



**Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática**

Licenciatura em Matemática

HOMOLOGIA SINGULAR

Gabriel Santos da Silva

**Uberlândia-MG
2018**

Gabriel Santos da Silva

HOMOLOGIA SINGULAR

Trabalho de conclusão de curso apresentado à
Coordenação do Curso de Matemática como requi-
sito parcial para obtenção do grau de Licenciado
em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Ligia Laís Fêmina

Uberlândia-MG

2018



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Coordenação do Curso de Matemática

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Uberlândia, 11 de julho de 2018

BANCA EXAMINADORA

Ligia Laís Fêmima

Prof^ª. Dr^ª. Ligia Laís Fêmima

Ana Paula Tremura Galves

Prof^ª. Dr^ª. Ana Paula Tremura Galves

Germano Abud de Rezende

Prof. Dr. Germano Abud de Rezende

Uberlândia-MG

2018

*“A verdadeira motivação vem de realização,
desenvolvimento pessoal, satisfação no
trabalho e reconhecimento”*

(Frederick Herzberg)

Aos meus pais, Lúcia Helena
e Silvio Ribeiro,
dedico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que permitiu que tudo isso acontecesse ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitário, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

Aos meus pais, Lúcia e Sílvio, que sempre foram minha maior fonte de inspiração e força. Sou grato ao meu irmão, por acreditar e apoiar meu sonho e que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo superior, sempre fez entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente. E aos meus tios, por terem me acolhido de braços abertos em sua casa.

Aos meus grandes amigos, em especial André, Amanda, Bruno, Elis, Fabrício, Thaiane e Samantha, que sempre estiveram ao meu lado, e que hoje são mais que amigos, são meus irmãos.

Agradeço todos os professores da FAMAT que além de ensinadores, foram grandes incentivadores e amigos, que fizeram toda a diferença nesse período.

Aos professores, Marisa de Sousa e Daniel Cariello que foram meus orientadores em iniciações científicas e nunca deixaram de acreditar em mim.

A minha orientadora Lígia, pelo apoio, confiança, enorme incentivo, paciência nessa orientação e acima de tudo pela amizade.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado!

RESUMO

Neste trabalho, estudamos algumas noções básicas da área de topologia algébrica, com o enfoque em homologia singular. Apresentaremos um importante resultado, a sequência de Mayer-Vietoris, e calcularemos com essa ferramenta os grupos de homologia singular de alguns espaços topológicos.

Palavras-chave: Simplexo. Homologia Singular. Sequência de Mayer-Vietoris.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Fundamentação teórica:	
	álgebra homológica	3
2.1	Sequência exata e semi-exata	3
2.2	Complexo de cadeias	4
2.3	Aplicação de cadeias	5
2.4	Homomorfismo Conectante	10
3	A definição da Homologia	
	Singular	13
3.1	Simplexo	13
3.2	Operador bordo	16
3.3	A homologia do ponto	17
3.4	Homologia singular no nível zero	18
3.5	Homomorfismo Induzido em Homologia	21
3.6	Invariância topológica e homotópica	22
4	Aplicações da sequência de	
	Mayer-Vietoris	25
4.1	Sequência de Mayer-Vietoris	25
4.2	Aplicações	27
	Referências Bibliográficas	33

1. INTRODUÇÃO

A Topologia Algébrica é um ramo bastante interessante da Matemática que está na interseção da Álgebra e da Geometria e possui aplicações em diversas áreas da Matemática, tais como Geometria Diferencial, Teoria dos Nós e também na Matemática Aplicada como, por exemplo, na Computação Gráfica. Assim, não obstante o fato de a Topologia Algébrica ser um campo abstrato da Matemática, ela tem um grande número de aplicações dentro e fora da Matemática. Assim, aplica-se a várias áreas.

A Topologia Geral foi fortemente influenciada pela teoria geral dos conjuntos desenvolvida por Georg Cantor, por volta de 1880, e espaços métricos por Maurice Frechet em 1906.

