



## Open Archive Toulouse Archive Ouverte

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible

This is an author's version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/21969>

**To cite this version:**

Oubaid, Rania and Lefèvre, Yvan and Poirier, Jean-René  
Prise en compte des symétries dans la méthode des  
moments magnétostatiques. (2015) In: Numélec 2015  
(Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en  
Electromagnétisme), 3 June 2015 - 5 June 2015 (Saint-  
Nazaire, France). (Unpublished)

Any correspondence concerning this service should be sent  
to the repository administrator: [tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)

# Prise en compte des symétries dans la méthode des moments magnétostatiques

R. Oubaid, Y. Lefevre and J-R. Poirier

Université de Toulouse, INPT,LAPLACE, ENSEEIHT, Toulouse, France  
roubaid@laplace.univ-tlse.fr

**Résumé**— Dans ce travail, nous présentons une stratégie pour prendre en compte les symétries dans la méthode des moments magnétostatique (MoM). Ceci permet de réduire les dimensions de la matrice d'interaction, difficulté principale de la méthode.

## I. INTRODUCTION

La méthode des moments magnétiques (MoM) est intéressante pour modéliser les dispositifs électromagnétiques basses fréquences [1]. Dans cette méthode, seuls les milieux ferromagnétiques sont divisés en éléments. Chaque élément interagit avec tous les autres éléments y compris avec lui-même. Ces interactions propres et mutuelles sont décrites par la matrice d'interaction. Comme toutes les interactions sont prises en compte, cette matrice est pleine. Ainsi le principal inconvénient de la MoM est qu'elle nécessite de résoudre un système linéaire plein. Pour certains dispositifs nécessitant beaucoup d'éléments, l'utilisation de la méthode peut poser certaines difficultés puisque la taille mémoire nécessaire pour la résolution du système linéaire est importante. Cependant pour les structures présentant certaines symétries, on peut réduire considérablement la taille du système à résoudre.

Dans la plupart des travaux sur la MoM, la prise en compte des symétries est traitée au cas par cas. Dans [1] une méthode systématique est proposée, pour la première fois, pour traiter des symétries simples permettant de réduire de moitié le domaine d'étude initial. Dans ce travail, nous présentons une méthodologie qui permet de prendre en compte la composition de rotations et de symétries par rapport à un plan pour réduire de plus de la moitié le domaine d'étude initial.

Dans la section suivante, nous rappelons les principes de la MoM. Ensuite, la méthode de prise en compte des symétries connues est proposée. La vérification de la méthode est présentée dans une quatrième section.

## II. LA METHODE DES MOMENTS

Le dispositif étudié est caractérisé par des bobines alimentées par des courants constants et un matériau ferromagnétique de loi de comportement :

$$\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} \quad (1)$$

où  $\vec{M}$  et  $\mu_r$  sont respectivement la magnétisation et la perméabilité. Le champ magnétique  $\vec{H}$  est décomposé en deux champs, le champ magnétique dû aux courants seuls  $\vec{H}_S$  et le champ magnétique induit  $\vec{H}_m$ :

$$\vec{H}(P) = \vec{H}_S(P) + \vec{H}_m(P) \quad (2)$$

La construction de la matrice MoM consiste à discrétiser le milieu magnétique en  $N_e$  éléments. A l'intérieur d'un élément  $J$  l'aimantation  $\vec{M}^J$  est uniforme. La composante  $k$  du champ magnétique induit  $\vec{H}_m^I$  au centre d'un élément  $I$  est égale à [2] :

$$H_{mk}^I = \sum_{j=1}^{N_e} (\sum_{l=1}^3 F_{kl}^{Ij} \cdot M_l^j) \quad (3)$$

où les  $F_{kl}^{Ij}$  sont des coefficients de la matrice d'interaction élémentaire  $[F]^I$ . Pour un maillage avec  $N_e$  éléments, la relation (3) peut être mise sous forme matricielle :

$$\{H_m\} = [F]\{M\} \quad (4)$$

où  $\{H_m\}$  et  $\{M\}$  sont deux vecteurs de dimension  $3N_e$  contenant respectivement les composantes du champ d'excitation magnétique induit et les composantes du vecteur aimantation.  $[F]$  est la matrice d'interaction globale de dimensions :  $3N_e \times 3N_e$ . A partir de (1), (2) et (4), on obtient le système linéaire :

$$([I] - (\mu_r - 1)[F])\{M\} = (\mu_r - 1)\{H^S\} \quad (5)$$

La résolution du problème (5) donne les composantes de l'aimantation dans chaque élément qui permet de calculer le champ magnétique total en tout point.

## III. ROTATION ET SYMETRIE

Le but consiste essentiellement à réduire les dimensions de la matrice d'interaction  $[F]$  (4). Cela n'est possible que si la géométrie et les sources présentent des propriétés d'invariance suivant certaines transformations géométriques comme les rotations ou symétries.

