ОБЕСПЕЧЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛЮСОВ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

А.В. Цавнин
Научный руководитель: С.В. Замятин
Томский политехнический университет
avc14@tpu.ru

Введение

С точки зрения решения практических производственных задач, системы управления технологическими процессами должны обеспечивать необходимое качество регулирования. В частности, в ряде технологических процессов, как, например, в химической, металлургической и иных отраслях недопустимо перерегулирование, т.е. управляемая величина не должна превышать заданное значение.

Переходные характеристики являются популярным объектом исследования в области управления среди которых можно выделить работы [1–3] В частности, интерес представляет работа [4], где автором было сформулировано и доказаны следующие правила, обеспечивающие монотонный переходный процесс:

1. каждому вещественному нулю z_i требуется вещественный полюс λ_i, такой что $\lambda_i > z_i$;
2. каждой паре комплексно-сопряженных нулей $-\delta \pm j\beta$, располагающихся в отрицательной комплексной полуплоскости, требуется три отрицательных вещественных полюса λ_1, λ_2 и λ_3, удовлетворяющих условиям $-\delta - |\beta| < \lambda_2 < -\delta + |\beta|$, $\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_2 - \lambda_3$, или два отрицательных вещественных полюса λ_1 и λ_2, удовлетворяющих условию $\lambda_1 + \lambda_2 > 2\delta$;
3. оставшиеся полюса принимаются отрицательными и вещественными и располагаются произвольно в отрицательной комплексной полуплоскости.

В силу того, что нули замкнутой системы управления определяются настройками регулятора, то на основе представленного правила можно сформулировать методику настройки ПИД-регулятора, т.е. располагать нули регулятора таким образом, чтобы получившиеся полюса замкнутой системы удовлетворяли правилу 1 и/или 2. Т.к. правила описаны для нулей, располагающихся в отрицательной комплексной полуплоскости. то будем принимать настроечные параметры регулятора положительными.

Условно, данную задачу можно разделить на 2 части:

1) Определить какие настройки регулятора обеспечивают вещественные полюса замкнутой системы.

2) Внутри полученной области выделить диапазон настроечных параметров, который бы обеспечивал монотонный неубывающий переходный процесс, согласно правила.

Основная часть

Первым этапом работы является определение диапазонов настроек регулятора, которые бы обеспечивали вещественные полюса замкнутой системы. Для исследования зададимся произвольным колебательным объектом управления второго порядка

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \omega^2}$$

с комплексно-сопряженными полюсами $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$.

Замкнув контур управления с классическим ПИД-регулятором с передаточной функцией

$$W_{PID}(s) = \frac{Ds^2 + Ks + I}{s},$$

где D, K и I – дифференциальная, пропорциональная и интегральная составляющие соответственно. Тогда, передаточная функция замкнутой системы примет вид:

$$W_{CL}(s) = \frac{Ds^2 + Ks + I}{s^3 + (2\alpha + D)s^2 + (\alpha^2 + \omega^2 + K)s + I}. \tag{1}$$

Чтобы характеристическое уравнение передаточной функции (1) имело исключительно вещественные корни, необходимо, чтобы его дискриминант был больше нуля.

Подставив коэффициенты характеристического уравнения в выражение для дискриминанта кубического уравнения получим функцию вида

$$f(\alpha,\omega,K,I,D) = (2\alpha + D)^2\left(\omega^2 + \alpha^2 + K\right)^2 - 27I^2 -$$
$$-4I(2\alpha + D)^3 - 4\left(\omega^2 + \alpha^2 + K\right)^3 +$$
$$+I(36\alpha + 18D)\left(\omega^2 + \alpha^2 + K\right).$$

Необходимо определить, при каких значениях аргумента данной функции она принимает положительные значения. Приравняем выражение (1) к нулю и выразим из него одну из составляющих, в данном случае – интегральную. В итоге, получим решение в общем виде, как 2 функции 4 переменных вида

$$I(\alpha,\omega,K,D)=\begin{cases}\dfrac{18\alpha K+9DK}{27}+\\ +\dfrac{2\sqrt{\left(\alpha^2-3\omega^2+4\alpha D+D^2-3K\right)^3}}{27}+\\ +\dfrac{18\omega^2\alpha+9\omega^2 D-12\alpha D^2}{27}-\\ -\dfrac{15\alpha^2 D+2\alpha^3-2D}{27};\\ \dfrac{18\alpha K+9DK}{27}-\\ -\dfrac{2\sqrt{\left(\alpha^2-3\omega^2+4\alpha D+D^2-3K\right)^3}}{27}+\\ +\dfrac{18\omega^2\alpha+9\omega^2 D-12\alpha D^2}{27}-\\ -\dfrac{15\alpha^2 D+2\alpha^3-2D}{27}.\end{cases}$$

Выбрав некоторое значение K, область параметров будет иметь вид, представленный на рисунке 1.

