

# Uso de la franja de probabilidad en la formación de profesores de primaria

## Use of the probability strip in the training of primary teachers

Pamela Reyes-Santander

Universität Bielefeld, Alemania

### Resumen

*Este trabajo muestra el uso de la franja de probabilidad por parte de estudiantes alemanes para la enseñanza de la probabilidad. Es un estudio descriptivo de análisis cualitativo con una muestra deliberada, y los posibles usos son extraídos de 27 posters presentados por los estudiantes en un seminario relativo a datos, frecuencias y probabilidad, dictado para estudiantes en formación inicial docente de primaria. Los resultados muestran diferentes usos intuitivos y semiformales de la franja de probabilidad, como también usos inadecuados a los cuales se les debería prestar atención en futuros estudios.*

**Palabras clave:** probabilidad, probabilidad intuitiva, franja de probabilidad, formación de profesores, educación primaria.

### Abstract

This study shows the use of the probability strip given by German students for the teaching of probability. It is a descriptive study with qualitative analysis in a deliberate sample, where the possible uses are extracted from 27 posters presented by the students in a seminar related to data, frequencies and probability. This seminar was dictated for students in initial elementary teacher training. The results show different intuitive and semiformal uses of the probability strip, as well as inappropriate uses to which attention should be paid in future studies.

**Keywords:** probability, intuitive probability, probability strip, teacher training, primary school.

## 1. Introducción

El mundo está caracterizado por el azar (Batanero, 2016) y este es el motivo principal para promover la enseñanza de las probabilidades. Debemos preparar a los futuros ciudadanos para comprender las situaciones aleatorias y a la toma de decisiones con una base adecuada del conocimiento probabilístico (Gal, 2005). Esto significa, promover la alfabetización probabilística, en diferentes niveles de la educación, priorizando en la formación de profesores de primaria (Batanero, Contreras y Arteaga, 2011).

Según Batanero, Godino y Cañizares (2005), el estudio formal de las probabilidades se ve facilitado si los estudiantes en formación inicial docente (FID) han construido previamente intuiciones de probabilidad correctas. Para lograr esto, los programas de FID deben considerar temas de la probabilidad que promuevan la intuición y su enlace con el conocimiento formal.

La falta de intuiciones y de conocimiento formal incide en las dificultades de los profesores de primaria para diseñar clases con conceptos nuevos sobre la probabilidad (López, 2006). Lo anterior, impulsa a realizar investigaciones en FID de primaria que contemplen el trabajo con representaciones y nociones básicas de la probabilidad, que tengan conexiones con los conocimientos formales y que puedan ser utilizadas en clases tanto por el profesor como por el escolar.

Según Stohl (2005), hay pocas investigaciones sobre la implementación de actividades de probabilidad por parte de los profesores. En este sentido, se debe procurar primero en la FID un uso de representaciones y de materiales concretos que respondan al nivel educativo. Para responder a las necesidades antes mencionadas, se ha considerado en este estudio la *franja de probabilidad*, que es una versión adaptada del intervalo  $[0;1]$  en el que se encuentra la probabilidad de un evento.

Así, en este estudio se describe diferentes usos de la *franja de probabilidad* que presentaron estudiantes en FID de primaria. Se consideró una muestra deliberada de 72 estudiantes alemanes que participaron de un seminario sobre datos, frecuencias y probabilidad. También se analizó el desempeño de la *franja de probabilidad* en las presentaciones, en forma de poster, con respecto a varios aspectos del conocimiento del contenido probabilístico para la enseñanza.

## 2. La franja de probabilidad

La *franja de probabilidad* es considerada como una representación que promueve la intuición, da paso a un conocimiento formal y debería ser considerado como un elemento central en la FID de primaria. La *franja de probabilidad* permite expresar los diferentes grados de lo que se cree que podría ocurrir en un evento, en términos de imposible, probable y seguro (Häring y Ruwisch, 2012; Krüger, Sill y Sikora, 2015). Esta *franja de probabilidad* tiene sus raíces en el trabajo de Varga (1972, págs. 352-355), donde se realiza un experimento con dos bolitas azules y dos bolitas blancas dentro de un saquito y se les solicita a los niños de primaria “marcar” sobre un segmento vertical sus posibles respuestas.