Les rotations les plus courantes, dans les problèmes 3D, sont les rotations autour d'un axe que nous allons prendre pour l'axe Oz. Ce type de rotation est défini par un angle de rotation :

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} \quad (6)$$

où  $n$  est un entier naturel. Si les sources et les propriétés physiques des matériaux sont aussi invariantes par une telle rotation alors le domaine d'étude peut-être divisé par  $n$ . Sur la figure 1 par exemple,  $n$  est égal à 4. Le domaine réduit correspond donc au quart du domaine. Soit  $N_e$  le nombre d'éléments sur le domaine initial et  $N_r$  le nombre d'éléments sur le domaine réduit. On a :

$$N_r = \frac{N_e}{n} \quad (7)$$

Dans le domaine initial, on compte les éléments en commençant par le domaine réduit puis la première copie de celle-ci par rotation et ainsi de suite jusqu'à la dernière. A partir de (3), on obtient ainsi la relation matricielle élémentaire qui relie,  $\{M\}^J$ , la matrice colonne représentant le vecteur aimantation de l'élément J, et  $\{H\}_m^I$ , celle qui représente le champ d'excitation induit dans l'élément I du domaine réduit :

$$\{H_m\}^I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=(i-1)N_r+1}^{N_r} [F]^{IJ} \{M\}^J \quad (8)$$

La rotation est représentée par la matrice de rotation :

$$[R(\alpha)] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Compte tenu des propriétés des matrices de rotation et de l'associativité de la sommation, de (4) on a :

$$\{H_m\}^I = \sum_{j=1}^{N_r} \sum_{i=1}^n [F]^{I,((i-1)N_r+j)} [R((i-1)\alpha)] \{M\}^J \quad (10)$$

On peut condenser la relation (10) sous la forme:

$$\{H_m\}_\alpha^I = \sum_{j=1}^{N_r} [F]_\alpha^{IJ} \{M\}_\alpha^J \quad (11)$$

L'indice  $\alpha$  est mis pour rappeler la réduction par la rotation. On voit ainsi apparaître la matrice réduite élémentaire déduite des matrices élémentaires initiales par la relation :

$$[F]_\alpha^{IJ} = \sum_{i=1}^n [F]^{I,((i-1)N_r+j)} [R((i-1)\alpha)] \quad (12)$$

En assemblant les relations (11), reliant deux par deux tous les éléments du domaine réduit, on a :

$$\{H_m\}_\alpha = [F]_\alpha \{M\}_\alpha \quad (13)$$

La matrice réduite d'interaction est donc une matrice carrée de taille divisée  $n^2$  par rapport à la matrice initiale [F].

Une fois le domaine initial réduit par rotation, on peut chercher sur le domaine réduit les symétries par rapport à un plan. On ne considérant que les symétries par rapport à un plan qui contient Oz et une de droite qui fait un angle  $\beta$  avec l'axe Ox, il y a deux types de symétrie : celles qui conservent la composante normale de l'aimantation, qui est un vecteur axial, et celles qui conservent sa composante tangentielle. Dans le deuxième cas, par exemple, la matrice de transformation du vecteur aimantation est de la forme :

$$[S_\perp(\beta)] = \begin{bmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) & 0 \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Pour le dispositif de la figure 1, présenté dans [3], sur le quart du domaine, il y a une symétrie par rapport à la première bissectrice ( $\beta = 45^\circ$ ). Comme c'est la composante tangentielle de l'aimantation qui est conservée on utilise (14). Cette symétrie permet de réduire la taille de la matrice d'interaction par  $4n^2$ .

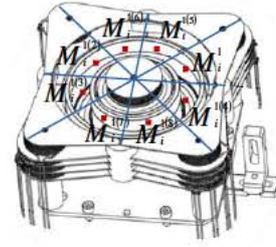


Fig. 1 : Structure invariant par rotation (n=4) [3]

#### IV. DISPOSITIF ETUDIE

La figure 1 montre le dispositif étudié [3]. Pour vérifier la méthode employée, nous avons remplacé le circuit magnétique par un cylindre (Fig. 2), en gardant les vingt bobines alimentées par des courants continus.

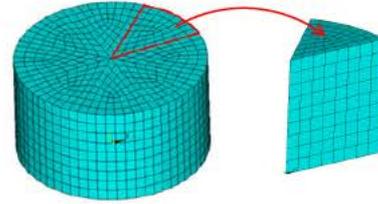


Fig. 2. Cylindre avec son maillage et le domaine réduit.

Le domaine initial possède 480 éléments. Le domaine réduit possède 60 éléments. Le champ magnétique a été calculé en prenant en compte le domaine initial (S1 à S8) et ensuite en ne prenant en compte que le domaine réduit (S1). Les résultats numériques (Tableau I) entre les deux calculs sont en très bon accord et conforme aux transformations par rotation et symétries.

TABLEAU I : CHAMP MAGNETIQUE EN UN POINT DU DOMAINE REDUIT (S1) ET A SES IMAGES DANS LE DOMAINE INITIAL (S1 A S8)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
$B_1$ (mT)	0.6	0.4	-0.4	-0.6	-0.6	-0.4	0.4	0.6
$B_2$ (mT)	0.4	0.6	0.6	0.4	-0.4	-0.6	-0.6	-0.4
$B_3$ (mT)	-0.4	-0.4	-0.4	0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4

#### CONCLUSION

Nous avons présenté une méthodologie permettant d'exploiter les propriétés de symétries dans la méthode des moments magnétostatique. La méthode a été vérifiée sur un dispositif simplifié. Elle sera appliquée au dispositif réel plus complexe dans l'article final.

#### REFERENCES.

- [1] O. Chadebec, J.L. Coulomb, and F. Janet, "A review of magnetostatic moment method," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42, no. 4, April, 2006 pp. 515-520.
- [2] R. Oubaid, Y. Lefevre and J-R. Poirier, "Efficient computation of the magnetic field of low-frequency antenna", *Advanced Electromagnetics Symposium, AES 2012*, 16-19 April 2012, Paris-France.
- [3] C. Henaux, R. Vilamot, L. Garrigues, and D. Harribey, "A flexible magnetic circuit dedicated to Hall Effect Thruster experiment," *XX<sup>th</sup> International Conference on Electrical Machines, ICEM'2012*, 2-5 Sept. 2012, Marseille, France.