 DOI: 10.24844/EM2903.07

Propuesta para el tratamiento de interpretación global de la función cuadrática mediante el uso del *software* GeoGebra

Proposal for Treating Global Interpretation of the Quadratic Function Using the Software GeoGebra

Ana Luisa Gómez-Blancarte[1]
Rebeca Guirette[2]
Felipe Morales-Colorado[3]

Resumen. *Basados en la vía de interpretación global que Duval (1988) sugiere para el tratamiento de las representaciones gráficas, en este artículo se presenta una propuesta de interpretación global para la función cuadrática* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, mediante el uso del software GeoGebra. A fin de ilustrar la pertinencia de la propuesta en la enseñanza, se presenta un estudio de caso con un grupo de estudiantes de Educación Media Superior del sistema de Telebachillerato. Los resultados muestran la potencialidad del software para realizar un análisis de congruencia entre los registros de representación gráfica y algebraica de la función y reconocer cualitativamente la asociación de las variables visuales del registro gráfico y las unidades simbólicas significativas del registro algebraico.*

Palabras clave: *Función cuadrática, interpretación global, coordinación entre registros, variables visuales y unidades simbólicas significativas.*

Fecha de recepción: 27 de agosto de 2016. **Fecha de aceptación:** 2 de febrero de 2017

[1] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, unidad Legaria (CICATA-Legaria), Instituto Politécnico Nacional, México, algomezb@ipn.mx

[2] Facultad de Matemática, Universidad Veracruzana, México, guirette.saldana@gmail.com

[3] Telebachillerato Río Uxpanapa, México, pipej7@hotmail.com

Abstract. Based on Duval's (1988) interpretation about the treatment of graphical representations, this paper presents a proposal to the global interpretation of the quadratic function $f(x) = ax^2 + bx + c$ by using the Software GeoGebra. In order to illustrate the relevance of the proposal in the teaching, a case study of a group of high school students is presented. The results show the potential of the software for a congruence analysis among graphic and algebraic registers of representation and its effects on qualitative recognition of the association of visual variables and significant symbolic units.

Keywords: *Quadratic function, global interpretation, coordination among registers, visual variables and significant symbolic units*

1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo con Duval (2006), la enseñanza, aprendizaje y comunicación de las matemáticas se realiza inevitablemente en sistemas de representación. El dominio de las representaciones y sobre todo, el manejo de distintas representaciones de un mismo objeto matemático son de gran importancia en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. Así pues, Duval (1998) nos advierte de que las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas pueden deberse a que no se promueve la actividad cognitiva de *conversión*[4] en la enseñanza de las matemáticas, ya que se enfatiza más el *tratamiento*[5] de representaciones.

La coordinación entre dos o más registros de un mismo objeto matemático (como el de función) se alcanza mediante la tarea de conversión de representaciones entre los registros. Sin embargo, la conversión es la actividad cognitiva más compleja, pues no hay reglas específicas que permitan dicha actividad (Duval, 2006). La complejidad de cambiar de un sistema semiótico a otro se presenta tanto en la conversión del lenguaje natural a una expresión dentro del lenguaje algebraico, como en la conversión del registro algebraico al gráfico y viceversa.

[4] Para Duval (2006), la conversión es un cambio en el registro de representación manteniendo la totalidad o parte del contenido de la representación inicial.

[5] El tratamiento es la transformación de una representación dentro del registro donde fue creada.

Algunos autores señalan las dificultades que presentan los estudiantes para articular registros de funciones. Por ejemplo, Guzmán (1998) reporta que estudiantes de ingeniería no coordinan explícitamente dos o más registros de representación del concepto de función, ya que presentan dificultades al convertir un enunciado en lenguaje natural en otro registro de representación, tales como el gráfico o algebraico, así como del registro gráfico al algebraico. En el caso de la función lineal y cuadrática, Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2013) identifican dificultades por parte de los estudiantes para articular los registros algebraico y gráfico de esas funciones. Por ejemplo, los autores señalan que los estudiantes no lograron reconocer que la ausencia o presencia del coeficiente del término lineal de una función cuadrática ($b = 0$, $b \neq 0$) determina si el eje de la parábola coincide o no con el eje y.

Estas dificultades estriban en una falta de discriminación y de asociación entre las variables visuales del registro gráfico y unidades simbólicas significativas del registro algebraico. La discriminación de esas variables y unidades simbólicas, de acuerdo con Duval (2006), se debe realizar mediante un reconocimiento cualitativo (sin cálculos numéricos) de las variables visuales de la representación gráfica, a través de la oposición de dos o más representaciones, poniéndolas en correspondencia con una característica semántica de la representación algebraica. Sin embargo, los estudiantes articulan registros mediante procedimientos más de cálculo numérico que cualitativos. Valero (2015) reporta que estudiantes de Educación Media Superior y de Superior recurrieron más a cálculos numéricos tales como la factorización, el uso de la fórmula general y otros que permitían determinar los ceros de la función y las coordenadas del vértice de la parábola para articular los registros gráfico y algebraico de la función cuadrática. El autor pone en evidencia una falta de coordinación de las variables visuales y unidades simbólicas significativas de la función cuadrática para la articulación de los registros, en particular, cuando se parte del registro de representación gráfico. Además, el uso de tales procedimientos numéricos fue más evidente en estudiantes de nivel Superior. Lo anterior parece suponer que entre más avanzado es el nivel académico del estudiante más se recurre a esos procedimientos por el dominio que tiene sobre ellos.

De acuerdo con Duval (1988), la comprensión integradora de un concepto matemático descansa en la coordinación de al menos dos de sus registros de representación y esta se manifiesta en la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión. Desarrollar dicha actividad es una tarea que necesita más atención en el contexto escolar, pues el autor nos aclara que “no puede haber utilización correcta de las representaciones gráficas cartesianas sin discriminación explícita de las variables visuales pertinentes y sin una correspondencia sistemáticamente establecida entre los valores de esas variables y las unidades significativas de la escritura algebraica" (Duval, 1992, p. 131).

En particular, para Duval (1988) son tres los tratamientos de las representaciones gráficas y cada uno de ellos toma en cuenta distintos datos visuales de la gráfica. Estos tratamientos son: *vía el punteo*, *vía de extensión del trazo efectuado* y *vía de interpretación global de las propiedades de las figuras*. La primera, es la más recurrente para introducir y definir las representaciones gráficas de las funciones, así como para la lectura de ciertos puntos de interés. La segunda, se refiere a las actividades de interpolación y extrapolación, ateniéndose a los datos del trazo hecho y no a las variables visuales oportunas de la representación gráfica. Estas dos vías quedan limitadas a los valores y puntos particulares seleccionados para ello, sin llegar a considerar las variables visuales oportunas de la representación gráfica y la forma de la escritura algebraica. La vía de interpretación global, es la más importante, ya que es en ésta que se puede apreciar que toda modificación de una representación gráfica que implique una modificación en la escritura de la expresión algebraica correspondiente define una variable visual pertinente para la interpretación gráfica y para ello hay que identificar las modificaciones conjuntas de la gráfica y de la forma de su escritura algebraica.

El desarrollo de la vía de interpretación global de polinomios de grado 2 y 3 fue estudiado por Benítez (2004). En el caso del polinomio de grado 2 (función cuadrática $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$), mediante un análisis del contenido de las representaciones gráfica, numérica y algebraica, Benítez identifica 5 variables visuales de la representación gráfica que se corresponden con valores categóricos de la expresión algebraica. Sin embargo, algunas de las variables visuales que propone Benítez requieren de un reconocimiento cuantitativo de los valores categóricos de la expresión algebraica. Para Duval (1988) la interpretación global "depende [...] del reconocimiento cualitativo de las unidades de escritura simbólica que corresponden" (p. 138). En otras palabras, "están excluidos toda consideración de los números y todo recurso a cálculos" (Duval, 1999, p. 75).

El presente artículo pretende contribuir a la enseñanza de la vía de interpretación global; para ello, propone tres variables visuales del registro gráfico de la función cuadrática que se corresponden semióticamente con las unidades simbólicas del registro algebraico. La propuesta se presenta mediante un análisis de congruencia entre los dos registros de representación usando el *software*

GeoGebra. Así pues, el objetivo de este artículo es doble: 1) definir las unidades simbólicas significativas del registro algebraico de la función cuadrática que determinan una variable visual pertinente en el registro gráfico y 2) ejemplificar con el *software* GeoGebra cómo se pueden discriminar estas variables y unidades simbólicas de manera cualitativa. A fin de ilustrar la pertinencia de la propuesta en el contexto escolar, se presenta un estudio de caso con un grupo de estudiantes de Educación Media Superior del sistema de Telebachillerato quienes respondieron un cuestionario con tareas de reconocimiento.

2. TRATAMIENTO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN LA ENSEÑANZA MEDIA SUPERIOR EN EL TELEBACHILLERATO

En esta sección se expone un análisis acerca del estudio de la función cuadrática en los libros de texto de Telebachillerato. El objetivo es identificar el modo en que se favorece la *vía de interpretación global* para el caso de la parábola vertical. Se analizaron tres libros de texto desarrollados por la Secretaria de Educación de Veracruz (SEV) para el sistema educativo Telebachillerato del estado de Veracruz (TEBAEV): Matemáticas I, Matemáticas III y Matemáticas IV. Cada libro se estudia en un semestre, de manera que en los semestres I, III y IV se estudian temas relacionados con la función cuadrática. En seguida se presenta un análisis detallado de los libros de matemáticas I y IV, ya que es en estos textos donde se aborda el estudio de la parábola definida como función cuadrática.

2.1 Matemáticas I

Los objetivos relacionados con el comportamiento de la gráfica de una parábola se presentan en el *Bloque X*. En éste los estudiantes, entre otros objetivos, deben identificar que toda función cuadrática es una parábola, que puede ser cóncava hacia arriba o hacia abajo. Así como visualizar que al cambiar los parámetros de *a, b* y *c* (números reales y $a \neq 0$) en la función cuadrática cambia el ancho, el vértice y el sentido de la parábola (Secretaría de Educación de Veracruz, 2016a, p. 39).

Una vez expuesto en el libro, mediante el tratamiento de la vía del punteo, que la función cuadrática es una parábola, se presenta el tratamiento de la escritura de la función cuadrática. Se pide a los estudiantes transformar la escritura de la función de su forma general, $y = ax^2 + bx + c$, a la forma estándar, $y = a(x-h)^2 + k$. El uso de la escritura estándar de la función busca que los estudiantes visualicen las variables visuales que determinan los parámetros *a*, *h* y *k* en la gráfica. Estos parámetros están asociados con el vértice (*h*, *k*) y con la abertura de la parábola, *a*. El estudio de los parámetros *h*, *k* enfatiza la lectura de un punto particular (la coordenada del vértice) de la gráfica porque, de acuerdo con Duval (1988), "es un punto interesante". En este caso, se trata del máximo o mínimo, como se observa en los ejercicios propuestos al final del bloque X.

