Sveučilište u Zagrebu

ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE

Tanja Vojković

KOMPLEKSNE MREŽE, MREŽNI DESKRIPTORI I SIGURNOST U MREŽAMA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2015

Sveučilište u Zagrebu

CROATIAN DOCTORAL PROGRAM IN MATHEMATICS

Tanja Vojković

COMPLEX NETWORKS, NETWORK DESCRIPTORS AND SAFETY IN NETWORKS

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2015

Sveučilište u Zagrebu

ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE

Tanja Vojković

KOMPLEKSNE MREŽE, MREŽNI DESKRIPTORI I SIGURNOST U MREŽAMA

DOKTORSKI RAD

Mentor:
prof. dr. sc. Damir Vukičević

Zagreb, 2015

University of Zagreb

CROATIAN DOCTORAL PROGRAM IN MATHEMATICS

Tanja Vojković

COMPLEX NETWORKS, NETWORK DESCRIPTORS AND SAFETY IN NETWORKS

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
prof. dr. sc. Damir Vukičević

Zagreb, 2015

ZAHVALE

Prije svega veliko hvala mom profesoru i mentoru Damiru Vukičeviću na idejama, savjetima, razumijevanju i strpljenju, te neiscrpnoj energiji i entuzijazmu. Njegova pomoć pri izradi ove disertacije bila je neprocjenjiva, kao i inspiracija, podrška i vodstvo u mom znanstvenom sazrijevanju.

Zahvaljujem i svim članovima Seminara za kombinatornu i diskretnu matematiku u Zagrebu, te Seminara za diskretnu matematiku u Splitu na korisnim savjetima, primjedbama i idejama. Posebno hvala ide kolegama Gordanu Radobolji, Marku Ercegu i Snježani Braić, za nezamjenjivu tehničku podršku i pomoć.

Također želim spomenuti svoje uzore, profesore koji su me tijekom školovanja oduševljavali svojim pristupom i strašću za matematikom, te me odgojili i naučili da volim i cijenim kako matematiku tako i nastavnički poziv - nastavnike Srećka Marušića i Juricu Ćudinu, te profesoricu Vlastu Matijević.

Naposlijetku, hvala mojoj obitelji, oni su me uveli u svijet racionalnog razmišljanja, argumenata, zaključaka, ljubavi prema znanju i širenju vidika. Njihova znanstvena znatiželja i želja za novim spoznajama o svijetu oko nas i danas mi je inspiracija. Ovaj rad je za njih.

Sažetak

U ovoj disertaciji izložena su istraživanja iz nekoliko područja teorije kompleksnih mreža. Definirane su poopćene verzije mrežnih deskriptora, kao što su transmisija, međupoloženost, vršna produktivnost i vršna profitabilnost koje uzimaju u obzir pretpostavku da u mreži vrhovi na manjim udaljenostima komuniciraju znatno više nego oni na većim udaljenostima. Proučavane su minimalne i maksimalne vrijednosti tih deskriptora i analizirane gornje i donje ograde tih vrijednosti.

Nadalje, predložena je modificirana verzija Girvan-Newmanovog algoritma za detektiranje zajednica u mrežama, koja smanjuje broj operacija i dovodi do bržeg uočavanja strukture zajednica.

U posljednjem dijelu su analizirane mreže s distribuiranim ključevima i proučavana njihova sigurnost na napad neprijateljskih agenata. Uz dvije različite pretpostavke o djelovanju agenata na mrežu određuju se minimalni brojevi vrhova u mreži i ključeva potrebnih da bi mreža bila sigurna.

Abstract

In this thesis several areas of theory of complex networks are explored. Generalized versions of network descriptors such as transmission, betweenness centrality, networkness and network surplus, which assume that the ammount of communication in the network is greater between vertices which are at smaller distances than that that are on greater distances, are defined. Minimal and maximal values of these descriptors are studied and lower and upper bounds are obtained.

Further, a modified version of Girvan-Newman algorithm for community detection is proposed, which reduces the number of operations compared to the original and leads to faster community detection.

In the last part, networks with distributed keys are analyzed and their safety under the attack of enemy agents is studied. Under two different assumptions on the behavior of agents in the network, minimal number of vertices in the network and minimal number of distributed keys needed to secure the network, are determined.

Sadržaj

Poglavlje 1

UVOD

Kompleksna mreža, ili samo mreža, je u svom najjednostavnijem obliku skup točaka od kojih su neke u parovima spojene linijama [57, 6]. Točke obično nazivamo čvorovima ili vrhovima, a linije bridovima. Matematički gledano, mreža je graf, uređeni par $G = (V, E)$ skupa vrhova $V \neq \emptyset$ i skupa bridova E [73]. Mnogi kompleksni sustavi u prirodi i društvu mogu se opisati terminima kompleksnih mreža, ilustrirajući mrežu povezanosti među jedinicama od kojih se sastoje. Na primjer, vrhovi mogu predstavljati ljude iz neke skupine, a bridovi parove prijatelja, vrhovi mogu biti serveri, komunikacijski centri, gradovi, atomi u molekulama ili metaboliti u kemijskim reakcijama, a bridovi električne veze, telefonske linije, ceste, kemijske veze ili kemijske reakcije. Stoga istraživanja iz područja kompleksnih mreža prodiru u mnoga polja znanosti, od kemije [47], biokemije [1, 66], do komunikacijskih teorija, [53]. Proučavanje i analiza strukture mreža i prirode interakcije čvorova je relativno mlado područje, no uz ubrzani razvoj informatike i kapaciteta računala koji omogućuje prikupljanje i analizu sve većih skupova podataka, neodoljivo privlači znanstvenike različitih područja, pa su tako istraživanja iz područja društvenih mreža dovela do rezultata u prevenciji širenja epi-

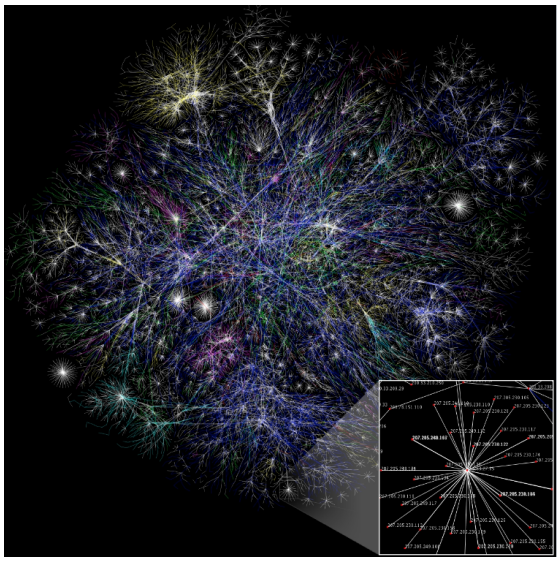
demija [7, 8, 39, 52, 56], istraživanja metaboličkih i proteinskih mreža do boljeg razumijevanja kemijskih procesa u organizmima [82, 38, 41, 77], a proučavanje prometnih i dostavnih mreža i ruta do optimizacije tih sustava [25, 49, 33]. Neka istraživanja obuhvaćaju samo konkretne mreže i pojedine koncepte, a druga se pak bave razumijevanjem i modeliranjem organizacijske prirode mreža: univerzalnim principima strukturnog dizajna i dinamike.

1.1 Vrste i primjeri mreža stvarnog svijeta

S obzirom na strukturu koju predstavljaju, mreže se dijele na četiri velike skupine, tehnološke, društvene, biološke i mreže informacija [57]. Te skupine nisu strogo definirane i postoje preklapanja među njima, a ovdje ćemo samo kratko predstaviti najvažnije primjere iz svake od skupina.

Tehnološke mreže su fizičke infrastrukture formirane tijekom prošlog stoljeća koje tvore osovinu modernog tehnološkog društva [57]. To uključuje energetske mreže elektrana i električnih vodova, transportne i dostavne mreže, telefonske mreže, te Internet, mrežu podatkovnih veza, električnih, optičkih i bežičnih, koja povezuju računala, servere i informacijska čvorišta.

S obzirom da je mreža Interneta nastajala spontano i neplanski, istodobno od različitih grupacija ljudi, njegova struktura nije u potpunosti poznata. Stoga se istraživanja mreže Interneta bave djelomično eksperimentalnim otkrivanjem njegove strukture [46, 16], a ostala idu u smjeru otkrivanja efikasnijih ruta za prijenos podataka, detektiranja čvorova kojima treba poboljšanje ili optimizacije postojećih algoritama. Energetske mreže su izuzetno kompleksni sustavi u kojima mnogo toga ovisi ne o strukturi mreže nego o zakonima fizike, preciznoj i detaljnoj kontroli faza i napona kojima upravljaju sofisticirani računalni sustavi. Stoga usprkos nekoliko pokušaja analize strukture energet-



Slika 1.1: Mapa dijela Interneta iz 2005. (izvor: "Internet map 1024" by The Opte Project)

skih mreža [2, 79] i analize pada mreže uzrokovanih energetskim izbojima na pojedinim čvorovima [24], teorija mreža nije imala velik doprinos u ovom području. S druge strane, transportne mreže, zračne, cestovne i željezničke, te mreže dostave i distribucije, još su od Problema trgovačkog putnika i kineskog poštara predmet zanimanja matematičara i teorije grafova. Neki od doprinosa teorije kompleksnih mreža poboljšanju organizacije transportnih ruta, bilo cestovnih, željezničkih ili riječnih predstavljeni su u [64, 42, 67, 25, 49]. Važno je napomenuti da ovo područje uključuje i proučavanje stukture krvožilnog i živčanog sustava u organizmu, tj. načina njihove organizacije i prijenosa tvari i impulsa [80, 81].

Društvene mreže su one u kojima vrhovi predstavljaju ljude, ili grupe ljudi, a bridovi nekakav oblik socijalne interakcije među njima, poput poznanstva, prijateljstva ili poslovne suradnje. Proučavanje društvenih mreža seže sve do 1930tih, do istraživanja psihijatra Jacoba Morena o dinamici

socijalnih interakcija unutar grupe ljudi, te do poznate "Southern Women Study", analize 18 žena američkog juga i njihovog pohađanja društvenih događanja [55, 20]. Jedno od najpoznatijih istraživanja iz ovog područja je zasigurno Milgramov eksperiment iz 1960tih o takozvanih "šest stupnjeva odvojenosti" i "efektu malog svijeta" [51, 72]. Od tih početaka pa do danas analiza društvenih mreža primijenjena je na širok spektar različitih društvenih mreža, problema i pojava, poput prijateljstva i poznanstva u lokalnim zajednicama [9, 44], među studentima i učenicima [85, 27, 54], kontakata u poslovnom svijetu [32], suradnji znanstvenika [36, 37, 58], glumaca i glazbenika [79, 35], kriminalnih mreža i mreža terorista [68, 45] i brojnih drugih. Nedavna popularizacija online društvenih mreža poput Facebooka ili Twittera učinila je odjednom dostupnim ogromne količine podataka i omogućila dublju analizu socijalnih veza i struktura i načina na koji se formiraju.

Slika 1.2: Prikaz društvene mreže Facebook 2010.g.

Još jedna važna primjena socijalnih mreža je kod širenja epidemija. Širenje bilo kakvog fenomena kroz mrežu, bio to virus, bolest, ideja, informacija ili novi trend uvelike ovisi o samoj strukturi mreže, a razumijevanje veze između strukture i dinamike mreže je ključno u prevenciji i kontroli ili pak pospješivanju širenja [8, 22, 62, 7].

Biološke mreže obuhvaćaju širok spektar mreža. Molekularni biolozi

mrežama modeliraju kemijske reakcije u stanici [28, 77, 38], neuroznanstvenici ih koriste pri reprezentaciji veza među moždanim stanicama [82], a ekolozi u proučavanju interakcije između vrsta u ekosustavima ili hranidbenih lanaca [18, 50].

U **informacijskim mrežama** vrhovi su nekakvi skupovi podataka povezani na određeni način. Najpoznatiji primjer mreže informacija je World Wide Web, u kojem su vrhovi web stranice, povezani bridovima ukoliko postoji hiperlink s jedne stranice na drugu. Kako su hiperlinkovi jednosmjerni, World Wide Web je usmjerena mreža. Premda postoji od 1980tih, struktura World Wide Weba se detaljno počela proučavati tek relativno nedavno [40]. Nešto manje poznata, no znatno starija informacijska mreža, je mreža citata između znanstvenih članaka. Ona je konstruirana od vrhova - članaka, a od jednog do drugog članka vodi usmjereni brid ukoliko je drugi citiran u bibliografiji prvog. Proučavanje mreže citata seže do 1960tih [84], a često dovodi do neočekivanih i iznenađujućih statistika, pa je uvijek zanimljivo i popularno.

1.2 Osnovni pojmovi teorije grafova

Koristit ćemo standardnu terminologiju teorije grafova bazirajući se na [73] i [11]. Prisjetimo se osnovnih pojmova.

Graf je uređeni par $G = (V, E)$, gdje je $V(G) = V$ neprazan skup čije elemente nazivamo **vrhovima**, a $E(G) = E$, skup **bridova**, je podskup skupa neuređenih parova elemenata iz V. Pri tom, ako za $e \in E$ vrijedi $e = \{u, v\}$, onda vrhove u i v nazivamo **krajevima brida** e i oni nisu nužno različiti. Graf se ponekad definira i kao uređena trojka $G = (V, E, \varphi)$, gdje je V neprazan skup čije elemente nazivamo vrhovima, E je skup čije

elemente nazivamo bridovima, a φ je preslikavanje koje svakom bridu $e \in E$ pridružuje neuređeni par (ne nužno različitih) vrhova. Za $e = \{u, v\}$ kažemo da su u i v **incidentni s** e, te da su **susjedni** i pišemo $e = uv$. Brid čiji se krajevi podudaraju nazivamo **petljom**, a dva ili više bridova s istim parom krajeva nazivamo **višestrukim bridovima**. Ukoliko u grafu nema ni petlji ni višestrukih bridova za graf kažemo da je **jednostavan**. Kompleksne mreže koje proučavamo u ovoj disertaciji su jednostavni grafovi. G je prazan graf ako je $E(G) = \emptyset$.

Uvodimo oznake

$$v(G) = |V(G)| \text{ - broj vrhova u } G$$
$$e(G) = |E(G)| \text{ - broj bridova u } G$$

Jednostavan graf s n vrhova u kojem je svaki par vrhova spojen bridom nazivamo **potpunim grafom** i označavamo s K_n. Ostali važni primjeri jednostavnih grafova koje koristimo su ciklusi i putovi. **Ciklus** C_n na n vrhova definiramo skupom vrhova $V = \{1, 2, ..., n\}$ i skupom bridova $E = \{\{i, i+1\} : i < n\} \cup \{1, n\}$. **Put** P_n na n vrhova definiran je skupom vrhova $V = \{1, 2, ..., n\}$ i skupom bridova $E = \{\{i, i+1\} : i < n\}$.

Neka su G i H grafovi. Kažemo da je H **podgraf** od G i pišemo $H \subseteq G$ ako je $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$, a svaki brid iz H ima iste krajeve u H kao što ih ima u G. Tada kažemo i da je G **nadgraf** od H. Podgraf $H \subseteq G$ za koji je $V(H) = V(G)$ zovemo **razapinjući podgraf**.

Unija dvaju grafova G i H, u oznaci $G \cup H$, je graf sa skupom vrhova $V(G) \cup V(H)$ i skupom bridova $E(G) \cup E(H)$.

Neka je $G = (V, E)$ i $V' \subseteq V$. Podgraf od G čiji je skup vrhova $V \backslash V'$, a skup bridova se sastoji od bridova iz E čija su oba kraja u $V \backslash V'$ označavat ćemo s $G \backslash V'$. Ako je $V' = \{v\}$ umjesto $G \backslash V'$ pisat ćemo $G \backslash \{v\}$. Podgraf od

G dobiven izbacivanjem brida e iz E označavat ćemo s $G-e$, a graf dobiven dodavanjem brida $e \notin E$ grafu G s $G+e$.

Skup svih susjednih vrhova vrha $u \in V(G)$ označavamo s $N_G(u)$. Ako je G jednostavan graf, onda definiramo **stupanj vrha** u, u oznaci $d_G(u)$ kao broj susjeda od u. Ako je jasno o kojem se grafu radi pišemo $d(u)$ umjesto $d_G(u)$. Koristimo sljedeće oznake za **minimalni** i **maksimalni stupanj** grafa

$$\delta = \delta(G) := \min_{u \in V(G)} d_G(u);$$

$$\Delta = \Delta(G) := \max_{u \in V(G)} d_G(u).$$

Za graf kažemo da je d**-regularan** ako je $d(u) = d$ za svaki vrh $u \in V$, a **regularan** ako je d-regularan za neki $d \geq 0$. Za vrh u kažemo da je **izoliran** ako je $d(u) = 0$, a kažemo da je u **list** ako je $d(u) = 1$. Vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 1.1 *Neka je $G = (V, E)$ graf. Vrijedi*

$$\sum_{u \in V(G)} d(u) = 2e(G).$$

Put u grafu G je niz $P = v_0e_1v_1e_2...e_kv_k$ čiji su članovi naizmjenice vrhovi v_i i bridovi e_i tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i, $1 \leq i \leq k$ i pritom su svi vrhovi v_i, $0 \leq i \leq k$ i svi bridovi e_i, $1 \leq i \leq k$, međusobno različiti. U jednostavnom grafu put je potpuno određen nizom svojih vrhova $v_0v_1...v_k$. Kažemo da je v_0 **početak**, a v_k **kraj** puta P, a ponekad i za v_0 i za v_k kažemo da su **krajevi**. Za vrhove $v_1, ..., v_{k-1}$ kažemo da su **unutarnji vrhovi puta**. Kažemo da je P v_0v_k-put.

Dva vrha $u, v \in V$ grafa G su **povezana** ako u G postoji uv-put. **Udaljenost** $d_G(u, v)$ dvaju vrhova u i v u G je duljina najkraćeg uv-puta. Kada

je iz konteksta jasno o kojem grafu je riječ pišemo samo $d(u, v)$. **Dijametar grafa** G, u oznaci $diamG$, je najveća udaljenost dva vrha u G. Graf G je **povezan** ako su svaka dva njegova vrha povezana nekim putom. Povezanost među vrhovima je relacija ekvivalencije, pa stoga postoji particija skupa vrhova V na klase ekvivalencije i te klase nazivamo **komponente povezanosti** od G. Ako graf ima samo jednu komponentu povezanosti onda kažemo da je **povezan**, a inače kažemo da je **nepovezan**.

Familija uv-putova u grafu je **unutarnje disjunktna** ako nikoja dva puta nemaju zajednički unutarnji vrh. Za graf s barem 2 vrha kažemo da je k-**povezan** ako između svaka dva vrha postoji barem k unutarnje disjunktnih putova.

Graf u kojem nema ciklusa nazivamo **acikličkim grafom** ili **šumom**, a povezani aciklički graf nazivamo **stablom**. Za stablo G **korijen stabla** je bilo koji čvrsto odabrani vrh. Vrijedi Teorem o karakterizaciji stabla:

Teorem 1.2 *Neka je $G = (V, E)$ jednostavan graf. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

i) G je stablo;

ii) za svaka dva vrha $u, v \in V$ postoji jedinstveni uv-put u G;

iii) za svaki brid $e \in E$, $G - e$ je nepovezan;

iv) dodavanjem bilo kojeg brida $e \notin E$ između postojećih vrhova $u, v \in V$, $G + e$ sadrži točno jedan ciklus;

v) vrijedi $v(G) = e(G) + 1$.

Razapinjuće stablo grafa G je razapinjući podgraf od G koji je stablo. **Dijkstrino stablo s korijenom** u ili **stablo najkraćih putova s korijenom** u grafa G je razapinjuće stablo grafa G takvo da je put od vrha u do proizvoljnog vrha v u G najkraći uv-put u G [23, 19].

Automorfizam grafa G je permutacija $\rho : V(G) \to V(G)$ takva da je $uv \in E(G)$ ako i samo ako je $\rho(u)\rho(v) \in E(G)$. Skup svih automorfizama grafa G s operacijom kompozicije čini grupu $Aut(G)$, koju nazivamo **grupom automorfizama grafa** G. Za jednostavan graf G kažemo da je **vršno tranzitivan** ako vrijedi $\forall u, v \in V(G)$, $\exists g \in Aut(G)$ tako da je $g(u) = v$.

1.3 Matematički rezultati

Ova disertacija obuhvaća istraživanja iz nekoliko područja teorije mreža. U Poglavlju 2. izložen je rad na mrežnim deskriptorima. To su veličine i mjere, dobivene određenim metodama iz strukture mreže, koje imaju neko značenje za pojedine aspekte mreže, poput važnosti pojedinih vrhova ili bridova, ili "troška" nekog vrha, sa stajališta koliko je on udaljen od centra mreže obzirom na informacije koje kroz mrežu prolaze. Deskriptori koje proučavamo su transmisija, međupoloženost, vršna produktivnost i vršna profitabilnost. Standardne definicije tih deskriptora dane su kako slijedi.

Transmisija $t(u)$ vrha u se definira sa

$$t(u) = \sum_{v \in V} d(u, v).$$

Međupoloženost $c(u)$ vrha u je suma bridnih međupoloženosti svih bridova incidentnih s u

$$c(u) = \sum_{v \in N(u)} b(uv),$$
$$b(uv) = \sum_{\{k,l\} \subseteq V} \frac{s_{uv}^{kl}}{s^{kl}},$$

gdje je s_{uv}^{kl} broj najkraćih putova između vrhova k i l koji prolaze bridom uv, a s^{kl} je ukupni broj putova između vrhova k i l.

Vršna produktivnost vrha u se definira sa

$$\rho(u) = \frac{c(u)}{t(u)},$$

a **vršna profitabilnost** ("dodana vrijednost" koju mreži dodaje vrh u) sa

$$\nu(u) = c(u) - t(u).$$

Definirali smo modificirane verzije tih deskriptora, motivirani činjenicom da originalne definicije pretpostavljaju da je količina informacija koje prolaze između vrhova jednaka za svaka dva vrha u grafu. Ta pretpostavka je izmijenjena, i poboljšana, na nekoliko načina. U Poglavlju 2.1 količina komunikacije je utežana s $d(u,v)^\lambda$, za $\lambda < 0$, a u Poglavlju 2.2 pretpostavljamo da se komunikacija između vrhova koji nisu susjedni smanjuje proporcionalno parametru α, u usporedbi s komunikacijom između susjednih vrhova, za neki $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Takav pristup proizlazi iz pretpostavke da susjedni vrhovi komuniciraju mnogo više nego oni koji nisu susjedni. Za $d(u,v)^\lambda$-težinske i za $(1,\alpha)$-težinske mrežne deskriptore proučavamo njihove minimalne i maksimalne vrijednosti, te istražujemo gornje i donje ograde tih vrijednosti za sve proučavane parametre λ i α. Osim konkretnih vrijednosti gornjih i donjih ograda dajemo i graf, tj. vrh u grafu za koji se ta vrijednost postiže.

Rezultati se mogu vidjeti u sljedećim tablicama (n je broj vrhova grafa).

Za $d(u,v)^\lambda$-težinske mrežne deskriptore i vrijednosti $\lambda \in \langle -\infty, -1\rangle$:

Tablica 1. Rezultati za $d(u,v)^\lambda$ za $\lambda \in \langle -\infty, -1\rangle$, n je broj vrhova grafa

		Donja ograda	**Gornja ograda**
mt_λ	ekstremalni graf (vrh)	put (kraj puta)	potpuni graf (bilo koji vrh)
	granična vrijednost	$\sum_{i=1}^{n-1} i^{\lambda+1}$	$n-1$
Mt_λ	ekstremalni graf (vrh)	put (centar)	potpuni graf (bilo koji vrh)
	granična vrijednost	$2\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^{\lambda+1}$, n neparan $2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} i^{\lambda+1} + \left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda+1}$, n paran	$n-1$
mc_λ	ekstremalni graf (vrh)	put (kraj puta)	potpuni graf (bilo koji vrh)
	granična vrijednost	$\sum_{i=1}^{n-1} i^{\lambda}$	$n-1$
Mc_λ	ekstremalni graf (vrh)	*ciklus** *(bilo koji vrh)*	zvijezda (centar)
	granična vrijednost	vidi Nap. 2.22	$n-1+(n^2-3n+2)2^\lambda$

* Dokazano za 2-povezane grafove

Za $d(u,v)^\lambda$-težinske mrežne deskriptore i vrijednosti $\lambda \in \langle -1, 0\rangle$:

Tablica 2. Rezultati za $d(u,v)^\lambda$ za $\lambda \in \langle -1,0\rangle$, n je broj vrhova grafa

		Donja ograda	**Gornja ograda**
mt_λ	ekstremalni graf (vrh)	potpuni graf (bilo koji vrh)	put (centar)
	granična vrijednost	$n-1$	$2\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^{\lambda+1}$, n neparan $2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} i^{\lambda+1} + \left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda+1}$, n paran
Mt_λ	ekstremalni graf (vrh)	potpuni graf (bilo koji vrh)	put (kraj puta)
	granična vrijednost	$n-1$	$\sum_{i=1}^{n-1} i^{\lambda+1}$
mc_λ	ekstremalni graf (vrh)	put (kraj puta)	*ciklus** *(bilo koji vrh)*
	granična vrijednost	$\sum_{i=1}^{n-1} i^{\lambda}$	vidi Nap. 2.16
Mc_λ	ekstremalni graf (vrh)	potpuni graf (bilo koji vrh)	zvijezda (centar)
	granična vrijednost	$n-1$	$n-1+(n-1)(n-2)2^\lambda$

* Dokazano za 2-povezane grafove

Za $(1,\alpha)$-težinske mrežne deskriptore i vrijednosti $\alpha \in \langle 0,1\rangle$:

Tablica 3. Rezultati za (1,α) za $\alpha\in\langle 0,1\rangle$, donja ograda, n je broj vrhova grafa

		Donja ograda
mt_α	ekstremalni graf (vrh)	zvijezda (centar), za $\alpha \geq \frac{1}{2}$, zvijezda (list), za $\alpha < \frac{1}{2}$
	granična vrijednost	$1+2\alpha(n-2), \quad \alpha < \frac{1}{2}$; $n-1, \qquad \alpha \geq \frac{1}{2}$.
Mt_α	ekstremalni graf (vrh)	potpuni graf, za $\alpha \geq \frac{1}{2}$, graf $H_{n,d}$, za $\alpha < \frac{1}{2}$*
	granična vrijednost	vidi Teorem 2.32
mc_α	ekstremalni graf (vrh)	bilo koji list
	granična vrijednost	$1+(n-2)\alpha$
Mc_α	ekstremalni graf (vrh)	*otvoren problem*
	granična vrijednost	-
$m\rho_\alpha$	ekstremalni graf (vrh)	put (kraj puta)
	granična vrijednost	$\frac{1+\alpha(n-2)}{1+\frac{1}{2}\alpha(n^2-n-2)}$
$M\rho_\alpha$	ekstremalni graf (vrh)	bilo koji vrh vršno tranzitivnog grafa
	granična vrijednost	1
$m\nu_\alpha$	ekstremalni graf (vrh)	put (kraj puta)
	granična vrijednost	$-\frac{n^2-3n+2}{2}\alpha$
$M\nu_\alpha$	ekstremalni graf (vrh)	bilo koji vrh vršno tranzitivnog grafa
	granična vrijednost	0

*Graf $H_{n,d}$ definiran je u Napomeni2.31

Tablica 4. Rezultati za (1,α) za $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$, gornja ograda, n je broj vrhova grafa

		Gornja ograda
mt_α	ekstremalni graf (vrh)	*ciklus*[*] *(bilo koji vrh)*
	granična vrijednost	vidi Teorem 2.36
Mt_α	ekstremalni graf (vrh)	put (kraj), za $\alpha > \frac{2}{n+1}$, zvijezda (centar), za $\alpha \leq \frac{2}{n+1}$
	granična vrijednost	$n-1, \quad \alpha \leq \frac{2}{n+1}$; $1+\alpha \cdot \frac{n^2-n-2}{2} \quad \alpha > \frac{2}{n+1}$.
mc_α	ekstremalni graf (vrh)	*otvoren problem, riješeno za 2-povezane grafove*
	granična vrijednost	vidi Teorem 2.39
Mc_α	ekstremalni graf (vrh)	zvijezda (centar)
	granična vrijednost	$(n-1)(1+\alpha(n-2))$
$m\rho_\alpha$	ekstremalni graf (vrh)	bilo koji vrh vršno tranzitivnog grafa
	granična vrijednost	1
$M\rho_\alpha$	ekstremalni graf (vrh)	$S\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$ (centar), n neparan,[**] $S\left(\frac{n-1}{q}, ..., \frac{n-1}{q}\right)$ (centar), $q, n/q \in \mathbb{Z}$[**] zvijezda (centar), inače
	granična vrijednost	vidi Teorem 2.46
$m\nu_\alpha$	ekstremalni graf (vrh)	bilo koji vrh vršno tranzitivnog grafa
	granična vrijednost	0
$M\nu_\alpha$	ekstremalni graf (vrh)	zvijezda (centar)
	granična vrijednost	$\alpha(n^2-3n+2)$

* Dokazano za 2-povezane grafove

** Grafovi $S\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$ i $S\left(\frac{n-1}{q}, ..., \frac{n-1}{q}\right)$ definirani su u Definiciji 2.44

U Poglavlju 3. proučavamo detektiranje zajednica u mrežama. Za taj problem postoje brojni algoritmi, od kojih je jedan od najpoznatijih Girvan-Newmanov algoritam, temeljen na bridnoj međupoloženosti. Ovdje izlažemo modifikaciju tog algoritma koja smanjuje broj potrebnih operacija i dovodi do bržeg raspada mreže na zajednice. U originalnom algoritmu rezultati ovise o označavanju vrhova, a u našoj modifikaciji to nije slučaj, naime svi se bridovi s maksimalnom vrijednošću međupoloženosti izbacuju odjednom, pa konačni rezultat ovisi samo o polaznom, neoznačenom grafu.

Originalni Girvan-Newmanov algoritam je sljedeći:

1. *izračunati međupoloženost za sve bridove u grafu;*
2. *ukloniti brid s najvećom međupoloženošću;*
3. *izračunati međupoloženost svih bridova nastalog grafa;*
4. *ponavljati korake 2.-4. dok ima bridova u grafu.*

Modificirana verzija koju predlažemo u jednom koraku uklanja sve bridove s maksimalnom vrijednošću međupoloženosti:

1. *izračunati međupoloženost za sve bridove u grafu;*
2. *ukloniti sve bridove s maksimalnom vrijednošću međupoloženosti;*
3. *izračunati međupoloženost svih bridova nastalog grafa;*
4. *ponavljati korake 2.-4. dok ima bridova u grafu.*

Originalni i modificirani algoritam su testirani na nekoliko mreža, a ovdje su dani rezultati testa na poznatom primjeru Zacharyjevog karate kluba.

U posljednjem, Poglavlju 4., izložena su istraživanja iz područja sigurnosti mreža s distribuiranim ključevima. To su mreže u kojima vrhovi drže dio nekakve poruke ili informacije, koji nazivamo ključem.

Analizirali smo dva različita problema. Prvo, mreže s distribuiranim ključevima u kojima po unaprijed definiranim pretpostavkama djeluju agenti

i nestale osobe, a zatim mreže s nešto strože zadanim uvjetima i fiksnim brojem ključeva i napadača.

Prvi problem, izložen u 4.1, pretpostavlja da u mreži G s p vrhova i ključevima distribuiranim po funkciji $f : V(G) \to \mathcal{P}(\{1, 2, ..., k\})$, djeluje a agenata i m nestalih osoba, uz pretpostavku da ako je neki vrh agent, ključeve koji su mu dodijeljeni preda neprijateljskoj strani, te ode iz mreže uklanjajući i sve susjedne vrhove, a vrhovi koji su nestale osobe odu iz mreže, ali ne utječu ni na susjede ni na ključeve. Mreža je sigurna ako ni jedan izbor a agenata i m nestalih osoba u skupu $V(G)$ ne može uzrokovati da agenti skupe svih k ključeva, te ako nakon odlaska svih agenata i nestalih osoba iz mreže i dalje postoji komponenta povezanosti koja u uniji ima sve ključeve.

Naš zadatak je za zadane brojeve agenata i nestalih osoba otkriti minimalni potreban broj vrhova u mreži i minimalni broj ključeva, te točnu topologiju mreže i distribuciju ključeva u mreži, koja je sigurna na djelovanje zadanog broja agenata i nestalih osoba. Prezentirani su rezultati za 1 agenta i bilo koji broj $m \in \mathbb{N}$ nestalih osoba, za 2 agenta i 1, 2 ili 3 nestale osobe, te za 3 agenta i 1 nestalu osobu, uz neke otvorene probleme.

Uz oznake, $K(a, m, p) = \min\{k|(a, m, p, k) \in T\}$, pri čemu je $(a, m, p, k) \in T \subseteq \mathbb{N}_0^4$ ako i samo ako postoji graf G s p vrhova i funkcija $f : V(G) \to \mathcal{P}(\{1, 2, ..., k\})$ takva da za bilo koje $A, M \subseteq V$, $|A| = a$, $|M| = m$ vrijedi sljedeće:

T1) $\bigcup_{v \in A} f(v) \neq \{1, .., k\}$;

T2) postoji komponenta C grafa $G \backslash (N_0(A) \cup M)$ takva da vrijedi

$$\bigcup_{v \in C} f(v) = \{1, .., k\},$$

gdje je $N_0(v) = N(v) \cup \{v\}$, te za podskup $S \subseteq V$ označavamo $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ i $N_0(S) = N(S) \cup S$, rezultati se mogu objediniti tablicom:

Tablica 5. Rezultati sigurnosti u mrežama s distribuiranim ključevima

$K(0,m,p) = \begin{cases} +\infty, & p \leq m; \\ 1, & p > m. \end{cases}$
$K(1,m,p) = \begin{cases} +\infty, & p \leq q; \\ \left\lfloor \frac{1}{2}(p - m - \sqrt{p^2 + m^2 - 4p - 2mp + 4}) \right\rfloor + 1, & p > q, \end{cases}$ $q = 2 + m + \sqrt{4m+1}$, $m \in \mathbb{N}$
$K(2,1,p) = \begin{cases} +\infty, & p \leq 11; \\ 3, & p \geq 12. \end{cases}$
$K(2,2,p) = \begin{cases} +\infty, & p \leq 14; \\ 3, & p \geq 15. \end{cases}$
$K(2,3,p) = \begin{cases} +\infty, & p \leq 15; \\ 6, & p = 16, 17; \\ 3, & p \geq 18. \end{cases}$
$K(3,1,p) = \begin{cases} +\infty, & p \leq 17; \\ 6 \text{ ili } 7, & p = 18, 19; \\ 4, & p \geq 20. \end{cases}$

U Poglavlju 4.2, pretpostavke su malo drukčije, broj ključeva i broj odmetnika je fiksan. Promatramo mreže s n vrhova u kojima svaki vrh ima točno 1 ključ iz skupa $\{1, 2, 3\}$. Odmetnici su vrhovi koji neprijateljskoj strani predaju ključ koji im je dodijeljen, te odu iz mreže uklanjajući i sve bridove koji su im incidentni. Očito uz pretpostavku o samo 3 ključa u mreži mogu postojati najviše 2 odmetnika da bi ona bila sigurna, tj. da neprijateljska strana ne bi došla do svih ključeva. Uvjet za sigurnost mreže je također da bi se nakon odlaska odmetnika iz mreže mogle i dalje naći 3 osobe u istoj komponenti povezanosti koje zajedno imaju skup od sva 3 ključa. Naš cilj je odrediti uvjete uz koje je mreža s 3 ključa sigurna od 2 odmetnika. Dodatna pretpostavka je da promatrani graf ima minimalni stupanj barem

3, što je razumna restrikcija uz pretpostavku o 2 odmetnika.

Centralni rezultat je sljedeći:

Graf G s minimalnim stupnjem barem 3 je siguran od 2 odmetnika ako vrijedi barem jedno od sljedećeg:

i) G ima barem 3 komponente.

ii) G ima barem jednu komponentu s barem 9 vrhova koja je različita od dvostruke vjetrenjače.

iii) G ima dvije komponente s barem po 6 vrhova u svakoj.

Pri tome je dvostruka vjetrenjača graf definiran na sljedeći način:

Dvostruka vjetrenjača s povezanim centrima, u oznaci DW_k^*, je graf koji sadrži $k \in \mathbb{N}$ podgrafova K_2 i 2 centralna vrha koji su susjedni svim vrhovima iz svih K_2 podgrafova, i susjedni su međusobno. Ako centralni vrhovi nisu susjedni kažemo da je taj graf dvostruka vjetrenjača s nepovezanim centrima i označavamo ga s DW_k (Slika 4.9).

Na kraju dijela 4.2 dajemo nekoliko dodatnih opservacija o složenosti algoritama za provjeru sigurnosti ovako opisanih mreža, te predlažemo jedan način provjere.

Poglavlje 2

MREŽNI DESKRIPTORI

Ako je struktura mreže poznata može se izračunati niz korisnih veličina i mjera koje imaju različita značenja za pojedine aspekte mreže. Najjednostavniji primjer je možda centralnost vrha, koja odgovara na pitanje "Koji su najvažniji i najcentralnji vrhovi u mreži?". Naravno, postoje različite definicije važnosti vrha, pa stoga i različiti načini računanja mjere centralnosti [6, 57]. Ovisno o vrsti promatrane mreže i aspektu koji se analizira koriste se različite mjere, veličine i metode, a deskriptori izloženi u ovom radu temelje se na proučavanju načina i količine komunikacije, tj. informacija koje prolaze kroz mrežu.

Osnovni koncepti u proučavanju komunikacije u kompleksnim mrežama su međupoloženost i transmisija. Međupoloženost (eng. betweenness centrality) je definirana i analizirana 1970tih u radovima [30, 31] i može se efikasno računati Girvan-Newmanovim algoritmom [34]. (O Girvan-Newmanovom algoritmu će biti nešto više rečeno u Poglavlju 3.) Značenje međupoloženosti je u detektiranju važnosti pojedinih vrhova [30, 3], a njezine ekstremalne vrijednosti analizirane su u radu [14]. Međupoloženost vrha u se može interpretirati kao količina komunikacije koja prolazi kroz taj vrh [75].

Za brid uv, **bridna međupoloženost**, $b(uv)$, se definira na sljedeći način

$$b(uv) = \sum_{\{k,l\} \subseteq V} \frac{s_{uv}^{kl}}{s^{kl}},$$

gdje je s_{uv}^{kl} broj najkraćih putova između vrhova k i l koji prolaze bridom uv, a s^{kl} je ukupni broj putova između vrhova k i l.

Međupoloženost $c(u)$ vrha u je suma bridnih međupoloženosti svih bridova incidentnih s u

$$c(u) = \sum_{v \in N(u)} b(uv).$$

Transmisija $t(u)$ vrha u se definira na sljedeći način

$$t(u) = \sum_{v \in V} d(u, v),$$

i može se interpretirati kao trošak vrha u za mrežu [75].

Dobro je poznato da su ove dvije veličine povezane Wienerovim indeksom [83] definiranim s

$$W(G) = \frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in V^2} d(u, v).$$

Wienerov indeks, suma duljina svih najkraćih putova između svih parova vrhova u grafu, jedan je od najproučavanijih molekulskih deskriptora u matematičkoj kemiji.

Kako je dokazano u [75] vrijedi

$$\sum_{u \in V} c(u) = \sum_{u \in V} t(u) = 2W(G).$$

Vršna produktivnost i vršna profitabilnost (eng. networkness i network surplus) su dva načina mjerenja koliko je vrh u "koristan" za mrežu. Ti deskriptori su definirani i predstavljeni u [75].

Vršna produktivnost vrha u se definira sa

$$\rho(u) = \frac{c(u)}{t(u)},$$

a **vršna profitabilnost** ("dodana vrijednost" koju mreži dodaje vrh u) sa

$$\nu(u) = c(u) - t(u).$$

Primijetimo da interpretacija međupoloženosti kao količine informacija koju procesuira vrh u, podrazumijeva da je količina komunikacije između svaka dva vrha jednaka. Ta pretpostavka je izmijenjena, i poboljšana, na nekoliko načina u radovima [4, 5]. Količina komunikacije je utežana s $d(u,v)^\lambda$, za $\lambda < 0$ u [4], i s $\lambda^{d(u,v)}$, za $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ u [5]. Treće poboljšanje uključuje pretpostavku da se komunikacija između vrhova koji nisu susjedni smanjuje proporcionalno parametru α, u usporedbi s komunikacijom između susjednih vrhova, za neki $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Takav pristup proizlazi iz pretpostavke da susjedni vrhovi komuniciraju mnogo više nego oni koji nisu susjedni [74].

2.1 $d(u,v)^\lambda$-težinski mrežni deskriptori

Pod pretpostavkom da količina komunikacije nije jednaka za svaki par vrhova, nego se smanjuje s povećanjem udaljenosti, ovisno o parametru λ, definiramo nove, poopćene deskriptore i promatrat ćemo njihove ekstremalne vrijednost za $\lambda < 0$. Slučaj $\lambda = -1$ analiziran je u [12] pod nazivom scaled betweenness. Za proizvoljni $\lambda \in \mathbb{R}$ definiramo

$$t_\lambda(u) = \sum_{v \in V \setminus \{u\}} d(u,v)^{\lambda+1},$$

$$b_\lambda(uv) = \sum_{\{k,l\} \subseteq V} \frac{s_{uv}^{kl}}{s^{kl}} \cdot d(k,l)^\lambda,$$

$$c_\lambda(u) = \sum_{v \in N(u)} b_\lambda(uv).$$

Primijetimo da je funkcija t_λ rastuća s obzirom na udaljenosti za $\lambda > -1$, a padajuća za $\lambda < -1$.

Definiramo

$$\rho_\lambda(u) = \frac{c_\lambda(u)}{t_\lambda(u)},$$

$$\nu_\lambda(u) = c_\lambda(u) - t_\lambda(u).$$

Primijetimo također da za $\lambda = 0$ imamo standardne definicije transmisije, međupoloženosti, vršne produktivnosti i vršne profitabilnosti.

Definiramo

$$mc_\lambda(G) = \min\{c_\lambda(u) : u \in V\} \quad Mc_\lambda(G) = \max\{c_\lambda(u) : u \in V\}$$

$$mt_\lambda(G) = \min\{t_\lambda(u) : u \in V\} \quad Mt_\lambda(G) = \max\{t_\lambda(u) : u \in V\}$$

$$m\rho_\lambda(G) = \min\{\rho_\lambda(u) : u \in V\} \quad M\rho_\lambda(G) = \max\{\rho_\lambda(u) : u \in V\}$$

$$m\nu_\lambda(G) = \min\{\nu_\lambda(u) : u \in V\} \quad M\nu_\lambda(G) = \max\{\nu_\lambda(u) : u \in V\}$$

i analiziramo donje i gornje ograde ovih vrijednosti za sve $\lambda < 0$ (pozitivne lambde vode do nerealne pretpostavke da u mrežama vrhovi na većim udaljenostima komuniciraju više nego oni na manjim udaljenostima).

Slično kao u slučaju $\lambda = 0$, vrijedi sljedeća lema.

