos respecto a la Asimetría estadística.

5.3.2. Especificaciones del contenido del cuestionario:

La evaluación del aprendizaje de los alumnos respecto al objeto matemático en estudio comprendió preguntas en la que se llegue a los objetivos delimitados en la sección 5.2. Estas preguntas formaron parte de un cuestionario. Para formar las preguntas fue necesario una tabla de especificaciones que se hizo como resultado del análisis realizado de los libros de texto dados a los alumnos de Economía de la UNAC; se consideró 10 especificaciones, con 3 tipos de contenido: conceptual, procedimental y reflexivo. Estos contenidos se muestran en el cuadro 5.1
En los cuadros 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 se muestran, respectivamente, la lista de especificaciones acerca de la Asimetría estadística que se quiere medir con el cuestionario a los alumnos, las cuatro categorías de las preguntas del cuestionario, los tipos de contenido según las especificaciones del contenido de las preguntas para el cuestionario y la ubicación de las preguntas del cuestionario según el contenido y la especificación de acuerdo al cuadro

5.3. (En el apéndice B se muestra el cuestionario.)

Número	Contenido
1	Nociones conceptuales respecto a las medidas estadísticas de tendencia central, dispersión y de forma.
2	Aplicaciones de las medidas de tendencia central, de las medidas de dispersión, de los percentiles en los diagramas de caja.
3	Definición de la Asimetría estadística a partir de una distribución de probabilidad de una variable aleatoria.
4	Definición de la Asimetría estadística a partir de un conjunto de datos.
5	Comprensión intuitiva de la Asimetría estadística.
6	Cálculo de la Asimetría estadística a partir de una distribución de probabilidad.
7	Cálculo de la Asimetría estadística a partir de un conjunto de datos.
8	Gráfica de los tipos de Asimetría estadística.
9	Relación de las medidas de tendencia central con la Asimetría estadística.
10	Aplicación de la Asimetría estadística en un conjunto de datos basados en situaciones reales o simuladas.

CUADRO 5.1: Lista de especificaciones acerca de la Asimetría estadística medidos en el Cuestionario.

Categoría	Contenido
I1	Definiciones de conocimientos previos y de la Asimetría estadística.
I2	Aplicaciones de los conocimientos previos.
I3	Interpretaciones.
I4	Cálculo de la Asimetría estadística.

CUADRO 5.2: Categorías de las preguntas del cuestionario.

5.3.3. Cuestionario a validar por los expertos en Estadística y/o EOS

El cuestionario, que inicialmente, contaba con 10 preguntas (ver apéndice A), fue dado a un grupo de expertos para su validación, los expertos calificaron el cuestionario según 2 niveles de adecuación: pertinencia y redacción, en una escala de 1 a 5 en orden creciente de aceptación; también se les pidió dar sugerencias según lo consideren conveniente.

Número	Definición del contenido	Tipo de contenido
1	El alumno reconoce las medidas de tendencia central: media, mediana y moda, las medidas de variabilidad (varianza), así como identifica las medidas de forma incluyendo los percentiles	Conceptual
2	El alumno conoce las aplicaciones de las medidas de tendencia central, de las medidas de dispersión, de los percentiles en los diagramas de caja	Conceptual
3	El alumno reconoce la definición de la asimetría estadística a partir de una distribución de probabilidad de una variable aleatoria	Conceptual
4	El alumno reconoce la definición de la asimetría estadística a partir de un conjunto de datos e identifica que esta es un estimador de la asimetría y que tiene diferentes formas de ser calculado	Conceptual
5	El alumno comprende intuitivamente la asimetría estadística de un conjunto de datos	Conceptual
6	El alumno calcula la asimetría estadística a partir de una distribución de probabilidad	Procedimental
7	El alumno calcula la asimetría estadística a partir de un conjunto de datos	Procedimental
8	El alumno gráfica los tipos de asimetría estadística a partir del valor obtenido al calcular la asimetría estadística de un conjunto de datos	Procedimental
9	El alumno interpreta la asimetría estadística a partir de su relación con las medidas de tendencia central	Reflexivo
10	El alumno aplica la asimetría estadística en un conjunto de datos basados en situaciones reales o simuladas	Reflexivo

Cuadro 5.3: Contenidos evaluados a los alumnos mediante el cuestionario, según los 3 tipos de especificaciones

Después de ser validado el cuestionario por el grupo de expertos, se modificó el cuestionario haciendo un total de 16 preguntas.

Los expertos que participaron en la validación del cuestionario fueron 6:

1. Mg. Cecilia Gaita Iparraguirre
2. Mg. Augusta Osorio Gonzales
3. Dr. Luis Valdivieso Serrano
4. Mg. Armando Blanco Del Rosario
5. Mg. Edwin Villogas Hinostroza
6. Dr. Roger Metzger Alván

Nº	Pregunta	Contenido	Tipo de contenido
1	1	El alumno reconoce las medidas de tendencia central: media, mediana y moda, las medidas de variabilidad (varianza), así como identifica las medidas de forma incluyendo los percentiles.	Conceptual
2	2, 3 y 4	El alumno conoce las aplicaciones de las medidas de tendencia central, de las medidas de dispersión, de los percentiles en los diagramas de caja.	Conceptual
3	5	El alumno reconoce la definición de la Asimetría estadística a partir de una distribución de probabilidad de una variable aleatoria.	Conceptual
4	6	El alumno reconoce la definición de la Asimetría estadística a partir de un conjunto de datos e identifica que esta es un estimador de la asimetría y que tiene diferentes formas de ser calculado.	Conceptual
5	13	El alumno comprende intuitivamente la Asimetría estadística de un conjunto de datos.	Conceptual
6	10	El alumno calcula la Asimetría estadística a partir de una distribución de probabilidad.	Procedimental
7	11, 12, 15 y 16	El alumno calcula la Asimetría estadística a partir de un conjunto de datos.	Procedimental
8	13	El alumno gráfica los tipos de Asimetría estadística a partir del valor obtenido al calcular la asimetría estadística de un conjunto de datos.	Procedimental
9	8, 9 y 14	El alumno interpreta la Asimetría estadística a partir de su relación con las medidas de tendencia central.	Reflexivo
10	7 y 15	El alumno aplica la Asimetría estadística en un conjunto de datos basados en situaciones reales o simuladas.	Reflexivo

Cuadro 5.4: Ubicación de las preguntas del cuestionario según el contenido y la especificación de acuerdo al cuadro 5.3

5.4. Cuestionario aplicado a los alumnos después de ser validado por los expertos

Después de ser validado por los expertos, se consideró para el cuestionario 16 preguntas. Este cuestionario fue aplicado a los alumnos en estudio al final del semestre 2012-II y se muestra en el apéndice B.

Capítulo 6

Significados personales declarados de la Asimetría estadística

6.1. Introducción

Una vez aplicado el cuestionario a los alumnos en estudio (ver capítulo 5) – en el que se los evaluó para conocer lo que habían aprendido acerca de la Asimetría estadística y de los conocimientos previos a este tema (las medidas de tendencia central, las medidas de variabilidad, los percentiles y los diagramas de caja) –, se procedió a analizar estas respuestas, formando los significados personales de los alumnos respecto a la Asimetría estadística y conocimientos previos; también se pretendió deducir las dificultades y/o conflictos semióticos de los alumnos respecto a estos objetos matemáticos.
En este capítulo se ha considerado dos secciones: la sección de los significados personales declarados que incluye el análisis cognitivo, según el EOS, de las respuestas de los alumnos a las preguntas 12 y 16 y el análisis cognitivo de las respuestas a las preguntas restantes, sin considerar la configuración cognitiva del EOS por ser las respuestas de los alumnos muy cortas y la sección del análisis cognitivo de las respuestas de los alumnos de acuerdo al cuadro 5.4 (Ver capítulo 5).

6.2. Objetivos específicos

- Hacer el análisis cognitivo, según el EOS, de las respuestas de los alumnos a las preguntas 12 y 16 identificando los objetos matemáticos previos, lengüajes, conceptos, procesos, propiedades y argumentos de la respuesta experta y de las respuestas de los alumnos a las preguntas 12 y 16.

- Hacer el análisis de las respuestas de los alumnos desde la pregunta 1 hasta la pregunta 11 y desde la pregunta 13 hasta la pregunta 15, sin considerar el análisis cognitivo del EOS, por ser las respuestas de los alumnos muy cortas.

- Identificar los conocimientos que tienen los alumnos de acuerdo a los 10 contenidos de las preguntas y de acuerdo a los tres tipos de contenido: conceptual, procedimental y reflexivo según el cuadro 5.4.

6.3. Metodología

- Se aplicó el cuestionario -ya validado por los expertos - a un grupo de alumnos con respecto al objeto matemático asimetría estadística
  Este cuestionario fue aplicado a un grupo de 14 alumnos del tercer ciclo de la carrera profesional de Economía de la UNAC, de edades entre 19 y 22 años que llevaron el curso de "Estadística básica". Este cuestionario se aplicó al final del ciclo 2012-II.
  Se analizó los significados personales declarados de 14 alumnos, de 45 alumnos que estuvieron matriculados en el curso de Estadística básica en el semestre 2012-II. Estos 14 alumnos optaron voluntariamente por colaborar en el estudio y fueron contactados en un curso alternativo fuera del horario regular de su clase de Estadística básica.
  Para el desarrollo de este cuestionario, los alumnos tuvieron 2 horas de tiempo. Fueron 16 preguntas las que se consideraron en el cuestionario, el tiempo asignado parecería muy poco para que resuelvan todas estas preguntas, pero no se pretendía que estos alumnos resolvieran estas 16 preguntas, sino lo que se pretendía era que estos alumnos en ese tiempo designado para la resolución del cuestionario elijan las preguntas que para ellos les resulte más familiar o con menor dificultad, así también se podía evaluar las preguntas que estos alumnos conocen mejor resolverlas.
  Una vez evaluados los alumnos, se procedió a hacer lo siguiente:

- Se hizo el análisis cognitivo, según el EOS, de la solución experta y de las respuestas de los alumnos a las preguntas 12 y 16 identificando los objetos matemáticos previos, lengüajes, procesos, procedimientos y argumentos de la respuesta experta y de las respuestas de los alumnos.

- Se hizo el análisis de las respuestas de los alumnos desde la pregunta 1 hasta la pregunta 11 y desde la pregunta 13 hasta la pregunta 15, sin considerar el análisis cognitivo del EOS, por ser las respuestas de los alumnos muy cortas.

- Se identificó los conocimientos que tienen los alumnos de acuerdo a los 10 contenidos de las preguntas y de acuerdo a los tres tipos de contenido: conceptual, procedimental y reflexivo según el cuadro 5.4.

6.4. Significados personales declarados

Las preguntas que se propusieron a los alumnos se muestran en el apéndice B.
Se describe los significados personales de los alumnos, mediante el estudio de sus configuraciones cognitivas de los alumnos tomados como muestra para el estudio. Para la solución del cuestionario, se les pidió a los alumnos que pusieran todo su procedimiento para cada pregunta propuesta. Se analizó cada pregunta resuelta por los alumnos.
Las preguntas que se analizaron fueron aquellas en la que los alumnos contestaron correctamente en las que se esperaba que los alumnos respondan de acuerdo a lo enseñado según los libros de texto que utilizaron en su primer curso de Estadística y que interpreten correctamente de acuerdo a las preguntas dadas y también se analizaron las preguntas que contestaron incorrectamente, solo la pregunta 15 (su primera pregunta) no fue respondida por ningún alumno. Las preguntas del cuestionario que tuvieron respuesta(s) correcta(s) fueron las preguntas 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14 y 15 (la segunda pregunta); las preguntas del cuestionario que tuvieron respuestas incorrectas fueron las de numeral 1 - 8, de 10 - 14 y 16.
Para mencionar a los alumnos se les identificó con el sufijo A y seguido de un número cualquiera. Así tenemos los alumnos: A1, A2, etc.

6.4.1. Configuraciones de la respuesta experta y de las respuestas de los alumnos a las preguntas 12 y 16

Se muestra a continuación las configuraciones realizadas según el EOS de la respuesta experta y de las respuestas de los alumnos a las preguntas 11, 12 y 16 del cuestionario dado.
Se analizaron las respuestas del cuestionario tanto correctas como incorrectas de algunos alumnos.

6.4.1.1. Configuración de la pregunta 12

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 12 corresponde a la categoría I4: Cálculo de la Asimetría estadística.

Pregunta 12: Con los siguientes datos presentados en esta tabla de distribución de frecuencias, calcule los coeficientes de asimetría de Pearson:

Intervalo	Frecuencia
[62,68[	4
[68,74[	6
[74,80[	7
[80,86[	11

- **Análisis de las respuestas de los 14 alumnos a la pregunta 12:**
  6 alumnos no respondieron a la pregunta, un alumno hizo el proceso correcto, pero solo hizo un coeficiente de Asimetría de Pearson, fue el alumno A4 quien utilizó el coeficiente de Bowley, por otro lado, el alumno A3 quizo utilizar el coeficiente de Pearson que usa la moda, pero se equivocó en el denominador, pues colocó el número 5, en lugar de la desviación estándar, tampoco supo hallar la moda; el alumno A5 quizo usar el segundo coeficiente de Pearson, pero se equivocó en la fórmula y no supo hallara la media aritmética de datos agrupados; el alumno A6 sólo puso las dos fórmulas del coeficiente de Pearson; los alumnos A7 y A8 solo calcularon la media aritmética y el alumno A9 graficó un diagrama de barras en el sistema de ejes coordenados, que es un gráfico innecesario.

- **Configuración de la solución experta a la pregunta 12:**
  La configuración de la solución experta del problema 12 se muestra en el cuadro 6.1.

  Los coeficientes de Pearson que debieron usar, según su enseñanza con los libros de texto, se muestran a continuación:

$$A_s = \frac{\overline{x} - Mo}{s} \cong \frac{3(\overline{x} - Me)}{s}, \tag{6.1}$$

  donde s es la desviación estándar, $\overline{x}$ es la media de la muestra, Mo es la moda, Me es la mediana.

$$\sigma_2 = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}, \tag{6.2}$$

  donde Q_i es el i-ésimo cuartil de la variable aleatoria X.

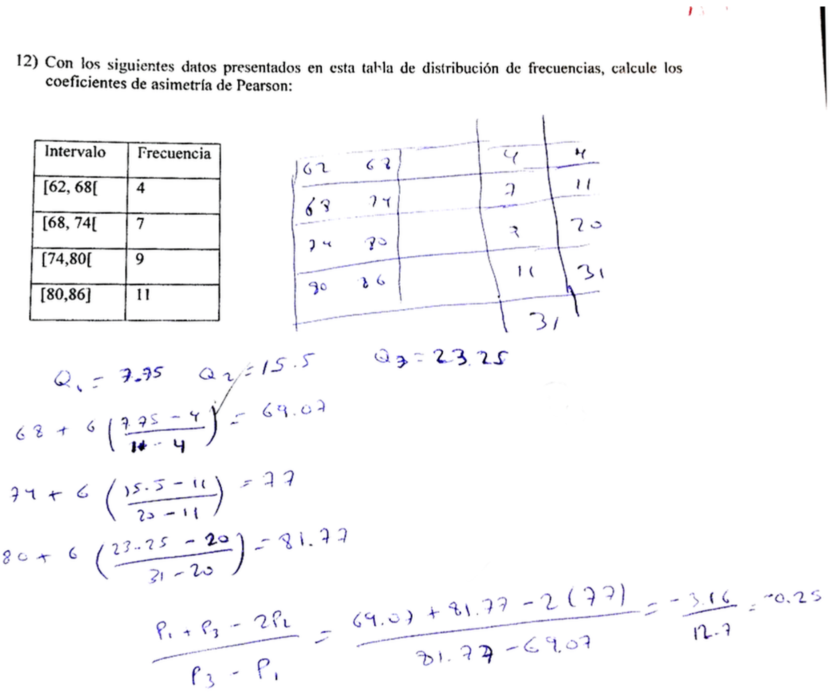
- **Configuración cognitiva de la respuesta correcta del alumno A4:**
  El alumno A4 respondió correctamente la pregunta 12, su procedimiento se muestra en la figura 6.1 y la configuración cognitiva de este alumno se muestra en el cuadro 6.2.