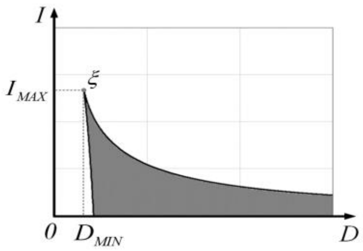

Рис. 1. Обобщенная форма кривых, ограничивающих допустимые настройки регулятора

Можно заметить, что область имеет конечное значение ξ. Смысл данного значения ξ состоит в том, что для того, параметр I не должен превышать значения $I_{\max}$, а параметр D должен быть больше значения $D_{\min}$.

Определим координаты точки ξ:

$$D_\xi(\alpha,\omega,K)=-2\alpha+\sqrt{\alpha^2+\omega^2+K};$$

$$I_\xi(\alpha,\omega,K)=\frac{\sqrt{3\left(\alpha^2+\omega^2+K\right)^3}}{9}.$$

Можно заметить, что каждому значению I соответствует множество значений D в некотором диапазоне, границы которого можно определяются подстановкой значения I в функцию обратную $I(\alpha,\omega,K,D)$.

Таким образом, на основании полученных соотношений и ограничений сформулируем метод синтеза регулятора:

1) для известного объекта управления выбрать значение пропорциональной составляющей;
2) исходя из значения I_ξ выбрать значение коэффициента интегрирования;
3) на основании полученного значения параметра I, выбрать значение D, лежащее в допустимых пределах.

Пример

Проверим выполнение полученных закономерностей. Пусть имеется объект управления с передаточной функцией вида

$$W(s)=\frac{1}{s^2+1,2s+1}$$

Примем значение пропорциональной составляющей $K=1$, тогда, исходя из того, что значение $I_\xi=0,544$, примем $I=0,3$. Подставляя это значение в $I^{-1}(\alpha,\omega,K,D)$ получим диапазон $D\in(1,458;2,441)$. Примем $D=2$. Тогда ПФ замкнутой системы примет вид

$$W(s)=\frac{2s^2+s+0,3}{s^3+3,2s^2+2s+0,3},$$

а ее полюса примут значения $s_{1,2,3}=-0,23;-0,55;-2,43$. Переходная характеристика системы приведена на рисунке 2

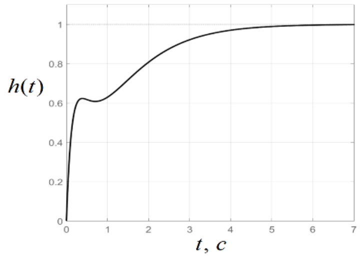

Рис. 2. Переходная характеристика замкнутой системы

Заключение

В результате работы были получены аналитические соотношения, которые ограничивают множество допустимых настроечных параметров регулятора, обеспечивающие исключительно вещественные решения характеристического уравнения замкнутой системы для объекта второго порядка.

Список использованных источников

1. Zemanian H. The properties of pole and zero locations for nondecreasing step responses // Trans. Amer. Inst. Elec. Eng. Part I: Communication and Electronics. – 1960. - Vol. 79, P. 421–426.
2. Hang C. C. The choice of controller zeros. // IEEE Confr. Syst. Mug. – 1989. – Vol. 9, No. 1. – P. 72-75.
3. Ефимов С.В., Замятин С.В, Гайворонский С.А. Синтез ПИД-регулятора с учетом расположения нулей и полюсов системы автоматического регулирования // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317.– № 5. – С. 102-107.
4. Kobayashi H. Output overshoot and pole-zero configuration // Proc.12th IFAC World Congr. Automat. Contr. – 1993. – Vol. 2. – P. 529–532.