Lema 2.1 *Za svaki graf G vrijedi*

$$\sum_{u\in V} t_\lambda(u) = \sum_{u\in V} c_\lambda(u).$$

Dokaz. Za transmisiju, tvrdnja slijedi direktno iz definicije. Dokažimo tvrdnju za međupoloženost. Vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{u\in V} c_\lambda(u) &= \sum_{u\in V}\sum_{v\in N(u)}\sum_{\{k,l\}\subseteq V} \frac{s_{uv}^{kl}}{s^{kl}} d(k,l)^\lambda \\ &= \sum_{\{k,l\}\subseteq V} \frac{d(k,l)^\lambda}{s^{kl}} \sum_{u\in V}\sum_{v\in N(u)} s_{uv}^{kl}.\end{aligned}$$

Za dani par vrhova $\{k,l\}$, $\sum_{u\in V}\sum_{v\in N(u)} s_{uv}^{kl}$ je broj parova (u,v) vrhova takvih da je $d(u,v)=1$ i da najkraći put između k i l prolazi bridom uv. Duljina svakog od s^{kl} najkraćih putova od k do l je $d(k,l)$, pa na svakom od tih putova možemo odabrati $d(k,l)$ parova $\{u,v\}$ za koje je $d(u,v)=1$. Stoga vrijedi

$$\sum_{u\in V}\sum_{v\in N(u)} s_{uv}^{kl} = 2d(k,l)\cdot s^{kl}.$$

Konačno

$$\sum_{u\in V} c_\lambda(u) = \sum_{\{k,l\}\subseteq V} \frac{d(k,l)^\lambda}{s^{kl}}\cdot 2d(k,l)\cdot s^{kl} = 2\sum_{\{k,l\}\subseteq V} d(k,l)^{\lambda+1},$$

i time je tvrdnja dokazana. ■

Napomena 2.2 *S obzirom na rezultat u Lemi 2.1 prirodno je označiti*

$$\sum_{u\in V} t_\lambda(u) = \sum_{u\in V} c_\lambda(u) = 2W_{\lambda+1}(G).$$

2.1.1 Transmisija

Promatramo $t_\lambda(u) = \sum_{v\in V\setminus\{u\}} d(u,v)^{\lambda+1}$, za $\lambda<0$. Lako se vidi da za svaki graf G s n vrhova vrijedi

$$Mt_{-1}(G) = mt_{-1}(G) = n-1.$$

Minimalna transmisija

Teorem 2.3 *Za $\lambda\in\langle-\infty,-1\rangle$ i za svaki graf G s n vrhova vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^{\lambda+1} \leqslant mt_\lambda(G) \leqslant n-1.$$

Donja ograda se postiže za put (u kraju puta), a gornja za potpun graf (bilo koji njegov vrh).

Dokaz. Tvrdnja za gornju granicu slijedi iz činjenice da u sumi

$$\sum_{v \in V \setminus \{u\}} d(u,v)^{\lambda+1}$$

svi pribrojnici imaju vrijednost najviše 1, a u potpunom grafu je ta vrijednost točno 1 za sve parove vrhova.

Dokažimo tvrdnju za donju granicu. Transmisija, tj. suma svih udaljenosti je veća što su veći pribrojnici, tj. što su udaljenosti $d(u,v)$ manje, pa se donja ograda vrijednosti mt_λ očito postiže za stablo (dodavanjem bridova stablu udaljenosti među vrhovima se smanjuju). Neka je G stablo za koje je $mt_\lambda(G)$ minimalna i neka je u_0 vrh za koji vrijedi $t_\lambda(u_0) = mt_\lambda(G)$. Dokazat ćemo da je G put i da je u_0 kraj tog puta. Pretpostavimo suprotno, tj. neka ili G nije put ili u_0 nije kraj puta G (ili oboje). U svakom slučaju postoje barem dva lista u $V \setminus \{u_0\}$, označimo ih s u_1 i u_2.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $d(u_0,u_1) \leqslant d(u_0,u_2)$. Promotrimo sada graf G' koji se dobija iz G uklanjanjem brida incidentog vrhu u_1 i dodavanjem brida između vrhova u_2 i u_1. Očito je vrijednost $t_\lambda(u_0)$ manja u G' nego u G, zbog $d_{G'}(u_0,u_1) \geq d_G(u_0,u_1)$, a to je u kontradikciji s pretpostavkom da je G graf s minimalnom vrijednošću $t_\lambda(G)$. Stoga u_0 mora biti kraj puta $G = P_n$. Slijedi da je

$$mt_\lambda(G) \geqslant mt_\lambda(P_n) = \sum_{i=1}^{n-1} i^{\lambda+1},$$

donja ograda vrijednosti $mt_\lambda(G)$. ■

Napomena 2.4 *Za donju ogradu minimalne transmisije za $\lambda \in \langle -\infty, -1\rangle$, tj. za vrijednost transmisije u kraju puta s n vrhova, jednostavnim računom može se pokazati da vrijedi*

$$1 + \int_2^n x^{\lambda+1} dx \leq \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^{\lambda+1} \leq 1 + \int_2^n (x-1)^{\lambda+1} dx,$$

odakle slijedi

$$\frac{\lambda+2+n^{\lambda+2}-2^{\lambda+2}}{\lambda+2} \leq mt_\lambda(P_n) \leq \frac{\lambda+1+(n-1)^{\lambda+2}}{\lambda+2}.$$

Teorem 2.5 *Za $\lambda \in \langle -1, 0\rangle$ i za svaki graf G s n vrhova vrijedi*

$$n-1 \leqslant mt_\lambda(G) \leqslant \begin{cases} 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^{\lambda+1}, \ n \text{ neparan;} \\ 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} i^{\lambda+1} + \left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda+1}, \ n \text{ paran.} \end{cases}$$

Gornja ograda se postiže za put (u centru puta), a donja za potpun graf (bilo koji njegov vrh).

Dokaz. Lako se vidi da vrijedi tvrdnja za donju granicu. Dokažimo gornju. Prvo primijetimo da se gornja ograda postiže za stablo, s obzirom da promatramo najveće moguće udaljenosti među vrhovima. Dokazat ćemo da je to stablo put i da je vrh u kojem se postiže minimalna vrijednost t_λ centar tog puta (ili bilo koji od dva centra, ako je n neparan). Za put P_n očito vrijedi

$$mt_\lambda(P_n) = \begin{cases} 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^{\lambda+1}, \ n \text{ neparan;} \\ 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} i^{\lambda+1} + \left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda+1}, \ n \text{ paran.} \end{cases}$$

Neka je G proizvoljno stablo s n vrhova i neka je $c \in V$ centar stabla, tj. vrh za koji je vrijednost $\max\{d(c,u) : u \in V\}$ minimalna. Dobro je poznata činjenica da svako stablo ima ili jedinstveni centar ili dva susjedna centra, pa slijedi $d(c,u) \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, za svaki vrh $u \in V$.

Iz definicije $mt_\lambda(G)$ znamo da je $mt_\lambda(G) \leqslant t_\lambda(c)$, a mi ćemo dokazati $t_\lambda(c) \leqslant mt_\lambda(P_n)$.

Za $v \in V$, označimo sa $S(v)$ jedinstveni put od c do v. Neka je u_1 vrh s najvećom udaljenošću od c u G. Nadalje, neka je u_2 najdalji vrh od c u

G koji zadovoljava $S(u_1) \cap S(u_2) = \emptyset$. Očito su i u_1 i u_2 listovi. Kako je c centar grafa vrijedi jedno od sljedećeg:

$$d(u_1, c) = d(u_2, c) \quad \text{ili} \quad d(u_1, c) = d(u_2, c) + 1.$$

Sada ćemo "pomaknuti" sve vrhove u G koji nisu na putovima $S(u_1)$ ni $S(u_2)$ na krajeve tih putova koji su listovi.

U svakom koraku mičemo jedan list iz $G \setminus (S(u_1) \cup S(u_2))$ na kraj puta $S(u_1)$ ili $S(u_2)$. Ako u grafu postoji list različit od u_1 i u_2 označimo ga s u_3. Sada iz G uklonimo brid incidentan s u_3 i dodamo brid između vrhova u_2 i u_3. Sada u_3 postaje novi kraj puta $S(u_3)$. Ako sada u grafu postoji list različit od u_1 i u_3, analognim postupkom taj list "dodamo" na kraj puta $S(u_1)$ i nastavljamo dalje alternativno dodavajući vrhove na kraj ova dva puta dok ne dobijemo graf $G' = S_1 \cup S_2$.

Taj graf je očito put, a c je njegov centar.

Pri svakom pomicanju vrhova, udaljenost vrha do centra c je ili ostala ista ili se povećala, pa i vrijednost $t_\lambda(c)$ ili ostaje ista ili se poveća. Stoga imamo

$$mt_\lambda(G) \leqslant t_\lambda(c) \leqslant mt_\lambda(G') = mt_\lambda(P_n),$$

i time je tvrdnja dokazana. ■

Napomena 2.6 *Za gornju ogradu vrijednosti minimalne transmisije za* $\lambda \in \langle -1, 0\rangle$*, tj. za vrijednost transmisije u centru puta s n vrhova, jednostavnim računom dobivamo interval u kojem se ta vrijednost nalazi. Za vrijednost sume za n neparan vrijedi*

$$1 + \int_2^{\frac{n-1}{2}+1} (x-1)^{\lambda+1} dx \leq \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^{\lambda+1} \leq 1 + \int_2^{\frac{n-1}{2}+1} x^{\lambda+1} dx,$$

odakle slijedi

$$\frac{2^{\lambda+2}(\lambda+1)+(n-1)^{\lambda+2}}{2^{\lambda+1}(\lambda+2)} \leq mt_\lambda(P_n) \leq \frac{2^{\lambda+2}(\lambda+2-2^{\lambda+2})+(n+1)^{\lambda+2}}{2^{\lambda+1}(\lambda+2)}.$$

Za vrijednost sume kod paranog n vrijedi analogan izraz, pa slijedi da je za paran n

$$\frac{2^{\lambda+2}(\lambda+1)+(n-2)^{\lambda+2}}{2^{\lambda+1}(\lambda+2)}+\left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda+1} \leq mt_\lambda(P_n) \leq \frac{2^{\lambda+2}(\lambda+2-2^{\lambda+2})+n^{\lambda+2}}{2^{\lambda+1}(\lambda+2)}+\left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda+1}.$$

Maksimalna transmisija

Teorem 2.7 *Za $\lambda \in \langle -\infty, -1\rangle$ i za svaki graf G s n vrhova vrijedi*

$$n-1 \geq Mt_\lambda(G) \geq \begin{cases} 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^{\lambda+1}, & n \text{ neparan;} \\ 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} i^{\lambda+1}+\left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda+1}, & n \text{ paran.} \end{cases}$$

Gornja ograda se postiže za potpun graf (bilo koji njegov vrh), a donja za put (u centru puta).

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu Teorema 2.5. ■

Napomena 2.8 *Analogno razmatranju u Napomeni 2.6, za $\lambda \in \langle -\infty, -1\rangle$ imamo*

za neparan n:

$$\frac{2^{\lambda+2}(\lambda+2-2^{\lambda+2})+(n+1)^{\lambda+2}}{2^{\lambda+1}(\lambda+2)} \leq Mt_\lambda(P_n) \leq \frac{2^{\lambda+2}(\lambda+1)+(n-1)^{\lambda+2}}{2^{\lambda+1}(\lambda+2)},$$

za paran n:

$$\frac{2^{\lambda+2}(\lambda+2-2^{\lambda+2})+n^{\lambda+2}}{2^{\lambda+1}(\lambda+2)}+\left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda+1} \leq Mt_\lambda(P_n) \leq \frac{2^{\lambda+2}(\lambda+1)+(n-2)^{\lambda+2}}{2^{\lambda+1}(\lambda+2)}+\left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda+1}.$$

Teorem 2.9 *Za $\lambda \in \langle -1, 0\rangle$ i za svaki graf G s n vrhova vrijedi*

$$n-1 \leqslant Mt_\lambda(G) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} i^{\lambda+1}.$$

Donja ograda se postiže za potpun graf (bilo koji njegov vrh), a gornja za put (u kraju puta).

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu Teorema 2.3. ■

Napomena 2.10 *Analogno razmatranju u Napomeni 2.4, za* $\lambda \in \langle -1, 0\rangle$ *imamo*

$$\frac{\lambda + 1 + (n-1)^{\lambda+2}}{\lambda + 2} \leq Mt_\lambda(P_n) \leq \frac{\lambda + 2 + n^{\lambda+2} - 2^{\lambda+2}}{\lambda + 2}.$$

2.1.2 Međupoloženost

Prvo dokažimo pomoćnu lemu.

Lema 2.11 *Za sve* $\lambda < 0$ *i za dani* $n \in \mathbb{N}$*, među svim grafovima s* n *vrhova, bilo koji graf* G *za koji je vrijednost* $c_\lambda(G)$ *maksimalna je stablo.*

Dokaz. Neka je G graf takav da je $c_\lambda(G)$ maksimalna i neka je u vrh u G za koji se postiže maksimalna mađupoloženost. Pokažimo da je G stablo. Pretpostavimo suprotno. Neka je G' Dijkstrino stablo s korijenom u vrhu u. Kako je G' stablo vrijedi da je $\frac{s_{uv}^{kl}}{s^{kl}} = 1$, za sve $k, l \in V$ koji su povezani putom koji prolazi bridom uv. Iz definicije G' jasno je da su udaljenosti između u i bilo kojeg drugog vrha iste u G i G'. No tada je vrijednost $c_\lambda(u)$ u G' veća ili jednaka vrijednosti $c_\lambda(u)$ u G, što je protivno pretpostavci. ■

Minimalna međupoloženost

Teorem 2.12 *Za* $\lambda < 0$ *i za svaki graf* G *s* n *vrhova vrijedi*

$$mc_\lambda(G) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} i^\lambda.$$

Jednakost vrijedi za put (u kraju puta).

Dokaz. Neka je G graf za koji je $mc_\lambda(G)$ minimalna i neka je u vrh takav da vrijedi $c_\lambda(u) = mc_\lambda(G)$. Primijetimo da vrijedi

$$mc_\lambda(G) \geqslant \sum_{v \in V \setminus \{u\}} d\,(u,v)^\lambda\,,$$

jer je suma na desnoj strani zbroj doprinosa svih putova koji počinju u u.

Iz Teorema 2.3, zbog $\lambda - 1 < -1$, imamo:

$$\begin{aligned} mc_\lambda(G) &\geqslant \sum_{v \in V \setminus \{u\}} d\,(u,v)^\lambda = t_{\lambda-1}\,(u) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{n-1} i^{(\lambda-1)+1} = \sum_{i=1}^{n-1} i^\lambda, \end{aligned}$$

pa je time tvrdnja dokazana. ■

Napomena 2.13 *Analogno razmatranju u Napomeni 2.4, za $\lambda < 0$ imamo*

$$\frac{\lambda + 1 + (n-1)^{\lambda+2}}{\lambda + 2} \leq mc_\lambda(P_n) \leq \frac{\lambda + 2 + n^{\lambda+2} - 2^{\lambda+2}}{\lambda + 2}.$$

Teorem 2.14 *Za $\lambda \in \langle -\infty, -1\rangle$ i za svaki graf G s n vrhova vrijedi*

$$mc_\lambda(G) \leqslant n - 1.$$

Jednakost vrijedi za potpun graf (bilo koji njegov vrh).

Dokaz. Za dani graf G s n vrhova prosječna se vrijednost međupoloženosti njegovih vrhova može ograničiti. Iz Leme 2.1 i činjenice da je $\lambda+1 < 0$ slijedi

$$\frac{1}{n}\sum_{u \in V} c_\lambda(u) = \frac{2}{n} W_{\lambda+1}(G) = \frac{2}{n} \sum_{\{k,l\} \subseteq V} d(k,l)^{\lambda+1} \leqslant \frac{2}{n} \sum_{\{k,l\} \subseteq V} 1 = n - 1.$$

Kako je minimalna međupoloženost manja ili jednaka prosječnoj međupoloženosti, tvrdnja slijedi. Jednakost će vrijediti ako i samo ako je $d(k,l) = 1$, za sve parove vrhova k, l, odnosno točno u slučaju kad je G potpun graf. ■

Traženje gornje ograde minimalne međupoloženosti za $\lambda \in \langle -1, 0\rangle$ se pokazalo kao mnogo teži problem. Riješili smo ga samo za slučaj 2-povezanih grafova, a općenito postavljamo slutnju:

Slutnja 2.15 *Za $\lambda \in \langle -1, 0\rangle$ i za svaki graf G s $n \geq 3$ vrhova vrijedi*

$$mc_\lambda(G) \leqslant \begin{cases} 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^{\lambda+1}, \ n \text{ neparan;} \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} i^{\lambda+1} + \left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda+1}, \ n \text{ paran.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Jednakost vrijedi za ciklus (bilo koji njegov vrh).

Napomena 2.16 *Prethodna slutnja je istinita u slučaju kad je G 2-povezan graf. Da bismo to dokazali treba nam pomoćna lema.*

Lema 2.17 *Neka je $n \geqslant 3$, $\lambda \in \langle -1, 0\rangle$ i neka je S skup nizova*

$$\left(x_1, x_2, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor}\right) \in \mathbb{N}^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

takvih da vrijedi $x_1 + x_2 + ... + x_{\lfloor n/2 \rfloor} = n - 1$ i da postoji $k \in \{1, ..., \lfloor n/2 \rfloor\}$ takav da je $x_i \geq 2$ za svaki $i < k$, $x_k \in \{0, 1\}$ i $x_i = 0$ za svaki $i > k$.

Neka je S' skup nizova iz S oblika $\left(y_1, y_2, ..., y_{\lfloor n/2 \rfloor}\right)$ takvih da postoji $k \in \{1, ..., \lfloor n/2 \rfloor\}$ takav da je $x_k \in \{0, 1\}$, $x_i = 2$ za svaki $1 \leq i < k$ i $x_i = 0$ za svaki $i > k$.

Neka je $T_n\left(x_1, x_2, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor}\right)$ definiran sa

$$T_n\left(x_1, x_2, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor}\right) = \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} x_i \cdot i^{\lambda+1}.$$

Tada vrijedi

$$\max\left\{T_n(s) : s \in S\right\} = \max\left\{T_n(s) : s \in S'\right\}.$$

Štoviše, maksimalna vrijednost M_n od T_n u S' je:

$$\begin{cases} 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^{\lambda+1}, & n \text{ neparan;} \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} i^{\lambda+1} + \left(\dfrac{n}{2}\right)^{\lambda+1}, & n \text{ paran.} \end{cases}$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je $\left(x_1, x_2, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor}\right) \notin S'$ niz koji maksimizira T_n u S. Tada postoji k takav da je $x_k > 2$. Primijetimo da vrijedi $k < \lfloor n/2 \rfloor$. Sada je

$$\left(x_1, x_2, ..., x_k - 1, x_{k+1} + 1, x_{k+2}, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor}\right) \in S.$$

Slijedi

$$0 \leq T_n\left(x_1, x_2, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor}\right) - T_n\left(x_1, x_2, ..., x_k - 1, x_{k+1} + 1, x_{k+2}, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor}\right) =$$
$$= k^{\lambda+1} - (k+1)^{\lambda+1} < 0,$$

što je kontradikcija. Dakle, niz $s \in S'$ koji maksimizira T_n je $(2, 2, ..., 2, 0)$ za n neparan i $(2, 2, ...2, 1)$ za n paran. Lako se vidi da je vrijednost T_n za te nizove $2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^{\lambda+1}$ u prvom slučaju i $2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} i^{\lambda+1} + \left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda+1}$ u drugom slučaju. ■

Dokaz Napomene 2.16. Označimo desnu stranu nejednakosti

$$mc_\lambda(G) \leqslant \begin{cases} 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^{\lambda+1}, \ n \text{ neparan;} \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} i^{\lambda+1} + \left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda+1}, \ n \text{ paran.} \end{cases}$$

s $cyc_\lambda(n)$ i pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji 2-povezan graf G s n vrhova takav da vrjedi $mc_\lambda(G) > cyc_\lambda(n)$. Odatle slijedi $c_\lambda(u) > cyc_\lambda(n)$, za sve $u \in V$. Stoga vrijedi

$$\sum_{u \in V} t_\lambda(u) = 2W_{\lambda+1}(G) = \sum_{u \in V} c_\lambda(u) > n \cdot cyc_\lambda(n),$$

pa postoji $w \in V$ takav da je $t_\lambda(w) > cyc_\lambda(n)$.

Neka je w_1 vrh s najvećom udaljenošću do vrha w i označimo $d(w, w_1) = D$. Jer je G 2-povezan vrijedi da za svaki $d < D$ postoje barem 2 vrha na udaljenosti d od w. Odatle se lako vidi da je $D \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Označimo s x_i broj vrhova na udaljenosti i od w i promotrimo niz $(x_1, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor})$. Ovaj niz je očito u skupu S definiranom u Lemi 2.17.

Slijedi $t_\lambda(w) \leq cyc(n)$, što je kontradikcija. ■

Napomena 2.18 *Za $\lambda \in \langle -1, 0\rangle$ i vrijednost $mc_\lambda(C_n)$ vrijedi analogan rezultat onom u Napomeni 2.6.*

Napomena 2.19 *U još jednom posebnom slučaju, kada postoji vrh u_0 takav da ne postoje vrhovi $u, v \neq u_0$ takvi da najkraći put između u i v prolazi kroz u_0, vrijedi stroga nejednakost u nejednakosti iz Slutnje 2.15.*

Dokaz. Primijetimo da vrijedi $c_\lambda(u_0) = \sum_{v \in V\setminus\{u_0\}} d(u_0, v)^\lambda \leqslant n-1$ jer samo putovi koji počinju u u_0 doprinose $c_\lambda(u_0)$. Slijedi

$$mc_\lambda(G) \leqslant c_\lambda(u_0) = \sum_{v \in V\setminus\{u_0\}} d(u_0, v)^\lambda \leqslant n - 1 < cyc_\lambda(n),$$

i time je tvrnja dokazana. ■

Maksimalna međupoloženost

Teorem 2.20 *Za $\lambda < 0$ i za svaki graf G s n vrhova vrijedi*

$$Mc_\lambda(G) \leqslant n - 1 + (n-1)(n-2) \cdot 2^\lambda.$$

Jednakost vrijedi za zvijezdu (u centru zvijezde).

Dokaz. Neka je G graf takav da je $c_\lambda(G)$ maksimalna i neka je u_0 vrh takav da vrijedi $c_\lambda(u_0) = Mc_\lambda(G)$. Ako postoji vrh $v \in V\setminus\{u_0\}$ takav da u_0 i v nisu susjedni onda dodavanjem brida u_0v povećavamo $c_\lambda(u_0)$ jer se neke od udaljenosti smanjuju, a razlomci $\frac{s^{kl}_{u_0v}}{s^{kl}}$ se ili povećavaju ili ostaju isti. To je protivno pretpostavci o maksimalnosti $c_\lambda(u_0)$, pa pretpostavimo stoga da je u_0 susjedan svim ostalim vrhovima u grafu.

Ako postoje vrhovi $v, w \in V\setminus\{u_0\}$ koji su susjedni, onda se lako vidi da brisanjem brida vw povećavamo $c_\lambda(u_0)$, slično kao prije. Slijedi da je G zvijezda, a u_0 njezin centar. Napokon imamo

$$\begin{aligned} Mc_\lambda(S_n) = c_\lambda(u_0) &= \sum_{v\in N(u_0)} \sum_{k,l\in V} \frac{s^{kl}_{u_0 v}}{s^{kl}} \cdot d(k,l)^\lambda \\ &= \sum_{v\in V\setminus\{u_0\}} d(u_0,v)^\lambda + 2 \sum_{v,w\in V\setminus\{u_0\}} d(v,w)^\lambda \\ &= n-1+(n-1)(n-2)\cdot 2^\lambda, \end{aligned}$$

što dokazuje tvrdnje. ■

Slutnja 2.21 *Za $\lambda \in \langle -\infty, -1\rangle$ i za svaki graf G s n vrhova vrijedi*

$$Mc_\lambda(G) \geqslant \begin{cases} 2\cdot \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^{\lambda+1}, \ n \text{ neparan;} \\ 2\cdot \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} i^{\lambda+1} + \left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda+1}, \ n \text{ paran.} \end{cases}$$

Jednakost vrijedi za ciklus (bilo koji njegov vrh).

Napomena 2.22 *Na sličan način, analogno kao u Napomenama 2.16 i 2.19 dokažu se posebni slučajevi.*

Napomena 2.23 *Za $\lambda \in \langle -\infty, -1\rangle$ i vrijednost $Mc_\lambda(C_n)$ vrijedi analogan rezultat onom u Napomeni 2.6.*

Teorem 2.24 *Za $\lambda \in \langle -1, 0\rangle$ i za svaki graf G s n vrhova vrijedi*

$$Mc_\lambda(G) \geqslant n-1.$$

Jednakost vrijedi za potpun graf (bilo koji njegov vrh).

Dokaz. Za dani graf G može se ograničiti prosječna međupoloženost njegovih vrhova. Koristeći Lemu 2.1 i činjenicu da vrijedi $\lambda + 1 > 0$ imamo

$$\frac{1}{n}\sum_{u\in V} c_\lambda(u) = \frac{2}{n} W_{\lambda+1}(G) = \frac{2}{n} \sum_{\{k,l\}\subseteq V} d(k,l)^{\lambda+1} \geqslant \frac{2}{n} \sum_{\{k,l\}\subseteq V} 1 = n-1.$$

Kako je maksimalna međupoloženost veća ili jednaka prosječnoj međupoloženosti, tvrdnja slijedi. U potpunom grafu za sve vrhove $u \neq v$ vrijedi $d(u,v) = 1$, pa jednakost vrijedi za potpuni graf. ■

2.2 $(1, \alpha)$-težinski mrežni deskriptori

U ovom dijelu pretpostavljamo da se komunikacija između vrhova koji nisu susjedni smanjuje proporcionalno parametru α, u usporedbi s komunikacijom između susjednih vrhova, za neki $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$.

Za $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, definiramo $(1, \alpha)$-**težinske mrežne deskriptore** na sljedeći način

$$t_\alpha(u) = d(u) + \sum_{v \notin N(u)} d(u, v)\alpha,$$

Nadalje,

$$c_\alpha(u) = \sum_{v \in N(u)} \sum_{\{k,l\} \subseteq V} \frac{s_{uv}^{kl}}{s^{kl}} \cdot \begin{cases} 1, & \text{za } d(k,l) = 1; \\ \alpha, & \text{za } d(k,l) > 1, \end{cases}$$

$$\rho_\alpha(u) = \frac{c_\alpha(u)}{t_\alpha(u)},$$

$$\nu_\alpha(u) = c_\alpha(u) - t_\alpha(u).$$

Primijetimo da za $\alpha = 0$ dobivamo

$$t_\alpha(u) = c_\alpha(u) = d(u),$$

za svaki vrh $u \in V$, a za $\alpha = 1$ imamo standardne definicije transmisije, međupoloženosti, vršne produktivnosti i vršne profitabilnosti [14, 75].

Analogno kao i za $d(u, v)^\lambda$-težinske mrežne deskriptore definiramo

$$mc_\alpha(G) = \min\{c_\alpha(u) : u \in V\} \quad Mc_\alpha(G) = \max\{c_\alpha(u) : u \in V\}$$

$$mt_\alpha(G) = \min\{t_\alpha(u) : u \in V\} \quad Mt_\alpha(G) = \max\{t_\alpha(u) : u \in V\}$$

$$m\rho_\alpha(G) = \min\{\rho_\alpha(u) : u \in V\} \quad M\rho_\alpha(G) = \max\{\rho_\alpha(u) : u \in V\}$$

$$m\nu_\alpha(G) = \min\{\nu_\alpha(u) : u \in V\} \quad M\nu_\alpha(G) = \max\{\nu_\alpha(u) : u \in V\}$$

Analizirat ćemo donje i gornje ograde tih vrijednosti za sve $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, te ćemo u svakom slučaju dati primjer grafa, i vrha u tom grafu, za koji se ta vrijednost postiže.

Prvo, analogan rezultat Lemi 2.1.

Lema 2.25 *Za svaki graf G vrijedi*

$$\sum_{u\in V} t_\alpha(u) = \sum_{u\in V} c_\alpha(u).$$

Dokaz. Vrijedi

$$\sum_{u\in V} t_\alpha(u) = \sum_{u\in V} d(u) + \sum_{u\in V}\sum_{v\notin N(u)} d(u,v)\alpha.$$

Dokažimo da je suma međupoloženosti svih vrhova u G jednaka toj vrijednosti. Imamo

$$\begin{aligned}\sum_{u\in V} c_\alpha(u) &= \sum_{u\in V}\sum_{v\in N(u)}\sum_{\substack{\{k,l\}\subseteq V\\ d(k,l)=1}} \frac{s_{uv}^{kl}}{s^{kl}} + \sum_{u\in V}\sum_{v\in N(u)}\sum_{\substack{\{k,l\}\subseteq V\\ d(k,l)>1}} \frac{s_{uv}^{kl}}{s^{kl}}\alpha = \\ &= \sum_{\substack{\{k,l\}\subseteq V\\ d(k,l)=1}} \frac{1}{s^{kl}} \sum_{u\in V}\sum_{v\in N(u)} s_{uv}^{kl} + \sum_{\substack{\{k,l\}\subseteq V\\ d(k,l)>1}} \frac{1}{s^{kl}}\alpha \sum_{u\in V}\sum_{v\in N(u)} s_{uv}^{kl}.\end{aligned}$$

U prvoj sumi, s_{uv}^{kl} iznosi 1 samo kada vrijedi $\{u, v\} = \{k, l\}$, a u ostalim slučajevima je 0. s^{kl} uvijek iznosi 1 jer su k i l susjedi. Stoga je prva suma jednaka $\sum_{u\in V} d(u)$ jer $\{u, v\} = \{k, l\}$ vrijedi kad promatramo u i sve njegove susjede. U drugoj sumi $s_{uv}^{kl} = s_{uv}^{lk}$ iznosi 1 kada brid uv leži na kl-putu. Broj bridova na kl-putu je $d(k, l)$, a postoji s^{kl} kl-putova, pa imamo

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\{k,l\}\subseteq V\\ d(k,l)>1}} \frac{1}{s^{kl}}\alpha \sum_{u\in V}\sum_{v\in N(u)} s_{uv}^{kl} &= \sum_{\substack{\{k,l\}\subseteq V\\ d(k,l)>1}} \frac{\alpha}{s^{kl}} \cdot 2 \cdot d(k,l) \cdot s^{kl} = \\ &= \sum_{\substack{\{k,l\}\subseteq V\\ d(k,l)>1}} 2\cdot\alpha\cdot d(k,l) = \sum_{u\in V}\sum_{v\notin N(u)} d(u,v)\alpha.\end{aligned}$$

Slijedi

$$\sum_{u\in V} c_\alpha(u) = \sum_{u\in V} d(u) + \sum_{u\in V}\sum_{v\notin N(u)} d(u,v)\alpha,$$

i time je tvrdnja dokazana. ■

Napomena 2.26 *S obzirom na rezultat u Lemi 2.25 prirodno je označiti*

$$W_\alpha(G) = \frac{1}{2}\sum_{u\in V} t_\alpha(u) = \frac{1}{2}\sum_{u\in V} c_\alpha(u).$$

2.2.1 Transmisija

Lema 2.27 *Postoji stablo s n vrhova za koje se postižu minimalna i maksimalna vrijednost transmisije svih grafova s n vrhova.*

Dokaz. Neka je G graf za koji je $t_\alpha(G)$ maksimalna i neka je u vrh u G u kojem se ta vrijednost postiže. Neka je T Dijkstrino stablo vrha u. Lako se vidi da je $t_\alpha(T) \geq t_\alpha(G)$. Kako je $t_\alpha(G)$ maksimalna, vrijednosti su jednake. Da tvrdnja vrijedi i za minimalnu transmisiju jasno je iz definicije transmisije i Dijkstrinog stabla. ■

Teorem 2.28 *Neka je G graf s n vrhova i $\alpha \in \langle 0,1\rangle$. Vrijedi*

$$mt_\alpha(G) \geq \begin{cases} 1+2\alpha(n-2), & \alpha < \frac{1}{2}; \\ n-1, & \alpha \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Jednakost vrijedi za zvijezdu (u centru zvijezde) u slučaju $\alpha \geq \frac{1}{2}$, te za zvijezdu (bilo koji list zvijezde), inače.

Dokaz. Prema Lemi 2.27 možemo pretpostaviti da je graf G koji minimizira t_α stablo. Neka je G stablo i neka je u vrh za koji se postiže minimalna transmisija u G. Promotrimo graf G' koji nastaje iz G na sljedeći način. Uklonimo sve vrhove na udaljenosti 3 ili više od u i dodajmo toliko vrhova

kao susjede bilo kojem susjedu od u, tako da udaljenost od svakog od tih vrhova do u bude 2. Očito se vrijednost $t_\alpha(u)$ smanjila, sa svakim na ovaj način 'pomaknutim' vrhom. Neka je k stupanj od u. Vrijedi $t_\alpha(u) = k + 2\alpha(n-1-k)$.

Definirajmo sada $f(k) = k + 2\alpha(n-1-k)$, gdje je $k \in [1, n-1]$, a n i α su unaprijed definirane konstante, $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi $f'(k) = 1 - 2\alpha$. To znači da je za $\alpha < \frac{1}{2}$ funkcija rastuća i minimum se postiže za minimalni k, tj. za $k = 1$. A za $\alpha > \frac{1}{2}$ funkcija je padajuća, pa se minimum postiže za $k = n - 1$.

Sada imamo:

Za $k = 1$ vrijedi $t_\alpha(u) = k + 2\alpha(n-1-k) = 1 + 2\alpha(n-2)$, a ta vrijednost se postiže za bilo koji list zvijezde.

Za $k = n - 1$ vrijedis $t_\alpha(u) = k + 2\alpha(n-1-k) = n - 1$, a ta vrijednost se postiže za centar zvijezde. ■

Teorem 2.29 *Neka je G graf s n vrhova i $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Vrijedi*

$$Mt_\alpha(G) \leq \begin{cases} n-1, & \alpha \leq \dfrac{2}{n+1}; \\ 1 + \alpha \cdot \dfrac{n^2-n-2}{2} & \alpha > \dfrac{2}{n+1}. \end{cases}$$

Jednakost vrijedi za put (u kraju puta) u slučaju $\alpha > \frac{2}{n+1}$, a za zvijezdu (u centru zvijezde), inače.

Dokaz. Prema Lemi 2.27 možemo pretpostaviti da je graf G koji maksimizira t_α stablo. Neka je G stablo i v vrh za koji je vrijednost transmisije maksimalna u G. Promotrimo najdulji put u G koji sadrži v. Ako je v kraj tog puta, označimo s u drugi kraj istog puta, a ako v nije kraj puta neka je u kraj tog puta čija je udaljenost do v veća. Ako G sadrži list $w \neq u$ i

$d(v,w) > 1$ uklonimo vrh w i dodajmo novi vrh kao susjed vrhu u. Nastavimo taj postopak sa svim listovima u G koji su na udaljenosti većoj od 1 od v. Označimo duljinu tako dobivenog puta s k. Vrijedi

$$n = k + d(v).$$

U svakom koraku postupka vrh koji smo dodali bio je na većoj udaljenosti od v od uklonjenog vrha, pa je u svakom koraku transmisija $t_\alpha(v)$ rasla. Imamo

$$t_\alpha(v) = \alpha \cdot \sum_{i=2}^{k} i + (n-k) = \alpha \cdot \frac{k^2+k-2}{2} + n - k.$$

Sada definiramo $f(k) = \alpha \cdot \dfrac{k^2+k-2}{2} + n - k$, gdje su α i n konstante zadanih svojstava i $k \in [1, n-1]$. Jedina ekstremna vrijednost ove funkcije je minimum i postiže se za $k = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{2}$. Odatle zaključujemo da funkcija postiže maksimum na rubovima domene, tj. za $k = 1$ ili $k = n-1$.

Za $k = n-1$ imamo $t_\alpha(v) = \alpha \cdot \dfrac{n^2-n-2}{2} + 1$, što je vrijednost transmisije kraja puta od n vrhova.

Za $k = 1$ imamo $t_\alpha(v) = \alpha \cdot \dfrac{k^2+k-2}{2} + n - k = n - 1$, što je vrijednost transmisije centra zvijezde s n vrhova.

ograda parametra α koja daje jednu ili drugu vrijednost se dobije iz izraza

$$\alpha \cdot \frac{n^2-n-2}{2} + 1 = n - 1,$$

i iznosi $\alpha = \dfrac{2}{n+1}$. ■

Lema 2.30 *Za $n, d \in \mathbb{N}$ i dovoljno velik n vrijedi*

$$d^2 - 2d^{1.525} \leq n \leq d^2 + 1 \implies \sqrt{n-1} \leq d \leq \sqrt{n} + n^{0.4}.$$

Dokaz. Iz $n \leq d^2 + 1$ očito slijedi $\sqrt{n-1} \leq d$. Dokažimo drugi dio. Pretpostavimo suprotno, neka je $d > \sqrt{n} + n^{0.4}$. Slijedi

$$\left(\sqrt{n} + n^{0.4}\right)^2 - 2(\sqrt{n} + n^{0.4})^{1.525} < d^2 - 2d^{1.525} \leq n.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} n &> \left(\sqrt{n}+n^{0.4}\right)^2 - 2(\sqrt{n}+n^{0.4})^{1.525} = \\ &= n + 2\sqrt{n}n^{0.4} + n^{0.8} - 2(\sqrt{n}+n^{0.4})^{1.525} \geq \\ &\geq n + 2n^{0.9} + n^{0.8} - 2(2n^{0.5})^{1.525} \geq \\ &\geq n + 2n^{0.9} - 2^{2.525}n^{0.7625} = \\ &= n + 2n^{0.7625}(n^{0.1375} - 2^{1.525}) > n, \text{ za dovoljno velik } n. \end{aligned}$$

Dobivena je kontradikcija, pa tvrdnja vrijedi. ■

Napomena 2.31 *Graf s n vrhova za koji je n dovoljno velik da vrijedi uvjet iz Leme 2.30 označavat ćemo s $H_{n,d}$.*

Teorem 2.32 *Neka je G graf s n vrhova i $\alpha \in \langle 0,1\rangle$. Vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{mMt_\alpha(n)}{\sqrt{n}} - \min\{\sqrt{n}, 2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\}\right) = 0,$$

gdje je $mMt_\alpha(n)$ najmanja vrijednost maksimalne transmisije za graf s n vrhova. Jednakost vrijedi za potpun graf (bilo koji njegov vrh) kad je $\alpha \geq \frac{1}{2}$ i za $H_{n,d}$ kad je $\alpha < \frac{1}{2}$.

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati kroz dva slučaja, ovisno o vrijednosti parametra α.

Za $\alpha \geq \frac{1}{2}$ vrijedi $\min\{\sqrt{n}, 2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\} = \sqrt{n}$, a za $\alpha < \frac{1}{2}$ vrijedi $\min\{\sqrt{n}, 2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\} = 2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1$.

1) Neka je $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Lako se vidi da se najmanja vrijednost maksimalne transmisije postiže za potpuni graf. Za $u \in V(K_n)$ vrijedi $Mt_\alpha(u) = n-1$. Slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{mMt_\alpha(n)}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{Mt_\alpha(K_n)}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) = 0.$$

2) Neka je $\alpha < \frac{1}{2}$. Sada vrijedi $\min\{\sqrt{n}, 2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\} = 2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1$.

Prvo ćemo pokazati da je

$$\frac{mMt_\alpha(n)}{\sqrt{n}} - \left(2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\right) \geq \frac{(1-2\alpha)(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})-3\alpha}{\sqrt{n}}, \text{ za } n \geq \left(\frac{1-2\alpha}{\alpha}\right)^2.$$

Neka je G_n graf koji minimizira maksimalnu transmisiju t_α, u familiji grafova s n vrhova i neka je u_n vrh koji maksimizira t_α u G_n. Neka je $d(n) = d(u_n)$. Ako je $d(n) \geq \sqrt{n-1}$, reći ćemo da je G_n tipa A, a inače kažemo da je G_n tipa B. Sada definiramo

$$mMAt_\alpha(n) = \begin{cases} +\infty, & d(n) < \sqrt{n-1} \\ mMt_\alpha(n) & d(u_n) \geq \sqrt{n-1} \end{cases}$$

$$mMBt_\alpha(n) = \begin{cases} mMt_\alpha(n), & d(n) < \sqrt{n-1} \\ +\infty, & d(u_n) \geq \sqrt{n-1} \end{cases}$$

Očito vrijedi

$$mMt_\alpha(n) = \min\left\{mMAt_\alpha(n), mMBt_\alpha(n)\right\}.$$

Prvo dokažimo da je

$$\frac{mMAt_\alpha(n)}{\sqrt{n}} - \left(2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\right) \geq \frac{(1-2\alpha)(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})-3\alpha}{\sqrt{n}}$$

za svaki n.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji n takav a vrijedi

$$\frac{mMAt_\alpha(n)}{\sqrt{n}} - \left(2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\right) < \frac{(1-2\alpha)(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})-3\alpha}{\sqrt{n}}.$$

Tada, jer je G_n tipa A, vrijedi $d\,(n) \geq \sqrt{n-1}$. Imamo

$$\begin{aligned} mMAt_\alpha(n) &\geq d\,(n) + (n - d\,(n) - 1)2\alpha \geq (n-1)2\alpha + (1-2\alpha)d\,(n) \geq \\ &\geq (n-1)2\alpha + (1-2\alpha)\sqrt{n-1}. \end{aligned}$$

Označimo $f_1(n) = (n-1)2\alpha + (1-2\alpha)\sqrt{n-1}$, pa imamo $mMAt_\alpha(n) \geq f_1(n)$. Nadalje

$$\begin{aligned} &\frac{mMAt_\alpha(n)}{\sqrt{n}} - \left(2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\right) \geq \frac{f_1(n)}{\sqrt{n}} - \left(2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\right) = \\ &\frac{(1-2\alpha)(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}) - 2\alpha}{\sqrt{n}} \geq \frac{(1-2\alpha)(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}) - 3\alpha}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

što je kontradikcija.

Sada dokažimo da vrijedi

$$\frac{mMBt_\alpha(n)}{\sqrt{n}} - \left(2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\right) \geq \frac{(1-2\alpha)(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}) - 3\alpha}{\sqrt{n}}$$

za svaki $n > \left(\frac{1+2\alpha}{\alpha}\right)^2$. Pretpostavimo suprotno, neka postoji $n > \left(\frac{1+2\alpha}{\alpha}\right)^2$ takav da je

$$\frac{mMBt_\alpha(n)}{\sqrt{n}} - \left(2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\right) < \frac{(1-2\alpha)(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}) - 3\alpha}{\sqrt{n}}.$$

Tada, jer je G_n tipa B, vrijedi $d\,(n) < \sqrt{n-1}$ i neka je $x = x\,(n)$ takav da je $x \in \langle 0, n-2\rangle$ i $d\,(n) = \sqrt{n-1-x}$, za neki graf G s n vrhova. Imamo

$$\begin{aligned} MBt_\alpha(G) &\geq d\,(n) + d\,(n)\,(d\,(n)-1)2\alpha + (n - d\,(n)^2 - 1)3\alpha = \\ &= d\,(n) + (3n - d\,(n)^2 - 2d\,(n) - 3)\alpha = \\ &= \sqrt{n-1-x} + (2n + x - 2\sqrt{n-1-x} - 2)\alpha. \end{aligned}$$

Neka je $h(x) = \sqrt{n-1-x} + (2n + x - 2\sqrt{n-1-x} - 2)\alpha$. Označimo s $p(n)$ vrijednost od $x \in \langle 0, n-2\rangle$, takvu da je vrijednost od $h(x)$ minimalna za $p(n)$. I neka je $q(n)$ funkcija za koju vrijedi $p(n) = n \cdot q(n) - 1$, $\dfrac{1}{n} <$

$q(n) < \dfrac{n-1}{n}$. Promatramo funkciju $f_2(n) = \sqrt{n-1-p(n)} + (2n + p(n) - 2\sqrt{n-1-p(n)} - 2)\alpha$. Očito je $mMBt_\alpha(n) \geq f_2(n)$.