Objetos matemáticos	Especificaciones
Lengüaje	Algebraico
Concepto	Conceptos previos para el método que utiliza la moda o mediana: Marca de clase, media aritmética, marca de clase para poder calcular la media aritmética de datos agrupados, moda (para el método que utiliza la moda), mediana y frecuencia acumulada (para el método que utiliza la mediana) y desviación estándar. Conceptos previos para utilizar la definición de la Asimetría de Bowley: primer, segundo y tercer cuartil y para hallar estos tres cuartiles se necesita utilizar la frecuencia acumulada. Conceptos emergentes: las aproximaciones de los estimadores de la Asimetría. (Capítulo 3, fórmula 3.16) y definición del estimador de la Asimetría estadística. (Capítulo 3, fórmula 3.12).
Proceso	Proceso que utiliza la moda o el proceso que utiliza la mediana: Para ambos casos,se tiene que hallar primero la marca de clase para calcular la media aritmética de datos agrupados, luego para calcular la media aritmética se utiliza el correspondiente procedimiento algorítmico de cálculo para datos agrupados de la media aritmética; para el proceso que utiliza la moda: se utiliza el algoritmo para calcular la moda de datos agrupados; para el proceso que utiliza la mediana, se calcula la frecuencia acumulada y se utiliza el algoritmo para calcular la mediana de datos agrupados y, finalmente, se calcula la asimetría, en ambos casos, usando en la fórmula operaciones aritméticas básicas: resta y división. Proceso que utiliza la definición de Bowley: Se usa el proceso algorítmico para calcular los cuartiles: Q_1, Q_2 (mediana) y Q_3, para ello se necesita hacer uso de la frecuencia acumulada y ,finalmente, se calcula la asimetría haciendo uso de las operaciones aritméticas básicas: suma, resta y división.
Propiedades	No se aplica propiedades
Argumentos	No se aplica argumentos

Cuadro 6.1: Configuración de la solución experta del problema 12

Por lo tanto, el alumno A4 aplica correctamente los conocimientos previos que se requiere para calcular el coeficiente de Pearson y calcula correctamente uno de los coeficientes de Asimetría de Pearson; su significado personal de la Asimetría está acorde con el significado institucional.

- **Configuración cognitiva de la respuesta incorrecta del alumno A3 a la pregunta 12:**
  La respuesta incorrecta del alumno A3 se muestra en la figura 6.2, la configuración cognitiva de la respuesta de este alumno se muestra en el cuadro 6.3.



12) Con los siguientes datos presentados en esta tabla de distribución de frecuencias, calcule los coeficientes de asimetría de Pearson:

Intervalo	Frecuencia
[62, 68[	4
[68, 74[	7
[74,80[	9
[80,86]	11

62	68	4	4
68	74	7	11
74	80	9	20
80	86	11	31
			31

$Q_1 = 7.75 \quad Q_2 = 15.5 \quad Q_3 = 23.25$

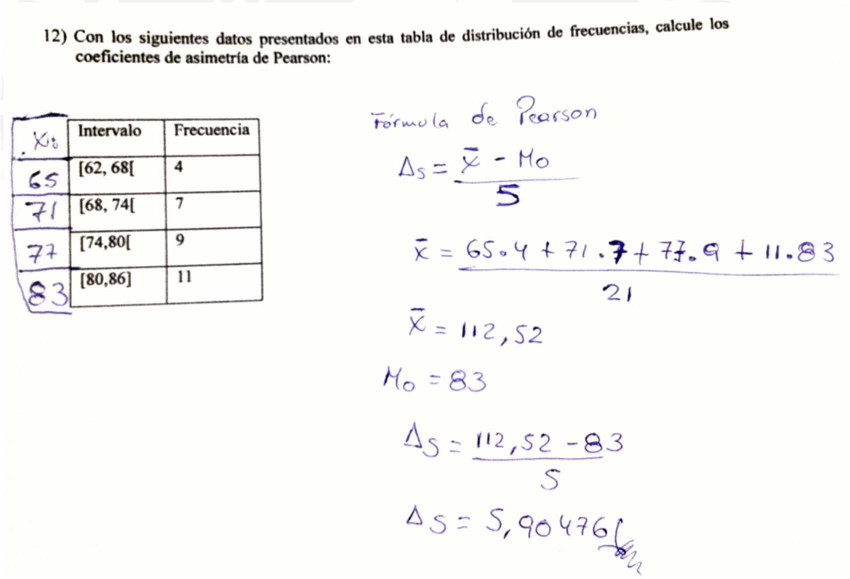
$P_1 = 68 + 6\left(\frac{7.75 - 4}{11 - 4}\right) = 69.07$

$P_2 = 74 + 6\left(\frac{15.5 - 11}{20 - 11}\right) = 77$

$P_3 = 80 + 6\left(\frac{23.25 - 20}{31 - 20}\right) = 81.77$

$\frac{P_1 + P_3 - 2P_2}{P_3 - P_1} = \frac{69.07 + 81.77 - 2(77)}{81.77 - 69.07} = \frac{-3.16}{12.7} = -0.25$

Figura 6.1: Respuesta correcta del alumno A4



12) Con los siguientes datos presentados en esta tabla de distribución de frecuencias, calcule los coeficientes de asimetría de Pearson:

X_i	Intervalo	Frecuencia
65	[62, 68[	4
71	[68, 74[	7
77	[74,80[	9
83	[80,86]	11

Fórmula de Pearson

$\Delta_S = \frac{\bar{x} - Mo}{S}$

$\bar{x} = \frac{65.4 + 71.7 + 77.9 + 11.83}{21}$

$\bar{x} = 112,52$

$Mo = 83$

$\Delta_S = \frac{112,52 - 83}{S}$

$\Delta_S = 5,90476$

Figura 6.2: Respuesta incorrecta del alumno A3

El alumno A3 no recordó correctamente la fórmula del coeficiente de Pearson, tampoco supo hallar la moda, que es un conocimiento previo al estudio de la Asimetría estadística, en cuanto al cálculo de la media aritmética se deduce que tuvo error al sumar, en vez de poner 31 (suma de los datos de la muestra) puso 21, es decir, tuvo error de cálculo, pero sí sabe el proceso para hallar la media aritmética de datos agrupados.

Objetos matemáticos	Especificaciones
Lengüaje	Algebraico
Concepto	Conceptos previos: media aritmética, moda, desviación estándar, frecuencia acumulada. Conceptos emergentes: definición del estimador de la Asimetría estadística de Bowley (El alumno A4 utilizó esta definición pero teniéndola como definición de la Asimetría estadística – según su enseñanza de acuerdo a los libros de texto –).
Proceso	El alumno A4 utilizó la definición del estimador de la Asimetría estadística de Bowley: Para ello, primero calculó los valores de la frecuencia acumulada y luego procedió a hallar los cuartiles Q_1, Q_2 (mediana) y Q_3 haciendo uso del proceso algorítmico correspondiente para cada uno de estos cuartiles, hizo uso de las cuatro operaciones aritméticas básicas: suma, resta, emultiplicación y división y finalmente procedió a reemplazar los valores hallados de cada uno de los tres cuartiles en la fórmula de la Asimetría de Bowley haciendo nuevamente uso de las cuatro operaciones aritméticas básicas.

Cuadro 6.2: Configuración cognitiva de la respuesta correcta del alumno A4 a la pregunta 12

6.4.1.2. Configuración de la pregunta 16

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 16 corresponde a la categoría I4: Cálculo de la Asimetría estadística.

Problema 16: Los salarios semanales de 30 trabajadores de una empresa, se muestran en la siguiente tabla:

Salario (soles)	700	720	750	800
Nº de trabajadores	8	7	6	9

Calcule el coeficiente de asimetría de Fisher.

- **Análisis de las respuestas de los alumnos a la pregunta 16:**
  Fueron 12 los alumnos que no respondieron a esta pregunta, 4 alumnos respondieron incorrectamente: el alumno A4 respondió a la pregunta tratando de usar el coeficiente de Pearson, pero esto no se pedía y además estaba incorrecta la fórmula de Pearson: en su proceso, la variable salario, la dispuso en 4 intervalos y esto lo hizo para poder después calcular la mediana (para datos agrupados en intervalos),supo calcular la media, la mediana y la varianza; el alumno A9 calculó la

Objetos matemáticos	Especificaciones
Lengüaje	Algebraico
Concepto	Conceptos previos: Marca de clase, media aritmética, moda, desviación estándar. Conceptos emergentes: definición de la aproximación del estimador de la Asimetría estadística que usa la moda (El alumno A3 utilizó esta definición pero teniéndola como definición de la Asimetría estadística al coeficiente de asimetría de Pearson - según su enseñanza de acuerdo a los libros de texto).
Proceso	El alumno A3 calculó solo un coeficiente de Pearson - el que usa la moda - pero se equivocó en la fórmula, este alumno en la fórmula dio como denominador el valor 5, que es incorrecto, en su lugar, debió colocar la desviación estándar. En su desarrolo, primero calculó la marca de clase para poder calcular la media aritmética de datos agrupados, pero al calcular la media aritmética en vez de poner por número de datos 31 (que es el total de datos de la muestra) puso 21, así el valor de la media aritmética es incorrecto-, luego para calcular la moda observó que el intervalo que tenía mayor frecuencia absoluta era el intervalo $[80, 86]$ y como el dato de la frecuencia absoluta de este intervalo era de 11, lo tomó como la moda; que es incorrecto, pues debió usar el proceso algorítmico para hallar la moda de datos agrupados, que es un conocimiento previo que se les ha enseñado en un capítulo anterior al capítulo de la Asimetría estadística -según su sílabo- y finalmente procedió a reemplazar los valores hallados: la media aritmética (resultado correcto), la moda (resultado incorrecto) y el denominador 5 (dato incorrecto) en la fórmula del coeficiente de Pearson, luego hizo las operaciones básicas de resta y división y dio, por supuesto, como resultado un dato incorrecto.

Cuadro 6.3: Configuración cognitiva de la respuesta incorrecta del alumno A3 a la pregunta 12

frecuencia relativa - que son valores innecesarios para el desarrollo del problema - y graficó la distribución de frecuencias; el alumno A6 solo puso la fórmula, pero el numerador lo hizo incorrecto; el alumno A7 hizo un gráfico de puntos colocando en el eje X la frecuencia absoluta y en el eje Y los valores de la variable ”salario”.

- **Configuración de la solución experta a la pregunta 16:**

  La solución experta del problema 16 se muestra en el cuadro 6.4.

  Para la solución de este problema, el coeficiente de asimetría de Fisher es:

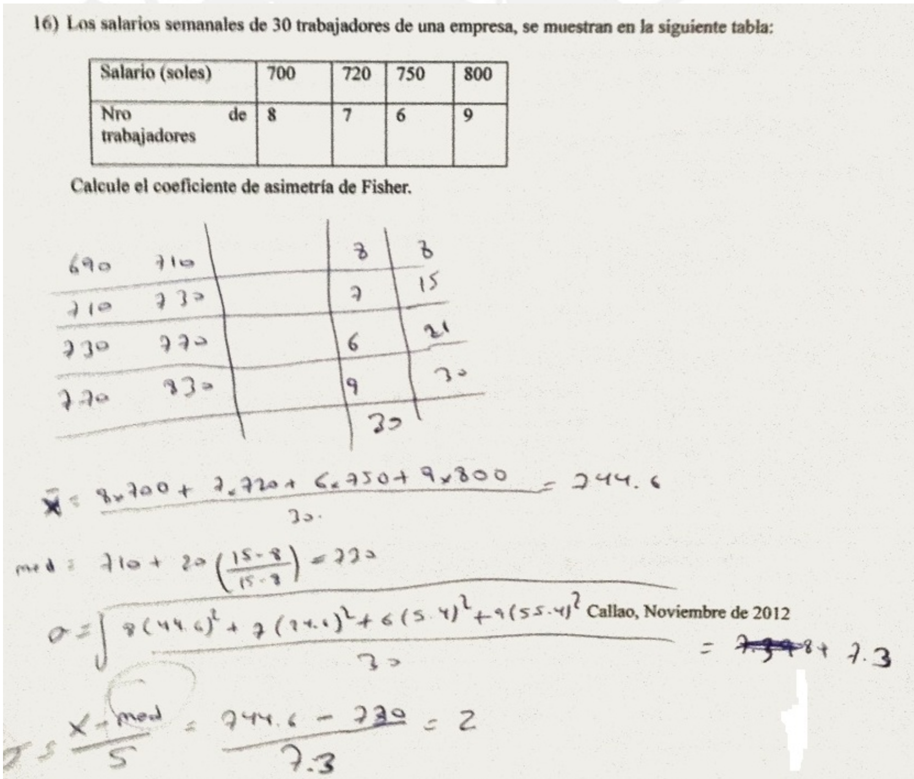
$$A_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^3}{ns^3}, \tag{6.3}$$

Objetos matemáticos	Especificaciones
Lengüaje	Algebraico
Conceptos	media, varianza.
Procesos	cálculo de la media aritmética, cálculo de la varianza para una muestra, operaciones básicas: resta, multiplicación, división, potencia al cubo. Se tenía que hallar primero la media aritmética, aplicar la sumatoria $\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^3$ y luego dividir por ns^3.

Cuadro 6.4: Configuración de la respuesta experta del problema 16

- **Configuración de la respuesta incorrecta del alumno A4 a la pregunta 16**

  En la figura 6.3 se muestra la respuesta incorrecta del alumno A4 y en el cuadro 6.4 se muestra la configuración cognitiva del desarrollo que hizo este alumno respecto a la pregunta 16.



16) Los salarios semanales de 30 trabajadores de una empresa, se muestran en la siguiente tabla:

Salario (soles)	700	720	750	800
Nro de trabajadores	8	7	6	9

Calcule el coeficiente de asimetría de Fisher.