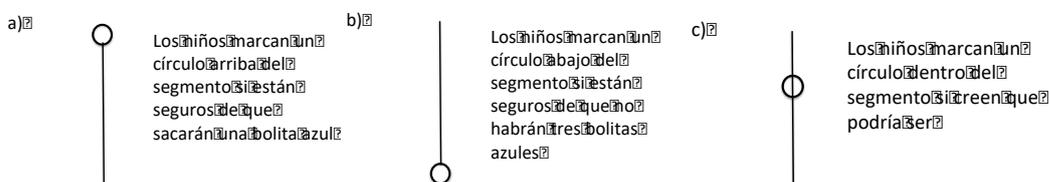


Figura 1: Construcción de la *franja de probabilidad* vertical.

En la Figura 1 se muestran los momentos que propone Varga (1972, Pág. 352-352). Estas tres figuras a), b) y c), corresponden a las tres situaciones a las que son enfrentados los niños. Cada momento se describe a continuación: a) los niños deben sacar tres bolitas del saco y responder a la pregunta ¿habrá una bolita azul dentro de estas tres? Si la respuesta es si o seguro que si, entonces se debe marcar un círculo al final del segmento. b) ¿habrá tres azules entre las tres bolitas que sacamos? Si la respuesta es no, seguro que no, entonces se debe marcar un círculo al inicio del segmento. c) ¿habrá dos bolitas azules entre las tres bolitas que sacamos? Si la respuesta es si, no, podría ser, probablemente, entonces se ubica el círculo dentro del segmento.

En esta actividad de Varga, se muestra la construcción de la *franja de probabilidad* que podrían construir los niños respondiendo a las preguntas y realizando el experimento. Con este proceso se obtiene un segmento vertical donde se comienza con imposible, se termina con seguro y entre medio de estas marcas circulares se encuentran las respuestas correspondientes a las situaciones posibles de ocurrir.

Para Ruwisch (2012, pág. 41) la *franja de probabilidad* es un instrumento de valoración de la probabilidad que permite diferenciar entre sacar una bolita roja cuando hay 5 rojas de 6 bolitas y cuando se saca una roja de entre 6 rojas de 6 rojas. Esta investigadora ha

observado que los escolares pueden detectar esta diferencia en las probabilidades, más allá de los conceptos básicos de seguro o imposible, con ayuda de la *franja de probabilidad*.

Krüger, Sill y Sikora (2015) promueven el uso vertical de la *franja de probabilidad*, igual que Varga (1972). Por otra parte, Häring y Ruwisch (2012) concretan esta *franja de probabilidad* como material de clase con un uso horizontal. En cuanto al uso inicial que se le da en primer año escolar, es el de marcar sobre ella para indicar el grado en que se cree que ciertas expresiones, como “Amaya no vino hoy al colegio, seguro que esta enferma”, son improbables o cercanas a lo seguro.

Sobre las tres nociones básicas imposible, probable y seguro, la investigación de Hahn, Kahnt y Maurer (2009), preparó una introducción a estas nociones básicas basándose en un cuento para cuarto básico. Estos autores utilizaron un barómetro de la probabilidad, el cual está similarmente diseñado a la *franja de probabilidad*, aunque de un metro de largo y con pasadores móviles para facilitar el trabajo sobre este. Las estimaciones de los escolares participantes de este estudio sobre diferentes afirmaciones, fueron expresadas utilizando este barómetro de probabilidad y discutidas en clase.