Sada ćemo pokazati da za dovoljno velik n vrijedi $\dfrac{f_2(n)}{\sqrt{n}} - (2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1) + \frac{3\alpha}{\sqrt{n}} \geq 0$, odakle slijedi kontradikcija.

$$\frac{\sqrt{n-1-p(n)} + (2n + p(n) - 2\sqrt{n-1-p(n)} - 2)\alpha}{\sqrt{n}} - (2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1) + \frac{3\alpha}{\sqrt{n}} =$$
$$\frac{\sqrt{n(1-q(n))} + ((2+q(n))n - 2\sqrt{n(1-q(n))} - 3)\alpha}{\sqrt{n}} - (2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1) + \frac{3\alpha}{\sqrt{n}} =$$

$$= \sqrt{1-q(n)} + \left((2+q(n))\sqrt{n} - 2\sqrt{1-q(n)}\right)\alpha - (2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1) =$$

$$= \sqrt{1-q(n)} + (2+q(n))\sqrt{n}\alpha - 2\sqrt{1-q(n)}\alpha - 2\alpha\sqrt{n} + 2\alpha - 1 =$$

$$= \sqrt{1-q(n)} - 1 + q(n)\sqrt{n}\alpha + (1-\sqrt{1-q(n)})2\alpha =$$
$$= (\sqrt{1-q(n)} - 1)(1-2\alpha) + q(n)\sqrt{n}\alpha =$$
$$= q\left(n\right)\sqrt{n}\cdot\left(-\frac{(1-\sqrt{1-q(n)})}{q\left(n\right)\sqrt{n}}\cdot(1-2\alpha)+\alpha\right)$$
$$= q\left(n\right)\sqrt{n}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\sqrt{1-q(n)}\right)}\cdot(1-2\alpha)+\alpha\right)$$
$$\geq q\left(n\right)\sqrt{n}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot(1-2\alpha)+\alpha\right) \geq$$
$$\geq q\left(n\right)\sqrt{n}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1-2\alpha}{\alpha}\right)^2}}\cdot(1-2\alpha)+\alpha\right) = 0$$

Pokazali smo $\dfrac{f_2(n)}{\sqrt{n}} - (2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1) \geq 0$ za dovoljno velik n, pa slijedi $\dfrac{mMBt_\alpha(n)}{\sqrt{n}} - (2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1) \geq 0$, za dovoljno velik n.

Iz $mMt_\alpha(n) = \min\{mMAt_\alpha(n), mMBt_\alpha(n)\}$ slijedi

$$\frac{mMt_\alpha(n)}{\sqrt{n}} - \left(2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\right) \geq \frac{(1-2\alpha)(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})-2\alpha}{\sqrt{n}}.$$

Sada prema rezultatima iz [71], postoji dovoljno velik n_0 takav da za bilo koji $n \geq n_0$, postoji d-regularni graf dijametra 2, s n vrhova, i vrijedi $d^2 - 2d^{1.525} \leq n \leq d^2 + 1$. Neka je G_n takav graf s n vrhova, i $d(n)$ stupanj njegovih vrhova.

Očito vrijedi $Mt_\alpha(G_n) = d(n)+(n-d(n)-1)2\alpha = (n-1)2\alpha+(1-2\alpha)d(n)$. Za dovoljno velik n sada imamo

$$\begin{aligned}\frac{(1-2\alpha)(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})-2\alpha}{\sqrt{n}} &\leq \frac{mMt_\alpha(n)}{\sqrt{n}} - \left(2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\right) \leq \\ &\leq \frac{Mt_\alpha(G_n)}{\sqrt{n}} - \left(2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\right). \qquad (1)\end{aligned}$$

Pokazat ćemo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{Mt_\alpha(G_n)}{\sqrt{n}} - \left(2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\right)\right) = 0 \quad \text{i}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1-2\alpha)(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})-2\alpha}{\sqrt{n}}\right) = 0.$$

Za G_n imamo $n \leq d(n)^2 + 1$, pa je stoga $d(n) \geq \sqrt{n-1}$. Nadalje,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{Mt_\alpha(G_n)}{\sqrt{n}} - \left(2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\right)\right) =$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)2\alpha+(1-2\alpha)d(n)}{\sqrt{n}} - \left(2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\right)\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(2\alpha\sqrt{n} - \frac{2\alpha}{\sqrt{n}} + \frac{d(n)}{\sqrt{n}} - \frac{2\alpha d(n)}{\sqrt{n}} - 2\alpha\sqrt{n} + 2\alpha - 1\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty}(1-2\alpha)\left(\frac{d(n)}{\sqrt{n}} - 1\right).\end{aligned}$$

Sada želimo dokazati $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d(n)}{\sqrt{n}}-1\right)=0$. Iz $d(n)^2-2d(n)^{1.525}\leq n\leq d(n)^2+1$ prema Lemi 2.30 slijedi $\sqrt{n-1}\leq d(n)\leq\sqrt{n}+n^{0.4}$ za dovoljno velik n. Vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}-1\right)=0 \text{ i } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+n^{0.4}}{\sqrt{n}}-1\right)=0$$

pa prema Teoremu o uklještenju slijedi $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{\sqrt{n}}-1\right)=0$.

S druge strane, imamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1-2\alpha)(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})-2\alpha}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left((1-2\alpha)\left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}-1\right)-\frac{2\alpha}{\sqrt{n}}\right)=0.$$

Sada prema (1) i iz Teorema o uklještenju slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{mMt_\alpha(n)}{\sqrt{n}}-\left(2\alpha\left(\sqrt{n}-1\right)+1\right)\right)=0.$$

Slučaj 2) je dokazan, a time i početna tvrdnja. ■

Napomena 2.33 *Gornja ograda za mt_α ostaje otvoren problem u općem slučaju. Teorem 2.36 daje gornju granicu minimalne transmisije za 2-povezane grafove. Prvo dokažimo dvije leme.*

Lema 2.34 *Neka je $\alpha\in\langle 0,1\rangle$ i neka je S skup nizova $\left(x_1,x_2,...,x_{\lfloor n/2\rfloor}\right)$ takvih da vrijedi $x_1+x_2+...+x_{\lfloor n/2\rfloor}=n-1$ i postoji $k\in\{1,...,\lfloor n/2\rfloor\}$ takav da je $x_i\geq 2$ za svaki $i<k$ i $x_i=0$ za svaki $i>k$. Neka je S' skup nizova oblika $\left(y_1,y_2,...,y_{\lfloor n/2\rfloor}\right)$ takvih da postoji $k\in\{2,...,\lfloor n/2\rfloor\}$ takav da je $x_k\in\{0,1\}$, $x_i=2$ za svaki $2\leq i<k$ i $x_i=0$ za svaki $i>k$.*

Neka je $T_n\left(x_1,x_2,...,x_{\lfloor n/2\rfloor}\right)$ definiran sa

$$T_n\left(x_1,x_2,...,x_{\lfloor n/2\rfloor}\right)=x_1+\sum_{i=2}^{\lfloor n/2\rfloor}x_i\cdot i\cdot\alpha.$$

Tada vrijedi

$$\max\left\{T_n(s):s\in S\right\}=\max\left\{T_n(s):s\in S'\right\}.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka niz $\left(x_1, x_2, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor}\right) \notin S'$ maksimizira izraz T_n u S. Tada postoji $k \geq 2$ takav da je $x_k > 2$. Primijetimo da je $k < \lfloor n/2 \rfloor$. Vrijedi

$$\left(x_1, x_2, ..., x_k - 1, x_{k+1} + 1, x_{k+2}, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor}\right) \in S.$$

Sada slijedi

$$0 \leq T_n\left(x_1, x_2, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor}\right) - T_n\left(x_1, x_2, ..., x_k - 1, x_{k+1} + 1, x_{k+2}, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor}\right) =$$
$$= k \cdot \alpha - (k+1) \cdot \alpha < -\alpha,$$

što je kontradikcija. ■

Lema 2.35 *Neka je S' skup nizova definiran u Lemi 2.34. Tada je maksimalna vrijednost M_n od T_n u S':*
1) $n-1$, za $\alpha < \frac{4}{3+n}$ i n neparan ili $\alpha < \frac{4n-12}{n^2-8}$ i n paran;
2) $2 + \frac{1}{4}\alpha \cdot (n^2 - 9)$, za $\alpha \geq \frac{4}{3+n}$ i n neparan;
3) $2 + \frac{1}{4}\alpha \cdot (n^2 - 8)$, za $\alpha \geq \frac{4n-12}{n^2-8}$ i n paran.

Dokaz. Za $n \leq 4$ tvrdnja očito vrijedi. Stoga pretpostavimo $n \geq 5$. Lako se vidi da se 1) postiže za niz $(n-1, 0, ..., 0)$, 2) za niz $(2, ..., 2)$ i 3) za niz $(2, ..., 2, 1)$. Štoviše, lako se vidi da je $T_n(2, ..., 2) > T_n(n-1, 0, ..., 0)$ ako i samo ako $\alpha \geq \frac{4}{3+n}$, i da je $T_n(2, ..., 2, 1) > T_n(n-1, 0, ..., 0)$ ako i samo ako je $\alpha \geq \frac{4n-12}{n^2-8}$.

Slijedi da je dovoljno pokazati:

$$M_n \leq \begin{cases} \max\left\{n-1, 2 + \frac{1}{4}\alpha \cdot (n^2-9)\right\}, & n \text{ neparan;} \\ \max\left\{n-1, 2 + \frac{1}{4}\alpha \cdot (n^2-8)\right\}, & n \text{ paran.} \end{cases}$$

Razlikujemo dva slučaja:

1) $n - x_1$ je neparan.

Imamo

$$T_n\left(x_1, x_2, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor}\right) = x_1 + \sum_{i=2}^{\frac{n-1-x_1}{2}+1} 2 \cdot i \cdot \alpha = -\frac{5\alpha}{4} + \alpha n + \frac{\alpha n^2}{4} + x_1 - \alpha x_1 - \frac{\alpha n x_1}{2} + \frac{\alpha x_1^2}{4}.$$

Nađimo maksimum funkcije $f : [2, ..., n-1] \to \mathbb{R}$ definirane sa

$$f(x) = -\frac{5\alpha}{4} + \alpha n + \frac{\alpha n^2}{4} + x - \alpha x - \frac{\alpha n x}{2} + \frac{\alpha x^2}{4}.$$

Primijetimo da je $f''(x) = \alpha/2$, pa f nema lokalni maksimum. Stoga je maksimum $f(2)$ ili $f(n-1)$. Vrijedi $f(2) = 2 + \frac{1}{4}\alpha \cdot (n^2 - 9)$ i $f(n-1) = n-1$, pa je ovaj slučaj dokazan.

2) $n - x_1$ je paran.

Primijetimo da je u ovom slučaju $x_1 \neq n-1$. Vrijedi

$$\begin{aligned} &T_n\left(x_1, x_2, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor}\right) = \\ &= x_1 + \sum_{i=2}^{\frac{n-1-x_1-1}{2}+1} 2 \cdot i \cdot \alpha + \left[\left(\frac{n-1-x_1-1}{2} + 1\right) + 1\right] \cdot \alpha = \\ &= -\alpha + \alpha n + \frac{\alpha n^2}{4} + x_1 - \alpha x_1 - \frac{\alpha n x_1}{2} + \frac{\alpha x_1^2}{4}. \end{aligned}$$

Promotrimo dva podslučaja:

2.1) n je paran.

Promotrimo funkciju $g : [2, ..., n-2] \to \mathbb{R}$ definiranu sa

$$g(x) = -\alpha + \alpha n + \frac{\alpha n^2}{4} + x - \alpha x - \frac{\alpha n x}{2} + \frac{\alpha x^2}{4}.$$

Kao i kod funkcije f, primijetimo da za g vrijedi $g''(x) = \alpha/2$, pa g nema lokalni maksimum. Stoga je maksimum $g(2)$ ili $g(n-2)$. Vrijedi $g(2) = 2 + \frac{1}{4}\alpha \cdot (n^2 - 8)$ i $g(n-2) = n - 2 + 2\alpha$. Preostaje dokazati da je $n - 2 + 2\alpha \leq M_n$. Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $n - 2 + 2\alpha > M_n$. Iz $n - 2 + 2\alpha > n - 1$, slijedi $\alpha > \frac{1}{2}$, a iz

$$n - 2 + 2\alpha > 2 + \frac{1}{4}\alpha \cdot \left(n^2 - 9\right)$$

slijedi $\alpha < \frac{4n-16}{n^2-17}$. Sada imamo

$$\frac{1}{2} < \frac{4n-16}{n^2-17}.$$

Ali to je kontradikcija s $n \geq 5$.

2.2) n je neparan.

Primijetimo da je u ovom slučaju $x_1 \neq 2$. Stoga promatramo funkciju $h : [3, ..., n-2] \to \mathbb{R}$ definiranu sa

$$h(x) = -\alpha + \alpha n + \frac{\alpha n^2}{4} + x - \alpha x - \frac{\alpha n x}{2} + \frac{\alpha x^2}{4}.$$

Primijetimo $h''(x) = \alpha/2$, pa h nema lokalni maksimum. Stoga je maksimum u $h(3)$ ili $h(n-2)$. Vrijedi $h(3) = 3 - \frac{7\alpha}{4} - \frac{\alpha n}{2} + \frac{\alpha n^2}{4}$ i $h(n-2) = n - 2 + 2\alpha$. Kao i prije, može se pokazati da vrijedi $h(n-2) \leq M_n$. Preostaje dokazati da vrijedi $3 - \frac{7\alpha}{4} - \frac{\alpha n}{2} + \frac{\alpha n^2}{4} \leq M_n$. Pretpostaimo suprotno. Iz

$$3 - \frac{7\alpha}{4} - \frac{\alpha n}{2} + \frac{\alpha n^2}{4} > 2 + \frac{1}{4}\alpha \cdot \left(n^2 - 9\right)$$

slijedi $\alpha < \frac{2}{n-1}$. S druge strane, iz

$$3 - \frac{7\alpha}{4} - \frac{\alpha n}{2} + \frac{\alpha n^2}{4} > n - 1,$$

slijedi

$$\alpha > \frac{4n-16}{n^2-2n-7}.$$

Stoga je

$$\frac{4n-16}{n^2-2n-7} < \frac{2}{n-1},$$

no to je kontradikcija s $n \geq 5$. ■

Teorem 2.36 *Neka je G 2-povezan graf s n vrhova i $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Vrijedi*

$$mt_\alpha(G) \leq \begin{cases} 2 + \frac{1}{4}\alpha(n^2-9), & \alpha \geq \frac{4}{3+n} \text{ i } n \text{ neparan;} \\ 2 + \frac{1}{4}\alpha(n^2-8), & \alpha \geq \frac{4n-12}{n^2-8} \text{ i } n \text{ paran;} \\ n-1, & \alpha < \frac{4}{3+n} \text{ i } n \text{ neparan ili } \alpha < \frac{4n-12}{n^2-8} \text{ i } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Jednakost vrijedi za potpun graf (bilo koji njegov vrh) u trećem slučaju i za ciklus (bilo koji njegov vrh) u prva dva slučaja.

Dokaz. Neka je G 2-povezani graf i u bilo koji vrh u G. Neka je v vrh s najvećom udaljenošću do u i neka je $d(u,v) = D$. Jer je G 2-povezan, za svaki $d < D$ postoje barem dva vrha na udaljenosti d od u. Odatle se lako vidi da je $D \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Označimo s x_i broj vrhova na udaljenosti i od u i promotrimo niz $(x_1, ..., x_{\lfloor n/2 \rfloor})$. Taj niz je očito u skupu S definiranom u Lemi 2.34 i prema Lemi 2.34 i Lemi 2.35 za transmisiju vrha u vrijedi

$$t_a(u) \leq \begin{cases} 2 + \frac{1}{4}\alpha(n^2-9), & \alpha \geq \frac{4}{3+n} \text{ i } n \text{ neparan;} \\ 2 + \frac{1}{4}\alpha(n^2-8), & \alpha \geq \frac{4n-12}{n^2-8} \text{ i } n \text{ paran;} \\ n-1, & \alpha < \frac{4}{3+n} \text{ i } n \text{ neparan ili } \alpha < \frac{4n-12}{n^2-8} \text{ i } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Štoviše, jednakost vrijedi za potpuni graf ako je

$$\alpha < \frac{4}{3+n} \text{ i } n \text{ neparan ili } \alpha < \frac{4n-12}{n^2-8} \text{ i } n \text{ paran;}$$

a za ciklus inače. ■

2.2.2 Međupoloženost

Teorem 2.37 *Neka je G graf s n vrhova i neka je $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Vrijedi*

$$mc_\alpha(G) \geq 1 + (n-2)\alpha.$$

Jednakost vrijedi za bilo koji list u grafu s n vrhova koji sadrži list.

Dokaz. Minimalna međupoloženost postiže se za stablo jer promatramo najkraće putove među vrhovima. Neka je G stablo i u bilo koji vrh u G. Neka je v vrh čija je udaljenost do u najveća od svih vrhova u G. Ako

je $d(u) > 1$ izbrišimo jedan od bridova incidentnih s u, koji ne leži na uv-putu i dodajmo brid između vrha v i prijašnjeg susjeda od u. Očito se time vrijednost $c_\alpha(u)$ smanjila. Ponovimo taj postupak dok ne ostane $d(u) = 1$, tako da je jedini susjed od u onaj koji leži na uv-putu. Vrijedi

$$c_\alpha(u) = 1 + (n-2)\alpha.$$

To je minimalna vrijednost međupoloženosti u bilo kojem grafu s n vrhova jer je u sumi

$$\sum_{v \in N(u)} \sum_{\{k,l\} \subseteq V} \frac{s_{uv}^{kl}}{s^{kl}},$$

$\frac{s_{uv}^{kl}}{s^{kl}}$ uvijek 1, i brojimo sve vrhove u G, različite od u, točno jednom. Slijedi

$$1 + (n-2)\alpha \leq mc_\alpha(G),$$

pa je time tvrdnja dokazana. ■

Teorem 2.38 *Neka je G graf s n vrhova i neka je $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Vrijedi*

$$Mc_\alpha(G) \leq (n-1)(1 + \alpha(n-2)).$$

Jednakost vrijedi za zvijezdu (u centru zvijezde).

Dokaz. Neka je G graf s n vrhova i u bilo koji vrh u G. Ako postoji vrh v takav da $uv \notin E(G)$, dodajmo u graf brid uv. Povećala se međupoloženost vrha u. Nastavimo dodavati bridove između u i ostalih vrhova dok ne bude $d(u) = n - 1$. Sada promotrimo vrhove $v, w \in V(G)$ takve da $v, w \neq u$. Ako je $vw \in E(G)$, brisanjem tog brida poveća se međupoloženost vrha u jer najkraći vw-put sada prolazi kroz u. Dalje nastavljamo brisati bridove koji nisu incidentni s u dok ne dobijemo zvijezdu.Vrijedi

$$c_\alpha(u) = Mc_\alpha(G) = (n-1)(1 + \alpha(n-2)),$$

što dokazuje tvrdnju. ■

Teorem 2.39 *Neka je G 2-povezani graf s n vrhova i neka je $\alpha \in \langle 0,1\rangle$. Vrijedi*

$$mc_a(G) \leq \begin{cases} 2+\frac{1}{4}\alpha(n^2-9), & \alpha \geq \frac{4}{3+n} \text{ i } n \text{ neparan;} \\ 2+\frac{1}{4}\alpha(n^2-8), & \alpha \geq \frac{4n-12}{n^2-8} \text{ i } n \text{ paran;} \\ n-1, & \alpha < \frac{4}{3+n} \text{ i } n \text{ neparan ili } \alpha < \frac{4n-12}{n^2-8} \text{ i } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Jednakost vrijedi za potpun graf (bilo koji njegov vrh) u trećem slučaju i za ciklus (bilo koji njegov vrh) u prva dva slučaja.

Dokaz. Prema Lemi 2.25 imamo

$$\sum_{v\in V} t(v) = \sum_{v\in V} c(v),$$

pa kao i u dokazu Teorema 2.36 vrijedi

$$mc_a(G) \leq \frac{1}{n}\sum_{v\in V} c(v) = \frac{1}{n}\sum_{v\in V} t(v) \leq$$
$$\leq \begin{cases} 2+\frac{1}{4}\alpha(n^2-9), & \alpha \geq \frac{4}{3+n} \text{ i } n \text{ neparan;} \\ 2+\frac{1}{4}\alpha(n^2-8), & \alpha \geq \frac{4n-12}{n^2-8} \text{ i } n \text{ paran;} \\ n-1, & \alpha < \frac{4}{3+n} \text{ i } n \text{ neparan ili } \alpha < \frac{4n-12}{n^2-8} \text{ i } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Time je tvrdnja dokazana. ■

Napomena 2.40 *Donja ograda za $Mc_\alpha(G)$ je i dalje otvoreni problem.*

2.2.3 Vršna produktivnost

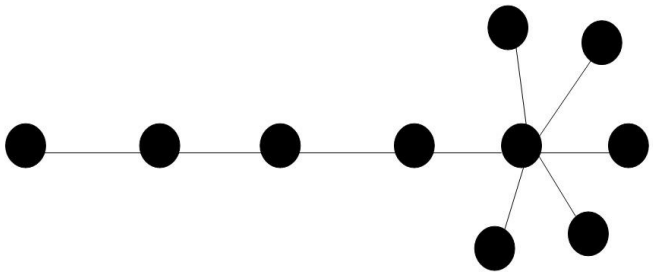
Definicija 2.41 *Neka je G graf i $u \in V(G)$ takav da svi vrhovi $v \in V(G)$, $v \notin N(u)$ leže na jedinstvenom putu koji počinje u jednom odabranom susjedu od u. Tada za G kažemo da je **metlica**, a vrh u nazivamo **centrom metlice**.*

Lema 2.42 *Neka je G graf s n vrhova i u vrh u G stupnja d. Vrijedi*

$$t_\alpha(u) \leq d + \alpha \sum_{i=2}^{n-d} i.$$

Jednakost vrijedi kada je G metlica, a u centar metlice.

Dokaz. Neka je G graf i u vrh u G stupnja d. Neka je l broj susjeda od u koji su listovi. Ako G nije stablo promotrimo razapinjuće stablo od G koje sadrži najkraće putove između vrhova u G. Primijetimo da su vrijednosti transmisije svih vrhova iste kao vrijednosti u G. Stoga pretpostavimo da je G stablo. Neka je x broj vrhova različitih od u koji su listovi. Ako je $x = l$, onda je graf zvijezda i tvrdnja slijedi. Ako je $x = l + 1$ onda je graf metlica (Slika 2.1), pa tvdnja slijedi.



Slika 2.1: Metlica

Ako je $x > l + 1$, neka je v vrh na udaljenost najvećoj od u u G i neka je w bilo koji drugi list u grafu. Promotrimo stablo G' nastalo iz G uklanjanjem vrha w i dodavanjem tog vrha kao susjeda na v. Kako u G vrijedi $d(u, v) \geq d(u, w)$, a u G' vrijedi $d(u, v) < d(u, w)$, vrijednost $t_\alpha(u)$ je

veća u G' nego u G. Nastavimo taj postupak premještanja listova dok ne bude $x = l + 1$ tako da je G metlica, pa tvrdnja slijedi. ■

Teorem 2.43 *Neka je G graf s n vrhova i neka je $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Vrijedi*

$$\frac{1 + \alpha(n-2)}{1 + \frac{1}{2}\alpha(n^2 - n - 2)} \leq m\rho_\alpha(G) \leq 1.$$

Gornja jednakost vrijedi za graf koji je tranzitivan po vrhovima (bilo koji njegov vrh), a donja jednakost vrijedi za put (u kraju puta).

Dokaz. Za bilo koji graf G, koristeći Lemu 2.25, za gornju granicu imamo

$$\min\left\{\frac{c_\alpha(u)}{t_\alpha(u)} : u \in V(G)\right\} \leq \frac{\frac{1}{n}\sum_{u\in V(G)} c_\alpha(u)}{\frac{1}{n}\sum_{u\in V(G)} t_\alpha(u)} = \frac{2W_\alpha(G)}{2W_\alpha(G)} = 1.$$

Dokažimo tvrdnju za donju granicu. Neka je G graf za koji se postiže najmanja vrijednost od $m\rho_\alpha(G)$ i u vrh u G za koji je $m\rho_\alpha(G) = N_\alpha(u)$. Neka je d stupanj vrha u. Vrijednost međupoloženosti ne može biti manja od $d + (n - 1 - d)\alpha$ jer u leži na najkraćem putu između sebe i svih ostalih vrhova u grafu, dok je prema Lemi 2.42 transmisija maksimalna kad su svi vrhovi koji su susjedi od u na jedinstvenom putu koji počinje u nekom susjedu od u. Stoga vrijedi

$$m\rho_\alpha(G) = \frac{c_\alpha(u)}{t_\alpha(u)} \geq \frac{d + (n-1-d)\alpha}{d + \alpha\sum_{i=2}^{n-d} i} = \frac{d + \alpha(n-d-1)}{d + \frac{1}{2}\alpha(d^2 + n + n^2 - 2 - d(1+2n))}.$$

Preostaje minimizirati fukciju $f : [1, n-1] \to \mathbb{R}$ danu sa

$$f(d) = \frac{d + \alpha(n-d-1)}{d + \frac{1}{2}\alpha(d^2 + n + n^2 - 2 - d(1+2n))}.$$

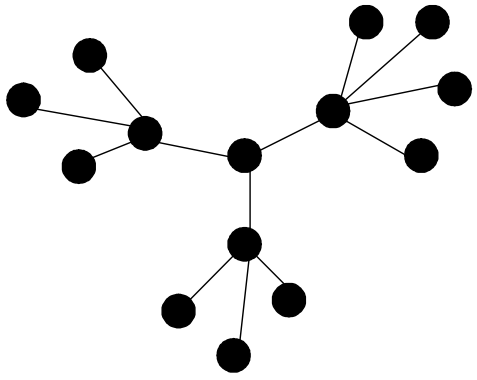
Računski se pokaže da funkcija f postiže minimum za ekstremne vrijednosti od d, tj. za $d = 1$ i $d = n - 1$, pa imamo

$$f(1) = \frac{1 + \alpha(n-2)}{1 + \frac{1}{2}\alpha(n^2 - n - 2)}$$
$$f(n-1) = \frac{n-1}{n - 1 + \frac{1}{2}\alpha((n-1)^2 + n + n^2 - (n-1)(2n+1) - 2)}.$$

Lako se dalje pokaže da je vrijednost od $\rho_\alpha(G)$ uvijek manja za $d = 1$, pa slijedi da se minimum postiže za kraj puta. ■

Definicija 2.44 *Neka su $k_1, k_2, ..., k_d$ nenegativni cijeli brojevi.* ***Trnovita zvijezda*** *$S(k_1, ..., k_d)$ je stablo G s $n = k_1 + ... + k_d + 1$ vrhova takvih da postoji vrh u stupnja d takav da vrijedi $d(u, v) \leq 2$, $\forall v \in V(G)\backslash\{u\}$, i $k_1, ..., k_d$ su brojevi vrhova u komponentama od $G\backslash\{u\}$.*

Primjer trnovite zvijezde dan je na Slici 2.2:



Slika 2.2: Trnovita zvijezda $S(4, 5, 4)$.

Lema 2.45 *Neka su $x_1, x_2, ..., x_d$ nenegativni realni brojevi i $x_1 + x_2 + ... + x_d = n - 1$. Vrijedi $\sum_{1 \leq i < j \leq d} x_i x_j \leq \binom{n-1}{2} - d\binom{\frac{n-1}{d}}{2}$.*

Dokaz. Jednostavni račun pokazuje da ako vrijedi $x_1 = x_2 = ... = x_d$ onda slijedi $\sum_{1\le i<j\le d} x_i x_j = \binom{n-1}{2} - d\binom{\frac{n-1}{d}}{2}$. Pretpostavimo sada da je $(y_1, ..., y_d)$ d-torka nenegativnih realnih brojeva takva da vrijede tvrdnje

i) $y_1 + y_2 + ... + y_d = n - 1$,

ii) postoje $k, l \in \{1, ..., d\}$ takvi da je $|y_k - y_l| > 0$,

iii) $(y_1, ..., y_d)$ maksimizira sumu $\sum_{1\le i<j\le d} x_i x_j$.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $k < l$ i $y_k < y_l$. Označimo $\sigma = \sum_{1\le i<j\le d} y_i y_j$.

Promatrajmo sada d-torku

$$(z_1, z_2, ..., z_d) = (y_1, ..., y_k + \varepsilon, ..., y_l - \varepsilon, ..., y_d),$$

$\varepsilon = \frac{y_l - y_k}{2}$. Označimo $\sigma' = \sum_{1\le i<j\le d} z_i z_j$. Očito vrijedi $z_1 + ... + z_d = n - 1$. Lako se vidi da vrijedi $\sigma' = \sigma + 2\varepsilon(y_l - y_k - \varepsilon)$, a kako je $\varepsilon < y_l - y_k$, vrijedi $\sigma' > \sigma$. To je kontradikcija s iii), pa zaista $\left(\frac{n-1}{d}, ..., \frac{n-1}{d}\right)$ maksimizira sumu $\sum_{1\le i<j\le d} x_i x_j$. ■

Teorem 2.46 *Neka je G graf s n vrhova i neka je $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Vrijedi*

$$1 \le M\rho_\alpha(G) \le \begin{cases} \dfrac{4 + (n^2-6)\alpha}{4(1+\alpha(n-3))}, & za\ 0 < \alpha \le \dfrac{n-7}{2n^2-2n}; \\ \dfrac{\left\{ \begin{array}{c} q + (n-q-1)\alpha + \\ \left[\binom{n-1}{2} - q\binom{\frac{n-1}{q}}{2}\right] \cdot 2\alpha \end{array} \right\}}{q + (n-1-q)\cdot 2\alpha}, & za\ \dfrac{n-7}{2n^2-2n} < \alpha < \dfrac{n-3}{2(n-2)}; \\ 1 + (n-2)\alpha, & za\ \dfrac{n-3}{2(n-2)} \le \alpha < 1; \end{cases}$$

gdje je

$$q = \frac{\left[\begin{array}{c} 2 - 4\alpha - 2n + 4\alpha n - \\ \sqrt{(-2+4\alpha+2n-4\alpha n)^2 - 4(2-2\alpha-n+2\alpha n)(2\alpha - 4\alpha n + 2\alpha n^2)} \end{array} \right]}{2(2-2\alpha-n+2\alpha n)}.$$

Donja jednakost vrijedi za graf koji je tranzitivan po vrhovima (bilo koji njegov vrh), a gornja za graf $S\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$ *(u centru tog grafa), u prvom slučaju, za graf* $S\left(\frac{n-1}{q}, ..., \frac{n-1}{q}\right)$ *(u centru tog grafa), u drugom slučaju, te za zvijezdu (u centru zvijezde) u trećem slučaju.*

Dokaz. Donja ograda se lako pokaže, kao i u dokazu Teorema 2.43. Pokažimo da vrijedi gornja ograda. Prvo primijetimo da iz Teorema 2.28 i 2.38 slijedi da za $\alpha \geq \frac{1}{2}$ jednakost vrijedi za centar zvijezde, jer taj vrh ima minimalnu vrijednost transmisije i maksimalnu vrijednost međupoloženosti za $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Neka je stoga $\alpha < \frac{1}{2}$, G graf s n vrhova i u vrh u G za koji se postiže maksimalna vrijednost vršne produktivnosti. G je stablo jer za bilo koji graf koji nije stablo uklanjanjem bridova po Dijkstrinom algoritmu dobijamo stablo najkraćih putova koje ima veće vrijednosti vršne produktivnosti. Neka je d stupanj vrha u i neka su $k_1, ..., k_d$ brojevi vrhova u komponentama grafa $G\backslash\{u\}$. Označimo s $\Gamma(k_1, ..., k_d)$ familiju svih grafova H koji imaju vrh u stupnja d i $k_1, ..., k_d$ su brojevi vrhova u komponentama grafa $H\backslash\{u\}$. Primijetimo da je međupoloženost vrha u u svakom grafu te familije $d + (n-d-1)\alpha + \sum_{1 \leq i < j \leq d} k_i k_j \cdot 2\alpha$. Stoga je vršna produktivnost grafova u $\Gamma(k_1, ..., k_d)$ maksimalna kad je transmisija minimalna, tj. za trnovitu zvijezdu $S(k_1, .., k_d)$, pa se gornja ograda postiže za graf G takav da je $G = S(k_1, .., k_d)$.

Sada imamo

$$\rho_\alpha(u) = \frac{c_\alpha(u)}{t_\alpha(u)} = \frac{d + (n-d-1)\alpha + \sum_{1 \leq i < j \leq d} k_i k_j \cdot 2\alpha}{d + (n-1-d) \cdot 2\alpha}.$$

Iz Leme 2.45 slijedi

$$\frac{d + (n-d-1)\alpha + \sum_{1 \leq i < j \leq d} k_i k_j \cdot 2\alpha}{d + (n-1-d) \cdot 2\alpha} \leq \frac{d + (n-d-1)\alpha + \left[\binom{n-1}{2} - d\binom{\frac{n-1}{d}}{2}\right] \cdot 2\alpha}{d + (n-1-d) \cdot 2\alpha}.$$

Preostaje maksimizirati funkciju $f : [1, n-1] \to \mathbb{R}$ definiranu s

$$f(d) = \frac{d + (n-d-1)\alpha + \left[\binom{n-1}{2} - d\binom{\frac{n-1}{d}}{2}\right] \cdot 2\alpha}{d + (n-1-d) \cdot 2\alpha}.$$

Maksimum se postiže za:

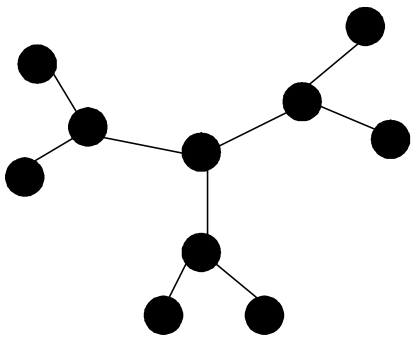
1) $d = 2$ ako je $0 < \alpha \leq \dfrac{n-7}{2n^2-2n}$;

2) $d = \left\lfloor \dfrac{2 - 4\alpha - 2n + 4\alpha n - \sqrt{(-2+4\alpha+2n-4\alpha n)^2 - 4(2-2\alpha-n+2\alpha n)(2\alpha-4\alpha n+2\alpha n^2)}}{2(2-2\alpha-n+2\alpha n)} \right\rfloor$

ako je $\dfrac{n-7}{2n^2-2n} < \alpha < \dfrac{n-3}{2(n-2)}$;

3) $d = n-1$ ako je $\dfrac{n-3}{2(n-2)} < \alpha \leq \dfrac{1}{2}$. ■

Napomena 2.47 *Ilustirat ćemo slučaj kad je graf* $S\left(\frac{n-1}{d}, ..., \frac{n-1}{d}\right)$ *iz Teorema 2.46 gornja ograda. Za* $\alpha = \dfrac{1}{12}$, $n = 10$ *i* $d = 3$ *ograda se dostiže za* $S(3,3,3)$ *(Slika 2.3).*



Slika 2.3: $S(3,3,3)$ - graf za koji se postiže gornja vranica vršne produktivnosti za $\alpha = \dfrac{1}{12}$, $n = 10$ i $d = 3$.

2.2.4 Vršna profitabilnost

Teorem 2.48 *Neka je G graf s n vrhova i neka je $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Vrijedi*

$$-\frac{n^2-3n+2}{2}\alpha \leq m\nu_\alpha(G) \leq 0.$$

Donja jednakost vrijedi za put (u kraju puta), a gornja za graf koji je tranzitivan po vrhovima (bilo koji njegov vrh).

Dokaz. Gornja ograda se lako pokaže, kao i u dokazu Teorema 2.43. Pokažimo da vrijedi donja ograda. Neka je G graf s n vrhova i u vrh koji minimizira vrijednost vršne profitabilnosti. Slično kao i u Teoremu 2.43 imamo

$$\begin{aligned} m\nu_\alpha(G) &= c_\alpha(u) - t_\alpha(u) = \\ &= d + (n-1-d)\alpha - \left(d + \alpha\sum_{i=2}^{n-d} i\right) = \\ &= -\frac{d^2+d-2dn+n(n-1)}{2}\alpha, \end{aligned}$$

gdje je d stupanj vrha u. Vrijednost ν_α kraja puta je $-\frac{n^2-3n+2}{2}\alpha$ i jednostavnim računom dobijamo

$$-\frac{n^2-3n+2}{2}\alpha - \left(-\frac{d^2+d-2dn+n(n-1)}{2}\alpha\right) = \frac{(d-1)(d-2n+2)}{2}\alpha.$$

Desna strana je uvijek negativna, za bilo koji $d > 1$, pa zaključujemo da se donja ograda postiže za kraj puta. ■

Teorem 2.49 *Neka je G graf s n vrhova i neka je $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Vrijedi*

$$0 \leq M\nu_\alpha(G) \leq \alpha(n^2-3n+2).$$

Donja jednakost vrijedi za graf koji je tranzitivan po vrhovima (bilo koji njegov vrh), a gornja za zvijezdu (u centru zvijezde).

Dokaz. Donja ograda se lako pokaže, kao i u dokazu Teorema 2.43. Pokažimo da vrijedi gornja ograda. Neka je G graf s n vrhova i u vrh koji maksimizira vrijednost vršne profitabilnosti. Slično kao i u Teoremu 2.46 imamo

$$\begin{aligned} M\nu_\alpha(G) &= c_\alpha(u) - t_\alpha(u) = \\ &= \left(d + (n-d-1)\alpha + \left[\tbinom{n-1}{2} - d\tbinom{\frac{n-1}{d}}{2} \right] \cdot 2\alpha \right) - (d + (n-1-d)\cdot 2\alpha) = \\ &= \frac{\alpha(d^2 - (n-1)^2 + d(n^2-3n+2))}{d}, \end{aligned}$$

gdje je d stupanj vrha u. Vrijednost ν_α centra zvijezde je $\alpha(n^2-3n+2)$ pa jednostavnim računom dobijamo

$$\alpha(n^2-3n+2) - \frac{\alpha(d^2-(n-1)^2+d(n^2-3n+2))}{d} = \frac{\alpha((n-1)^2-d^2)}{d}.$$

Desna strana je uvijek pozitivna, za bilo koji stupanj $d < n-1$, pa zaključujemo da se gornja ograda postiže za centar zvijezde. ■

Poglavlje 3

DETEKTIRANJE ZAJEDNICA U MREŽAMA

Detektiranje zajednica u mrežama je donekle slično klasičnom problemu particioniranja grafa, u kojem je cilj podijeliti skup vrhova grafa u unaprijed zadani broj disjunktnih podskupova unaprijed zadanih veličina, takvih da je broj bridova među grupama najmanji moguć. Taj problem postoji od 1960tih, a njegova primjena se javlja u informatici, primijenjenoj matematici i fizici.

Detektiranje zajednica u mreži se razlikuje od problema particioniranja grafa utoliko što ni broj ni veličina grupa na koje treba podijeliti mrežu nisu unaprijed zadani. Umjesto toga, oni su određeni samom strukturom mreže, tj. cilj detektiranja zajednica je pronaći prirodne granice između zajednica u mreži. Zajednice su skupine vrhova koji su relativno gušće povezane bridovima međusobno nego s ostalim grupama u mreži. U socijalnim mrežama zajednice mogu predstavljati ljude koje veže više zajedničkih interesa, poput razreda u mreži učenika neke škole ili pripadnosti političkoj stranci u mreži političara neke države, a u mrežama citata ili World Wide

Webu zajednice su određene temama koje su srodnije jedna drugoj. Postoji mnogo metoda za particioniranje grafa [43] i za detektiranje zajednica [65, 29, 70], a jedna od najpoznatijih je Girvan-Newmanova metoda [34].

To je metoda detektiranja zajednica u kompleksnim mrežama koja koristi međupoloženost bridova (vidi Poglavlje 2). Međupoloženost brida je zapravo poopćenje međupoloženosti vrha, [57] (Poglavlje 7.7), koja daje sliku o važnosti vrha za mrežu, sa stajališta količine informacija koje kroz taj vrh prođu. Prisjetimo se definicije međupoloženosti brida, $b(uv)$

$$b(uv) = \sum_{\{k,l\} \subseteq V} \frac{s_{uv}^{kl}}{s^{kl}},$$

gdje je s_{uv}^{kl} broj najkraćih putova između vrhova k i l koji prolaze bridom uv, a s^{kl} je ukupni broj putova između vrhova k i l. Dakle to je broj najkraćih putova koji prolaze krajevima brida, a ukoliko postoji više od jednog najkraćeg puta između dva vrha, tada svaki od putova ima jednaku težinu i zbroj težina je jedan. Girvan-Newmanov algoritam za detektiranje zajednica je sljedeći:

1. *izračunati međupoloženost za sve bridove u grafu;*
2. *ukloniti brid s najvećom međupoloženošću;*
3. *izračunati međupoloženost svih bridova nastalog grafa;*
4. *ponavljati korake 2.-4. dok ima bridova u grafu.*

Algoritam za izračunavanje međupoloženosti bridova se odvija u nekoliko koraka [61]. U prvom koraku se računaju udaljenosti svih vrhova od fiksnog vrha s, i broj najkraćih putova od s do ostalih vrhova. Pri tome se svakom vrhu i pridružuje par (d_i, w_i), gdje d_i označava udaljenost od i do vrha s, a w_i broj najkraćih putova od s do i. U drugom koraku, krenuvši od najdaljeg vrha prema vrhu s računa se broj najkraćih putova koji prolaze kroz bridove,

tj. međupoloženosti bridova, u odnosu na početni vrh s. Algoritam pamti vrijednosti bridne međupoloženosti za odabrani početni vrh s i sumira ih za svaki brid posebno, za svaki vrh u grafu odabran kao početni.

Algoritam (1) za pridruživanje parametara d i w vrhovima, za početni vrh s.

1. za odabrani početni vrh s neka je $d_s = 0$, $w_s = 1$;

2. za svaki vrh i susjedan vrhu s neka je

$$d_i = d_s + 1,\ w_i = w_s = 1;$$

3. za svaki susjedni vrh j svakog od vrhova i iz koraka 2 radimo jednu od 3 akcije:

(a) ako vrhu j još nije pridružena udaljenost onda je

$$d_j = d_i + 1,\ w_j = w_i;$$

(b) ako je za vrh j udaljenost $d_j = d_i + 1$, onda neka je

$$w_j = w_j + w_i;$$

(c) ako je za vrh j udaljenost $d_j < d_i + 1$, ne radi ništa;

4. ponavljamo korake 3. i 4. dok ne preostane ni jedan vrh čijim susjedima nije pridružena udaljenost.

Algoritam (2) za računanje međupoloženosti bridova, za početni vrh s.

1. naći sve vrhove t takve da nijedan put od s do nekog drugog vrha ne prolazi kroz t;

2. svakom bridu incidentnom s t pridijeliti vrijednost međupoloženosti $b_{it} = w_i/w_t$, gdje je i drugi vrh brida;

3. počevši od bridova najdaljih od s, vrijednost međupoloženosti b_{ij} za brid ij, za koji je $d_j = d_i + 1$ je suma vrijednosti bridnih međupoloženosti svih bridova susjednih s ij koji su dalji od s nego ij (njima je već dodijeljena vrijednost međupoloženosti) uvećana za 1, i ta suma pomnožena s w_i/w_j, tj

$$b_{ij} = \left(1 + \sum_{k \in N(j),\ d_k = d_j + 1} b_{jk}\right) \cdot \frac{w_i}{w_j}.$$

Algoritam za izračunavanje međupoloženosti:

1. svakom bridu k pridruži vrijednost međupoloženosti $m_k = 0$;

2. odaberi vrh $s \in V$ kao početni vrh;

3. provedi korake Algoritma (1);

4. provedi korake Algoritma (2);

5. za svaki brid k sumiraj dobivene vrijednosti međupoloženosti bridova na postojeće vrijednosti m_k;

6. ponavljaj korake 2.-5. dok svi vrhovi grafa ne budu odabrani za početne vrhove točno jednom.

Složenost ovog algoritma je $O(mn)$, a s obzirom da se računanje međupoloženosti bridova provodi ponovno nakon svakog izbacivanja brida iz grafa, ukupna složenost je najviše $O(m^2 n)$ (za izbacivanje svakog od m bridova se provodi algoritam). Jasno je da je nakon svakog izbacivanja brida iz grafa nužno ponovno računati međupoloženosti bridova jer se putovi u grafu mijenjaju. Nedostaci Girvan-Newmanovog algoritma su sljedeći:

- Velik broj operacija, što ga čini nepraktičnim za mreže s više od nekoliko tisuća vrhova.