690	710	8	8
710	730	7	15
730	770	6	21
770	830	9	30
		30	

$\bar{x} = \frac{8\times700 + 7\times720 + 6\times750 + 9\times800}{30} = 744.6$

$med = 710 + 20\left(\frac{15-8}{15-8}\right) = 730$

$\sigma = \sqrt{\frac{8(44.6)^2 + 7(24.6)^2 + 6(5.4)^2 + 9(55.4)^2}{30}} = \cancel{7.3}\ 7.3$

Callao, Noviembre de 2012

$As = \frac{\bar{x} - med}{S} = \frac{744.6 - 730}{7.3} = 2$

Figura 6.3: Respuesta incorrecta del alumno A4

Objetos matemáticos	Especificaciones
Lengüaje	Algebraico
Conceptos	media, varianza.
Procesos	cálculo de la media aritmética, cálculo de la varianza para una muestra, operaciones básicas: resta, multiplicación, división, potencia al cubo. Se tenía que hallar primero la media aritmética, aplicar la sumatoria $\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^3$ y luego dividir por ns^3.

Cuadro 6.5: Configuración cognitiva de la respuesta incorrecta del alumno A4 a la pregunta 16

6.4.2. Respuestas de los alumnos a las preguntas 1 - 10, 13 - 15

6.4.2.1. Respuestas a la pregunta 1

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 1 corresponde a la categoría I1: Definiciones de conocimientos previos y de la Asimetría estadística.

Problema 1 Clasifique las siguientes medidas estadísticas con un (X) según su tipo:

Medidas estadísticas	Medida de tendencia central	Medida de variabilidad	Medida de forma
Asimetría o sesgo			
Mediana			
Moda			
Desviación estándar			
Varianza			
Curtosis o apuntamiento			
Media			

- **Análisis de las respuestas de los alumnos:**
  - **Conocimientos emergentes (medidas de forma):**
    Fueron 9 alumnos que reconocieron las medidas de forma: Asimetría y Curtosis, 3 alumnos no reconocieron ninguna de las medidas de forma, 2 alumnos solo reconocieron la curtosis como medida de forma.

- **Conocimientos previos:**
  Respecto a las medidas de tendencia central, fueron 10 alumnos los que las reconocieron, 2 alumnos reconocieron la media y la mediana, pero no la moda, 1 alumno reconoció solo la mediana y 2 alumnos no reconocieron las medidas de tendencia central. Respecto a las medidas de variabilidad, fueron 8 los alumnos que reconocieron estas medidas, 3 alumnos las reconocieron, pero confunden la moda como medida de variabilidad, de éstos, un alumno confundió la media como medida de variabilidad, otros 2 alumnos también las reconocieron, pero confunden la asimetría como medida de variabilidad y un alumno reconoció solo la desviación estandar como tal medida y confundió la curtosis como medida de variabilidad.
  Con la pregunta 1, se quizo saber los conocimientos previos que tienen estos alumnos y saber los conocimientos emergentes que tienen; según los resultados de sus respuestas, en general, se puede decir que la mayoría (9 de 14 alumnos) reconoce las medidas de forma, que incluye el objeto matemático en estudio: la Asimetría estadística. También reconocen, en su mayoría, las medidas de tendencia central (10 de 14 alumnos) y las medidas de variabilidad (8 de 14 alumnos). Son pocos los alumnos que confunden la curtosis y asimetría como medida de variabilidad (2 alumnos, uno en cada caso).
  Se tiene en cuenta que para entender la Asimetría estadística, los alumnos deben saber reconocer las medidas de variabilidad y ,especialmente, las medidas de tendencia central. Con esta pregunta no se puede saber qué conceptos tienen respecto a estas medidas, pero ayuda a conocer si conocen estas medidas en forma intuitiva.

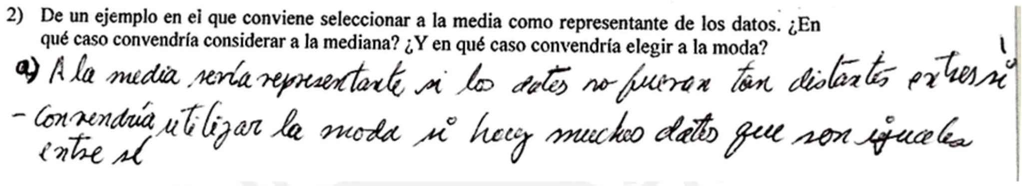
6.4.2.2. Respuestas a la pregunta 2

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 2 corresponde a la categoría I3: Interpretaciones.

Problema 2: De un ejemplo en el que conviene seleccionar a la media como representante de los datos. ¿En qué caso convendría considerar a la mediana? ¿Y en qué caso convendría elegir a la moda?

- **Análisis de las respuestas de los alumnos:**
  3 alumnos no respondieron a esta pregunta, 5 alumnos dan la interpretación de la media y la mediana - que no se pide-, 3 dan la interpretación de las medidas de tendencia central mencionadas con ejemplos; un alumno da la definición de mediana - que no se pide- de manera incorrecta, pone la definición de media. En

general, los alumnos no responden a lo que se pide, tratan de hacer una respuesta en base a sus conocimientos de los conceptos que tienen respecto a las medidas de tendencia central y allí se quedan, no logran responder a lo que se les pide. Se puede observar, que la mayoría de estos alumnos no saben las propiedades de las medidas de tendencia central, sus diferencias y sus aplicaciones. Solo 3 alumnos responden de manera coherente a esta pregunta, uno de ellos utiliza el concepto de simetría, lo ubica adecuadamente este concepto. El alumno A5 no dio el ejemplo pedido, pero sí respondió a las otras preguntas de la pregunta 2, se muestra su respuesta en la figura 6.4


2) De un ejemplo en el que conviene seleccionar a la media como representante de los datos. ¿En qué caso convendría considerar a la mediana? ¿Y en qué caso convendría elegir a la moda?

a) A la media sería representante si los datos no fueran tan distantes entre sí

- Convendría utilizar la moda si hay muchos datos que son iguales entre sí

FIGURA 6.4: Respuesta del alumno A5

- **Observación:**
  Como en esta pregunta se consideran 3 preguntas, hubiese sido mejor haber separado las preguntas y dejar espacio para sus respectivas respuestas, pues los alumnos pueden concentrarse en alguna de estas 3 preguntas y olvidar responder a las otras preguntas.

6.4.2.3. Respuestas a la pregunta 3

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 3 corresponde a la categoría I2: Aplicaciones de los conocimientos previos.

Problema 3: ¿Por qué son útiles las medidas de dispersión?

- **Análisis de los resultados:**
  7 alumnos no respondieron a esta pregunta, de un total de 14 alumnos; dentro de este grupo de alumnos, sólo el alumno A2 da una respuesta correcta. Se muestra la respuesta correcta del alumno A2 en la figura 6.5. Los 12 alumnos restantes, dan respuestas generales - que no son correctas - como la que se muestra en la figura 6.6.

- **Conclusiones de las respuestas respecto a las preguntas 1, 2 y 3:**
  Respecto a las respuestas a las preguntas 2 y 3, se puede afirmar que los alumnos

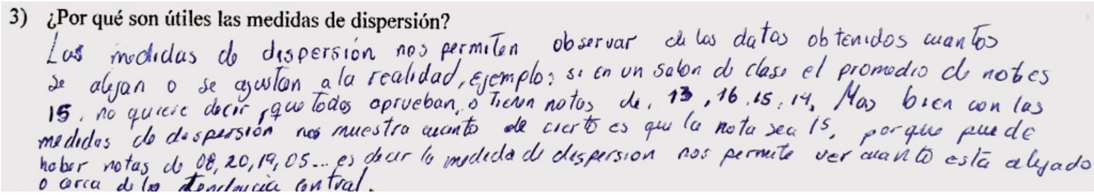

3) ¿Por qué son útiles las medidas de dispersión?
Los medidas de dispersión nos permiten observar de los datos obtenidos cuantos se alejan o se ajustan a la realidad, ejemplo: si en un salón de clase el promedio de notas 15, no quiere decir que todos aprueban, o tienen notas de, 13, 16, 15, 14, Mas bien con las medidas de dispersión nos muestra cuanto de cierto es que la nota sea 15, porque puede haber notas de 08, 20, 19, 05... es decir la medida de dispersion nos permite ver cuanto está alejado o cerca de la tendencia central.

FIGURA 6.5: Respuesta correcta del alumno A2

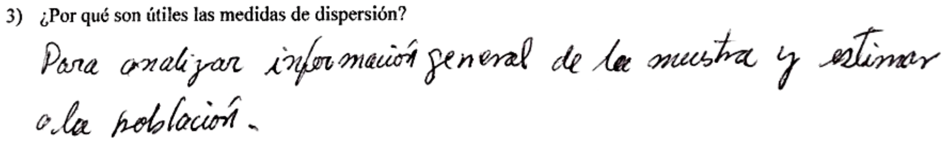

3) ¿Por qué son útiles las medidas de dispersión?
Para analizar información general de la muestra y estimar a la población.

FIGURA 6.6: Respuesta incorrecta del alumno A5

no han aprendido lo que son las medidas de tendencia central y las medidas de dispersión, estos conocimientos son conocimientos previos que deberían comprender para luego entender la distribución de los datos, incluyendo el objeto matemático: asimetría estadística. De las respuestas a la pregunta 1, se puede afirmar que comprenden intuitivamente las nociones de las medidas de tendencia central y de variabilidad, incluyendo las medidas de forma.

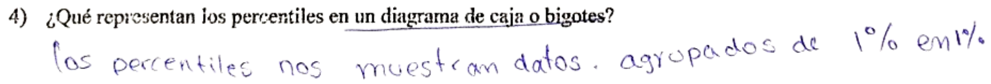
6.4.2.4. Respuestas a la pregunta 4

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 4 corresponde a la categoría I3: Interpretaciones.

Problema 4: ¿Qué representan los percentiles en un diagrama de caja o bigotes?

- **Análisis de los resultados:**
  Fueron 4 los alumnos que no respondieron a esta pregunta, los 10 alumnos restantes dieron respuestas incorrectas; estas son las respuestas de algunos de ellos:
  - **Alumno A1:** Representa el 1 % de los datos.
  - **Alumno A3:** Representan los límites donde empieza la media, mediana y moda.
  - **Alumno A6:** Son los límites donde empieza la mediana y la moda.
  - **Alumno A8:** Representan un porcentaje del total.

  Se muestra la respuesta del alumno A9 en la figura 6.7.
- **Conclusiones de las respuestas respecto a la pregunta 4:**
  Las respuestas de los alumnos indican que no han aprendido la utilidad y lo que


4) ¿Qué representan los percentiles en un diagrama de caja o bigotes?

los percentiles nos muestran datos. agrupados de 1% en 1%

FIGURA 6.7: Respuesta incorrecta del alumno A9

significa los percentiles en un diagrama de caja, para esta pregunta ningún alumno la respondió correctamente.

6.4.2.5. Respuestas a la pregunta 5

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 5 corresponde a la categoría I1: Definiciones de la Asimetría estadística.

Problema 5: Para las siguientes expresiones indique el nombre del concepto estadistico asociado y señale cuál de ellas corresponde a una definición de la Asimetría estadística de una variable aleatoria.

$$\begin{aligned}
\sigma &= E\left[(x-\mu)^r\right] \\
\sigma_1 &= E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} \\
\sigma_2 &= \frac{Q_3+Q_1+2Q_2}{Q_3-Q_1} \\
\sigma_3(\alpha) &= \frac{F^{-1}(1-\alpha)+F^{-1}(\alpha)-2Q_2}{F^{-1}(1-\alpha)-F^{-1}(\alpha)} \\
\sigma_4 &= \frac{\mu-Q_2}{E\mid X-Q_2\mid} \\
\sigma_5 &= \frac{\mu-Q_2}{\sigma}
\end{aligned}$$

En todos los casos Q_1, Q_2, Q_3 corresponden a los cuartiles 1, 2 y 3 de la variable aleatoria, μ es su media, σ es su desviación estándar y $F^{-1}(1-\alpha)$ corresponde al percentil $(1-\alpha)$ y $F^{-1}(\alpha)$ al percentil (α) de dicha variable aleatoria.

- **Análisis de los resultados:**

  8 alumnos no respondieron a esta pregunta, de los otros 6 alumnos que respondieron, solo 2 alumnos distinguieron dos y una definición respectivamente de Asimetría estadística de una variable aleatoria, reconocieron la primera y la segunda definición como la asimetría estadística para una variable aleatoria, uno de ellos reconoció las dos y el otro alumno sólo una definición, los restantes 5 alumnos que respondieron a esta pregunta, dan por respuesta para la primera y segunda definición que se trata de definición de varianza y desviación estándar en ese orden las respuestas y también en orden inverso.

Esto ya se preveía debido a que en el análisis de los libros de texto (capítulo 4) en ninguno de estos, se da la definición de Asimetría estadística de datos.

6.4.2.6. Respuestas de los alumnos a la pregunta 6

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 6 corresponde a la categoría I1: Definiciones de la Asimetría estadística.

Problema 6: Dada una muestra de n datos $x_1, x_2, \ldots x_n$ para las siguientes expresiones, indique el nombre y señale cuál de ellas corresponde a una definición de la Asimetría estadistica para una muestra.

$$\begin{aligned}
m_r &= \frac{1}{n}\sum (x-\overline{x})^k \\
\frac{m_3}{m_2^{\frac{3}{2}}} &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^3}{[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2]^{3/2}} \\
\widehat{\sigma}_3 &= \frac{\widehat{Q}_3+\widehat{Q}_1+2\widehat{Q}_2}{\widehat{Q}_3-\widehat{Q}_1} \\
\widehat{\sigma}_4 &= \frac{\overline{x}-Med}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-Med)} \\
\widehat{\sigma}_5 &= \frac{\overline{x}-Med}{s} \\
\widehat{\sigma}_6 &= \frac{3(\overline{x}-moda)}{s}
\end{aligned}$$

En todos los casos $\widehat{Q}_1, \widehat{Q}_2, \widehat{Q}_3$ corresponden a los cuartiles 1, 2 y 3 de la variable aleatoria, x es la media de los datos, s es la desviación estándar de los datos y Med es la mediana de los datos y $moda$ es la moda de los datos.

- **Análisis de los resultados:**

  De un total de 14 alumnos, 12 alumnos no respondieron a esta pregunta, y de los 2 alumnos que respondieron esta pregunta, solo un alumno señaló lo correcto, pero identificando solamente dos de las 5 definiciones de Asimetría estadística para una muestra que se mostraban en el cuestionario, estas fueron: σ_3 correspondiente al coeficiente de Bowley - que no lo dijo - y σ_5, correspondiente al coeficiente de Pearson - que tampoco lo dijo-. Este alumno señaló estas dos definiciones, pero no dijo los nombres correctos de estos coeficientes de asimetría, decir los nombres no se pedía en la pregunta, pero con la respuesta de este alumno se puede decir, que recuerda estos dos coeficientes, pero no recuerda el nombre exacto. Justo estos dos coeficientes que señaló correctamente el alumno respecto a la pregunta, son parte de los 3 coeficientes de Asimetría estadística para una muestra que enseñan en esta institución (UNAC) de acuerdo a los libros de texto que utilizan.

- **Conclusiones de las respuestas respecto a las preguntas 5 y 6:**
  Los alumnos no identifican las definiciones de la Asimetría estadística para una muestra, que sí se enseña en su Institución educativa (de acuerdo a los libros de texto que utilizan) y porsupuesto, no identifican las definiciones de la Asimetría estadística de una variable aleatoria que no se enseña en su institución.

6.4.2.7. Respuestas a la pregunta 7

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 7 corresponde a la categoría I3: Interpretaciones.