### 3. Metodología

Este es un estudio descriptivo con análisis cualitativo. La herramienta para la recogida de datos son las producciones de 72 estudiantes que participaron de un seminario sobre datos, frecuencia y probabilidad, el cual fue dictado por la autora en una universidad alemana el año 2016 y en dos paralelos. Un seminario tenía un total de 16 sesiones, donde las primeras cuatro sesiones fueron sobre estadística y procesos de enseñanza-aprendizaje en primaria.

Los temas tratados en este seminario y que se relacionan con la investigación fueron: la *franja de probabilidad*, la intuición en probabilidades, los tipos de representaciones de Bruner (1971) E-I-S (E enactivo, I icónico, S simbólico), el intervalo de probabilidad, cálculo formal de probabilidades, ejemplos de actividades equiprobables y no equiprobables y teorema de los grandes números.

La actividad que es aquí reportada, fue una actividad grupal, realizada en grupos de entre dos a tres estudiantes, que fue realizada en ciertas partes de cuatro sesiones diferentes del seminario:

1. Se entregan diferentes materiales que pueden ser lanzados libremente en la sala de clases (tenedores plásticos, vasos plásticos, chinchetas, dados y monedas), se les pide que anoten en su *franja de probabilidad* la probabilidad intuitiva para cada posición en la que podría caer el objeto al ser lanzado.
2. Se redactan las instrucciones del experimento y se hacen entre 100 y 200 lanzamientos del objeto elegido. Se hace el cálculo de la frecuencia relativa, se determina en algunos casos la probabilidad y se compara con la propuesta intuitivamente.
3. Se ubican los experimentos en los libros escolares y se realizan variaciones o sugerencias para la clase. Se prepara la presentación de lo trabajado en las sesiones. Se puede optar por otros experimentos que no sea lanzar un objeto.
4. Se hacen las presentaciones de los grupos en forma de poster.

La forma de la *franja de probabilidad* tratada en este seminario es horizontal y a diferencia de la presentada por Häring y Ruwisch (2012), aquí se han agregado los términos de “poco probable”, “medio probable” y “muy probable”, así como la frase “posible que ocurra” (ver Figura 2, franja superior).

Además, a esta versión de *franja de probabilidad* se le han agregado flechas para indicar la posición donde va la afirmación “imposible” y “seguro”. Para resaltar que, en el primer caso, la afirmación “imposible” corresponde solo a un punto de la franja y que es exactamente el inicio de la franja, así como que en las franjas de frecuencia relativa y porcentaje, se relacionara con 0 y luego con el 0%. En el segundo caso, la afirmación “seguro” se agrega la flecha para resaltar que esta palabra corresponde exactamente al final del segmento.

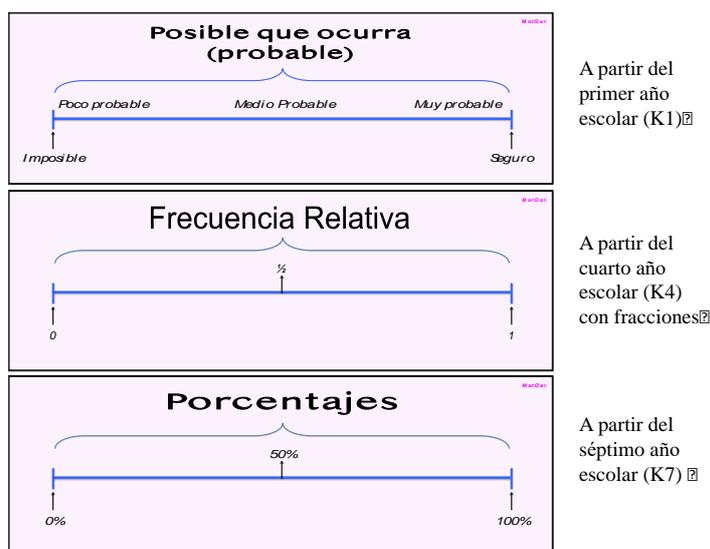


Figura 2: La *franja de probabilidad*, la frecuencia relativa y el porcentaje.