- Rezultati ovise o označavanju vrhova. Naime, s obzirom da se u koraku 2., pri uklanjanju brida s najvećom međupoloženošću, u slučaju kad više bridova ima maksimalnu vrijednost međupoloženosti uklanja nasumični brid, međupoloženosti nastalog grafa u sljedećem koraku su različite ovisno o tome koji brid je odabran za izbacivanje. To rezultira različitim dendogramima, odnosno različitim detektiranim zajednicama.

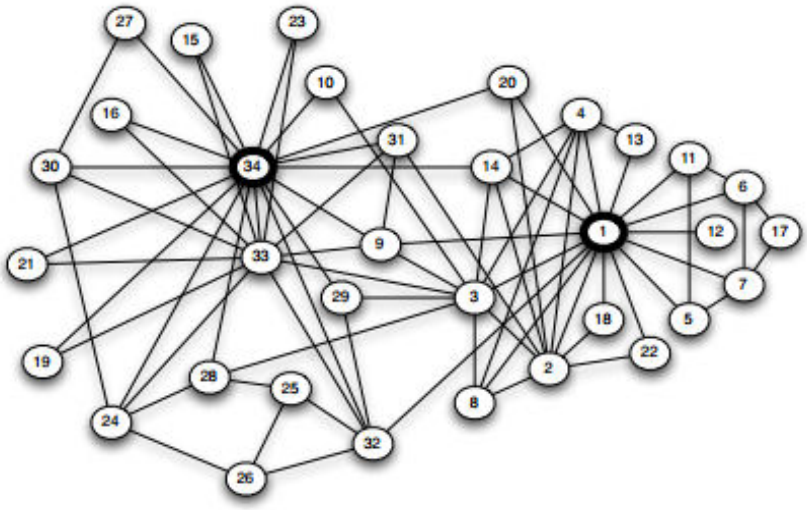
Naš prijedlog je da se u slučaju kada više bridova u grafu ima istu, maksimalnu, vrijednost bridne međupoloženosti istovremeno uklone svi ti bridovi. Mreža će se u tom slučaju brže raspasti na zajednice, a konačni rezultati će ovisiti samo o strukturi početnog, neoznačenog grafa. Stoga uvodimo **modificirani Girvan-Newmanov algoritam**:

1. *izračunati međupoloženost za sve bridove u grafu;*
2. *ukloniti sve bridove s maksimalnom vrijednošću međupoloženosti;*
3. *izračunati međupoloženost svih bridova nastalog grafa;*
4. *ponavljati korake 2.-4. dok ima bridova u grafu.*

U najgorem slučaju broj operacija potrebnih za modificirani Girvan-Newmanov algoritam je također $O(m^2n)$ (u slučaju da u svakom koraku postoji samo jedan brid s maksimalnom vrijednosti međupoloženosti broj operacija će biti jednak broju operacija originalnog algoritma).

Girvan-Newmanov algoritam i modificirani Girvan-Newmanov algoritam testirali smo na tri različite kompleksne mreže. Prva je Zacharyjev karate klub, druga je računalno generirana slučajna mreža, a treća je mreža tumorskih gena i njihovih mutacija. U sva tri primjera broj iteracija je znatno manji za modificirani Girvan-Newmanov algoritam. Ovdje ćemo prezentirati primjer Zacharyjevog karate kluba, a rezultati za ostala dva primjera mogu se naći u [21]. Zacharyjev karate klub je jedan od rijetkih primjera u

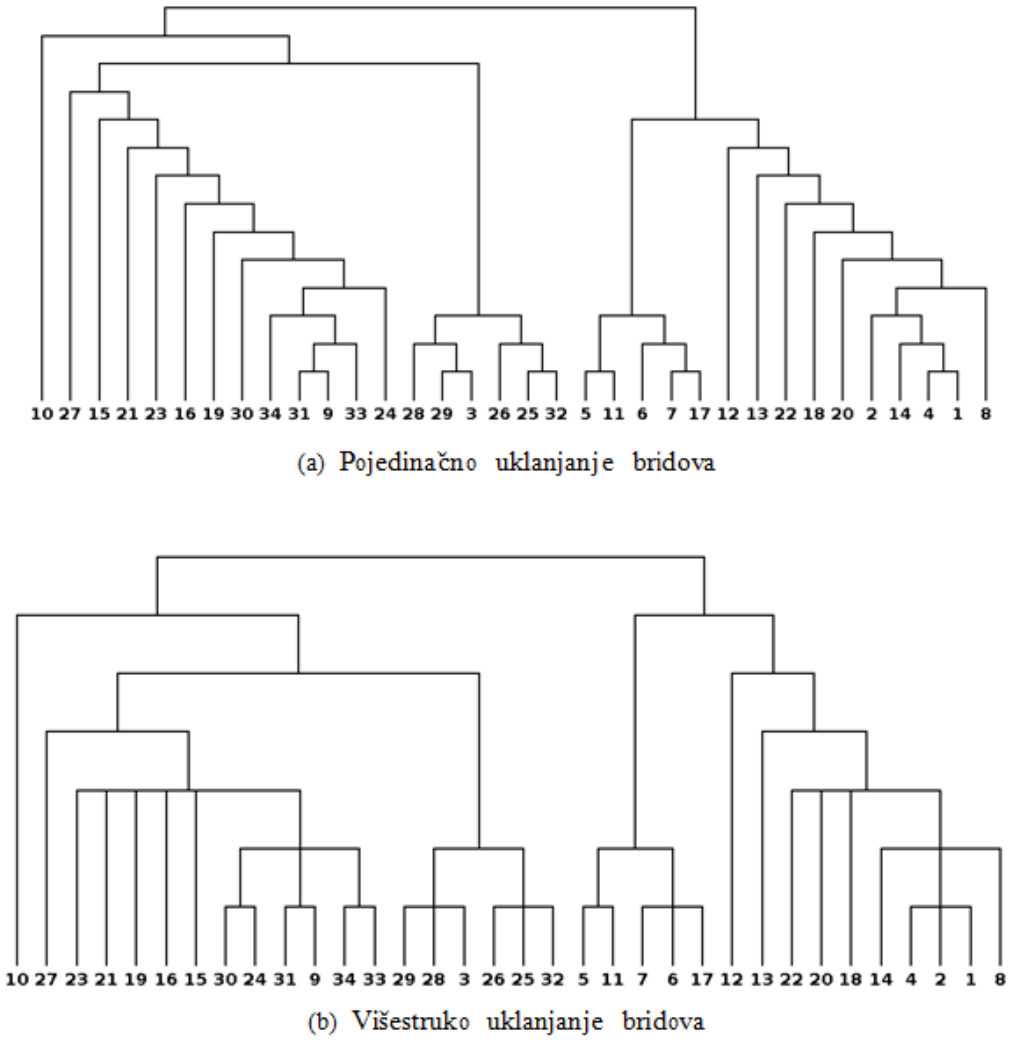
teoriji kompleksnih mreža u kojemu je poznato na koji način se mreža zaista podijelila na zajednice u stvarnom životu.



Slika 3.1: Mreža Zacharyjevog karate kluba (izvor: The Institute for Statistics Education, http://www.statistics.com/glossary&term_id=893)

Graf na Slici 3.1 prikazuje mrežu prijateljstva u karate klubu jednog američkog sveučilišta kojeg je proučavao antropolog Wayne Zachary u periodu od 1970-72. godine [85]. Od samog početka studije postojao je konflikt između predsjednika kluba (vrh označen brojem 34) i trenera (vrh označen brojem 1). Tijekom studije klub se zaista podijelio na dva dijela, te je postao najčešće testirani skup podataka u području detekcija zajednica u mreži. Girvan-Newmanov algoritam razdvaja mrežu na dvije zajednice s točnošću od 97% (što je i Zacharyjeva točnost), ali s pogreškom klasifikacije vrha označenog brojem 3 (u Zacharyjevom radu pogrešno je klasificiran vrh 9). Na Slici 3.2 (a) je prikazan dendrogram generiran Girvan-Newmanovim algoritmom, a na Slici 3.2 (b) generiran modificiranim algoritmom u kojem se svi bridovi s najvećom međupoloženošću odstranjuju odjednom. Očito je da modificirani

algoritam dovodi do bržeg razdvajanja na zajednice (broj iteracija smanjen je s 32 na 20), čime se ukupan broj operacija može smanjiti. Girvan-Newmanov algoritam je jedan od prvih algoritama koji se bavi detekcijom zajednica u mrežama i polazišna je točka za sve kasnije nastale metode. Na manjim mrežama ima visok postotak ispravnog svrstavanja vrhova u zajednice, no zbog velikog broja operacija nije prikladan za veće kompleksne mreže. Ovdje predstavljenom modifikacijom, višestrukim uklanjanjem bridova, mogu se postići puno brži rezultati, no i dalje ne dovoljno za mreže s nekoliko desetaka tisuća vrhova. U tom smislu napravljene su metode koje se temelje na modularnosti [15, 17, 59], računanju svojstvenih vektora matrice [60], te pohlepnim algoritmima [10] čija je složenost bitno manja od složenosti Girvan-Newmanove metode.



Slika 3.2: Dendogram Zacharyjevog karate kluba

Poglavlje 4

MREŽE S DISTRIBUIRANIM KLJUČEVIMA

U ovom poglavlju predstavit ćemo dosad neistražene ideje i analizu napada agenata na mreže s distribuiranim ključevima. Iako istraživanja o napadima na mreže postoje, većinom su usmjerena na detektiranje najranjivijih vrhova [69] i primijenjena ili na energetske mreže [78] ili na P2P mreže [63]. Mreže s distribuiranim ključevima su također proučavane, ali iz perspektive bežičnih mreža senzora [26, 13, 48]. Ovdje proučavamo koncept mreža u kojima pojedini vrhovi drže dio ključa nekakve poruke ili informacije. Ideja je motivirana u prvom redu socijalnim mrežama u kojima su vrhovi ljudi s tajnim informacijama, poput mreža obavještajnih agencija ili mreža ljudi na pozicijama koji su zaduženi za čuvanje dijela kodova za pokretanje važnih akcija, poput lansiranja projektila. Preostaje vidjeti hoće li se primjena ove ideje proširiti na raznovrsnije mreže, ali u međuvremenu su istraživanja dovela do zanimljivog i originalnog doprinosa matematici teorije mreža.

Analizirali smo dva različita problema. Prvo, mreže s distribuiranim ključevima u kojima po unaprijed definiranim pretpostavkama djeluju agenti

i nestale osobe, a zatim mreže s nešto strože zadanim uvjetima i fiksnim brojem ključeva i napadača. U drugom problemu napadače na mrežu ćemo zvati odmetnicima, a ne agentima, da se naglasi razlika u načinu na koji djeluju na mrežu.

Sličnim istraživanjima se u trenutku pisanja ove disertacije bave Damir Vukičević s Odjela za matematiku Sveučilišta u Splitu i Vinko Zlatić s Instituta Ruđer Bošković u Zagrebu. U pripremi je nekoliko radova iz ovog područja.

S obzirom na nedostatak adekvatne pozadine iz ovog područja, radi jasnoće, poglavlja ćemo započeti nešto podrobnijim objašnjenjem motivacije za istraživanje konkretnog problema.

4.1 Napad na mrežu spavača - agenti i nestale osobe

Razmorimo sljedeći problem. Neka organizacija, nazovimo je organizacija A želi uspostaviti mrežu agenata spavača u državi X. Agenti spavači se infiltriraju u populaciju i žive normalno dok ih ne aktivira posebna naredba, i onda ostvare svoj unaprijed dogovoreni plan. Tim agentima spavačima organizacija A daje tajnu poruku koju država X ne smije otkriti, a poruka je zaštićena nizom ključeva koji moraju svi biti poznati da bi se poruka sačuvala. Agenti spavači se ne poznaju nužno svi međusobno, i nemaju svi sve ključeve za čitanje poruke. Tu situaciju možemo reprezentirati grafom u kojem su vrhovi agenti spavači, i dva vrha su povezana ako se to dvoje ljudi poznaje. Svaki vrh posjeduje neke ključeve za čitanje poruke i ona se može pročitati ako postoji komponenta povezanosti grafa koja sadrži sve ključeve. Nadalje, država X je kao protumjeru ubacila vlastite agente u

mrežu agenata spavača. (S obzirom da su i jedni i drugi agenti, radi jasnoće agente organizacije A ćemo zvati agenti spavači ili samo spavači, a agente države X samo agenti). Državi Y je cilj ili saznati sve ključeve, što bi im omogućilo da pročitaju poruku i na taj način osujete plan agenata spavača, ili da spriječe spavače u čitanju poruke. To postižu tako da razbiju mrežu spavača na komponente od kojih ni jedna ne sadrži sve ključeve. Također, pretpostavljamo da neki spavači mogu odustati prije izvršenja plana, ili biti ranije otkriveni, što otežava početni plan organizacije A. Takve spavače ćemo zvati nestale osobe. Koristimo sljedeće oznake:

p - broj spavača

a - broj agenata

k - broj ključeva

m - broj nestalih osoba

Smatramo da se spavači, agenti i nestale osobe ponašaju prema sljedećim pretpostavkama:

1) Svaki od a agenata će predati državi X sve ključeve koji su mu dani i izdat će sve spavače koje zna.

2) Svi izdani spavači se uklanjaju iz mreže, ali ne predaju svoje ključeve državi X.

3) Svih m nestalih osoba se uklanja iz mreže, ali ni oni ne predaju svoje ključeve državi X.

4) Zadatak spavača je uspješan ako država X nije saznala sve ključeve i ako nakon uklanjanja agenata, njihovih susjeda i nestalih osoba iz mreže i dalje postoji komponenta koja sadrži sve ključeve, tj. može pročitati poruku.

Ako je u zadanoj mreži spavača s distribuiranim ključevima, njihov zadatak uspješan za bilo kojih a agenata i m nestalih osoba, za zadane $a, m \in \mathbb{N}$,

onda kažemo da je mreža spavača (a, m)-otporna.

Formulirajmo ovaj problem matematički.

Mrežu spavača predstavlja graf G, $|V(G)| = p$, a distribucija ključeva je dana funkcijom $f : V(G) \to \mathcal{P}(\{1, 2, ..., k\})$, gdje je $\mathcal{P}(S)$ partitivni skup skupa S.

Za vrh $v \in V$ s $N_0(v)$ označavamo $N_0(v) = N(v) \cup \{v\}$, a za podskup $S \subseteq V$ označavamo $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ i $N_0(S) = N(S) \cup S$.

Sada definiramo skup $T \subseteq \mathbb{N}_0^4$ takav da je $(a, m, p, k) \in T$ ako i samo ako postoji graf G s p vrhova i funkcija $f : V(G) \to \mathcal{P}(\{1, 2, ..., k\})$ takva da za bilo koje $A, M \subseteq V$, $|A| = a$, $|M| = m$ vrijedi sljedeće:

T1) $\bigcup_{v \in A} f(v) \neq \{1, .., k\}$;

T2) postoji komponenta C grafa $G \backslash (N_0(A) \cup M)$ takva da vrijedi

$$\bigcup_{v \in C} f(v) = \{1, .., k\}.$$

Ako takav par (G, f) postoji kažemo da se četvorka (a, m, p, k) **može realizirati** i da uređeni par (G, f) **realizira** četvorku (a, m, p, k).

Definicija 4.1 *Neka su $p, a, m, k \in \mathbb{N}$. Kažemo da je graf G s p vrhova* ***otporan*** *na napad a agenata i m nestalih osoba ako postoji distribucija $f : V(G) \to \mathcal{P}(\{1, 2, ..., k\})$ takva da za (G, f) vrijede tvrdnje T1 i T2, za bilo koje $A, M \subseteq V(G)$, $|A| = a$, $|M| = m$. U suprotnom kažemo da G uz k ključeva* ***nije otporan*** *na a agenata i m nestalih osoba.*

Lema 4.2 *Ako je $(a, m, p, k) \in T$ onda vrijedi*

i) $(a, m, p + 1, k) \in T$;

ii) $(a, m, p, k + 1) \in T$.

Dokaz. Neka (G, f) realizira (a, m, p, k).

i) Za $G' = G \cup \{v\}$ u kojem je v dodani izolirani vrh bez ključeva, $f' : V(G') \to \mathcal{P}(\{1, 2, ..., k\})$, $f'|_{V(G)} = f$, $f'(v) = \varnothing$, (G', f') realizira $(a, m, p + 1, k)$.

ii) (G, f') za $f'(v) = f(v) \cup \{k + 1\}$ za sve vrhove $v \in V(G)$, gdje smo skupu ključeva svakog vrha dodali ključ $k + 1$, realizira $(a, m, p, k + 1)$. ■

Sada definiramo funkcije $P, K : \mathbb{N}_0^3 \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$,

$$K(a, m, p) = \min\{k | (a, m, p, k) \in T\},$$
$$P(a, m, k) = \min\{p | (a, m, p, k) \in T\}.$$

Ako ne postoji k takav da je $(a, m, p, k) \in T$ za dane a, m i p onda definiramo $K(a, m, p) = +\infty$, i ako ne postoji p takav da je $(a, m, p, k) \in T$ za dane a, m i k onda definiramo $P(a, m, k) = +\infty$.

Lako se vidi da je dovoljno znati jednu od ovih funkcija jer vrijedi

$$K(a, m, p) = \min_k\{P(a, m, k) \leq p\},$$
$$P(a, m, k) = \min_p\{K(a, m, p) \leq k\}.$$

Naše istraživanje bavi se određivanjem funkcije K.

Slučaj $m = 0$ je razmotren u članku [76], a lako se vidi da za $a = 0$ vrijedi

$$K(0, m, p) = \begin{cases} +\infty, & p \leq m; \\ 1, & p > m. \end{cases}$$

Ovdje ćemo izložiti rezultate za $a = 1$, $m \in \mathbb{N}$, za $a = 2$, $m = 1, 2, 3$ i $a = 3$, $m = 1$.

4.1.1 1 agent

Sljedeći teorem daje rezultat za $a = 1$ i bilo koji $m \in \mathbb{N}$. Prvo pomoćna lema.

Lema 4.3 *Neka je $m \in \mathbb{N}$ i neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$f(x) = x + \left\lfloor \frac{m}{x} \right\rfloor .$$

Neka je $x_m \in \mathbb{N}$ najmanji broj za koji vrijedi $f(x_m) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{N}$. Tada je restrikcija $f|_{\{1,\ldots,x_m\}}$ padajuća funkcija.

Dokaz. Promotrimo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \left\lfloor \frac{m}{x} \right\rfloor$.

Za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(1) = m + 1$$
$$f(m) = m + 1$$
$$f(x) = x,\ \forall x \geq m + 1.$$

Slijedi $x_m \in \{1, ..., m-1\}$. Time smo pokazali da traženi x_m uvijek postoji.

Neka su $y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $y_1 \leq y_2 \leq x_m$. Pokazat ćemo $f(y_1) \geq f(y_2)$.

Neka je $y_1 + l_1 = x_m$, $y_2 + l_2 = x_m$, $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$. Vrijedi $l_1 \geq l_2$. Imamo

$$\begin{aligned} f(y_1) &= y_1 + \left\lfloor \frac{m}{y_1} \right\rfloor = x_m - l_1 + \left\lfloor \frac{m}{x_m - l_1} \right\rfloor = \\ &= x_m - l_1 + \left\lfloor \frac{x_m^2 - l_1^2 + l_1^2 + m - x_m^2}{x_m - l_1} \right\rfloor = 2x_m + \left\lfloor \frac{l_1^2 + m - x_m^2}{x_m - l_1} \right\rfloor ; \\ f(y_2) &= y_2 + \left\lfloor \frac{m}{y_2} \right\rfloor = x_m - l_2 + \left\lfloor \frac{m}{x_m - l_2} \right\rfloor = \\ &= x_m - l_2 + \left\lfloor \frac{x_m^2 - l_2^2 + l_2^2 + m - x_m^2}{x_m - l_2} \right\rfloor = 2x_m + \left\lfloor \frac{l_2^2 + m - x_m^2}{x_m - l_2} \right\rfloor , \end{aligned}$$

Tvrdnja sada slijedi iz $l_1 \geq l_2$.

Pokazali smo $f(y_1) \geq f(y_2)$ za $y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ za koje je $y_1 \leq y_2 \leq x_m$, pa slijedi da je $f|_{\{1,\ldots,x_m\}}$ padajuća funkcija. ■

Napomena 4.4 *Neka je dan par (G, f) takav da je $V(G) = p$, $f : V(G) \to \mathcal{P}(\{1, 2, ..., k\})$, i neka za sve $u \in V(G)$ vrijedi $|f(u)| = k - 1$. Neka postoje*

skupovi $A, M \subseteq V(G)$ *takvi da ne postoji komponenta* C *grafa* $G\backslash(N_0(A)\cup M)$ *takva da vrijedi* $\bigcup_{v\in C} f(v) = \{1, .., k\}$. *Ako je* f' *funkcija za koju vrijedi* $f' : V(G) \to \mathcal{P}(\{1, 2, ..., k\})$, $|f'(u)| \leq k-1$, $\forall u \in V(G)$ *takva da je* f *proširenje od* f', *tj.* f *se može dobiti iz* f' *tako se svim vrhovima* $u \in V(G)$ *za koje je* $|f'(u)| \leq k-2$ *dodaju neki ključevi koje nema tako da vrijedi* $|f(u)| = k-1$ *za sve* $u \in V(G)$, *onda za skupove* $A, M \subseteq V(G)$ *vrijedi da ne postoji komponenta* C *grafa* $G\backslash(N_0(A) \cup M)$ *takva da vrijedi* $\bigcup_{v\in C} f'(v) = \{1, .., k\}$.

Drugim riječima, ako se za promatrani par (G, f) *u kojem je funkcija* f *dana tako da svakom vrhu nedostaje točno jedan ključ, mogu odabrati skupovi* $A, M \subseteq V(G)$ *takvi da ne vrijedi T2, onda se takvi skupovi mogu pronaći i za par* (G, f'), *gdje je* f' *funkcija koja svakom vrhu pridružuje najviše* $k-1$ *ključeva, a može se proširiti do* f.

Teorem 4.5 *Za* $m \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$K(1, m, p) = \begin{cases} +\infty, & p \leq q; \\ \left\lfloor \frac{1}{2}(p - m - \sqrt{p^2 + m^2 - 4p - 2mp + 4}) \right\rfloor + 1, & p > q, \end{cases}$$

gdje je $q = 2 + m + \sqrt{4m+1}$.

Dokaz. Definirajmo skup S uređenih parova (m, p) takvih da postoji barem jedan k takav da se četvorka $(1, m, p, k)$ može realizirati. Tvrdnju teorema ćemo dokazati u nekoliko koraka. Prvo ćemo pokazati da za dani $(m, p) \in S$, minimalni k za koji se $(1, m, p, k)$ može realizirati, tj. $k = K(1, m, p)$ zadovoljava nejednakost

$$p \geq k + m + \left\lfloor \frac{m}{k-1} \right\rfloor + 2.$$

Zatim ćemo rješavanjem te nejednakosti dobiti minimalni p za koji je $K(1, m, p) \neq +\infty$, i točan broj ključeva potrebnih za zadane m i p. Prvo ćemo dokazati dvije pomoćne tvrdnje.

M1) Neka je (G, f) par koji realizira $(1, m, p, k)$ za neke $m, p, k \in \mathbb{N}$ i neka je $\Delta(G)$ maksimalni stupanj u G. Vrijedi

$$p \geq \Delta(G) + m + \left\lfloor \frac{m}{k-1} \right\rfloor + 3.$$

Dokažimo to. Pretpostavimo suprotno, tj. neka vrijedi

$$p \leq \Delta(G) + m + \left\lfloor \frac{m}{k-1} \right\rfloor + 2.$$

Zbog T1 za svaki $v \in V(G)$ vrijedi $f(v) \neq \{1, 2, ..., k\}$. Svakom vrhu nedostaje barem jedan ključ, pa prema Napomeni 4.4 bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da svakom vrhu nedostaje točno jedan ključ. Za $u \in V(G)$ takav da je $d(u) = \Delta(G)$, $G' = G \backslash N_0(u)$ ima $p - \Delta(G) - 1$ vrhova. Definirajmo skupove $V_1, ..., V_k \subseteq V(G')$ takve da je vrh v u skupu V_i ako v nema ključ i. Svakom vrhu nedostaje točno jedan ključ, pa su svi vrhovi iz G' točno u jednom skupu $V_1, ..., V_k$. Odaberimo V_l takav da vrijedi $|V_l| \geq |V_1|, ..., |V_k|$. Primjetimo da je $|V_l| \geq \left\lceil \frac{p-\Delta(G)-1}{k} \right\rceil$. Ako odaberemo skup nestalih osoba takav da vrijedi $M \supseteq V(G') \backslash V_l$, svim vrhovima u preostalom grafu nedostaje ključ l pa ne vrijedi T2. To možemo napraviti ako za broj nestalih osoba vrijedi

$$p - \Delta(G) - 1 - \left\lceil \frac{p - \Delta(G) - 1}{k} \right\rceil \leq m.$$

Pokažimo da to vrijedi. Po pretpostavci imamo

$$p - \Delta(G) - 1 \leq m + \left\lfloor \frac{m}{k-1} \right\rfloor + 1,$$

pa ako zapišemo $m = b(k-1) + c$, $0 \leq c < k - 1$, imamo

$$\begin{aligned} p - \Delta(G) - 1 - \left\lceil \frac{p - \Delta(G) - 1}{k} \right\rceil &\leq m + \left\lfloor \frac{m}{k-1} \right\rfloor + 1 - \left\lceil \frac{m + \left\lfloor \frac{m}{k-1} \right\rfloor + 1}{k} \right\rceil \\ &\leq m + b + 1 - \left\lceil \frac{b(k-1) + c + b + 1}{k} \right\rceil \\ &= m + b + 1 - b - \left\lceil \frac{c+1}{k} \right\rceil \leq m. \end{aligned}$$

Dakle, skup M se može odabrati tako da vrijedi $M \supseteq V(G') \setminus V_l$, što je u kontradikciji s T2, pa zaključujemo da je pretpostavka bila pogrešna, tj. vrijedi

$$p \geq \Delta(G) + m + \left\lfloor \frac{m}{k-1} \right\rfloor + 3.$$

M2) Neka su $m, p \in \mathbb{N}$ i neka je (G, f) par koji realizira $(1, m, p, k)$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Neka je $\Delta(G)$ maksimalni stupanj u G. Vrijedi

$$p \geq \Delta(G) + m + \left\lfloor \frac{m}{\Delta(G)} \right\rfloor + 3.$$

Dokažimo to. Neka je u vrh s maksimalnim stupnjem u G. Za $A = \{u\}$, $G \setminus N_0(A)$ ima $p - \Delta(G) - 1$ vrhova. Dokažimo da ako vrijedi

$$p - \Delta(G) - 1 \leq \left\lfloor \frac{m}{\Delta(G)} \right\rfloor + m + 1$$

onda je moguće odabrati skup M nestalih osoba takav da nakon njihovog uklanjanja ostanu samo izolirani vrhovi. Za vrh ćemo reći da je ogoljen ako su svi njegovi susjedi nestale osobe. Jer je $\Delta(G)$ maksimalni stupanj, potrebno je ukloniti najviše $\Delta(G)$ vrhova da bi jedan vrh ostao ogoljen. Dakle, moguće je odabrati m nestalih osoba tako da je barem $\left\lfloor \frac{m}{\Delta(G)} \right\rfloor$ ogoljenih vrhova. Ako $G \setminus N_0(A)$ ima manje ili jednako $\left\lfloor \frac{m}{\Delta(G)} \right\rfloor + m + 1$ vrhova onda opisani izbor nestalih osoba vodi do grafa u kojem najviše jedan vrh nije ni nestala osoba ni ogoljen. Međutim, taj vrh je tada očito izoliran u $G \setminus (N_0(A) \cup M)$. Dakle, ako vrijedi

$$p \leq \Delta(G) + m + \left\lfloor \frac{m}{\Delta(G)} \right\rfloor + 2,$$

ni jedan graf G s p vrhova ne može realizirati $(1, m, p, k)$, za bilo koji $k \in \mathbb{N}$ i bilo kakvu funkciju distribucije f, jer će svi vrhovi u preostalom grafu biti izolirani, a po T1 jedan vrh ne smije imati sve ključeve. Stoga vrijedi

$$p \geq \Delta(G) + m + \left\lfloor \frac{m}{\Delta(G)} \right\rfloor + 3,$$

i tvrdnja M2 je dokazana.

Vratimo se dokazu teorema. Neka je $m \in \mathbb{N}$. Definirajmo

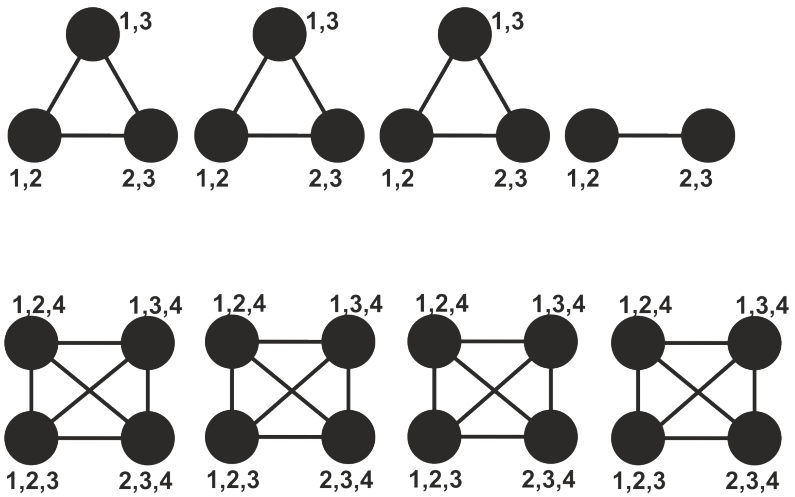
$$p_m = \min_{\Delta_0 \in \mathbb{N}} \{\Delta_0 + m + \left\lfloor \frac{m}{\Delta_0} \right\rfloor + 3\},$$

i neka je Δ_m vrijednost od Δ_0 za koju se taj minimum postiže. (Ako postoji više od jedne takve vrijednosti, odaberimo najmanju).

Dokažimo prvo da se četvorka $(1, m, p_m, \Delta_m + 1)$ može realizirati. To se postiže parom (G_m, f), gdje je G_m dan sa

$$G_m = \underbrace{K_{\Delta_m+1} \cup K_{\Delta_m+1} \cup \ldots \cup K_{\Delta_m+1}}_{\left\lfloor \frac{p_m}{\Delta_m+1} \right\rfloor \text{ puta}} \cup K_l, \text{ gdje je } l = p_m - \left\lfloor \frac{p_m}{\Delta_m+1} \right\rfloor \cdot (\Delta_m + 1),$$

a funkcija f svakom vrhu pridružuje sve osim jednog ključa na način da svakom paru vrhova u istoj komponenti K_{Δ_m+1} nedostaju različiti ključevi. Realizacija nekih primjera dana je na Slici 4.1.



Slika 4.1: Realizacija za $(1, 4, 11, 3)$ i $(1, 8, 16, 4)$.

Sada dokažimo da najmanji k za koji se $(1, m, p, k)$ može realizirati, za zadani par $(m, p) \in S$, zadovoljava izraz

$$p \geq k + m + \left\lfloor \frac{m}{k-1} \right\rfloor + 2.$$

Neka je $(m, p) \in S$ i neka je k_0 najmanji k za koji se $(1, m, p, k)$ može realizirati. Promatramo 3 slučaja.

1) $k_0 > \Delta_m + 1$.

Iz M2 imamo

$$p \geq \Delta(G) + m + \left\lfloor \frac{m}{\Delta(G)} \right\rfloor + 3 \geq \Delta_m + m + \left\lfloor \frac{m}{\Delta_m} \right\rfloor + 3.$$

Znamo da se $(1, m, p_m, \Delta_m + 1)$ može realizirati, pa zbog $p \geq p_m$ iz Leme 4.2 slijedi da se $(1, m, p, \Delta_m + 1)$ može realizirati. No sada očito odabrani k_0 nije najmanji k za koji se $(1, m, p, k)$ može realizirati, pa je ovaj slučaj nemoguć.

2) $k_0 = \Delta_m + 1$. Sada imamo

$$p \geq \Delta_m + m + \left\lfloor \frac{m}{\Delta_m} \right\rfloor + 3 = k_0 + m + \left\lfloor \frac{m}{k_0 - 1} \right\rfloor + 2,$$

pa tvrdnja vrijedi.

3) $k_0 < \Delta_m + 1$. Neka je G graf koji realizira $(1, m, p, k_0)$, i neka je $\Delta(G)$ maksimalni stupanj u G. Promatramo 2 podslučaja.

3.1.) $k_0 \leq \Delta(G) + 1$. Sada iz M1 imamo

$$p \geq \Delta(G) + m + \left\lfloor \frac{m}{k_0 - 1} \right\rfloor + 3 \geq k_0 + m + \left\lfloor \frac{m}{k_0 - 1} \right\rfloor + 2,$$

pa tvrdnja vrijedi.

3.2.) $k_0 > \Delta(G) + 1$. Sada je

$$\Delta(G) < k_0 - 1 < \Delta_m,$$

iz M2 imamo

$$p \geq \Delta(G) + m + \left\lfloor \frac{m}{\Delta(G)} \right\rfloor + 3,$$

pa iz Leme 4.3 slijedi

$$p \geq \Delta(G) + m + \left\lfloor \frac{m}{\Delta(G)} \right\rfloor + 3 \geq k_0 + m + \left\lfloor \frac{m}{k_0 - 1} \right\rfloor + 2,$$

jer je $\Delta(G) < k_0 \leq \Delta_m$, i funkcija $f(\Delta(G)) = \Delta(G) + 1 + m + \left\lfloor \frac{m}{\Delta(G)} \right\rfloor + 2$ je padajuća na $f|_{\{1,\ldots,\Delta_m\}}$.

Dokazali smo da najmanji broj ključeva, $k_0 \geq 2$, takav da se $(1, m, p, k_0)$ može realizirati, zadovoljava

$$p \geq k_0 + m + \left\lfloor \frac{m}{k_0 - 1} \right\rfloor + 2, \tag{1}$$

za dani par $(m, p) \in S$. Štoviše, graf

$$G_0 = \underbrace{K_{k_0} \cup K_{k_0} \cup \ldots \cup K_{k_0}}_{\left\lfloor \frac{p}{k_0} \right\rfloor \text{ puta}} \cup K_l, \text{ gdje je } l = p - \left\lfloor \frac{p}{k_0} \right\rfloor \cdot k_0,$$

s funkcijom f koja svakom vrhu pridružuje sve osim jednog ključa na način da svakom paru vrhova u istoj komponenti nedostaju različiti ključevi realizira $(1, m, p, k_0)$. Dakle,

$$K(1, m, p) = k_0.$$

Nadalje, ako postoji k_0 koji zadovoljava (1) za dane $m, p \in \mathbb{N}$ onda je $(m, p) \in S$. Štoviše, (1) implicira da za svaki m postoji p takav da je $(m, p) \in S$.

Pronađimo sada $K(1, m, p)$ i minimalni p za koji je $K(1, m, p) \neq +\infty$. Neka je $m, p \in \mathbb{N}$. Primjetimo da je desna strana od (1) prirodni broj, pa je (1) ekvivalentno sa

$$p + 1 > k_0 + m + \frac{m}{k_0 - 1} + 2.$$

Ta nejednakost je dalje ekvivalentna sa

$$k_0^2 + k_0(m - p) + p - 1 < 0,$$

i njenim rješavanjem dobijamo interval

$$k_0 \in \left\langle \frac{1}{2}(p - m - \sqrt{D}), \frac{1}{2}(p - m + \sqrt{D}) \right\rangle,$$

gdje je $D = p^2 + m^2 - 4p - 2mp + 4$. Označimo taj interval s I_k. Dakle, $K(1, m, p) \neq +\infty$ ako i samo ako postoji prirodni broj $k_0 > 1$ u intervalu I_k. Promotrimo uvjete za p za zadani $m \in \mathbb{N}$. Lako se vidi da za $D < 0$ vrijedi $K(1, m, p) = +\infty$ jer je vrijednost $k_0^2 + k_0(m - p) + p - 1$ uvijek nenegativna. Za $D = 0$ je $I_k = \emptyset$, pa također slijedi $K(1, m, p) = +\infty$. Preostaje razmotriti slučaj $D > 0$. Vrijednosti za p za koje je $D > 0$ su u skupu

$$\left(\left\langle -\infty, 2 + m - 2\sqrt{m} \right\rangle \cup \left\langle 2 + m + 2\sqrt{m}, +\infty \right\rangle\right) \cap \mathbb{N}.$$

Definirajmo funkcije $p_1, p_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa

$$p_1(m) = 2 + m - 2\sqrt{m},$$
$$p_2(m) = 2 + m + 2\sqrt{m}.$$

$p < p_1(m)$ znači da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(1, m, p, k) \in T$, a onda zbog Leme 4.2 takav k također postoji za sve $p \in \mathbb{N}$, $p \geq p_1(m)$. Već smo pokazali da je za $p \in [p_1(m), p_2(m)] \cap \mathbb{N}$ to nemoguće (primijetimo da je ovaj skup uvijek neprazan). Stoga mora vrijediti $p > p_2(m)$. Slijedi

$$k_0 = \left\lfloor \frac{1}{2}(p - m - \sqrt{D}) \right\rfloor + 1,$$

ako je

$$\left\lfloor \frac{1}{2}(p - m - \sqrt{D}) \right\rfloor + 1 < \frac{1}{2}(p - m + \sqrt{D}) \text{ i } p > p_2(m).$$

Razlikujemo 2 slučaja.

1) $\frac{1}{2}(p - m - \sqrt{D}) + 1 < \frac{1}{2}(p - m + \sqrt{D})$. Ovo je ekvivalentno s $D > 1$ što je dalje ekvivalentno s

$$p \in \left(\left\langle -\infty, 2 + m - \sqrt{4m - 1} \right\rangle \cup \left\langle 2 + m + \sqrt{4m + 1}, +\infty \right\rangle\right) \cap \mathbb{N}.$$

Definirajmo funkcije $p_3, p_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s

$$p_3(m) = 2 + m - \sqrt{4m-1},$$
$$p_4(m) = 2 + m + \sqrt{4m+1}.$$

Kako je $p_3(m) < p_1(m) < p_2(m) < p_4(m)$ za sve $m \in \mathbb{N}$, ovo se svodi na $p > p_4(m)$.

2) $\frac{1}{2}(p - m - \sqrt{D}) + 1 \geq \frac{1}{2}(p - m + \sqrt{D})$. Tada je $p_2(m) < p \leq p_4(m)$.

Pokazat ćemo da vrijedi $I_k \cap \mathbb{N} = \varnothing$. Razlikujemo 2 podslučaja.

2.1) $p < p_4(m)$.

Moramo pokazati da je najmanji prirodni broj veći od $p_2(m)$ veći ili jednak od $p_4(m)$, tj da je

$$\lfloor p_2(m) \rfloor + 1 \geq p_4(m)$$
$$\left\lfloor 2 + m + 2\sqrt{m} \right\rfloor + 1 \geq 2 + m + \sqrt{4m+1}$$
$$1 + \left\lfloor 2\sqrt{m} \right\rfloor \geq \sqrt{4m+1}.$$

Označimo $\lfloor 2\sqrt{m} \rfloor = b$. Možemo pisati $4m = b^2 + c$, $0 \leq c \leq 2b$. Sada moramo pokazati

$$1 + b \geq \sqrt{b^2 + c + 1}.$$

Daljnji račun pokazuje da to vrijedi ako je $2b \geq c$, pa je tvrdnja dokazana.

2.2) Za $p = p_4(m)$ vrijedi $I_k \cap \mathbb{N} = \varnothing$. Promotrimo slučaj $p = p_4(m) = 2 + m + \sqrt{4m+1}$. Kako je $p \in \mathbb{N}$ to je moguće jedino ako je $\sqrt{4m+1} \in \mathbb{N}$. Za tu vrijednost od p, interval I_k je

$$I_k = \left\langle \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4m+1}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4m+1} \right\rangle.$$

Lako se vidi da je sada duljina intervala I_k točno 1 i da su granice intervala prirodni brojevi. No onda slijedi $I_k \cap \mathbb{N} = \varnothing$.

Dokazali smo da ne postoji $p \in \langle p_2(m), p_4(m)] \cap \mathbb{N}$ takav da postoji $k \in I_k \cap \mathbb{N}$ pa zaključujemo da je $K(1, m, p) = +\infty$ ako i samo ako je $p \leq p_4(m)$, a za $p > p_4(m)$ imamo

$$K(1, m, p) = \left\lfloor \frac{1}{2}(p - m - \sqrt{p^2 + m^2 - 4p - 2mp + 4}) \right\rfloor + 1,$$

što zaključuje dokaz teorema. ■

4.1.2 2 agenta

Razmotrimo sada slučaj 2 agenta, tj. $a = 2$. Analizirali smo problem za $m = 1, 2, 3$. Prije svega, treba nam definicija k-razbijenog grafa.

Definicija 4.6 *Reći ćemo da je graf G k-**razbijen**, za $k \in \mathbb{N}$, ako svaka komponenta povezanosti u G ima najviše k vrhova.*

Reći ćemo da se graf G može **k-razbiti s a agenata i m nestalih osoba** ako postoji izbor skupova $A, M \subseteq V(G)$, $|A| = a$, $|M| = m$ takav da je $G \backslash (N_0(A) \cup M)$ k-razbijen.

Lema 4.7 *Neka je G graf.*

i) Ako G ima najviše 5 vrhova može se 2-razbiti s 1 agentom.

ii) Ako G ima najviše 7 vrhova može se 2-razbiti s 1 agentom i 1 nestalom osobom.

iii) Ako G ima najviše 8 vrhova može se 2-razbiti s 2 agenta.

iv) Ako G ima najviše 9 vrhova može se 2-razbiti s 1 agentom i 2 nestale osobe.

Dokaz. Tvrdnje je dovoljno dokazati za maksimalan broj vrhova u G, jer tvrdnje za manji broj vrhova onda slijede iz Leme 4.2. Također je tvrdnje dovoljno dokazati za povezane grafove.

i) U povezanom grafu G s 5 vrhova mora postojati vrh u čiji je stupanj barem 2. $G\backslash N_0(u)$ očito ima najviše 2 vrha, pa je 2-razbijen.

ii) Neka je G povezan graf sa 7 vrhova. Ako postoji vrh stupnja barem 3 označimo ga s u. $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 3 vrha, pa ako bilo kojeg od njih označimo s x, $G\backslash(N_0(u) \cup \{x\})$ ima najviše 2 vrha i 2-razbijen je. Ako svi vrhovi u G imaju stupanj najviše 2, neka je u bilo koji vrh stupnja 2. $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 4 vrha i on je unija putova. Ako ima komponentu s barem 3 vrha neka je x vrh stupnja 2 u toj komponenti. Očito je $G\backslash(N_0(u) \cup \{x\})$ 2-razbijen.

iii) Neka je G povezan graf s 8 vrhova i u vrh stupnja barem 2 u G. $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 5 vrhova, pa tvrdnja slijedi po i).

iv) Neka je G povezan graf s 9 vrhova. Razmotrit ćemo nekoliko slučajeva, ovisno o maksimalnom stupnju u G.

Ako u G postoji vrh u stupnja barem 4 onda $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 4 vrha i ako bilo koja dva označimo s x i y onda je $G\backslash(N_0(u) \cup \{x, y\})$ 2-razbijen.