Problema 7: Los siguientes datos corresponden a los días de permiso por enfermedad de un grupo de trabajadores de una empresa en los últimos 6 meses:

$$2, 3, 3, 5, 5, 6, 5, 6, 6, 3, 6$$

Si se graficara esta distribución de datos, ¿qué se puede decir de la forma en que están distribuidos?

- **Análisis de los resultados:**
  3 alumnos no respondieron a esta pregunta, 4 alumnos respondieron correctamente diciendo que es asimétrica (uno de ellos respondió que no es simétrica), pero solo identificaron la asimetría, pero no supieron decir el tipo de asimetría: 2 de ellos confundieron la asimetría izquierda por la asimetría derecha, pues respondieron que es asimétrica hacia la derecha y la respuesta correcta era que es asimétrica hacia la izquierda, el otro alumno respondió que es asimétrica aleatoria, es decir, no recuerda los tipos de asimetría. De entre los restantes 7 alumnos, 4 alumnos hicieron la tabla de distribución de frecuencias, pero no concluyeron en nada, 2 alumnos hicieron gráfico de barras y otro alumno dijo que es una çurva creciente", es decir, observó la asimetría de los datos, pero no lo dijo, no tiene en su lengüaje el término: asimetría.

6.4.2.8. Respuestas a la pregunta 8

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 8 corresponde a la categoría I3: Interpretaciones.

Problema 8: Para un conjunto de datos, ¿qué se puede decir de la forma en que están distribuidos?

- **Análisis de los resultados:**
  10 alumnos no respondieron a esta pregunta, de los 4 alumnos restantes, se transcribe textualmente sus respuestas:
  - **Alumno A2:** De los datos obtenidos, los datos de menor magnitud se repiten más que los de mayor magnitud.
  - **Alumno A6:** Esto significa que la distribución asimétrica es negativa y la distribución es asimétrica negativa usando el coeficiente de Fisher.
  - **Alumno A8:** Que de la media a la moda decae.
  - **Alumno A11:** Sesgada a la izquierda.

  La respuesta correcta debió ser que los datos de mayor valor con son que tienen más frecuencia o también que la media ¡mediana ¡moda
  Ninguno de los 4 alumnos dio la respuesta correcta; el Alumno 1, dio una respuesta contraria a lo correcto, tiene conflicto semiótico en cuanto a los tipos de asimetría -que ya se ha visto este conflicto en las respuestas a la preguna 7- ; del Alumno 2, se entiende que quizo decir que la moda es menor que la media (media ¿moda) , entonces dio una respuesta contraria a lo correcto, pues la media es menor que la moda; el Alumno 3 da por respuesta un equivalente del concepto de asimetría negativa, es decir, no responde a lo que se le pide; el Alumno 4 repite la pregunta y recuerda que con el coeficiente de Fisher se puede decir el tipo de asimetría, pero no responde con esto lo que se pide en la pregunta. Por lo tanto, ninguno de los 4 alumnos que sí respondieron a esta pregunta, dio la respuesta correcta.

6.4.2.9. Respuestas a la pregunta 9

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 9 corresponde a la categoría I3: Interpretaciones.

Problema 9: Para un conjunto de datos, si Ud. obtiene un valor de asimetría cero, ¿qué significa esto?

- **Análisis de los resultados:**
  4 alumnos no respondieron a esta pregunta, los restantes 10 alumnos respondieron correctamente a esta pregunta: la distribución de los datos es simétrica, solo uno de estos alumnos al querer decir esto puso: ”que está en equilibrio”, se entiende que no tiene en su lengüaje el concepto de simetría o asimetría, pero intuitivamente, entiende la simetría de los datos.

- **Conclusiones respecto a las respuestas a las preguntas 7, 8 y 9:**
  La mayoría de los alumnos, 10 de 14 alumnos entiende lo que es simetría, pero para la interpretación de la asimetría de datos sí tienen conflicto semiótico.

6.4.2.10. Respuestas a la pregunta 10

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 9 corresponde a la categoría I4: Cálculo de la Asimetría estadística.

Problema 10: Una variable aleatoria tiene la distribución de probabilidad:

$$P[X=-1]=0{,}1, P[X=1]=0{,}7, P[X=2]=0{,}2, R_X=-1,1,2$$

Calcule la asimetría estadística e interprete los resultados.
Sugerencia: utilice $\sigma_1=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$, donde $\mu_3=E[(x-\mu)^3], \mu=\sum_{R_X} XP(X=x), \sigma^2= E(X^2)-\mu^2, E(X^2)=\sum_{R_X} X^2P(X=x)$

- **Análisis de los resultados:**
  11 alumnos no respondieron a esta pregunta, de los 3 que respondieron esta pregunta se tiene que:

  - **Alumno A8 y A14:** Conocen la definición de esperanza de una variable aleatoria: hicieron este proceso con los correspondientes datos dados; el alumno A8 también empleó la definición de varianza de una variable aleatoria con los datos dados, pero ninguno de ellos llegaron a hacer todo el proceso que se necesitaba.
  - **Alumno A11:** Trató de calcular la esperanza de la variable aleatoria, pero no completó los cálculos.

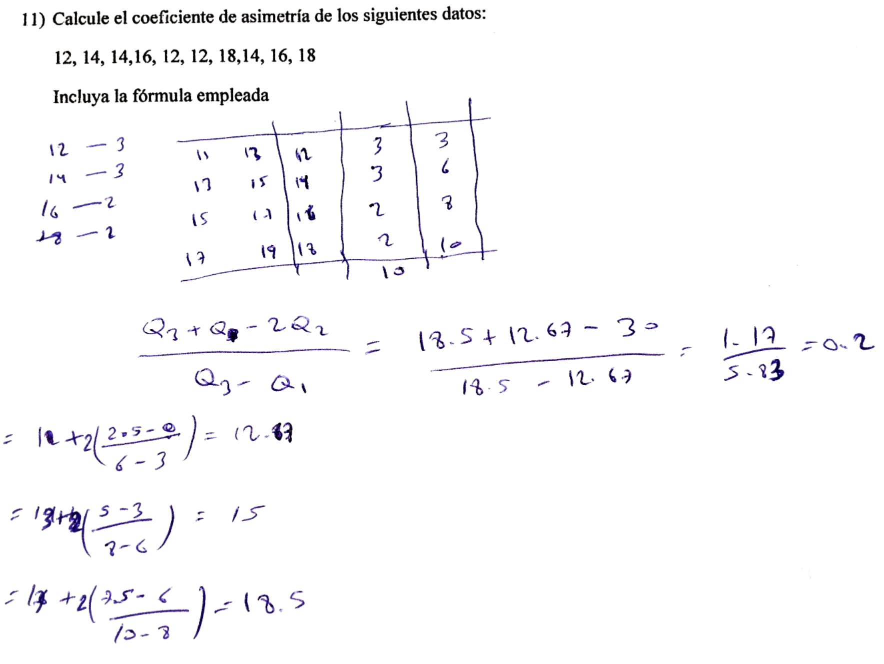
6.4.2.11. Respuestas a la pregunta 11

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 11 corresponde a la categoría I4: Cálculo de la Asimetría estadística.

Problema 11: Calcule el coeficiente de asimetría de los siguientes datos: 12, 14, 14, 16, 12, 12, 18, 14, 16, 18 Incluya la fórmula empleada.

- **Análisis de los resultados:**

  6 alumnos no respondieron a esta pregunta, de los 8 alumnos que respondieron esta pregunta: 5 alumnos hicieron una tabla de distribución de frecuencias (3 de ellos graficaron un polígono de frecuencias y uno de ellos, al hacer la gráfica de distribución de frecuencias identificó la curva asimétrica), un alumno además de hacer la tabla de distribución de frecuencias, halló la media, y otro alumno, simplemente, hizo una tabla ubicando en forma ordenada la frecuencia correspondiente; de los 3 alumnos restantes, sólo el alumno A4, hizo el proceso correcto y para ello utilizó el segundo coeficiente de Pearson, los otros 2 alumnos, uno de ellos, calculó la media aritmética y el otro alumno trató de hacer algún proceso. Se muestra el proceso correcto del alumno A4 en la figura 6.8.


11) Calcule el coeficiente de asimetría de los siguientes datos:

12, 14, 14,16, 12, 12, 18,14, 16, 18

Incluya la fórmula empleada

Figura 6.8: Respuesta correcta del alumno A4

6.4.2.12. Respuestas a la pregunta 13

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 13 corresponde a la categoría I3: Interpretaciones.

> **Problema 13:** Considerando el valor de la asimetría estadística obtenida en un conjunto de datos, grafique un histograma que represente las siguientes situaciones.
>
> a) Distribución simétrica
>
> b) Distribución asimétrica o sesgada a la derecha (positivo)
>
> c) Distribución asimétrica o sesgada a la izquierda (o negativa)

- **Análisis de los resultados:**
  2 alumnos no respondieron a esta pregunta, 7 alumnos graficaron correctamente los distintos tipos de asimetría, pero no lo hicieron graficando un histograma, sino que graficaron en forma de campana la distribución simétrica (se pedía histograma), y hicieron las respectivas curvas de asimetría para la asimetría derecha e izquierda. Por lo tanto, estos alumnos sí distinguen los distintos tipos de asimetría en una gráfica, pero tienen la noción que los distintos tipos de asimetría siempre van en forma de curva; 4 alumnos respondieron a esta pregunta graficando en forma de curva confundiendo la asimetría derecha y la izquierda, es decir, graficaron la distribución asimétrica izquierda en vez de la distribución asimétrica derecha – para la respuesta a la pregunta b) – y viceversa, graficaron la distribución asimétrica derecha en vez de la distribución asimétrica izquierda – para la pregunta c)–, estos 4 alumnos sí graficaron correctamente en curva la distribución simétrica - no hicieron el histograma - ; por lo tanto, en total, fueron 11 alumnos los que distinguen lo que es una distribución simétrica (identificándola con representación de curva); un alumno para responder a esta pregunta graficó en el sistema de coordenadas (en el primer cuadrante) una recta $y = x$ para responder a la pregunta a); una curva creciente (en el primer cuadrante) para responder a la pregunta b) y para responder a la pregunta c) graficó una curva decreciente en el tercer cuadrante. Se puede conjeturar, que este alumno tiene el concepto que distribución simétrica se refiere a que los valores van aumentando en forma constante; para la distribución asimétrica a la derecha tiene el concepto que los valores van aumentando pero de forma cuadrática y que para una distribución asimétrica a la izquierda, los valores van disminuyendo en forma cuadrática; quizá este último gráfico que lo hizo en el tercer cuadrante fue porque considera que los valores tienen que ser negativos.

6.4.2.13. Respuestas a la pregunta 14

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 14 corresponde a la categoría I3: Interpretaciones.

Problema 14: Suponga que una distribución tiene media de 65, una mediana de 60 y una moda de 50

a) ¿Qué tipo de asimetría tiene esta distribución?

b) ¿Qué proceso hizo para responder a la pregunta a)?

- **Análisis de los resultados:**
  11 alumnos no respondieron a esta pregunta, de los 3 alumnos que respondieron a esta pregunta, 2 alumnos dieron la respuesta correcta (asimetría positiva) y un alumno dio por respuesta "asimetría negativa", que es incorrecto. De esto, se puede seguir afirmando (pues ya se había deducido esto por los resultados de las respuestas a la pregunta 12) que los alumnos no identifican los distintos tipos de Asimetría estadística.

- **Conclusiones de las respuestas respecto a las preguntas 13 y 14:**
  De las respuestas -de los alumnos- dadas a las preguntas 13 y 14, que mide si los alumnos identifican los distintos tipos de asimetría estadística, se puede afirmar que los alumnos saben intuitivamente cuando una distribución de datos es simétrica y cuando es asimétrica, pero no conocen cuando es distribución asimétrica positiva y cuando es distribución asimétrica negativa y por lo tanto no saben la ubicación de las medidas de tendencia central en una distribución de datos.

6.4.2.14. Respuestas a la pregunta 15

De acuerdo al cuadro 5.2 (p.68) del capítulo 5, el problema 15 corresponde a la categoría I4: Cálculo de la Asimetría estadística.

Problema 15: En una urbanización en donde habitan 17 mujeres con hijos, se contabilizó el número de hijos que tienen; esto se muestra en la siguiente tabla:

Nº de hijos	Frecuencia
0	4
1	6
2	3
3	2
4	1
5	1

Analizar el grado (usar los coeficientes de Pearson y Fisher) y tipo de asimetría en la distribución de la variable: número de hijos.

- **Análisis de los resultados:**
  12 alumnos no respondieron a esta pregunta, de los 2 alumnos restantes, dijeron correctamente que el tipo de asimetría es positiva, para ello graficaron los datos según su frecuencia en el sistema de ejes coordenados, pero no respondieron al grado de asimetría.

- **Conclusiones respecto a las respuestas a las preguntas 10, 11, 12, 15 y 16:**
  Las preguntas 10, 11, 12, 15 y 16 fueron hechas para evaluar el proceso que hacen los alumnos para calcular la asimetría estadística de una muestra (que sí se les enseña en su institución - según los libros de texto de su silabo) y para ello necesitaban conocer la definición de la asimetría estadística para una muestra; según sus respuestas en las demás preguntas (preguntas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13 y 14) , se deduce que iban a tener conflictos semióticos al tratar de resolver estas preguntas. También se podría haber considerado, que dado que estas preguntas están – la mayoría – casi al final del cuestionario, los alumnos siguieron el orden de las preguntas y no les alcanzó el tiempo para resolverlas; sin embargo, esta afirmación se descarta, debido a que ya hemos visto cómo han respondido a las preguntas de nivel cognitivo conceptual y reflexivo.

6.4.3. Resultados cuantitativos respecto a las respuestas al cuestionario

En el Anexo C, se presenta los resultados cuantitativos (frecuencia) de las respuestas al cuestionario hecha por los alumnos del estudio, indicando el número de respuestas correctas, respuestas incorrectas y preguntas que no fueron contestadas por los alumnos

6.5. Análisis cognitivo de las respuestas de los alumnos de acuerdo al cuadro 5.4

Del análisis a las respuestas de los alumnos en el cuestionario, se puede deducir cuáles fueron los significados personales declarados de acuerdo a las especificaciones dadas en el cuadro 5.1 (capítulo 5), así se puede inferir si los alumnos conocían y entendían los conocimientos previos y si comprendieron la asimetría estadística. En el cuadro 5.4 (capítulo 5) se mostraron las preguntas evaluadas a los alumnos, de acuerdo a los 10 contenidos y a los 3 tipos de contenido: conceptual, procedimental y reflexivo. Por lo tanto, los significados personales declarados que se dedujo tienen los alumnos en estudio respecto a los conocimientos previos y de la asimetría estadística son:

Nº	Pregunta	Contenido	Tipo de contenido
1	1	El alumno reconoce las medidas de tendencia central: media, mediana y moda, las medidas de variabilidad (varianza), así como identifica las medidas de forma incluyendo los percentiles	Conceptual

De acuerdo con la contestación de la pregunta 1 por parte de los alumnos, se afirma que la mayoría de los alumnos reconoció todas estas medidas: de tendencia central, de variabilidad y de forma intuitiva y como este conocimiento es previo para el conocimiento del objeto matemático: asimetría estadístico, se puede decir, que pueden también entender intuitivamente lo que es la asimetría estadística y esto se afirma de acuerdo a las respuestas de estos alumnos en la misma pregunta 1 en la que la mayoría reconoció las medidas de forma.