Uno de los temas que fueron trabajados en el seminario (se presenta la traducción al español en la Figura 2) fue la relación de la *franja de probabilidad* con las franjas de frecuencia relativas y porcentaje, junto con el nivel escolar (K1-K12) en la cual se podría introducir esta relación entre el intervalo y las franjas.

Se espera que los estudiantes logren integrar los resultados del experimento con la *franja de probabilidades* adaptándose al nivel de conocimientos que podrían manejar los niños según el nivel. También se espera que integren de manera apropiado lo que se aprendió en el seminario y en su formación matemática general relativa al cálculo de probabilidades.

#### 4. Resultados

Se presentaron un total de 27 posters en la cuarta sesión preparada para este tema. Las producciones fueron nominadas según la clasificación de equiprobable, utilizando la letra E y no equiprobable, utilizando las letras NE; en ambos casos se les asignó a las producciones un número correlativo. En la Tabla 1, se muestra un resumen de las producciones recibidas y su clasificación en equiprobables y no equiprobables.

Tabla 1: Clasificación de las producciones en equiprobables y no equiprobables

	Objeto	Características generales
Equiprobables	Monedas	E1: lanzar 200 veces 1 moneda E2: lanzar 205 veces 1 moneda E3: lanzar 100 veces 1 moneda E4: lanzar 100 veces 2 monedas
	Dados	E13: lanzamiento de 2 dados E14: lanzar 100 veces 2 dados E15: lanzar 200 veces 3 dados E16: lanzar 100 veces 1 dado
	Ruedas de la fortuna	E21: girar 100 veces 1 rueda dividida en 6 y 2 colores
	Tenedores plásticos	NE5: lanzar 100 veces 1 tenedor NE6: lanzar 200 veces 1 tenedor
No equiprobables	Ruedas de la fortuna	NE22: girar diferentes ruedas NE23: dividida en 4 partes diferentes y girada 150 veces NE24: girar diferentes ruedas NE25: girar 100 veces una rueda dividida en 6
	Vasos plásticos	NE8 y NE9: lanzar 200 veces un vaso
	La pesca milagrosa	NE7: pescar entre 3 peces naranjos y uno verde
	Chinches	NE11 y NE12: lanzar 100 veces una chincheta
	Pieza de Lego	NE17, NE18, NE19 y NE20: lanzar 200 veces 1 pieza de lego
	Caja de fósforos	NE10: lanzar 100 veces 1 caja de fósforos
	Bolitas	NE26 y NE27: Sacar 1 bolita 100 veces de un saquito con 1 roja, 2 azules y 3 amarillas

En la Tabla 1, también se ha agregado una descripción general sobre el experimento que realizaron los estudiantes. A continuación, se presenta una descripción de los usos y relaciones que se hacen en cada poster y se mencionan los poster que coinciden en este aspecto.

1. Se utiliza la *franja de probabilidad* para ubicar las frecuencias absolutas del experimento. Se indica sobre dibujos o sobre el material concreto la cantidad de lanzamientos obtenida en el experimento.

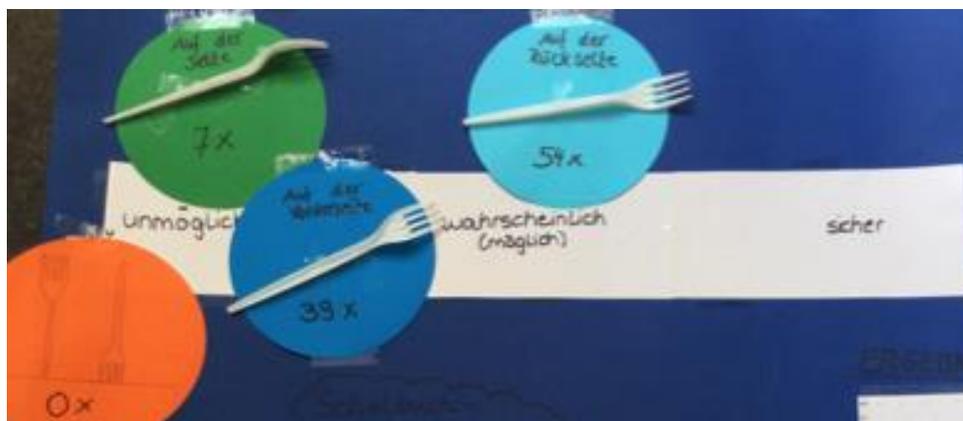


Figura 3: Extracto del poster NE5.

