

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**THALLES DE ANDRADE BORGES**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS AO REDOR DE UM CILINDRO  
CIRCULAR COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE: UM ESTUDO DO FENÔMENO  
DA VIBRAÇÃO INDUZIDA POR VÓRTICES**

Uberlândia

2019

THALLES DE ANDRADE BORGES

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS AO REDOR DE CILINDROS  
CIRCULARES COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE: UM ESTUDO DO  
FENÔMENO DA VIBRAÇÃO INDUZIDA POR VÓRTICES**

Trabalho apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte das exigências para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

**Orientador: Prof. Dr. Elie Luis Martinez Padilla**

Uberlândia, 28 de fevereiro de 2019

## **AGRADECIMENTOS**

Presto aqui os meus sinceros agradecimentos...

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, por ter me concedido a possibilidade de conhecer profissionais especialmente qualificados e a oportunidade de aprender com eles.

Aos órgãos de fomento CAPES, CNPQ, e FAPEMIG, que possibilitaram a realização da pesquisa que culminou neste trabalho.

Ao Laboratório de Mecânica dos Fluidos, MFLab, pela concessão da infraestrutura para pesquisa e pelos conhecimentos adquiridos.

Ao orientador, Elie Luis Martinez Padilla, pela atenção, paciência e orientação prestadas nessa longa jornada.

## RESUMO

O presente trabalho apresenta o estudo de um problema de interação fluido-estrutura, envolvendo modelagem matemática e simulação computacional. Mais especificamente, o problema consiste na interação dinâmica entre um escoamento incompressível e uma estrutura, constituída de um cilindro circular rígido, elasticamente montado, livre para se movimentar nas direções longitudinal e transversal ao escoamento, podendo ainda sofrer rotação. À oscilação do cilindro, causada pelo desprendimento de vórtices na esteira próxima, dá-se o nome de vibração induzida por vórtices, termo também utilizado para designar a classe de fenômenos de interação fluido-estrutura em que este problema se enquadra. Utiliza-se uma combinação das metodologias de fronteira imersa e de volumes finitos para abordagem, modelagem e resolução numérica do escoamento e um método Runge-Kutta de quarta ordem para resolução numérica das equações que descrevem o movimento da estrutura. Com os resultados obtidos, comparados com dados encontrados na literatura, pôde-se constatar a influência de certos parâmetros no regime de vibração estrutural, evidenciando a ocorrência do fenômeno de sincronização (*lock-in*), onde são máximas as oscilações da estrutura.

**Palavras-chave:** Interação fluido-estrutura, Vibração induzida por vórtices, Método de Fronteira Imersa, Método dos Volumes Finitos

## ABSTRACT

The present work brings forward a study involving the mathematical modeling and numerical simulation of a fluid-structure interaction problem. More specifically, the problem consists in the dynamic interaction between an incompressible fluid flow and a structure – a rigid circular cylinder, elastically mounted, free to move in the inline and cross-flow directions and might also be subjected to rotation. To the cylinder's oscillation, caused by the vortex shedding in its wake, is given the name of Vortex Induced Vibration, which itself is the term used for designate a class of Fluid-Solid Interaction phenomena. A combination of the Immersed Boundary Method and the Finite Volume Method is used to model and numerically solve the flow; a fourth order Runge-Kutta method is used for solving the equations that describe the movement of the structure. Compared with the data found in the literature, the results showed the influence of certain parameters on the structural vibration regime, highlighting the occurrence of the synchronization or lock-in phenomenon, where the amplitude of the structure's oscillations are maximum.

**Key words:** Fluid-structure interaction, Vortex Induced Vibration, Immersed Boundary Method, Finite Volume Method

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquematização um cilindro fixo imerso a um escoamento, explicitando a condição de contorno de parede (velocidade nula na fronteira entre o fluido e o corpo). Adaptado de Bird (2004). .....	12
Figura 2 – Fenômeno <i>ovalling</i> , decorrente da interação da interação entre um cilindro oco, de parede fina, e um fluido em escoamento. É possível notar a deformação na seção transversal da estrutura, devido à sua vibração. Adaptado de Païdoussis (2006).....	12
Figura 3 – Teste de um rotor eólico no túnel de vento do Nasa Ames Research Center. Nota-se a modificação no padrão. Retirado de White (2010).....	13
Figura 4 – Ilustração da interação entre as forças viscosas e de inércia num escoamento ao redor de um cilindro circular, com número de Reynolds: (a) baixo, (b) moderado e (c) alto. Retirado de Munson (2004).....	15
Figura 5 – Caráter do escoamento em torno de um cilindro imerso em função do número de Reynolds. Adaptado de Schlichting (2017).....	16
Figura 6 – Esteira de von Kármán atrás de um cilindro circular, com $Re=140$ . Extraído de Van Dyke (1982).....	17
Figura 7 – Modos de desprendimento de vórtices. As letras identificam a configuração das estruturas que são emitidas após um período de oscilação da estrutura (cilindro circular): “S”, do inglês <i>Single</i> , singular, unitário; “P”, do inglês “ <i>Pair</i> ”, par; “C”, do inglês <i>Coalescence</i> , coalescente. Extraído de Williamson & Roshko (1988).....	18
Figura 8 – Esquematização do problema proposto. Adaptado de Rodrigues (2017). .....	20
Figura 9 – Esquematização arbitrária dos domínios Euleriano ( $\Omega$ ) e Lagrangiano ( $\Gamma$ ). Os pontos eulerianos são referenciados pelo vetor genérico $x$ e os pontos lagrangianos, pelo vetor $X$ . Extraído de Rodrigues (2017).....	22
Figura 10 – Volume de controle elementar isolado, utilizado na discretização do domínio euleriano. ....	28
Figura 11 – Esquematização do domínio e condições de contorno aplicadas a ambos os casos. A única diferença se encontra mesmo na existência de rotação do cilindro para o segundo caso. ....	32
Figura 12 – Campos de vorticidade para $Re = 100$ , $m^*=10$ e diferentes valores de velocidade reduzida. Nota-se o predomínio do padrão ‘2S’ e a ocorrência do padrão ‘C(2S)’ para $Ur = 5,0$ . ....	34

Figura 13 – Trajetórias desenvolvidas pela estrutura, quando em interação com o escoamento $Re = 100$ , para diferentes valores de velocidade reduzida. ....	35
Figura 14 – Deslocamentos da estrutura nas direções horizontal (X) e vertical (Y) durante a sincronização. Encontram-se os seguintes valores de amplitude de deslocamento, em módulo, $A_x = 0,5*(X_{max}-X_{min}) = 0,08$ e $A_y = 0,5*(Y_{max}-Y_{min}) = 0,6$ .....	36
Figura 15 – Comparativo dos resultados de amplitude de deslocamentos na direção vertical (Y), em função da velocidade reduzida $Ur$ . ....	37
Figura 16 – Amplitudes de deslocamento encontrados em função da variação da velocidade reduzida $Ur$ e da taxa de rotação $\alpha$ . Os gráficos mostrados à esquerda representam os resultados do presente trabalho e os gráficos à direita, do trabalho de Rodrigues (2017).....	39
Figura 17 – Amplitudes de deslocamento encontrados por Zhao (2014), em função da variação da velocidade reduzida $Ur$ e da taxa de rotação $\alpha$ . ....	40
Figura 18 – Campos de vorticidade para $Re = 150$ , $m^*=2$ e diferentes valores de velocidade reduzida e taxa de rotação. Notam-se os diferentes padrões de desprendimento.....	41
Figura 19 – Trajetórias desenvolvidas pela estrutura, quando em interação com o escoamento, para diferentes valores de velocidade reduzida e taxa de rotação. ....	43
Figura 20 – Resultados obtidos por Zhao (2014) para os perfis de trajetórias desenvolvidas pela estrutura, quando em interação com o escoamento, para diferentes valores de velocidade reduzida e taxa de rotação. ....	44
Figura 21 – Campos de vorticidade obtidos por Singh e Mittal (2005), com $Re=100$ , $m^*=10$ , para diferentes valores de velocidade reduzida. Mesmos parâmetros descritos na Tabela 4.1. ....	52
Figura 22 – Campos de vorticidade obtidos por Chern et al. (2014), com $Re=100$ , $m^*=10$ , para diferentes valores de velocidade reduzida. Mesmos parâmetros descritos na Tabela 4.1.....	53

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Grupos adimensionais utilizados na modelagem do problema.....	27
Tabela 4.1 – Parâmetros do problema – caso I.....	33
Tabela 4.2 – Parâmetros do problema – caso II .....	38



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	9
1.1	Objetivos.....	10
1.2	Estrutura do Trabalho .....	10
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	11
2.1	Fundamentos da interação fluido-estrutura .....	11
2.2	Escoamento ao redor de corpos imersos.....	14
2.2.1	Escoamento em torno de um cilindro fixo.....	15
2.2.2	Escoamento em torno de um cilindro oscilante.....	17
2.2.2.1	Cilindro oscilante sem rotação .....	19
2.2.2.2	Cilindro oscilante com rotação .....	19
3	ESTUDO DE CASO .....	20
3.1	Posição do Problema .....	20
3.2	Modelagem Matemática .....	21
3.2.1	Modelagem do fluido .....	21
3.2.1.1	Método da Fronteira Imersa (MFI).....	21
3.2.1.2	Modelagem do escoamento: Formulação para o domínio euleriano.....	22
3.2.1.3	Modelagem do acoplamento entre os domínios euleriano e lagrangiano.....	23
3.2.1.4	Modelagem da força lagrangiana .....	24
3.2.2	Modelagem Estrutural .....	26
3.3	Metodologias Numéricas.....	28
3.3.1	Método dos Volumes Finitos.....	28
3.3.3.1	Obtenção e resolução das equações discretas num volume de controle elementar .....	30
3.3.2	Método Runge-Kutta de Quarta Ordem .....	30
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	32
4.1	Resultados obtidos para o caso I (sem rotação).....	33

4.2 Resolução obtidos para o caso II (com rotação).....	37
5 CONCLUSÃO .....	45
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	46
APÊNDICE A – OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES PELO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS.....	49
A.1 Integração no volume de controle e discretização .....	49
ANEXO B – FIGURAS RETIRADAS DA LITERATURA SOBRE ESCOAMENTO AO REDOR DE CILINDROS OSCILANTES SEM ROTAÇÃO .....	52

## 1 INTRODUÇÃO

De incontestável importância para a Mecânica dos Fluidos, o escoamento em torno de corpos imersos é um dos problemas mais antigos e tem sido, até hoje, amplamente estudado, não somente pelo grande potencial de aplicações técnicas – desde o projeto das antigas embarcações à vela até o desenvolvimento de uma aeronave, por exemplo –, mas também por se fazer presente em inúmeros fenômenos que ocorrem naturalmente à nossa volta, como na simples ação do vento que faz balançar a copa das árvores.

Um corpo, estrutura, ou objeto<sup>1</sup>, imerso em uma corrente de fluido, está sujeito à ação de forças oriundas do escoamento, devido a efeitos viscosos e à distribuição de pressão na interface fluido-corpo. Obviamente, se o fluido exerce essas forças sobre o corpo, o mesmo exerce sobre o fluido forças de igual magnitude e opostas. A presença deste corpo por fim se traduz no rearranjo do escoamento, pelo efeito destas mesmas forças. Diz-se então que existe ali uma interação entre o corpo e o fluido – o que é denominado na literatura de interação fluido-estrutura.

Certamente, as forças de natureza fluidodinâmica que atuam sobre o corpo imerso podem provocar sua deformação (se não for rígido) e/ou movimentação (se não for fixo). Quando este corpo possui graus de liberdade que o permitem oscilar, conforme o escoamento evolui e se desenvolve, o mesmo tende a vibrar (Rodrigues, 2017). Surge então um movimento oscilatório, derivado da interação fluido-estrutura.

Dentre os diversos fenômenos que compõem este tipo de interação, dar-se-á maior atenção àqueles em que a oscilação da estrutura é provocada pela geração e desprendimento de vórtices. Tais são os chamados fenômenos de vibração induzida por vórtices (VIV).

A elevada complexidade dos fenômenos de VIV, da maneira como ocorrem materialmente, torna também elevada a complexidade dos modelos que pretendem traduzir de alguma forma, e em determinado nível, a sua realidade. Graças aos avanços na Mecânica dos Fluidos Computacional, engenhosos modelos e métodos de natureza numérica têm conseguido realizar esta tarefa, sendo amplamente utilizados para a obtenção de resultados satisfatórios para este tipo de problema.

Neste trabalho, será considerado como corpo imerso, ou estrutura imersa, um cilindro circular rígido elasticamente montado, com graus de liberdade nas direções paralela e perpendicular à direção de corrente livre. O estudo das vibrações induzidas por vórtices em

---

<sup>1</sup> Usar-se-ão neste texto muitas vezes as palavras “corpo”, “objeto” e “estrutura” de maneira intercambiável, como significados da ideia de matéria sólida constituída.

cilindros circulares tem recebido extensa atenção, por servir de modelo simplificado para *risers* que, submetidos às correntes marítimas, podem estar sujeitos a este fenômeno. De acordo com Rodrigues (2017), dentre as principais configurações estudadas, encontram-se: cilindros fixos, cilindros elasticamente montados com um ou dois graus de liberdade, com ou sem rotação (casos com rotação sem menos estudados). Por meio do estudo destes modelos, torna-se possível o desenvolvimento eficaz de estruturas menos suscetíveis à falha por grandes amplitudes, resultantes da vibração induzida por vórtices.

## **1.1 Objetivos**

O objetivo deste trabalho – que se estende há algum tempo e cuja finalização está marcada pelo presente texto – é contribuir com uma singela cota ao estudo realizado no Laboratório de Mecânica dos Fluidos MFLab na área de interação fluido-estrutura, dando continuidade ao mesmo por meio do aperfeiçoamento da rotina numérica utilizada na resolução de problemas simplificados, envolvendo vibração induzida por vórtices. Tal rotina foi desenvolvida com base numa combinação das metodologias Fronteira Imersa e Volumes Finitos.

## **1.2 Estrutura do Trabalho**

O trabalho está dividido numa série de seis capítulos. Neste primeiro capítulo encontra-se a introdução, onde se tenta apresentar brevemente um panorama daquilo que será tratado nos capítulos seguintes. O capítulo segundo trata da revisão bibliográfica, com os fundamentos teóricos e pormenores das ideias expostas até aqui. Já o capítulo terceiro apresenta o estudo de caso, com a posição do problema analisado, além das abordagens e metodologias utilizadas. No capítulo quarto são apresentados e discutidos os resultados obtidos na resolução do problema proposto. No capítulo quinto encontram-se as conclusões, dando um fechamento a tudo que foi exposto até então. E por fim, o capítulo sexto traz um compilado das referências bibliográficas utilizadas para manufatura deste trabalho.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo trata dos fundamentos que envolvem os fenômenos de interação fluido-estrutura, desde um aspecto geral da teoria, até os casos particulares de interação entre a corrente de fluido e um cilindro nesta imerso.

### 2.1 Fundamentos da interação fluido-estrutura

Como foi explicitado anteriormente, são inúmeras as ocasiões em que um fluido e um corpo material sólido se encontram em algum tipo de interação. Surgem, naturalmente, abordagens para lidar com o problema físico da interação.

Entretanto, é comum que tais abordagens, por meio de hipóteses simplificativas, privilegiem um dos domínios interagentes, focando na reação ou resposta de um devido à ação ou influência do outro. Neste sentido, alguns problemas de interação acabam sendo comumente estudados desde uma perspectiva unilateral, onde são tratados apenas os efeitos de uma entidade sobre a outra: ou os efeitos do corpo sobre o fluido, ou os efeitos do fluido sobre o corpo.