Nº	Pregunta	Contenido	Tipo de contenido
2	2, 3 y 4	El alumno conoce las aplicaciones de las medidas de tendencia central, de las medidas de dispersión, de los percentiles en los diagramas de caja	Conceptual

Las respuestas de los alumnos a la pregunta 2 indica que los alumnos no reconocen o identifican la relación de las medidas de tendencia central en la distribución de los datos, no logran formar ejemplos en que se vea la conveniencia de seleccionar a la media como representate de los datos; de esto se deduce que los alumno no logran interpretar las medidas de tendencia central en un contexto ya sea matemático o extramatemático (pues solo 2 alumnos, de los 14 alumnos evaluados dan una respuesta correcta); las respuestas de los alumnos a la pregunta 3 indican que tampoco los alumnos entienden la aplicación de las medidas de dispersión pues solo 3 de los 14 alumnos evaluados dan una respuesta correcta y las respuestas de los alumnos a la pregunta 4 indican también que los alumnos no saben el papel que cumplen los percentiles en un diagrama de caja.

Estos conocimientos previos a la asimetría estadística deberían estar bien formados en los alumnos; sin embargo, no se logró esto y por lo tanto, los alumnos llegan a ver la asimetría estadística sin una base sólida de conocimientos previos tanto de las medidas de tendencia central, de las medidas de variabilidad y de los percentiles en relación a los diagramas de caja.

Nº	**Pregunta**	**Contenido**	**Tipo de contenido**
3	5	El alumno reconoce la definición de la Asimetría estadística a partir de una distribución de probabilidad de una variable aleatoria	Conceptual

De acuerdo a las respuestas de los alumnos en la pregunta 5 del cuestionario, se puede deducir que los alumnos no conocen la definición de la asimetría estadística para una variable aleatoria (sólo 2 alumnos reconocieron algunas de las definiciones), esto ya se podía inferir de acuerdo al resultado del análisis del significado de referencia que se da en la UNAC, todos los libros de texto recomendados para estos alumnos enseñan la asimetría estadística para una muestra.

Nº	**Pregunta**	**Contenido**	**Tipo de contenido**
4	6	El alumno reconoce la definición de la Asimetría estadística a partir de un conjunto de datos e identifica que esta es un estimador de la asimetría y que tiene diferentes formas de ser calculado	Conceptual

De acuerdo a las respuestas de los alumnos en la pregunta 6 del cuestionario, ellos no reconocen esta definición, pues solo un alumno (Apéndice C) reconoció alguna de estas definiciones; a los alumnos sí se les enseña estas definiciones, de acuerdo a los libros de texto analizados; por lo tanto, de las especificaciones 2 y 3, se puede afirmar que los alumnos no conocen la definición de la asimetría estadística.

Nº	**Pregunta**	**Contenido**	**Tipo de contenido**
5	13	El alumno comprende intuitivamente la asimetría estadística de un conjunto de datos	Conceptual

De la respuesta de los alumnos a la pregunta 13, se puede afirmar que la mitad de alumnos evaluados sí comprende intuitivamente la asimetría estadística.

Nº	**Pregunta**	**Contenido**	**Tipo de contenido**
6	10	El alumno calcula la asimetría estadística a partir de una distribución de probabilidad	Procedimental

De acuerdo a la respuesta de los alumnos a la pregunta 10, se puede afirmar que los alumnos no ejecutan procedimiento algorítmico, les resulta no familiar este tipo de pregunta, pues son 10 alumnos, de un total de 14 que no la respondieron; esta pregunta fue redactada de manera igual a como se presenta en uno de sus libros de texto recomendados en su sílabo y por lo tanto, se puede deducir, el conflicto cognitivo que les resulta a los alumnos el proceso algorítmico para la resolución del problema y esto se puede deducir debido a que ellos no han aprendido los conceptos previos a la asimetría estadística.

Nº	Pregunta	Contenido	Tipo de contenido
7	11, 12, 15 y 16	El alumno calcula la Asimetría estadística a partir de un conjunto de datos	Procedimental

Los problemas del cuestionario que tratan de la Asimetría estadística a partir de un conjunto de datos son las preguntas 11, 12, 15 y 16; de acuerdo a las respuestas de los alumnos, éstos tienen conflictos semióticos en la manera de aplicar los datos, además que no conocen la definición de Asimetría, que ya se ha visto en la pregunta 5, 6, 10 y 13.

Nº	Pregunta	Contenido	Tipo de contenido
8	13	El alumno gráfica los tipos de Asimetría estadística a partir del valor obtenido al calcular la Asimetría estadística de un conjunto de datos	Procedimental

De acuerdo a las respuestas dadas por los alumnos en la preguntas 13, la mayoría de ellos, grafica correctamente los distintos tipos de asimetría (incluyendo la simetría de datos). Las respuestas a la pregunta 9 indican que los alumnos están familiarizados con

Nº	Pregunta	Contenido	Tipo de contenido
9	8, 9 y 14	El alumno interpreta la Asimetría estadística a partir de su relación con las medidas de tendencia central	Reflexivo

la simetría de los datos, porque todos los 10 alumnos que respondieron esta pregunta (de los 14 alumnos evaluados) lo hicieron correctamente, pero no con las asimetrías de los datos pues las respuestas de los alumnos a la pregunta 8 indican que los alumnos no saben interpretar los tipos de asimetría estadística, pues no hubo respuestas correctas; las respuestas a la pregunta 14, como ya se ha visto anteriormente, indican que los alumnos no logran interpretar la ubicación de las medidas de tendencia central en las distribuciones de datos. Por lo tanto, se necesita, afinar la enseñanza de las medidas de tendencia central y tratar de dar ejemplos en la que se muestre la ubicación de las medidas de tendencia central, pero que entiendan la interpretación de los datos en las distribuciones asimétricas y simétricas también.

Nº	Pregunta	Contenido	Tipo de contenido
10	7 y 15	El alumno aplica la asimetría estadística en un conjunto de datos basados en situaciones reales o simuladas	Reflexivo

De acuerdo a las respuestas de los alumnos a las preguntas 7 y 15, los alumnos, en general, no recuerdan las definiciones de la Asimetría estadística que se les enseña en los libros de texto.

Capítulo 7

Implicancias de los resultados de la investigación para la enseñanza

Como ya se ha manifestado, esta investigación tiene el propósito de identificar los significados institucionales y personales asociados a la Asimetría estadística en estudiantes del tercer ciclo de la carrera profesional de Economía de la Universidad Nacional del Callao (UNAC). Para ello se presentó los fundamentos teóricos de la Asimetría estadística y luego se analizaron, según el EOS, tanto el significado institucional respecto a la Asimetría estadística (considerando los libros de texto recomendados a los alumnos de Economía de la UNAC según su sílabo), como los significados personales de la Asimetría estadística (considerando un cuestionario ad hoc validado por un grupo de expertos aplicado a un grupo de alumnos de Economía de la UNAC). El propósito final fue proponer recomendaciones para la enseñanza de la Asimetría estadística a partir de los resultados del análisis del significado institucional y personal.
En este capítulo reflexionamos acerca de las implicancias para la enseñanza de los principales resultados encontrados en nuestro trabajo y así establecemos sus aportes y limitaciones.

7.1. Una visión general

Para el EOS, en el aprendizaje de un objeto matemático, debe haber una relación que satisfaga una correspondencia entre los significados personales y los institucionales, es decir, los significados personales se deben acercar lo más posible a los significados institucionales. En esta investigación se ha hecho el primer nivel de análisis del EOS correspondiente al sistema de prácticas y objetos matemáticos en la que se ha analizado la relación mencionada.

De acuerdo al análisis del significado institucional (capítulo 4) que se ha hecho en los libros de texto recomendados a los alumnos de Economía del tercer ciclo de la UNAC, se ha podido deducir cómo pretenden en estos textos se enseñe la Asimetría estadística y de acuerdo a los resultados de los significados personales de los alumnos hacia la Asimetría estadística (capítulo 6) , se ha podido ver que no se ha satisfecho el objetivo de parte de estos libros de que los alumnos se apropien del conocimiento de este tema.
Según Batanero (2000a) sobre cómo enseñar Estadística, menciona que se debe lograr lo siguiente:

- Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de la estadística en la sociedad, conociendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que la estadística ha contribuido a su desarrollo.
- Que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método estadístico, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de la estadística puede responder, las formas básicas de razonamiento estadístico, su potencia y limitaciones. (p.8)

Adaptando estas recomendaciones para el caso de la Asimetría estadística, en general, nosotros no hemos podido verificar ambos resultados tanto considerando el análisis del significado institucional de referencia como los significados personales declarados. En particular, consideramos que el aprendizaje de la Asimetría estadística está enfocado al proceso algorítmico sin comprender el significado del objeto matemático. Consideramos además que esto enfatiza en la propuesta de enseñanza que presentan los textos del curso. A continuación ofrecemos mayores detalles:

7.2. Manera de enseñar la Asimetría estadística en los libros de texto analizados

La manera de enseñar la Asimetría estadística en los libros de texto analizados se ha deducido del análisis del significado institucional de referencia de estos libros.
Según el análisis del significado institucional que se ha hecho, respecto a la Asimetría estadística, vemos que tanto el contenido del tema como las situaciones problemáticas planteadas en los libros de texto analizados, no contribuyen a que se logre lo que menciona la autora antes mencionada Batanero (2000a)
En los libros de texto analizados se ha visto (capítulo 4, sección 4.4, 4.5 y 4.6) que existen:

1. **Errores conceptuales**. (Esto se ve en la subsección 4.5.1.1: Notaciones y símbolos)

De acuerdo a investigaciones respecto a la didáctica de la Estadística, se tiene los siguientes comentarios de Sánchez Cobo (1996) y de Ortíz de Haro (1999) "[...] aunque existen libros de texto excelentes, la investigación didáctica está comenzando a mostrar como algunos errores conceptuales y pedagogía inadecuada se transmiten con una frecuencia mayor de lo que sería deseable en los libros de texto". En el análisis de los libros de texto mencionados en el capítulo 4, se verifica que ocurre lo que dicen estos autores. Así, vemos que en el capítulo 3, subsección 3.1.4 la definición teórica de la Asimetría estadística para la población (subsección 3.1.4.1) es la que se la llama: Asimetría estadística para una variable aleatoria, la definición para los estimadores de la Asimetría (subsección 3.1.4.2), es la que se le llama: Asimetría estadística de datos, y la definición de la aproximación de los estimadores estadísticos (subsección 3.1.4.3), es realmente, la estimación de los estimadores estadísticos, y esta última, en general en los libros de texto, es tomada como la definición formal de la Asimetría estadística, que no lo es.

2. **Manera tradicional de enseñanza** (Esto se ve en la subsección 4.5.2)
   Se dan situaciones problemáticas descontextualizadas, en las que solo hay que aplicar la definición, como también algunos conocimientos previos como son las medidas de tendencia central, medidas de variabilidad, momentos, etc. para hallar el valor de la asimetría estadística, pero de una manera que solo se tiene que hacer un proceso algorítmico para hallar la respuesta y en algunos casos ver el tipo de asimetría estadística, pero no se dan situaciones que inciten a la reflexión de los alumnos, que lleguen a comprender la Asimetría estadística. Además, ese proceso, para el desarrollo de las situaciones problemáticas, de aplicar la definición para hallar el resultado no lo lograron utilizar los alumnos adecuadamente, como se constata en los resultados a las preguntas del cuestionario en las secciones 6.4 y 6.5 del capítulo 6. (Ver también el apéndice C). Según el EOS, se considera que una persona comprende un determinado objeto matemático, cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas.

3. **Poco contenido para el tema.** (Ver la subsección 4.4.2, cuadro 4.2)
   En el cuadro 4.2 (p.35) vemos que los libros de texto contienen muy poco contenido respecto a la Asimetría estadística (ver numeral VIII del cuadro 4.2 del capítulo 4); solo el libro de Montiel, Rius, y Barón (1997) es el que tiene más contenido del tema (9 páginas).

4. **No se explica la aplicación de la Asimetría estadística en los libros de texto.** (Esto se ve en las subsecciones 4.5.2 y 4.5.5 del capítulo 4)
   Solo se dan situaciones en las que hay que realizar procedimientos algorítmicos.

7.3. Lo que han aprendido los alumnos

Del análisis de los significados personales (capítulo 6) se concluye lo que han aprendido los alumnos respecto a conocimientos previos y a la Asimetría estadística.
El cuadro 5.2 (ver capítulo 5) muestra las 4 categorías (I1, I2, I3 e I4) de las preguntas del cuestionario que fueron hechas a los alumnos (ver apéndice B). Por lo tanto, según las respuestas de los alumnos a estas preguntas, se tuvieron cuatro categorías de significados personales:

C1: **Significados personales respecto a definiciones de conocimientos previos y de la Asimetría estadística:**
Estos significados se dan en las respuestas a las preguntas 1, 5, 6 , 13, 14a y 15 (segunda pregunta)

C2: **Significados personales respecto a aplicaciones de los conocimientos previos:**
Estos significados los podemos deducir según las respuestas a las preguntas 2 y 3 del cuestionario hechas por los alumnos.

C3: **Significados personales respecto a interpretaciones:**
Estos significados se dan en las respuestas a las preguntas 4, 7, 8 y 9.

C4: **Significados personales respecto a cálculo de la Asimetría estadística:**
Estos significados se dan en las respuestas a las preguntas 10, 11, 12, 14b, 15 (primera pregunta) y 16.

Los resultados del análisis de las respuestas de los alumnos a P1, P2, P3 y P4 (ver capítulo 6 y apéndice C) muestran un déficit de conocimientos, así tenemos, de los 14 alumnos evaluados, las respuestas correctas que hicieron respecto a cada uno de las 4 categorías de significados personales fueron:
Para

C1: Fueron pocos los alumnos que dieron respuestas correctas a estas preguntas.

- Pregunta 1: 5 alumnos.
- Pregunta 5: 2 alumnos.
- Pregunta 6: 1 alumno.
- Pregunta 13: 7 alumnos.
- Pregunta 14: 2 alumnos.
- Pregunta 15: 2 alumnos.

C2: Fueron pocos los alumnos que dieron respuestas correctas a estas preguntas

- Pregunta 2: 3 alumnos.
- Pregunta 3: 2 alumnos.

C3: En la mayoría de preguntas, fueron pocos los alumnos que dieron respuestas correctas a estas preguntas

- Pregunta 4: 0 alumnos.
- Pregunta 7: 4 alumnos.
- Pregunta 8: 0 alumnos.
- Pregunta 9: 10 alumnos.

C4: Fueron pocos los alumnos que dieron respuestas correctas a estas preguntas

- Pregunta 10: 0 alumnos.
- Pregunta 11: 1 alumno.
- Pregunta 12: 2 alumnos.
- Pregunta 14: 2 alumnos.
- Pregunta 15: 0 alumnos.
- Pregunta 16: 0 alumnos.

De todas estas respuestas, vemos que las preguntas que tuvieron mayor número de alumnos que dieron sus respuestas correctas fueron en la categoría C1: 7 alumnos (en la pregunta 13) y en la categoría C3: 10 alumnos (en la pregunta 9); para las demás preguntas la mayoría de los alumnos no dieron respuesta o dieron un mínimo de respuestas correctas. Por lo tanto, el aprendizaje de los alumnos respecto a la Asimetría estadística fue muy escaso.