En algunos casos se presentan dibujos o frases para el caso imposible o para el caso seguro, como se muestra en la Figura 3. Las producciones que caen en esta

categoría fueron: E1, E3, E4, NE5, NE6, NE8, NE9, NE10, E13, E16, NE17, NE26. Un ejemplo representativo de este grupo se muestra en la figura 3.

Se puede observar en estas producciones que al trabajar con 100 lanzamientos, es más fácil visualizar donde se podrían ubicar las frecuencias absolutas, lo que se puede deber a que la división por 100 del intervalo es más común y accesible. En algunos casos (NE8 y E4) se utiliza directamente la tabla de frecuencia de rayitas, para fortalecer la relación entre los resultados obtenidos y la ubicación de las imágenes en la *franja de probabilidad*.

2. El uso que se le da a la *franja de probabilidad* es visual, quedando al nivel de lo intuitivo. Se considera la *franja de probabilidad* para ubicar los dibujos sin indicar la frecuencia absoluta de los eventos o algún cálculo o comparación directa que relacione con el cálculo de la probabilidad. Las producciones que caen dentro de esta categoría son: N11, N12, NE18, NE19, NE20, E21, NE22, NE23, NE24, NE27, un ejemplo representativo de este grupo se muestra en la figura 4.

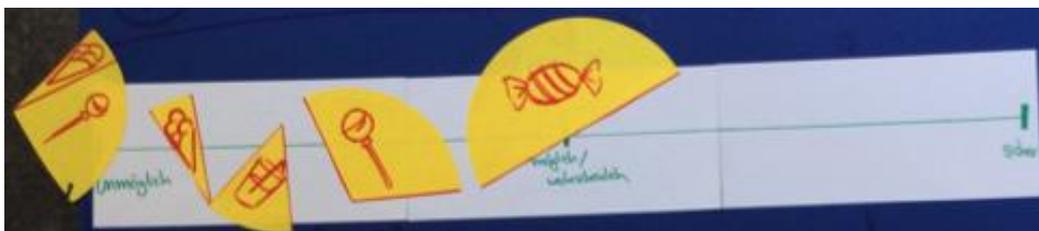


Figura 4: Extracto del poster NE23.

NE23 presenta una rueda no equiprobable, dividida en 4 partes ( $1/2$ ;  $5/16$ ;  $1/16$ ;  $1/8$ ), con motivos de diferentes tipos de dulces. En NE23 también se aprecia la lista de frecuencia absoluta con imágenes. Se ha agregado como imposible la imagen de que salgan dos objetos a la vez al girar una vez la rueda.

3. Uso de la *franja de probabilidad* para comparar con un gráfico de barras horizontales o con el cálculo de la probabilidad. Las producciones que caen dentro de esta categoría son: E14 y E15. En la figura 5 se muestra parte de la producción E15.



Figura 5: Extracto del poster E15

Esta comparación requiere de la división previa de la *franja de probabilidad* en el total de lanzamientos realizados. Esta comparación permite acercarse a la probabilidad del evento de forma visual y muy relacionada con lo intuitivo.

4. Uso de la *franja de probabilidad* en conjunto con porcentajes. En esta categoría se encuentra solo la producción NE25, donde se han agregado los porcentajes 0%, 50% y 100% en la *franja de probabilidad* y se han ubicado imágenes de partes de la rueda de la fortuna con una flecha sobre la franja para indicar el porcentaje relacionado con el experimento de girar la rueda 100 veces.