#### 2.1.1 Abordagem 1: A mecânica dos fluidos na presença de um corpo sólido

No estudo de escoamentos ao redor de corpos imersos em mecânica dos fluidos, a presença de um corpo sólido é traduzida em termos de condições de contorno. Por exemplo, no caso de um corpo rígido, indeformável e fixo no espaço e no tempo (hipóteses simplificativas), uma das condições de contorno aplicadas é a de velocidade nula daquela camada de fluido que se encontra na fronteira delimitada pela superfície do corpo. Esta situação está simplificada na Figura 1.

#### 2.1.2 Abordagem 2: A mecânica dos sólidos na presença de um fluido

Desde a perspectiva da mecânica dos sólidos, um fluido pode representar a ação de forças que atuam sobre um corpo sólido, podendo deformá-lo e/ou movimentá-lo. Nestes casos, o corpo pode estar sujeito à fenômenos de vibração induzida pelo escoamento. A Figura 2 ilustra uma situação deste tipo.

A presença do fluido é considerada como a causa dos esforços atuantes no corpo, traduzindo-se em condição de contorno, assim como no caso anterior.

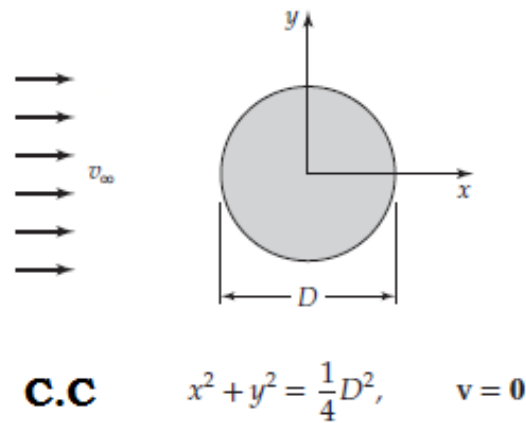


Figura 1 – Esquematização um cilindro fixo imerso a um escoamento, explicitando a condição de contorno de parede (velocidade nula na fronteira entre o fluido e o corpo). Adaptado de Bird (2004).

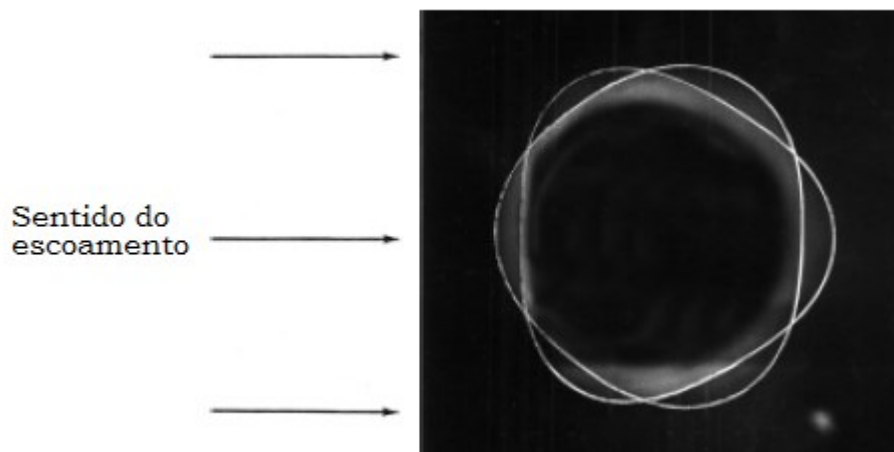


Figura 2 – Fenômeno *ovalling*, decorrente da interação da interação entre um cilindro oco, de parede fina, e um fluido em escoamento. É possível notar a deformação na seção transversal da estrutura, devido à sua vibração. Adaptado de Païdoussis (2006).

### 2.1.3 A interação entre um fluido e um corpo – acoplamento entre abordagens

Nota-se que nas duas abordagens descritas acima, o intuito final é responder a questões como:

- “O que acontece com o escoamento de um fluido quando nele se encontra imerso um corpo material qualquer?”, ou

- *“O que acontece com o corpo quando este se encontra sob a ação de um fluido qualquer?”.*

Em ambos os casos, existe implicitamente o par “agente-objeto”: uma das entidades (fluido ou corpo) é tratada como “agente” – que promove a ação – enquanto a outra como “objeto” – sobre o qual se manifestam os efeitos da ação. A interação é, pois, tratada como uma “via de mão única”.

Contudo, existem situações onde é impossível desvincular a influência de uma entidade sobre a outra: a própria reação de uma entidade, devido à ação da outra, influencia esta última, modificando-a. Exemplos deste tipo de situação podem ser encontrados em rodas d’água, rotores eólicos, turbinas hidráulicas, etc., onde o movimento da estrutura é devido ao escoamento de um fluido, que por sua vez é modificado pela própria movimentação da estrutura.



Figura 3 – Teste de um rotor eólico no túnel de vento do Nasa Ames Research Center. Nota-se a modificação no padrão. Retirado de White (2010).

Percebe-se que ambas entidades podem ser consideradas agentes mútuos num esquema retroalimentado. Caso se queira saber como se comportam ambos, escoamento e estrutura, ao

longo do tempo, deve-se lançar mão de uma abordagem que considere simultaneamente estas interações.

A ideia de acoplar as duas abordagens descritas anteriormente surge, então, naturalmente. A partir daí, são construídos modelos maiores – a partir do acoplamento dos modelos de mecânica dos fluidos e mecânica dos sólidos – que levam em conta as informações necessárias para descrição da interação fluido-estrutura.

## 2.2 Escoamento ao redor de corpos imersos

Quando uma corrente de fluido ultrapassa um corpo material imerso, o padrão de escoamento é modificado, surgindo perturbações na região ao redor deste corpo. O impacto ou a dimensão destas perturbações depende de fatores como velocidade e a viscosidade do fluido em escoamento, bem como a forma, o tamanho e a orientação espacial do corpo imerso (Zdravkovich, 1997).

A natureza de um escoamento ao redor de corpos imersos, de uma maneira geral, está associada a certos parâmetros adimensionais, sendo o principal e mais comumente utilizado o número de Reynolds,  $Re$ , expresso pela seguinte equação:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (2.1)$$

onde  $U$  é a velocidade característica do escoamento, livre da interferência do corpo imerso;  $L$  é o comprimento característico do corpo e  $\nu$  a viscosidade cinemática.

O número de Reynolds expressa uma medida da relação entre os efeitos de inércia e os efeitos viscosos de um escoamento. Geralmente, baixos números de Reynolds ( $Re \ll 1$ ) estão associados à escoamentos mais coesos, onde os efeitos de inércia são suprimidos pelos efeitos viscosos em toda a região ao redor do corpo. Já nos escoamentos com números de Reynolds maiores ( $Re \gg 1$ ), os efeitos de inércia se tornam mais pronunciados e os efeitos viscosos já não são mais capazes de manter coeso o escoamento ao redor do corpo, ocasionando na separação da camada de fluido próxima à sua superfície. O aumento do número de Reynolds a partir daí faz com que se tornem mais intensas as perturbações. A Figura 4 ilustra as descrições feitas acima no caso de um escoamento ao redor de um cilindro circular.



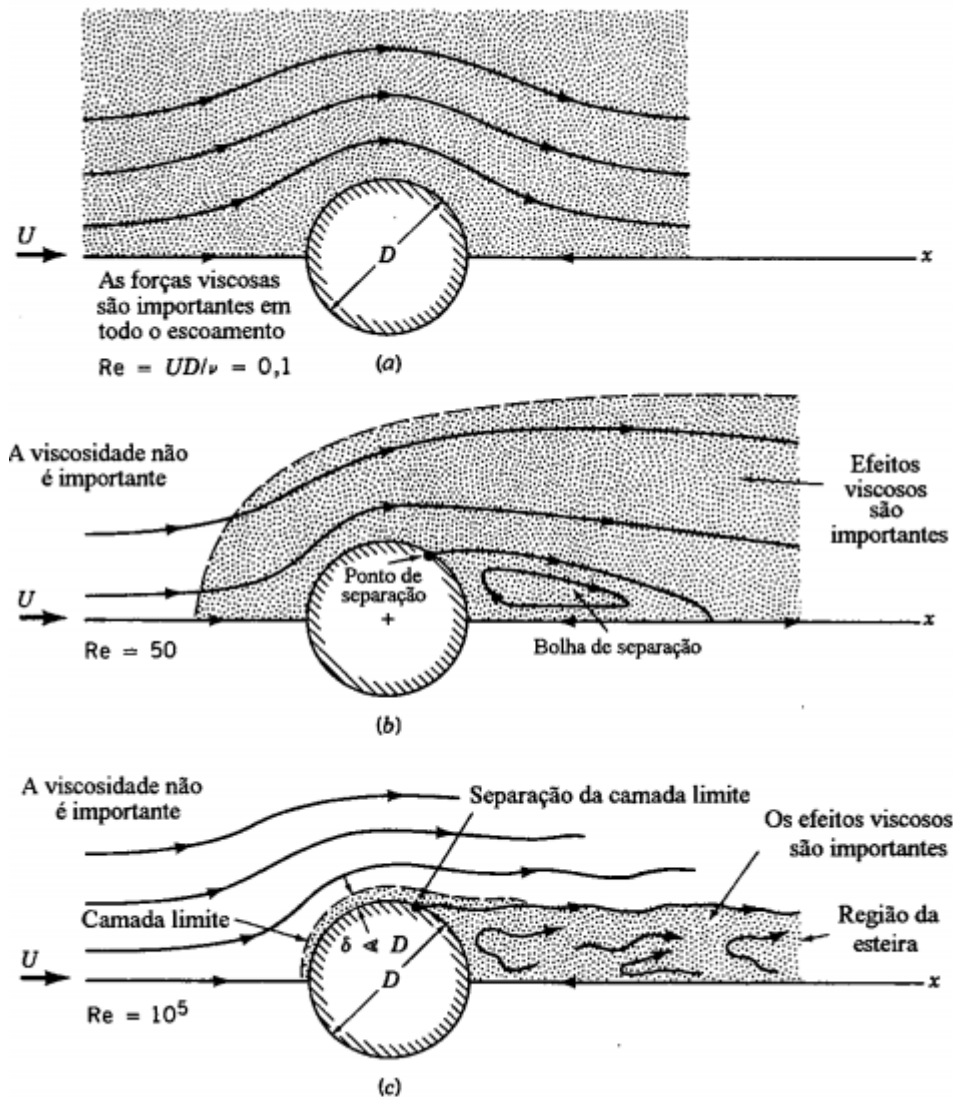


Figura 4 – Ilustração da interação entre as forças viscosas e de inércia num escoamento ao redor de um cilindro circular, com número de Reynolds: (a) baixo, (b) moderado e (c) alto. Retirado de Munson (2004).

O exemplo do escoamento em torno de um cilindro circular, convenientemente introduzido acima, será pormenorizado na sequência. É importante frisar que devido à adoção de hipóteses simplificativas, este tipo de escoamento pode ser tratado como sendo bidimensional, como será tratado doravante, embora materialmente isso não ocorra.

### 2.2.1 Escoamento em torno de um cilindro fixo

Conforme explicitado no item anterior, o caráter do escoamento em torno de um corpo sólido pode ser associado ao número de Reynolds. No caso de um cilindro circular fixo, as

modificações no padrão do escoamento passam a ser conspícuas quando ocorre o descolamento ou separação da camada limite, a números de Reynolds moderados ou altos, conforme esquema encontrado na Figura 4.

Schlichting (2017) explica o fenômeno de separação da camada limite em cilindros circulares. Segundo o autor, devido aos efeitos de atrito nas proximidades da superfície do cilindro, uma partícula de fluido no interior da camada limite tem uma parcela de sua energia cinética degenerada, a tal ponto que a mesma acaba não tendo “forças” para vencer o gradiente de pressão posterior. Por este motivo, ocorre a separação ou descolamento da camada limite.

Num primeiro momento após a separação, devido à configuração simétrica do escoamento em torno do cilindro, surgem à jusante do cilindro duas camadas cisalhantes, que poderão originar na esteira um par de vórtices de sinais opostos (Rodrigues, 2017).








Número de Reynolds	Regime de Escoamento	Formato do escoamento	Característica do escoamento
$Re \rightarrow 0$	Escoamento Lento (creeping flow)		Permanente, sem esteira
$3 - 4 < Re < 30 - 40$	Par de vórtices na esteira		Permanente, com separação simétrica
$30 < Re < 80$ $40 < Re < 90$	Formação de vórtices de von Kármán		Laminar, esteira instável
$80 < Re < 150$ $90 < Re < 300$	Pura esteira de vórtices de von Kármán		Vórtices de von Kármán
$150 < Re < 10^5$ $300 < Re < 1.3 \cdot 10^5$	Regime subcrítico		Laminar, com esteira de vórtices instável
$10^5 < Re < 3.5 \cdot 10^6$ $1.3 \cdot 10^5 < Re < 3.5 \cdot 10^6$	Regime Crítico		Separação Laminar Esteira turbulenta
$3.5 \cdot 10^6 < Re$	Regime Supercrítico (transcrítico)		Separação turbulenta

Figura 5 – Caráter do escoamento em torno de um cilindro imerso em função do número de Reynolds. Adaptado de Schlichting (2017).

Conforme se aumenta o número de Reynolds, a camada limite se desenvolve e, na região da esteira, instabilidades aumentam e é possível perceber a formação e emissão periódica de certas estruturas que respeitam um padrão intrigante: começa a ocorrer o desprendimento de vórtices, denominados vórtices de von Kármán.



Figura 6 – Esteira de von Kármán atrás de um cilindro circular, com  $Re=140$ . Extraído de Van Dyke (1982).

A partir de então, o crescimento do número de Reynolds implica no aumento progressivo das instabilidades, levando à turbulência da esteira, que passa a ser estreita e desorganizada. Aumentar ainda mais o número de Reynolds ocasiona na separação turbulenta e no restabelecimento da emissão de vórtices (Silva, 2013).

Vale lembrar que, na realidade, não é um valor específico do número de Reynolds que caracteriza o escoamento ao redor de corpos imersos, mas sim uma faixa, um intervalo de valores. A partir da Figura 5, é possível conceber a evolução do escoamento sobre cilindros circulares de acordo com o aumento do número de Reynolds, e a identificação de cada regime de escoamento por meio de faixas de números de Reynolds.

### *2.2.2 Escoamento em torno de um cilindro oscilante*

No caso de escoamento ao redor de um cilindro oscilante, isto é, com graus de liberdade que permitem-no movimentar-se, são identificados na esteira padrões de desprendimento de vórtices que variam de acordo com o número de Reynolds.