Embora as origens históricas da Topologia Algébrica são um pouco diferentes, a Topologia Algébrica e a Topologia Geral têm um objetivo em comum: determinar a natureza dos espaços topológicos por meio de propriedades que vão desde invariância até homeomorfismos.

A Topologia Algébrica descreve a estrutura de um espaço topológico por associação com um sistema algébrico, normalmente um grupo ou uma seqüência de grupos. Desse modo, a Topologia Algébrica consiste em resolver problemas topológicos através de métodos puramente algébricos e um conceito importante é o de homologia singular. ([1], 1978).

A teoria de homologia é um assunto importante na Topologia Algébrica, pois fornece um método de associar a cada espaço topológico uma categoria de grupos (ou, mais geralmente, módulos), chamados de grupo de homologia desse espaço, de modo que espaços homeomorfos possuem grupos de homologia isomorfos ([4], 2012).

Este trabalho de conclusão de curso tem como finalidade abordar com mais profundidade e detalhamento algumas ferramentas da teoria de homologia singular e aplicações, proporcionando uma visão ampla da importância dessa teoria.

No capítulo um, relatamos alguns resultados de fundamental importância da área de álgebra homológica essenciais para o desenvolvimento dos capítulos posteriores, destacamos a definição de complexo de cadeia, aplicação de cadeia e homomorfismo conectante. A principal referência utilizada é [2].

No capítulo dois, apresentamos a definição de homologia singular. Para tal teoria é necessário a introdução do conceito de simplexo e operador bordo. Nesse capítulo exemplificamos a homologia de um ponto. Além disso, apresentamos resultados que mostram que a homologia singular é um invariante topológico e homotópico. As principais referências desse capítulo são [1], [4] e [5].

No capítulo três, apresentamos a sequência de Mayer-Vietoris. Além disso, calculamos a homologia singular da S^1 e da figura oito. A principal referência desse capítulo é [5].

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: ÁLGEBRA HOMOLÓGICA

Neste capítulo, relatamos alguns resultados de álgebra homológica de fundamental importância para o entendimento do trabalho. Destacamos, especialmente, a definição de complexo de cadeias, aplicação de cadeia e o homomorfismo conectante. A principal referência utilizada é [2].

2.1 SEQUÊNCIA EXATA E SEMI-EXATA

Escrevemos uma sequência finita ou infinita de homomorfismos de R -módulos da seguinte forma:

$$\dots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \dots$$

Desse modo, para cada módulo que não esteja nos extremos da sequência, por exemplo, para o Y desta sequência, existe um homomorfismo f chegando em Y e um homomorfismo g saindo de Y . Definimos f como sendo o **homomorfismo de entrada** e g como sendo o **homomorfismo de saída** da sequência no módulo Y .

Definição 1. *Uma sequência exata de R -módulos é como definida anteriormente, tal que a imagem do homomorfismo de entrada coincide com o Kernel do homomorfismo de saída em todos os módulos, exceto nos extremos da sequência.*

Definição 2. *Toda sequência exata da forma*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

será chamada sequência exata curta.

Definição 3. *Uma sequência finita ou infinita*

$$\dots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \dots$$

de homomorfismos de R -módulos, é dita uma sequência semi-exata se, e somente se, a imagem do homomorfismo de entrada está contida no Kernel do homomorfismo de saída para todo módulo, exceto nos extremos da sequência ($Im(f) \subset Ker(g)$).

A sequência é semi-exata se, e somente se, a composição $g \circ f$ de dois homomorfismos consecutivos f e g na sequência é o homomorfismo trivial.

Observação 1. *Toda sequência exata de homomorfismos de R -módulos é semi-exata, mas nem toda sequência semi-exata é exata.*

Exemplo 1. *Sejam A um submódulo de um R -módulo X , isto é, $A \subset B$ mas $A \neq B$, e $i : A \rightarrow X$ o homomorfismo inclusão. Dessa forma, a sequência*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} X \longrightarrow 0$$

é semi-exata mas não é exata. O módulo quociente $Q = X/A$ serve como uma medida do desvio da exatidão.