Ako u G postoji vrh u stupnja 3 onda $G\backslash N_0(u)$ ima 5 vrhova. Moramo pokazati da se on može 2-razbiti s 2 nestale osobe. Ako u $G\backslash N_0(u)$ postoji vrh stupnja 1, označimo njegovog jedinog susjeda s x i bilo kojeg od ostala 3 vrha s y. Sada je $G\backslash(N_0(u) \cup \{x, y\})$ 2-razbijen. Ako u $G\backslash N_0(u)$ ne postoji vrh stupnja 1, ali postoji vrh stupnja 3 onda postoje ili 2 ili 4 vrha stupnja 3, a ostali su stupnja 2. U oba slučaja postoji barem 1 vrh stupnja 2 u $G\backslash N_0(u)$. Neka su x i y njegovi susjedi. Sada je opet $G\backslash(N_0(u) \cup \{x, y\})$ 2-razbijen. Konačno, ako su u $G\backslash N_0(u)$ svi vrhovi stupnja 2 onda je taj graf unija ciklusa. Neka su x i y vrhovi na udaljenosti 2 u najvećem ciklusu od $G\backslash N_0(u)$. Tada je $G\backslash(N_0(u) \cup \{x, y\})$ 2-razbijen. Ako takvi vrhovi ne postoje lako se vidi da tvrdnja vrijedi.

Ako u G svi vrhovi imaju stupanj najviše 2, neka je u bilo koji vrh stupnja 2. $G\backslash N_0(u)$ ima 6 vrhova i unija je putova. Neka su x i y vrhovi stupnja 2 na udaljenosti 2 u najvećem putu od $G\backslash N_0(u)$. Tada je $G\backslash(N_0(u) \cup \{x, y\})$. Ako takvi vrhovi ne postoje lako se vidi da tvrdnja vrijedi. ■

Teorem 4.8 *Vrijedi*

$$K(2,1,p) = \begin{cases} +\infty, & p \leq 11; \\ 3, & p \geq 12. \end{cases}$$

Dokaz. Prvo dokažimo $K(2,1,11) = +\infty$. Pretpostavimo suprotno, da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da neki par (G, f) realizira $(2,1,11,k)$. Ako G ima komponentu s manje od 3 vrha ona ne može sadržavati sve ključeve, zbog T1, pa promatramo samo komponente od G koje imaju barem 3 vrha. Postoje najviše 3 takve komponente, pa razlikujemo tri slučaja. Pokazat ćemo da u svakom slučaju možemo odabrati skupove agenata i nestalih osoba takve da se graf 2-razbije, a onda očito T2 ne može vrijediti.

1) G ima tri komponente s barem 3 vrha.

Očito ni jedna komponenta ne može imati više od 5 vrhova, a najviše dvije mogu imati 4 vrha. Neka je x vrh u komponenti s točno 3 vrha (postoji barem jedna takva). Neka su u i v vrhovi stupnja barem 2 u ostale dvije komponente od G koje imaju po barem 3 vrha. Ako odaberemo $A = \{u, v\}$, $M = \{x\}$ onda je $G\backslash(N_0(A) \cup M)$ 2-razbijen.

2) G ima dvije komponente s barem 3 vrha.

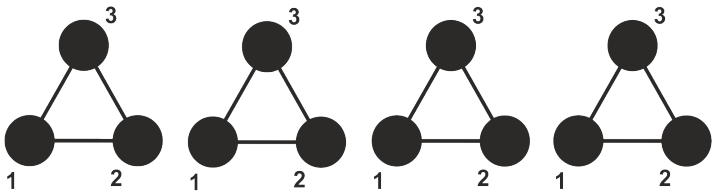
Ako manja komponenta, označimo je s H_1, ima točno 3 vrha onda se ona može 2-razbiti s 1 nestalom osobom. Veća komponenta H_2 ima onda najviše 8 vrhova i može se 2-razbiti s 2 agenta prema Lemi 4.7 iii).

Ako manja komponenta H_1 ima 4 ili 5 vrhova onda veća komponenta H_2 ima najviše 7 ili 6 vrhova i tvrdnja slijedi iz Leme 4.7 i) i ii).

3) G ima jednu komponentu s barem 3 vrha.

Ona očito ima najviše 11 vrhova. Ako sadrži vrh stupnja barem 3 označimo ga s u. $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 7 vrhova i tvrdnja slijedi iz Leme 4.7 ii). S druge strane, ako su svi vrhovi u toj komponenti stupnja najviše 2, neka je u bilo koji vrh stupnja 2. $G\backslash N_0(u)$ je put ili unija putova u kojoj najduži put ima duljinu najviše 8. Odaberimo bilo koji vrh stupnja 2 na najdužem putu od $G\backslash N_0(u)$ i označimo s ga s v. Ako označimo $A = \{u, v\}$ onda $G\backslash N_0(A)$ ima najviše jednu komponentu s 3 ili više vrhova i to je put duljine najviše 5. Označimo s x centar tog puta i neka je $M = \{x\}$. Sada je $G\backslash(N_0(A) \cup M)$ 2-razbijen.

Preostaje dokazati da vrijedi $K(2, 1, 12) = 3$. Za $k \leq 2$ T1 ne može vrijediti, pa neka je $k \geq 3$.



Slika 4.2: Realizacija za $(2, 1, 12, 3)$.

Realizacija za $(2, 1, 12, 3)$ je dana na Slici 4.2. ■

Lema 4.9 *Graf G s najviše 6 vrhova, minimalnim stupnjem 1 i maksimalnim stupnjem najviše 3 može se 2-razbiti s 2 nestale osobe.*

Dokaz. Ako G ima dvije ili više komponenti lako se vidi da tvrdnja vrijedi, pa pretpostavimo da je G povezan. Označimo s w jedinog susjeda proizvoljnog vrha stupnja 1 u G. Ako w ima stupanj 2 neka je x susjed od w različit od lista, i neka je y bilo koji od preostala 3 vrha. Izbor skupa $M = \{x, y\}$ 2-razbija graf. S druge strane, ako je w stupnja 3 neka su x i y druga dva

susjeda od w, različita od početnog lista (najviše jedan od njih može biti list). Sada ponovno izbor $M = \{x, y\}$ 2-razbija G. ■

Lema 4.10 *Neka je G povezan graf s 14 vrhova i maksimalnim stupnjem 3 za koji vrijedi: Ako je w_1 bilo koji vrh stupnja 3 u G onda $G\backslash N_0(w_1)$ sadrži vrh w_2 stupnja 3 u $G\backslash N_0(w_1)$ takav da $G\backslash(N_0(w_1) \cup N_0(w_2))$ ima barem 4 vrha stupnja 3. Tada se G može 2-razbiti s 2 agenta i 2 nestale osobe.*

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati kroz dva slučaja.

1) Minimalni stupanj u G je 1.

Odaberimo bilo koji list u G i označimo njegovog jedinog susjeda s x. Vrh x ima stupanj 2 ili 3.

1.1) Ako x ima stupanj 3 označimo njegova dva susjeda, različita od početnog lista, s y i z. G ima 10 vrhova koji nisu susjedni vrhu x i po pretpostavci barem 3 od njih imaju stupanj 3. Označimo bilo koji od tih vrhova s u. $G\backslash N_0(u)$ ima 10 vrhova. Razmatramo dvije mogućnosti.

1.1.1) $G\backslash N_0(u)$ ima barem dvije komponente s barem 3 vrha u svakoj.

Ako najveća komponenta ima 7 vrhova, tvrdnja slijedi iz Leme 4.7 ii). Ako najveća komponenta ima 6 vrhova onda druga najveća komponenta ima najviše 4 vrha. Barem jedna od tih komponenti sadrži vrh stupnja 1. Ako je on u komponenti sa 6 vrhova onda se ta komponenta može 2-razbiti s 2 nestale osobe, prema Lemi 4.9, a druga najveća komponenta se može 2-razbiti s 1 agentom. Ako je list u drugoj najvećoj komponenti, onda se ta komponenta može 2-razbiti s 1 nestalom osobom, izborom jedinog susjeda od lista za nestalu osobu, a komponentu od 6 vrhova se može 2-razbiti s preostalim 1 agentom i 1 nestalom osobom prema Lemi 4.7 ii). Ako najveća komponenta ima najviše 5 vrhova tvrdnja slijedi analognom analizom, komponenta koja sadrži list može se 2-razbiti s 2 nestale osobe, a komponenta od 5 vrhova s 1 agentom, prema Lemi 4.7 i).

1.1.2) $G\backslash N_0(u)$ ima jednu komponentu s barem 3 vrha.

Lako se vidi da se vrh x nalazi u najvećoj komponenti i da u $G\backslash N_0(u)$ postoji barem 6 vrhova koji nisu susjedni s x. Ako neki vrh od tih 6 vrhova ima stupanj 3, označimo ga s v. Sada $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ ima 6 vrhova i jedan od njih je list pa tvrdnja slijedi po Lemi 4.9. S druge strane, ako svi vrhovi koji nisu susjedni s x u $G\backslash N_0(u)$ imaju stupanj najviše 2 onda su jedini vrhovi u $G\backslash N_0(u)$ koji imaju stupanj 3 x, y i z, no to je kontradikcija s pretpostavkom.

1.2) Ako x ima stupanj 2 označimo njegovog susjeda koji nije list s y. Sada $G\backslash\{y\}$ ima jednu komponentu od 2 vrha i još 11 vrhova. No onda tvrdnja slijedi iz Teorema 4.8.

2) Minimalni stupanj u G je barem 2.

Neka je u bilo koji vrh stupnja 3. $G\backslash N_0(u)$ ima 10 vrhova i po pretpostavci barem 5 ih ima stupanj 3. Ako u $G\backslash N_0(u)$ postoji list, dokaz se nastavlja kao i u slučaju 1), pa pretpostavimo da je i u $G\backslash N_0(u)$ minimalni stupanj barem 2. To znači da u $G\backslash N_0(u)$ ne može postojati točno 5 vrhova stupnja 3, pa zaključujemo da ih je barem 6. Primijetimo da u $G\backslash N_0(u)$ može biti točno 6 ili 8 vrhova stupnja 3. Razlikujemo dvije mogućnosti.

2.1) $G\backslash N_0(u)$ ima barem dvije komponente s barem 3 vrha.

Dokaz je analogan dokazu slučaja 1.1.1), osim kad najveća komponenta ima točno 6 vrhova. Barem jedan vrh u komponenti od 6 vrhova je stupnja 3, pa se odabirom njega za agenta ta komponenta može 2-razbiti. Druga najveća komponenta se može 2-razbiti s 2 nestale osobe.

2.2) $G\backslash N_0(u)$ ima jednu komponentu s barem 3 vrha.

Prvo dokažimo da u $G\backslash N_0(u)$ postoji put vrhova stupnja 3 koji sadrži barem 3 vrha. Zaista, ako u $G\backslash N_0(u)$ ne bi postojao vrh stupnja 3 čija su 2 susjeda također stupnja 3, svi vrhovi stupnja 3 bi imali barem 2 susjeda

stupnja 2, a kako postoji barem 6 vrhova stupnja 3 mora postojati barem 12 bridova koji povezuju vrhove stupnja 3 s onima stupnja 2. No, postoje najviše 4 vrha stupnja 2, s najviše 8 njima incidentnih bridova, pa je to nemoguće.

Sada dokažimo da se $G\backslash N_0(u)$ može 2-razbiti s 1 agentom i 2 nestale osobe. Neka je H_3 maksimalni povezani podgraf od $G\backslash N_0(u)$ koji se sastoji samo od vrhova stupnja 3 (u $G\backslash N_0(u)$). Ako H_3 ima točno 3 vrha, w_1, w_2, w_3, onda je bar jedan od vrhova w_1, w_3 susjedan s nekim vrhom x stupnja 2. Štoviše, postoji vrh u $\{w_1, w_2, w_3\}$ s kojim x nije susjedan i udaljenost između tog vrha i x je točno 2. Ako odaberemo taj vrh kao agenta, preostali graf ima 6 vrhova i u njemu x ima stupanj 0 ili 1, pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.9. S druge strane, ako H_3 ima više od 3 vrha onda barem jedan od njih mora biti susjedan s vrhom x stupnja 2. Označimo taj vrh s v_2. Ako su druga dva susjeda od v_2 stupnja 3 onda oni tvore put $v_1v_2v_3$. Ako bilo koji od v_1, v_3 ima susjeda stupnja 2 onda nastavljamo kao i prije, a ukoliko i v_1 i v_3 imaju samo susjede stupnja 3 onda nisu susjedni s x, i odabirom bilo kojeg od njih, npr. v_1 za agenta x ostaje stupnja najviše 1, pa tvrdnja opet slijedi iz Leme 4.9. ■

Teorem 4.11 *Vrijedi*

$$K(2,2,p) = \begin{cases} +\infty, & p \leq 14; \\ 3, & p \geq 15. \end{cases}$$

Dokaz. Prvo dokažimo $K(2,2,14) = +\infty$. Pretpostavimo suprotno, da se četvorka $(2,2,14,k)$ može realizirati za neki $k \in \mathbb{N}$, i neka je (G, f) realizacija te četvorke. Komponente od G koje imaju najviše dva vrha ne mogu sadržavati sve ključeve, pa je dovoljno pokazati da se G može 2-razbiti s 2 agenta i 2 nestale osobe, i pritom ćemo zanemarivati sve komponente s manje od 3 vrha. Razlikujemo četiri slučaja.

1) G ima četiri komponente s barem 3 vrha.

Očito ni jedna komponenta ne može imati više od 5 vrhova, a najviše dvije mogu imati 4 vrha. Prema Lemi 4.7 i) dvije najveće komponente se mogu 2-razbiti s 2 agenta, a očito dvije najmanje komponene možemo 2-razbiti s 2 nestale osobe.

2) G ima tri komponente s barem 3 vrha.

Lako se vidi da najveća komponenta može imati najviše 8 vrhova.

Ako najveća komponenta ima točno 8 vrhova, onda se može 2-razbiti s 2 agenta prema Lemi 4.7 iii). Dvije manje promatrane komponente očito imaju po točno 3 vrha svaka, pa se one mogu 2-razbiti s po 1 nestalom osobom svaka.

Ako najveća komponenta ima 7 vrhova može se 2-razbiti s 1 agentom i 1 nestalom osobom prema Lemi 4.7 ii), druga najveća komponenta se može 2-razbiti s 1 agentom, a treća s 1 nestalom osobom.

Ako najveća komponenta ima 6 vrhova, razlikujemo dvije mogućnosti. Ako postoji vrh u stupnja barem 3 u komponenti sa 6 vrhova onda je u $G\backslash N_0(u)$ ta komponenta 2-razbijena. U drugoj najvećoj komponenti postoji vrh v stupnja barem 2, pa je u $G\backslash(N_0(u)\cup N_0(v))$ i ta komponenta 2-razbijena, a treća najveća komponenta se može 2-razbiti s 2 nestale osobe. S druge strane, ako u komponenti veličine 6 nema vrhova stupnja barem 3 onda je ona ciklus ili put i može se 2-razbiti s 2 nestale osobe. Ostale dvije komponente mogu se 2-razbiti s po 1 agentom u svakoj.

Ako najveća komponenta ima 5 vrhova prema Lemi 4.7 i) dvije najveće komponente se mogu 2-razbiti s po 1 agentom u svakoj, a treća najveća komponenta se može 2-razbiti s 2 nestale osobe.

3) G ima dvije komponente s barem 3 vrha.

Ako najveća komponenta ima 11 vrhova može se 2-razbiti s 2 agenta i 1 nestalom osobom prema Teoremu 4.8, a druga najveća komponenta se može 2-razbiti s 1 preostalom nestalom osobom.

Ako najveća komponenta, H_1, ima 10 vrhova promatramo nekoliko slučajeva. Ako postoji vrh u stupnja barem 3 u komponenti H_1 onda $H_1 \backslash N_0(u)$ ima najviše 6 vrhova. Tih 6 vrhova se može 2-razbiti s 1 agentom ako je jedan od vrhova stupnja barem 3, ili s 2 nestale osobe ako su svi vrhovi stupnja najviše 2. Ako su svi vrhovi u H_1 stupnja najviše 2 onda se H_1 može 2-razbiti s 2 agenta.

Dakle, komponentu H_1 se može 2-razbiti ili s 2 agenta ili s 1 agentom i 2 nestale osobe. U prvom slučaju druga najveća komponenta se može 2-razbiti s 2 nestale osobe, a u drugom slučaju s 1 agentom.

Ako najveća komponenta ima 9 vrhova tvrdnja slijedi direktno iz Leme 4.7 i) i iv).

Ako najveća komponenta ima 8 vrhova promatramo prvo drugu najveću komponentu. Ako ona ima manje od 6 vrhova može se 2-razbiti s 1 agentom, i zatim se najveća komponenta može 2-razbiti s 1 agentom i 2 nestale osobe, prema Lemi 4.7 i) i iii). Ukoliko druga najveća komponenta ima točno 6 vrhova, onda se kao i ranije može 2-razbiti ili s 1 agentom ili s 2 nestale osobe, ovisno o najvećem stupnju u toj komponenti. U prvom slučaju možemo najveću komponentu razbiti s 1 agentom i 2 nestale osobe, a u drugom slučaju s 2 agenta, po Lemi 4.7 iii).

Ako najveća komponenta ima 7 vrhova tvrdnja slijedi direktno iz Leme 4.7 ii).

4) G ima jednu komponentu s barem 3 vrha. Promatramo 3 podslučaja.

4.1) U G postoji vrh u stupnja barem 4.

$G \backslash N_0(u)$ ima najviše 9 vrhova, pa se može 2-razbiti s 1 agentom i 2 nestale osobe prema Lemi 4.7 iv).

4.2) Svi vrhovi u G imaju stupanj najviše 2.

Lako se vidi da je moguće izabrati 2 agenta i 2 nestale osobe tako da sve preostale komponente imaju najviše $\left\lceil \frac{14-3-3-1-1}{4} \right\rceil = 2$ vrha.

4.3) Maksimalni stupanj u G je 3.

Neka je u bilo koji vrh stupnja 3. $G \backslash N_0(u)$ ima 10 vrhova. Ako su svi stupnja 1 ili 2, lako se vidi da tvrdnja vrijedi. Ako u $G \backslash N_0(u)$ postoji vrh v stupnja 3 onda $G \backslash (N_0(u) \cup N_0(v))$ ima 6 vrhova. Ako su sada svi vrhovi stupnja 1 ili 2, tvrdnja ponovno lako slijedi. U slučaju da u $G \backslash (N_0(u) \cup N_0(v))$ ponovno postoji vrh stupnja 3 onda vrijedi točno jedno od sljedećeg:

a) $G \backslash (N_0(u) \cup N_0(v))$ ima barem 1 list.

Sada tvrdnja slijedi direktno iz Leme 4.9.

b) $G \backslash (N_0(u) \cup N_0(v))$ ima 4 vrha stupnja 3 i 2 vrha stupnja 2.

U ovom slučaju polazni graf G zadovoljava uvjete Leme 4.10, pa tvrdnja slijedi odatle.

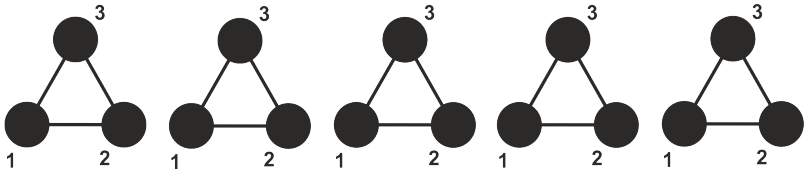
c) $G \backslash (N_0(u) \cup N_0(v))$ ima 2 vrha stupnja 3 i 4 vrha stupnja 2.

Neka su w_1 i w_2 vrhovi stupnja 3.

Ako su w_1 i w_2 susjedni onda mogu imati ili 0 ili 1 zajedničkih susjeda. Ako nemaju zajedničkih susjeda onda 4 preostala vrha moraju biti spojeni dva i dva bridovima, pa se izborom w_1 i w_2 za nestale osobe može 2-razbiti graf. Ako imaju 1 zajedničkog susjeda, i svaki od njih ima po još jednog susjeda, označimo s x susjeda od w_1, a s y susjeda od w_2. Sada je $G \backslash (N_0(u) \cup N_0(v) \cup \{w_1, y\})$ 2-razbijen.

Ako w_1 i w_2 nisu susjedni onda moraju imati 2 zajednička susjeda, svaka druga opcija vodi u kontradikciju s pretpostavljenom distribucijom stupnjeva ili s brojem vrhova. No, ako imaju 2 zajednička susjeda lako se vidi da je

$G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v) \cup \{w_1, w_2\})$ 2-razbijen.



Slika 4.3: Realizacija za $(2, 2, 15, 3)$.

Dokazali smo $K(2, 2, 14) = +\infty$. Preostaje pokazati da vrijedi $K(2, 2, 15) = 3$. Lako se vidi da mora biti $K(2, 2, 15) \geq 3$ jer za $k \leq 2$ ne vrijedi T1. Realizacija za $(2, 2, 15, 3)$ dana je na Slici 4.3. ■

Prisjetimo se, graf G s p vrhova uz k ključeva nije otporan na a agenata i m nestalih osoba ako za svaku moguću distribuciju k ključeva postoje skupovi $A, M \subseteq V$, $|A| = a$, $|M| = m$, takvi da ne vrijedi ili T1 ili T2 ili oboje.

Radi jednostavnosti, ako za (G, f) i vrh $u \in V(G)$ vrijedi $f(u) = \{i_1, ..., i_l\} \subseteq \{1, ..., k\}$, $l \leq k$ reći ćemo da **vrh** u **ima ključeve** $i_1, ..., i_l$ ili da **vrh** u **ima** l **ključeva**. Za graf G i distribuciju k ključeva, $k \in \mathbb{N}$, ključeve bez smanjenja općenitosti možemo označavati prirodnim brojevima $\{1, ..., k\}$.

Lema 4.12 *Neka je $k \leq 5$ i neka vrijedi $f(u) \cup f(v) \neq \{1, ..., k\}$, za svaki par vrhova $\{u, v\} \subseteq V(G)$ u promatranom paru (G, f). Tada vrijedi:*

i) Graf G s 4 vrha nije otporan na 1 nestalu osobu.

ii) Graf G s 6 vrhova nije otporan na 2 nestale osobe.

iii) Graf G s 8 vrhova nije otporan na 1 agenta i 1 nestalu osobu, ni na 3 nestale osobe.

iv) Graf G s 10 vrhova nije otporan na 1 agenta i 2 nestale osobe.

v) Graf G s 12 vrhova nije otporan na 1 agenta i 3 nestale osobe.

Dokaz. Tvrdnje ćemo dokazati za povezane grafove, a odatle se lako vidi da vrijede i za nepovezane grafove. Bez smanjenja općenitosti možemo pret-

postaviti $k = 5$.

i) Neka je G povezan graf s 4 vrha. Primijetimo da za bilo koju funkciju distribucije f i za svaki $u \in V(G)$ vrijedi $|f(u)| \leq 3$, jer po pretpostavci nijedan par vrhova ne smije imati svih 5 ključeva. Pretpostavimo suprotno, da je G uz 5 ključeva otporan na 1 nestalu osobu. To znači da u G svaka trojka vrhova mora imati svih 5 ključeva. No, to je nemoguće. Naime, s obzirom da svaki ključ mora biti distribuiran na barem 2 vrha, moramo distribuirati barem 10 instanci ključeva, pa barem 1 vrh mora imati barem 3 ključa. Kako je 3 maksimalan broj ključeva koje vrh smije imati, možemo pretpostaviti da neki vrh ima točno skup ključeva $\{1, 2, 3\}$. Sada nijedan od preostalih vrhova ne smije imati skup ključeva $\{4, 5\}$. Budući da ključeve 4 i 5 moramo podijeliti svakog po 2 puta na preostala 3 vrha, lako se vidi da je to nemoguće.

ii) Neka je G povezan graf sa 6 vrhova. Istim razmatranjem kao u i) zaključujemo da svaka 4 vrha u G moraju imati sve ključeve, svaki ključ mora biti distribuiran na bar 3 vrha i nijedan vrh ne smije imati više od 3 ključa. Također, moramo distribuirati barem 15 instanci ključeva pa barem 1 vrh mora imati barem 3 ključa. Pretpostavimo da jedan od vrhova ima skup ključeva $\{1, 2, 3\}$. Nijedan od preostalih vrhova ne smije imati skup $\{4, 5\}$, ali ključeve 4 i 5 moramo distribuirati svakog po 3 puta između preostalih 5 vrhova, što je nemoguće.

iii) Neka je G povezan graf s 8 vrhova. Prvo dokažimo da G nije otporan na 1 agenta i 1 nestalu osobu. Ako u G postoji vrh u stupnja barem 3 onda $G \backslash N_0(u)$ ima najviše 4 vrha i tvrdnja slijedi iz i). S druge strane, ako su svi vrhovi u G stupnja najviše 2 lako se vidi da se G može 2-razbiti. Dokažimo sada tvrdnju za 3 nestale osobe. Svaki od 5 ključeva mora biti distribuiran barem 4 puta, pa barem 1 vrh mora imati skup od 3 ključa, pretpostavimo

$\{1, 2, 3\}$. Sada zbog pretpostavke nijedan vrh ne smije imati skup $\{4, 5\}$, a ta preostala 2 ključa moramo distribuirati 4 puta svakog između preostalih 7 vrhova, što je nemoguće.

iv) Neka je G povezan graf s 10 vrhova. Ako postoji vrh u u G stupnja barem 3 onda $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 6 vrhova i tvrdnja slijedi iz ii). Ukoliko su svi vrhovi u G stupnja najviše 2 lako se vidi da se G može 2-razbiti.

v) Neka je G povezan graf s 12 vrhova. Ako postoji vrh u u G stupnja barem 3 onda $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 8 vrhova i tvrdnja slijedi iz iii). Ukoliko su svi vrhovi u G stupnja najviše 2 lako se vidi da se G može 2-razbiti. ■

Lema 4.13 *Neka vrijedi $f(u) \cup f(v) \neq \{1, ..., k\}$, za svaki par vrhova $\{u, v\} \subseteq V(G)$ u promatranom paru (G, f). Graf G s 9 vrhova nije otporan na 3 nestale osobe za $k \leq 5$ ako za G vrijedi barem jedno od:*

a) nepovezan je

b) G je ciklus ili ciklus s jednim dodanim bridom

c) ima list sa susjedom stupnja 2

d) ima 2 lista susjedna bilo kojem vrhu grafa sa 7 vrhova

e) ima 2 susjedna vrha stupnja 2 sa zajedničkim susjedom.

Dokaz. Ako je G nepovezan tvrdnja slijedi iz Leme 4.12 i), ii) i iii). Lako se vidi da tvrdnja vrijedi za graf sa svojstvom b). Ako vrijedi c), označimo s u list, s v njegovog susjeda stupnja 2, i s w drugog susjeda od v. Ako vrijedi d) označimo s w vrh susjedan dvama listovima, a ako vrijedi e) neka je w zajednički susjed 2 susjedna vrha stupnja 2. U svakom od slučajeva, uklanjanjem vrha w, $G\backslash\{w\}$ je graf čija komponenta s barem 3 vrha ima najviše 6 vrhova pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.12 ii). ■

Lema 4.14 *Neka je G povezan graf sa 17 vrhova, $\Delta(G) = 3$ i $\Delta(G\backslash N_0(u)) = 3$, za bilo koji vrh u stupnja 3 u G. G nije otporan na 2 agenta i 3 nestale*

osobe za $k \leq 5$ *ako* G *sadrži bilo koji od podgrafova:*

a) put duljine barem 5 *u kojem krajevi imaju stupanj* 3*, a unutrašnji vrhovi stupanj* 2

b) ciklus duljine 4 *u kojem dva vrha na dijagonali imaju stupanj* 3

c) ciklus duljine 5 *u kojem barem jedan vrh ima stupanj* 2

d) ciklus duljine 6 *u kojem su vrh stupnja* 3 *i vrh stupnja* 2 *na udaljenosti* 3

e) ciklus duljine 7 *u kojem postoje dva susjedna vrha stupnja* 2*, i vrh stupnja* 3 *na udaljenosti* 3 *od svakog od njih.*

Dokaz. Neka je G graf sa zadanim uvjetima. Prvo primijetimo da ako je u vrh stupnja 3 u G, onda $G\backslash N_0(u)$ ima 13 vrhova i ako je nepovezan tvrdnja slijedi iz Leme 4.12. To ćemo više puta koristiti tijekom dokaza.

a) Ako su krajevi promatranog puta susjedni onda označimo jednog od njih s u. $G\backslash N_0(u)$ je nepovezan graf i tvrdnja slijedi. Pretpostavimo stoga da krajevi puta nisu susjedni. Ako imaju zajedničkog susjeda stupnja 3 onda označimo tog susjeda s u. $G\backslash N_0(u)$ je ili nepovezan graf ili put, pa tvrdnja opet lako slijedi. Ako krajevi puta imaju zajedničkog susjeda stupnja 2 onda neka je u bilo koji od krajeva puta i v bilo koji vrh stupnja 3 u $G\backslash N_0(u)$. Tada $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ ima 9 vrhova i ili je nepovezan ili ima list sa susjedom stupnja 2, pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.13 a) ili c). Pretpostavimo da nijedno od toga nije slučaj, krajnji vrhovi puta nisu susjedni i nemaju zajedničkih susjeda. Označimo te krajeve s u i v. $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ ima 9 vrhova i ili je nepovezan ili je put, pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.13 a) ili c).

b) Vrhovi stupnja 3 na dijagonali ciklusa imaju 2 zajednička susjeda. Primijetimo da ne mogu biti i međusobni susjedi, a ako imaju i trećeg zajedničkog susjeda lako se vidi da on mora biti stupnja 3. Označimo li ga s u, $G\backslash N_0(u)$ ostaje nepovezan pa tvrdnja slijedi. Pretpostavimo da nemaju

zajedničkog susjeda, nego 2 zajednička susjeda stupnja 2 u ciklusu i još svaki po jednog susjeda. Označimo jednog od tih vrhova stupnja 3 u ciklusu s u, a drugog s x. $G\backslash N_0(u)$ ima 13 vrhova, a x je stupnja 1. Možemo pretpostaviti da je $G\backslash N_0(u)$ povezan jer u protivnom tvrdnja odmah slijedi. Ako jedini susjed od x u $G\backslash N_0(u)$ ima stupanj 2, onda nastavljamo promatrati taj put i neka je v prvi vrh stupnja 3 počevši od x (mora postojati barem jedan vrh stupnja 3 zbog uvjeta leme). $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ je ili nepovezan ili je to put od 9 vrhova, pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.12 ili Leme 4.13 a) ili c).

S druge strane, ako jedini susjed vrha x u $G\backslash N_0(u)$ ima stupanj 3, označimo ga sa z. Ako bilo koji susjed od z ima stupanj 3 u $G\backslash N_0(u)$, označimo ga s v. Sada je x izoliran u $G\backslash(N_0(u)\cup N_0(v))$, pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.12 iii). Pretpostavimo da oba susjeda od z koja su različita od x imaju stupanj 2. Sada promatramo njihove susjede. Ako ijedan od njih ima stupanj 3 u $G\backslash N_0(u)$, označimo ga s v. $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ ima 9 vrhova i to tako da su 2 lista susjedna jednom vrhu od preostalih 7, pa tvrdnja slijedi po Lemi 4.13 d).

U slučaju da oba ta vrha imaju stupanj 2, nastavljamo promatrajući njihove susjede. Ako bilo koji od tih susjeda ima stupanj 3 u $G\backslash N_0(u)$, onda ga označimo s v, pa $G\backslash(N_0(u)\cup N_0(v))$ ima 9 vrhova i tvrdnja slijedi iz Leme 4.13 c). Štoviše, od sada pa nadalje, kad dođemo do vrha stupnja 3 na bilo kojem od putova koji započinju u z i ne prolaze kroz x, označimo ga s v, pa za graf $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ tvrdnja slijedi iz Leme 4.13 c). Ukoliko takav vrh stupnja 3 ne postoji, onda je $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(z))$ graf s 9 vrhova koji je put ili unija putova, pa tvrdnja ponovno slijedi iz Leme 4.13 a) ili c).

c) Lako se vidi da barem jedan vrh u ciklusu mora imati stupanj 3, te da u ciklusu moraju postojati vrh stupnja 2 i stupnja 3 na udaljenosti 2. Označimo vrh stupnja 3 s u, a vrh stupnja 2 na udaljenosti 2 od u s x.

$G\backslash N_0(u)$ je ili nepovezan s jednom komponentom od 2 vrha ili ima list x sa susjedom stupnja 2, susjednim nekom vrhu od preostalih 11. Ako nastavimo promatrati vrhove na putu koji počinje u x, moramo doći do vrha stupnja 3. Označimo li ga s v, $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ ima 9 vrhova i ili je nepovezan ili je put, pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.13 a) ili c).

d) Označimo vrh stupnja 3 s u, a vrh stupnja 2 na udaljenosti 3 od u s x. Pretpostavimo da je $G\backslash N_0(u)$ povezan. Promotrimo putove koji počinju u susjedima od x. Barem jedan od tih susjeda ima stupanj 2 u $G\backslash N_0(u)$ i na barem jednom od tih putova mora postojati vrh stupnja 3. Označimo ga s v. Sada tvrdnja slijedi za $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ prema Lemi 4.13 c).

e) Označimo s u vrh stupnja 3 i promatrajmo $G\backslash N_0(u)$. Tvrdnja slijedi analogno tvrdnji d). ■

Lema 4.15 *Neka je G povezan graf sa 17 vrhova, $\delta(G) = 1$, $\Delta(G) = 3$. Za $k \leq 5$ G nije otporan na 2 agenta i 3 nestale osobe.*

Dokaz. Neka je G graf s danim uvjetima. Prvo primijetimo da ako je u vrh stupnja 3 u G onda $G\backslash N_0(u)$ ima 13 vrhova i ukoliko je nepovezan tvrdnja slijedi iz Leme 4.12. Tu činjenicu ćemo koristiti više puta tijekom dokaza.

Neka je x vrh stupnja 1 i y njegov jedini susjed. Ako je y stupnja 2 onda promotrimo dalje put koji počinje u x i označimo s u prvi vrh stupnja 3 na tom putu. $G\backslash N_0(u)$ je ili nepovezan ili je put, pa tvrdnja lako slijedi. S druge strane, ako y ima stupanj 3 onda promotrimo putove koji počinju u y i ne prolaze kroz x. Ako nijedan od njih ne sadrži vrh stupnja 3 (osim y), onda je $G\backslash N_0(y)$ ili put od 13 vrhova, ili nepovezan graf, pa tvrdnja opet lako slijedi. Pretpostavimo da postoji vrh u stupnja 3 na jednom od promatranih putova. Ako je $G\backslash N_0(u)$ nepovezan tvrdnja lako slijedi, a ako je povezan promatramo dvije mogućnosti.

1) y ima stupanj 2 u $G\backslash N_0(u)$.

Ako je $G\backslash N_0(u)$ put, tvrdnja lako slijedi, a ako to nije slučaj onda mora postojati vrh stupnja 3 na putu koji počinje u x. Označimo li taj vrh s v, $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ je ili put ili nepovezan graf s 9 vrhova pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.13 a) ili c).

2) y ima stupanj 3 u $G\backslash N_0(u)$.

Ako barem dva puta koja počinju u y imaju duljinu barem 2 onda je $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(y))$ nepovezan graf s 9 vrhova i tvrdnja slijedi kao i prije. Ako to nije slučaj onda promotrimo najdulji put koji počinje u y i neka je v prvi vrh stupnja 3 na tom putu. $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ je ili nepovezan graf ili graf opisan u Lemi 4.13 d), pa tvrdnja slijedi odatle. Ukoliko takav vrh stupnja 3 ne postoji onda je $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(y))$ put od 9 vrhova, pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.13 c). ■

Lema 4.16 *Neka je G povezan graf sa 17 vrhova, $\delta(G) = 2$, $\Delta(G) = 3$ i $\Delta(G\backslash N_0(u)) = 3$ za bilo koji vrh u stupnja 3 u G. Za $k \leq 5$, G nije otporan na 2 agenta i 3 nestale osobe.*

Dokaz. Neka je G graf s danim uvjetima. Pokazat ćemo da u svim slučajevima možemo ili s 2 agenta dobiti nepovezan graf s 9 vrhova, pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.13 a), ili da G sadrži neki od podgrafova opisanih u Lemi 4.14, pa G nije otporan za 5 ključeva. Razmatramo dva slučaja.

1) U G postoje dva susjedna vrha stupnja 2.

Ako ijedan od njih ima susjeda stupnja 2 onda promatramo obje strane tog puta i zbog $\delta(G) = 2$ i s jedne i druge strane postoje vrhovi stupnja 3. Ako su to različiti vrhovi tvrdnja slijedi iz Leme 4.14 a). Ukoliko je vrh stupnja 3 zajednički za obje strane puta, označimo taj vrh s u. $G\backslash N_0(u)$ je nepovezan graf, pa tvrdnja slijedi.

Pretpostavimo da oba promatrana vrha stupnja 2 imaju susjede stupnja 3. Označimo vrhove stupnja 2 s x i y, a njihove susjede s u i v, redom.

Ako je $u = v$ tvrdnja lako slijedi promatranjem puta koji počinje u trećem susjedu od u i stupnjeva vrhova na tom putu.

Ako su u i v susjedni onda je u $G\backslash N_0(u)$ y izoliran i preostali graf je nepovezan.

Ako u i v imaju zajedničkog susjeda tvrdnja slijedi iz Leme 4.14 c).

Pretpostavimo da u i v nisu susjedni i da nemaju zajedničkog susjeda. Ako ijedan od njih ima susjeda stupnja 3, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je to vrh u, označimo tog susjeda s w. Ako v i w imaju zajedničkog susjeda tvrdnja slijedi iz Leme 4.14 d) (w i y su na udaljenosti 3). Ako w i v nemaju zajedničkih susjeda onda je $G\backslash(N_0(w) \cup N_0(v))$ nepovezan (x je izoliran), pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.13 a).

Neka u i v imaju samo susjede stupnja 2. Ako su neka dva susjeda od u međusobno susjedna onda je $G\backslash N_0(v)$ nepovezan (analogno ako su neka dva susjeda od v međusobno susjedna). Ukoliko je neki susjed od u susjedan nekom susjedu vrha v onda promotrimo $G\backslash N_0(u)$. Ako je v jedini vrh stupnja 3 u $G\backslash N_0(u)$ lako se vidi da tvrdnja vrijedi, a ako to nije slučaj, onda neka je w bilo koji drugi vrh stupnja 3 u $G\backslash N_0(u)$. Sada $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(w))$ ima 9 vrhova i ili je nepovezan ili v ima susjedna 2 lista, pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.13 d).

Pretpostavimo da nema bridova među susjedima od u i v. Ako dva susjeda od u (ili v) imaju zajedničkog susjeda onda je $G\backslash N_0(u)$ ($G\backslash N_0(v)$) nepovezan ukoliko je zajednički susjed imao stupanj 2. A ako zajednički susjed ima stupanj 3, tvrdnja slijedi iz Leme 4.14 b).

Ako susjed od u i susjed od v imaju zajedničkog susjeda tvrdnja slijedi iz Leme 4.14 a) ili e), ovisno o stupnju tog susjeda.

Neka svi susjedi od u i v imaju različite susjede. Ako ijedan od njih ima stupanj 3, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo neki susjed od u, označimo ga s w. Sada je $G\backslash(N_0(v) \cup N_0(w))$ graf iz Leme 4.13 c).

Pretpostavimo da svi susjedi od susjeda od u i v (osim u i v) imaju stupanj 2. Ako su ijedna dva od njih susjedna lako se vidi da je $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ nepovezan. Ako bilo koji od njih ima susjeda stupnja 2 onda imamo put duljine barem 3 od vrhova stupnja 2 (kojem krajevi moraju imati stupanj 3), pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.14 a).

Pretpostavimo da svi imaju susjede stupnja 3.

Promotrimo one od tih vrhova kojima je u bliži nego v (reći ćemo da su oni na grani vrha u, i analogno za v). Ako dva od njih imaju zajedničkog susjeda stupnja 3, označimo ga s w. $G\backslash(N_0(v) \cup N_0(w))$ je nepovezan. Analogno tvrdnja vrijedi ako dva vrha s grane od v imaju zajedničkog susjeda stupnja 3. S druge strane, ako jedan vrh s grane od u i jedan s grane od v imaju zajedničkog susjeda stupnja 3, označimo ga s w. Sada je $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(w))$ graf iz Leme 4.13 d).

Ukoliko nema zajedničkih susjeda, nego su to 4 različita vrha stupnja 3, onda smo dosad razmotrili 16 vrhova i preostaje samo još jedan vrh. On može biti stupnja 2 ili 3, a u svakom slučaju nije susjedan barem jednom od ova posljednja 4 vrha stupnja 3. Označimo ta 4 vrha s u_1, u_2, v_1, v_2, ovisno jesu li na grani od u ili v. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da u_1 nije susjedan tom posljednjem, sedamnaestom vrhu. Lako se vidi da tada u_1 mora biti susjedan barem jednom od vrhova $\{v_1, v_2\}$. Bez smanjenja općenitosti, neka je u_1 susjedan s v_1. No sada je $G\backslash(N_0(u_1) \cup N_0(v))$ nepovezan.

2) Nema susjednih vrhova stupnja 2.

Primijetimo da u grafu mora postojati barem jedan vrh stupnja 2, označimo ga s x, a njegova dva susjeda stupnja 3 s u i v. Lako se vidi da skup

$\{u, v\}$ ima barem još jednog susjeda osim x. Ukoliko u i v imaju zajedničkog susjeda stupnja 2 tvrdnja slijedi iz Leme 4.14 b), a ako imaju zajedničkog susjeda stupnja 3, označimo li ga s w, x je izoliran u $G\backslash N_0(w)$, pa smo dobili nepovezan graf. Pretpostavimo da u i v nemaju zajedničkih susjeda. Tada svaki ima barem po još jednog susjeda. Promotrimo sljedeće mogućnosti:

2.1) u i v imaju susjede stupnja 3 i ti susjedi nisu susjedni i nemaju zajedničkih susjeda.

Označimo te susjede s u_1 i v_1. Graf $G\backslash(N_0(u_1) \cup N_0(v_1))$ je nepovezan (x je izoliran).

2.2) u i v imaju barem po jednog susjeda stupnja 3 i ti susjedi su susjedni ili imaju zajedničkog susjeda stupnja 3.

Tvrdnja slijedi iz Leme 4.14 c) ili d).

2.3) u i v imaju svaki po susjeda stupnja 3 i ti susjedi imaju zajedničkog susjeda stupnja 2. Označimo susjede od u i v, različite od x, sa z i w, redom. Promatramo tri podslučaja.

2.3.1) u i v su susjedni.

U grafu $G\backslash N_0(z)$ postoji list sa susjedom stupnja 2 (x i v) u grafu od 11 vrhova, pa uklanjanjem bilo kojeg preostalog vrha stupnja 3 (sigurno postoji barem jedan) preostali graf ili je nepovezan ili tvrdnja slijedi iz Leme 4.13 c).

2.3.2) Barem jedan od vrhova u i v ima još jednog susjeda stupnja 3, bez smanjenja općenitosti neka je to vrh u. Označimo tog susjeda s y.

Ako je y susjedan bilo kojem susjedu od v, različitom od x, tvrdnja slijedi iz Leme 4.14 c), pa pretpostavimo da to nije slučaj. Sada $G\backslash(N_0(y) \cup N_0(v))$ ima list sa susjedom stupnja 2, pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.13 c).

2.3.3) u i v oboje imaju po još jednog susjeda stupnja 2.

Ako ti susjedi imaju zajedničkog susjeda stupnja 3, tvrdnja slijedi iz Leme 4.14 d), pa pretpostavimo da nemaju zajedničkog susjeda nego svaki još po jednog susjeda, i označimo te susjede s u_1 i v_1. Ti vrhovi moraju imati stupanj 3 jer nema susjednih vrhova stupnja 2 u grafu.

Ako su u_1 i v_1 susjedni onda je $G\backslash(N_0(u_1) \cup N_0(v))$ ili graf iz Leme 4.13 d) ili je nepovezan, pa tvrdnja slijedi.

Ako u_1 i v_1 imaju zajedničkog susjeda onda je $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v_1))$ ili graf iz Leme 4.13 c) ili je nepovezan, pa tvrdnja ponovno slijedi.

Ako je jedan od njih, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo u_1, susjedan sa z i w onda je $G\backslash N_0(u_1)$ nepovezan. Ako je u_1 susjedan sa z (ili v_1 s w) onda je $G\backslash(N_0(u_1) \cup N_0(v))$ (ili $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v_1))$) nepovezan.