Casi al término del bloque, el libro aborda el análisis del comportamiento de la gráfica de la función cuadrática en su forma general ($y = ax^2 + bx + c$). El análisis inicia con el estudio del comportamiento del parámetro *a* (Figura 1). Los estudiantes deben analizar las gráficas que se muestran en la figura y responder preguntas como: "¿Qué pasa cuando el signo del término "a" [*sic*] cambia?[6] ¿Qué crees que suceda cuando el coeficiente *a* cambie de magnitud y no sólo de signo?" (Sánchez, Hernández, Hernández y Velázquez, 2014, p. 314). En el texto, no hay una propuesta que guie al estudiante a la exploración de la relación entre el parámetro y las modificaciones de la parábola para responder a esas preguntas, tampoco se presenta una conclusión al respecto.

Parámetro a

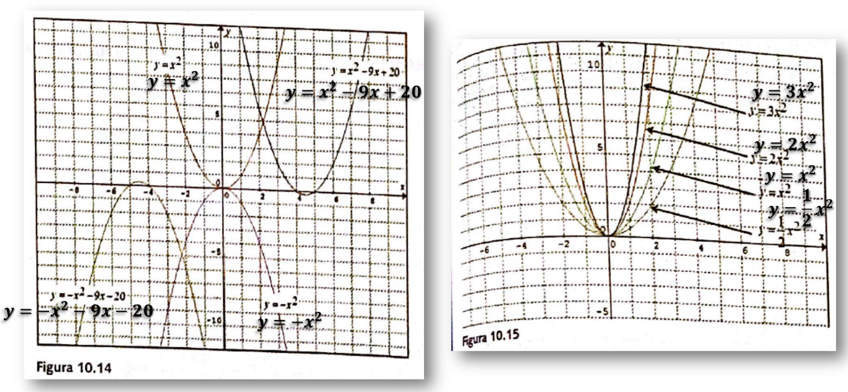
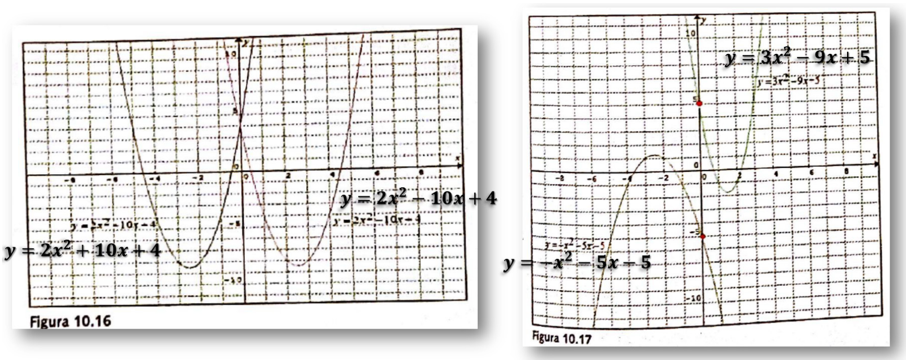


Figura 1. Imágenes del libro Matemáticas I (Sánchez et al., 2014, p. 314).

[6] Matemáticamente no es el término, sino el coeficiente o parámetro.

La curva es cóncava hacia arriba cuando $a > 0$, cóncava hacia abajo cuando $a < 0$; se dilata cuando el valor absoluto del coeficiente cuadrático está entre cero y uno, y se contrae cuando el valor absoluto del mismo es mayor que uno.

Para los parámetros *b* y *c*, el texto muestra algunas gráficas (Figura 2) para que el estudiante pueda realizar una apreciación similar a la del parámetro *a*. En este caso, no hay ninguna pregunta que guie al estudiante a dicha apreciación, ni una estrategia para la la exploración.



Parámetro *b* **Parámetro *c***

Figura 2. Imágenes del libro Matemáticas I (Sánchez et al., 2014, p. 315).

Los estudiantes debieran extraer conclusiones acerca del comportamiento que cada parámetro provoca en la gráfica, observando que la diferencia entre una escritura y otra es el signo del parámetro *b* y *c*, respectivamente. El parámetro *b*, se corresponde con una "traslación" horizontal de la gráfica (derecha o izquierda del eje *y*); el parámetro *c*, con una "traslación" vertical. En el caso del parámetro *c*, se variaron los valores y signos de los parametros *a* y *b*. Lo cual, contradice la propuesta de Duval (1988) sobre hacer variar sólo uno a la vez a fin de apreciar la correspondencia semiótica entre la unidad simbólica de la escritura y la variable visual de la gráfica.

Es importante resaltar que en el ejemplo (ver figura 2, parámetro *b*) la traslación horizontal es a la derecha cuando el valor simbólico del parámetro *b* es negativo ($b < 0$) y a la izquierda cuando es positivo ($b > 0$). ¿Qué pasa cuando $a < 0$? Retomemos el mismo ejemplo del parámetro *b* en la figura anterior, pero ahora con $a < 0$.

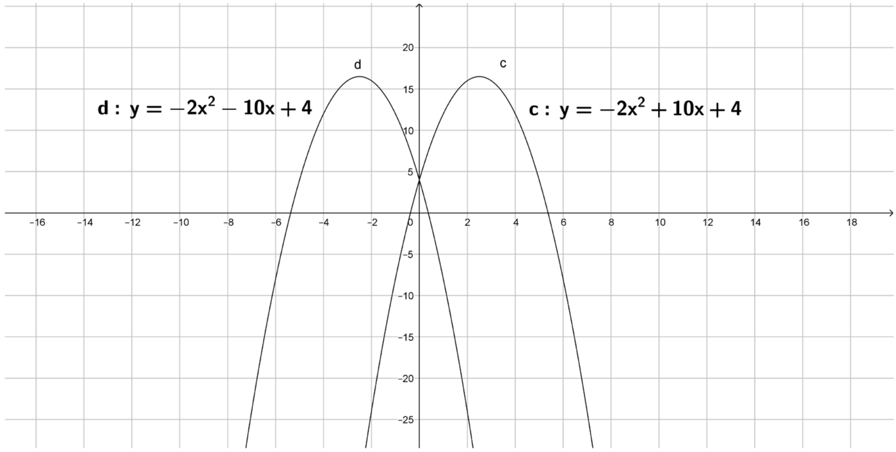


Figura 3. Variación del parámetro b cuando a < 0.

En la figura 3, se puede observar que cuando $a < 0$ la traslación de la gráfica se comporta de distinta forma. La posición del vértice de la gráfica de la expresión $y = -2x^2 + 10x + 4$ ahora está en el lado derecho del eje *y*, y la posición del vértice de la gráfica de la expresión $y = -2x^2 - 10x + 4$ está en el lado izquierdo del eje *y*; ubicación contraria a la que se observa en la figura 2, parámetro *b*. En la sección 3 retomaremos este hecho, pues es una de las contribuciones de este trabajo.

2.2 Matemáticas IV

En este curso, el último de matemáticas del tronco común del Telebachillerato, los estudiantes abordan el concepto de lo que es función, en particular la función cuadrática se aborda en el bloque III. Los estudiantes, al término de este bloque, debieran ser capaces de, entre otros objetivos, identificar "la forma polinomial de las funciones de grados cero, uno y dos, así como sus gráficas" (Secretaría de Educación de Veracruz, 2016b, p. 20).

Para favorecer el reconocimiento de los tipos de gráficas y regularidades particulares de las funciones polinómicas, específicamente lo referente a la función cuadrática, el texto presenta un análisis de cómo cada uno de los parámetros *a*, *b* y c de la escritura algebraica de la función, cuya expresión analítica es $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ o bien $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, representan una característica visual en la gráfica. El análisis inicia con la variación del coeficiente del término cuadrático a, luego presenta la variación del coeficiente del término lineal b y, finalmente, la del término independiente c, como se muestra a continuación.

Variación del coeficiente del término cuadrático a o a_2.

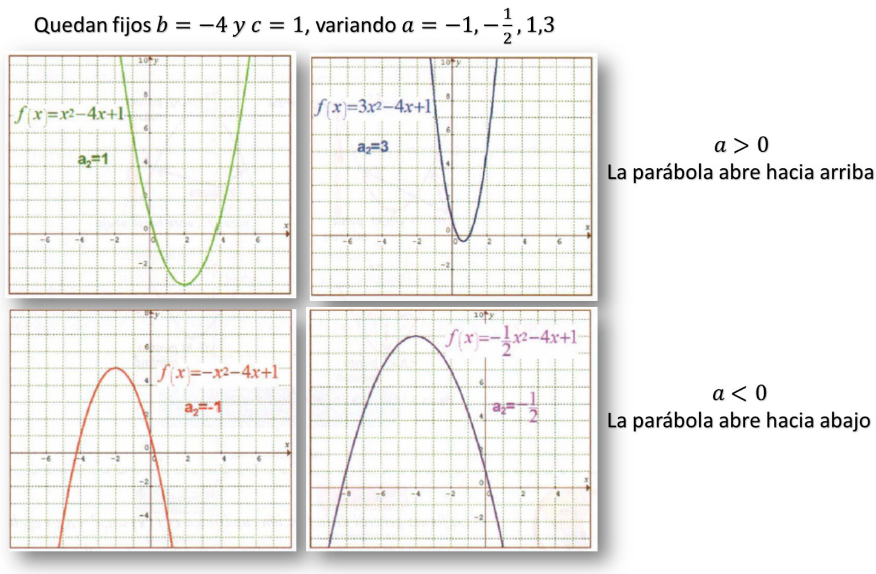


figura. Imágenes del libro Matemáticas IV (Ávila, García, Hernández, y García, 2014, p. 120).

Se observa en la figura 4 que se establece la relación cualitativa entre el signo del coeficiente del término cuadrático con la abertura de la curva ($a > 0$ o $a < 0$) y el ancho de la abertura de la misma. En el texto se concluye que la curva se dilata cuando el valor absoluto del coeficiente cuadrático está entre cero y uno; se contrae cuando el valor absoluto del mismo es mayor que uno.

Variación del coeficiente del término lineal b o a_1.

Se establece una relación cualitativa entre la variación del parámetro b y la posición de la gráfica (Figura 5) respecto de ambos ejes. Primero se señala el desplazamiento vertical respecto del eje *y* cuando cambia el signo del parámetro. Posteriormente, el desplazamiento horizontal, cuando cambia tanto el signo como el valor del parámetro. En este texto, al igual que en el de Matemáticas I, tampoco se expone el análisis de correspondencia semiótica entre el parámetro *b* de la escritura y la variable visual de la gráfica cuando el coeficiente del término cuadrático es negativo, es decir, cuando la curva abre hacia abajo.