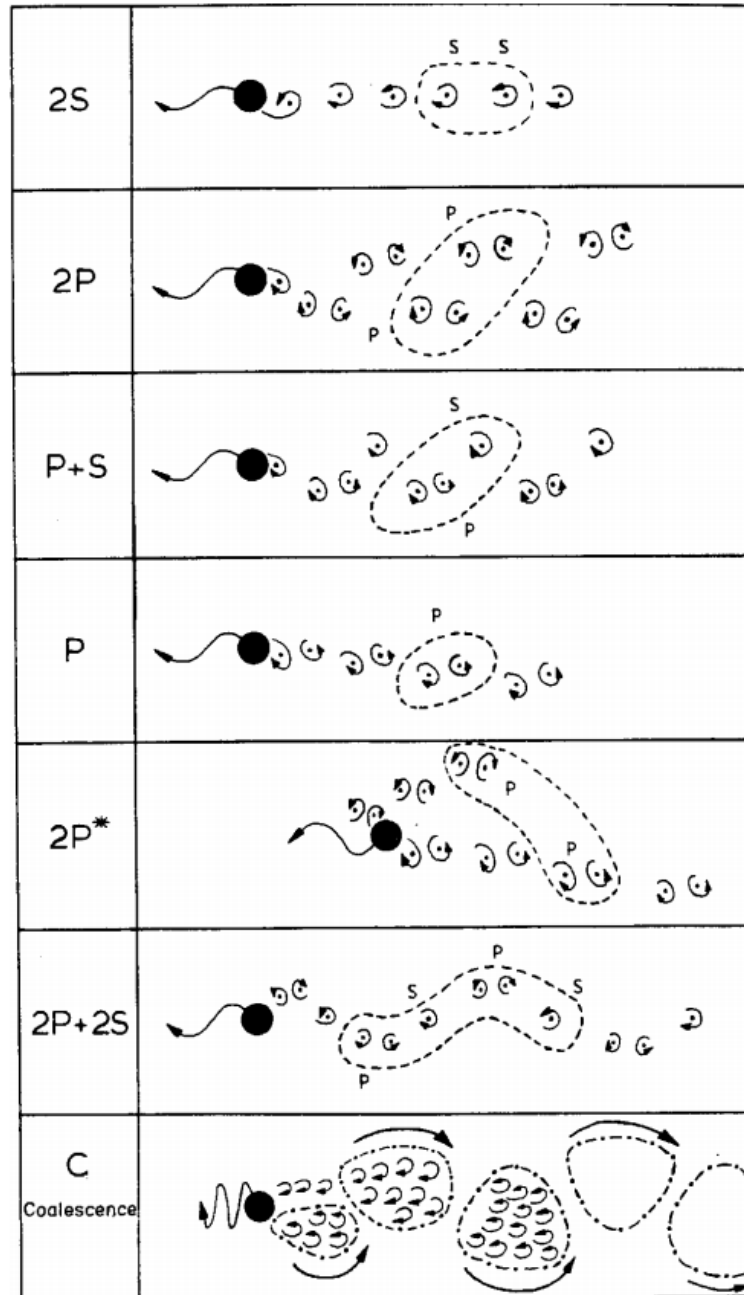


Figura 7 – Modos de desprendimento de vórtices. As letras identificam a configuração das estruturas que são emitidas após um período de oscilação da estrutura (cilindro circular): “S”, do inglês *Single*, singular, unitário; “P”, do inglês *Pair*, par; “C”, do inglês *Coalescence*, coalescente. Extraído de Williamson & Roshko (1988).

No trabalho de Williamson e Roshko (1988) é descrito que a cada período de oscilação, o desprendimento de vórtices contrarrotativos se dá segundo padrões específicos, de acordo com o número de Reynolds. Tais padrões foram classificados como 2S, 2P, P+S, P, 2P+2S e C e encontram-se ilustrados na Figura 7, sendo “2S” (two single) o padrão de desprendimento de

dois vórtices isolados; “2P” (two pairs), de dois pares de vórtices; “P+S” (pair and single), de um par de vórtices acompanhado de um vórtice individual; “P” (pair), de um par de vórtices; “2P+2S”, de dois pares de vórtices acompanhados de dois vórtices individuais; e “C”, o padrão de desprendimento de estruturas contrarrotativas de vórtices coalescentes.

É importante frisar que o movimento oscilatório do cilindro pode ser forçado ou advindo da própria interação com o escoamento. Mais especificamente, ao movimento oscilatório do cilindro, causado pelo desprendimento de vórtices na esteira próxima, dá-se o nome de vibração induzida por vórtices (*Vortex-Induced Vibration – VIV*).

Os problemas de vibração induzida por vórtices em cilindros circulares são estudados na literatura sob diversas configurações. Será dado foco a seguir nas configurações envolvendo um único cilindro circular oscilante, com e sem rotação.

#### 2.2.2.1 Cilindro oscilante sem rotação

Neste caso, considera-se basicamente a reação da estrutura imersa, constituída de um cilindro circular deslocável, ao desprendimento de vórtices na esteira próxima.

Um fenômeno importante ocorre sob condições tais que a frequência de desprendimento de vórtices se aproxima da frequência natural da estrutura, o que tende a criar grandes deslocamentos da mesma. Diz-se então que a estrutura está dentro do regime de *lock-in* ou sincronização. Neste regime, a estrutura pode oscilar doidamente e são máximas as amplitudes de deslocamento. Fora deste regime, as amplitudes são reduzidas.

#### 2.2.2.2 Cilindro oscilante com rotação

Nos casos onde é sobreposta (forçada) a rotação do cilindro, verifica-se uma drástica alteração no desprendimento de vórtices em relação ao caso sem rotação, o que acaba influenciando diretamente na movimentação da estrutura e, em última análise, no regime de sincronização (Rodrigues, 2017).

### 3 ESTUDO DE CASO

A seguir estão descritos o problema estudado, a abordagem utilizada, combinando as modelagens matemáticas do fluido e da estrutura, e as metodologias numéricas utilizadas para resolução do problema.

#### 3.1 Posição do Problema

Seja um escoamento de um fluido ao redor de uma estrutura imersa, um cilindro circular rígido, de massa  $m$ , diâmetro  $D$ , com razão de aspecto  $L/D \gg 1$  (comprimento muito maior que o diâmetro), elasticamente acoplado a um sistema mola-amortecedor que permite ao sistema dois graus de liberdade, nas direções longitudinal e transversal ao escoamento. Consideram-se isotrópicas as características de rigidez  $k$  e de amortecimento  $c$  para ambas as molas. Como hipóteses simplificativas, são tomadas as seguintes considerações: escoamento bidimensional incompressível, transiente, isotérmico, adiabático.

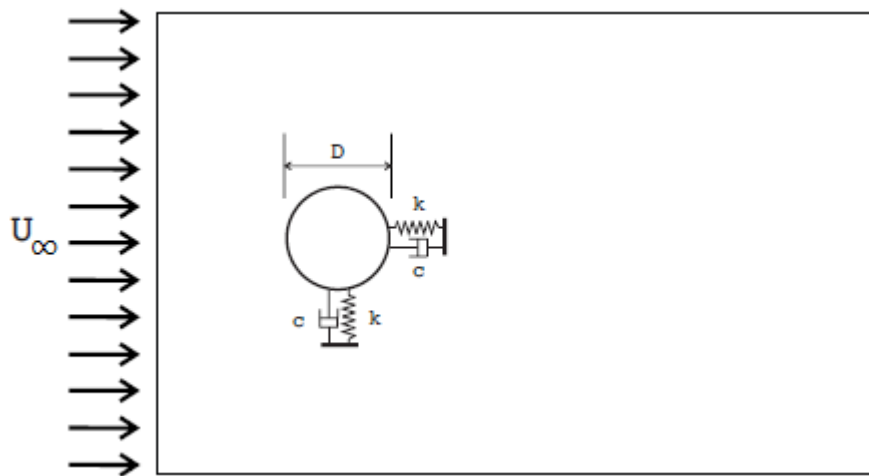


Figura 8 – Esquemática do problema proposto. Adaptado de Rodrigues (2017).

Adicionalmente, para os casos com rotação do cilindro, define-se o parâmetro adimensional denominado taxa de rotação,  $\alpha$ , em função da velocidade angular  $\omega$  [rad/s], do diâmetro do cilindro  $D$  [m], e da velocidade imposta do escoamento ao longe,  $U_\infty$  [m/s].

$$\alpha = \frac{\omega D}{2U_\infty} \quad (3.1)$$

## 3.2 Modelagem Matemática

Esta seção é dedicada à modelagem matemática utilizada na resolução do problema. Os modelos matemáticos encerram em si uma descrição do problema em linguagem matemática, mais precisamente, utilizando equações diferenciais.

De maneira a deixar o entendimento mais claro, a descrição foi dividida em duas subseções: uma tratando da modelagem do domínio fluido, a outra tratando da modelagem estrutural.

### 3.2.1 Modelagem do fluido

A modelagem do fluido aqui abordada compreende a utilização do Método da Fronteira Imersa (MFI), proposto por Peskin (1977), das equações de continuidade e de Navier-Stokes para resolver o escoamento e de um modelo que representa matematicamente a interface fluido-estrutura.

#### 3.2.1.1 Método da Fronteira Imersa (MFI)

O Método Fronteira Imersa (Immersed Boundary Method) lança mão de uma mistura das formulações Euleriana e Lagrangiana, onde o escoamento do fluido é representado sob um domínio euleriano ( $\Omega$ ), fixo, e a interface da estrutura (cilindro elasticamente ancorado) com o escoamento é representada pelo domínio lagrangiano ( $\Gamma$ ), móvel, independente do domínio euleriano. Vale notar que é no domínio euleriano que o escoamento é resolvido, por meio das equações de Navier-Stokes.

Os domínios são “conectados” por um campo de forças obtido nos pontos lagrangianos e em seguida distribuídas aos pontos eulerianos vizinhos à interface segundo uma função interpoladora (Nascimento, 2016). O campo de forças que atuam no escoamento devido a presença da estrutura é representado por um termo fonte nas equações de Navier-Stokes. É esse termo fonte que passa as informações de interface fluido-estrutura à malha euleriana, representando portanto uma das condições de contorno do escoamento.

A presença da estrutura é indiretamente modelada pela ação desta sobre o escoamento. Resumidamente, a presença da estrutura é “comunicada” ao escoamento por meio do campo de forças que surge na interface fluido-estrutura. A maneira em que se dá essa “comunicação” depende do acoplamento das formulações, o que será discutido na sequência.

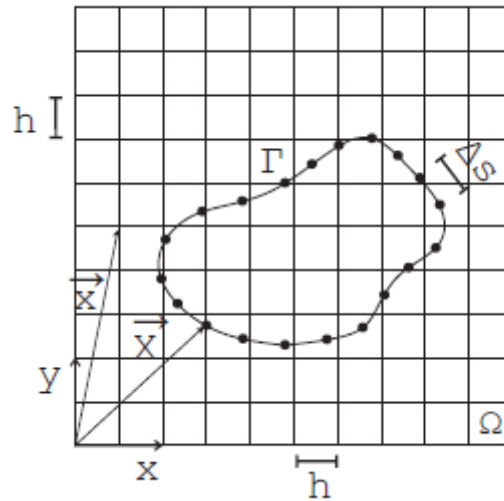


Figura 9 – Esquematização arbitrária dos domínios Euleriano ( $\Omega$ ) e Lagrangiano ( $\Gamma$ ). Os pontos eulerianos são referenciados pelo vetor genérico  $\vec{x}$  e os pontos lagrangianos, pelo vetor  $\vec{X}$ . Extraído de Rodrigues (2017).

A Figura 9 traz uma representação genérica dos domínios de cálculo. O domínio euleriano,  $\Omega$ , é fixo e seus pontos são representados, a partir do referencial XY solidário ao domínio, pelo vetor  $\vec{x}$ . Já o domínio lagrangiano,  $\Gamma$ , representado arbitrariamente, tem seus pontos representados, a partir do referencial XY, pelo vetor  $\vec{X}$ . O espaçamento entre pontos consecutivos na malha euleriana é dado por  $h$ , e na malha lagrangiana por  $\Delta s$ .

Doravante, sempre serão consideradas as variáveis do domínio euleriano por letras minúsculas, e as variáveis do domínio lagrangiano por letras maiúsculas.

### 3.2.1.2 Modelagem do escoamento: Formulação para o domínio euleriano

Conforme citado anteriormente, o escoamento é descrito pelas equações de conservação de massa (Eq 3.2) e de quantidade de movimento (Eq. 3.3), e resolvido no domínio euleriano  $\Omega$ . As hipóteses simplificativas são aquelas citadas durante a posição do problema (seção 3.1).

$$\frac{\partial(u_i)}{\partial x_j} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial(u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i \quad (3.3)$$



Considera-se  $\rho$  a massa específica do fluido,  $\nu$  a viscosidade cinemática,  $p$  o campo de pressão,  $u_i$  as componentes do vetor velocidade e  $f_i$  as componentes do campo de força que atua sobre o escoamento (termo-fonte).

### 3.2.1.3 Modelagem do acoplamento entre os domínios euleriano e lagrangiano

No MFI, o termo  $f_i$  que aparece na equação (3.2) representa os efeitos da interface imersa no domínio euleriano  $\Omega$  (Rodrigues, 2017). Em outras palavras, é por meio do campo de forças  $f_i$  que o escoamento “sente” o efeito do corpo imerso. Matematicamente, este efeito pode ser representado pela equação (3.4):

$$f_i = \int_{\Gamma} F_i \cdot \delta(x - X) dX \quad (3.4)$$

onde  $x$  representa a posição de uma partícula no domínio euleriano,  $X$  representa a posição de um ponto no domínio lagrangiano,  $\delta$  a função Delta de Dirac e  $F_i$  representa o campo de forças lagrangiano (força interfacial).

A função Delta de Dirac pode ser assim expressa:

$$\delta(x - X) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = X \\ 0 & \text{se } x \neq X \end{cases} \quad (3.5)$$

Tendo em vista que a função Delta de Dirac não pode ser discretizada, faz-se uso da função distribuição (Rosa, 2008),  $D_{ij}$ , como se segue

$$f_i(x) = \sum_{\Gamma} D_{ij}(x - X) \cdot F_i \cdot \Delta S^2(X) \quad (3.6)$$

A função de distribuição  $D_{ij}$  escolhida para o problema foi aquela proposta por Peskin and McQueen (1994):

$$D_{ij} = \frac{g[(X - x)/h] \cdot g[(Y - y)/h]}{h^2} \quad (3.7)$$

$$g = \begin{cases} g_1(\|r\|) & \text{se } \|r\| \leq 1 \\ 0.5 - g_1(2 - \|r\|) & \text{se } 1 < \|r\| < 2 \\ 0 & \text{se } \|r\| > 2 \end{cases} \quad (3.8)$$

onde  $g_1(r) = \frac{1}{8} \left( 3 - 2\|r\| + \sqrt{1 + 4\|r\| - 4\|r\|^2} \right)$ , sendo  $r$  o raio de influência da função distribuição, podendo ser calculado de duas formas  $(X - x)/h$  ou  $(Y - y)/h$ , dependendo da direção para qual a propriedade é distribuída.

Portanto, pode-se entender que o campo de forças  $f_i$  é nulo em todo o domínio euleriano, exceto naquela região próxima ao domínio lagrangiano, sobre a qual o campo  $F_i$  é distribuído segundo a função de distribuição  $D_{ij}$ , representando assim, virtualmente, a presença do corpo imerso.

#### 3.2.1.4 Modelagem da força lagrangiana

O modelo de cálculo da força lagrangiana utilizado é o de imposição direta de força (*Direct Forcing* – DF).

A formulação matemática para o domínio lagrangiano possibilita a determinação do campo de forças lagrangiano ou interfacial,  $F_i$ , tendo como princípio a interação entre o escoamento e a estrutura. Visto que o domínio lagrangiano se encontra imerso ao domínio euleriano, e que o escoamento é resolvido em todo o domínio euleriano, surge então a ideia de aplicar o balanço de quantidade de movimento às partículas de fluido localizadas na interface fluido-estrutura, isto é, nos pontos lagrangianos.

Sendo assim, encontramos a seguinte expressão para a força lagrangiana

$$F_i = \frac{\partial(U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(U_i U_j)}{\partial X_j} + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ v \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \right] \quad (3.9)$$

onde as variáveis escritas em letra maiúscula são referentes ao domínio lagrangiano.