Ako u_1 i z imaju zajedničkog susjeda onda je $G\backslash(N_0(u_1) \cup N_0(v))$ nepovezan i analogno ako v_1 i w imaju zajedničkog susjeda.

Ako nemaju zajedničkih susjeda i u_1 je susjedan s w onda je $G\backslash(N_0(u_1) \cup N_0(z))$ graf iz Leme 4.13 c) i tvrdnja slijedi.

I konačno, ako nijedna dva vrha od u_1, v_1, z i w nisu susjedni i nemaju zajedničkih susjeda onda je $G\backslash(N_0(u_1) \cup N_0(w))$ graf iz Leme 4.13 c), pa tvrdnja opet slijedi.

2.4) Samo jedan od vrhova u i v ima susjeda stupnja 3, bez smanjenja općenitosti neka je to vrh u. Označimo susjeda stupnja 3 s w.

Ako su u i v susjedni onda za $G\backslash N_0(w)$ tvrdnja slijedi iz Leme 4.13 c). Pretpostavimo da to nije slučaj. To znači da v ima dva susjeda stupnja 2. Oni po pretpostavci nisu susjedni i nemaju zajedničkog susjeda stupnja 2. Ako imaju zajedničkog susjeda stupnja 3 tvrdnja slijedi iz Leme 4.14 b). Pretpostavimo da svaki od njih ima susjeda stupnja 3, i označimo jednog od njih s w_1. Sada je $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(w_1))$ graf iz Leme 4.13 c).

2.5) Nijedan od vrhova u i v nema susjeda stupnja 3.

U ovom slučaju u i v nisu susjedni, pa pretpostavimo da svaki od njih ima po dva susjeda stupnja 2. Nijedna dva od njih ne mogu biti susjedna ni imati zajedničkog susjeda stupnja 2. Ako neka dva od njih imaju zajedničkog susjeda stupnja 3 tvrdnja slijedi iz Leme 4.14 c) ili d), pa pretpostavimo da svi imaju različite susjede stupnja 3. Ako su neka dva od tih susjeda međusobno susjedna označimo jednog od njih s w. Lako se vidi da je tada ili $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(w))$ ili $G\backslash(N_0(v) \cup N_0(w))$ ili nepovezan ili je graf iz Leme 4.13 c). Pretpostavimo da nijedna dva od njih nisu susjedna. Ako dva vrha s iste grane (od u ili v) imaju zajedničkog susjeda onda tvrdnja slijedi iz Leme 4.14 d). A ako dva vrha s različitih grana imaju zajedničkog susjeda, označimo ih s w i z (w iz u i z iz v). Sada je $G\backslash(N_0(w) \cup N_0(v))$ graf iz Leme 4.14 c). Jedini preostali slučaj je kad nijedna dva vrha nemaju zajedničkog susjeda niti su susjedni međusobno, ali to je nemoguće zbog zadanog broja vrhova u grafu. ■

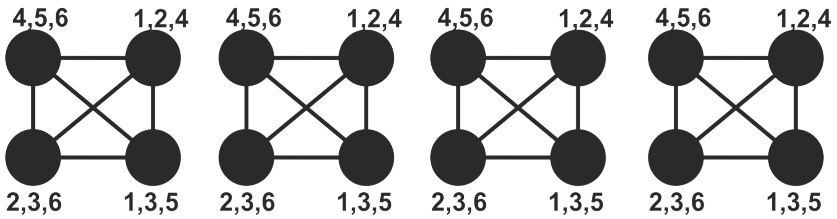
Teorem 4.17 *Vrijedi*

$$K(2,3,p) = \begin{cases} +\infty, & p \leq 15; \\ 6, & p = 16, 17; \\ 3, & p \geq 18. \end{cases}$$

Dokaz. Prvo uočimo da ne postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da se $(2,3,15,k)$ može realizirati. Ta činjenica slijedi direktno iz Teorema 4.11, tj. iz $K(2,2,14) = +\infty$.

Realizacija za $K(2,3,16) = 6$ dana je na Slici 4.4.

Preostaje dokazati da se $(2,3,17,k)$ ne može realizirati za $k < 6$. Tada iz Leme 4.2 slijedi da se ni $(2,3,16,k)$ ne može realizirati za $k < 6$. Pretpostavimo suprotno, neka je $(2,3,17,5) \in T$ i neka je (G,f) realizacija te četvorke. Zbog T1, isto kao u dokazima Teorema 4.8 i 4.11 promatramo samo komponente s barem 3 vrha. Razmatramo 3 slučaja.



Slika 4.4: Realizacija za $(2, 3, 16, 6)$.

1) G ima pet komponenti s barem 3 vrha.

Nijedna od komponenti očito ne može imati više od 5 vrhova. Iz najveće i druge najveće komponente odaberimo vrhove u i v najvećeg stupnja u tim komponentama. Preostale komponente imaju svaka po 3 vrha, pa neka su x, y, z proizvoljni vrhovi po jedan u svakoj od te tri komponente. Sada stavimo $A = \{u, v\}$, $M = \{x, y, z\}$. Graf $G\backslash(N_0(A) \cup M)$ je 2-razbijen.

2) G ima četiri komponente s barem 3 vrha.

Nijedna od komponenti nema više od 8 vrhova i mogućnosti za veličine komponenti od barem 3 vrha su $\{3, 3, 3, \leq 8\}$, $\{3, 3, \leq 4, \leq 7\}$, $\{3, 3, \leq 5, \leq 6\}$, $\{3, \leq 4, \leq 4, \leq 6\}$, $\{3, \leq 4, \leq 5, \leq 5\}$, $\{\leq 4, \leq 4, \leq 4, \leq 5\}$. Sada se promatranjem svih mogućnosti, te primjenom Leme 4.7 i), ii), iii) i Leme 4.12 i) lako vide traženi izbori skupova agenata i nestalih osoba koji mogu 2-razbiti graf. Mogući izbori dani su kako slijedi (m označava nestalu osobu, a a agenta):

Tablica 6. Neki izbori 2 agenta i 3 nestale osobe za slučaj 2)

3	3	3	≤ 8	3	3	≤ 4	≤ 7	3	3	≤ 5	≤ 6
m	m	m	$2a$	m	m	a	a, m	m	m	a	a, m

3	≤ 4	≤ 4	≤ 6	3	≤ 4	≤ 5	≤ 5	≤ 4	≤ 4	≤ 4	≤ 5
m	m	a	a, m	m	$2m$	a	a	m	m	a	a, m

3) G ima tri komponente s barem 3 vrha.

Ako najveća komponenta, označimo je s H_1 ima 10 ili 11 vrhova, onda dvije manje komponente, s po najviše 4 vrha, nisu otporne na po 1 nestalu osobu u svakoj. Ukoliko u H_1 postoji vrh u stupnja barem 3 onda $H_1 \backslash N_0(u)$ ima najviše 7 vrhova. Prema Lemi 4.7 ii) taj podgraf se može razbiti s 1 preostalim agentom i 1 nestalom osobom. A ukoliko su svi vrhovi u H_1 stupnja najviše 2, neka je u bilo koji vrh stupnja 2. $H_1 \backslash N_0(u)$ ima najviše 8 vrhova i unija je putova pa tvrdnja lako slijedi.

Ako najveća komponenta ima 9 vrhova, može se 2-razbiti prema Lemi 4.7 iv) s 1 agentom i 2 nestale osobe, druga najveća komponenta ima najviše 5 vrhova i može se 2-razbiti s 1 agentom, a treća najveća komponenta ima najviše 4 vrha, pa nije otporna na 1 nestalu osobu, prema Lemi 4.12 i).

Ako najveća komponenta, H_1, ima 8 vrhova, nije otporna na 1 agenta i 1 nestalu osobu, prema Lemi 4.12 iii). $G \backslash H_1$ ima 9 vrhova, a na raspolaganju imamo još 1 agenta i 2 nestale osobe, pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.7 iv).

Sada promatramo slučajeve kad najveća komponenta u G ima najviše 7 vrhova. Tvrdnja tada slijedi iz Leme 4.7 ili Leme 4.12 i) i ii), ovisno o broju vrhova u komponentama:

Tablica 7. Neki izbori 2 agenta i 3 nestale osobe za slučaj 3)

≤ 7	≤ 7	3	≤ 7	≤ 6	≤ 4	≤ 7	≤ 5	≤ 5	≤ 6	≤ 6	≤ 5
a, m	a, m	m	a, m	a, m	m	a, m	a	$2m$	a, m	$2m$	a

4) G ima dvije komponenta s barem 3 vrha.

Tvrdnja slijedi iz Leme 4.12 i Teorema 4.11, promatranjem mogućnosti:

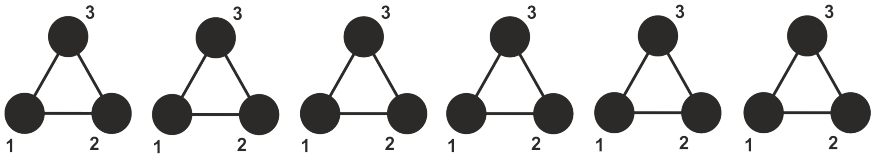
Tablica 8. Neki izbori 2 agenta i 3 nestale osobe za slučaj 4)

≤ 9	≤ 8	≤ 10	≤ 7	≤ 11	≤ 6
$a, 2m$	a, m	$a, 2m$	a, m	$2a, m$	$2m$
≤ 12	≤ 5	≤ 13	≤ 4	≤ 14	3
$a, 3m$	a	$2a, 2m$	m	$2a, 2m$	m

5) G ima jednu komponentu s barem 3 vrha. Možemo pretpostaviti da je G povezan sa 17 vrhova, a ostali slučajevi onda slijede.

5.1) Ako svi vrhovi u G imaju stupanj najviše 2, neka je u proizvoljan vrh stupnja 2 u G. $G\backslash N_0(u)$ ima 14 vrhova i unija je putova. Označimo centar najdužeg puta u $G\backslash N_0(u)$ s v. Sada $G\backslash(N_0(u)\cup N_0(v))$ ima 11 vrhova i unija je barem 2 nepovezana puta. Sada se lako može izabrati skup $M = \{x, y, z\}$ takav da $G\backslash(N_0(A) \cup M)$ bude 2-razbijen, za $A = \{u, v\}$.

5.2) U G postoji vrh stupnja barem 3. Prvo primijetimo da ako je $\delta(G) = 1$, tvrdnja slijedi iz Leme 4.15. Pretpostavimo da svi vrhovi u G imaju stupanj barem 2. Neka je u vrh stupnja barem 3 u G. $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 13 vrhova. Ako svi vrhovi u $G\backslash N_0(u)$ imaju stupanj najviše 2, odaberimo vrh v stupnja 2 u $G\backslash N_0(u)$. $G\backslash(N_0(u)\cup N_0(v))$ ima najviše 10 vrhova i unija je putova, pa se dalje vrhovi x, y, z za skup M lako mogu pronaći. S druge strane, ako u $G\backslash N_0(u)$ postoji vrh stupnja 3, tvrdnja slijedi iz Leme 4.16. Time smo dokazali da je $K(2, 3, 17) \geq 6$.



Slika 4.5: Realizacija za $(2, 3, 18, 3)$.

Preostaje pokazati da je $K(2, 3, 18) = 3$. Lako se vidi da mora vrijediti $K(2, 3, 18) \geq 3$, a realizacija za $(2, 3, 18, 3)$ dana je na Slici 4.5. ■

4.1.3 3 agenta

Sada analiziramo slučaj $a = 3$ i $m = 1$. Prvo ćemo dokazati nekoliko pomoćnih lema.

Lema 4.18 *Neka je G graf.*

i) Ako G ima najviše 8 vrhova može se 3-razbiti s 1 agentom i 1 nestalom osobom.

ii) Ako G ima najviše 10 vrhova može se 3-razbiti s 2 agenta.

iii) Ako G ima najviše 12 vrhova može se 3-razbiti s 2 agenta i 1 nestalom osobom.

iv) Ako G ima najviše 13 vrhova može se 3-razbiti s 3 agenta.

Dokaz. Tvrdnje ćemo dokazati za povezane grafove, a odatle lako slijedi da vrijede i za nepovezane.

i) Neka je G povezan graf s najviše 8 vrhova. Ako G sadrži vrh u stupnja barem 3, lako se vidi da tvrdnja vrijedi, a ako to nije slučaj neka je u bilo koji vrh stupnja 2 u G. $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 5 vrhova i unija je putova pa se može 3-razbiti s 1 nestalom osobom.

ii) Neka je G povezan graf s najviše 10 vrhova. Ako u G postoji vrh u stupnja barem 3 onda $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 6 vrhova. Ako tada u $G\backslash N_0(u)$ postoji vrh stupnja barem 2, može ga 3-razbiti 1 preostali agent, a u protivnom je graf već 3-razbijen. S druge strane, ako su svi vrhovi u G stupnja najviše 2 i u je bilo koji vrh stupnja 2, onda $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 7 vrhova i unija je putova pa se lako vidi da se može 3-razbiti s 1 agentom.

iii) Neka je G povezan graf s najviše 12 vrhova. Ako u G postoji vrh u stupnja barem 3 onda $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 8 vrhova i tvrdnja slijedi iz i). Ukoliko je najveći stupanj u G najviše 2 onda tvrdnja opet lako slijedi.

iv) Ovaj slučaj je dokazan u članku [76]. ■

Lema 4.19 *i) Graf G s 9 vrhova, $\Delta(G) \leq 3$ i $\delta(G) = 1$ se može 3-razbiti s 1 agentom i 1 nestalom osobom.*

ii) Graf G s 13 vrhova, $\Delta(G) \leq 3$ i $\delta(G) = 1$ se može 3-razbiti s 2 agenta i 1 nestalom osobom.

Dokaz. i) Neka je G povezan graf s 9 vrhova, $\Delta(G) \leq 3$ i $\delta(G) = 1$. Neka je x vrh stupnja 1 u G i y njegov jedini susjed.

Ako y ima stupanj 2 označimo drugog susjeda od y s w. $G\backslash\{w\}$ ima 8 vrhova i najviše 6 vrhova u najvećoj komponenti. Ako označimo s u bilo koji vrh stupnja barem 2 u toj komponenti onda je $G\backslash(N_0(u) \cup \{w\})$ 3-razbijen.

S druge strane, ako y ima stupanj 3, označimo njegova druga dva susjeda s w_1 i w_2. Barem jedan od njih ima susjeda koji nije u skupu $\{x, y, w_1, w_2\}$. Pretpostavimo da w_1 ima još jednog susjeda i označimo ga s u. Ako je stupanj od u 3 onda $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 5 vrhova i ili mu najveća komponenta ima najviše 4 vrha (ako su u i w_2 susjedni), pa se može 3-razbiti s 1 nestalom osobom, ili mu najveća komponenta ima najviše 5 vrhova, pa je $G\backslash(N_0(u) \cup \{w_2\})$ 3-razbijen. Ako u ima stupanj 2 onda je ili susjedan w_2, pa označimo li trećeg susjeda od w_2 sa v, $G\backslash(N_0(v) \cup \{w_1\})$ je 3-razbijen, ili je $G\backslash(N_0(u) \cup \{w_2\})$ 3-razbijen. Ako je G nepovezan, lako se vidi da tvrdnja vrijedi.

ii) Neka je G povezan graf s 13 vrhova, $\Delta(G) \leq 3$ i $\delta(G) = 1$. Neka je x vrh stupnja 1 i y njegov jedini susjed. Ako y ima stupanj 2 neka je w njegov drugi susjed. $G\backslash\{w\}$ ima jednu komponentu od 2 vrha, x i y, a preostalih 10 vrhova se može 3-razbiti s 2 agenta prema Lemi 4.18 ii). Ako y ima stupanj 3, označimo njegova druga dva susjeda s w_1 i w_2. Ako sada postoji vrh u stupnja 3 u G, različit od y, onda $G\backslash N_0(u)$ ima 9 vrhova, $\Delta(G\backslash N_0(u)) \leq 3$ i $\delta(G\backslash N_0(u)) \leq 1$, pa tvrdnja slijedi iz i) (ako je $\delta(G\backslash N_0(u)) = 1$) ili iz Leme 4.18 i) (ako je $\delta(G\backslash N_0(u)) = 0$). Ako to nije slučaj, onda je jedini vrh stupnja 3 u G upravo y, $G\backslash N_0(y)$ ima 9 vrhova i unija je putova, pa se lako vidi da tvrdnja vrijedi. Ako je G nepovezan, lako se vidi da tvrdnja također vrijedi.

■

Lema 4.20 *Neka je G graf s 9 vrhova, $\Delta(G) = 3$ i $\delta(G) \geq 2$. G se može 3-razbiti s 1 agentom i 1 nestalom osobom.*

Dokaz. Lako se vidi da G ne može biti 3 regularan, pa postoji barem jedan vrh stupnja 2, označimo ga s x, a njegova dva susjeda s u i v. Ako u ili v imaju susjeda stupnja 3, označimo ga s y. $G\backslash N_0(y)$ ima 5 vrhova, a x je stupnja 0 ili 1 pa se graf preostali graf može 3-razbiti s 1 nestalom osobom. Ako ni u ni v nemaju susjeda stupnja 3 onda barem jedan od njih ima susjeda stupnja 2 koji nije u skupu $\{u, x, v\}$, pa razlikujemo tri slučaja:

1) Jedan od njih, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo u, ima susjeda y stupnja 2, a v je susjedan samo vrhovima u skupu $\{x, N_0(y)\backslash\{y\}\}$.

Sada $G\backslash N_0(y)$ ima 6 vrhova, jedna komponenta sadrži dva vrha, x i v, a 4 preostala vrha mogu se 3-razbiti s 1 nestalom osobom.

2) Jedan od njih, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo u, ima susjeda y stupnja 2, i v je susjedan samo s x i y. To znači da u mora imati još jednog susjeda, označimo ga sa z, stupnja 2. $G\backslash N_0(z)$ ima 6 vrhova, jedna komponenta sadrži samo vrhove x, v, y, pa tvrdnja lako slijedi.

3) I u i v imaju susjede, označimo ih s y i w, redom, stupnja 2, i y ima još jednog susjeda, z (ne nužno različitog od w).

Ako w ima susjeda u $\{u, y, z\}$ promatramo slučajeve:

3.1) v ima stupanj 2. Sada $G\backslash N_0(y)$ ima 6 vrhova, x i v u jednoj komponenti, a preostala 4 vrha se mogu 3-razbiti s 1 nestalom osobom.

3.2) v ima stupanj 3. Označimo s v_1 susjeda od v, različitog od x i w. Sada je $G\backslash (N_0(y) \cup \{v_1\})$ 3-razbijen.

S druge strane, ako susjed od w, različit od v, nije u $\{u, y, z\}$, onda $G\backslash(N_0(y)\cup\{v\})$ ima 5 vrhova u dvije komponente, pa tvrdnja također vrijedi.

Lako se vidi da tvrdnja vrijedi i u slučaju da G nije povezan. ■

Lema 4.21 *Neka je $k \leq 5$ i neka vrijedi $f(u) \cup f(v) \cup f(w) \neq \{1, ..., k\}$, za svaku trojku vrhova $\{u, v, w\} \subseteq V(G)$ u promatranom paru (G, f). Tada vrijedi:*

i) Graf G s najviše 6 vrhova nije otporan na 1 nestalu osobu.

ii) Graf G s najviše 7 vrhova nije otporan na 1 agenta.

iii) Graf G s najviše 10 vrhova nije otporan na 1 agenta i 1 nestalu osobu.

iv) Graf G s najviše 11 vrhova nije otporan na 2 agenta.

Dokaz. i) Neka je G graf s najviše 6 vrhova i neka je $k = 5$. Svaki ključ treba distribuirati barem 2 puta, pa barem jedan vrh mora imati barem 2 ključa. Štoviše, nijedan vrh ne smije imati 3 ili više ključeva zbog pretpostavke $f(u) \cup f(v) \cup f(w) \neq \{1, ..., 5\}$, za svaku trojku vrhova $\{u, v, w\} \subseteq V(G)$. Pretpostavimo da jedan od vrhova ima skup ključeva $\{1, 2\}$. Nijedan od preostalih vrhova ne smije imati nijedan od skupova $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$. No onda je nemoguće distribuirati svaki ključ dva puta.

ii) Neka je G graf s najviše 7 vrhova. Ako je G nepovezan lako se vidi da tvrdnja vrijedi, pa pretpostavimo da je povezan. Ako u G postoji vrh stupnja barem 3 također se lako vidi da tvrdnja vrijedi, pa neka je $\Delta(G) = 2$. Ako je G put, ponovno tvrdnja lako slijedi, pa pretpostavimo da je G ciklus. Nijedan vrh ne smije imati 3 ili više ključeva, a svaki ključ mora biti distribuiran barem dva puta, pa barem jedan vrh mora imati 2 ključa. Pretpostavimo da jedan od vrhova ima skup ključeva $\{1, 2\}$ i označimo taj vrh s u_1. Nadalje, označimo preostale vrhove u ciklusu s $u_2, ..., u_7$, počevši od u_1, u bilo kojem smjeru. Nijedan od preostalih vrhova ne smije imati skup ključeva $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$, a kako se svaki od ključeva $3, 4, 5$, mora podijeliti barem dva puta, raspodijelimo te ključeve na preostalih 6 vrhova, po 1 svakom vrhu. Ključevi $3, 4, 5$ se neće distribuirati više od dva puta, pa je jasno da nema smisla dati isti ključ vrhovima koji su na udaljenosti 2 ili manje, jer u tom slučaju bi postojao odabir agenta koji uklanja obje instance tog ključa. Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je distribucija ključeva

sljedeća:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
$1,2$	3	4	5	3	4	5

Sada moramo još jednom distribuirati ključeve 1 i 2. Lako se vidi da ako distribuiramo te ključeve dvama vrhovima koji imaju različite ključeve iz skupa $\{3,4,5\}$, lako će se pronaći tri vrha u, v, w, takva da vrijedi $f(u) \cup f(v) \cup f(w) = \{1, ..., 5\}$, pa je jedina opcija da distribuiramo ključeve 1 i 2 ili samo vrhovima u_2 i u_5, ili samo vrhovima u_3 i u_6 ili samo vrhovima u_4 i u_7, po jednog svakom. Međutim, u tim mogućnostima redom grafovima $G\backslash N_0(u_1)$, $G\backslash N_0(u_2)$, $G\backslash N_0(u_7)$ nedostaju sve instance jednog od ključeva 1 ili 2, pa ne vrijedi T2.

iii) Neka je G graf s najviše 10 vrhova. Svaki ključ mora biti distribuiran barem 3 puta pa barem jedan vrh mora imati 2 ili više ključeva, a kao i u i) i ii) nijedan vrh ne smije imati 3 ili više ključeva, pa pretpostavimo da jedan od vrhova ima skup ključeva $\{1,2\}$. Ponovno nijedan od preostalih vrhova ne smije imati nijedan od skupova $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}$, a kako svaki od ključeva $3,4,5$ mora biti distribuiran barem po 3 puta, možemo ih raspodijeliti na preostalih 9 vrhova tako da svaki od tih vrhova ima točno jedan ključ iz skupa $\{3,4,5\}$. Ključevi 1 i 2 moraju biti distribuirani svaki po još 2 puta, pa će očito 2 od 9 vrhova koji imaju različite ključeve iz skupa $\{3,4,5\}$ imati i različite ključeve iz skupa $\{1,2\}$. No, onda se lako mogu naći 3 vrha u, v, w takva da vrijedi $f(u) \cup f(v) \cup f(w) = \{1, ..., 5\}$, što je u kontradikciji s pretpostavkom.

iv) Neka je G graf s najviše 11 vrhova. Pretpostavimo prvo da je G povezan. Ako postoji vrh stupnja 3 u G označimo ga s u. $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 7 vrhova i tvrdnja slijedi iz ii). Pretpostavimo da je najveći stupanj u G 2. Ako je G put tvrdnja lako slijedi, pa pretpostavimo da je G ciklus.

Neka je u proizvoljan vrh u G. $G\backslash N_0(u)$ je put s 8 vrhova i ukoliko s v označimo bilo koji centar tog puta $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ je 3-razbijen. Ako je G nepovezan lako se vidi da tvrdnja također vrijedi. ■

Lema 4.22 *Neka je $k \leq 5$ i neka vrijedi $f(u) \cup f(v) \cup f(w) \neq \{1, ..., k\}$, za svaku trojku vrhova $\{u, v, w\} \subseteq V(G)$ u promatranom paru (G, f). Tada vrijedi:*

i) Graf G sa 7 vrhova koji je ili nepovezan ili je put nije otporan na 1 nestalu osobu.

ii) Graf G s 11 vrhova koji je ili nepovezan ili ima minimalni stupanj 1 nije otporan na 1 agenta i 1 nestalu osobu.

iii) Nepovezan graf G s 15 vrhova nije otporan na 2 agenta i 1 nestalu osobu.

Dokaz. i) Ako je G nepovezan sa 7 vrhova tvrdnja slijedi iz Leme 4.21 i), a ako je G put lako se može 3-razbiti.

ii) Ako je G nepovezan graf s 11 vrhova tvrdnja slijedi iz Leme 4.21 i), ii) i iii). Neka je G povezan graf s 11 vrhova takav da je $\delta(G) = 1$. Označimo s x vrh stupnja 1 i s y njegovog jedinog susjeda. Razlikujemo tri slučaja:

1) y ima stupanj 2. Promatramo put koji počinje u x i prvi vrh stupnja barem 3 na tom putu označimo s u. $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 7 vrhova i ili je nepovezan ili je put, pa tvrdnja slijedi iz i). Ukoliko vrh stupnja barem 3 ne postoji, G je put i lako se može 3-razbiti s 1 agentom i 1 nestalom osobom.

2) y ima stupanj 3. Ako bilo koji susjed od y ima stupanj barem 3, označimo ga s u. $G\backslash N_0(u)$ je nepovezan (x je izoliran) s najviše 7 vrhova, pa tvrdnja slijedi iz i). Pretpostavimo da oba susjeda od y, različita od x, imaju stupanj najviše 2. Ako imaju zajedničkog susjeda, on mora imati stupanj barem 3, pa ako ga označimo s v, $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ je nepovezan graf s

najviše 7 vrhova i tvrdnja slijedi kao prije. Ako još neki susjed od y, osim x, ima stupanj 1 onda promotrimo trećeg susjeda od y, stupnja 2 i označimo ga sa z. Promotrimo put koji počinje u y i prolazi kroz z i označimo s w prvi vrh stupnja barem 3 na tom putu. Ako je $G\backslash N_0(w)$ nepovezan tvrdnja slijedi iz i), a ako je povezan onda je $G\backslash N_0(w)$ put s najviše 5 vrhova s 2 lista susjedna jednom od krajeva puta (vrh y). Taj graf se može 3-razbiti s 1 nestalom osobom.

Neka oba susjeda od y imaju stupanj 2 i neka svaki ima po još jednog susjeda. Ta susjede označimo s u i v. Razmatramo 3 podslučaja:

2.1) u i v su susjedni. Tada barem jedan od njih mora imati stupanj barem 3, pa bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $d(u) \geq 3$. $G\backslash N_0(u)$ je nepovezan s najviše 7 vrhova, pa tvrdnja slijedi iz i).

2.2) u i v nisu susjedni i barem jedan od njih ima stupanj barem 3. Možemo pretpostaviti $d(u) \geq 3$. Sada je $G\backslash(N_0(u) \cup \{v\})$ 3-razbijen.

2.3) u i v imaju stupanj 2. Ako imaju zajedničkog susjeda, on mora imati stupanj barem 3, pa je ponovno lako dobiti nepovezan graf sa 7 vrhova izbacivanjem 1 agenta. Pretpostavimo da i u i v imaju po još jednog susjeda i označimo ih s u_1 i v_1, redom. Ako su u_1 i v_1 susjedni, tvrdnja slijedi kao i u 2.1, a ako nisu i barem jedan od njih ima stupanj barem 3 onda se graf lako može 3-razbiti, slično kao i u 2.2. Pretpostavimo da i u_1 i v_1 imaju stupanj 2 i označimo njihove susjede s u_2 i v_2, redom. Ako su u_2 i v_2 susjedni barem jedan od njih mora imati stupanj barem 3, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $d(u_2) \geq 3$. Sada je $G\backslash(N_0(u_2) \cup \{y\})$ 3-razbijen. Ako ijedan od vrhova u_2, v_2 ima stupanj 1 onda $G\backslash N_0(y)$ ima 7 vrhova i nepovezan je, pa tvrdnja slijedi iz i). A ukoliko nisu susjedni i oba imaju stupanj 2, onda su oba susjedni s jednim preostalim vrhom u grafu. No tada je $G\backslash N_0(y)$ put sa 7 vrhova, pa tvrdnja ponovno slijedi iz i).

3) y ima stupanj barem 4. Tada $G\backslash N_0(y)$ ima najviše 6 vrhova, pa nije otporan na 1 nestalu osobu prema Lemi 4.21 i).

iii) Neka je G graf s 15 vrhova i barem 2 komponente.

Ako najmanja komponenta u G ima 1 vrh, označimo ga s x. On očito ne može imati sve ključeve, pa promatramo preostalih 14 vrhova. Ako postoji vrh stupnja barem 3 među tih 14 vrhova označimo ga s u. $G\backslash(N_0(u) \cup \{x\})$ je podgraf s 10 vrhova koji nije otporan na 1 agenta i 1 nestalu osobu prema Lemi 4.21 iii). Tvrdnja analogno slijedi ako najmanja komponenta ima 2 ili 3 vrha.

Ako najmanja komponenta u G ima 4 vrha onda se može 3-razbiti s 1 nestalom osobom, a preostalih 11 vrhova nije otporno na 2 agenta prema 4.21 iv).

Ako najmanja komponenta u G ima 5, 6 ili 7 vrhova onda prema Lemi 4.21 ii) nije otporna na 1 agenta, a preostalih 10, 9 ili 8 vrhova nije otporno na 1 agenta i 1 nestalu osobu prema Lemi 4.21 iii). ■

Lema 4.23 *Neka je G povezan graf s 19 vrhova, $\Delta(G) = 3$, i $\Delta(G\backslash N_0(u)) = 3$, za bilo koji vrh u stupnja 3 u G. Vrijedi barem jedno od sljedećeg:*

a) postoji vrh u u G takav da je $G\backslash N_0(u)$ nepovezan s 15 vrhova;

b) postoje vrhovi u i v u G takvi da $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ ima 11 vrhova i ili je nepovezan ili mu je minimalni stupanj 1.

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati kroz 2 slučaja, ovisno o minimalnom stupnju u G. Očito G ne može biti 3 regularan, pa mu je minimalni stupanj 1 ili 2.

1) $\delta(G) = 1$.

Označimo s x vrh stupnja 1 i s y njegovog jedinog susjeda. Ako y ima stupanj 2, promatramo put koji počinje u x i neka je u prvi vrh stupnja 3 na tom putu. $G\backslash N_0(u)$ ima 15 vrhova i nepovezan je, pa vrijedi a). Neka y ima

stupanj 3. Označimo njegove susjede različite od x s u i v. Ako ijedan od njih ima stupanj 3 lako se vidi da možemo dobiti nepovezan graf s 15 vrhova (x ostaje izoliran), pa opet vrijedi a). Ako u ili v imaju stupanj 1, tvrdnja lako slijedi, slično kao i u slučaju $d(y) = 2$. Stoga pretpostavimo da i u i v imaju stupanj 2. Ako u i v imaju zajedničkog susjeda, on mora imati stupanj 3, i ponovno je lako dobiti nepovezan graf s 15 vrhova. Pretpostavimo da u i v imaju svaki po još jednog susjeda (različitog od y) i označimo te susjede s u_1 i v_1, redom. Ako ijedan od njih ima stupanj 3, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $d(u_1) = 3$, onda y ima stupanj 2 u $G\backslash N_0(u_1)$, pa označimo s w bilo koji vrh stupnja 3 u $G\backslash N_0(u_1)$. Sada $G\backslash(N_0(u_1) \cup N_0(w))$ ima 11 vrhova i x ima stupanj 1 u tom grafu, pa vrijedi b). Ako jedan od u_1, v_1 ima stupanj 1 u G, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $d(u_1) = 1$, onda za proizvoljna dva vrha w, w_1 takva da $G\backslash(N_0(w) \cup N_0(w_1))$ ima 11 vrhova, u_1 ima stupanj 1 u tom preostalom grafu, pa opet vrijedi b). S druge strane, ako i u_1 i v_1 imaju stupanj 2, promatramo ostatak grafa. Mora postojati barem još jedan vrh u G, osim y, stupnja 3. Označimo ga s w. Sada u $G\backslash(N_0(y) \cup N_0(w))$ barem jedan od vrhova u_1, v_1, ima stupanj 0 ili 1, pa vrijedi b).

2) $\delta(G) = 2$. Razlikujemo 2 podslučaja.

2.1) Dva vrha stupnja 2 su susjedna u G.

Označimo te vrhove s x i y. Ako x i y imaju zajedničkog susjeda stupnja 3 označimo ga s u i promatrajmo put koji počinje u u i ne sadrži x ni y. Označimo s w prvi vrh stupnja 3 na tom putu (osim u). Ako je $G\backslash N_0(w)$ nepovezan, vrijedi a), a ako je povezan onda je u jedini vrh stupnja 3 u $G\backslash N_0(w)$, i $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(w))$ je put s 11 vrhova, pa vrijedi b). Pretpostavimo da x i y nemaju zajedničkog susjeda, i označimo njihove susjede s x_1, y_1, redom. Ako su ti vrhovi susjedni, barem jedan od njih mora imati

stupanj 3, pa je lako odabrati agenta da x ili y ostane izoliran, tj. da vrijedi a). Pretpostavimo da x_1 i y_1 nisu susjedni. Ako barem jedan od njih ima stupanj 2, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $d(x_1) = 2$, promotrimo put koji počinje u x i ne prolazi kroz y i označimo s u prvi vrh stupnja 3 na tom putu (u može biti i y_1). Takav vrh mora postojati jer je $\delta(G) > 1$. Označimo prethodnika od prethodnika od u na tom putu s v (primijetimo da v može biti i vrh x ako je u na udaljenosti 2 od x). Sada v ima stupanj 1 u $G\backslash N_0(u)$, a kako je jedini susjed od v sigurno stupnja 2 u $G\backslash N_0(u)$, onda označimo s w bilo koji vrh stupnja 3 u $G\backslash N_0(u)$, pa sada v ima stupanj najviše 1 u $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(w))$ i vrijedi b).

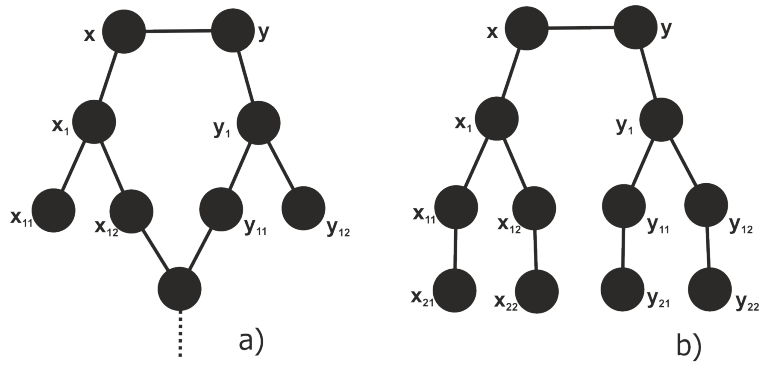
Neka i x_1 i y_1 imaju stupanj 3. Ako imaju zajedničkog susjeda onda y ima stupanj 1, a y_1 stupanj 2 u $G\backslash N_0(x_1)$, pa ako označimo s w proizvoljni vrh stupnja 3 u $G\backslash N_0(x_1)$ (mora postojati barem jedan), y ima stupanj najviše 1 u $G\backslash(N_0(x_1) \cup N_0(w))$ i vrijedi b).

Pretpostavimo da x_1 i y_1 nemaju zajedničkih susjeda, nego svaki po dva susjeda, različita od x i y. Ako ijedan od njih ima stupanj 3, bez smanjenja općenitosti neka je to neki od susjeda od x_1, onda označimo taj vrh s w, a proizvoljan vrh stupnja 3 u $G\backslash N_0(w)$ s w_1. Sada je x stupnja 1 u $G\backslash(N_0(w) \cup N_0(w_1))$ pa ponovno vrijedi b). Neka svi susjedi od x_1 i y_1 imaju stupanj 2.

Ako su dva susjeda od x_1 (ili y_1) međusobno susjedna, onda se lako vidi da se može odabrati 1 agent tako da ostane nepovezan graf s 15 vrhova. A ako je neki susjed od x_1 susjedan susjedu od y_1, onda promotrimo ostale susjede od x_1 i y_1 i označimo ih s x_2 i y_2, redom. Oni očito ne mogu biti susjedni, a ako imaju zajedničkog susjeda, on mora imati stupanj 3, pa lako slijedi da vrijedi a). Stoga pretpostavimo da x_2 i y_2 imaju svaki po još jednog susjeda, i označimo ih s x_3, y_3, redom. Ako ijedan od njih ima stupanj 3, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $d(x_3) = 3$, onda je $G\backslash(N_0(x_3) \cup N_0(y_1))$

nepovezan s 11 vrhova, pa vrijedi b). Pretpostavimo da x_3 i y_3 imaju stupanj 2. Sada u $G\backslash N_0(x_1)$ y i x_3 imaju stupanj 1, pa x_3 ima stupanj 1 u grafu $G\backslash(N_0(x_1) \cup N_0(y_1))$ od 11 vrhova.

S druge strane, ako nijedna dva od susjeda od x_1 i y_1 nisu međusobno susjedni, označimo te susjede s x_{11}, x_{12}, y_{11}, y_{12}. Ako x_{11} i x_{12} (ili y_{11} i y_{12}) imaju zajedničkog susjeda stupnja 2 ili 3 lako se vidi da možemo odabrati agenta tako da a) vrijedi. Neka neki drugi par vrhova od x_{11}, x_{12}, y_{11}, y_{12} ima zajedničkog susjeda, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo x_{12} i y_{11} (Slika 4.6 a). Ako taj susjed ima stupanj 2 onda je $G\backslash(N_0(x_1) \cup N_0(y_1))$ nepovezan s 11 vrhova, a ako ima stupanj 3 onda će on imati stupanj najviše 1 u $G\backslash(N_0(x_1) \cup N_0(y_1))$, pa vrijedi b). Pretpostavimo da nijedna dva vrha od x_{11}, x_{12}, y_{11}, y_{12} nemaju zajedničkog susjeda i označimo njihove susjede s x_{21}, x_{22}, y_{21}, y_{22} (Slika 4.6 b).



Slika 4.6: Podslučajevi od 2.1.)

Ako bilo koji vrh od x_{21}, x_{22}, y_{21}, y_{22} ima stupanj 3, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $d(x_{21}) = 3$, onda graf $G\backslash(N_0(x_{21}) \cup N_0(y_1))$ ima 11 vrhova i $d(x) = 1$, pa pretpostavimo da svi vrhovi iz $\{x_{21}, x_{22}, y_{21}, y_{22}\}$ imaju stupanj 2. No sada y, x_{21} i x_{22} imaju stupanj 1 u $G\backslash N_0(x_1)$ pa kad uklonimo proizvoljan vrh stupnja 3 i njegove susjede iz $G\backslash N_0(x_1)$, barem

jedan od ovih vrhova će imati stupanj najviše 1 u preostalom grafu od 11 vrhova.

2.2) Nema susjednih vrhova stupnja 2.

Neka je x vrh stupnja 2 i u i v njegovi susjedi stupnja 3. Razlikujemo 2 podslučaja.

2.2.1) u i v su susjedni.

Ako u i v imaju zajedničkog susjeda, on mora imati stupanj 3 i lako se vidi da možemo odabrati 1 agenta tako da preostali graf bude nepovezan s 15 vrhova.

Ako u i v imaju svaki po još jednog susjeda i barem jedan od njih ima stupanj 3, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je to susjed od u, označimo ga s w. U grafu $G\backslash N_0(w)$ x je stupnja 1, a v stupnja 2, pa ako je w_1 bilo koji vrh stupnja 3 u $G\backslash N_0(w)$, x je stupnja najviše 1 u $G\backslash(N_0(w) \cup N_0(w_1))$ i b) vrijedi. Neka oba susjeda imaju stupanj 2 i označimo ih s u_1 i v_1. Ako u_1 i v_1 imaju zajedničkog susjeda tvrdnja opet lako slijedi, pa pretpostavimo da imaju svaki po još jednog susjeda i označimo ih s u_2 i v_2, redom. Oni moraju biti stupnja 3 jer u grafu nema susjednih vrhova stupnja 2.

Ako su u_2 i v_2 susjedni onda je $G\backslash N_0(u_2)$ nepovezan s 15 vrhova, a ako imaju zajedničkog susjeda stupnja 3 označimo ga s w. $G\backslash N_0(w)$ je nepovezan s 15 vrhova. Ako u_2 i v_2 imaju zajedničkog susjeda stupnja 2 onda $G\backslash(N_0(u_2) \cup N_0(v))$ ima 11 vrhova i v_2 ima stupanj najviše 1, pa vrijedi b). A ako nemaju zajedničkih susjeda onda je $G\backslash(N_0(u_2) \cup N_0(v_2))$ nepovezan s 11 vrhova.

2.2.2) u i v nisu susjedni.

Ako imaju zajedničkog susjeda stupnja 3, lako se vidi da tvrdnja vrijedi. Prvo pretpostavimo da imaju zajedničkog susjeda stupnja 2 i označimo os-

tale njihove susjede s u_1 i v_1 (ne mogu imati 2 zajednička susjeda stupnja 2). Ako barem jedan od u_1 i v_1 ima stupanj 3, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $d(u_1) = 3$, onda u grafu $G\backslash N_0(u_1)$ x ima stupanj 1. Ako u $G\backslash N_0(u_1)$ postoji vrh stupnja 3 različit od v označimo ga s w. Sada je $G\backslash(N_0(u_1) \cup N_0(w))$ graf s 11 vrhova u kojem x ima stupanj 1. A ukoliko je v jedini vrh stupnja 3 u $G\backslash N_0(u_1)$, onda v_1 ima stupanj najviše 2 u $G\backslash N_0(u_1)$ i u grafu $G\backslash(N_0(u_1) \cup N_0(v))$, drugi (ne v) susjed od v_1 ostaje stupnja 1 u grafu s 11 vrhova, ili je graf nepovezan. Stoga pretpostavimo da u_1 i v_1 imaju stupanj 2. Očito ne mogu biti susjedni, a ako imaju zajedničkog susjeda stupnja 3, tvrdnja lako slijedi, pa pretpostavimo da oba vrha imaju po jednog susjeda stupnja 3 i označimo ih s u_2 i v_2. Sada je $G\backslash(N_0(u_2) \cup N_0(v))$ nepovezan (u je izoliran) s 11 vrhova.

Ako u i v nemaju zajedničkih susjeda, označimo njihove susjede, različite od x, s u_1, u_2, v_1, v_2. Ako ijedan od njih ima stupanj 3, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $d(u_1) = 3$, onda x ima stupanj 1 u $G\backslash N_0(u_1)$. Ako u $G\backslash N_0(u_1)$ postoji vrh stupnja 3 različit od v označimo ga s w. Sada je $G\backslash(N_0(u_1) \cup N_0(w))$ graf s 11 vrhova u kojem x ima stupanj 1. A ukoliko je v jedini vrh stupnja 3 u $G\backslash N_0(u_1)$ onda v_1 i v_2 imaju stupanj najviše 2 u $G\backslash N_0(u_1)$ pa je $G\backslash(N_0(u_1) \cup N_0(v))$ ili nepovezan graf ili barem jedan susjed od v_1 i v_2 ima stupanj najviše 1 u $G\backslash(N_0(u_1) \cup N_0(v))$. Jedini preostali slučaj koji treba razmotriti je kad u_1, u_2, v_1, v_2 svi imaju stupanj 2. Nijedna dva ne smiju biti susjedna i ne mogu imati zajedničkih susjeda stupnja 2. Ako neka dva imaju zajedničkog susjeda stupnja 3 tvrdnja lako slijedi, a ako nemaju zajedničkih susjeda, onda neka je w bilo koji susjed od u_1. Sada je $G\backslash(N_0(w) \cup N_0(v))$ graf s 11 vrhova u kojem u ima stupanj 1, pa je time tvrdnja dokazana. ■

Teorem 4.24 *Vrijedi*

$$K(3,1,p) = \begin{cases} +\infty, & p \leq 17; \\ 6 \text{ } ili \text{ } 7, & p = 18, 19; \\ 4, & p \geq 20. \end{cases}$$

Dokaz. Mora vrijediti T1, pa očito mora biti $k \geq 4$. Prvo dokažimo $K(3,1,17) = +\infty$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka se $(3,1,17,k)$ može realizirati za neki $k \in \mathbb{N}$ i neka je (G,f) realizacija te četvorke. Komponente s najviše 3 vrha ne smiju sadržavati sve ključeve, pa ćemo dokazati da se G može 3-razbiti i pritom zanemarujemo sve komponente s manje od 4 vrha. Tvrdnju ćemo dokazati kroz 4 slučaja.