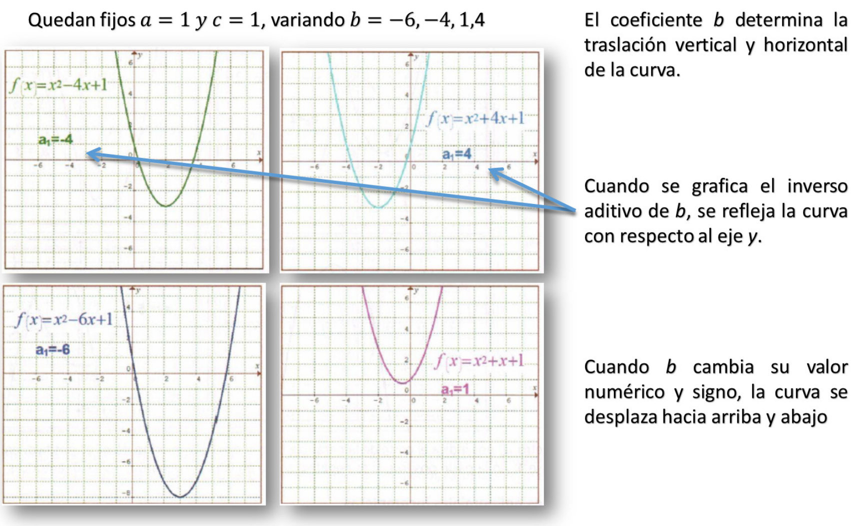


Figura 5. Imágenes del libro Matemáticas IV (Ávila et al., 2014, p. 121).

Variación del coeficiente del término independiente c o a_0.

Finalmente, se establece la relación cualitativa entre el corte de la curva con el eje *y*, y el coeficiente del término lineal (Figura 6). Se concluye que el coeficiente *c* determina el corte de la parábola con el eje *y*: la curva cortará en la parte negativa del eje *y*, cuando $c < 0$ y en la parte positiva del eje y cuando $c > 0$.

En este mismo bloque, también se presenta un análisis similar al de la forma general, pero para la forma estándar de la función cuadrática: $f(x) = a(x-h)^2$ y $f(x) = a(x-h)^2 + k$. En el texto se considera que con la forma estándar es "más fácil graficar una función de grado dos" (Ávila *et al.*, 2014, p. 126). Así, el análisis se concentra más en la lectura de puntos de interés como la coordenada del vértice, lo que favorece más el tratamiento *vía el punteo*.

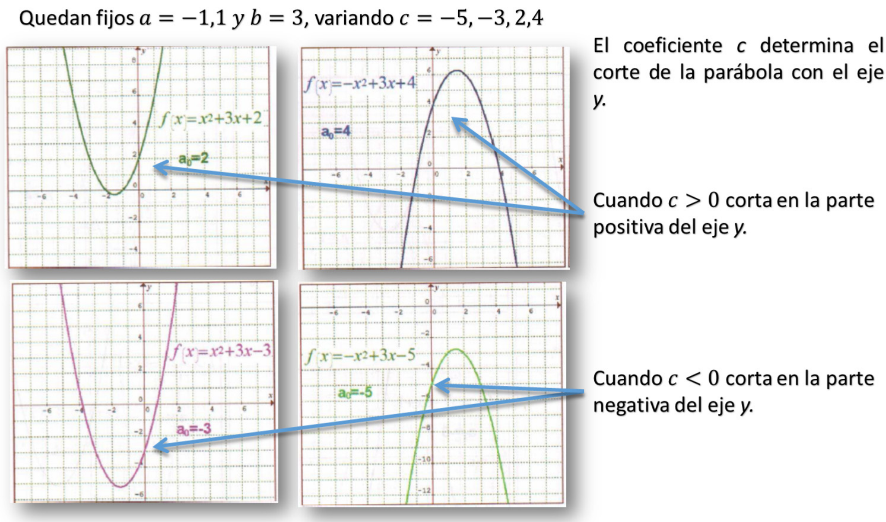


Figura 6. Imágenes del libro Matemáticas IV (Ávila et al., 2014 122).

En ambo textos analizados se tiene en cuenta el tratamiento de la gráfica de la función cuadrática a través de la vía de interpretación global. Sin embargo, el tratamiento parece enfatizar la búsqueda de valores particulares. Además, el análisis de la asociación entre el parámetro b y el desplazamiento de la gráfica no contempla el caso para cuando $a < 0$. En la siguiente sección proponemos tres variables visuales que favorecen la conversión entre los registros gráfico y algebraico de la función cuadrática, así como una manera de discriminar esas variables haciendo uso de un *software* dinámico.

3. PROPUESTA DE UNA VÍA DE INTERPRETACIÓN GLOBAL PARA EL TRATAMIENTO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

La presente propuesta se deriva de un análisis de correspondencia semiótica entre los parámetros a, b y c de la escritura de la función cuadrática en su forma general, $f(x) = ax^2 + bx + c$, y la representación gráfica (parábola). La propuesta está fundamentada en la *vía de interpretación global* que sugiere Duval (1988), como uno de los principales tipos de tratamientos de las representaciones gráficas. De acuerdo con él, las unidades significativas de una expresión algebraica son: 1) los signos relacionales (<, >, =, ...), 2) los símbolos de operación o de signo (+, –), 3) los símbolos de la variable, y 4) los símbolos de exponente, de coeficiente y de constante. En el caso de la representación gráfica, las variables generales son: 1) la implementación de la tarea (un trazo: =, o una zona: >, <) y 2) la forma de la tarea (recta o curva).

Para la función lineal $y = ax + b$, el autor propone tres variables visuales a tomar en cuenta para la conversión de los registros gráfico y algebraico: 1) *sentido de inclinación*, 2) ángulos con los ejes y 3) *posición del trazo respecto al origen del eje vertical*. Para cada uno de esos valores corresponde una unidad simbólica significativa en la expresión algebraica. En este caso, importan el coeficiente a y la constante b. Por ejemplo, el sentido de inclinación puede ser ascendente ($a > 0$) o descendente ($a < 0$); el ángulo formado con el eje horizontal puede ser simétrico ($a = 1$), menor ($a < 1$) o mayor ($a > 1$) que el formado con el eje vertical, y la posición del trazo respecto al origen del eje vertical puede cortar arriba ($b > 0$), abajo ($b < 0$) o en el origen ($b = 0$). Un análisis similar para la función $y = ax^2 + bx + c$ permitió determinar tres variables visuales de la parábola y unidades simbólicas significativas que se corresponden semióticamente con los parámetros a, b y c, definidos respecto a su signo y no a su valor absoluto. Las variables visuales están basadas en que la figura que se desprende es un trazo (=) y el trazo realizado es una curva abierta.

Las tres variables que se proponen son: 1) la abertura de la parábola, 2) la posición del vértice respecto del eje y, y 3) la intersección de la curva con el eje y. Las variables visuales abertura e intersección de la curva con el eje son las mismas que contemplan los libros de texto analizados (sección 2). Nuestra aportación se encuentra en la variable visual posición del vértice respecto del eje y. Para identificar la correspondencia semiótica entre las variables visuales del registro gráfico y unidades simbólicas significativas del registro algebraico, Duval (1992) sugiere "hacer variar una unidad significativa de la escritura manteniendo constantes todas las otras y ver qué es lo que sucede con el otro registro (o hacer variar cada variable visual manteniendo constantes las otras dos y ver las modificaciones de la escritura)" (p. 130). Además, de acuerdo con el autor, es necesario explorar todas las variaciones posibles. Duval (2006) reconoce que un *software* "puede dar una percepción dinámica de la transformación de representación frente al soporte estático del papel" (p. 159). En efecto, un *software* dinámico como GeoGebra es una herramienta prometedora para identificar la correspondencia semiótica entre los registros gráfico y algebraico de la función. Es reconocido que el uso de programas computacionales dinámicos favorecen la generación instantánea de múltiples representaciones de un objeto matemático, como lo es la función cuadrática, así como la interacción simultánea entre esas representaciones (e. g., Oaxaca y Valderrama, 2000; Sandoval, 2011; Huapaya 2012). Además, los sistemas multi-representacionales permiten un entendimiento más profundo sobre las relaciones entre tales representaciones (Ainsworth, 2006). A continuación, se muestran imágenes que ilustran las tres variables visuales de la parábola y sus respectivas unidades simbólicas de la representación algebraica mediante el *software* GeoGebra.

Se diseñó una tarea partiendo de la representación algebraica $y = ax^2 + bx + c$ como registro inicial; como registro final, la representación gráfica. Las tareas fueron creadas con la herramienta de barras deslizadoras que representan valores reales en un rango deseado (ver figura 7). Al escribir en la barra de entrada la expresión $ax^2 + bx + c$, el programa puede crear las barras deslizadoras de manera automática para cada una de los parámetros *a*, *b* y *c*. Por defecto, el valor que le asigna a esos parámetros es igual a 1.

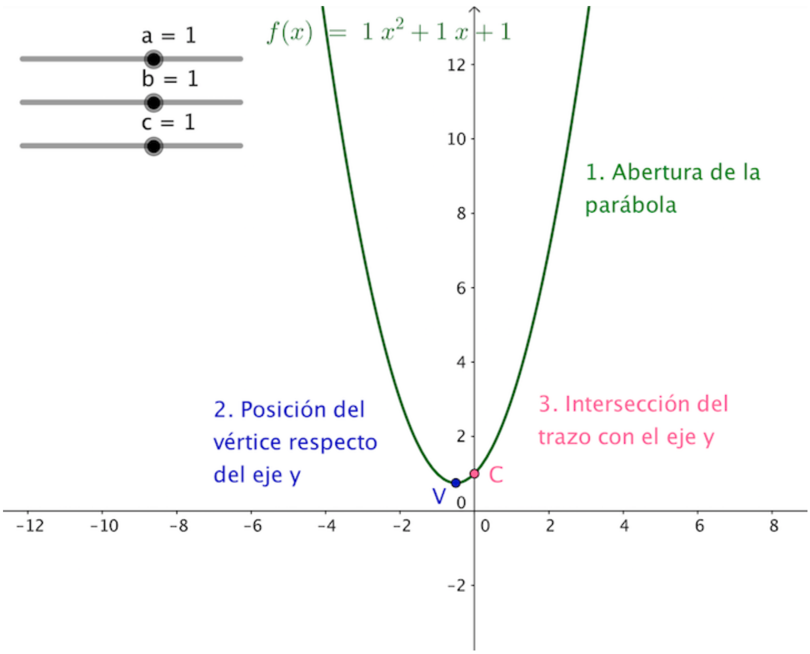


Figura 7. Creación de la tarea con las barras deslizadoras.

3.1 Concavidad de la parábola (arriba o abajo)

La representación gráfica es una curva abierta que, al tratarse de una parábola vertical, la concavidad puede ser hacia arriba o hacia abajo. Esta variable visual se establece a partir de la unidad simbólica que corresponde al signo del coeficiente del término cuadrático (a), el cual puede tomar valores negativos ($a < 0$) y positivos ($a > 0$) en $\mathbb{R}$.

Para determinar lo que podría cambiar en el registro gráfico cuando se modifica el coeficiente a, se anima la barra deslizadora correspondiente a dicho coeficiente y se puede seleccionar la opción de "rastro" (ver figura 8) para apreciar el movimiento de la representación gráfica. Lo que se distingue es una familia de parábolas que tienen en común el valor de b y c, los cuales permanecen fijos; la concavidad cambia cuando el valor de a pasa de positivo a negativo y viceversa. La concavidad de la curva es hacia arriba cuando $a > 0$ y cuando $a < 0$ la concavidad es hacia abajo.