Definição 4. *Dada uma sequência semi-exata arbitrária*

$$C : \dots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \dots$$

de homomorfismos de R -módulos, o módulo quociente

$$Ker(g)/Im(f)$$

será chamado módulo derivado da sequência C no módulo Y .

Proposição 1. *Uma sequência semi-exata de homomorfismos de R -módulos é exata se, e somente se, todos os seus módulos derivados são triviais.*

Demonstração: (\Rightarrow) Como a sequência é exata, segue que $Ker(g) = Im(f)$. Assim,

$$Ker(g)/Im(f) = Im(f)/Im(f) = 0.$$

Portanto, todos os módulos derivados da sequência semi-exata são triviais.

(\Leftarrow) Por hipótese temos que os módulos derivados são triviais, ou seja, $Ker(g)/Im(f) = \{0\}$. Desta forma, $Ker(g) = Im(f)$. Portanto, a sequência é exata. \square

2.2 COMPLEXO DE CADEIAS

Os módulos de uma sequência semi-exata C são usualmente indexados por inteiros crescentes ou por inteiros decrescentes. Se inteiros decrescentes são usados como índices, a sequência semi-exata C é chamada **Complexo de Cadeias** (ou sequência baixa) e os homomorfismos em C , serão denotados pelo símbolo ∂ e indexados da mesma forma como nos módulos. Desse modo um complexo de cadeias C é da seguinte forma:

$$C : \dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots,$$

com $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

Os elementos de C_i são chamados cadeias i -dimensionais de C e os homomorfismos ∂_i são chamados operadores bordo.

O Kernel de ∂_i é denotado por $Z_i(C)$ e chamado módulo i -dimensional de ciclos de C . A imagem de ∂_{i+1} em C_i é denotada por $B_i(C)$ e é chamada módulo i -dimensional de bordos de C .

Definição 5. *O módulo quociente*

$$H_i(C) = Z_i(C)/B_i(C) = Ker(\partial_i)/Im(\partial_{i+1})$$

(módulo derivado de C no módulo C_i) é denominado **Módulo de Homologia i -dimensional** de C .

2.3 APLICAÇÃO DE CADEIAS

Definição 6. *Consideremos dois complexos de cadeias:*

$$C : \dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

$$D : \dots \xrightarrow{\partial'_{n+2}} D_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial'_n} D_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \dots$$

Uma aplicação de cadeias $f : C \rightarrow D$, é uma família de homomorfismos

$$f = \{f_i : C_i \rightarrow D_i / i \in \mathbb{Z}\}$$

de módulos sobre R , indexada por inteiros $n \in \mathbb{Z}$, tais que a relação de comutatividade

$$\partial_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial'_n$$

é verdadeira no diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} \end{array}$$

para todo inteiro $n \in \mathbb{Z}$.

Proposição 2. *Seja $f : C \rightarrow D$ uma aplicação de cadeias. Então, os homomorfismos $f_i : C_i \rightarrow D_i$ levam $Z_i(C)$ em $Z_i(D)$ e $B_i(C)$ em $B_i(D)$, ou melhor, levam $Ker(\partial_i)$ no $Ker(\partial'_i)$ e $Im(\partial_{i+1})$ na $Im(\partial'_{i+1})$.*

Demonstração: Considere o seguinte diagrama no qual todos os quadrados são comutativos

$$\begin{array}{ccccccc}
C & : \dots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots \\
& & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\
D & : \dots & \xrightarrow{\partial'_{n+2}} & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial'_{n-1}} & \dots
\end{array}$$