1) G ima četiri komponente s barem 4 vrha.

Najveća komponenta u G ima najviše 5 vrhova pa se može 3-razbiti s 1 agentom. Druga i treća najveća komponenta također se mogu 3-razbiti s po 1 agentom, a četvrta najveća komponenta se može 3-razbiti s 1 nestalom osobom.

2) G ima tri komponente s barem 4 vrha.

Ako najveća komponenta u G ima 9 ili 8 vrhova može se 3-razbiti s 2 agenta prema Lemi 4.18 ii), druga najveća komponenta se može 3-razbiti s 1 agentom i preostala komponenta s 1 nestalom osobom.

Ako najveća komponenta u G ima 7 vrhova može se 3-razbiti s 1 agentom i 1 nestalom osobom prema Lemi 4.18 i), a dvije preostale komponente s po 1 agentom u svakoj.

3) G ima dvije komponente s barem 4 vrha.

Ako najveća komponenta u G ima 13 vrhova, može se 3-razbiti s 3 agenta prema Lemi 4.18 iv), a preostala komponenta od 4 vrha s 1 nestalom osobom.

Ako najveća komponenta u G ima 11 ili 12 vrhova, može se 3-razbiti s 2 agenta i 1 nestalom osobom prema Lemi 4.18 iii), a lako se vidi da se

preostala komponenta može 3-razbiti s 1 agentom.

Ako najveća komponenta u G ima 9 ili 10 vrhova, može se 3-razbiti s 2 agenta prema Lemi 4.18 ii), a preostala komponenta se može 3-razbiti s 1 agentom i 1 nestalom osobom, prema Lemi 4.18 i).

4) G ima jednu komponentu s barem 4 vrha.

Neka je G povezan graf sa 17 vrhova. Ostali slučajevi slijede odatle. Razlikujemo 3 podslučaja.

4.1) Maksimalni stupanj u G je barem 4.

Neka je u vrh stupnja barem 4 u G. $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 12 vrhova i može se 3-razbiti s 2 agenta i 1 nestalom osobom prema Lemi 4.18 iii).

4.2) Maksimalni stupanj u G je 2.

G je ciklus ili put, pa ako je u proizvoljan vrh stupnja 2, $G\backslash N_0(u)$ je unija putova i ima 14 vrhova. Lako se vidi da u tom slučaju tvrdnja vrijedi.

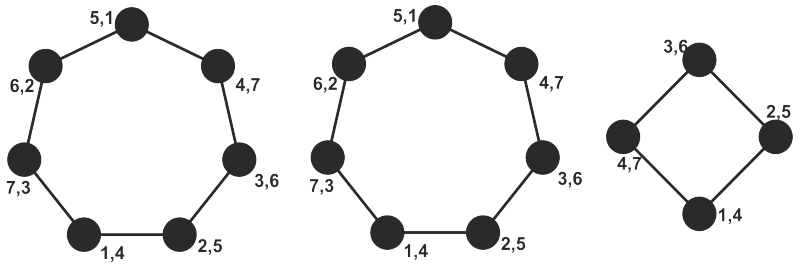
4.3) Maksimalni stupanj u G je 3.

Neka je u proizvoljan vrh stupnja 3 u G. $G\backslash N_0(u)$ ima 13 vrhova. Ako je najveći stupanj u $G\backslash N_0(u)$ najviše 2, tvrdnja lako slijedi, pa pretpostavimo da je $\Delta(G\backslash N_0(u)) = 3$, za bilo koji vrh u stupnja 3 u G. Razlikujemo 2 mogućnosti.

a) Postoji vrh stupnja 1 u $G\backslash N_0(u)$. Tvrdnja tada slijedi iz Leme 4.19 ii).

b) Minimalni stupanj u $G\backslash N_0(u)$ je 2. Neka je v vrh stupnja 3 u $G\backslash N_0(u)$. Tada $G\backslash(N_0(u)\cup N_0(v))$ ima 9 vrhova. Ako je maksimalni stupanj u $G\backslash(N_0(u)\cup N_0(v))$ najviše 2, tvrdnja lako slijedi, pa pretpostavimo da je najveći stupanj u $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ 3. Ako u $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ postoji vrh stupnja 1 tvrdnja slijedi iz Leme 4.19 i). Jedini preostali slučaj je kad su svi vrhovi u $G\backslash(N_0(u) \cup N_0(v))$ stupnja 2 ili 3. No u tom slučaju tvrdnja slijedi iz Leme 4.20. Dokazali smo da vrijedi $K(3, 1, 17) = +\infty$.

Realizacija od $(3, 1, 18, 7)$ dana je na Slici 4.7, pa smo pokazali da je $K(3, 1, 18) \leq 7$ i $K(3, 1, 19) \leq 7$.



Slika 4.7: Realizacija za $(3, 1, 18, 7)$.

Dokažimo sada da je $K(3, 1, 19) \geq 6$. Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $(3, 1, 19, 5) \in T$.

Kako nijedna tri vrha ne mogu imati sve ključeve dovoljno je promatrati samo komponente s 4 ili više vrhova. Razlikujemo 4 mogućnosti.

1) G ima četiri komponente s barem 4 vrha.

Najveća komponenta ima najviše 7 vrhova, pa prema Lemi 4.21 ii) nije otporna na 1 agenta za $k = 5$. Druga i treća najveća komponenta također nisu otporne na po 1 agenta u svakoj, a najmanja od promatranih komponenti može imati samo 4 vrha, pa nije otporna na 1 nestalu osobu.

2) G ima tri komponente s barem 4 vrha.

Najveća komponenta može imati najviše 11 vrhova, pa prema Lemi 4.21 iv) nije otporna na 2 agenta za $k = 5$. Druga najveća komponenta može imati najviše 7 vrhova pa prema Lemi 4.21 ii) nije otporna na 1 agenta, a treća najveća komponenta ima najviše 6 vrhova, pa prema Lemi 4.21 i) nije

otporna na 1 nestalu osobu. Neki mogući izbori dani su kako slijedi:

Tablica 9. Neki izbori 3 agenta i 1 nestale osobe za slučaj 2)

4	4	≤ 11	4	≤ 5	≤ 10	4	≤ 6	≤ 9	4	≤ 7	≤ 8
m	a	$2a$	m	a	$2a$	m	a	$2a$	m	a	$2a$
≤ 5	≤ 5	≤ 9	≤ 5	≤ 6	≤ 8	≤ 5	≤ 7	≤ 7	≤ 6	≤ 6	≤ 7
m	a	$2a$	m	a	$2a$	m	a	$2a$	m	a	$2a$

3) G ima dvije komponente s barem 4 vrha.

Najveća komponenta ima najviše 15 vrhova, a tvrdnja da graf s najviše 15 vrhova nije otporan na 3 agenta za $k = 5$ slijedi iz $K(3, 15) = 7$, što je dokazano u [76]. Ako najveća komponenta ima 15 vrhova, onda druga najveća komponenta ima 4 vrha i može se 3-razbiti s 1 nestalom osobom. Slučajevi kad najveća komponenta ima 13 ili 14 vrhova, a druga najveća 6 ili 5 slijedi na isti način.

Ako najveća komponenta ima 12 vrhova onda se može 3-razbiti s 2 agenta i 1 nestalom osobom, što slijedi iz Leme 4.18 iii). Druga najveća komponenta onda ima najviše 7 vrhova i nije otporna na 1 agenta prema Lemi 4.21 ii).

Ako najveća komponenta ima 11 ili 10 vrhova onda nije otporna na 2 agenta, a druga najveća komponenta tada ima najviše 8 ili 9 vrhova, pa nije otporna na 1 agenta i 1 nestalu osobu, što slijedi iz Leme 4.21 iv) i iii).

4) G ima jednu kompnentu s barem 4 vrha.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je G povezan s 19 vrhova, ostali slučajevi slijede odatle.

4.1) Maksimalni stupanj u G je 2.

Neka je u proizvoljni vrh stupnja 2 u G. $G \backslash N_0(u)$ ima 16 vrhova i unija je putova. Označimo s v centar najdužeg puta u $G \backslash N_0(u)$. Sada $G \backslash (N_0(u) \cup N_0(v))$ ima 13 vrhova i unija je barem 2 puta od kojih najveći ima najviše 7 vrhova i nije otporan na 1 agenta prema Lemi 4.21 ii), a preostalih 6 vrhova

nije otporno na 1 nestalu osobu prema Lemi 4.21 i).

4.2) Maksimalni stupanj u G je 3.

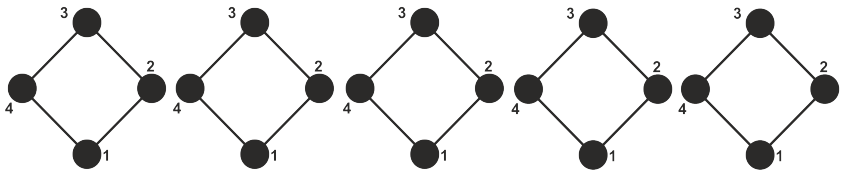
Neka je u vrh stupnja 3 u G. $G\backslash N_0(u)$ ima 15 vrhova.

Ako je u $G\backslash N_0(u)$ maksimalni stupanj najviše 2 neka je v proizvoljan vrh stupnja 2 u $G\backslash N_0(u)$. $G\backslash(N_0(u)\cup N_0(v))$ ima 12 vrhova i unija je putova. Ako $G\backslash(N_0(u)\cup N_0(v))$ nije povezan lako se vidi da se može 3-razbiti s 1 agentom i 1 nestalom osobom, a ako je $G\backslash(N_0(u)\cup N_0(v))$ jedan put od 12 vrhova neka je w vrh udaljen za 4 od kraja tog puta. $G\backslash(N_0(u)\cup N_0(v)\cup N_0(w))$ je unija dva puta, duljina 3 i 6 i dulji od njih se očito može 3-razbiti s 1 nestalom osobom.

S druge strane, ako u $G\backslash N_0(u)$ postoji vrh stupnja 3, za svaki u stupnja 3 u G, tvrdnja slijedi iz Leme 4.23 i Leme 4.22 ii) i iii).

4.3) Maksimalni stupanj u G je barem 4. Neka je u vrh maksimalnog stupnja u G. $G\backslash N_0(u)$ ima najviše 14 vrhova i nije otporan na 2 agenta i 1 nestalu osobu prema Lemi 4.22 iii).

Ovo dokazuje tvrdnju $K(3,1,19)\geq 6$.



Slika 4.8: Realizacija za $(3,1,20,4)$.

Preostaje dokazati da je $K(3,1,20)=4$. Zbog T1, lako se vidi da je $K(3,1,20)\geq 4$, a realizacija za $(3,1,20,4)$ dana je na Slici 4.8. ■

Ovim završava prezentacija rezultata problema agenata i nestalih osoba u mrežama agenata spavača s distribuiranim ključevima. Mjesta za daljnja istraživanja ima, počevši od otvorenih problema određivanja da li je $K(3,1,18)=6$ ili 7, pa do poopćenja slučajeva za 2 i 3 agenta i bilo koji broj

$m \in \mathbb{N}$ nestalih osoba, kao što je analizirano za slučaj $a = 1$ u Teoremu 4.5.

U sljedećem poglavlju izloženi su rezultati malo izmijenjenih pretpostavki problema mreža s distribuiranim ključevima. Sada promatramo situaciju kada je broj ključeva i neprijateljskih agenata unaprijed određen, tj. fiksiran je broj od 3 ključa i 2 agenta. S obzirom da agenti nisu definirani na isti način kao u prethodnom poglavlju, koristit ćemo izraz odmetnici.

4.2 Napad 2 odmetnika na mrežu s 3 ključa

Ova situacija je motivirana stvarnim mrežama u kojima poruka podijeljena na ključeve nije kompliciranа, pa je dovoljan manji broj ključeva. Na primjer, ako je poruka nekakav zaštitni kod koji nije siguran kod samo jedne osobe, on se razdijeli u nekoliko dijelova i podijeli na više osoba. Isti dio koda može imati i više osoba, a pretpostavka je da se u mreži ne poznaju međusobno svi, nego su bridovima povezani samo oni vrhovi koji reprezentiraju osobe koje se poznaju.

Promatramo mreže s n vrhova u kojima svaki vrh ima točno 1 ključ iz skupa $\{1, 2, 3\}$. Odmetnici su vrhovi koji neprijateljskoj strani predaju dio koda (ključ) koji im je dodijeljen, te odu iz mreže uklanjajući i sve bridove koji su im incidentni. Očito uz pretpostavku o samo 3 ključa u mreži može postojati najviše 2 odmetnika, da bi ona bila sigurna, tj. da neprijateljska strana ne bi došla do svih ključeva. Uvjet za sigurnost mreže je također da bi se nakon odlaska odmetnika iz mreže mogle i dalje naći 3 osobe u istoj komponenti povezanosti koje zajedno imaju skup od sva 3 ključa. Naš cilj je odrediti uvjete uz koje je mreža s 3 ključa sigurna na 2 odmetnika. Formulirajmo ove pojmove matematički. Graf koji reprezentira mrežu je kao i dosad neusmjeren i jednostavan.

Definicija 4.25 *Neka je G graf i neka je zadana funkcija $\phi : V(G) \to \{1, 2, 3\}$. Kažemo da funkcija ϕ* ***čuva poruku u*** *G ako postoji komponenta povezanosti grafa G u kojoj postoje vrhovi u, v, w takvi da je $\phi|_{\{u,v,w\}}$ bijekcija.*

To znači da postoji komponenta od G koja sadrži sva tri ključa. Uređeni par (G, ϕ) grafa G i funkcije ϕ definirane na G nazivamo **sustavom**.

Definicija 4.26 *Za graf G kažemo da je* ***2-siguran*** *ako postoji funkcija $\phi : V(G) \to \{1, 2, 3\}$ takva da za sve parove vrhova $\{u, v\} \subseteq V(G)$ funkcija $\phi|_{V(G)\setminus\{u,v\}}$ čuva poruku. U tom slučaju kažemo da je (G, ϕ)* ***2-siguran sustav****.*

Drugim riječima, graf G je 2-siguran ako postoji funkcija ϕ takva da je kad uklonimo bilo koji par vrhova iz G, poruka i dalje sačuvana. Analogno definiramo i 1-siguran sustav.

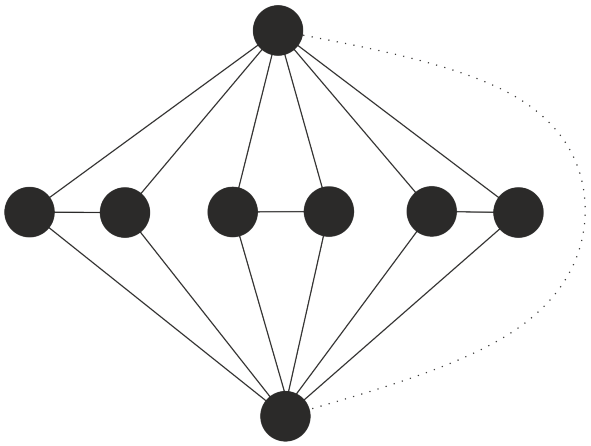
Definicija 4.27 *Za graf G kažemo da je* ***1-siguran*** *ako postoji preslikavanje $\phi : V(G) \to \{1, 2, 3\}$ takvo da za sve vrhove $u \in V(G)$ preslikavanje $\phi|_{V(G)\setminus\{u\}}$ čuva poruku. U tom slučaju kažemo da je (G, ϕ)* ***1-siguran sustav****.*

Očito vrijedi da ako je graf 2-siguran onda je i 1-siguran.

Lako se vidi da 2-siguran graf G mora imati barem 9 vrhova. Ako ima manje, barem jedan od ključeva $\{1, 2, 3\}$ će se javiti najviše dvaput, za bilo koju funkciju ϕ, pa uklanjanjem ta 2 vrha u preostalom grafu više ni jedan vrh nema barem jedan od ključeva.

Ovdje ćemo promatrati samo grafove s minimalnim stupnjem barem 3, što je razumna restrikcija kad se uzme u obzir da ako očekujemo da dva vrha budu odmetnici, nijedan vrh ne bude susjedan s 2 ili manje vrhova. Pokazat ćemo da je proizvoljan graf G s barem 9 vrhova i minimalnim stupnjem barem 3 2-siguran ako G nije dvostruka vjetrenjača sa susjednim centrima ili dvostruka vjetrenjača s nesusjednim centrima. Prvo definirajmo te grafove.

Definicija 4.28 *Dvostruka vjetrenjača sa susjednim centrima, u oznaci* DW_k^**, je graf koji sadrži* $k \in \mathbb{N}$ *podgrafova* K_2 *i* 2 *centralna vrha koji su susjedni svim vrhovima iz svih* K_2 *podgrafova, i susjedni su međusobno. Ako centralni vrhovi nisu susjedni kažemo da je taj graf dvostruka vjetrenjača s nesusjednim centrima i označavamo ga s* DW_k*. (Slika 4.9.)*



Slika 4.9: Dvostruka vjetrenjača DW_3 (DW_3^*)

Lako se vidi da su oba tipa dvostruke vjetrenjače grafovi kojima je minimalni stupanj barem 3, a nisu 2-sigurni, jer ako uklonimo dva centralna vrha sve preostale komponente imaju po dva vrha, pa ne postoji funkcija koja bi čuvala poruku u tom grafu.

Struktura koju ćemo koristiti u dokazima je **trovršje**. To su tri vrha spojena putom, a treći brid koji formira trokut može i ne mora postojati. Trovršje ćemo označavati s T_3. Za dva podgrafa grafa G kažemo da su **vršno disjunktni**, ako nemaju zajedničkih vrhova. Ako graf G ima kao podgraf jedno ili više vršno disjunktnih trovršja, radi jednostavnosti izražavanja, kazat ćemo da taj graf **sadrži vršno disjunktna trovršja**.

Propozicija 4.29 *Graf* G *koji sadrži tri vršno disjunktna trovršja je* 2*-siguran.*

Dokaz. Dovoljno je pronaći preslikavanje koje pridružuje ključeve 1, 2 i 3 trima različitim vrhovima u svakom od trovršja, pa uklanjanjem bilo koja 2 vrha barem jedno trovršje ostaje netaknuto. ■

Lema 4.30 *Graf G s barem 9 vrhova i minimalnim stupnjem barem 3 koji sadrži dvostruku vjetrenjaču DW_k^* ili DW_k, $k \geq 3$, kao podgraf, je ili 2-siguran ili je dvostruka vjetrenjača.*

Dokaz. Neka je G graf s $n \geq 9$ vrhova i $\delta(G) \geq 3$ koji sadrži dvostruku vjetrenjaču kao podgraf. Neka je D najveća dvostruka vjetrenjača u G. Ako nema vrhova u $G \backslash D$, tvrdnja je dokazana, pa pretpostavimo da postoji vrh $u \in V(G) \backslash V(D)$. Vrijedi $d(u) \geq 3$, pa promotrimo susjede od u. Razlikujemo dva slučaja.

1) u je susjedan dvama centrima od D.

Tada u ima barem još jednog susjeda. Ako je taj susjed bilo koji vrh u D, različit od centralnih vrhova, onda G sadrži 3 vršno disjunktna trovršja, pa je 2-siguran. A ako je treći susjed od u vrh $v \in V(G) \backslash V(D)$ onda promotrimo susjede od v. Ako v ima još nekog susjeda, osim u, koji nije u D, lako se vide 3 vršno disjunktna trovršja, a ako je v susjedan samo s u i centralnim vrhovima iz D, dobili smo veću vjetrenjaču, što je kontradikcija.

2) u nije susjedan barem jednom centralnom vrhu iz D. u ima barem 2 susjeda različita od centralnih vrhova iz D. Ako u ima barem 2 susjeda u skupu $V(G) \backslash V(D)$, trovršja se lako vide. Pretpostavimo da u ima točno jednog susjeda u $V(G) \backslash V(D)$ i označimo ga s v. Tvrdnja slijedi analogno kao u slučaju 1), promatranjem susjeda od v. Ukoliko u nema susjeda u $V(G) \backslash V(D)$ onda ima barem 2 susjeda u D koji nisu centralni vrhovi. No onda u s ta dva vrha čini jedno trovršje, a druga dva se lako vide, centri su im centralni vrhovi od D. ■

Sada ćemo dokazati središnju tvrdnju ovog dijela. Prvo promatramo povezane grafove.

Teorem 4.31 *Povezan graf G s barem 9 vrhova i minimalnim stupnjem barem 3 je ili 2-siguran ili je dvostruka vjetrenjača DW_k^* ili DW_k, $k \geq 3$.*

Dokaz. Lako se vidi da povezan graf G s barem 9 vrhova i minimalnim stupnjem barem 3 sadrži barem jedno trovršje T_3. Dokažimo da sadrži barem dva vršno disjunktna trovršja T_3. Postoji barem jedno trovršje, pa neka je T_3 ono trovršje koja ima minimalnu sumu stupnjeva vrhova, od svih trovršja u G. Promatramo dva slučaja.

1) T_3 nije trokut. Označimo vrhove u T_3 s u, v, w, i neka je v susjedan s u i w.Vrhovi u i w imaju još barem po 2 susjeda svaki, a v barem jednog.

1.1) Neka u i w nemaju zajedničkih susjeda i neka barem jedan od njih ima dva susjeda koji nisu susjedni drugom od tih vrhova, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da postoje vrhovi x_1 i x_2, susjedni s u koji nisu susjedni s w. Tada w ima barem još dva susjeda koji nisu u skupu $\{u, v, x_1, x_2\}$, označimo jednog od njih s y. Tražena trovršja su x_1ux_2 i vwy.

1.2) Neka u i w imaju, osim v, točno jednog zajedničkog susjeda, označimo ga s y i svaki po točno jednog susjeda koji nije susjed od drugog vrha, neka je x_1 susjed od u, a x_2 od w. Tada su tražena trovršja x_1uy i vwx_2.

1.3) Neka u i w imaju, osim v, barem dva zajednička susjeda, x_1 i x_2. Promotrimo susjede vrha v.

1.3.1) Ako su x_1 i x_2 susjedni imamo ciklus $uvwx_2x_1$. S obzirom da G ima barem 9 vrhova i povezan je, postoji vrh x_3 susjedan nekom od vrhova tog ciklusa. No, tada se tri vršno disjunktna trovršja lako vide.

1.3.2) Neka x_1 i x_2 nisu susjedni. Ako je v susjedan točno jednom od njih, bez smanjenja općenitosti neka je v susjedan s x_1, onda x_2 mora imati još

jednog susjeda, označimo ga s y. Tada su yx_2w i ux_1v tražena trovršja. Ako je v susjedan i s x_1 i s x_2 onda barem jedan od x_1, x_2 ima barem još jednog susjeda, zbog broja vrhova u grafu, i jer je uvw trovršje s najmanjom sumom stupnjeva. S tim novim susjedom, trovršja se ponovno lako vide. Ako v nije susjedan ni s x_1 ni s x_2, neka je y susjed od v, različit od u i v. Tražena trovršja su yvw i x_1ux_2.

2) T_3 je trokut. Označimo ponovno vrhove s u, v, w. Sada svaki od tih vrhova ima barem još jednog susjeda.

2.1) Ako u, v i w nemaju nijednog zajedničkog susjeda i ako barem jedan od vrhova u, v, w ima susjeda koji nije susjed ostalim vrhovima, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da u ima susjeda x, i neka je y susjed od x, različit od u, v i w. Ako su v i w susjedni s y i nemaju više susjeda, onda neka je z susjed od x, različit od y i u. Sada su zxy i uwv tražena trovršja. Ako barem jedan od v i w nije susjedan s y, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je to vrh v, neka je z susjed od v, različit od vrhova u, w, x, y. Tada su zvw i uxy tražena trovršja.

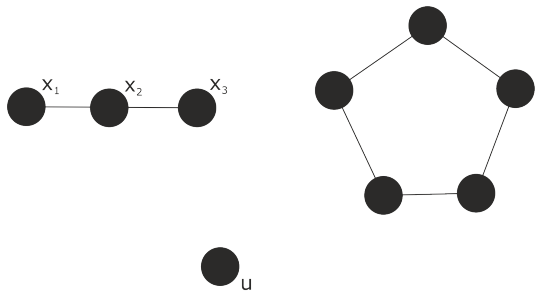
2.2) Ako u, v, w imaju zajedničkog susjeda, označimo ga s x, onda zbog broja vrhova u grafu, i jer je uvw trovršje s najmanjom sumom stupnjeva, x mora imati barem još jednog susjeda, označimo ga s y. Bez obzira je li y susjedan nekom ili svim vrhovima iz $\{u, v, w\}$ ili x ili y moraju imati još jednog susjeda, pa ako ga označimo sa z, tražena trovršja su xyz i uvw.

2.3) Ako u, v i w nemaju nijednog zajedničkog susjeda, ali u parovima imaju po jednog zajedničkog susjeda onda se tražena trovršja lako vide.□

Dokazali smo da u danom grafu uvijek postoje dva vršno disjunktna trovršja. Tvrdnju teorema ćemo dokazati kroz sedam tvrdnji.

Tvrdnja 1. Povezan graf G s barem 9 vrhova i minimalnim stupnjem barem 3 koji sadrži vršno disjunktne ciklus C_5 i trovršje T_3 je 2-siguran.

Dokaz Tvrdnje 1. U ciklusu C_5 i trojci T_3 je 8 vrhova, pa G sadrži barem još jedan vrh, označimo ga s u. Označimo vrhove u T_3 s x_1, x_2 i x_3, i neka je x_2 susjedan s x_1 i x_3 (Slika 4.10). Ako je u susjedan bilo kojem vrhu



Slika 4.10: C_5 i T_3

u C_5 onda imamo put P_6 i trovršje T_3, pa postoje 3 vršno disjunktna trovršja i G je 2-siguran prema Propoziciji 4.29. Ako u ima dva susjeda koji nisu iz T_3, očito vršno disjunktna trovršja opet postoje, pa pretpostavimo da u ima 2 susjeda u T_3. Očito jedan od njih mora biti ili x_1 ili x_3, pa bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su u i x_1 susjedni. Kako u nije susjedan ni s jednim vrhom u C_5, a G je povezan graf, mora postojati put od nekog vrha iz C_5 do nekog vrha iz T_3. Ako je taj put dulji od 1 tražena trovršja se lako vide, pa pretpostavimo da je neki vrh iz C_5 susjedan nekom vrhu iz T_3. Razlikujemo tri slučaja.

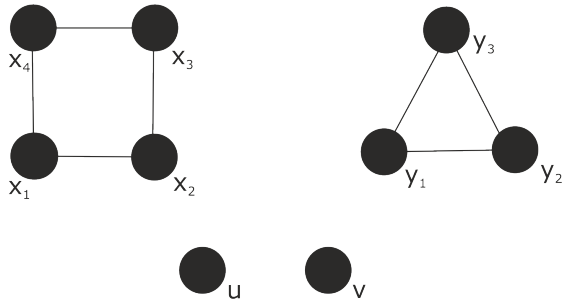
1) Neki vrh iz C_5 je susjedan s x_1. Kako je u susjedan ili s x_2 ili s x_3 imamo trovršje ux_2x_3, a x_1 s C_5 tvori P_6, pa su tu još dva vršno disjunktna trovršja.

2) Neki vrh iz C_5 je susjedan s x_3. U ovom slučaju imamo trovršje ux_1x_2 i put P_6.

3) Neki vrh iz C_5 je susjedan s x_2. Sada C_5 i x_2 čine dva trovršja, a u je ili osim s x_1 susjedan s x_3, pa je x_1ux_3 treće trovršje, ili s x_2 i još nekim vrhom, w, koji nije sadržan u C_5 ni u T_3, pa je tada x_1uw treće trovršje.□

Tvrdnja 2. Povezan graf G s barem 9 vrhova i minimalnim stupnjem barem 3 koji sadrži vršno disjunktne cikluse C_4 i C_3 je 2-siguran.

Dokaz Tvrdnje 2. Osim vrhova u C_4 i C_3, G sadrži barem još dva vrha. Označimo ih s u i v, i označimo vrhove u C_4 s $x_1, ..., x_4$ i vrhove u C_3 s y_1, y_2, y_3 (Slika 4.11). Ako barem jedan od vrhova u i v ima barem dva susjeda koji



Slika 4.11: C_4 i C_3

nisu u C_4 ni C_3, vršno disjunktna trovršja se lako vide, pa pretpostavimo da to nije slučaj. To znači da i u i v imaju barem po dva susjeda svaki u $C_4 \cup C_3$. Ako su u ili v susjedni s dva susjedna vrha u C_4, onda tvore C_5, pa imamo uvjete iz Tvrdnje 1 i Tvrdnja 2 vrijedi. Razmotrimo dva slučaja.

1) Neka je u susjedan bilo kojem vrhu u C_4, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo s x_1.

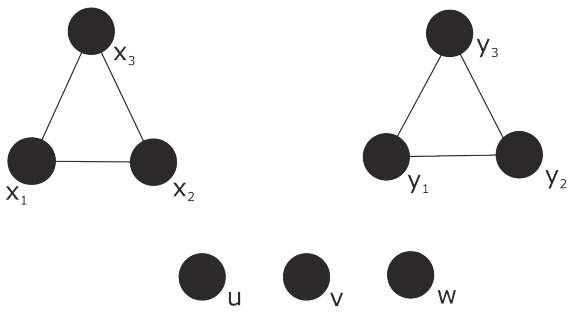
Promotrimo susjede od v. Ako je v susjedan s u ili s x_1, tražena trovršja su vux_1, $x_2x_3x_4$ i $y_1y_2y_3$. Ako je v susjedan s nekim od vrhova x_2, x_3, x_4 onda u $C_4 \cup \{u, v\}$ imamo dva trovršja. Ako v nije susjedan ni s u ni s bilo kojim vrhom u C_4 onda su dva susjeda od v u C_3 i da bi G bio povezan, pretpostavimo da je neki vrh iz C_3 susjedan s u ili s nekim vrhom iz C_4 (kao i u Tvrdnji 1 pretpostavljamo da ako put od C_4 do C_3 ne prolazi ni kroz u ni v, taj put je duljine 1, tj. neki vrh iz C_4 i neki vrh iz C_3 su spojeni bridom, jer se u protivnom trovršja lako vide). Ako je u susjedan nekom vrhu iz C_3

onda tražena trovršja možemo formirati tako da jednu tvore u i njemu dva susjedna vrha, jedan u C_4 i jedan u C_3, drugo trovršje tvore 3 preostala vrha iz C_4, a treće v s preostala dva vrha iz C_3. S druge strane, ako postoji brid između nekog vrha od C_3 i nekog vrha od C_4, onda jedno trovršje sadrži jedan vrh iz C_3 i dva iz C_4, a druga dva trovršja se lako vide.

2) u je susjedan dvama vrhovima u C_3. Ako je v susjedan bilo kojem vrhu iz C_4 imamo analognu situaciju slučaju 1), a ako to nije slučaj onda v ili ima dva susjeda u C_3 i susjeda koji nije sadržan u $C_4 \cup C_3$, u tom slučaju se trovršja lako vide, ili je v susjedan svim vrhovima u C_3. No, onda opet mora postojati brid između C_4 i C_3, pa se trovršja lako vide.□

Tvrdnja 3. Povezan graf G s barem 9 vrhova i minimalnim stupnjem barem 3 koji sadrži dva vršno disjunktna ciklusa C_3 je ili 2-siguran ili je dvostruka vjetrenjača.

Dokaz Tvrdnje 3. U dva C_3 ciklusa je 6 vrhova, pa G sadrži barem još 3 vrha. Označimo ih s u, v i w, a vrhove u početnim ciklusima s x_i, y_i, $i = 1, 2, 3$ (Slika 4.12). Kao i prije, ako ijedan od vrhova u, v, w ima dva

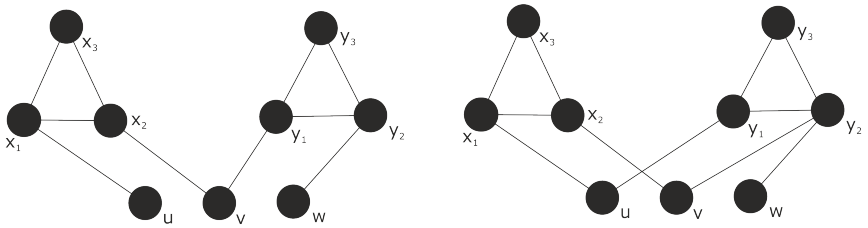


Slika 4.12: Dva ciklusa C_3

susjeda koji nisu u $C_3 \cup C_3$, tvrdnja lako slijedi pa pretpostavimo da svaki od ta tri vrha ima po barem dva susjeda u $C_3 \cup C_3$. Također primijetimo, da ako neki od vrhova u, v, w ima dva susjeda u istom C_3 ciklusu, oni tvore

ciklus C_4, pa tvrdnja slijedi iz Tvrdnje 2. Dakle, svaki od vrhova u, v, w ima točno jednog susjeda u skupu $\{x_1, x_2, x_3\}$ i točno jednog u skupu $\{y_1, y_2, y_3\}$. Promotrimo dva slučaja.

1) Neka je suma broja susjeda od u, v i w barem dva u svakom od dva ciklusa C_3. Tada se tražena trovršja lako vide. (Slika 4.13).



Slika 4.13: Primjeri prvog slučaja

2) Neka u, v i w imaju istog susjeda u jednom od ciklusa.

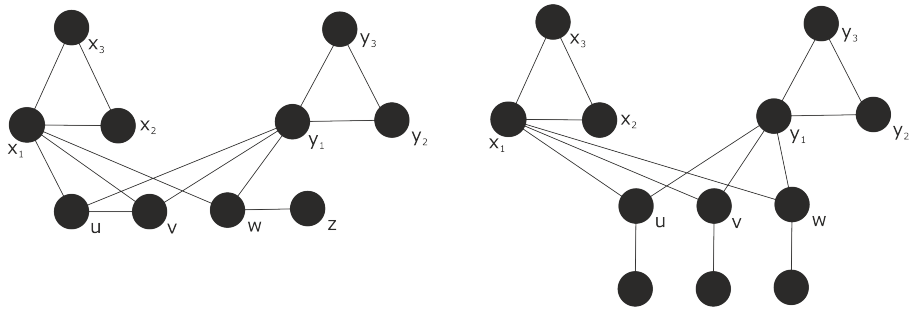
Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je to vrh x_1.

2.1) u, v i w imaju svi različite susjede u skupu $\{y_1, y_2, y_3\}$. Očito u, v i w moraju imati svaki po barem još jednog susjeda. Ako ijedan od njih ima susjeda koji nije u $C_3 \cup C_3$, trovršja se lako vide (ovo uključuje i slučaj kad su neka dva vrha od u, v, w međusobno susjedni jer tada imamo jedan C_4 i jedan C_3 ciklus pa tvrdnja slijedi iz Tvrdnje 2), a ostale slučajeve, kad neki od njih ima još jednog susjeda u $\{x_1, x_2, x_3\}$ ili u $\{y_1, y_2, y_3\}$ smo već ranije isključili (tada tvrdnja slijedi iz Tvrdnje 2).

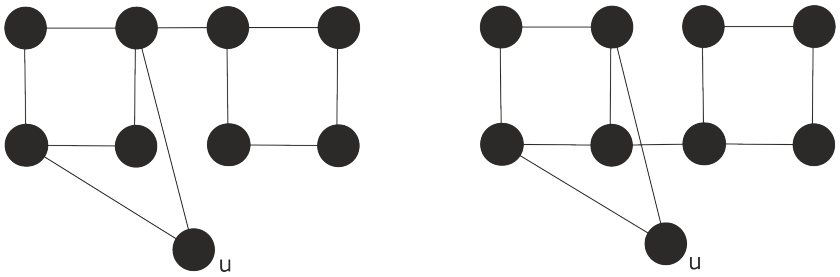
2.2) u, v i w imaju dva različita susjeda u skupu $\{y_1, y_2, y_3\}$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su u i v susjedni vrhu y_1, a w vrhu y_2. Sada su tražena trovršja vy_1u, wy_2y_3 i $x_1x_2x_3$.

2.3) u, v i w su svi susjedni istom vrhu u drugom ciklusu. Bez smanjenja općenitosti neka je to vrh y_1. Prvo promotrimo vrhove x_2, x_3, y_2 i y_3. Ako između tih vrhova ima još bridova, osim onih u već poznatim ciklusima, trovršja se lako vide, pa pretpostavimo da to nije slučaj. Nadalje, ako ijedan od

vrhova x_2, x_3, y_2 i y_3 ima susjeda koji nije u skupu $\{u, v, w, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ trovršja se opet lako pronađu. Pretpostavimo stoga da su x_2 i x_3 susjedni još s y_1, a y_2 i y_3 s x_1. Promotrimo sada vrhove u, v i w. Po prethodnim pretpostavkama, nijedan od njih nije susjedan više nijednom vrhu iz ciklusa, što znači da su ili susjedni međusobno ili imaju još susjeda koje dosad nismo promotrili. Ako je jedan od njih susjedan s preostala dva, očito imamo 3 trovršja. Neka su dva vrha susjedna međusobno, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su to u i v. Tada mora postojati vrh z, dosad neoznačen, susjedan vrhu w. Vrh z mora imati još barem dva susjeda i ako je barem jedan od njih u skupu $\{u, v, x_2, x_3, y_2, y_3\}$, trovršja se lako vide, kao i u slučaju da ima novog, dosad neoznačenog susjeda. Međutim, ako je z susjedan još samo s x_1 i y_1 tražena trovršja ne postoje. Lako se vidi da je tada promatrani podgraf dvostruka vjetrenjača (x_1 i y_1 mogu i ne moraju biti susjedni), pa tvrdnja slijedi iz Leme 4.30. Slično, ako nijedna dva vrha od u, v, w nisu susjedna međusobno, svaki ima barem po još jednog susjeda, dosad neoznačenog. Ako dva vrha imaju zajedničkog susjeda trovršja se lako vide, a ako sva tri imaju različite susjede, ovisno o susjedima tih vrhova imamo ili 3 vršno disjunktna trovršja, ili ako su i svi ti susjedi susjedni samo još s x_1 i y_1, opet dolazimo do dvostruke vjetrenjače (Slika 4.14), i tvrdnja



Slika 4.14: Primjeri drugog slučaja (2.3)



Slika 4.15: Dva vršno disjunktna ciklusa C_4

slijedi iz Leme 4.30.□

Tvrdnja 4. Povezan graf G s barem 9 vrhova i minimalnim stupnjem barem 3 koji sadrži dva vršno disjunktna ciklusa C_4 je 2-siguran.

Dokaz Tvrdnje 4. Osim vrhova u ciklusima, G ima barem još jedan vrh, u, i kao i prije možemo zaključiti da u ima barem dva susjeda u $C_4 \cup C_4$. Ako su ta dva susjeda u različitim ciklusima, onda oni zajedno s u tvore jedno trovršje, a preostali vrhovi u ciklusima još dva trovršja, pa pretpostavimo da su dva susjeda od u u jednom od ciklusa. Ako su to susjedni vrhovi, onda oni zajedno s u tvore C_3 i uz drugi C_4 ciklus imamo uvjete iz Tvrdnje 2. Promotrimo slučaj kada je u susjedan dvama nesusjednim vrhovima u jednom od ciklusa. Jer je G povezan, mora postojati put od vrhova jednog ciklusa do vrhova drugog ciklusa i ako je taj put dulji od 1 trovršja se lako vide. Stoga pretpostavimo da je jedan od vrhova jednog ciklusa spojen bridom s nekim vrhom drugog ciklusa. Razmotrimo dvije mogućnosti:

1) Taj brid je incidentam nekom susjedu od u.

2) Taj brid nije incidentan susjedu od u.

U oba slučaja trovršja se lako vide, što je ilustrirano na Slici 4.15. □

Tvrdnja 5. Povezan graf G s barem 9 vrhova i minimalnim stupnjem barem 3 koji sadrži vršno disjunktne ciklus C_4 i trovršje T_3 je 2-siguran.

Dokaz Tvrdnje 5. Graf G očito ima barem dva vrha koji nisu u C_4 ni u T_3, označimo ih s u i v. Pretpostavimo da svaki od njih ima barem dva susjeda u $C_4 \cup T_3$. Ako i u i v imaju barem po jednog susjeda u C_4 razmotrimo slučajeve:

1) Ako su u i v susjedni istom vrhu u C_4, označimo ga s x, onda su trovršja uxv, T_3 i $C_4 \backslash \{x\}$.

2) Ako su u i v susjedni različitim vrhovima u C_4, označimo ih s x_1, x_2, redom, onda su trovršja ux_1 i susjed od x_1u C_4, različit od x_2, vx_2 i preostali vrh iz C_4, i T_3.

Pretpostavimo da barem jedan od vrhova u i v nema nijednog susjeda u C_4, bez smanjenja općenitosti neka je to vrh u. Tada u ima dva susjeda u T_3, pa ako su to susjedni vrhovi imamo C_3, a ako nisu susjedni imamo C_4 i tvrdnja slijedi iz Tvrdnje 2 ili Tvrdnje 4.□

Tvrdnja 6. Povezan graf G s barem 9 vrhova i minimalnim stupnjem barem 3 koji sadrži vršno disjunktne ciklus C_3 i trovršje T_3 je ili 2-siguran ili je dvostruka vjetrenjača.

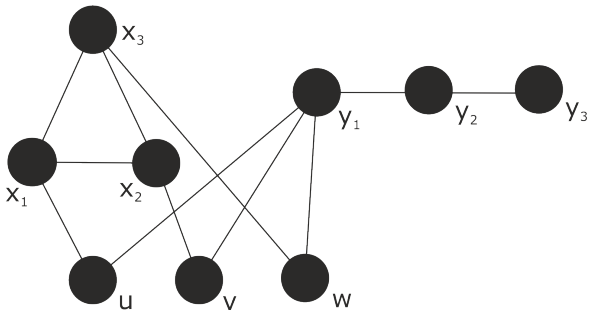
Dokaz Tvrdnje 6. Lako se vidi da G mora imati barem još tri vrha van $C_3 \cup T_3$, označimo ih s u, v i w. Pretpostavimo da svaki od njih ima barem dva susjeda u $C_3 \cup T_3$. Označimo vrhove ciklusa s x_1, x_2, x_3, a vrhove u T_3 s y_1, y_2, y_3. Ako neki od vrhova u, v, w ima oba susjeda u ciklusu C_3 onda oni tvore C_4 i tvrdnja slijedi iz Tvrdnje 5. Analogno, ako ijedan od vrhova u, v, w, ima oba susjeda u T_3 oni tvore ili C_3 ili C_4, pa tvrdnja slijedi iz Tvrdnje 3 ili iz Tvrdnje 2. Pretpostavimo da svaki od vrhova u, v, w ima po jednog susjeda u C_3 i T_3. Promotrimo 3 slučaja.

1) Točno dva vrha iz skupa $\{u, v, w\}$ imaju istog susjeda u C_3, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su u i v susjedni s x_1, a w s x_2. Tada su trovršja ux_1v, wx_2x_3 i $y_1y_2y_3$.

2) u, v i w imaju svi različite susjede u C_3, neka su to x_1, x_2 i x_3, redom.