3.2 Posición del vértice respecto al eje *y* (derecha, sobre e izquierda)

Se consideró la posición como una variable visual que centra la atención en una característica cualitativa y no en una numérica, como lo sería el valor de las coordenadas del vértice. En este caso, la posición del vértice respecto del eje y se coordina con el producto de los signos de los coeficientes del término cuadrático y lineal (a y b). A diferencia de los libros analizados y de la propuesta de Benítez (2004), quienes proponen sólo el parámetro b, en esta propuesta es el producto de signos de los parámetros a y b las unidades simbólicas de la expresión algebraica de la función cuadrática lo que es pertinente considerar.

Para apreciar el cambio en el registro gráfico al variar el signo del producto ab, se fijan los parámetros a y b. Primero se explora lo que sucede cuando se fija el coeficiente a en un valor positivo y se deja variar b (ver figura 9). Al animar la barra del coeficiente b y seleccionar la opción de "rastro" tanto para el punto del vértice como para la curva, se observa que cuando $b > 0$ el vértice se mueve siempre del lado izquierdo del eje (rastro azul del vértice). Cuando $b < 0$, el vértice se mueve del lado derecho. Cuando $b = 0$, el punto del vértice se encuentra sobre el eje y.

En la figura 10 se aprecia el caso cuando se fija el coeficiente a en un valor negativo. En este caso, cuando b toma un valor positivo ($b > 0$), la posición del

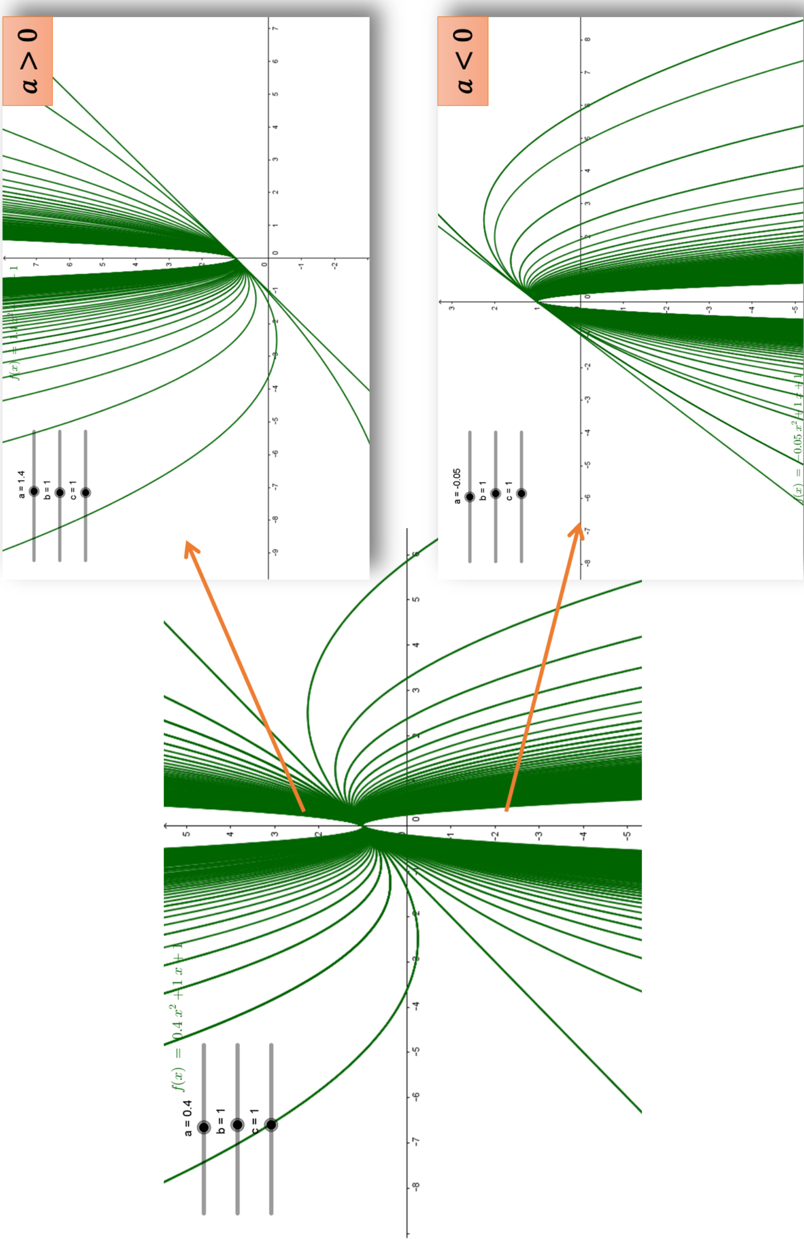


Figura 8. Concavidad de la parábola/parámetro *a*.

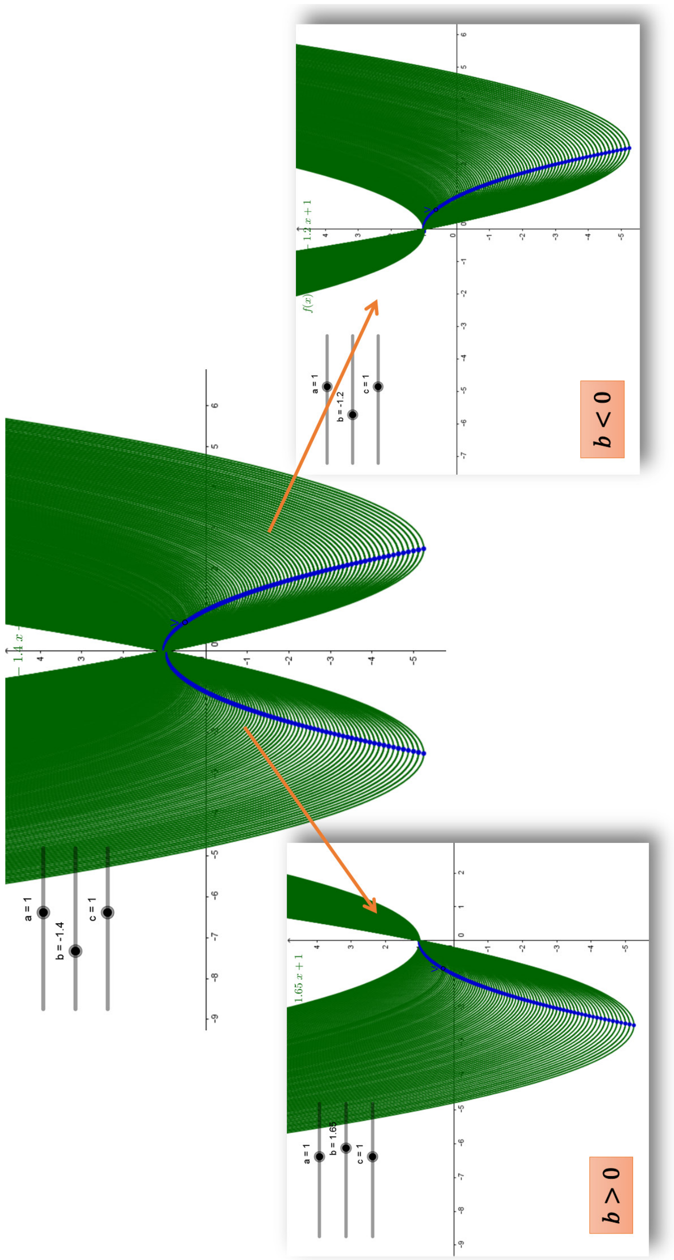


Figura 9. Posición del vértice respecto del eje *y* cuando a > 0/parámetro *b*.

vértice se ubica del lado derecho del eje *y*. Mientras que, cuando *b* toma valores negativos ($b < 0$), el vértice se mueve del lado izquierdo del eje *y*. Ambas figuras muestran que cuando $ab > 0$ el vértice se mueve del lado izquierdo; en tanto si este producto es negativo ($ab < 0$), el desplazamiento es hacia la derecha del eje *y*; en el caso de que el producto sea igual a cero ($ab = 0$), el vértice de la parábola está sobre el eje *y*.

3.3 Intersección de la curva con el eje *y*

Esta variable visual se relaciona con el corte de la curva, tomando como punto de referencia el origen del eje *y*. El corte de la curva con el eje *y* queda establecido por el signo de *c*. Si $c > 0$ la parábola corta al eje *y* en la parte positiva; en caso contrario, si $c < 0$ corta al eje *y* en la parte negativa y cuando $c = 0$ lo corta en el origen. En la aplicación de GeoGebra se varía la constante *c*, y se fijan los parámetros *a* y *b* (ver figura 11). Con la selección de la opción de "rastro" del punto C, punto donde la parábola interseca al eje *y*, así como de la parábola, se puede apreciar que cuando *c* toma valores positivos ($c > 0$), se tiene una familia de parábolas que intersectan el lado positivo del eje ; cuando toma valores negativos ($c < 0$), la intersección cambia del eje de los valores positivos al de los negativos. Estos mismos valores se mantienen cuando $a < 0$ (ver figura 12).

Mediante un análisis de congruencia realizado con el *software* GeoGebra se han presentado las modificaciones pertinentes de la escritura general de la función cuadrática. El análisis muestra la asociación "variable visual de la representación-unidad significativa de la escritura algebraica" sugerida por Duval (1988) como una vía de interpretación global. En la Tabla 1 se resumen las variables visuales y sus respectivas unidades simbólicas de los registros gráfico y algebraico de la función cuadrática derivados del análisis.

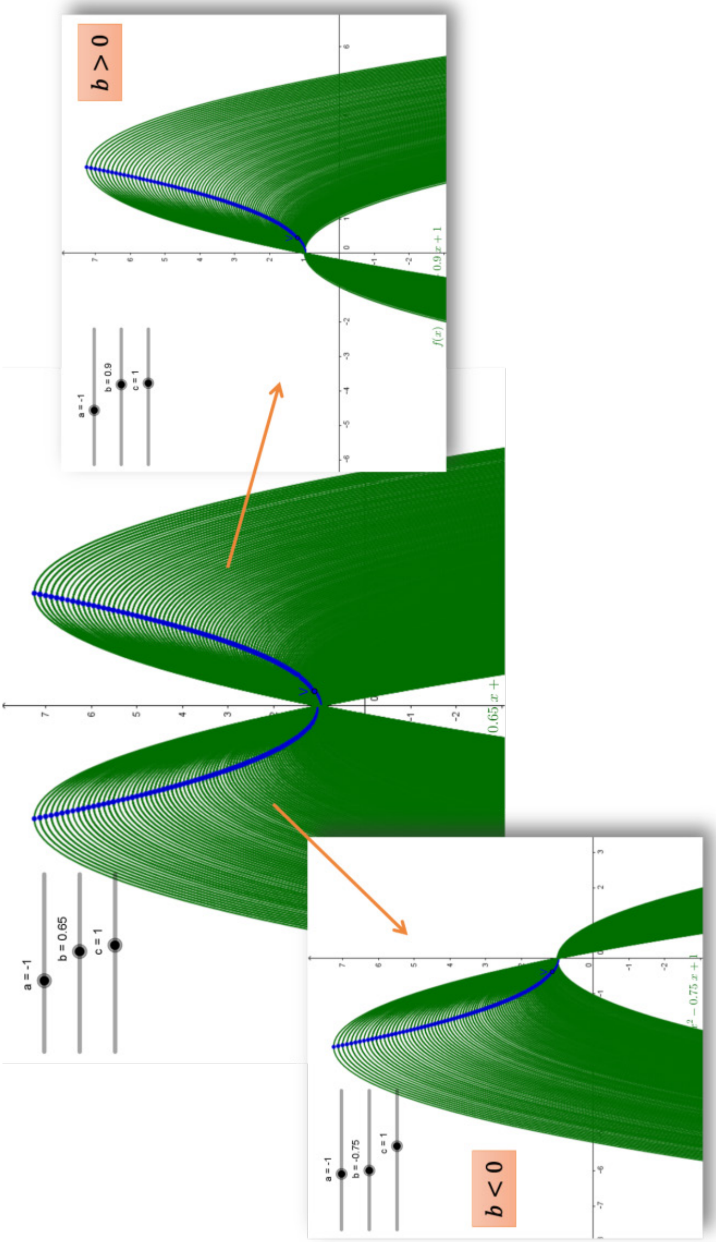


Figura 10. Posición del vértice respecto del eje y cuando $a < 0$ /parámetro b.