Seja $z \in \text{Ker}(\partial_n)$, então $\partial_n(z) = 0$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
f_{n-1}(\partial_n(z)) = 0 &\Rightarrow (f_{n-1} \circ \partial_n)(z) = 0 \Rightarrow \partial'_n \circ f_n(z) = 0 \Rightarrow \partial'(f_n(z)) = 0 \\
&\Rightarrow f_n(z) \in \text{Ker}(\partial'_n).
\end{aligned}$$

Por outro lado, suponhamos $z \in \text{Im}(\partial_{n+1})$, então existe $w \in C_{n+1}$ tal que $\partial_{n+1}(w) = z$. Deste modo, temos que:

$$f_n(z) = f_n(\partial_{n+1}(w)) = (f_n \circ \partial_{n+1})(w) = (\partial'_{n+1} \circ f_{n+1})(w) = \partial'_{n+1}(f_{n+1}(w)).$$

Portanto $f_n(z) \in \text{Im}(\partial'_{n+1})$. □

De acordo com a proposição anterior, temos definido um homomorfismo

$$H_i(f) : H_i(C) \longrightarrow H_i(D) \text{ dado por } H_i(f)(\bar{z}) = \overline{f_i(z)},$$

onde $\bar{z} = z + Z_i(C)$ e $\overline{f_i(z)} = f_i(z) + B_i(C)$, dos módulos de homologia i -dimensionais $H_i(C)$ e $H_i(D)$, que será chamado de **homomorfismo induzido** i -dimensional de f .

Definição 7. O homomorfismo idêntico $i : C \longrightarrow C$ de um complexo de cadeias C é a família

$$i = \{i_n : C_n \longrightarrow C_n / n \in \mathbb{Z}\}$$

de homomorfismos idênticos i_n dos módulos C_n .

Proposição 3. Se $i : C \longrightarrow C$ é o homomorfismo idêntico de um complexo de cadeias C , então $H_n(i)$ é o homomorfismo idêntico do módulo $H_n(C)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Temos que $i : C \longrightarrow C$ e $i_n : C_n \longrightarrow C_n$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
H_n(i) : H_n(C) &\longrightarrow H_n(C) \\
\bar{z} &\longmapsto H_n(i)(\bar{z}) = \overline{i_n(z)} = \bar{z}.
\end{aligned}$$

Portanto, $H_n(i) = id_{H_n(C)}$. □

Consideremos agora $f : C \longrightarrow D$ e $g : D \longrightarrow E$ homomorfismos de complexos de cadeias. Então a família

$$h = \{g_i \circ f_i : C_i \longrightarrow E_i / i \in \mathbb{Z}\}$$

é um homomorfismo do complexo de cadeias C no complexo de cadeias E . Esse homomorfismo $h : C \longrightarrow E$ é chamado **composição dos homomorfismos** $f : C \longrightarrow D$ e $g : D \longrightarrow E$, e será denotado por

$$g \circ f : C \longrightarrow E.$$

Proposição 4. *Se $f : C \longrightarrow D$ e $g : D \longrightarrow E$ são homomorfismos de complexos de cadeias, então*

$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$$

para todo inteiro $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Suponhamos $\bar{x}_n \in H_n(C)$. Assim, $\bar{x}_n = x_n + B_n(C)$. Então

$$H_n(g \circ f)(\bar{x}_n) = (g_n \circ f_n)(x_n) + B_n(E) \quad (I)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} H_n(g) \circ H_n(f)(\bar{x}_n) &= H_n(g)(H_n(f)(\bar{x}_n)) = H_n(g)(f_n(x_n) + B_n(D)) = g_n(f_n(x_n) + B_n(D)) = \\ &= g_n(f_n(x_n)) + B_n(E) = (g_n \circ f_n)(x_n) + B_n(E). \end{aligned} \quad (II)$$

Por (I) e (II), temos que $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$. □

Definição 8. *Chamamos de complexo de cadeias trivial, um complexo de cadeias O , tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, tem-se que $O_n = \{0\}$.*