7.4. Relación entre la manera de enseñar y lo que han aprendido los alumnos

En las secciones 7.1 y 7.2, se ha manifestado que el significado institucional no ha pasado a ser parte de los significados personales de los alumnos; no se ha logrado un aprendizaje contundente en los alumnos y se puede deducir que en algo influye la manera tradicional de abordar la enseñanza de la Asimetría estadística y esto no ha contribuido al aprendizaje efectivo de los alumnos, pues en estos libros de texto, no se ve situaciones problemáticas en la que se vea la importancia de la Asimetría estadística, no hay

situaciones que permita la reflexión de los alumnos, en general, no hay situaciones contextualizadas.
Es por ello, que los docentes, debemos tomar acción en cuanto a controlar y adecuar nuestra enseñanza en los temas, se necesita una enseñanza activa en la que los alumnos participen en su aprendizaje, cambiar la metodología, especialmente en los temas básicos de la Estadística, se debe hacer una enseñanza con situaciones problemáticas contextualizadas.

7.5. Aportes y limitaciones de la investigación

En esta investigación se ha contribuido con conocer el significado institucional hacia la Asimetría estadística y los significados personales que los alumnos asignan a conocimientos previos y conocimientos respecto a la Asimetría estadística para el mejoramiento de la enseñanza-aprendizaje de los alumnos, pero además para esta mejoramiento, es necesario también conocer y aplicar lo que menciona Ortíz de Haro (1999, p.21):

> [. . .] Los conocimientos didácticos del profesor deben abarcar el componente o dimensión epistémica (significados institucionales, sus adaptaciones y cronogénesis), dimensión cognitiva (significados personales, conflictos cognitivos descritos en la literatura), dimensión instruccional (patrones de interacción, tipos de configuraciones didácticas, su articulación, optimización de los recursos tecnológicos y temporales) y dimensión afectiva. “Con una serie de tareas mejor planificadas y con explicaciones acertadas en los momentos claves del estudio es posible lograr una adecuada comprensión de los conocimientos pretendidos.”

7.5.1. Aportes de la investigación

Los principales aportes de esta investigación son:

1. Los resultados del análisis del significado institucional dado en los libros de texto de la Asimetría estadística pueden servir de base para la mejora en la enseñanza de la Asimetría estadística mediante la manera de construir las secuencias de enseñanza y/o en los instrumentos de evaluación.

2. En esta investigación, se ha podido observar los conflictos cognitivos (dificultades y errores) que tienen los alumnos en estudio respecto a las medidas de tendencia central, de variabilidad y de forma (donde se estudia a la asimetría estadística), que son conceptos básicos y necesarios dentro de la formación estadística que deberían

tener los estudiantes de economía, ciencias, ingeniería y en general en la mayoría de carreras, pues, como se ha mencionado en la introducción (capítulo 1) de esta investigación, la Estadística está presente en nuestro entorno social y es importante porque se aplica en las diferentes carreras profesionales. Por lo tanto, conociendo los conflictos cognitivos de los alumnos se puede hacer algunas modificaciones para mejorar el aprendizaje de los alumnos con respecto a la Asimetría estadística.

3. Los resultados sobre la relación entre el análisis epistémico (significado institucional) y el análisis cognitivo (significado personal) permiten ver lo importante que es saber cómo es la correspondencia entre estos dos significados para saber cómo adecuar nuestra enseñanza como docentes para la mejora en la comprensión de los alumnos respecto a la Asimetría estadística y en general se ve que es necesario hacer este análisis (respecto a estos 2 significados) en otros temas estadísticos, especialmente en los temas básicos que serán usados y aplicados por nuestros alumnos en temas más avanzados de Estadística, es decir, se deduce que se necesita y se debe hacer más investigaciones respecto a los significados institucionales y personales en otros temas básicos de Estadística.

7.5.2. Limitaciones en la investigación

Con respecto a las limitaciones de este trabajo podemos indicar dos principales, por un lado la ausencia de referencias de trabajos que hubieran abordado el estudio de la Asimetría estadística y por otro lado el número pequeño de estudiantes considerados en el estudio.

Con respecto a lo primero, fueron muy escasas las investigaciones previas que se encontraron respecto a la Asimetría estadística y en consecuencia no se tuvieron referencias previas como para diseñar un cuestionario que enfatice mejor las preguntas para poder hacer un análisis más exhaustivo respecto a los significados personales que los alumnos asignan a este objeto matemático.

Con respecto a lo segundo, el número de alumnos participantes del estudio fue de 14 de los 45 alumnos oficialmente matriculados en el curso en el semestre 2012-II. En este sentido los resultados correspondientes al significado personal declarado no es generalizable al conjunto de la clase. El número pequeño de alumnos evaluados corresponde a los alumnos que optaron voluntariamente por colaborar en el estudio y que fueron contactados en un curso alternativo fuera del horario regular de clase donde no necesariamente todos los alumnos de la clase se encontraban. Se optó por esta alternativa para no comprometer el propio horario del curso y para facilitar la independencia de respuesta en relación al profesor del curso.

Finalmente, nosotros consideramos que el presente trabajo es un trabajo pionero para nuestro medio y sienta las bases de futuras investigaciones que se pueden realizar acerca de la Asimetría estadística en otras universidades y con alumnos de diferentes especialidades.

Capítulo 8

Conclusiones y recomendaciones

8.1. Conclusiones

1. En el capítulo 3 se abordó el fundamento teórico de la Asimetría estadística y así se pudo comparar con el significado institucional (adoptado en los libros de texto). Al hacer esta comparación vemos que el significado institucional dado no corresponde con la definición teórica; es decir, en los libros de texto, en general, la definición que se da a la Asimetría estadística corresponde a la definición de las aproximaciones de los estimadores estadísticos dada en el fundamento teórico (subsección 3.1.4.3). Mientras esta definición se utiliza para una muestra de datos, la definición teórica se basa en el concepto de variable aleatoria. Con esto comprobamos que se requiere una presentación adecuada de este objeto matemático a nivel de libros de texto que distinga las diferencias entre la Asimetría estadística de una variable aleatoria (parámetro) con la Asimetría estadística de una muestra de datos (estimador) y la Asimetría estadística basada en índices aproximados de algunos estimadores.

2. En el capítulo 4 se hizo el análisis del significado institucional de la Asimetría estadística en la UNAC y las conclusiones generales se presentaron en la p.65 (sección 4.6). Éstas se pueden sintetizar diciendo que para la enseñanza de la Asimetría estadística, los ejercicios que se presentan en los libros de texto, enfocan a una enseñanza tradicional, en la que el alumno actúa de manera pasiva, impidiendo que el alumno active sus conocimientos previos, que tenga reflexión y que interprete los datos, actividades fundamentales en la Estadística.

3. En el capítulo 5, se mostraron los pasos para la construcción del cuestionario (formado por 16 preguntas), donde se tuvo en cuenta la manera de plantear y resolver las situaciones problemáticas presentadas en el capítulo 4 (subsecciones 4.5.2, p.45-52 y 4.5.5, p.57-63 respectivamente). Este mismo procedimiento se

puede seguir para hacer un cuestionario a aplicar a alumnos de distintas carreras profesionales, ya sea para conocer la forma cómo aprenden, las dificultades que tienen y lo que han aprendido respecto a la Asimetría estadística o se puede construir un cuestionario siguiendo los mismos pasos para conocer el aprendizaje de los alumnos respecto a otros temas estadísticos, especialmente los temas básicos, pues en casi todas las carreras profesionales llevan en un primer curso de Estadística (Estadística descriptiva) en la que se les enseña otros temas básicos.

4. En el capítulo 6, a modo de ilustración, se presenta un análisis de los significados personales declarados de un grupo de estudiantes del curso de Estadística básica de la especialidad de Economía de la UNAC en relación a la Asimetría estadística. En base a ello, se puede concluir, en general, que los significados personales no coinciden con el significado institucional de referencia; es decir, las respuestas que los alumnos dieron, mediante el cuestionario, fueron en la mayoría de los casos respuestas incorrectas y de esto se puede afirmar que el conocimiento de la Asimetría estadística y los conocimientos previos a este objeto matemático – que se enseña en los libros de texto – no pasó a ser parte del conocimiento de los alumnos. (Para mayores detalles ver las conclusiones específicas del análisis del significado institucional y significados personales en las secciones 4.6 y 6.5 de los capítulos 4 y 6, respectivamente).

5. En el capítulo 7 que trata de la implicancia de los resultados de la investigación para la enseñanza, se identifica la necesidad de mejorar el contenido de los libros de texto en relación a la presentación del objeto matemático: Asimetría estadística, asi como el diseño de clases que incidan en la interpretación de este objeto matemático en situaciones reales contextualizas.

8.2. Recomendaciones

Según los resultados de esta investigación, se considera pertinente las siguientes recomendaciones para investigaciones futuras:

1. Se requiere seguir haciendo investigaciones, ya sea respecto a los significados institucionales y personales de la Asimetría estadística como también otros análisis dentro del marco teórico del EOS, como son: el segundo nivel de análisis que corresponde a los procesos matemáticos y conflictos semióticos; el tercer nivel de análisis que corresponde al de configuraciones y trayectorias didácticas, el cuarto nivel de análisis que corresponde al sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio y el quinto nivel de análisis que corresponde a la idoneidad

didáctica del proceso de estudio para la mejora de la enseñanza-aprendizaje de la Estadística. También se requiere hacer investigaciones de otros temas estadísticos, especialmente los temas estadísticos básicos, pues se ha podido observar, en las secciones 6.4 y 6.5 del capítulo 6, la mayoría de los alumnos no saben la aplicación de las medidas de tendencia central y de variabilidad, comprobándose así lo que menciona Batanero (2000b) que para los alumnos no resulta facil este aprendizaje. Por lo tanto, para lograr que los alumnos apliquen razonablemente sus conocimientos básicos a temas estadísticos más avanzados, se necesita hacer investigaciones que contribuyan con la enseñanza-aprendizaje de la Estadística.

2. Replicar esta investigación a otras carreras profesionales y hacer estudios comparativos de la enseñanza-aprendizaje de la Asimetría estadística según las especialidades.

3. En los libros de texto analizados, se enseña, en la mayoría, por definición de Asimetría estadística, la aproximación de los estimadores de la Asimetría, pero éstas no son las definiciones formales (teóricas) de la Asimetría estadística, por lo tanto, la definición teórica también se debería enseñar a los alumnos (Ver capítulo 3: Fundamento teórico). Se recomienda de esta manera la mejora de los libros de texto en relación a la presentación de estos conceptos.

4. A nivel de enseñanza se recomienda dar más tiempo de enseñanza a la Asimetría estadística, pues según el sílabo de Estadística para los alumnos de la muestra de estudio, esta enseñanza se da en la séptima semana que es de 5 horas (Tema 5: “Estadígrafos de forma y de concentración”) en la que se enseña – aparte del tema de la Asimetría – los momentos, coeficiente de apuntamiento o curtosis, curva de concentración: Curva de Lorenz y el índice de concentración: Coeficiente de Gini; además, en la mayoría de libros de texto que hacen uso estos alumnos, la Asimetría estadística es abordada de una manera ligera y poca y según los resultados obtenidos de la comprensión de los alumnos respecto a la Asimetría estadística, no logran asimilar la aplicación e interpretación de la Asimetría y sus conocimientos previos como son las medidas de tendencia central, entonces, se deduce que se requiere más tiempo de enseñanza para este objeto matemático; también se debería hacer uso de programas estadísticos usando la computadora para los temas de medidas de tendencia central y Asimetría y por último verificar que los alumnos tengan un pensamiento más reflexivo enfocando los problemas con relación a la Asimetría estadística de manera que interpreten los datos y no solamente que se limiten a hacer cálculos para hallar la asimetría estadística, como los que se muestran en los libros de texto.

5. Aplicar el cuestionario, construido en esta investigación, a muestras de alumnos de diferentes características y evaluar posibles diferencias por edad, sexo, universidad pública o privada, etc. respecto al conocimiento de la Asimetría estadística.

6. Relacionar los resultados del análisis de los significados personales de los alumnos con otras evidencias como el desempeño en el curso o las actitudes de los alumnos hacia el curso de Estadística en el que se enseña este objeto matemático.

Apéndice A

Cuestionario para validación de expertos

CUESTIONARIO

Estimado señor Juez le agradezco su colaboración en este estudio. Nosotros estamos interesados en medir el conocimiento acerca de la Asimetría Estadística que presentan estudiantes universitarios luego de tomar un primer curso de Estadística. Por ello, le pedimos su colaboración para evaluar la pertinencia y la redacción de las preguntas consideradas y la posibilidad de que nos pueda brindar sus sugerencias para la mejora de la redacción de las preguntas.

Instrucciones:

Para cada pregunta, nosotros colocamos un cuadro donde se indica el aspecto medido y el nivel cognitivo correspondiente a la pregunta. Al final de cada pregunta aparece un cuadro para valorar la pertinencia y la redacción de la pregunta así como para incluir sugerencias.

Pertinencia: Para este rubro considere una escala de 1 a 5 para valorar la pertinencia del ítem, donde el valor 1 significa que el ítem no debe estar en el cuestionario y el valor 5 significa que el ítem debe estar en este cuestionario.

Redacción: Para este rubro considere una escala de 1 a 5 para valorar la redacción del ítem, donde el valor 1 significa que el ítem está inadecuadamente redactado y el valor 5 significa que el ítem está adecuadamente redactado.

Sugerencias: Incluya si es el caso, las sugerencias de modificación de la redacción del ítem, u otra apreciación que considere necesaria.

Pregunta1

Nro	Aspecto medido	Nivel cognitivo
1	El alumno reconoce las medidas de tendencia central: media, mediana y moda, las medidas de variabilidad (varianza), así como identifica las medidas de forma incluyendo los percentiles	Conceptual

a) Clasifique las siguientes medidas estadísticas con una (X) según su tipo

Medidas Estadísticas	Medida de Tendencia central	Medidas de Variabilidad	Medidas de Forma
Media			
Mediana			
Moda			
Desviación estándar			
Varianza			
Percentil			
Asimetría			
Curtosis			

b) Cite propiedades o ventajas de la media, de la mediana y moda en la que se vea su diferencia.

c) ¿Por qué son útiles las medidas de dispersión?