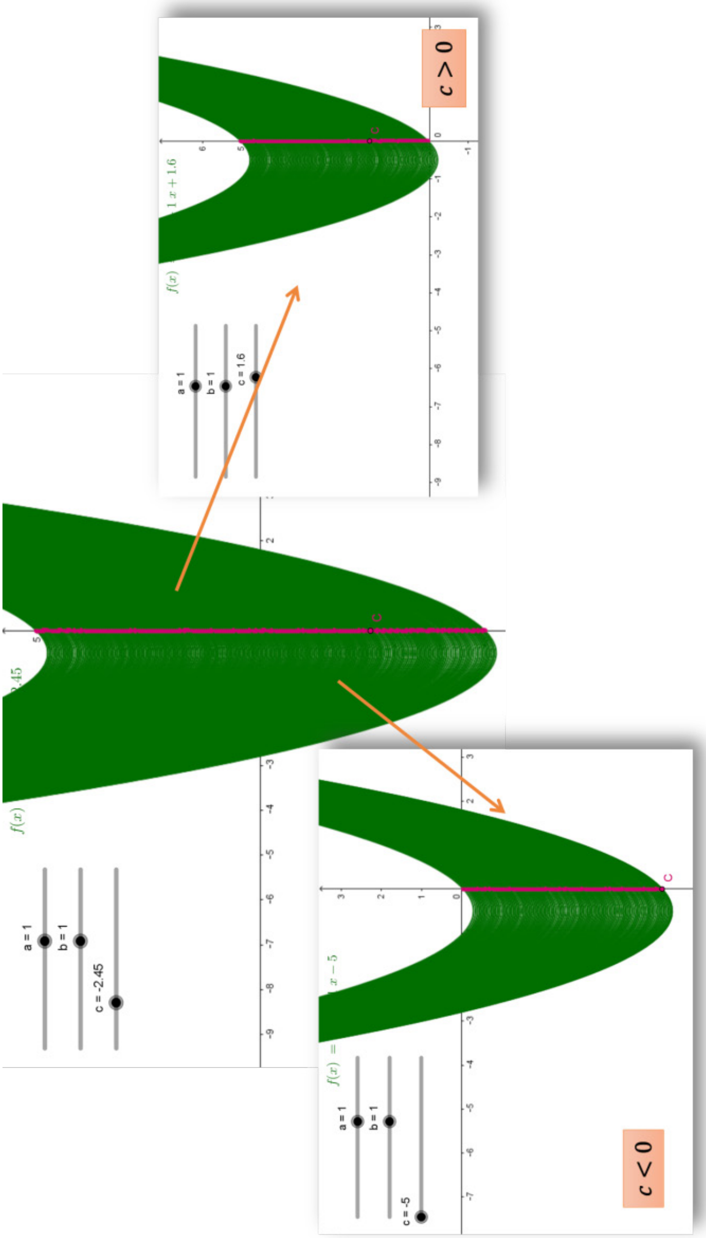


Figura 11. Intersección de la curva con el eje *y* para $a > 0$.

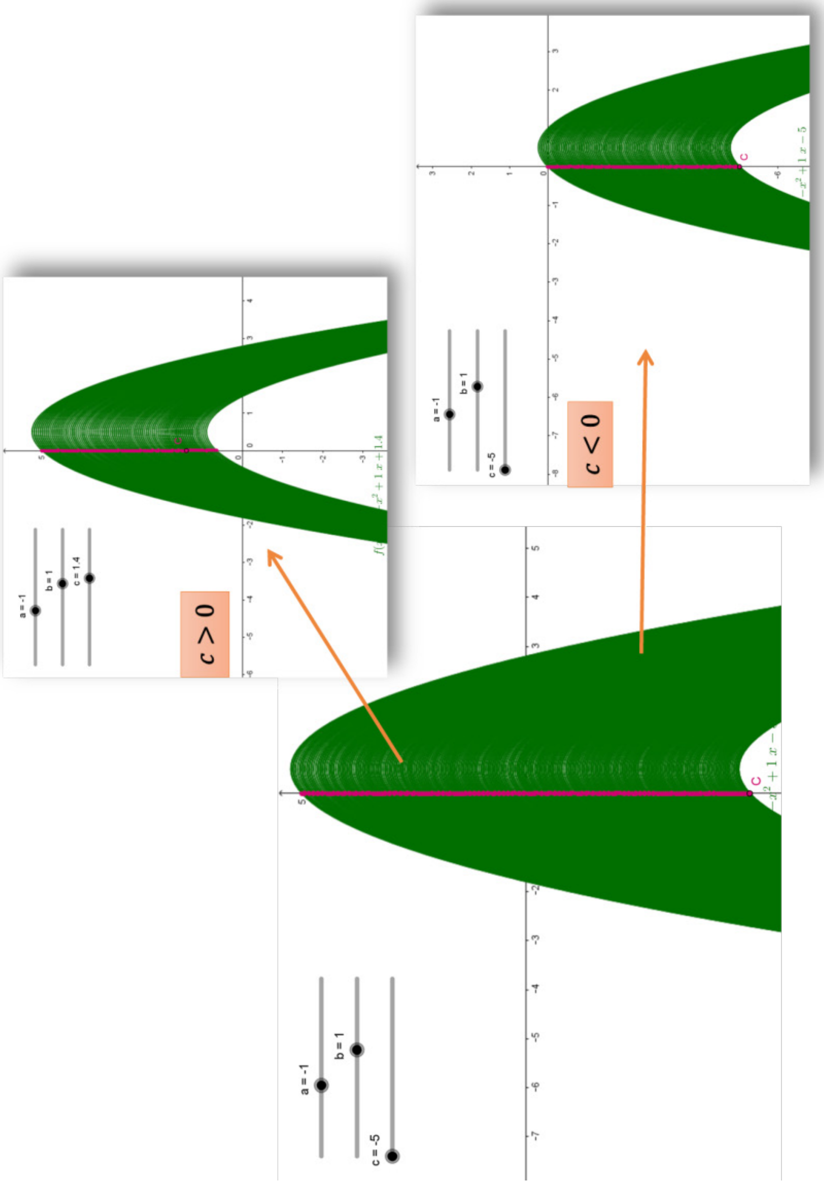


Figura 12. Intersección de la curva con el eje y para $a < 0$.

Tabla 1. Valores de las variables visuales y unidades simbólicas significativas para la función: $y = ax^2 + bx + c$.

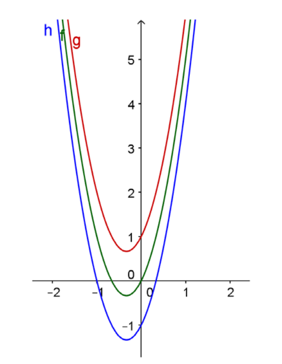
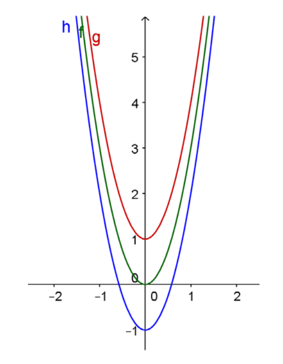
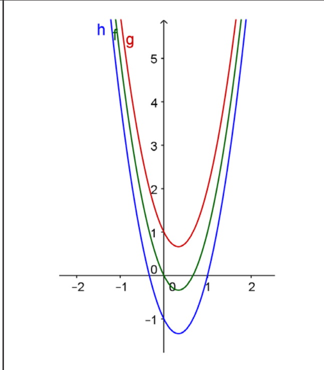
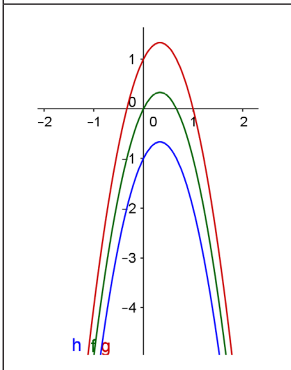
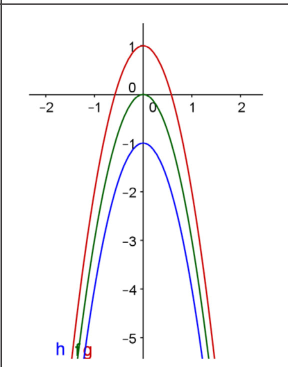
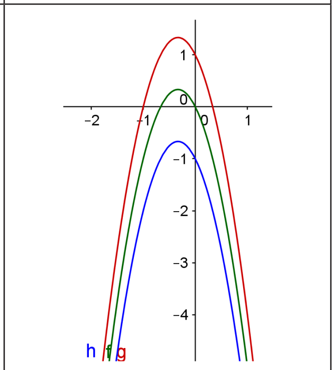
Variables visuales	Valores	Unidades simbólicas significativas
Concavidad de la curva	Cóncava hacia arriba	$a > 0$
	Cóncava hacia abajo	$a < 0$
Posición del vértice respecto al eje *y*	A la derecha del eje	$ab < 0$
	Sobre el eje	$b = 0$
	A la izquierda del eje	$ab > 0$
Intersección de la curva con el eje *y*	Por arriba o parte positiva del eje	$c > 0$
	En el origen	$c = 0$
	Por abajo o parte negativa del eje	$c < 0$

La combinación de estos valores muestra 18 representaciones distintas visualmente (ver tabla 2). Además, de acuerdo con Duval (2006) "cada característica visual particular puede ser distinguida **solamente a través de la oposición de dos gráficas** y cada característica visual particular se **combina con una característica semántica de la ecuación y no con la función representada"** (p. 152).

4. EL ESTUDIO

En este artículo describimos un estudio en el que un profesor del sistema educativo del TEBAEV, como parte de su tesis de licenciatura, diseñó una experiencia didáctica con sus estudiantes a fin de identificar el reconocimiento que ellos hacían respecto de las variables visuales y unidades simbólicas significativas de los registros gráfico y algebraico de la función cuadrática. La experiencia didáctica se realizó en un ambiente computacional con el objetivo de que los estudiantes, con apoyo del profesor, analizaran las variables visuales del registro gráfico y unidades simbólicas significativas de la notación algebraica de la función cuadrática, propuestas en este artículo (sección 3). El profesor manifestó que él no suele utilizar algún tipo de *software* en su enseñanza.