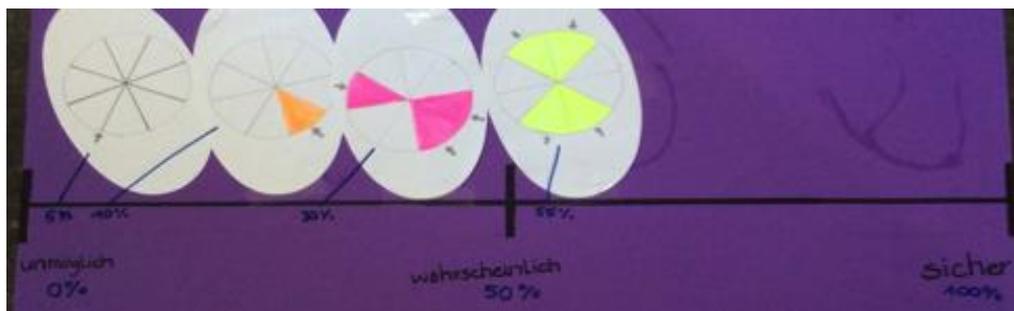


Figura 6: Extracto del poster NE25

5. Uso inadecuado de la *franja de probabilidad*. Hay errores en la distribución de la ubicación de los dibujos sobre la franja de probabilidad (E2) o es presentada con tres divisiones (NE7). En este último caso, la franja de probabilidad fue separada en tres segmentos, lo cual está completamente errado, ya que el caso imposible corresponde solo a un punto de la franja.

El uso de la *franja de probabilidad* presentado en 1) refiere tanto a los conocimientos que tienen los niños en los primeros cursos de la escuela como a un camino transitorio entre la intuición y la probabilidad frecuencial. Además, aproxima de forma natural lo obtenido en los lanzamientos con los tres términos básicos y a las otras subcategorías como casi imposible y casi seguro. En contraste, el uso presentado en 2) se queda muy al nivel de lo intuitivo y no se relaciona directamente con el experimento. Aunque, se recomienda como representación para tener en la sala de clases, por ejemplo con diferentes ruedas de la fortuna.

El uso de la franja presentado en 3) y 4) se corresponde con la trayectoria propuesta en el seminario. Aquí se relaciona lo experimental con la franja de manera más precisa y se incluye la división de la franja en partes para tener la idea de frecuencia relativa, este es un paso que se podría comenzar en cuarto año escolar (K4). Inesperado fue el uso de la franja observado en 5). En la presentación y discusión de estos dos posters, se pudo detectar para el caso E2, la ausencia del paso de dividir la franja por la cantidad de lanzamientos realizados. En el caso de NE7, se reconoce que lo que se quería expresar era la noción de casi imposible o poco probable como un tercio de la franja y que la palabra utilizada no fue la correcta.

## 5. Discusión

En este trabajo se observa un uso de la *franja de probabilidad* asociado con tareas empírico-estadísticas, en las que los propios estudiantes pueden probar como funciona un experimento aleatorio y utilizar tablas para registrar los resultados. Coincidimos con Dehn, Mayer, Weisbach y Neubert (2007) sobre la importancia de estos elementos para

la comprensión de la probabilidad y agregamos el uso de la franja de probabilidad como un elemento central en clases.

En cuatro de los usos mostrados se observa una clara reproducibilidad de las actividades en el futuro laboral de los estudiantes. El uso inadecuado de la *franja de probabilidad* nos lleva a revisar las nociones que tienen los estudiantes sobre imposible y seguro de un evento y la necesidad de investigar a este nivel, utilizando la *franja de probabilidades* como medio de registro de estas nociones.