Da equação (3.9), realizando-se uma discretização de primeira ordem no tempo, obtém-se a equação (3.10)

$$F_i = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t \quad (3.10)$$

onde  $\Delta t$  é o passo de tempo e RHS

$$RHS = \frac{\partial(U_i U_j)}{\partial X_j} + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ v \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \right] \quad (3.11)$$

Soma-se e subtrai-se um parâmetro  $U_i^*$  temporário ao termo discretizado no tempo na equação (3.10), resultando em

$$F_i = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^* + U_i^* - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t \quad (3.12)$$

Em seguida, decompõe-se no mesmo passo de tempo a equação (3.12) nas equações (3.13) e (3.14)

$$\frac{U_i^* - U_i^t}{\Delta t} + RHS_i^t = 0 \quad (3.13)$$

$$F_i = \frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^*}{\Delta t} \quad (3.14)$$

Escrevendo em termos dos pontos eulerianos,

$$\frac{u_i^* - u_i^t}{\Delta t} + rhs_i^t = 0 \quad (3.15)$$

Note-se que, se isolado na equação (3.15), o parâmetro temporário  $u_i^*$  nada mais é do que uma estimativa primeira do campo de velocidades no domínio euleriano, sem a influência do termo fonte  $f_i$  (Mariano, 2009). Então, a partir do momento em que se obtém este termo fonte, como mostrado na equação (3.6), é possível corrigir o campo  $u_i^*$ , obtendo-se daí  $u^{t+\Delta t}$ , como mostrado na equação (3.16) a seguir.

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^* + \Delta t (f_i) \quad (3.16)$$

Conhecendo  $u_i^*$ , é possível determinar  $U^*$ . Neste caso, utiliza-se uma função de interpolação (semelhante à ideia de uma função distribuidora, já discutida no tópico anterior) para os termos de velocidade na interface fluido-estrutura.

$$U_i^* = \sum_{\Omega} D_{ij}(x_i - X_j) \cdot u_j^* \cdot h^2 \quad (3.17)$$

onde  $D_{ij}$  recebe agora uma conotação de função de interpolação, mas ainda apresenta aquela mesma formulação dada pela equação (3.7).

Vale notar que o termo  $U_i^{t+\Delta t}$  da equação (3.14) indica a velocidade da fronteira imersa no instante de tempo  $t + \Delta t$ . Para problemas de interação fluido-estrutura,  $U_i^{t+\Delta t}$  pode ser obtida através da solução do modelo que rege a movimentação estrutural.

Borges (2011) lista a seguinte sequência de passos para resolução do problema utilizando a metodologia de fronteira imersa:

- I. Cálculo do parâmetro temporário  $u_i^*$ , pela equação (3.15);
- II. Interpolação dos pontos eulerianos para o ponto lagrangiano, pela equação (3.17);
- III. Cálculo da força lagrangiana, pela equação (3.14);
- IV. Distribuição da força lagrangiana para os pontos eulerianos, pela equação (3.6) e
- V. Cálculo do novo campo de velocidade, pela equação (3.16).

Ainda segundo Borges (2011), um processo iterativo adicional pode ser utilizado para refinar o resultado obtido no cálculo do novo campo de velocidade (última etapa da lista anterior). Este processo adicional, denominado *Multi-Direct Forcing*, leva em conta uma nova interpolação dos resultados obtidos da equação (3.16), utilizando como fórmula interpoladora aquela mesma da equação (3.17). Repete-se então a sequência de passos II – V até que um critério de parada seja atendido, dando cabo às iterações. Ressalta-se que este processo iterativo não avança no passo de tempo, apenas servindo para refinar um resultado já encontrado do campo de velocidade.

### 3.2.2 Modelagem Estrutural

No problema proposto, assume-se que a estrutura é constituída de um corpo rígido elasticamente montado, permitindo-lhe mobilidade nas direções alinhada e transversa ao escoamento, como mostrado na Figura 8.

O comportamento dinâmico desta estrutura pode ser modelado segundo as equações de um oscilador, tal como um sistema massa-mola-amortecedor, considerando que os esforços atuantes são provenientes da carga hidrodinâmica (Chern *et al.*, 2014). A aceleração, velocidade e posição da estrutura são calculadas tomando-se como referência o centro de massa do cilindro circular que, para o caso bidimensional considerado, coincide com o centro da circunferência que forma a sua seção transversal.

Tabela 3.1 – Grupos adimensionais utilizados na modelagem do problema

Medida	Simbologia	Parâmetro adimensional
Tempo	$t^*$	$\frac{tU_\infty}{D}$
Deslocamento	$X_i$	$\frac{d_i}{D}$
Razão mássica	$m^*$	$\frac{4m}{\pi D^2 \rho L}$
Velocidade Reduzida	$U_r$	$\frac{U_\infty}{f_n D}$
Frequência natural reduzida	$f_n^*$	$\frac{1}{U_r}$
Razão de amortecimento	$\zeta$	$\frac{c}{2\sqrt{km}}$

As equações adimensionalizadas que descrevem o movimento da estrutura podem ser resumidas na seguinte expressão cuja dedução pormenorizada pode ser encontrada em Nascimento (2016).

$$\ddot{X}_i + \left( \frac{4\pi\zeta}{U_r} \right) \dot{X}_i + \left( \frac{2\pi}{U_r} \right)^2 X_i = \frac{2C_i}{\pi m^*} \quad (3.18)$$

onde  $X_1 = X$  e  $X_2 = Y$  são os deslocamentos do cilindro nas direções horizontal (paralela ao escoamento) e vertical (transversal ao escoamento), respectivamente;  $\ddot{X}$  representa a componente da aceleração do cilindro na direção horizontal, enquanto que  $\ddot{Y}$ , a componente da aceleração na direção vertical;  $\dot{X}$  e  $\dot{Y}$  representam, respectivamente, as componentes da velocidade do cilindro nas direções horizontal e vertical;  $\zeta$  é a razão de amortecimento do sistema. Para o nosso problema, escolhemos utilizar  $\zeta=0$ , o que corresponde aos máximos

valores de amplitude que podem ser observados para a estrutura;  $C_1 = C_d$  (coeficiente de arrasto) e  $C_2 = C_l$  (coeficiente de sustentação).

Os grupos adimensionais relacionados com as equações (3.18) estão compilados na Tabela 3.1, como proposto por Chern *et al.* (2014).

### 3.3 Metodologias Numéricas

As metodologias numéricas são apresentadas na sequência. Foram utilizados os métodos de volumes finitos para tratar numericamente as equações que modelam o escoamento do fluido e o método de Runge-Kutta de quarta ordem para o tratamento das equações que modelam a dinâmica estrutural.

#### 3.3.1 Método dos Volumes Finitos

A modelagem numérica do escoamento se baseia no método dos volumes finitos (MVF) para ser utilizado na resolução do problema. Pela aplicação do MVF, divide-se o domínio em volumes de controle e encontram-se equações discretizadas, por meio da integração das equações de conservação momento e continuidade (equações (3.2) e (3.3), respectivamente) em cada volume de controle. Obviamente, o domínio discretizado durante a modelagem numérica do problema proposto é o domínio euleriano.

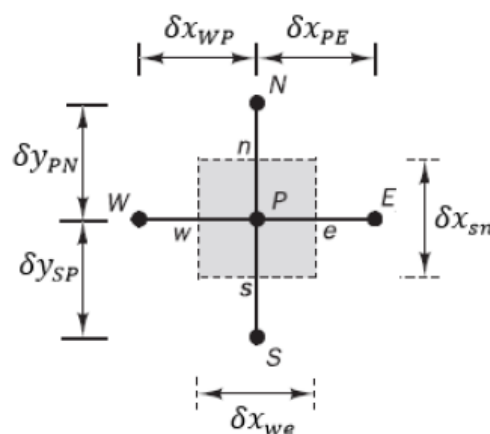


Figura 10 – Volume de controle elementar isolado, utilizado na discretização do domínio euleriano.

Cada volume de controle pode ser tratado genericamente como ilustrado na Figura 10. Considera-se o nó  $P$  como sendo o centro do volume analisado. Os nós  $W, E, S, N$ , são os centros dos volumes vizinhos ao volume analisado, nas direções oeste, leste, sul e norte, respectivamente. As letras minúsculas  $w, e, s, n$ , representam as fronteiras que delimitam o volume de controle analisado em relação aos vizinhos.

Considera-se, ainda,

- $\delta x_{WP}$  a distância entre os nós  $W$  e  $P$ ;
- $\delta x_{PE}$  a distância entre os nós  $P$  e  $E$ ;
- $\delta y_{SP}$  a distância entre os nós  $S$  e  $P$ ;
- $\delta y_{PN}$  a distância entre os nós  $P$  e  $N$ ;
- $\delta x_{we}$  a distância entre as fronteiras  $w$  e  $e$  do volume;
- $\delta x_{sn}$  a distância entre as fronteiras  $s$  e  $n$  do volume;

Para cada volume da malha, objetiva-se obter uma equação discreta do tipo

$$A_P\phi_P = A_N\phi_N + A_S\phi_S + A_E\phi_E + A_W\phi_W + B \quad (3.19)$$

a partir da integração das equações de conservação em cada volume de controle. A variável  $\phi$  representa a propriedade transportada em cada volume de controle. Já  $A_P, A_N, A_S, A_E, A_W$ , são os coeficientes relacionados aos pontos  $P, N, S, E$  e  $W$ , respectivamente;  $B$  representa o termo-fonte.

Resumidamente, a equação (3.19) pode ser posta sob a forma

$$A_P\phi_P = \sum A_{nb}\phi_{nb} + B \quad (3.20)$$

onde o índice “ $nb$ ” é utilizado para referenciar os volumes vizinhos ao volume analisado  $P$ .

Resolver as equações discretas, a partir de um esquema numérico iterativo, é resolver as equações que modelam o problema com uma determinada precisão. Isto significa que a solução numérica encontrada é apenas uma aproximação da solução analítica das equações que modelam o problema. A aproximação será tão boa quanto melhor, mais robusto e consistente for o esquema numérico.

### 3.3.3.1 Obtenção e resolução das equações discretas num volume de controle elementar

Primeiramente, realiza-se a integração das equações de conservação (3.2) e (3.3), no tempo e no espaço. Após a integração, são feitas as discretizações dos termos diferenciais que surgem. Esta discretização depende do modo em que se avaliam o tempo e as propriedades nos volumes de controle. Neste trabalho, opta-se pela discretização explícita do tempo e pela avaliação da pressão no centro dos volumes e pela avaliação das componentes da velocidade nas faces dos volumes, configuração conhecida na literatura como “malha deslocada”.

No método explícito de discretização temporal, o estado da variável no volume de interesse P, num instante  $t+\Delta t$ , é determinado em relação aos volumes vizinhos a P num instante anterior t.

A resolução das equações discretizadas se dá por meio da utilização do método do passo-fraicionado, que por sua vez é baseado no conceito de correção de pressão. Utilizam-se campos de velocidades e pressão iniciais, como primeira estimativa. A partir destes, determina-se um novo campo de velocidades estimado, que por sua vez é utilizado para calcular a correção do campo de pressão. Corrige-se em seguida o campo de velocidades, verificando também se é satisfeita a condição de continuidade (conservação de massa). Cumprindo todos estes passos, avança-se no tempo e repete-se o ciclo.

Os processos de obtenção e de resolução das equações discretas, bem como os esquemas utilizados para tanto, encontram-se no Apêndice A deste trabalho.

### 3.3.2 Método Runge-Kutta de Quarta Ordem

Para resolver as equações (3.18), utiliza-se o algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem, aplicado à equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, de acordo com as seguintes relações:

$$X_{i+1} = X_i + \dot{X}_i \tau + \frac{1}{6} (K_1 + K_2 + K_3) \tau^2 \quad (3.21)$$

$$\dot{X}_{i+1} = \dot{X}_i + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \tau \quad (3.22)$$



$$\left\{ \begin{array}{l}
 K_1 = \frac{2C}{\pi m^*} - \left( \frac{4\pi\zeta}{U_r} \right) \dot{X}_i - \left( \frac{4\pi^2}{U_r^2} \right) X_i \\
 K_2 = \frac{2C}{\pi m^*} - \left( \frac{4\pi\zeta}{U_r} \right) \left[ \dot{X}_i + \frac{\tau}{2} K_1 \right] - \left( \frac{4\pi^2}{U_r^2} \right) \left[ X_i + \frac{\tau}{2} \dot{X}_i \right] \\
 K_3 = \frac{2C}{\pi m^*} - \left( \frac{4\pi\zeta}{U_r} \right) \left[ \dot{X}_i + \frac{\tau}{2} K_2 \right] - \left( \frac{4\pi^2}{U_r^2} \right) \left[ X_i + \frac{\tau}{2} \dot{X}_i + \frac{\tau^2}{4} K_1 \right] \\
 K_4 = \frac{2C}{\pi m^*} - \left( \frac{4\pi\zeta}{U_r} \right) \left[ \dot{X}_i + \tau K_3 \right] - \left( \frac{4\pi^2}{U_r^2} \right) \left[ X_i + \tau \dot{X}_i + \frac{\tau^2}{2} K_2 \right]
 \end{array} \right. \quad (3.23)$$

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir, são apresentados e discutidos os resultados obtidos. Foi resolvido um problema que trata do fenômeno da vibração induzida por vórtices, seguindo aquele mesmo princípio introduzido no capítulo anterior. Foram tratados dois casos distintos: um primeiro caso, onde a estrutura não está submetida à rotação e um segundo caso, onde há rotação imposta à estrutura. A descrição detalhada dos parâmetros de cada caso será dada a seguir.

As condições de contorno são as seguintes:

- Na entrada do domínio, tomamos para velocidade:  $u=U_\infty$  e  $v=0$ ; e para pressão:  $p=0$ ;
- Na saída do domínio, tomamos para velocidade a condição de contorno advectiva:  $\partial u/\partial t + u\partial u/\partial x=0$ ; e para pressão, tomamos  $\partial p/\partial x=0$ ;
- Para as partes superior e inferior do domínio, tomamos para velocidade  $\partial u/\partial y=\partial v/\partial y=0$ ; e para pressão:  $p=0$ .

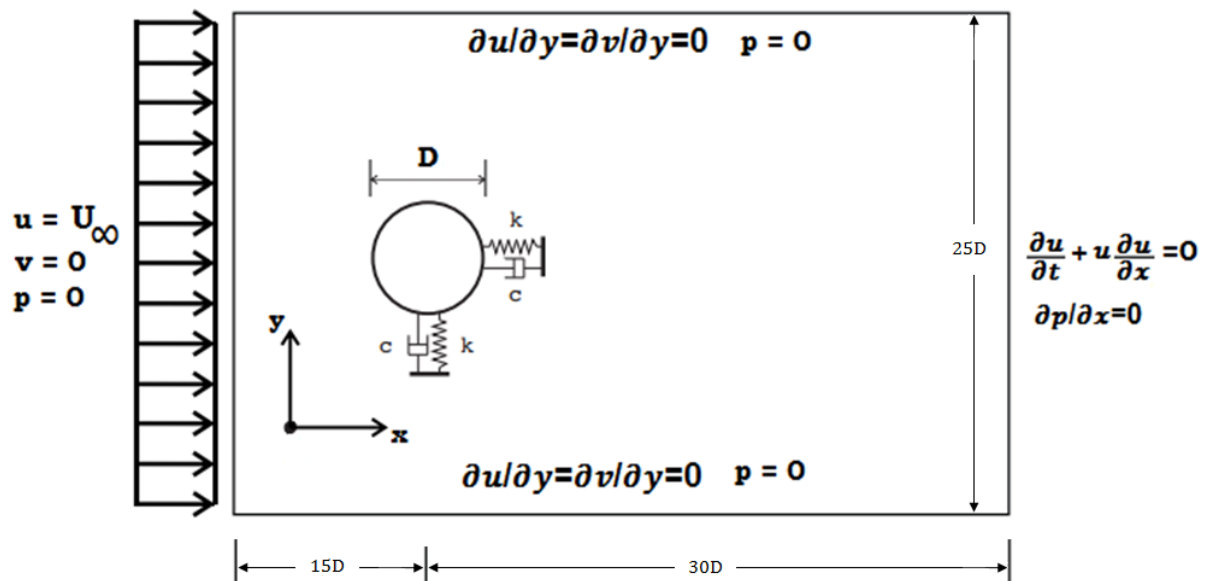


Figura 11 – Esquematização do domínio e condições de contorno aplicadas a ambos os casos. A única diferença se encontra mesmo na existência de rotação do cilindro para o segundo caso.