Tabla 2. Combinaciones de las unidades simbólicas significativas de la función $y = ax^2 + bx + c$.

$a > 0$		
$b > 0$ [$ab > 0$] $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$	b = 0 [ab = 0] $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$	$b < 0$ [$ab < 0$] c > 0, c = 0, $c < 0$
		
g(x) = 3x² + 2x + 1 *f(x) = 3x² + 2x* *h(x) = 3x² + 2x - 1*	*g(x) = 3x² + 1* *f(x) = 3x²* *h(x) = 3x² - 1*	*g(x) = 3x² - 2x + 1* *f(x) = 3x² - 2x* *h(x) = 3x² - 2x - 1*
$a < 0$		
$b > 0$ [$ab < 0$] $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$	$b = 0$ [$ab = 0$] $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$	$b < 0$ [$ab > 0$] $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$
		
g(x) = -3x² + 2x +1 *f(x) = -3x² + 2x* *h(x) = -3x² + 2x -1*	*g(x) = -3x² + 1* *f(x) = -3x²* *h(x) = -3x² - 1*	*g(x) = -3x² - 2x + 1* *f(x) = -3x² - 2x* *h(x) = -3x² - 2x - 1*

4.1 Participantes

Los estudiantes a cargo del profesor fueron 14 alumnos (entre los 16 y 18 años de edad) que cursaban el cuarto semestre del nivel medio superior, inscritos en el Telebachillerato Río Uxpanapa, Veracruz. Los alumnos reciben un total de cinco horas a la semana de la materia de Matemáticas IV. Como se mostró en la sección 2, en este curso (Matemáticas IV) y en dos previos (Matemáticas I y Matemáticas III) los estudiantes abordan contenidos acerca de la función cuadrática.

4.2 La experiencia didáctica

La experiencia consistió en una sesión de clase (60 minutos) utilizando el *software* GeoGebra. La sesión se llevó a cabo dentro de las instalaciones de la escuela, en el centro de cómputo. Se asignó una computadora por cada dos alumnos. El profesor explicó a los estudiantes que la finalidad de la actividad era explorar las variaciones que experimentaba la parábola cuando los coeficientes de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ se hacían variar. El profesor tuvo la libertad de diseñar y organizar la actividad a su parecer. Por ello, cabe aclarar que el diseño que implementó difiere del mostrado en la sección 3 del presente artículo.

El diseño del profesor consistió en graficar la función cuadrática en GeoGebra, utilizando la opción de barras deslizadoras y agregando algunos elementos. Así obtuvo una pantalla en la que se apreciaban los siguientes elementos: la gráfica, las barras deslizadoras correspondientes a cada parámetro, la expresión de la función cuadrática, el producto de los parámetros a y b, el punto donde la parábola corta al eje y y el punto del vértice (ver figura 13). El profesor tomó la decisión de mostrar el producto de los parámetros a y b con la intención de que los estudiantes apreciaran la coordinación entre el producto de signos de los parámetros y la posición del punto del vértice de la parábola con respecto al eje y. Además, decidió mostrarles la expresión de la función en su forma general, y no la expresión correspondiente a la parábola graficada, a fin de que los estudiantes describieran la expresión algebraica que le correspondía a la parábola graficada, según los valores de los parámetros que mostraban las barras deslizadoras.

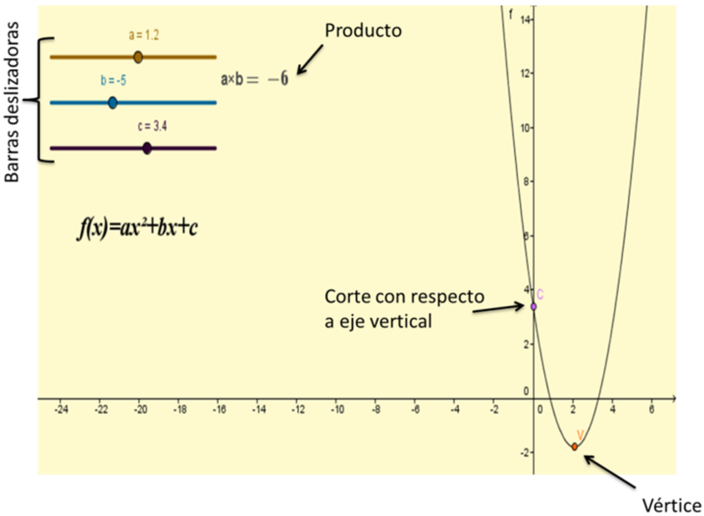


Figura 13. Copia de pantalla de la actividad realizada por el profesor.

Dado que el profesor ya tenía el diseño de la actividad cuando inició la clase, sólo les describió a los estudiantes los elementos que se mostraban en la pantalla, sin mencionar que el producto se correspondía con el desplazamiento del vértice respecto del eje *y*. Les indicó a los estudiantes que al deslizar el punto sobre cada una de las tres barras los valores de los coeficientes aumentarían o disminuirían y que con ello se obtendrían transformaciones de la parábola. Posterior a las explicaciones, los estudiantes hicieron variar los parámetros y analizaron las características que observaban en la gráfica, las cuales escribieron en su cuaderno.

Una vez que los alumnos interactuaron con GeoGebra analizaron la relación que tenían los valores de los coeficientes *a*, *b* y *c* con las transformaciones que sufría la gráfica al variar dichos valores. De acuerdo con el profesor, la concavidad fue lo primero que los alumnos relacionaron con el signo del coeficiente *a*, al igual que el valor de *c* reconociéndolo como el punto en donde la parábola intersectaba al eje *y*. Fue de mayor dificultad relacionar el producto *ab* con la posición que presentaba la gráfica con respecto al eje *y*, sin embargo, una vez que fueron realizando los ejercicios se percataron de que el signo del producto estaba en relación con dicha posición de la gráfica.

4.3 Recolección de datos

Los datos para el estudio son las respuestas de los estudiantes a un cuestionario de *tareas de reconocimiento cualitativo* que se aplicó en dos momentos: antes y después de realizar la actividad de GeoGebra. El profesor aplicó el cuestionario para identificar si, con los temas estudiados en el curso de Matemáticas IV según los textos analizados en la sección 2, los estudiantes hacían uso de las variables visuales y unidades simbólicas significativas en el reconocimiento de tareas. El mismo cuestionario se aplicó a los estudiantes después de haber realizado la actividad en GeoGebra.

Primera aplicación. Tuvo lugar en el aula de clases, en presencia del profesor de matemáticas a cargo del grupo, un día después de haber terminado el estudio de los temas de la función cuadrática, correspondientes al bloque III del libro de Matemáticas IV (ver sección 2.2). El profesor indicó a los estudiantes responder el cuestionario tomando en cuenta los temas estudiados. Además, les hizo hincapié en que debían responder las preguntas que acompañaban a cada una de las tareas del cuestionario, las cuales justificarían sus respuestas.

Segunda aplicación. Al igual que la primera, los estudiantes respondieron el mismo cuestionario en presencia de su profesor de matemáticas. La segunda aplicación del cuestionario sucedió un día después de la actividad desarrollada con GeoGebra; 2 días posteriores a la primera aplicación. Es decir, el profesor aplicó el cuestionario por primera vez, posterior al cierre del bloque III de Matemática IV, al día siguiente realizó la actividad con GeoGebra y un día después aplicó de nuevo el cuestionario.

El cuestionario se compone de cuatro *tareas de reconocimiento cualitativo*. De acuerdo con Duval (2006), este tipo de tareas implica un registro de inicio y un registro de destino, distintos en su sistema semiótico. Para distinguir las características visuales del registro de inicio, la tarea debe incluir la oposición de dos o más representaciones en el registro de destino. Pasar de un registro a otro, por medio de una vía de interpretación global, exige diferenciar las variables visuales o unidades significativas de las representaciones en el mismo registro de destino para ponerlas en correspondencia con la representación del registro de inicio.

4.4 Análisis de las tareas

Las cuatro tareas de reconocimiento cualitativo se agruparon en dos secciones. En la primera, tareas 1 y 2, la conversión se da del registro gráfico (registro de inicio) al algebraico (registro final). En las siguientes dos tareas (3 y 4), segunda sección, la conversión se da del registro algebraico (registro de inicio) al gráfico (registro final), el proceso inverso.

Dado que el estudiante podía seleccionar el registro final con base en otros tratamientos, distintos a la vía de interpretación global, cada una de las cuatro tareas se acompañaron de las siguientes preguntas: ¿Cómo determinas tu respuesta? ¿Qué elementos de la gráfica te permitieron elegir la *expresión algebraica correspondiente?* ¿Qué elementos de la *expresión algebraica te sirvieron para elegir la gráfica correspondiente?* La respuesta a estas preguntas permite identificar si la conversión de la tarea estuvo, o no, basada en un reconocimiento cualitativo.

4.4.1 Del registro gráfico al algebraico (tareas 1 y 2)

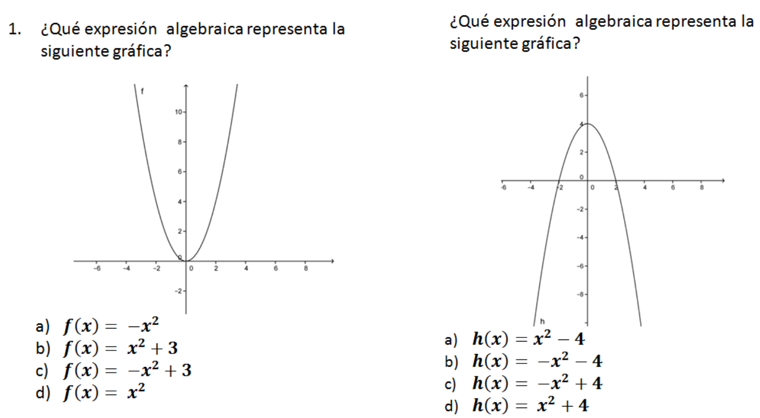


Figura 14. Tareas 1 y 2.

En la tarea 1, un reconocimiento cualitativo implica discriminar que la parábola es cóncava hacia arriba (registro de inicio), lo cual nos indica que el signo del coeficiente *a* es positivo (registro de salida). Esta observación excluye las opciones de los incisos a) y c). Dado que la parábola tiene su vértice en el origen,

$b = 0$ e intersecta al eje y en el origen, $c = 0$, la expresión que describe la gráfica dada es la del inciso d.

En la tarea 2 se tiene una parábola cóncava hacia abajo, por lo cual el coeficiente a del término cuadrático es menor que cero. Debido a que la gráfica tiene su vértice sobre el eje y, $b = 0$. Además, la gráfica intersecta al eje y en la parte positiva, en 4, por lo que el valor del coeficiente c debe ser positivo.

En ambas tareas, la discriminación de las variables visuales de abertura de la parábola e intersección con el eje y eran suficientes para seleccionar el registro algebraico correspondiente.