Definição 9. *Um homomorfismo trivial de um complexo de cadeias C em um complexo de cadeias D é o homomorfismo $h : C \rightarrow D$ tal que h_n é o homomorfismo trivial do módulo C_n no módulo D_n , para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposição 5. *Se $h : C \longrightarrow D$ é o homomorfismo trivial de um complexo de cadeias C no complexo de cadeias D , então*

$$H_n(h) : H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$$

é o homomorfismo trivial para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Seja $\bar{z} \in H_n(C)$, então

$$H_n(h)(\bar{z}) = \overline{h_n(z)} = \bar{0}.$$

Logo, $H_n(h)$ é o homomorfismo trivial para todo $n \in \mathbb{Z}$. □

Definição 10. *Dois homomorfismos $f, g : C \longrightarrow D$ de um complexo de cadeias C em um complexo de cadeias D são ditos homotópicos se, e somente se, existe uma família de homomorfismos*

$$h = \{h_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}/n \in \mathbb{Z}\}$$

tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial'_n = f_n - g_n$$

conforme indica o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 C_n & \xrightarrow{h_n} & D_{n+1} \\
 \downarrow \partial'_n & \searrow f_n & \downarrow \partial_{n+1} \\
 & g_n & \\
 C_{n-1} & \xrightarrow{h_{n-1}} & D_n
 \end{array}$$

A família h descrita acima, é chamada uma homotopia (ou uma homotopia de cadeias) entre os homomorfismos f e g . Em símbolos

$$h : f \simeq g : C \longrightarrow D.$$

Proposição 6. Se duas aplicações de cadeias $f, g : C \longrightarrow D$ de complexos de cadeias são homotópicas, então

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$$

para todo inteiro $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Sejam $h : f \simeq g : C \longrightarrow D$ e $x \in H_n(C)$. Suponhamos $z \in Z_n(C)$, tal que $p(z) = x$, onde p denota a projeção natural do módulo $Z_n(C)$ sobre seu módulo quociente $H_n(C)$. Então

$$f_n(z) - g_n(z) = \partial_{n+1}[h_n(z)] + h_{n-1}[\partial'_n(z)] = \partial_{n+1}[h(z)]$$

com $\partial'_n(z) = 0$. Como $\partial[h_n(z)] \in B_n(D)$, temos

$$[H_n(f)](x) = [H_n(g)](x)$$

Portanto, como x é um elemento arbitrário de $H_n(C)$, temos que $H_n(f) = H_n(g)$. \square

Lema 1. Seja $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de um complexo de cadeias. Para todo inteiro $n \in \mathbb{Z}$, a sequência

$$H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E)$$

de R -módulos de homologia é exata.

Demonstração: Como $g \circ f = 0$, segue que

$$H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f) = 0.$$

Assim,

$$\text{Im}[H_n(f)] \subset \text{Ker}[H_n(g)], \quad (I)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Agora, para provarmos a outra inclusão, consideremos $\alpha \in \text{Ker}[H_n(g)]$, $\alpha = \bar{z} = z + B_n(D)$; $z \in Z_n(D)$, sendo $Z_n(D) \subset D_n$. Desse modo,

$$[H_n(g)](\alpha) = 0 \Rightarrow [H_n(g)](\bar{z}) = \overline{g_n(z)} = \bar{0},$$

temos que $g_n(z) \in B_n(E) = \text{Im}(\partial_{n+1})$ e $\partial_{n+1}^E : E_{n+1} \rightarrow E_n$.

Considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & D_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & E_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial_{n+1}^C & & \downarrow \partial_{n+1}^D & & \downarrow \partial_{n+1}^E & & \\ 0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n & \xrightarrow{g_n} & E_n & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Como as linhas são sequências exatas, sabemos que g_{n+1} é epimorfismo. Então, existe $x \in D_{n+1}$, tal que $g_{n+1}(x) = y$. Logo,

$$\begin{aligned} g_n(z - \partial_{n+1}^D(x)) &= g_n(z) - g_n(\partial_{n+1}^D(x)) = g_n(z) - \partial_{n+1}^E(g_{n+1}(x)) = g_n(z) - \partial_{n+1}^E(y) = \\ &= \partial_{n+1}^E(y) - \partial_{n+1}^E(y) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $z - \partial_{n+1}^D(x) \in \text{Ker}(g_n) = \text{Im}(f_n)$. Assim, existe $w \in C_n$ com $f_n(w) = z - \partial_{n+1}^D(x)$. Então

$$f_{n-1}[\partial_n^C(w)] = \partial_n^D(f_n(w)) = \partial_n^D(z - \partial_{n+1}^D(x)) = \partial_n^D(z) = 0.$$

Como f_{n-1} é monomorfismo, segue que $\partial(w) = 0$ e assim $w \in \text{Ker}(\partial_n^C) = Z_n(C)$.

Agora, seja p a projeção natural do módulo $Z_n(C)$ no seu módulo quociente $H_n(C)$.

$$\begin{aligned} p : Z_n(C) &\longrightarrow Z_n(C)/B_n(C) = H_n(C) \\ w &\longmapsto p(w) = \bar{w} \in H_n(C) \end{aligned}$$

Temos que $[H_n(g)](\alpha) = 0$, então $\alpha \in \text{Im}(H_n(f))$. Como $\alpha = [H_n(f)](\bar{w})$ e $\bar{z} = \overline{f_n(w)}$, podemos concluir que $f_n(w) - z \in B_n(D)$. Logo, $\bar{z} = \alpha$ e $\partial_{n+1}^D \in B_n(D) = \text{Im}(\partial_{n+1}^D)$. Desse modo, temos

$$f_n(w) = z - \partial_{n+1}^D(x) \in \alpha = \bar{z} = z + \text{Im}(\partial_{n+1}^D)$$

Portanto, $\overline{f_n(w)} = \bar{z}$ e $H_n(f)(\bar{w}) = \alpha$. Assim,

$$\text{Ker}[H_n(g)] \subset \text{Im}[H_n(f)] \quad (II)$$

Por (I) e (II), temos que $\text{Im}[H_n(f)] = \text{Ker}[H_n(g)]$. □

2.4 HOMOMORFISMO CONECTANTE

Consideremos agora o seguinte diagrama de complexos de cadeias:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 E : 0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n & \xrightarrow{g_n} & E_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial''_n \\
 C : 0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & E_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

onde cada linha é exata.

Suponhamos $z \in \text{Ker}(\partial''_n) \subset E_n$. Como g_n é sobrejetora, existe $y \in D_n$ tal que $g_n(y) = z$. Temos assim que $\partial'_n(y) \in D_{n-1}$. Mostra-se que $\partial'_n(y) \in \text{Ker}(g_{n-1}) = \text{Im}(f_{n-1})$. Assim $\exists x \in C_{n-1}$ tal que $f_{n-1}(x) = \partial'_n(y)$. Mostra-se que $x \in \text{Ker}(\partial_{n-1})$.

Então, definimos:

$$\Delta : H_n(E) \longrightarrow H_{n-1}(C)$$

$$\bar{z} = z + \text{Im}(\partial''_{n+1}) \longmapsto \Delta(\bar{z}) = \bar{x} = x + \text{Im}(\partial_n).$$

Δ está bem definido e é um homomorfismo. (Ver Lemas 6.6, 6.7 e 6.8 das páginas 48 e 49 da referência [2].)

Este homomorfismo $\Delta : H_n(E) \longrightarrow H_{n-1}(C)$, construído para cada inteiro n , será chamado de **homomorfismo conectante**.

Teorema 1. *Considere um sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

de complexos de cadeias. Então, a sequência exata longa de homologia

$$\dots \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(D) \longrightarrow \dots$$

é exata.