O domínio computacional é constituído de um retângulo cujas dimensões são dadas em função do diâmetro  $D$  do cilindro: a largura é de  $45 D$  e a altura é de  $25 D$ . A malha escolhida foi de  $n_x = 400$  e  $n_y = 222$ , onde  $n_x$  e  $n_y$  dizem respeito ao número de divisões do domínio nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

#### 4.1 Resultados obtidos para o caso I (sem rotação)

Os parâmetros adotados para este caso encontram-se na Tabela 4.1. Estes parâmetros são os mesmos daqueles encontrados em Singh & Mittal (2005) e Chern et al. (2014), cujos resultados serviram de comparação.

Tabela 4.1 – Parâmetros do problema – caso I

Parâmetro	Valor
Malha	$n_x = 400$ e $n_y = 222$
Passo no tempo	$\Delta t = 10^{-4}$
Número de Reynolds	$Re = 100$
Velocidade do escoamento ao longe	$U_\infty = 1,0$
Velocidade Reduzida	$Ur = 4,0$ a $8,5$
Razão mássica	$m^* = 10$
Taxa de rotação	$\alpha = 0$
Taxa de amortecimento	$\zeta = 0,0$

Por meio da Figura 12 a seguir, tem-se uma visualização qualitativa do escoamento, dadas as condições acima expostas, com os perfis de vorticidade para vários valores de velocidade reduzida. Pode-se notar que o padrão de desprendimento de vórtices predominante é o ‘2S’, já descrito neste trabalho, na seção 2.2.2 (vide Figura 7).

Entretanto, para  $Ur = 5,0$ , tem-se um tipo peculiar de padrão de desprendimento, denominado ‘C(2S)’ por Williamson e Roshko (1988). Nesta situação, os vórtices coalescem-se à jusante do corpo, gerando vibrações de grande amplitude da estrutura. Percebe-se que, ao menos qualitativamente, este padrão de vorticidade é concordante com os resultados obtidos por Singh e Mittal (2005) e Chern et al. (2014) (ver Apêndice B). Conforme ver-se-á a seguir, este padrão de desprendimento estará relacionado ao regime de sincronização da estrutura.

É possível perceber, ainda na Figura 12, um problema encontrado nas proximidades da superfície do cilindro. Notam-se desvios, pequenas distorções que teoricamente não deveriam ser encontradas ali. Estas distorções podem estar relacionadas, em certa medida, aos ruídos oriundos da simulação numérica e também ao modo como foi feita a modelagem da influência da malha lagrangiana (superfície da estrutura imersa) sobre a malha euleriana (escoamento). A função de distribuição utilizada para tanto acabou, por fim, afetando esta pequena região à montante da estrutura.

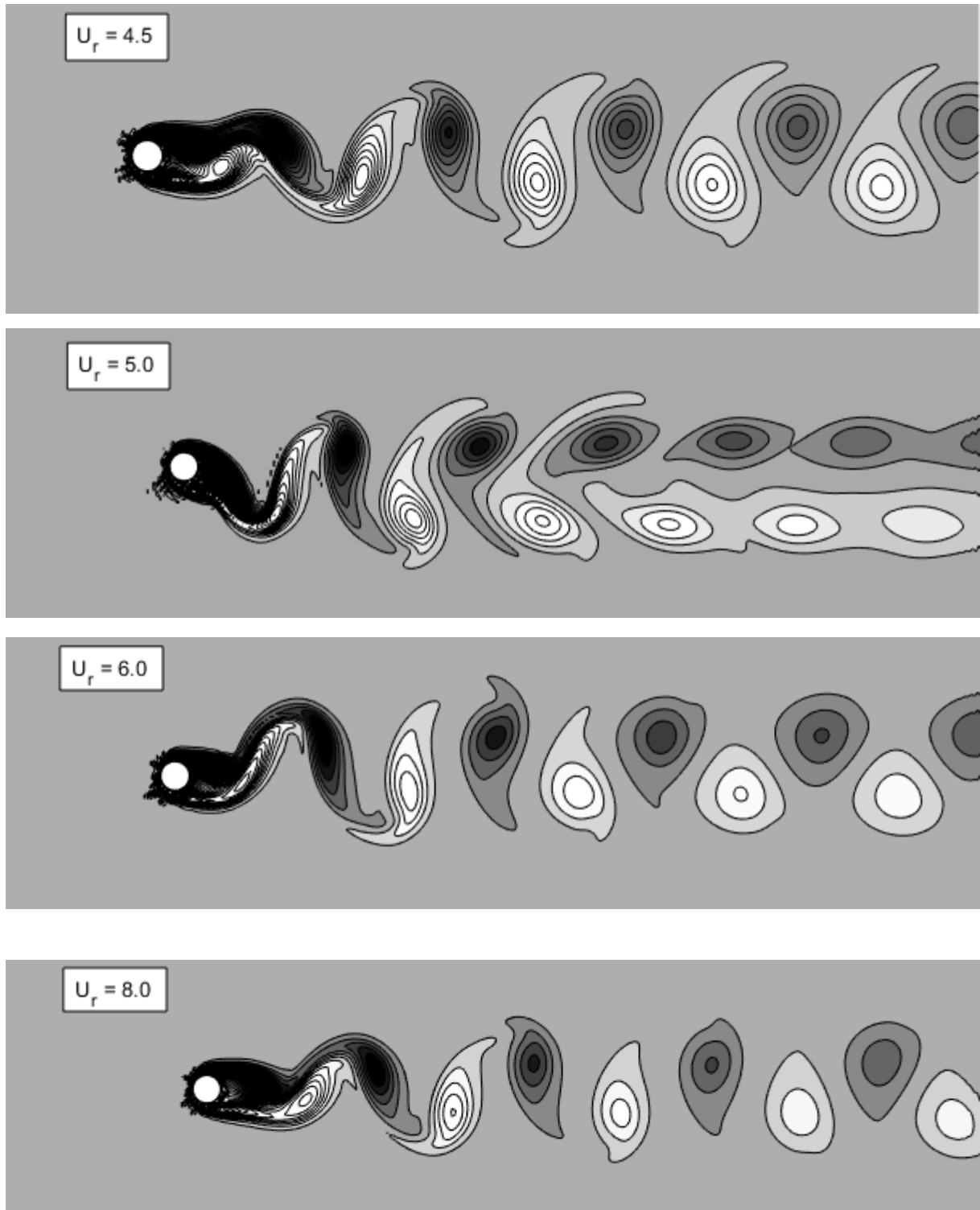


Figura 12 – Campos de vorticidade para  $Re = 100$ ,  $m^* = 10$  e diferentes valores de velocidade reduzida. Nota-se o predomínio do padrão '2S' e a ocorrência do padrão 'C(2S)' para  $U_r = 5,0$ .

A Figura 13 mostra a trajetória desenvolvida pela estrutura para os vários valores de velocidade reduzida simulados.

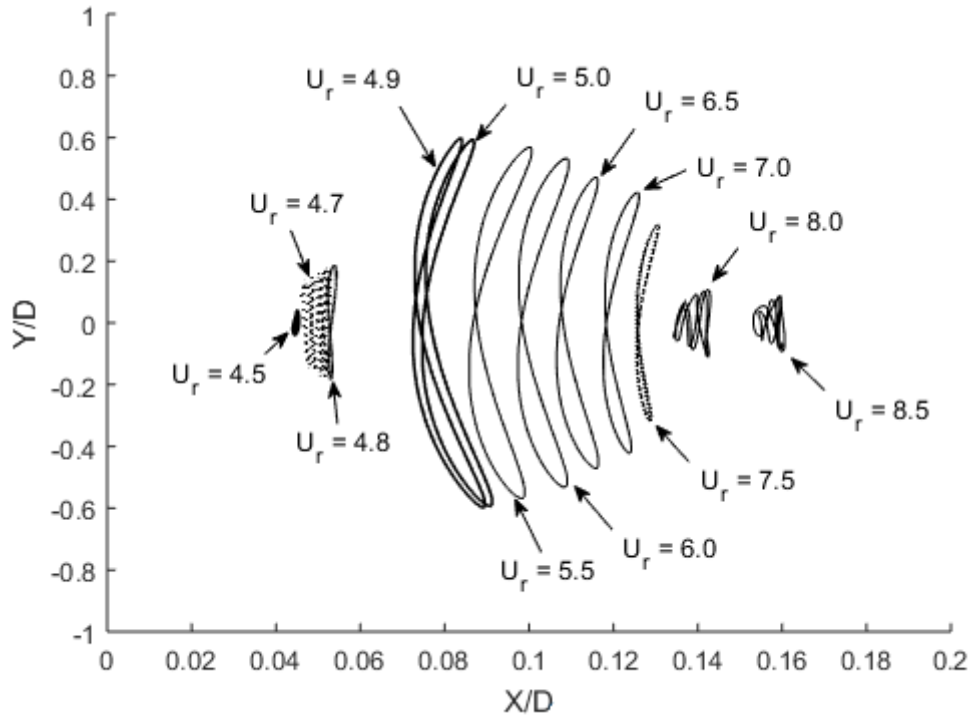


Figura 13 – Trajetórias desenvolvidas pela estrutura, quando em interação com o escoamento  $Re = 100$ , para diferentes valores de velocidade reduzida.

Como ilustra a Figura 13, pode-se notar a diferença na ordem de grandeza das amplitudes máximas nas direções X e Y. Como a amplitude máxima em Y é cerca de uma ordem de grandeza superior à amplitude máxima em X, é possível inferir que o desprendimento de vórtices afeta mais pronunciadamente o movimento da estrutura na direção transversal ao escoamento.

Com base nos resultados do presente trabalho, nota-se que para velocidades reduzidas na faixa entre  $U_r = 4,5$  e  $U_r = 4,7$ , a estrutura desloca-se doidamente, com amplitudes de deslocamento vertical crescente. Quando é atingido  $U_r = 4,8$ , entanto, a estrutura passa a deslocar-se mais ordenadamente, respeitando um formato bastante delgado, ainda sem aumento da amplitude de deslocamento vertical.

A partir daí, as trajetórias sofrem uma alteração drástica. Observa-se que para velocidades reduzidas próximas de  $U_r = 4,9$  e  $U_r = 5,0$ , a estrutura apresenta um aumento significativo das amplitudes de deslocamento, especialmente na direção vertical: constata-se que ela está dentro do regime de *lock-in* ou sincronização. Conforme explica Chern et al. (2014), este fenômeno ocorre sob condições tais que a frequência de desprendimento de vórtices é próxima da frequência natural da estrutura, o que tende a criar grandes deslocamentos da mesma. No regime *lock-in*/sincronização, a estrutura pode oscilar em órbitas nos formatos oval

ou de '8' com máximas amplitudes de deslocamento. A Figura 14 mostra quanto são grandes os deslocamentos da estrutura na direção vertical, quando comparados com a direção horizontal.

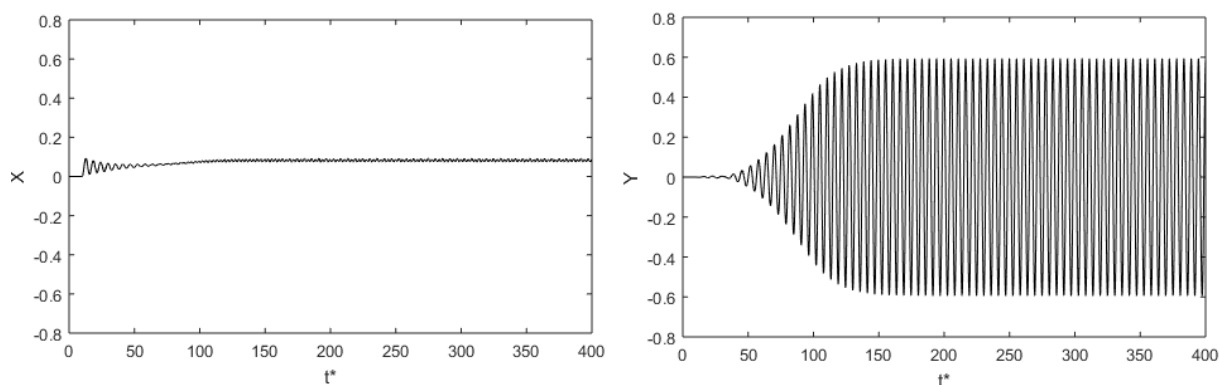


Figura 14 – Deslocamentos da estrutura nas direções horizontal (X) e vertical (Y) durante a sincronização. Encontram-se os seguintes valores de amplitude de deslocamento, em módulo,  $A_x = 0,5*(X_{max}-X_{min}) = 0,08$  e  $A_y = 0,5*(Y_{max}-Y_{min}) = 0,6$ .

Percebe-se que este regime se estende para valores de velocidade reduzida até  $Ur = 7,5$ . Ultrapassado este valor, a estrutura volta a oscilar doidamente, com amplitudes bem menores do que aquelas encontradas durante a sincronização.

A Figura 15 mostra o perfil de amplitudes de deslocamento da estrutura na direção vertical (Y), em função da velocidade reduzida. Evidentemente, as amplitudes de deslocamento acompanham aquilo que foi discutido há pouco: máximos deslocamentos por volta de  $Ur = 5,0$ ; menores deslocamentos para outras faixas de velocidade reduzida.

O perfil em geral acompanha aquele que se encontra na literatura. Percebe-se uma melhoria em relação ao resultado obtido por Rodrigues (2017), utilizando o método dos volumes finitos. A rotina implementada para obtenção dos resultados do presente trabalho baseou-se na mesma implementada por Rodrigues (2017), mostrando o avanço que tem sido feito no sentido de evoluir o esquema computacional desenvolvido.

Nota-se, além disso, que os resultados do presente trabalho são, em certa medida, concordantes com aqueles encontrados em Singh e Mittal (2005), com exceção da faixa de velocidade reduzida acima de  $Ur = 7,5$ . Segundo os autores, nesta faixa ocorre um máximo local de amplitude em Y devido ao aumento concomitante da amplitude de deslocamentos em X. Entretanto, embora tenha sido encontrado no presente trabalho o aumento da amplitude em X nesta faixa de velocidade reduzida, assim como em Chern et al. (2014), não foi percebido o aumento da amplitude em Y.

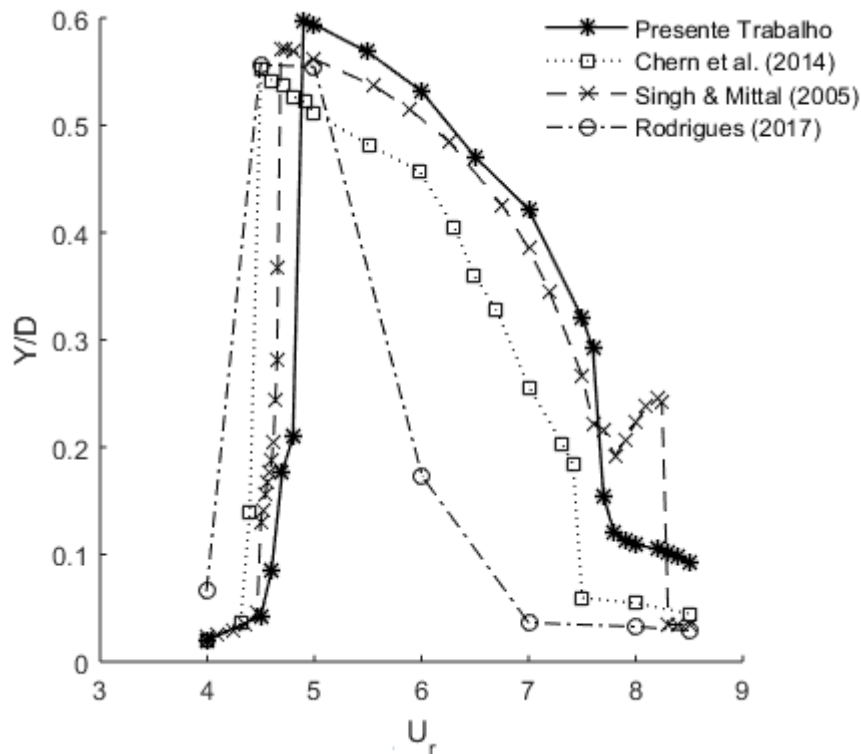


Figura 15 – Comparativo dos resultados de amplitude de deslocamentos na direção vertical (Y), em função da velocidade reduzida  $U_r$ .