4.4.2 Del registro gráfico al algebraico (tareas 3 y 4)

El registro de inicio es la expresión algebraica de la función cuadrática, las dos unidades simbólicas necesarias para asociar el registro gráfico correspondiente son: el producto de los coeficientes a y b y el valor del coeficiente independiente c. Dado que los tres registros gráficos finales son parábolas cóncavas hacia arriba, no era necesario discriminar la unidad simbólica $a > 0$. Se puede observar que en el registro algebraico el producto $ab > 0$, por lo que el vértice debe estar a la izquierda del eje y; se descarta la gráfica del inciso c. Se observa además que $c = -4$, lo que descarta la opción a. De ahí que ambas unidades son necesarias para discriminar el registro final correcto, el cual se encuentra en la opción b.

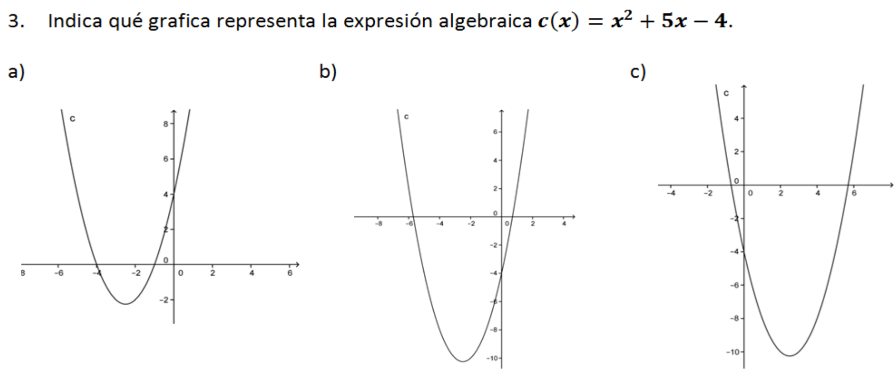


Figura 15. Tarea 3.

En la tarea 4, la discriminación de las unidades simbólicas de los parámetros *a* y *c* es suficiente para asociar el registro gráfico correspondiente. Al ser $a > 0$, se descarta la gráfica de la opción a, y al identificar que $c = -3$, la gráfica corta en $y = -3$, se tiene que las variables visuales de la gráfica de la opción b, corresponden a esas dos unidades simbólicas significativas.

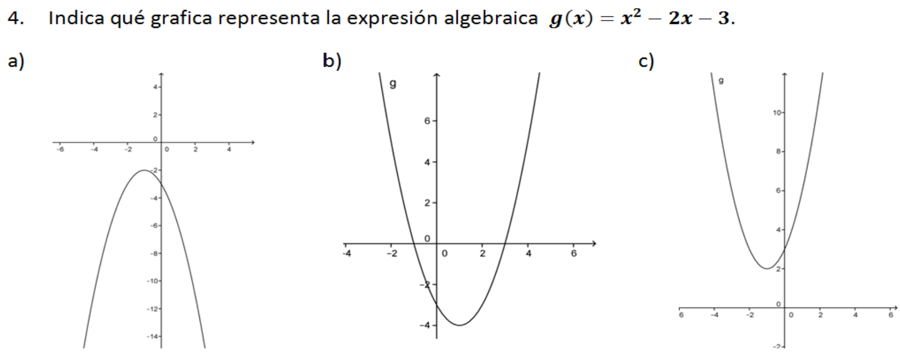


Figura 16. Tarea 4.

Las respuestas de los estudiantes se analizaron según el tipo de tratamiento que el estudiante dijo haber usado para pasar de un registro a otro. Por ello, los datos analizados son las respuestas que dieron los estudiantes a cada una de las preguntas que incluía la tarea: ¿Cómo determinas tu respuesta? ¿Qué elementos de la gráfica te permitieron elegir la *expresión algebraica correspondiente?* ¿Qué elementos de la *expresión algebraica te sirvieron para elegir la gráfica correspondiente?* El análisis de las respuestas se centró en el reconocimiento de las variables visuales y unidades simbólicas significativas, así como en la asociación variable visual-unidad simbólica significativa, antes y después de la actividad con GeoGebra.

5. RESULTADOS

Los 14 estudiantes eligieron las opciones correctas tanto en la primera como en la segunda aplicación del cuestionario. Lo que difiere de una aplicación a otra es la discriminación de esas variables y unidades simbólicas significativas para elegir el registro de destino. Así como la asociación entre la variable visual del registro gráfico y la unidad simbólica significativa del registro algebraico.

En las siguientes gráficas se muestra la frecuencia con que fueron reconocidas cada una de las variables visuales de las gráficas (figura 17) y las unidades simbólicas significativas en la expresión algebraica (figura 18) en el total de tareas analizadas (4 tareas x 14 estudiantes: 56).

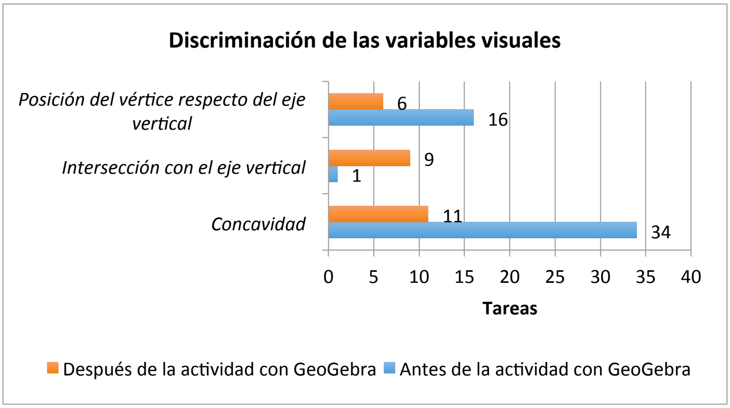


Figura 17. Discriminación de las variables visuales.

En la primera aplicación del cuestionario, antes de la actividad con GeoGebra, la variable concavidad fue reconocida en 34 de las tareas, mientras que la variable de intersección de la curva con el eje *y* tuvo sólo un reconocimiento. En el caso de la variable posición del vértice respecto del eje *y*, las 15 de las 16 tareas que la mencionan, se refieren a la posición del vértice como coordenada (e. g., "cuyo vértice es el origen" o "cuyo vértice es el número 4"). Es decir, el reconocimiento es sobre un punto y no sobre un desplazamiento de la parábola, sólo 1 tarea (tarea 4) tiene este último reconocimiento ("está hacia la derecha"). Después de la actividad con GeoGebra, el reconocimiento de las variables visuales concavidad y posición del vértice respecto del eje *y* disminuyó, mientras que la variable intersección de la curva con el eje *y* aumentó, fue reconocida en 9 tareas. Además, de las 6 tareas que mencionaron la posición del vértice respecto del eje *y*, 5 reconocieron dicha variable más como un desplazamiento o traslación de la curva que como un punto (coordenada del vértice).

El reconocimiento de unidades simbólicas significativas de la expresión algebraica fue mayor después de la actividad con GeoGebra. El parámetro *b* fue el de mayor discriminación. Antes de la actividad con GeoGebra, se discriminó sólo la unidad simbólica *b* ("el valor de *b* es cero") y no el producto *ab*. Después de la actividad con GeoGebra, de las 14 tareas que discriminaron dicha unidad simbólica, 4 respuestas mencionaron la unidad simbólica *ab*, por ejemplo: "porque el punto de *b* es positivo, su producto de *a* es positivo" (tarea 3); "porque el producto de $a \times b$ es 0" (tarea 1).

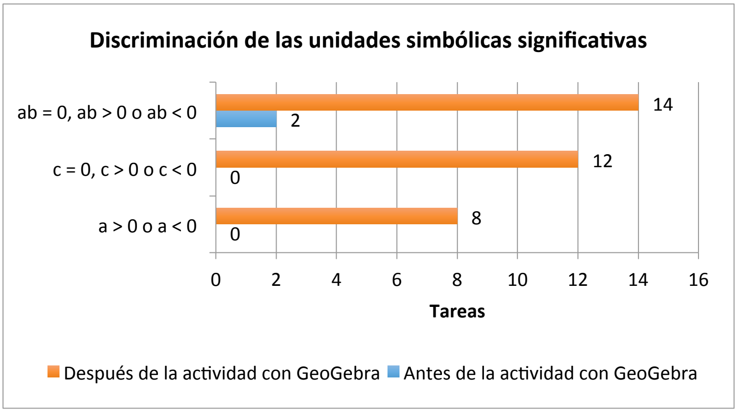


Figura 18. Discriminación de las unidades simbólicas significativas.

En esta segunda gráfica (figura 18) se muestra evidencia de que la actividad con GeoGebra favoreció la discriminación de las características semánticas (unidades simbólicas significativas) de la expresión algebraica y, en especial, de la unidad simbólica *ab*.

En 15 de las 54 tareas analizadas, antes de la actividad con GeoGebra, se identificó el uso de procedimientos numéricos (tabulación) para determinar los puntos de intersección de la parábola. No se puede afirmar que tales procedimientos hayan sido determinantes para articular los registros, pues también se menciona el reconocimiento ya sea de una variable visual o unidad simbólica significativa en al menos una tarea. Después de la actividad con GeoGebra ninguna tarea se acompañó de, o mencionó, algún procedimiento numérico.

A pesar de que los datos de la primera gráfica (figura 17) muestran un menor reconocimiento de las variables visuales de la gráfica después de la actividad con GeoGebra, dicho reconocimiento se centró en una modificación conjunta de la gráfica y de la forma de la escritura algebraica. En otras palabras, después de la actividad con GeoGebra, las variables visuales de la gráfica fueron reconocidas en conjunto con las unidades simbólicas significativas de la escritura algebraica. En las siguientes gráficas se muestra la frecuencia del reconocimiento conjunto de las variables visuales de la gráfica y las unidades simbólicas significativas de la expresión algebraica en cada una de las tareas.

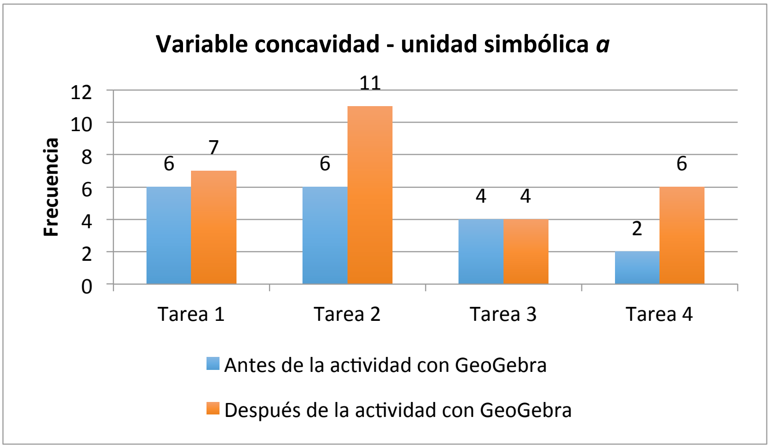


Figura 19. Variable concavidad - unidad simbólica *a*.