En los ejemplos presentados se comienza con tratar de estimar las probabilidades y no de calcularla, y algunos estudiantes se quedan en esta posición intuitiva. Coincidimos con Kurz y Hoffart (2008) sobre el camino que podría hacer el trabajo con la probabilidad, desde lo intuitivo a lo formal, en primaria se debe dar el paso y no quedarse solo con lo intuitivo. Agregamos, que al incluir la *franja de probabilidad* y presentar los resultados estimativos sobre esta franja, estamos promoviendo una estimación dentro de un rango, de un intervalo que comienza y termina, esta representación permitiría en cursos de secundaria comprender mejor la relación entre estimación y formalidad.

Las producciones de los estudiantes en FID muestran una gran variedad de posibilidades para explorar este tema con mucha diversión en el aula. Sin embargo, se debe precisar en que este tipo de actividades deben seguir una estructura clara y precisa para construir una comprensión formal de la probabilidad. Comenzando con lo intuitivo y representado las conjeturas sobre la franja de probabilidad, siguiendo con la experimentación y la ubicación de resultados sobre la franja, para terminar con la comparación de resultados.

El mayor uso que se le da a la *franja de probabilidad* y que se muestran en este estudio, se relaciona con la comprensión de que hay sucesos que se pueden categorizar y valorizar en un continuo entre lo imposible y lo seguro. Esto está muy cerca del cálculo de probabilidad, ya que se hace esta diferenciación dentro de un intervalo que puede ser rápidamente relacionado con los valores de probabilidad, dividiendo la franja en partes iguales.

La *franja de probabilidad* sirve bien como un instrumento didáctico en la escuela primaria. Los niños pueden usar los gráficos para representar los datos recopilados, pero no les permite decir a partir de un gráfico de barras, resultante de un experimento estadístico, qué tan altas son las probabilidades de ocurrencia del evento, de aquí la importancia de los usos que se puede dar a la franja, especialmente el de comparar de manera adecuada gráficos de barra con esta. Esto último, promueve una nueva pregunta de investigación, relacionada con las oportunidades que presenta la *franja de probabilidad* para la comprensión de la probabilidad por parte de los escolares.

## Referencias

- Batanero, C. (2016). Posibilidades y retos de la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. *Actas del 6º Congreso Uruguayo de Educación Matemática*, Montevideo: SEMUR Disponible en: <https://www.ugr.es/~batanero/documentos/Batanero-Curem6.pdf>.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005) Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. Johannesburgo: International Commission on Mathematical

## Instruction.

- Batanero, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. EM-TEIA. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 2(2).
- Bruner, J. (1971). *Toward a theory of instruction*, 5th edition. Cambridge: The Belknap press of Harvard University.
- Dehn, C., Mayer, S., Weisbach, D. y Neubert, B. (2007). Was ist Wahrscheinlichkeit? Glücksrad- und Urnenaufgaben für die Grundschule. *Grundschulunterricht*, S. 33-36.
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Nueva York: Springer.
- Hahn, H., Kahnt, J. y Maurer, F. (2009). Wahrscheinlich ist "...es kann klappen, muss aber nicht..". *Sache, Wort, Zahl*, 9-15.
- Häring, G. y Ruwisch, S. (2012). *Die Wahrscheinlichkeit Box, Grundschule*. Seelze: Kallmeyer.
- Krüger, K., Sill, H. D., y Sikora, Ch. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Berlin: Springer Spektrum.
- Kurz, A. y Hoffart, E. (2008). "Da hat man einen Apfel mehr Glück." Schülerteams lösen Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit. *Grundschulunterricht Mathematik*, S, 29-32.
- López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador: International Association for Statistics Education.
- Ruwisch, S. (2012). Wahrscheinlichkeit in der Grundschule? Möglich? Sicher! *Grundschule Mathematik*, 40-43.
- Stohl, H. (2005). Probability and teacher education and development. En G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for the teaching and learning* (pp. 345-366). NY: Springer Verlag.
- Varga, T. (1972). Logic and probability in the lower grader. *Educational Studies in Mathematics*, 4, 346 - 357.