Ainda em relação à Figura 15 pode-se constatar que a região de sincronização pode ser determinada segundo uma faixa de velocidades reduzidas. No presente trabalho, a faixa encontrada foi  $4,8 \leq U_r \leq 7,5$ , bastante próxima daquela encontrada em Chern et al. (2014) e Singh e Mittal (2005). Isto significa que, para este intervalo de valores, a frequência de despreendimento de vórtices é próxima da frequência natural da estrutura.

A partir destes resultados, evidencia-se a importância do parâmetro adimensional velocidade reduzida  $U_r$ , que domina o processo de vibração induzida por vórtices quando se faz fixo o número de Reynolds.

#### 4.2 Resolução obtidos para o caso II (com rotação)

Os parâmetros adotados para este segundo caso encontram-se na Tabela 4.2. Estes parâmetros são os mesmos daqueles encontrados em Zhao et al. (2014), cujos resultados serviram de comparação.

Tabela 4.2 – Parâmetros do problema – caso II

Parâmetro	Valor
Malha	$n_x = 400$ e $n_y = 222$
Passo no tempo	$\Delta t = 10^{-4}$
Número de Reynolds	$Re = 150$
Velocidade do escoamento ao longe	$U_\infty = 1,0$
Velocidade Reduzida	$U_r = 1$ a $10$
Razão mássica	$m^* = 2,0$
Taxa de rotação	$\alpha = 0,0 ; 0,5; 1,0;$
Taxa de amortecimento	$\zeta = 0,0$

Quando à estrutura é imposta uma rotação, a esteira formada passa a apresentar assimetria, que por sua vez varia conforme se varia o sentido de rotação. Foi considerado o sentido anti-horário como o sentido de rotação imposta à estrutura.

A Figura 16 mostra o perfil de amplitudes de deslocamento da estrutura em ambas as direções, vertical (Y) e horizontal (X), em função da velocidade reduzida. O perfil geral, qualitativo das amplitudes acompanha aquele que se encontra em Rodrigues (2017) e consegue-se perceber que ocorre maiores amplitudes, isto é, sincronização, para certas faixas de velocidade reduzida.

É interessante notar a influência da rotação nos deslocamentos da estrutura. Nos resultados sem rotação, verifica-se que os deslocamentos são mais pronunciados na direção vertical que na horizontal. Quando se impõe rotação, todavia, ficam equiparadas as amplitudes de deslocamento em ambas as direções.

Entretanto, no aspecto quantitativo, enxerga-se que os valores obtidos não estão coerentes com os encontrados em Zhao (2014), conforme mostra a Figura 17. Na realidade, para a taxa de rotação  $\alpha = 1$  e especialmente para  $U_r \geq 6,0$ , encontram-se valores muito discrepantes e de certa forma incoerentes: não se espera encontrar amplitudes com magnitude maior que duas vezes o diâmetro do cilindro e, no entanto, foram encontradas, no presente trabalho, magnitudes de até cinco vezes o diâmetro. Estes resultados podem ser devidos a ruídos que se acumulam durante a simulação numérica, bem como a incapacidade de o esquema numérico de Runge-Kutta de representar adequadamente a solução da equação diferencial que modela a dinâmica da estrutura: instabilidades podem fazê-lo convergir para respostas inadequadas, distantes da solução real.



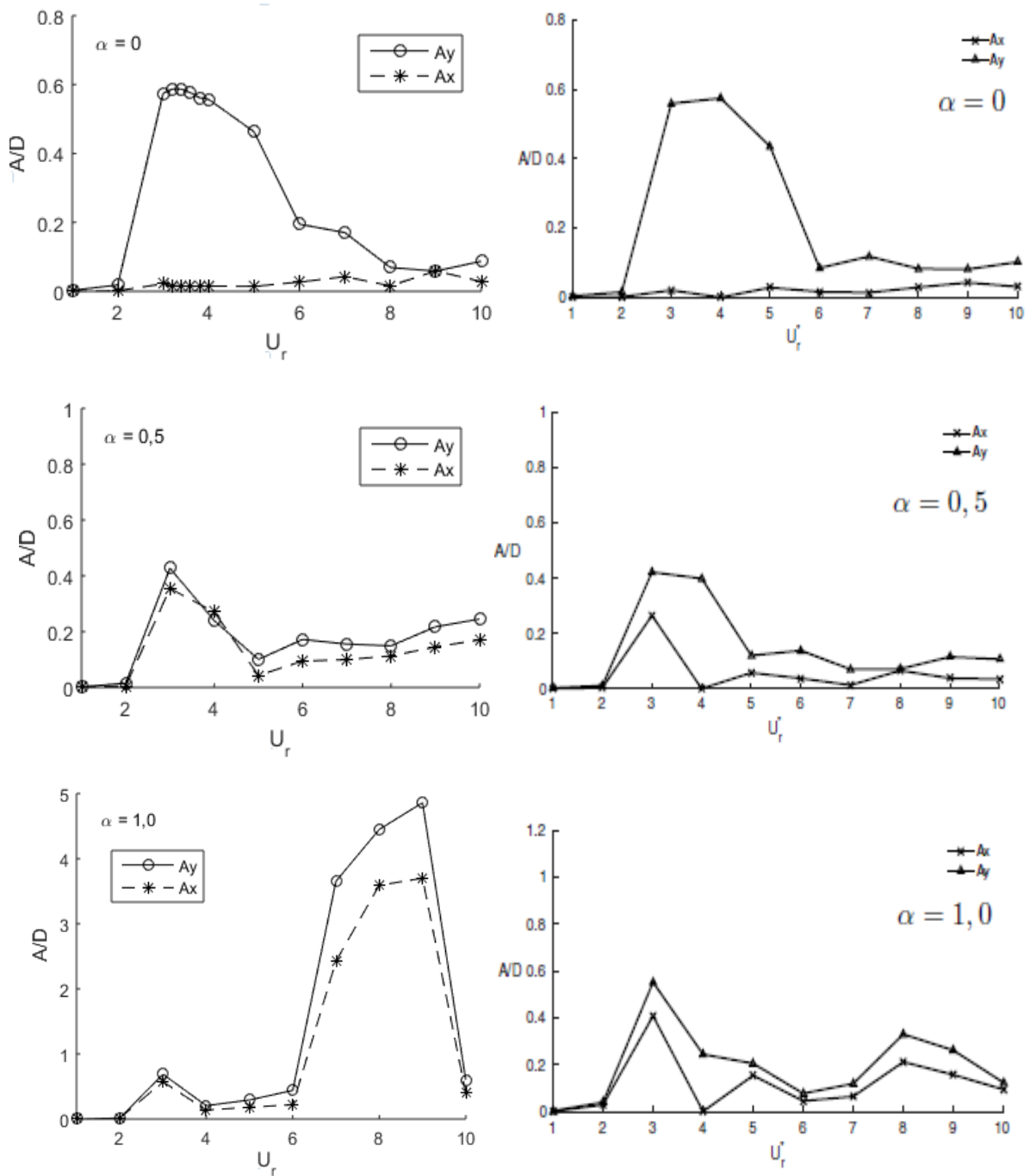


Figura 16 – Amplitudes de deslocamento encontrados em função da variação da velocidade reduzida  $U_r$  e da taxa de rotação  $\alpha$ . Os gráficos mostrados à esquerda representam os resultados do presente trabalho e os gráficos à direita, do trabalho de Rodrigues (2017).

É mister ressaltar que o artigo de Zhao (2014) é a única referência disponível, com resultados numéricos ou experimentais, envolvendo características semelhantes a estas propostas nesta seção. Não é feito no trabalho deste autor nenhuma referência ou comparação com outros trabalhos para validação dos resultados.

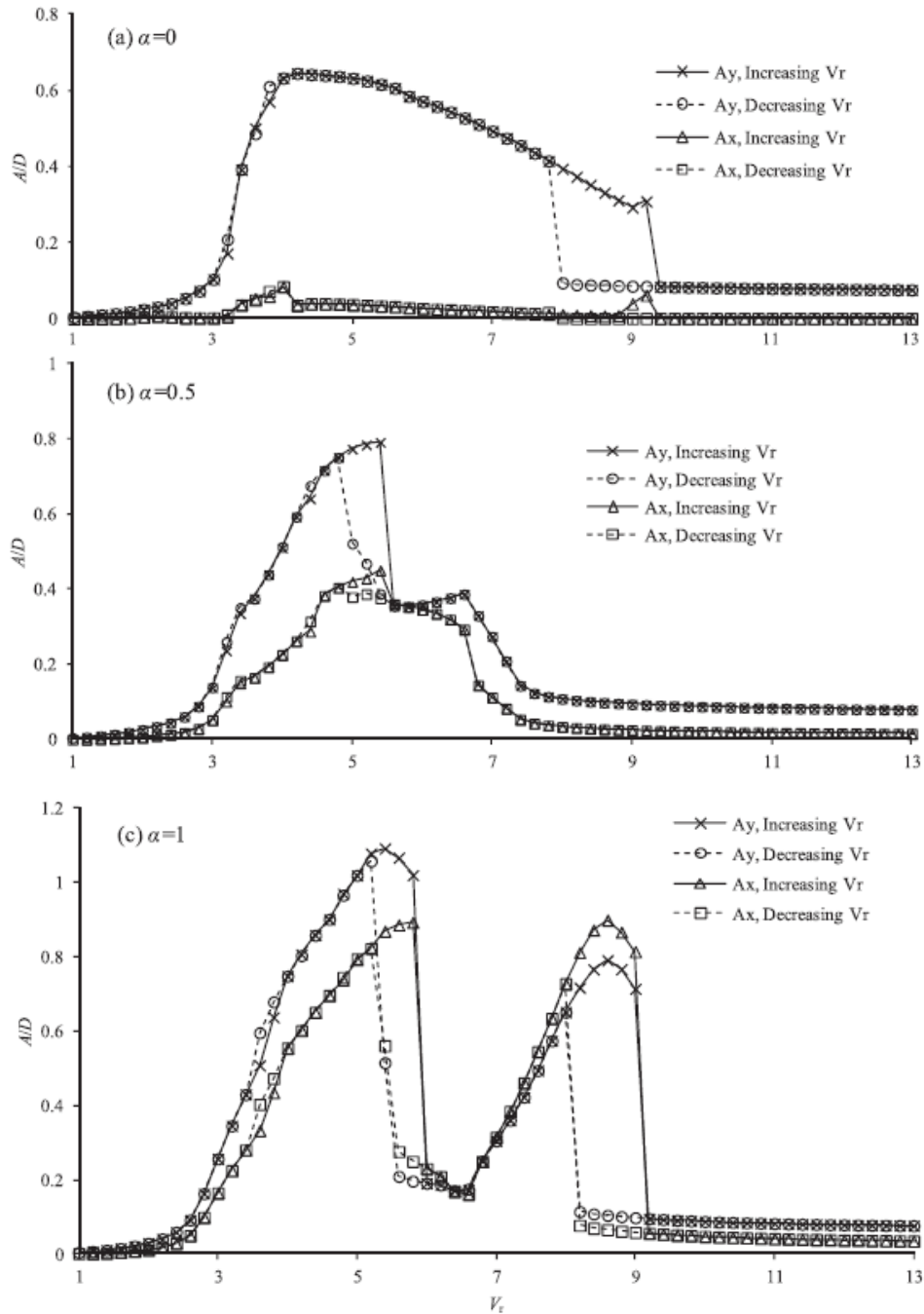


Figura 17 – Amplitudes de deslocamento encontrados por Zhao (2014), em função da variação da velocidade reduzida  $U_r$  e da taxa de rotação  $\alpha$ .

A Figura 18 ilustra os campos de vorticidade instantâneos gerados com velocidades reduzidas  $U_r = 2,0, 3,0, 4,0$  e  $8,0$ , para as taxas de rotação  $\alpha = 0, 0,5$  e  $1,0$ .

É possível identificar facilmente os diferentes padrões de desprendimento gerados para os diferentes casos simulados. Em todos os casos, é possível fazer um paralelo entre o padrão de desprendimento e o tipo de regime ou magnitude de deslocamentos que sofre a estrutura.

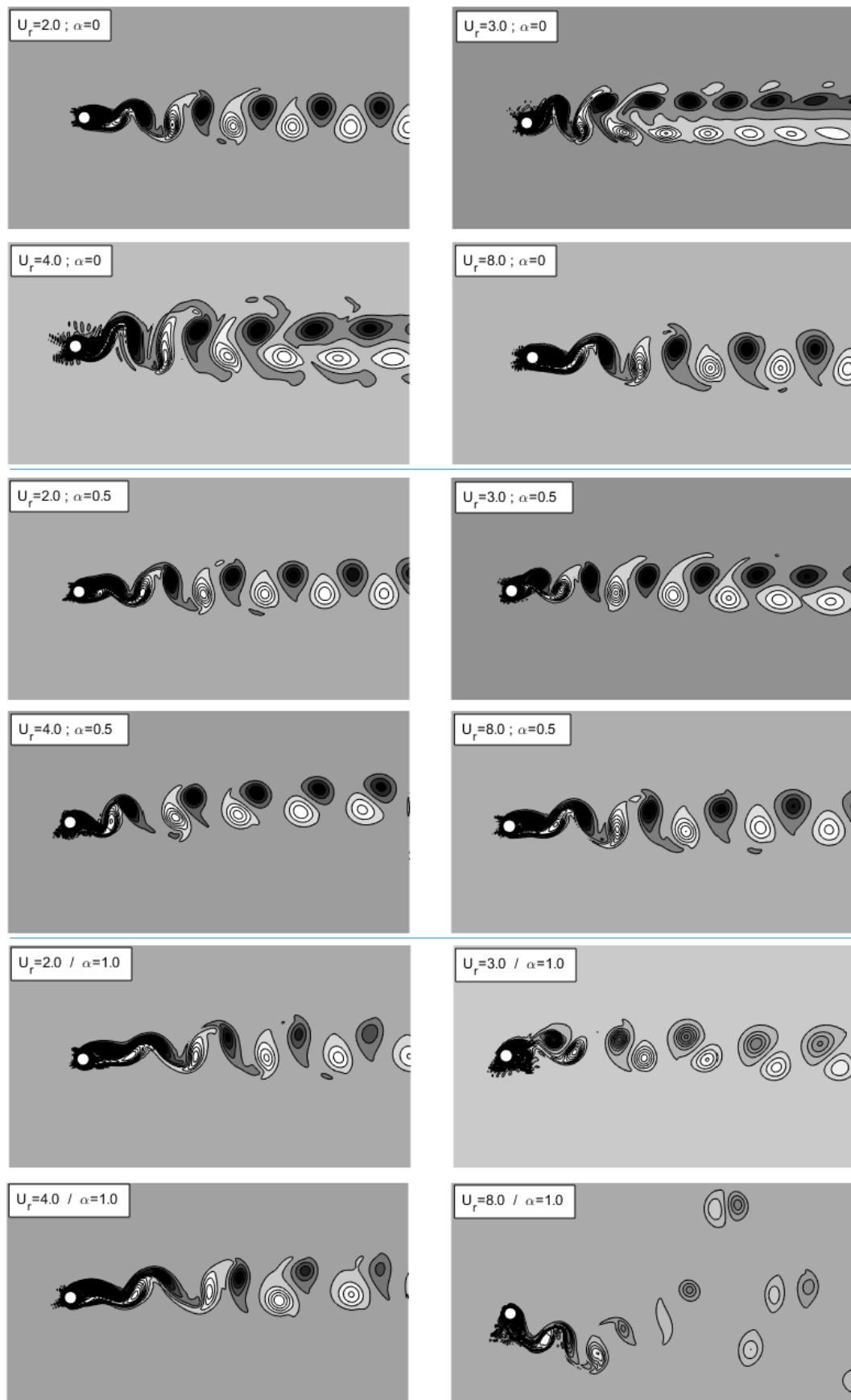


Figura 18 – Campos de vorticidade para  $Re = 150$ ,  $m^* = 2$  e diferentes valores de velocidade reduzida e taxa de rotação. Notam-se os diferentes padrões de desprendimento.