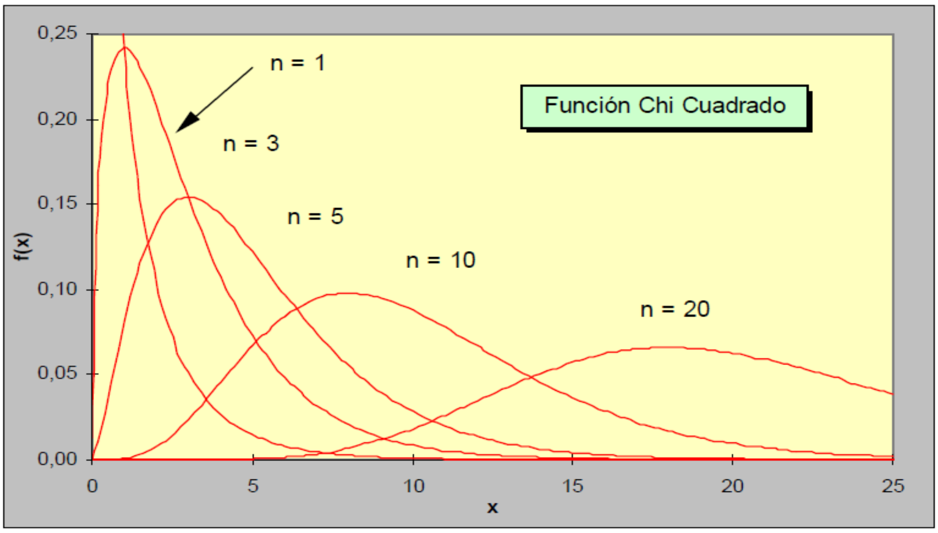
d) En un diagrama de caja que representan los percentiles.

Pertinencia	Redacción	Sugerencias

PREGUNTA 2

2	El alumno reconoce la definición de la Asimetría estadística a partir de una distribución de probabilidad de una variable aleatoria	Conceptual

e) Se muestra a continuación diferentes gráficas de una distribución de probablidad (distribución Chi-cuadrado para varios grados de libertad $n = 1, 3, 5, 20$). ¿Qué puede decir respecto de la asimetría estadística para cada grado de libertad mostrado?



Extraído de: http://www.noldor.com.ar/noldorweb/consultor/Variables_extremas.pdf

n=1 ______________________________

n=3______________________________

n=5______________________________

n=10_____________________________

n=20_____________________________

Pertinencia	Redacción	Sugerencias

f) Para las siguientes expresiones indique el nombre y señale cuál de ellas corresponde a una definición de la asimetría estadística de una variable aleatoria

$\mu_r = E[(x-\mu)^r]$ ______________________________________

$\sigma_1 = E\left(\frac{(X-\mu)}{\sigma}\right)^3) = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$ ______________________________________

$\sigma_2 = \frac{Q_3+Q_1+2Q_2}{Q_3-Q_1}$ ______________________________________

$\sigma_3(\alpha) = \frac{F^{-1}(1-\alpha)+F^{-1}(\alpha)-2Q_2}{F^{-1}(1-\alpha)-F^{-1}(\alpha)}$ ______________________________________

$\sigma_4 = \frac{\mu-Q_2}{E|X-Q_2|}$ ______________________________________

$\sigma_5 = \frac{\mu-Q_2}{\sigma}$ ______________________________________

En todos los casos Q_1, Q_2, Q_3 corresponden los cuartiles 1, 2 y 3 de la variable aleatoria, μ es su media, σ es su desviación estándar y $F^{-1}(1-\alpha), F^{-1}(\alpha)$ corresponden a percentiles $1-\alpha, \alpha$ respectivamente de dicha variable aleatoria.

Pertinencia	**Redacción**	**Sugerencias**

Pregunta 3

3	El alumno reconoce la definición de la Asimetría estadística a partir de un conjunto de datos e identifica que esta es un estimador de la asimetría y que tiene diferentes formas de ser calculado	Conceptual

g) Dada una muestra de n datos $x_1, x_2 \ldots, x_n$, para las siguientes expresiones indique el nombre y señale cuál de ellas corresponde a una definición de la asimetría estadística para una muestra

$m = \frac{1}{n}\sum(x-\overline{x})^k$ ______________________________________

$$\frac{m_3}{{m_2}^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2]^{3/2}}$$ ________________________________

$$\hat{\sigma_2} = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$$ ________________________________

$$\hat{\sigma_3} = \frac{\hat{Q}_3+\hat{Q}_1-2\hat{Q}_2}{\hat{Q}_3-\hat{Q}_1}$$ ________________________________

$$\hat{\sigma_4} = \frac{\overline{x}-Med}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-Med)}$$ ________________________________

$$\hat{\sigma_5} = \frac{\overline{x}-Med}{s}$$ ________________________________

$$\hat{\sigma_6} = \frac{3(\overline{x}-moda)}{s}$$ ________________________________

En todos los casos $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{Q}_3$ corresponden los quantiles 1, 2 y 3 estimados de la muestra de datos, $\overline{x}$ es la media de los datos, s es la desviación estándar de los datos y Med es la mediana de los datos y moda es la moda de los datos.

Pertinencia	**Redacción**	**Sugerencias**

Pregunta 4

4	El alumno comprende intuitivamente la Asimetría estadística de un conjunto de datos	Conceptual

h) Los siguientes datos corresponden a los días de permiso por enfermedad de un grupo de trabajadores de una empresa en los últimos 6 meses:

2, 3,3, 5, 5, 6,5, 6, 6, 3, 6,

¿Si se graficara esta distribución de datos, ¿qué se puede decir de la forma en que están distribuidos?

i) Para un conjunto de datos, si Ud. obtiene un valor de asimetría negativo, ¿qué significa esto?

j) Para un conjunto de datos, si Ud. obtiene un valor de asimetría cero, ¿qué significa esto?

Pertinencia	Redacción	Sugerencias

Pregunta 5

5	El alumno calcula la asimetría estadística a partir de una distribución de probabilidad	Procedimental

k) Una variable aleatoria tiene la distribución de probabilidad

$P[X=1]=0.2, P[X=2]=0.6, P[X=3]=0.5$

Calcule la asimetría estadística e interprete los resultados.

l) Dada la distribución de probabilidad $f(x)=x-2$, $2<x<3$

Calcule la asimetría estadística e interprete los resultados

Pertinencia	Redacción	Sugerencias

Pregunta 6

6	El alumno calcula la Asimetría estadística a partir de un conjunto de datos	Procedimental

m) Calcule el coeficiente de asimetría de los siguientes datos:

12, 14, 14,16, 12, 12, 18,14, 16, 18

Incluya la fórmula empleada

n) Con los siguientes datos presentados en esta tabla de distribución de frecuencias, calcule los coeficientes de asimetría de Pearson:

Intervalo	n_i
[62, 68[	4
[68, 74[	7
[74,80[	9
[80,86]	11

o) Se obtuvo las calificaciones de 50 estudiantes del tercer ciclo de Matemática de una universidad y se han obtenido los siguientes estadísticos:

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ = 345

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ = 2.553

$\sum_{i=1}^{n} x_i^3$ = 19.821

¿La mayoría de los estudiantes obtuvieron notas altas o bajas?, ¿Qué tipo de asimetría tiene esta distribución de datos?

Pertinencia	**Redacción**	**Sugerencias**

Pregunta 7

7	El alumno grafica los tipos de asimetría estadística a partir del valor obtenido al calcular la asimetría estadística de un conjunto de datos	Procedimental

p) Considerando el valor de la asimetría estadística obtenido en un conjunto de datos grafique un histograma que represente las siguientes situaciones.

- Distribución simétrica, campaniforme y unimodal
- Distribución asimétrica a la derecha (o positiva), campaniforme y unimodal.
- Distribución asimétrica a la izquierda (o negativa), campaniforme y unimodal

Pertinencia	Redacción	Sugerencias

Pregunta 8

8	El alumno interpreta la Asimetría estadística a partir de la relación con las medidas de tendencia central	Reflexivo

q) Suponga que una distribución tiene media de 65, una mediana de 60 y una moda de 50 ¿En qué dirección está sesgada la distribución?

Pertinencia	Redacción	Sugerencias

Pregunta 9

9	El alumno aplica la asimetría estadística en un conjunto de datos basados en situaciones reales o simuladas	Procedimental

r) En una urbanización en donde habitan 17 mujeres con hijos, se contabilizó el número de hijos que tienen, esto se muestra en la siguiente tabla:

x_i	n_i
0	4
1	6
2	3
3	2
4	1
5	1

Analizar el grado (usar los coeficientes de Pearson y Fisher) y tipo de asimetría en la distribución de la variable: número de hijos.

Pertinencia	Redacción	Sugerencias

s) Los salarios semanales de 30 trabajadores de la Empresa de productos, se muestran en la siguiente tabla:

Salario (soles)	**700**	**720**	**750**	**800**
Nro de trabajadores	**8**	**7**	**6**	**9**

Calcule el coeficiente de asimetría de Fisher.

¿Los salarios que paga la empresa está repartido equitativamente? ¿Por qué?

Pertinencia	Redacción	Sugerencias

Pregunta 10

10	El alumno interpreta la asimetría estadística de datos en relación con la asimetría estadística de la distribución normal	Reflexivo

t) Considere una distribución normal y un conjunto de datos obtenidos en un estudio. Responda a las siguientes preguntas:

a) Grafique para la distribución normal, las media, mediana y moda

b) Si el valor de la asimetría estadística es cero que puede decir de sus datos en relación a la distribución normal.

c) Si su valor de asimetría es negativa que puede decir de sus datos en relación a la distribución normal

Pertinencia	**Redacción**	**Sugerencias**

Les agradecemos su cooperación que será de utilidad para el desarrollo de la tesis.

Pando, 21 de Noviembre de 2012.

Apéndice B

Cuestionario para evaluar los significados personales de los alumnos de estudio

CUESTIONARIO

Nombre: ____ **Código:** ______________

Edad: __________

Instrucciones:

Estimado alumno: resuelva este cuestionario, colocando TODO EL PROCESO necesario para el desarrollo de las preguntas.

Se quiere mejorar su aprendizaje, y por esto se le pide su colaboración a que nos muestre todo lo que conozca respecto a estas preguntas.

1) Clasifique las siguientes medidas estadísticas con una (X) según su tipo

Medidas Estadísticas	Medida de Tendencia central	Medidas de Variabilidad	Medidas de Forma
Asimetría o sesgo			
Mediana			
Moda			
Desviación estándar			
Varianza			
Curtosis o apuntamiento			
Media			

2) De un ejemplo en el que conviene seleccionar a la media como representante de los datos. ¿En qué caso convendría considerar a la mediana? ¿Y en qué caso convendría elegir a la moda?

3) ¿Por qué son útiles las medidas de dispersión?

4) ¿Qué representan los percentiles en un diagrama de caja o bigotes?

5) Para las siguientes expresiones indique el nombre del concepto estadístico asociado y señale cuál de ellas corresponde a una definición de la asimetría estadística de una variable aleatoria

$\sigma = E[(x-\mu)^r]$ ____________________________________

$\sigma_1 = E[(\frac{(X-\mu)}{\sigma})^3] = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$ ____________________________________

$\sigma_2 = \frac{Q_3+Q_1+2Q_2}{Q_3-Q_1}$ ____________________________________

$\sigma_3(\alpha) = \frac{F^{-1}(1-\alpha)+F^{-1}(\alpha)-2Q_2}{F^{-1}(1-\alpha)-F^{-1}(\alpha)}$ ____________________________________

$\sigma_4 = \frac{\mu-Q_2}{E|X-Q_2|}$ ____________________________________

$\sigma_5 = \frac{\mu-Q_2}{\sigma}$ ____________________________________

En todos los casos Q_1, Q_2, Q_3 corresponden los cuartiles 1, 2 y 3 de la variable aleatoria, μ es su media, σ es su desviación estándar y $F^{-1}(1-\alpha)$ corresponde al percentil $(1-\alpha)$ y $F^{-1}(\alpha)$ al percentil (α) de dicha variable aleatoria.

6) Dada una muestra de n datos $x_1, x_2 \ldots, x_n$, para las siguientes expresiones indique el nombre y señale cuál de ellas corresponde a una definición de la asimetría estadística para una muestra

$m = \frac{1}{n}\sum(x-\overline{x})^k$ ____________________________________

$\frac{m_3}{m_2{}^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2]^{3/2}}$ ____________________________________

$\hat{\sigma_3} = \frac{\hat{Q}_3+\hat{Q}_1-2\hat{Q}_2}{\hat{Q}_3-\hat{Q}_1}$ ____________________________________

$\hat{\sigma_4} = \frac{\overline{x}-Med}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-Med)}$ ____________________________________

$\hat{\sigma_5} = \frac{\overline{x}-Med}{s}$ ____________________________________

$\hat{\sigma_6} = \frac{3(\overline{x}-moda)}{s}$ ____________________________________

En todos los casos $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{Q}_3$ corresponden los cuartiles 1, 2 y 3 respectivamente, estimados de la muestra de datos, $\overline{x}$ es la media de los datos, s es la desviación estándar de los datos y Med es la mediana de los datos y moda es la moda de los datos.

7) Los siguientes datos corresponden a los días de permiso por enfermedad de un grupo de trabajadores de una empresa en los últimos 6 meses:

2, 3,3, 5, 5, 6,5, 6, 6, 3, 6,

¿Si se graficara esta distribución de datos, ¿qué se puede decir de la forma en que están distribuidos?

8) Para un conjunto de datos, si Ud. obtiene un valor de asimetría negativa, ¿qué significa esto?

9) Para un conjunto de datos, si Ud. obtiene un valor de asimetría cero, ¿qué significa esto?

10) Una variable aleatoria tiene la distribución de probabilidad

$$P[X=-1]=0.1, P[X=1]=0.7, P[X=2]=0.2, \quad R_X=-1,1,2$$

Calcule la asimetría estadística e interprete los resultados.

Sugerencia: utilice $\sigma_1=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$, donde $\mu_3=E[(x-\mu)^3]$, $\mu=\sum_{R_X} XP(X=x)$, $\sigma^2=E(X^2)-\mu^2, E(X^2)=\sum_{R_X} X^2P(X=x)$,

11) Calcule el coeficiente de asimetría de los siguientes datos:

12, 14, 14,16, 12, 12, 18,14, 16, 18

Incluya la fórmula empleada

12) Con los siguientes datos presentados en esta tabla de distribución de frecuencias, calcule los coeficientes de asimetría de Pearson:

Intervalo	Frecuencia
[62, 68[	4
[68, 74[	7
[74,80[	9
[80,86]	11

13) Considerando el valor de la asimetría estadística obtenido en un conjunto de datos grafique un histograma que represente las siguientes situaciones.

a) Distribución simétrica

b) Distribución asimétrica o sesgada a la derecha (o positiva)

c) Distribución asimétrica o sesgada la izquierda (o negativa)

14) Suponga que una distribución tiene media de 65, una mediana de 60 y una moda de 50

a) ¿Qué tipo de asimetría tiene esta distribución?

¿Qué proceso hizo para responder a la pregunta a)

15) En una urbanización en donde habitan 17 mujeres con hijos, se contabilizó el número de hijos que tienen, esto se muestra en la siguiente tabla:

Nro. De hijos	Frecuencia
0	4
1	6
2	3
3	2
4	1
5	1

Analizar el grado (usar los coeficientes de Pearson y Fisher) y tipo de asimetría en la distribución de la variable: número de hijos.

16) Los salarios semanales de 30 trabajadores de una empresa, se muestran en la siguiente tabla:

Salario (soles)	700	720	750	800
Nro de trabajadores	8	7	6	9

Calcule el coeficiente de asimetría de Fisher.

Callao, 26 de Noviembre de 2012

Apéndice C

Resultados cuantitativos de las respuestas al cuestionario

En esta tabla se muestra la cantidad de respuestas correctas, incorrectas y las preguntas que no fueron respondidas por los 14 alumnos del tercer ciclo de Economía de edades entre 19 a 22 años de edad que fueron la muestra de estudio.