En el caso de la asociación variable visual de concavidad y su unidad simbólica (figura 19), se observa una mayor diferencia en las tareas 2 y 4. En la tarea 2, después de la actividad con GeoGebra, 11 de los 14 estudiantes asociaron la abertura hacia abajo de la parábola con la unidad simbólica negativa del parámetro *a*. Algunas respuestas que muestran dicha asociación son: “la concavidad hacia abajo el valor de *a* debe ser negativo” (tarea 1); “la gráfica es cóncava hacia abajo el valor de *a* es negativo” (tarea 2); “la parábola es cóncava hacia arriba, el valor de *a* es positivo” (tarea 3); “porque el valor de es positiva la concavidad de la gráfica es hacia arriba“ (tarea 4).

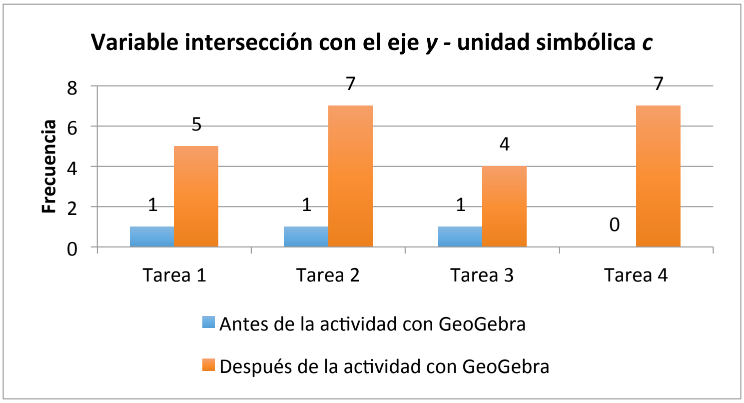


Figura 20. Variable intersección con el eje y - unidad simbólica c.

Una diferencia más marcada se aprecia en la asociación de la variable intersección de la curva con el eje y y su unidad simbólica c (figura 20). De nuevo, las tareas 2 y 4 muestran una mayor incidencia. Se puede apreciar que antes de la actividad con Geogebra, sólo un estudiante en tres tareas discriminó y asoció la variable visual y su unidad simbólica. Ejemplos de dicha asociación son: "su intersección está en el origen $c = 0$" (tarea 1), "su punto de intersección debe ser positivo $c = 4$" (tarea 2), "su punto de intersección es negativo " (tarea 3). Después de la actividad con GeoGebra, el reconocimiento de la asociación aumentó en promedio en 5 estudiantes por tarea. Algunas respuestas fueron: "porque es cero, su punto de intersección está en el origen" (tarea 1); "$c = 4$, la c es positiva, su intersección está en el 4 positivo" (tarea 2); "su punto de intersección del eje y entonces el valor de c es 4" (tarea 3); "su intersección es negativa, $c = -3$" (tarea 4).

Un cambio relevante se dio en la asociación de la variable posición del vértice respecto del eje y y su unidad simbólica b (figura 21). Relevante por dos razones: 1) fue la de menor asociación antes de la actividad con GeoGebra y, después de la actividad con GeoGebra, no sólo se presentaron casos de asociación, sino que además, 2) se discriminó el producto ab y no sólo el parámetro b.

La tarea 3, como se mencionó en la sección 4.4.2, implicaba una discriminación de la variable posición del vértice respecto del eje y y su relación con el parámetro b. Como el parámetro a de la expresión algebraica (registro de inicio) era positivo, el reconocimiento de que $b > 0$, asociado con el desplazamiento a la izquierda de la gráfica, era suficiente para elegir el registro final. De ahí que antes de la actividad con GeoGebra un estudiante lo discriminó, mencionó "está hacia la izquierda, $b = 5$". El alumno reconoce que la unidad simbólica $b > 0$ implica un desplazamiento de la gráfica hacia la izquierda.

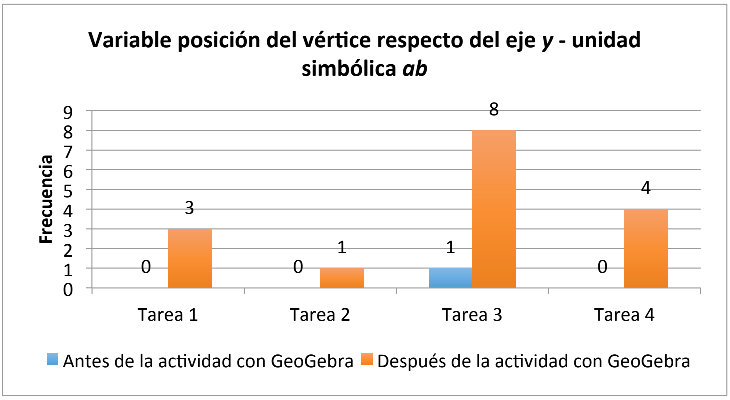


Figura 21. Variable posición del vértice respecto del eje *y* - unidad simbólica *ab*.

Después de la actividad con GeoGebra, la unidad simbólica *ab* fue discriminada en 11 de los 16 reconocimientos (1 en la tarea 1, 6 en la tarea 3 y 4 en la tarea 4). Algunas respuestas que evidencia esta discriminación son: "porque el producto debe ser positivo, el vértice se encuentra en el centro" (tarea 1), "la gráfica se desplaza hacia la izquierda, el producto de $a \times b$ es positivo" (tarea 3), "la desplaza hacia la derecha y el producto de a x b es negativo" (tarea 4). En los 5 reconocimientos restantes, sólo se discriminó el parámetro b, por ejemplo: "porque $b = 0$ y el vértice está en el origen" (tarea 1), "no está hacia la derecha ni a la izquierda, $b = 0$" (tarea 2), "está trasladada hacia la izquierda, $b = 5$" (tarea 3).

6. CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo se ha presentado y explorado una propuesta de tres variables visuales de la parábola que están en correspondencia semiótica con el signo de las unidades simbólicas a, b y c de la escritura algebraica de la función cuadrática. En la exploración, al enfrentarse los estudiantes a las tareas de reconocimiento cualitativo en las que tenía que comparar expresiones o gráficas visualmente semejantes, antes de la actividad con GeoGebra, se observó:

- Uso de cálculos numéricos (como la tabulación) para ir de un registro a otro.
- Una mayor discriminación de la concavidad de la parábola, sin asociarla con su unidad simbólica en la escritura algebraica.
- Un reconocimiento casi nulo tanto de la intersección de la curva con el eje *y* (variable visual) como del parámetro *c* (unidad simbólica significativa). Este hecho es interesante, pues dicha variable parece presentar menos dificultad al asociarla con la ordenada al origen (0, *c*).
- Un reconocimiento del parámetro *b* asociado a un punto específico de la curva (coordenada del vértice).

Después de la actividad con GeoGebra, se observó:

- Ausencia del uso de cálculos numéricos para ir de un registro a otro.
- Una mayor presencia de la asociación de las tres variables propuestas y sus respectivas unidades simbólicas.
- Un mayor reconocimiento de la variable intersección de la curva con el eje *y* y de la unidad simbólica significativa
- Un reconocimiento cualitativo de la unidad simbólica *ab*, asociado a una posición del vértice y no a un punto específico. La discriminación de esta unidad simbólica es un gran aporte, pues su estudio no se aborda en los libros de texto analizados.

Los resultados de la exploración muestran que el uso de GeoGebra presenta un gran potencial para el tratamiento de la vía de interpretación global, pues permite discriminar la congruencia entre las características visuales de la parábola y las semánticas de la expresión algebraica que intervienen para la conversión de tales representaciones. Además, los resultados evidencian que no es posible asumir que los estudiantes perciben de manera natural la relación semiótica entre las características visuales y las unidades simbólicas significativas de los registros gráfico y algebraico de la función después de un curso tradicional. Si bien el papel del profesor y otros factores intervienen en ello, es importante señalar que este artículo proporciona una estrategia para que el profesor, además del libro de texto, aprecie la potencialidad que un *software* dinámico le brinda para favorecer la enseñanza de la vía de interpretación global. El estudio que aquí se reportó muestra que un día de exploración de la relación entre las unidades simbólicas y las características visuales de los registros algebraico y gráfico de la función cuadrática mediante GeoGebra tuvo mejores resultados que todo el estudio a través de los libros de texto. Mayor aún el aporte si se toma en cuenta que el profesor de Telebachillerato imparte no sólo matemáticas, sino todas las disciplinas que se estudian en este sistema, de ahí que la formación del profesor no siempre es de matemáticas, por lo que este tipo de estrategias son un gran recurso para él.

REFERENCIAS

Ainsworth, S. (2006). "DeFT: A Conceptual Framework for Considering Learning with Multiple Representations". *Learning and Instruction, 16*, 183-198.

Ávila, A., García, A., Hernández, A., y García, A. (2014). *Matemáticas IV.* Veracruz: Secretaría de Educación de Veracruz.

Benítez, A. (2004). *Estudio exploratorio sobre la construcción de la expresión algebraica (el caso de polinomios) a través de la interpretación global de las representaciones gráfica, numérica y algebraica.* México: CINVESTAV-IPN. Tesis de doctorado.

Díaz, M., Haye, E., Motenegro, F., y Córdoba, L. (2013). "Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas". *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe*, Santo Domingo, República Dominicana, pp. 1-13.

Duval, R. (1988). "Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres". *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235-253.

Duval, R. (1992). "Gráficas y ecuaciones: La articulación de dos registros" [B.,Parra, Trad.]. En R. Cambray, E. Sánchez, y G. Zubieta (Eds.), *Antología en educación Matemática* (125-139). México: Departamento de Matemática Educativa.

Duval, R. (1998). "Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento". En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* [Miriam Vega Restrepo, Trad.]. Cali, Colombia: Universidad del Valle/ Peterlang.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168. Obtenido de http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546

Guzmán, I. (1998). "Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: Voces de estudiantes". *Revista Oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A, C.*, 1(1), 5-21.

Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria.* Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú. Tesis de maestría. Obtenido de http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_maestria/HUAPAYA_GOMEZ_ENRIQUE_MODELACION.pdf

Oaxaca, J., y Valderrama, M. (2000). Enseñanza de la función cuadrática, interpretando sus parámetros. Obtenido de: http://www.comie.org.mx/congreso/memoria/v9/ponencias/at05/PRE11787536 82.pdf

Sánchez, H., Hernández, J., Hernández, V., y Velázquez, X. (2014). *Matemáticas I.* Veracruz: Secretaría de Educación de Veracruz.

Sandoval, I. (2011). Las tecnologías digitales y las representaciones en la clase de matemáticas. En Cristina Arasa G. (Coord.), *Cuadernos México. Enseñanza de las Matemáticas.* Ciudad de México, México: Consejería de Educación en México, págs. 55-72.

Secretaría de Educación de Veracruz. (2016a). *Matemáticas I. Programa de estudios.* Veracruz: Telebachillerato de Veracruz.

Secretaría de Educación de Veracruz. (2016b). *Matemáticas IV. Programa de estudios.* Veracruz: Telebachillerato de Veracruz.

Valero, R. (2015). *Dificultades por parte de alumnos de educación media superior y superior en la conversión de los registros algebraico y gráfico y viceversa: el caso de la función cuadrática.* Xalapa, Veracruz: Universidad Veracruzana. Tesis de licenciatura.