Quando a taxa de rotação é nula, percebe-se o padrão ‘2S’ para  $Ur = 2,0$  e  $8,0$ , associados a pequenas amplitudes de deslocamento de acordo com os resultados obtidos neste trabalho. Já para  $Ur = 3,0$  e  $4,0$ , faixa onde é identificado o regime de *lock-in*, nota-se o padrão de desprendimento ‘C(2S)’. Pode-se inferir que este padrão de desprendimento é um indicativo de grandes amplitudes para os casos sem rotação.

Para a situação onde é imposta ao cilindro uma taxa de rotação  $\alpha = 0,5$ , por sua vez, é possível identificar dois padrões de desprendimento diferentes: para  $Ur = 2,0$  e  $8,0$ , novamente, o padrão encontrado é o ‘2S’; para  $Ur = 3,0$ , pode-se enxergar também o padrão ‘2S’, porém com uma transição ao ‘C(2S)’, especialmente mais adiante na esteira; já para  $Ur = 4,0$ , encontra-se, pela primeira vez neste trabalho, o padrão ‘P’, isto é, um par de vórtices contrarrotativos desprendidos a cada período de oscilação da estrutura.

Finalmente, quando a taxa de rotação imposta é de  $\alpha = 1,0$ , enxerga-se a ocorrência de três padrões distintos: para  $Ur = 2,0$ , o padrão de desprendimento que ocorre é o ‘2S’; entretanto, para  $Ur = 3,0$  e  $4,0$ , pode ser encontrado o padrão ‘P’, assim como foi encontrado quando se fez  $\alpha = 0,5$ ; para  $Ur = 8,0$ , percebe-se algo totalmente novo até aqui: o desprendimento de vórtices no padrão ‘P+S’.

Verifica-se, portanto, que nos casos em que há rotação o padrão ‘2S’ de desprendimento de vórtices ocorre fora da faixa de sincronização, onde os deslocamentos são pequenos. Este padrão acaba dando lugar ou ao tipo ‘C(2S)’, ou ao ‘P’, ou ainda ao tipo ‘P+S’, assim como discutido em Zhao (2014). Estes últimos, estão relacionados com maiores amplitudes de deslocamento. Devido à rotação e ao aumento dos deslocamentos na direção horizontal, temos a presença de desprendimentos do tipo P ou P+S.

A Figura 19, por fim, as trajetórias desenvolvidas pela estrutura. Percebe-se que assim como em Zhao (2014), quando  $\alpha = 0$ , ainda é guardada certa simetria na esteira, ocasionando a ocorrência de trajetórias em formas ovais e de ‘8’ na região de sincronização, conforme já discutido anteriormente. Entretanto, a partir de  $Ur = 6,0$ , os perfis de trajetórias obtidos neste trabalho divergem daqueles encontrados por Zhao (2014) (Figura 20). Analogamente, para as outras situações, com rotação imposta, os resultados obtidos também não concordam com o autor citado. Este pode ser mais um indicativo de que o modelo estrutural possa apresentar instabilidades que podem fazê-lo convergir para respostas inadequadas.

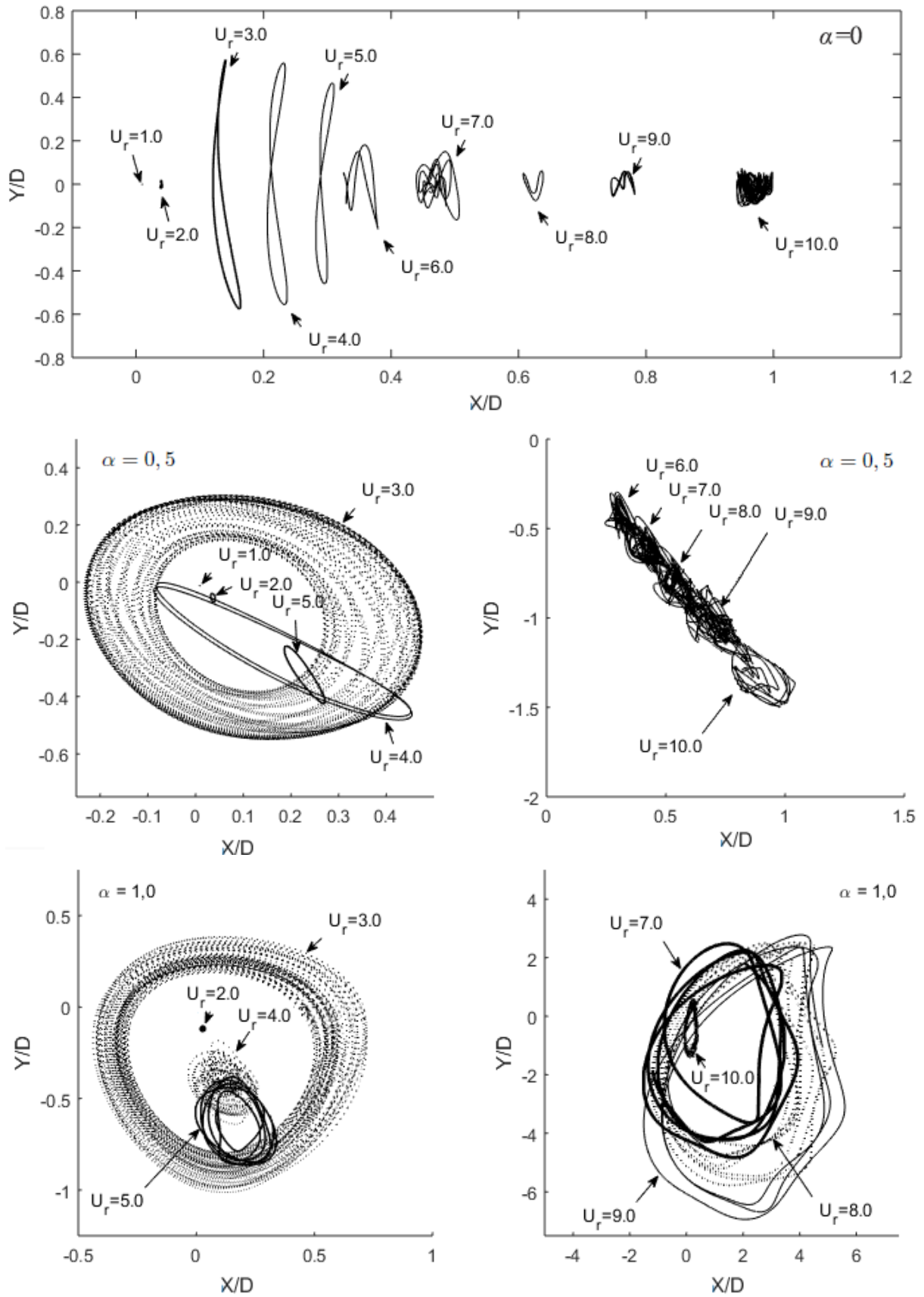


Figura 19 – Trajetórias desenvolvidas pela estrutura, quando em interação com o escoamento, para diferentes valores de velocidade reduzida e taxa de rotação.

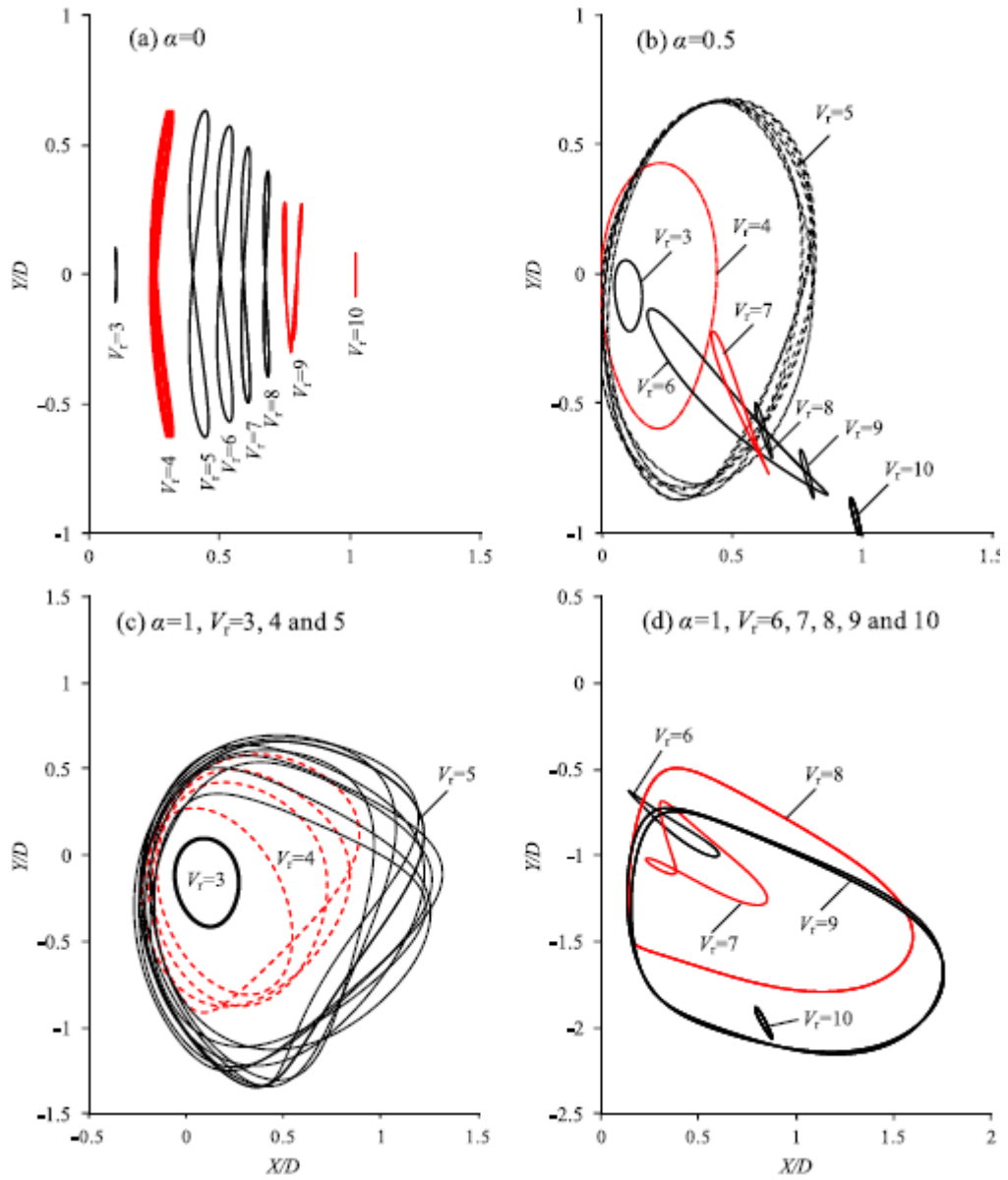


Figura 20 – Resultados obtidos por Zhao (2014) para os perfis de trajetórias desenvolvidas pela estrutura, quando em interação com o escoamento, para diferentes valores de velocidade reduzida e taxa de rotação.

## 5 CONCLUSÃO

O presente trabalho é fruto de uma contínua busca pelo aprimoramento de modelos e rotinas numéricas para solução de problemas de interação fluido estrutura, que tem sido desenvolvido há tempos no Laboratório de Mecânica dos Fluidos MFLab.

Mais especificamente, buscou-se dar continuidade ao trabalho desenvolvido por Rodrigues (2017), na tentativa de trazer melhorias em relação à implementação computacional de um problema de vibração induzida por vórtices de um cilindro oscilante. Foram feitas algumas alterações neste sentido, revisando alguns modelos que foram utilizados, com vistas na redução de ruídos e erros numéricos. A partir da nova implementação, com novos modelos, procurou-se examinar os resultados para constatar tais melhorias.

Foi possível observar para as diversas condições de simulação e para ambas metodologias abordadas, as diversas características que foram levantadas na literatura envolvendo a interação entre o escoamento e a estrutura, além de demonstrar qualitativa e quantitativamente a influência de certos parâmetros adimensionais, sobretudo o parâmetro velocidade reduzida, nos comportamentos da estrutura e do escoamento.

Na perspectiva de evolução e melhoramento do que foi até aqui tratado, podem ser citadas as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- buscar por novos modelos mais aperfeiçoados para o acoplamento entre os domínios fluido e estrutural;
- investigar possíveis causas de ruídos e erros numéricos, além daquilo que fora identificado e corrigido;
- extensão da rotina implementada para casos tridimensionais, com estrutura flexível;
- aperfeiçoamento da rotina implementada para os casos envolvendo rotação;
- analisar outros métodos de discretização, mais apurados e/ou que sejam menos computacionalmente onerosos;
- extensão do estudo de vibração induzida por vórtices para outras configurações;

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRETT, R. et. al. **Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods**. Philadelphia: SIAM, 1994.

BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, E.N., **Fenômenos de Transporte**. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004

BORGES, J. E. **Modelagem matemática e simulação de escoamentos em canais anulares com interação fluido-estrutura**. Dissertação de Mestrado, Univerisade Federal de Uberlândia, 2011.

CHERN, M. J.; KUAN, Y. H.; NUGROHO. G.; LU, G. T.; HORNG, T. L, **Direct-forcing immersed boundary modeling of vortex-induced vibration of a circular cylinder**. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, vol. 134, 2014.

FORTUNA, A. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.

GRANDMONT, C. **Mathematical and numerical analysis of some fluid structure interaction problems – Lecture 1**. CIRM. 2015. Audiovisual resource. doi: 10.24350/CIR.V.18801003.

LIMA e SILVA, A. L. F. **Desenvolvimento e Implementação de uma Nova Metodologia para Modelagem de Escoamentos sobre Geometrias Complexas: Método da Fronteira Imersa como Modelo Físico Virtual**. 142 p. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia – MG, 2002.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2.ed. rev. e ampliada. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

MARIANO, F. P. **Acoplamento entre os métodos pseudo-espectral de Fourier e da fronteira imersa**. Relatório de qualificação de doutorado do Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, 2009.

MUNSON, B. R. **Fundamentos da mecânica dos fluidos**. São Paulo: Edgar Blücher, 2004.



NASCIMENTO, A. A., **Métodos pseudoespectral de Fourier e fronteira imersa aplicados escoamentos presentes em engenharia de perfuração**. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Engenharia Mecânica, 2016.

PAÏDOUSSIS, M.P., **Real-life experiences with flow-induced vibration**. Journal of Fluids and Structures, vol. 22, 2006, pp. 741-755.

PATANKAR, S. V. **Numerical heat transfer and fluid flow**. (Series in computational methods in mechanics and thermal sciences). New York: Hemisphere, 1980.

PESKIN, C., **Numerical analysis of blood flow in the heart**. Journal of computational Physics, vol. 25, 1977, pp. 220-252.