Ako u, v i w svi imaju različite susjede u T_3, pretpostavimo y_1, y_2 i y_3, redom, onda su trovršja x_1uy_1, x_2vy_2 i x_3wy_3. Ako su u i v susjedni s y_1, a w s y_2 ili y_3, onda su trovršja x_1uy_1, x_2vy_2 i x_3wy_3. Ako su u i v susjedni s y_2, a w s y_1 (ili y_3), onda su trovršja x_2x_1u, x_3wy_1(iliy_3), vy_2y_3(ili y_1). I ako su sva tri vrha susjedna istom vrhu u T_3 imamo dvije mogućnosti.

Ako je taj vrh kraj, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo y_1, onda promotrimo susjede od y_3. Ako je y_3 susjedan s y_1 imamo dva C_3 ciklusa i tvrdnja slijedi iz Tvrdnje 3. Već smo pretpostavili da nijedan od vrhova u, v, w nije susjedan s y_3, pa preostaju mogućnosti da y_3 ima susjeda koji nije u skupu $\{u, v, w, x_1, x_2, x_3, y_1\}$, u tom slučaju se trovršja lako vide; ili je y_3 susjedan nekom od vrhova iz C_3, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo x_1. Tada su trovršja $y_2y_3x_1$, uy_1v i wx_3x_2 (Slika 4.16).

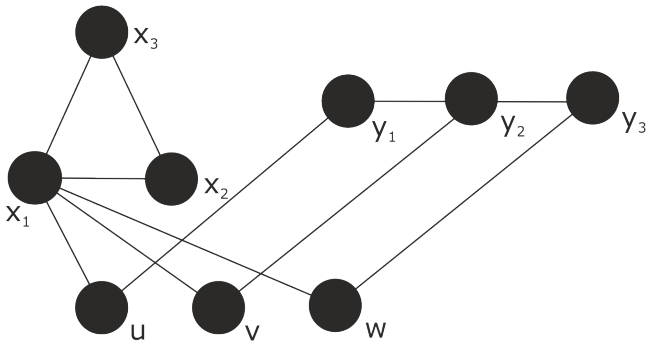


Slika 4.16: C_3 i T_3, slučaj 2)

S druge strane, ako u, v i w nisu susjedni krajnjem vrhu u T_3 nego vrhu y_2, ponovno promatranjem susjeda od y_3 dolazimo do traženih trovršja.

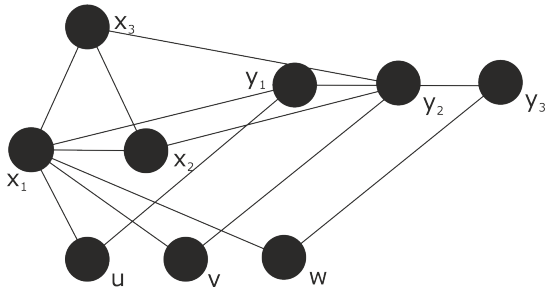
3) u, v i w imaju svi istog susjeda u C_3 i bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je to vrh x_1. Promotrimo tri podslučaja.

3.1) u, v i w imaju svi različite susjede u T_3. Pretpostavimo da su susjedni redom s y_1, y_2 i y_3 (Slika 4.17). Promotrimo susjede vrha x_2. Ako



Slika 4.17: Podslučaj 3.1

on ima susjeda koji nije u skupu $\{u, v, w, y_1, y_2, y_3\}$ trovršja se lako vide. Već smo razmotrili slučaj kad je x_2 susjedan nekom vrhu iz $\{u, v, w\}$, pa pretpostavimo da je susjedan nekom vrhu iz T_3. Ako je to neki od krajnjih vrhova, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo y_1, onda su trovršja $x_3x_2y_1$, ux_1v i wy_3y_2. A ako je x_2 susjedan s y_2 onda dalje razmatramo susjede od y_1. Ponovno se trovršja lako vide ako $y_1$ima dosad neoznačenog susjeda, a i kada je susjedan s y_3, u, v ili w. Ako je y_1 susjedan s x_2 ili x_3 trovršja su $x_3x_2y_1$, ux_1v i wy_3y_2. Ako je y_1 susjedan s x_1 onda promatramo x_3. Analogno kao kod ostalih vrhova razmatramo opcije, i jedina koja još nije analizirana je kad je x_3 susjedan s y_2. No, tada imamo dva nezavisna C_3 ciklusa x_1y_1u, i $x_2y_2x_3$ (Slika 4.18).



Slika 4.18: Dva nezavisna trokuta, x_1y_1u i $x_2y_2x_3$

3.2) u, v i w imaju točno dva različita susjeda u T_3. Pretpostavimo da u i v imaju istog susjeda. Ako je to krajnji vrh, pretpostavimo y_1, onda vrhovi ux_1vy_1 tvore C_4 ciklus, a w, y_2 i y_3 tvore trovršje T_3, pa tvrdnja slijedi iz Tvrdnje 5. S druge strane, ako su u i v susjedni s y_2, a w s y_1 ili y_3 (pretpostavimo y_1), onda ux_1vy_2 tvore C_4, a s njim vršno disjunktno trovršje se može pronaći promatranjem w, y_1 i preostalih susjeda od w.

3.3) u, v i w imaju istog susjeda u T_3.

Neka je prvo taj susjed jedan od krajnjih vrhova i pretpostavimo da je to vrh y_1. Promotrimo ostale susjede od y_3. Ako y_3 ima susjeda z, dosad neoznačenog, onda su trovršja uy_1v, $x_1x_2x_3$ i y_2y_3z. Ako je y_3 susjedan s y_1 imamo dva C_3 ciklusa, pa je graf 2-siguran ili je dvostruka vjetrenjača, prema Tvrdnji 3. Ako je y_3 susjedan nekom od vrhova $\{u, v, w\}$, imamo C_4 i C_3, pa tvrdnja slijedi iz Tvrdnje 2. Ako je y_3 susjedan barem dvama od vrhova u C_3 onda y_3 i C_3 tvore C_4 i zajedno s trojkom uy_1v možemo primijeniti Tvrdnju 5.

Neka su sada u, v i w susjedni s y_2. Tvrdnja slijedi analogno, promatranjem susjeda od y_1 i y_2.□

Tvrdnja 7. Povezan graf G s barem 9 vrhova i minimalnim stupnjem barem 3 koji sadrži dva vršno disjunktna trovršja T_3 je 2-siguran ili je dvostruka vjetrenjača.

Dokaz Tvrdnje 7. Lako se vidi da G mora imati barem još tri vrha, osim ovih u trovršjima, označimo te vrhove s u, v i w. Kao i prije, pretpostavimo da svaki od njih ima barem dva susjeda u $T_3 \cup T_3$. Ako ijedan od tih vrhova ima dva susjeda u istom trovršju onda oni formiraju C_3 ili C_4 pa tvrdnja slijedi po Tvrdnji 5 ili Tvrdnji 6. Pretpostavimo da svaki od vrhova u, v, w ima po jednog susjeda u jednom i po jednog drugom trovršju. Označimo vrhove u trovršjima s x_1, x_2, x_3 i y_1, y_2, y_3. Razlikujemo 4 slučaja.

1) Skup susjeda od u, v, w u jednom od trovršja ima dva različita vrha.

1.1) Zajednički susjed je krajnji vrh. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su u i v susjedni s x_1, a w s x_2 ili x_3. Trovršja su ux_1v, wx_2x_3, $y_1y_2y_3$.

1.2) Zajednički susjed je srednji vrh. Neka su u i v susjedni s x_2, a w s x_1. x_3 mora imati još dva susjeda i ako je ijedan od njih u skupu $\{u, v, w, x_1\}$ imamo uvjete neke od prethodnih tvrdnji. Ako je barem jedan neki dosad neoznačeni vrh, trovršja se lako vide. A ako su oba susjeda u skupu $\{y_1, y_2, y_3\}$ onda oni tvore C_3 ili C_4, i zajedno s trovršjem ux_2v imamo uvjete iz Tvrdnje 5 ili Tvrdnje 6.

2) u, v i w svi imaju različite susjede u oba trovršja. U ovom slučaju se trovršja lako vide, u, v i w su centri vršno disjunktnih trovršja.

3) u, v i w imaju istog susjeda u jednom od trovršja i sve različite susjede u drugom.

3.1) Zajednički susjed je krajnji vrh. Neka su u, v i w susjedni s x_1 i u susjedan s y_1, v s y_2 i w s y_3. x_3 mora imati barem još dva susjeda. Već smo razmotrili opcije kad je barem jedan od njih u skupu $\{u, v, w, x_1\}$ ili je dosad neoznačeni vrh. A kao i u slučaju 1.2, ako je x_3 susjedan s dva vrha iz $\{y_1, y_2, y_3\}$ oni tvore C_3 ili C_4, a već imamo jedno trovršje, ux_1v.

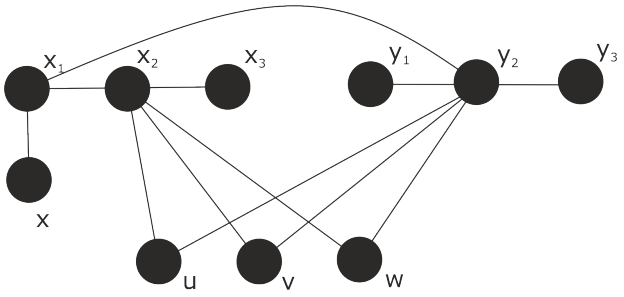
3.2) Zajednički susjed je srednji vrh. Ovaj slučaj je analogan slučaju 3.1.

4) u, v i w imaju istog susjeda u svakom od trovršja.

4.1) Zajednički susjed je krajnji vrh u barem jednom od trovršja (pretpostavimo x_1). Promotrimo preostale susjede od x_3. Ili je jedan od njih dosad neoznačeni vrh pa se trovršja lako vide, ili su oba u skupu $\{y_1, y_2, y_3\}$, pa tvrdnja slijedi po nekoj od prethodnih.

4.2) Zajednički susjed je srednji vrh u oba trovršja, tj. u, v i w su susjedni s x_2 i s y_2. Promotrimo susjede od x_1. Pretpostavimo da x_1 nije susjedan

ni s jednim vrhom u skupu $\{x_3, u, v, w\}$. Ako x_1 ima dva dosad neoznačena susjeda trovršja se lako vide. Ako x_1 ima točno jednog dosad neoznačenog susjeda, označimo ga s x, i susjedan je s y_1 ili y_3 (pretpostavimo y_1), onda su trovršja xx_1y_1, ux_2v, wy_2y_3. A ako x_1 ima točno jednog dosad neoznačenog susjeda, označimo ga s x, i susjedan je s y_2, onda promotrimo susjede od x. Ako je x susjedan bilo kojem vrhu iz $\{x_2, x_3, u, v, w, y_1, y_2, y_3\}$ imamo C_3 ili C_4 i trovršje T_3, a ako ima dva dosad neoznačena susjeda onda se vršno disjunktna trovršja lako vide (Slika 4.19).□ Sada polazna tvrdnja teorema



Slika 4.19: Dva vršno disjunktna trovršja

slijedi iz Tvrdnje 1-Tvrdnje 7 i Propozicije 4.29. ■

Time je završena analiza povezanih grafova i promotrimo sada grafove s dvije ili više komponenti.Neka je G graf s minimalnim stupnjem barem 3. Lako se vidi da vrijedi:

i) G ima barem 4 vrha u svakoj komponenti.

ii) Ako G ima 3 ili više komponenti onda sadrži tri vršno disjunktna trovršja, pa je 2-siguran.

iii) Ako G ima točno dvije komponente barem jedna mora biti 2-sigurna ili obje moraju biti 1-sigurne da bi G bio 2-siguran.

iv) Da bi G bio 1-siguran mora imati barem 6 vrhova (mora imati barem dvije kopije svakog ključa).

v) Graf je 1-siguran ako ima barem dva vršno disjunktna trovršja.

Lema 4.32 *Povezan graf G s barem 6 vrhova i minimalnim stupnjem barem 3 ima barem dva vršno disjunktna trovršja.*

Dokaz. Primijetimo da G sigurno ima barem jedno trovršje T_3. Označimo vrhove u T_3 s u, v i w. Razlikujemo dva slučaja.

1) T_3 nije trokut.

Neka je v susjedan s u i w. Očito u i w imaju po barem još dva susjeda. Neka su x i y susjedi od u. Ako w ima barem jednog susjeda različitog od x i y, trovršja se lako vide, a ako je w također susjedan s x i y i nema više drugih susjeda, onda promotrimo vrhove x, y i v. Oni svi moraju imati po barem još jednog susjeda i barem jedan od njih mora imati susjeda koji nije u $\{u, v, w, x, y\}$, jer G ima barem 6 vrhova. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da x ima susjeda z. Sada su trovršja zxu i ywv.

2) T_3 je trokut.

Sva tri vrha, u, v i w moraju imati barem po još jednog susjeda.

2.1) Svi imaju istog susjeda, označimo ga s x. Oni sad tvore potpuni graf na 4 vrha, a kako G mora imati barem još 2 vrha, trovršja je lako naći.

2.2) Dva vrha, bez smanjenja općenitosti neka su to u i v, imaju istog susjeda, x, a w ima susjeda y. Ako x i y nemaju susjeda koji nisu u skupu $\{u, v, w\}$, onda barem jedan od $\{u, v, w\}$ mora imati još jednog susjeda. No u svim slučajevima trovršja se lako vide.

2.3) Nijedna dva vrha iz $\{u, v, w\}$ nemaju zajedničkog susjeda koji nije u $\{u, v, w\}$. Očito tada ti susjedi moraju biti ili međusobno susjedni ili imati još, dosad neoznačenih susjeda, pa se trovršja lako vide. ■

Korolar 4.33 *Graf G s minimalnim stupnjem barem 3 je 2-siguran ako vrijedi barem jedno od sljedećeg:*

i) G ima barem 3 komponente.

ii) G ima barem jednu komponentu s barem 9 vrhova koja je različita od dvostruke vjetrenjače.

iii) G ima dvije komponente s barem po 6 vrhova u svakoj.

Na kraju, još nekoliko dodatnih opservacija o ovom problemu.

Napomena 4.34 *Za proizvoljni graf G s n vrhova i m bridova, te preslikavanje ϕ, postoji algoritam koji određuje je li sustav (G, ϕ) 2-siguran u vremenu $O(n^2m)$. Naime, treba provjeriti sva parove vrhova, ukloniti svaki par vrhova iz G i pretražiti preostali graf po komponentama, da vidimo postoje li u nekoj komponenti postoje sva tri ključa. Kad pronađemo takvu komponentu prelazimo na sljedeći par vrhova i nastavljamo postupak, te ako pronađemo dva vrha čijim izbacivanjem ne ostaje komponenta sa sva tri ključa, onda su ti vrhovi odmetnici dokaz da sustav nije 2-siguran. Za provjeru svih parova vrhova treba nam $O(n^2)$ vremena (ima $\binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ parova vrhova), a za svaki uklonjeni par preostale komponente pretražujemo u $O(m)$ vremena (pretražujemo svaku komponentu po bridovima gledajući koji ključevi postoje kod njenih vrhova).*

Napomena 4.35 *Za proizvoljni graf G potrebno je $O(n^4)$ vremena za provjeru sadrži li tri vršno disjunktna trovršja. Algoritam se temelji na provjeri svih 3-podskupova od $V(G)$ i određivanju jesu li ti vrhovi središta nekih vršno*

disjunktnih trovršja. Označimo tri odabrana vrha a a, b, c *i uvedimo oznake:*

s_A - *skup susjeda vrha* a, *bez vrhova* b *i* c

s_B - *skup susjeda vrha* b, *bez vrhova* a *i* c

s_C - *skup susjeda vrha* c, *bez vrhova* a *i* b

s_{AB} - *skup vrhova susjednih s* a *i* b, *bez vrhova* a, b, c

s_{BC} - *skup vrhova susjednih s* b *i* c, *bez vrhova* a, b, c

s_{AC} - *skup vrhova susjednih s* a *i* c, *bez vrhova* a, b, c

s_{ABC} - *skup vrhova susjednih s* a, b *i* c, *bez vrhova* a, b, c.

Također, označimo s n_X *kardinalni broj skupa* s_X, $X = A, B, C, AB, AC, BC, ABC$. *Analiziranjem ovih kardinalnih brojeva možemo odrediti jesu li* a, b *i* c *središta vršno disjunktnih trovršja. Postupak je izložen u sljedećem Teoremu. Provjera svih* 3*-podskupova treba* $O(n^3)$ *vremena, a za računanje jednadžbi iz Teorema 4.36 potrebno je* $O(n)$ *vremena.*

Teorem 4.36 *Neka su* a, b *i* c *proizvoljni različiti vrhovi u grafu* G. *Ti vrhovi su središta vršno disjunktnih trovršja ako i samo ako vrijedi*

$$\begin{aligned} n_A, n_B, n_C &\geq 2 \\ n_A + n_B - n_{AB} &\geq 4 \\ n_A + n_C - n_{AC} &\geq 4 \\ n_B + n_C - n_{BC} &\geq 4 \\ n_A + n_B + n_C - n_{AB} - n_{AC} - n_{BC} + n_{ABC} &\geq 6. \end{aligned}$$

Dokaz. Prvo dokažimo analognu tvrdnju, za dva vrha.

Tvrdnja 1. Vrhovi a i b su središta vršno disjunktnih trovršja ako i samo

ako vrijedi

$$n_A, n_B \geq 2$$
$$n_A + n_B - n_{AB} \geq 4,$$

gdje je n_A broj susjeda vrha a, bez vrha b, n_B je broj susjeda vrha b, bez vrha a, i n_{AB} je broj vrhova susjednih s a i b, bez a i b. Ako su a i b središta vršno disjunktnih trovršja, lako se vidi da vrijede nejednakosti. Dokažimo obrat. Uvedimo oznake

$$s_a = s_A \backslash s_{AB}$$
$$s_b = s_B \backslash s_{AB}$$
$$s_{ab} = s_{AB}.$$

Vrijedi

$$n_a = n_A - n_{AB}$$
$$n_b = n_B - n_{AB}$$
$$n_{ab} = n_{AB},$$

pa su nejednakosti ekvivalentne sa

$$n_a + n_{ab} \geq 2$$
$$n_b + n_{ab} \geq 2$$
$$n_a + n_b + n_{ab} \geq 4.$$

Razlikujemo tri slučaja.

1) Ako je $n_a \geq 2$ onda dva susjeda od a tvore trovršje kojem je a središte, pa iz $n_b + n_{ab} \geq 2$ vidimo da b ima barem dva susjeda koji tvore drugo trovršje.

2) Ako je $n_a = 1$ onda je $n_{ab} \geq 1$, pa iz $n_a + n_b + n_{ab} \geq 4$ zaključujemo da vrijedi jedno od sljedećeg

$$n_b = 0 \text{ i } n_{ab} \geq 3;$$
$$n_b = 1 \text{ i } n_{ab} \geq 2;$$
$$n_b = 2 \text{ i } n_{ab} \geq 1.$$

Lako se vidi da u svim slučajevima postoje tražena trovršja.

3) Ako je $n_a = 0$ onda je $n_{ab} \geq 2$. Analogno kao u 2) vidimo da vrijedi jedno od sljedećeg

$$n_b = 2 \text{ i } n_{ab} \geq 2;$$
$$n_b = 1 \text{ i } n_{ab} \geq 3;$$
$$n_b = 0 \text{ i } n_{ab} \geq 4,$$

i opet zaključujemo da postoje tražena trovršja. Time smo dokazali Tvrdnju 1.

Dokažimo sada početnu tvrdnju, za tri vrha, a, b i c. Ako su a, b i c središta vršno disjunktnih trovršja lako se vidi da vrijede nejednakosti. Dokažimo obrat. Prvo uvedimo oznake

$$s_a = s_A \backslash (s_{AB} \cup s_{AC})$$
$$s_b = s_B \backslash (s_{AB} \cup s_{BC})$$
$$s_c = s_C \backslash (s_{AC} \cup s_{BC})$$
$$s_{ab} = s_{AB} \backslash s_{ABC}$$
$$s_{ac} = s_{AC} \backslash s_{ABC}$$
$$s_{bc} = s_{BC} \backslash s_{ABC}.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} n_a &= n_A - n_{AB} - n_{AC} + n_{ABC} \\ n_b &= n_B - n_{AB} - n_{BC} + n_{ABC} \\ n_c &= n_C - n_{AC} - n_{BC} + n_{ABC} \\ n_{ab} &= n_{AB} - n_{ABC} \\ n_{ac} &= n_{AC} - n_{ABC} \\ n_{bc} &= n_{BC} - n_{ABC} \\ n_{abc} &= n_{ABC}, \end{aligned}$$

pa su nejednakosti ekvivalentne s

$$\begin{aligned} n_a + n_{ac} + n_{ab} + n_{abc} &\geq 2 \\ n_b + n_{bc} + n_{ab} + n_{abc} &\geq 2 \\ n_c + n_{ac} + n_{bc} + n_{abc} &\geq 2 \\ n_a + n_b + n_c + n_{ab} + n_{bc} + n_{abc} &\geq 4 \\ n_a + n_c + n_{ac} + n_{ab} + n_{bc} + n_{abc} &\geq 4 \\ n_b + n_c + n_{ac} + n_{ab} + n_{bc} + n_{abc} &\geq 4 \\ n_a + n_b + n_c + n_{ac} + n_{ab} + n_{bc} + n_{abc} &\geq 6. \end{aligned}$$

Promatramo 3 slučaja, ovisno o vrijednostima n_a, n_b i n_c.

1) Ako je barem jedan od brojeva n_a, n_b, n_c barem 2, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $n_c \geq 2$, onda tvrdnja slijedi iz Tvrdnje 1. Zaista, zbog $n_c \geq 2$, možemo iskoristiti 2 susjeda od c za trovršje kojem je c središte, pa ako označimo

$$\begin{aligned} n_a + n_{ac} &= n'_a \\ n_b + n_{bc} &= n'_b \\ n_{ab} + n_{abc} &= (n_{ab})', \end{aligned}$$

iz nejednakosti slijedi

$$n'_a + n'_b + (n_{ab})' \geq 4$$
$$n'_a + (n_{ab})' \geq 2$$
$$n'_b + (n_{ab})' \geq 2,$$

i možemo direktno primijeniti Tvrdnju 1.

2) Neka je $n_a = n_b = n_c = 0$. Tada je $n_{ac} + n_{ab} + n_{bc} + n_{abc} \geq 6$. Promotrimo nekoliko podslučajeva.

2.1) $n_{abc} \geq 6$. Barem 6 vrhova su susjedi skupu vrhova $\{a, b, c\}$, pa očito možemo iskoristiti po 2 za svako od vršno disjunktnih trovršja sa središtima u a, b, c.

2.2) $n_{abc} = 5$. Sada barem jedan od n_{ac}, n_{ab} i n_{bc} mora iznostiti barem 1. Pretpostavimo $n_{ab} \geq 1$. Tada za trovršje sa središtem u a uzimamo jedan vrh iz s_{ab}, i jedan iz s_{abc}, a za preostala dva trovršja 4 preostala vrha u s_{abc}.

2.3) $n_{abc} = 4$. Sada barem jedan od n_{ab}, n_{bc}, n_{ac} mora iznositi barem 2, ili barem dva od tih brojeva moraju iznositi barem 1. Ako je barem jedan od njih barem 2, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo n_{ab}, onda dva vrha iz s_{ab} formiraju trovršje s centrom u a, a 4 vrha u s_{abc} preostala dva trovršja. A ako su neka dva broja od n_{ab}, n_{ac}, n_{bc} barem 1, pretpostavimo n_{ab}, $n_{ac} \geq 1$, možemo ta dva vrha iskoristiti za isto trovršje, u ovom slučaju onu sa središtem u a, a ostala trovršja formiramo iz s_{abc}.

2.4) $n_{abc} = 3$. Slijedi $n_{ac} + n_{ab} + n_{bc} \geq 3$. Ako je barem jedan od n_{ac}, n_{ab}, n_{bc} barem 2, koristimo ta dva vrha kao i u slučaju 2.3, za jedno trovršje, a 1 preostali vrh koji sigurno postoji u nekom od skupova s_{ab}, s_{ac}, s_{bc} zajedno s 3 vrha koja sigurno postoje u s_{abc} koristimo za preostala dva trovršja. Ako nijedan od brojeva n_{ab}, n_{ac}, n_{bc} nije veći od 1 onda je $n_{ab}, n_{ac}, n_{bc} = 1$ i ta tri vrha koristimo svaki za po jedno trovršje, te trovršja kompletiramo vrhovima

iz s_{abc}.

Za ostale slučajeve razmatranje je vrlo slično slučaju 2.4, pa preskačemo detaljan dokaz.

3) Barem jedan od n_a, n_b, n_c iznosi barem 1, a nijedan nije 2 ili više. Ovaj slučaj uključuje mogućnost da su sva ta tri broja jednaka 1, da su dva jednaka 1 i jedan jednak 0 i da je jedan od njih jednak 1 i dva 0.

3.1) $n_a = n_b = n_c = 1$. Očito svakom od vrhova a, b, c nedostaje po jedan susjed za trovršje. Iz nejednakosti imamo $n_{ac} + n_{ab} + n_{bc} + n_{abc} \geq 3$.

Ako je $n_{abc} \geq 3$ tvrdnja se lako vidi.

Ako je $n_{abc} = 2$ onda je barem jedan od brojeva n_{ab}, n_{ac}, n_{bc} barem 1, pa taj vrh koristimo za kompletiranje jednog trovršja, a dva vrha iz s_{abc} za druga dva trovršja.

Ako je $n_{abc} = 1$ onda je ili jedan od n_{ac}, n_{ab}, n_{bc} barem 1, ili su barem dva od njih barem 1. Pretpostavimo $n_{ab} \geq 2$. Tada ta dva vrha koristimo za trovršja sa središtima u a i b, a vrh iz s_{abc} za trovršje sa središtem u c. A ako su dva od n_{ac}, n_{ab}, n_{bc} barem 1, opet s tim vrhovima kompletiramo različita trovršja, a preostalo trovršje s vrhom iz s_{abc}.

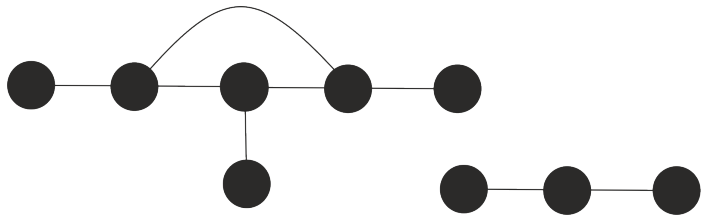
Ako je $n_{abc} = 0$, onda u s_{ab}, s_{ac} i s_{bc} postoje barem 3 vrha i važno je primijetiti da dva od ova tri skupa ne mogu biti prazna istovremeno. Na primjer, ako je $n_{ac} = n_{ab} = 0$ i $n_{bc} \geq 3$, imamo kontradikciju s $n_a + n_{ac} + n_{ab} + n_{abc} \geq 2$, jer je $n_a = 1$. Dakle, barem dva broja od n_{ab}, n_{ac}, n_{bc} su barem 1 i možemo kompletirati trovršja kao i prije.

3.2) Dva broja od n_a, n_b, n_c su jednaka 1, a treći je jednak 0. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $n_a = 0$, $n_b = n_c = 1$. Sada imamo $n_{ac} + n_{bc} + n_{ab} + n_{abc} \geq 4$. Nastavljamo razmatranjem opcija za $n_{abc} \geq 4$, i $n_{abc} \in \{0, 1, 2, 3\}$, a zaključivanje je analogno kao i u 3.1.

3.3) Dva broja od n_a, n_b, n_c su jednaka 0, a treći je jednak 1. Bez sman-

jenja općenitosti pretpostavimo $n_a = n_b = 0$, $n_c = 1$. Sada iz nejednakosti imamo $n_{ac} + n_{bc} + n_{ab} + n_{abc} \geq 5$, i ostatak dokaza je ponovno analogan. ■

Napomena 4.37 *U Propoziciji 4.29 smo dokazali da je graf s danim uvjetima* 2*-siguran ako sadrži* 3 *vršno disjunktna trovršja. Međutim, obrat ne vrijedi. Postoji graf koji je* 2*-siguran, a ne sadrži* 3 *vršno disjunktna trovršja, kao što se vidi na Slici.4.20.*



Slika 4.20: 2-siguran graf koji ne sadrži 3 vršno disjunktna trovršja

Bibliografija

[1] R. Albert, Scale-free networks in cell biology, *J. Cell Sci.* 118 (2005) 4947–4957.

[2] L.A.N. Amaral, A. Scala, M. Barthelemy, H.E. Stanley, Classes of small-world networks, *P. Natl. Acad. Sci. USA 97* 21 (2000) 11149–11152.

[3] J.M. Anthonisse, *The Rush in a Graph*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1971.

[4] S. Antunović, T. Kokan, T. Vojković, D. Vukičević, Generalized network descriptors, *Glas. Mat.* 48 (2013) 211–230.

[5] S. Antunović, T. Kokan, T. Vojković, D. Vukičević, Exponential Generalized Network Descriptors, u pripremi.

[6] A.L. Barabási, *Linked: How Everything is Connected to Everything Else and What It Means*, Persus Publishing, Cambridge, 2002.

[7] M. Barthelemy, A. Barrat, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, Velocity and hierarchical spread of epidemic outbreaks in scale-free networks, *Phys. Rev. Lett.* (2004) 178701.

[8] M. Barthelemy, A. Barrat, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, Dynamical patterns of epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks, *J. Theor. Biol.* 235 (2005) 275–288.

[9] H.R.. Bernard, E.C. Johnsen, P.D. Killworth, S. Robinson, Estimating the size of an average personal network and of an event subpopulation: Some empirical results, *Soc. Sci. Res.* 20 (1991) 109–121.

[10] V.D. Blondel, J.-L. Guillaume, R. Lambiotte, E. Lefebvre, Fast unfolding of communities in large networks, *J. Stat. Mech-Theory E.* 10 (2008) P10008.

[11] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*, Springer, New York, 1998.

[12] S.P. Borgati, M.G. Everett, A graph-theoretic framework for classifying centrality measures, *Soc. Networks* 28 (2006) 464–484.

[13] S.A. Camtepe, Y. Bülent, Combinatorial design of key distribution mechanisms for wireless sensor networks, *Lect. Notes Comput. Sc.* (2004) 293–308.

[14] G. Caporossi, M. Paiva, D. Vukičević, M. Segatto, Centrality and Betweenness: Vertex and Edge decomposition of the Wiener Index, *MATCH Commun. Math. Co.* 68 (2012) 293–302.

[15] D. Chen, Y. Fu, M. Shang, A fast and efficient heuristic algorithm for detecting community structures in complex networks, *Physica A* 388 (2009) 2741–2749.

[16] B. Cheswick, H. Burch, S. Branigan, Mapping and Visualizing the Internet, *In Proc USENIX Annual Technical Conference* (2000) 1–12.

[17] A. Clauset, M.E.J. Newman, C. Moore, Finding community structure in very large networks, *Phys. Rev. E* 70 (2004) 1–6.

[18] J.E. Cohen, F. Briand, C.M. Newman, *Community Food Webs: Data and Theory*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1990.

[19] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, MIT Press and McGraw-Hill, Cambridge, 2001.

[20] A. Davis, B.B. Gardner, M.R. Gardner, *Deep South*, University of Chicago Press, 1969.

[21] Lj. Despalatović, T. Vojković, D. Vukičević, Community structure in networks: Girvan-Newman algorithm improvement, *Proc. MIPRO 2014* (2014) 997–1002.

[22] Z. Dezso, A.L. Barabasi, Halting viruses in scale-free networks, *Phys. Rev. E* 65 (2001) 1–4.

[23] E.W. Dijkstra, A note on two problems in connexion with graphs, *Numer. Math.* 1 (1959) 269–271.

[24] I. Dobson, B.A. Carreras, V.E. Lynch, D.E. Newman, Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization, *J. Nonlinear Sci.* 17 (2007) 026103.

[25] P.S. Dodds, D.H. Rothman, Geometry of river networks, *Phys. Rev. E* 63 (2001) 016115, 016116 & 016117.

[26] W. Du, J. Deng, Y.S. Han, S. Chen, P.K. Varshney, A key management scheme for wireless sensor networks using deployment knowledge, *INFOCOM 2004. Twenty-third Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies* (2004).

[27] T.J. Farara, M. Sunshine, *A Study of a Biased Friendship Network*, Syracuse University Press, Syracuse, 1964.

[28] D.A. Fell, A. Wagner, The small world of metabolism, *Nat. Biotechnol.* 18 (2000) 1121–1122.

[29] S. Fortunato, Community detection in graphs, *Phys. Rep.* 486 (2010) 75–174.

[30] L. Freeman, A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness, *Sociometry* 40 (1977) 35–41.

[31] L. Freeman, Centrality in social networks: Conceptual clarification, *Soc. Networks* 1 (1978) 215–239.

[32] J. Galaskiewicz, *Social Organization of an Urban Grants Economy*, Academic Press, New York, 1985.

[33] M.T. Gastner, M.E.J. Newman, Optimal design of spatial distribution networks, *Phys. Rev. E* 74 (2006) 016117.

[34] M. Girvan, M.E.J. Newman, Community structure in social and biological networks, *P. Natl. Acad. Sci. USA* 99 (2002) 7821–7826.

[35] P.M. Gleiser, L. Danon, Community structure in jazz, *Adv. Complex Sys.* 6 (2003) 565–573.

[36] J.W. Grossman, The evolution of the mathematical research collaboration graph, *Congressus Numerantium* (2002) 201–212.

[37] J.W. Grossman, P.D.F. Ion, On a portion of the well-known collaboration graph, *Congressus Numerantium 108* (1995) 129–131.

[38] L.H. Hartwell, J.J. Hopfield, S. Leibler, A.W. Murray, From molecular to modular cell biology, *Nature* 402 (1999) C47–C52.

[39] H.W. Hethcote, The mathematics of infectious diseases, *SIAM Rev.* 42 (2000) 599–653.

[40] B.A. Huberman, *The laws of the Web: Patterns in the ecology of information*, MIT Press, 2003.

[41] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z.N. Oltvai, A.L. Barabasi, The large-scale organization of metabolic networks, *Nature* 407 (2000) 651–654.

[42] K.J. Kansky, *Structure of Transportation Networks: Relationships Between Network Geometry and Regional Characteristics*, University of Chicago, Chicago, 1963.

[43] B.W. Kernighan, S. Lin, An efficient heuristic procedure for partitioning graphs, *Bell Syst. Tech. J.* 49 (1970) 291–307.

[44] P.D. Killworth, E.C. Johnsen,.H.R. Bernard, G.A. Shelley, C. McCarty, Estimating the size of personal networks, *Soc. Networks* 12 (1990) 289–312.

[45] V.E. Krebs, Mapping networks of terrorist cells, *Connections* 24 (2002) 43–52.

[46] A. Lakhina, J.W. Byers, M. Crovella, P. Xie, Sampling biases in IP topology measurements, *INFOCOM 2003, Twenty-Second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications. IEEE Societies* (2003) 332–341.

[47] P. De Leenheer, D. Angeli, E. D. Sontag, Monotone chemical reaction networks, *J. Math. Chem.* 41 (2007) 295–314

[48] D. Liu, P. Ning, R. Li, Establishing pairwise keys in distributed sensor networks, *ACM Transactions on Information and System Security (TISSEC)* 8 (2005) 41–77.

[49] A. Maritan, A. Rinaldo, R. Rigon, A. Giacometti, I. Rodriguez-Iturbe, Scaling laws for river networks, *Phys. Rev. E* 53 (1996) 1510–1515.

[50] N.D. Martinez, Constant connectance in community food webs, *Am. Nat.* 139 (1992) 1208–1218.

[51] S. Milgram, The small world problem, *Psychol. today* 2 (1967) 60–67.

[52] D. Mollison, Spatial contact models for ecological and epidemic spread, *J. R. Stat. Soc. B* 39 (1977) 283–326.

[53] P.R. Monge, N. Contractor, *Theories of Communication Networks*, Oxford University Press, Oxford, 2003.

[54] J. Moody, Race, School Integration and Friendship Segregation in America, *Am. J. Soc.* 107 (2001) 679–716.

[55] J.L. Moreno, *Who shall survive?: A new approach to the problem of human interrelations*, Washington DC, US, Nervous and Mental Disease Publishing Co, 1934.

[56] Y. Moreno, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, Epidemic outbreaks in complex heterogenous networks, *Eur. Phys. J. B 26* (2002) 521–529.

[57] M.E.J. Newman, *Networks: An Introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2010.

[58] M.E.J. Newman, The structure of scientific collaboration networks, *P. Natl. Acad. Sci. USA* 98 (2001) 404–409.

[59] M.E.J. Newman, Fast algorithm for detecting community structure in networks, *Phys. Rev. E* 69 (2004) 1–5.

[60] M.E.J. Newman, Finding community structure in networks using the eigenvectors of matrices, *Phys. Rev. E* 74 (2006) 036.

[61] M.E.J. Newman, M. Girvan, Finding and evaluating community structure in networks, *Phys. Rev. E* 69 (2004) 026113.

[62] R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, Immunization of complex networks, *Phys. Rev. E* 65 (2001) 1–8.

[63] H. Peng, S. Lu, D. Zhao, A. Zhang, J. Li, An anti-attack model based on complex network theory in P2P networks, *Physica A* 391 (2012) 2788–2793.

[64] F.R. Pitts, A graph theoretic approach to historical geography, *Prof. Geogr.* 17 (1965) 15–20.

[65] M.A. Porter, J.P. Onnela, P.J. Mucha, Communities in Networks, *Not. Am. Math. Soc.* 56 (2009) 1082–1097.

[66] N.D. Price, J.L. Reed, J.A. Papin, S.J. Wiback, B.O. Palsson, Network-based analysis of metabolic regulation in the human red blood cell, *J. Theor. Biol.* 225, (2003) 185–94.

[67] I. Rodríguez-Iturbe, A. Rinaldo, *Fractal river basins: chance and self-organization*, Cambridge University Press, 2001.

[68] M.J. Salganik, D.D. Heckathorn, Sampling and estimation in hidden populations using respondent-driven sampling, *Sociol. Methodol.* 34 (2004) 193–240.

[69] L. Shudong, L. Lixiang, J. Yan, L. Xinran, Y. Yixian, Identifying Vulnerable Nodes of Complex Networks in Cascading Failures Induced by Node-Based Attacks, *Math. Probl. Eng.* (2013) 10 pages.

[70] P.B. Slater, Established Clustering Procedures for Network Analysis, arXiv preprint arXiv:0806.4168, 2008.

[71] J. Šiagiova, J. Širan, Approaching the Moore bound for diameter two by Cayley graphs, *J. Comb. Theory B* 102 (2012) 470–473.

[72] J. Travers, S. Milgram, An experimental study of the small world problem, *Sociometry* (1969) 425–443.

[73] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[74] T. Vojković, D. Vukičević, One-Alpha Weighted Generalized Network Descriptors, u pripremi.

[75] D. Vukičević, G. Caporossi, Network descriptors based on betweenness centrality and transmission and their extremal values, *Discrete Appl. Math.* 161 (2013) 2678–2686.

[76] D. Vukičević, V. Zlatić, Security of networks with distributed keys, u pripremi.

[77] A. Wagner, D.A. Fell, The small world inside large metabolic networks, *P. Roy. Soc. B-Biol. Sci.* 268 (2001) 1803–1810.

[78] J.W. Wang, L.L. Rong, Cascade-based attack vulnerability on the US power grid, *Safety Sci.* 47 (2009) 1332–1336.

[79] D.J. Watts, S.H. Strogatz, Collective dynamics of 'small-world' networks, *Nature* 393 (1998) 440–442.

[80] G.B. West, J.H. Brown, B.J. Enquist, A general model for the origin of allometric scaling laws in biology, *Science* 276 (1997) 122–126.

[81] G.B. West, J.H. Brown, B.J. Enquist, A general model for the structure and allometry of plant vascular systems, *Nature* 400 (1999) 664–667.

[82] J.G. White, E. Southgate, J.N. Thompson, S. Brenner, The structure of the nervous system of the nematode, Caenorhabditis Elegans, *Philos. T. R. Soc. Lond.* 314 (1986) 1–340.

[83] H. Wiener, Structural Determination of Paraffin Boiling Points, *J. Am. Chem. Soc.* 69 (1947) 17–20.

[84] P. Yu, H. Van de Sompel, Networks of scientific papers, *Science* 169 (1965) 510–515.

[85] W. Zachary, An information flow model for conflict and fission in small groups, *J. Anthropol. Res.* 33 (1977) 452–473.

Životopis

Tanja Vojković rođena je 24.09.1983. u Splitu gdje je 2002. godine završila Prirodoslovno-matematičku gimnaziju. Godine 2008. diplomirala je na Fakultetu Prirodoslovno-matematičkih znanosti i kineziologije Sveučilišta u Splitu i stekla zvanje profesor matematike i informatike.

Od 2008./09. je doktorski student Sveučilišnog poslijediplomskog studija matematike Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku, Sveučilišta u Rijeci, Sveučilišta u Splitu i Sveučilišta u Zagrebu. Aktivna je članica Seminara za kombinatornu i diskretnu matematiku u Zagrebu i Seminara za diskretnu matematiku u Splitu. Od veljače 2009. zaposlena je kao znanstveni novak - asistent na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Splitu i projektu "Diskretni matematički modeli u kemiji".

Projekti:

Diskretni matematički modeli u kemiji (177-0000000-0884)

EuroGIGA: Graphs in Geometry and Alghoritms, 2011.-2014. (GReGAS)

Publikacije:

1. D. Vukičević, T. Vojković, On the Degeneracy of Molecular Identification Number MID06, *Internet Electronic Journal of Molecular Design* 7 (2008) 216–224.

2. V. Bosančić, A. Golemac, T. Vojković, Kako pomoći trgovačkom put-

niku, *Osječki Matematički List* 12 (2013) 139–149.

3. S. Antunović, T. Kokan, T. Vojković and D. Vukičević, Generalized network descriptors, *Glasnik Matematički* 48 (2013) 211–230.

4. Lj. Despalatović, T. Vojković, D. Vukičević, Community structure in networks: Girvan-Newman algorithm improvement, *Proc. MIPRO 2014* (2014) 997–1002.

Sudjelovanja i izlaganja na konferencijama:

MATH/CHEM/COMP 2008 (MCC 2008), Dubrovnik, lipanj 16-21, 2008 – sudjelovanje

MATH/CHEM/COMP 2009 (MCC 2009), Dubrovnik, lipanj 08-13, 2009 – sudjelovanje

MATH/CHEM/COMP 2010 (MCC 2010), Dubrovnik, lipanj 07-12, 2010 – sudjelovanje

Visualization and Modeling in Chemistry, Split, listopad 29-31, 2010 - sudjelovanje

EuroGIGA Midterm Conference, Prag, srpanj 9-13, 2012 – sudjelovanje

EuroGIGA Final Conference, Berlin, veljača 17-21, 2014 – izlaganje "Agents and distributed keys"

CompleNet, Bolonja, ožujak 12-14, 2014 – poster "Agents and key distribution"

Adriatic Conference on Graph Theory and Complexity, Split, travanj 25-27 2014. – izlaganje "Agents and Missing Persons in Networks with Distributed Keys"

Ostale aktivnosti:

Suorganizator konferencije: Visualization and Modeling in Chemistry, Split, listopad 29.-31. 2010.

Suorganizator konferencije: Adriatic Conference on Graph Theory and Complexity, Split, travanj 25.-27. 2014.

Predstavnik asistenata u Vijeću Prirodoslovno matematičkog Fakulteta u Splitu, od 2013.

Tajnik Seminara za diskretnu matematiku u Splitu; od 2013.

Tajnik i član Upravnog odbora Udruge bivših studenata i prijatelja PMF-a u Splitu; od 2013.

Računovođa i član Upravnog odbora Splitskog matematičkog družtva; od 2014.

Kontakt

Tanja Vojković
Doverska 32, 21000 Split
mobitel: 091/44-62-360
mail: tanja@pmfst.hr