Nº de pregunta	Frecuencia de respuestas correctas	Frecuencia de respuestas incorrectas	Preguntas no respondidas
1	5	9	0
2	3	8	3
3	2	5	7
4	0	10	4
5	2	4	8
6	1	1	12
7	4	7	3
8	0	4	10
9	10	0	4
10	0	3	11
11	1	7	6
12	1	6	7
13	7	5	2
14a y 14b	2	1	11
15 primera pregunta	0	2	12
15 segunda pregunta	2	0	12
16	0	4	12

Cuadro C.1: Cuadro cuantitativo de respuestas de la muestra de estudio

Apéndice D

Sílabo del curso de Estadística básica

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE ECONOMÍA

SÍLABO

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1.	Nombre de la asignatura	ESTADÍSTICA BÁSICA	
1.2.	Código	CE 207	
1.3	Ciclo del Plan Curricular	3°	
1.4.	Carácter	Obligatorio	
1.5.	Pre-requisito	CE 205 –Matemática para Economistas II	
1.6.	Horas lectivas semanales	Teoría:3	Práctica: 2
1.7.	N° de Créditos	4	
1.8.	Semestre Académico	2012-B	
1.9.	Profesores	1. Juan Francisco BAZÁN BACA (Coordinador) 2. Santiago Oswaldo ALEJANDRO BILLÓN 3. Ricardo Luis POMALAYA VERÁSTEGUI	

II. SUMILLA

La asignatura desarrolla las técnicas de la estadística descriptiva como instrumentos para la medición económica, útiles tanto en asignaturas afines como en la investigación económica. Es de naturaleza procedimental cognitiva, ya que el futuro economista no sólo necesita los fundamentos teóricos de la estadística, sino también las aplicaciones a la economía. La asignatura comprende: Generalidades de la estadística. Presentación de datos. Estadígrafos. Distribuciones de frecuencias bidimensionales. Correlación y regresión simple. Series temporales. Números índice.

III. OBJETIVOS

3.1 Objetivo general

Conocer, comprender e interpretar los conceptos, métodos y técnicas de la Estadística Descriptiva, así como sus aplicaciones a la Economía.

3.2 Objetivos específicos

a. Aplicar correctamente la terminología estadística, así como el método estadístico a los requerimientos de información en la investigación científica.
b. Elaborar tablas de frecuencias unidimensionales y bidimensionales así como las gráficas correspondientes.
c. Calcular e interpretar las medidas de posición, de dispersión, de forma y de concentración y desigualdad.
d. Conocer, aplicar e interpretar los números índices, en particular el índice de precios al consumidor y de volumen físico.
e. Que el estudiante sea capaz de realizar un análisis estadístico descriptivo y exploratorio de una base de datos numéricos y categóricos con un paquete estadístico: SPSS, MINITAB, etc.

IV. CONTENIDO TEMÁTICO

Semana	Tema	Fecha	% avance
1ª	**TEMA 1: Estadística Descriptiva: Generalidades** 1.1 Estadística: definición, objeto y método. Población y muestra. 1.2 Las unidades estadísticas y las variables. Definición. 1.3 Los diferentes tipos de variables: variables cualitativas y variables cuantitativas. Formas de medición. 1.4 Recolección de datos. Fuentes de información.	20 al 24 de agosto	7%
2ª	**TEMA 2: Presentación de datos: cuadros y gráficos** 2.1 Variable cualitativa: distribución de frecuencias. Gráfico de sectores, barras, Pareto y pictóricos. 2.2 Variable cuantitativa discreta: distribución de frecuencias. Gráficos: diagrama de frecuencias y de frecuencias acumuladas. 2.3 Variable cuantitativa continua: distribución de frecuencias. Gráficos: histograma, polígono de frecuencias y ojivas. 2.4 Diagrama de tallos y hojas.	27 al 31 de agosto	14%
3ª	**TEMA 3: Estadígrafos de posición** 3.1Caracteristicas de posición de una distribución de frecuencias. 3.2 La media aritmética. Definición y Propiedades. 3.3 La mediana. Definición y propiedades. 3.4 La moda. Relación entre media, mediana y moda.	03 al 07 de setiembre	21%
4ª	3.5 La media geométrica. 3.6 La media armónica. 3.7 Los cuantiles: cuartiles, deciles y percentiles.	10 al 14 de setiembre	28%
5ª	**TEMA 4: Estadígrafos de dispersión** 4.1 Rango. Rango intercuartílico. 4.2 El diagrama de caja (Box-plot). Datos atípicos. 4.3 Desviación media. 4.4 La varianza, la desviación típica.	17 al 21 de setiembre	35%
6ª	4.5 El coeficiente de variación. 4.6 Variables tipificadas: aplicaciones. 4.7 Uso de la curva normal.	24 al 28 de setiembre	42%
7ª	**TEMA 5: Estadígrafos de forma y de concentración** 5.1 Momentos. 5.2 Coeficiente de forma o asimetría. 5.3 Coeficiente de apuntamiento o curtosis. 5.4 Curva de concentración: curva de Lorenz. 5.5 Índice de concentración: Coeficiente de Gini.	01 al 05 de octubre	50%
8ª	Examen parcial	08 al 12 de octubre	
9ª	**TEMA 6: Distribuciones estadísticas bidimensionales** 6.1 Tablas de doble entrada. 6.2 Distribuciones marginales. 6.3 Distribuciones condicionales. 6.4 Independencia estadística y relación funcional	15 al 19 de octubre	57%

10 ª	6.5 Representaciones gráficas de tablas bidimensionales 6.6 Descripción numérica de estadísticas bidimensionales. 6.7 Características globales de una distribución bidimensional. 6.8 Tablas de contingencia h x k	22 al 26 de octubre	64%
11 ª	**TEMA 7: Correlación y Regresión Simple** 7.1 Distribución conjunta de dos variables. 7.2 Diagrama de dispersión. La covarianza. 7.3 La recta de regresión mínimo cuadrática. 7.4 El coeficiente de correlación. La desviación típica residual.	29 de octubre al 02 de noviembre	71%
12 ª	7.5 Coeficiente de determinación. 7.6 Regresión no lineal. Correlación por rangos. 7.7 Asociación entre caracteres nominales.	05 al 09 de noviembre	78%
13 ª	**TEMA 8: Series temporales** 8.1 Series temporales y magnitudes económicas. Componentes de una serie temporal. 8.2 Análisis de la tendencia. 8.3 Análisis de la estacionalidad. 8.4 Variaciones cíclicas.	12 al 16 de noviembre	85%
14 ª	**TEMA 9: Números índice** 9.1 Índice elemental. Definición. Selección del período base. Propiedades de un índice elemental. 9.2 Índice sintético. Definición. Los índices sintéticos más utilizados: índices de Laspeyres, Paasche y Fisher. 9.3 Los índices de precios, de cantidad y de valor.	19 al 23 de noviembre	92%
15	9.4 Deflación de series estadísticas. 9.5 Enlaces y cambios de bases. 9.6 Índices de precios al consumidor de Lima Metropolitana. Aplicaciones del IPC. El índice de volumen físico.	26 al 30 de noviembre	100%
16 ª	Examen final	03 al 07 de diciembre	
17 ª	Examen Sustitutorio.	10 al 14 de diciembre	

V. MÉTODOS Y TÉCNICAS DE ENSEÑANZA

Los temas que comprende la asignatura serán expuestos por el profesor, haciendo énfasis en casos prácticos que permitan complementar los aspectos teóricos de cada uno de los temas tratados. Los alumnos tendrán una activa participación en el desarrollo de cada uno de los temas expuestos por el profesor y desarrollarán los ejercicios propuestos en forma individual o grupal, bajo la orientación del profesor.
Usar algunos programas estadísticos como: Statistical Package Science Social (SPSS), MINITAB, SYSTAT, etc. en el Laboratorio de Cómputo.

VI. EVALUACIÓN

La evaluación de la asignatura comprende: prácticas calificadas, cuyo promedio de nota será simbolizado por PP; y dos exámenes: parcial EP y final EF.

La nota final de la asignatura (NF) será el promedio simple:

$$NF = (PP + EP + EF)/3$$

Examen Sustitutorio (reemplaza la nota más baja de cualquiera de los exámenes)
Aprobarán la asignatura los alumnos con NF mayor o igual a 10.5

184

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

7.1 BASICA

1. ANDERSON, SWEENEY & WILLIAMS. "Estadística para administración y economía". Editorial Cengage Learning, Décima edición. México, 2009.
2. CÓRDOVA, Manuel. "Estadistica descriptiva e Inferencial". Ed. San Marcos, Lima, 2002.
3. CHUE, Jorge & Otros. "Estadística descriptiva y probabilidades". Fondo Editorial, Universidad de Lima, Lima, 2009.
4. GÓMEZ, Doris. "Estadística Descriptiva con soporte del SPSS y MATLAB". Fondo Editorial, UNMSM, Lima, 2006.
5. MARTÍN PLIEGO, F,J,"Introducción a la Estadística Económica y Empresarial Teoría y Practica" Ed. AC. 2ª edición. España, 2002.
6. MONTIEL, A; Y RIUS, F. "Estadística Económica y Empresarial". Ed Prentice -Hall. 1997.
7. MOYA y SARAVIA. "Probabilidad e Inferencia Estadística". Editorial San Marcos, Lima, 1998.
8. QUISPE, Renán. "Medición de la Economía con los Números Índices". Concytec, Lima, 2003.

7.2 COMPLEMENTARIA

1. DEGROOT, M.H. "Probabilidad y Estadística". Ed. Addison - Wesley. Iberoamérica, Wilmington, E.U.A. 1988.
2. NEWBOLD, PAUL. "Estadística para los Negocios y la Economía". Ed. Prentice-Hall, Cuarta edición. 1998.
3. PEÑA, D. y ROMO , J "Introducción a la Estadística para las Ciencias Sociales". Ed. McGRaW-HILL España 1998
4. QUINTANA, María. "Problemas de Estadística Descriptiva Aplicada a las Ciencias Sociales". Ed. Pearson Prentice Hall, Madrid, 2004.

7.3 REFERENCIAS WEB:

1. Instituto Nac. de Estadística e Informática (INEI): http://www.inei.gob.pe
2. Banco Central de Reserva del Perú (BCRP): http://www.bcrp.gob.pe
3. BAZÁN, Juan. "Texto de estadística computacional con R, Excel, Minitab y SPSS" (PDF), 2010. http://www.unac.edu.pe/documentos/organizacion/vri/cdcitra/Informes_Finales_Investigacion/Enero_2011/BAZAN_BACA_FCE/Estad%EDstica%20computacional.pdf

Callao, 15 de agosto de 2012

"Ser cultos para ser libres" **José Julián Martí Pérez**

Referencias

Adriazola, Y., Cárdenas, A., Condado, J., Depaz, P., Gómez, D., Martínez, B., y Solano, O. (2006). *Estadística descriptiva con soporte del spss y matlab.* Fondo editorial Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima.

Anderson, D., Sweeney, D., y Williams, T. (2009). *Estadística para administración y economía.* Editorial Cengage Learning, México.

Batanero, C. (2000a). Hacia dónde va la educación estadística. *Blaix*, *15(2)*, 13.

Batanero, C. (2000b). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO*, *25*, 41-58.

Batanero, C. (2001a). "Presente y futuro de la educación estadística". *Journades europees d'estadística. L'enseyament i la difusió de l'estadistica.* Editor : Conselleria d'Economia, Comerç i Indústria. Govern de les Illes balears. Impresor : Son Espanyolet, pp 431–442.

Batanero, C., y Godino, J. (2005). Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. En R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigación en didáctica de las matemáticas.* (p. 203-226). Bajadoz: Universidad de Extremadura.

Bazán, J. L. (2006). La estadística llega a la escuela en el perú. En M. Gonzales, J. Bazán, y R. Sánchez (Eds.), *Coloquios sobre matemática educativa 2005, parte 2* (p. 87-109). Reporte de Investigación 18. Serie C. Sección Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Bencomo, E., Godino, J., Font, V., y Wilhelmi, M. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27(2)*, 221-252.

Bonato, M. (2010). Robust estimation of skewness and kurtosis in distributions with infinite higher moments. *Finance Research Letters*, *8(2)*, 79-82.

Borrell, M. (1997). *Aplicación a la estadística financiera, formación y gestión de carteras de renta variable.* Madrid: Ramón Areces.

Canavos, G. (1988). *Probabilidad y estadística. aplicaciones y métodos.* McGraw-Hill/Interamericana de México, S.A. de C.V.

Chué, J., Barreno, E., Castillo, C., Millones, R., y Vásquez, F. (2009). *Estadística descriptiva y probabilidades.* Fondo editorial Universidad de Lima, Lima.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria. tesis de doctorado.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada,España.

Contreras, A., Godino, J., y Font, V. (2006). Análisis y procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Matématiques*, *26(1)*, 39-88.

Córdova, M. (2008). *Estadística descriptiva e inferencial.* Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima.

Godino, J. (2009). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Colección digital Eudoxus, Nº 11*.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZMD The International Journal in Mathematics Education*, *39(1-2)*, 127-135.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *10(2)*, 7-37.

Godino, J., Bencomo, E., Font, V., y Wilhelmi, M. (1998). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27(2)*, 221-252.

Godino, J., Contreras, A., y Font, V. (2006). Análisis y procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *26(1)*, 39-88.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education, vol 2:* (p. 417-424).

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *22 (2/3):*, 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. un enfoque 0ntológico-semiótico de la cognición e intrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area for research in mathematics education. En A. Sierpinska y J.Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177–195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, *38*, 25–48.

Gonzáles, M., y Pérez de Vargas, A. (2009). *Estadística aplicada: Una visión instrumental.* Ediciones Díaz de Santos, España.

James, B. (2004). *Probabilidad: Un curso de nivel intermedio.* IMCA, Lima-Perú.

Larson, H. (1981). *Introducción a la teoría de probabilidades e inferencia.* Editorial Limusa, México.

Manzano, V., y Durán, A. (2001). Comprensión y medida del concepto de simetría. *Anales de psicología*, *17(2)*, 287-297.

Martín, F. (1988). *Introducción a la estadística económica y empresarial.* Madrid: AC.

Montiel, A., Rius, F., y Barón, F. (1997). *Estadística económica y empresarial.* Editorial Prentice Hall, Madrid - España.

Moya, R., y Saravia, G. (2007). *Probabilidades e inferencia estadística.* Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima.

Obagi, J. (2003). *Elementos de teoría de probabilidad para ingenieros.* Centro editorial Javeriano, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, DC.

Olivo, E. (2008). *Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en méxico.* Tesis de doctorado. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Ortíz de Haro, J. (1999). *Significado de conceptos probabilísticos en los textos de bachillerato.* Tesis de doctorado. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Quispe, R. (2003). *Medición de la economía con los números índices.* Concytec, Lima.

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the learning of Mathematics*, *1*(1), 16–20.

Rial, A., y Varela, J. (2008). *Estadística práctica para la investigación en ciencias de la salud.* Gesbiblo, SL. La Coruña, España.

Sánchez Cobo, F. (1996). *Análisis de la exposición teórica y de los ejercicios de correlación y regresión en los textos de bachillerato.* Memoria de Tercer Ciclo, Universidad de Granada.