PESKIN, C. S. and McQUEEN, M. C. **A general method for the computer simulation of biological systems interacting with fluids**. Proceedings of the SEB Symposium on Biological Fluid Dynamics, 1994.

RODRIGUES, T. A. **Modelagem e simulação de escoamentos sobre um cilindro com vibração induzida por vórtices**. Monografia – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Graduação em Engenharia Mecânica, 2017.

ROSA, A.; SILVEIRA-NETO, A.; LIMA, A. M. G. D.; RADE, D. A, **Numerical simulations of flows over a rotating circular cylinder using the immersed boundary method**, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, vol. 33, 2011.

ROSA, A. **Modelagem matemática de interação fluido-estrutura utilizando o método da fronteira imersa**. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Engenharia Mecânica, 2008.

SCHILDT, H.; LOPES, A. O. **Linguagem C: Guia do usuário**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

SCHLICHTING, H. and GERSTEN, K., **Boundary-Layer Theory**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2017, 805 pp.

SILVA, Vinicius Girardi. **Estudo numérico da vibração induzida por vórtices em um corpo cilíndrico**. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica de Energia de Fluidos) -

Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013. doi:10.11606/D.3.2013.tde-26062014-112828. Acesso em: 2018-12-17.

SINGH, S. P; MITTAL, S., **Vortex-induced oscillations at low Reynolds numbers: Hysteresis and vortex-shedding modes**. Journal of Fluids and Structures, vol. 20, 2005, pp. 1085-1104.

VAN DYKE, M. D., **An album of fluid motion**. Stanford, CA. Parabolic Press, 1982.

WHITE, F. M. **Mecânica dos Fluidos [recurso eletrônico]**. 6.ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.

WILLIAMSON, C. H. K.; ROSHKO, A., **Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder**. Journal of Fluid and Structures, vol. 2, 1988, pp. 355-381.

ZDRAVKOVICH, M. M., **Flow around circular cylinders, Volume 1: Fundamentals**. Oxford: Oxford University Press, 1997.

ZHAO, M.; LIANG, C.; LU, L., **Vortex induces vibrations of rotating circular cylinder at low Reynolds number**. Physics of Fluids, vol. 26, 2014.

## APÊNDICE A – OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES PELO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

Este apêndice tratará da obtenção das equações discretas a partir da aplicação do método dos volumes finitos.

### A.1 Integração no volume de controle e discretização

Nesta etapa, deve ser feita a integração das equações de conservação. De maneira a resumir o procedimento, será feita a seguir a integração apenas da equação de Navier-Stokes (conservação da quantidade de movimento), na direção x.

Integrando-se a equação (3.3) no tempo e num volume de controle elementar, como o da Figura 10, temos

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(u)}{\partial t} dx dy dt &= - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(uu)}{\partial x} dx dy dt \\
 &\quad - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(uv)}{\partial y} dx dy dt \\
 &\quad - \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial(u)}{\partial x} \right) dx dy dt \\
 &\quad + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial(u)}{\partial y} \right) dx dy dt
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Simplificando (A.1), após integração, encontra-se

$$\begin{aligned}
 (u^{k+1} - u^k) \Delta x \Delta y &= - [(uu)|_e^\theta - (uu)|_w^\theta] \Delta y \Delta t - [(uv)|_n^\theta - (uv)|_s^\theta] \Delta x \Delta t \\
 &\quad - [p_e - p_w] \Delta y \Delta t + v \left[ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_e^\theta - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_w^\theta \right] \Delta y \Delta t \\
 &\quad + v \left[ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_n^\theta - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_s^\theta \right] \Delta x \Delta t
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Deve-se levar em conta agora as seguintes considerações:

- Discretização temporal pelo método explícito:  $\theta = 0$ ;
- Discretização espacial utilizando malha deslocada;

- Passo de tempo k+1 se refere ao instante t+Δt e k ao instante t;
- Interpolação linear dos termos (uu) e (uv);

Dividindo-se a equação (A.2) por ΔxΔyΔt e, levando em consideração o exposto acima, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{(u^{k+1} - u^k)}{\Delta t} = & -\frac{1}{\Delta x} [(uu)_e - (uu)_w]^k - \frac{1}{\Delta y} [(uv)_n - (uv)_s]^k - \left[ \frac{p_e - p_w}{\Delta x} \right]^k \\ & + v \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_e^k - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_w^k \right] + v \frac{1}{\Delta y} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_n^k - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_s^k \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Mas,

$(uu)_e \sim \left( \frac{u_{i+1,j} + u_{ij}}{2} \right) \left( \frac{u_{i+1,j} + u_{ij}}{2} \right) \quad (\text{I})$		$(uu)_w \sim \left( \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} \right) \left( \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} \right) \quad (\text{II})$
$(uv)_n \sim \left( \frac{u_{i,j+1} + u_{ij}}{2} \right) \left( \frac{v_{i,j+1} + v_{i-1,j+1}}{2} \right) \quad (\text{III})$		$(uv)_s \sim \left( \frac{u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2} \right) \left( \frac{v_{i,j} + v_{i-1,j}}{2} \right) \quad (\text{IV})$
$\left[ \frac{p_e - p_w}{\Delta x} \right] \sim \left[ \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x_i} \right] \quad (\text{V})$		$\frac{\partial u}{\partial x} \Big _e = \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta x_i} \quad (\text{VI})$
$\frac{\partial u}{\partial x} \Big _w = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x_i} \quad (\text{VII})$		$\frac{\partial u}{\partial y} \Big _n = \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta y_i} \quad (\text{VIII})$
$\frac{\partial u}{\partial y} \Big _s = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y_i} \quad (\text{IX})$		

Substituindo (I)-(IX) em (A.3), tem-se

$$\frac{(u^{k+1} - u^k)}{\Delta t} = -ADV_{xx} - ADV_{xy} - DP_x + vDIF_{ux} + vDIF_{uy} \quad (\text{A.4})$$

onde

$$ADV_{xx} = \frac{1}{\Delta x} \left[ \left( \frac{u_{i+1,j} + u_{ij}}{2} \right) \left( \frac{u_{i+1,j} + u_{ij}}{2} \right) - \left( \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} \right) \left( \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} \right) \right]^k \quad (\text{A.5})$$

$$ADV_{xy} = \frac{1}{\Delta y} \left[ \left( \frac{u_{i,j+1} + u_{ij}}{2} \right) \left( \frac{v_{i,j+1} + v_{i-1,j+1}}{2} \right) - \left( \frac{u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2} \right) \left( \frac{v_{i,j} + v_{i-1,j}}{2} \right) \right]^k \quad (\text{A.6})$$

$$DP_x = \left[ \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x_i} \right] \quad (\text{A.7})$$

$$DIF_{ux} = \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x_i} \right]^k - \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x_i} \right]^k \quad (\text{A.8})$$

$$DIF_{ux} = \frac{1}{\Delta y} \left[ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y_i} \right]^k - \frac{1}{\Delta y} \left[ \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y_i} \right]^k \quad (\text{A.9})$$

Tem-se “ADV” como indicativo dos termos advectivos, “DP” indicativo do termo de pressão e “DIF” indicativo dos termos difusivos.

## ANEXO B – FIGURAS RETIRADAS DA LITERATURA SOBRE ESCOAMENTO AO REDOR DE CILINDROS OSCILANTES SEM ROTAÇÃO

A seguir encontram-se algumas ilustrações dos campos de vorticidade instantâneos obtidos por Singh e Mittal (2005) – Figura 19 – e Chern et al. (2014) – Figura 20.

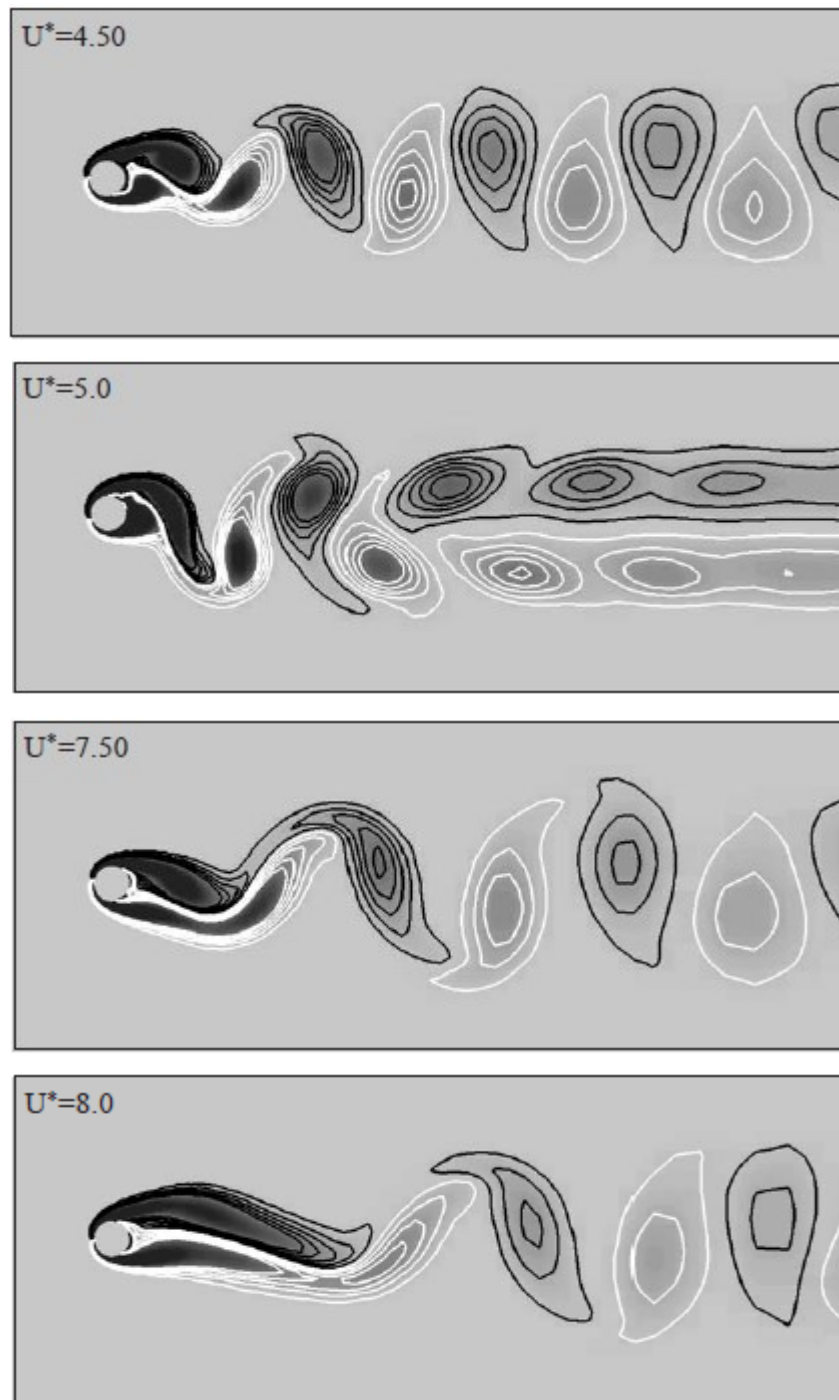


Figura 21 – Campos de vorticidade obtidos por Singh e Mittal (2005), com  $Re=100$ ,  $m^*=10$ , para diferentes valores de velocidade reduzida. Mesmos parâmetros descritos na Tabela 4.1.

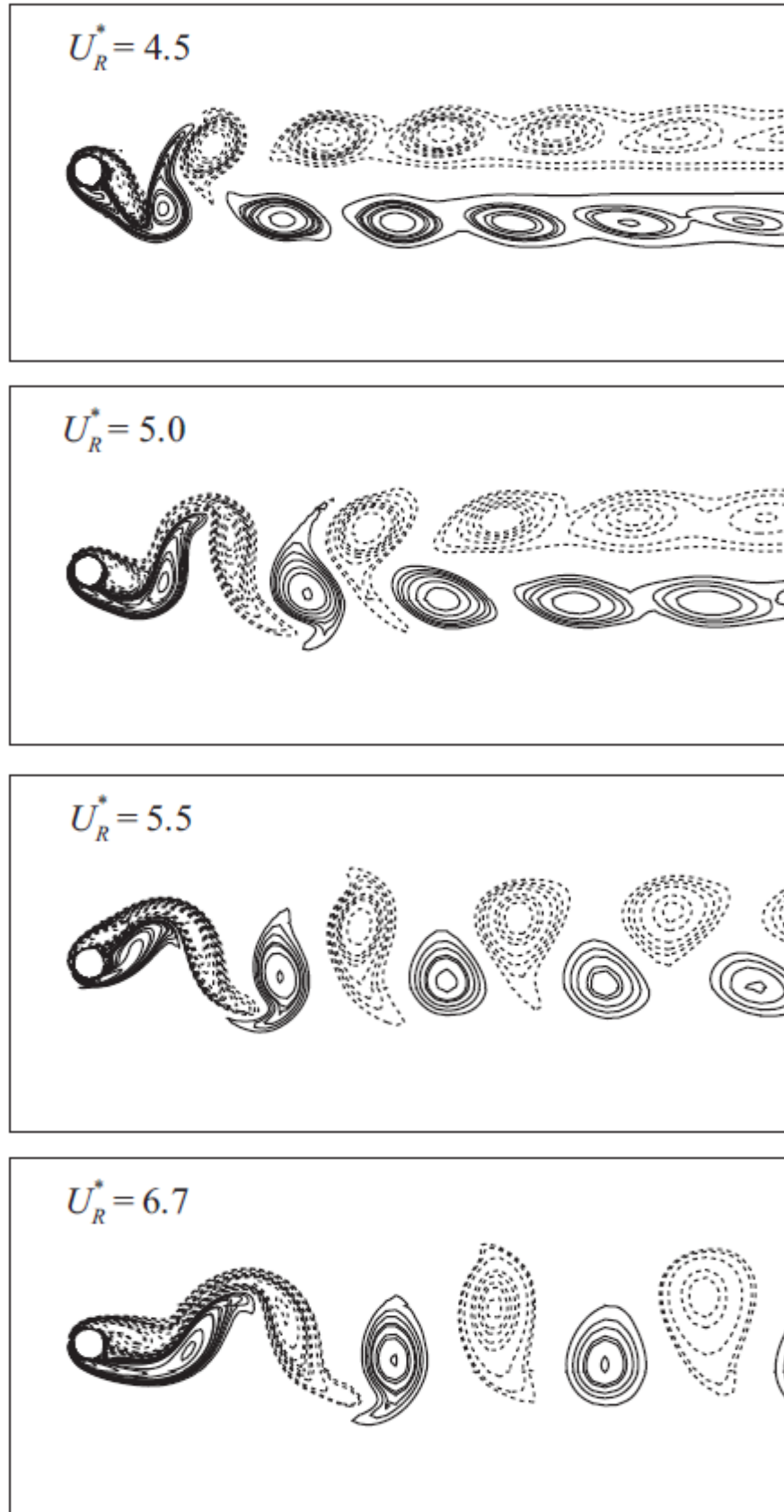


Figura 22 – Campos de vorticidade obtidos por Chern et al. (2014), com  $Re=100$ ,  $m^*=10$ , para diferentes valores de velocidade reduzida. Mesmos parâmetros descritos na Tabela 4.1.

Comparando-se os resultados dos autores citados acima, percebe-se que são semelhantes os padrões de desprendimento de vórtices encontrados em ambos, dando vistas ao predomínio do padrão 2S. Vale notar, entretanto, que a ocorrência do padrão C(2S) em Chern et. al (2014) ocorre com um adiantamento em relação à Singh e Mittal (2005): enquanto no primeiro, o padrão C(2S) é visto em  $Ur=4,5$  e  $Ur=5,0$ , no segundo só passa a ocorrer com  $Ur=5,0$ .