Demonstração: Temos que $\text{Im}(H_n(f)) = \text{Ker}(H_n(g))$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Resta mostrarmos que

$$(i) \text{Im}(H_n(g)) = \text{Ker}(\Delta) \quad \text{e} \quad (ii) \text{Im}(\Delta) = \text{Ker}(H_{n-1}(f))$$

(i) Consideremos a sequência de homologia

$$H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C)$$

Seja $\alpha \in \text{Im}(H_n(g)) \subset H_n(E)$. Então $\alpha = H_n(g)(\beta)$ tal que $\beta \in H_n(D)$.

Assim, $\beta = z + B_n(D)$, $z \in Z_n(D)$. Logo, $\partial'_n(z) = 0$. Logo, existe $v = 0 \in C_{n-1}$ tal que $f_{n-1}(v) = 0 = \partial'_n(z)$. Usando este fato e a definição de Δ mostra-se que $\Delta(\alpha) = 0$ e assim $\text{Im}(H_n(g)) \subset \text{Ker}(\Delta)$.

Para mostrarmos a outra inclusão, seja $\alpha \in \text{Ker}(\Delta) \subset H_n(E)$. Assim, $\alpha = z + B_n(E)$ tal que $z \in Z_n(E)$. Usando a definição de $\Delta(\alpha)$ existem $u \in D_n, v \in C_{n-1}$ com $g_n(u) = z$ e $f_{n-1}(v) = \partial'_n(u)$ tal que $\Delta(\alpha) = \bar{v} = v + B_{n-1}(C) = \bar{0}$. Desse modo, $v \in B_{n-1}(C)$ e existe $w \in C_n$ com $\partial_{n-1}(w) = 0$. Seja $y = u - f_n(w) \in D_n$ e $\beta = y + B_{n+1}(D)$. Mostra-se que $H_n(g)(\beta) = \alpha$. Assim, $\alpha \in \text{Im}(H_n(g))$.

De forma análoga podemos demonstrar (II). □

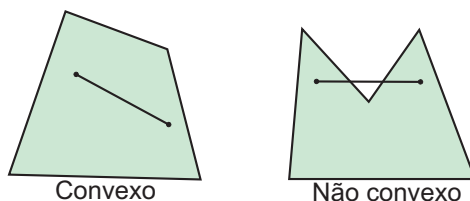
3. A DEFINIÇÃO DA HOMOLOGIA SINGULAR

Neste capítulo, relatamos alguns resultados de fundamental importância para o cálculo dos grupos de homologia. Destacamos, especialmente, a definição de simplexo, homologia singular e equivalência de homotopia. Para o leitor não habituado a teoria de módulos, pré-requisito para o entendimento do capítulo, sugerimos [2]. As principais referências desse capítulo são [1], [4] e [5].

3.1 SIMPLEXO

Definição 11. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^n$, o segmento de reta com ponto inicial a e ponto final b é o subconjunto $[a, b] = \{(1-t)a + bt, 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$.*

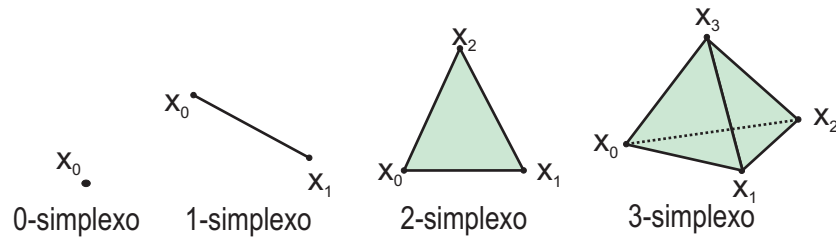
Definição 12. *O subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é **convexo** se para quaisquer $a, b \in X$, temos $[a, b] \subset X$.*



Definição 13. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, chamamos de **fecho convexo** de X a interseção de todos os subconjuntos convexos de \mathbb{R}^n que contém X .*

Definição 14. *Um **p-simplexo** s do \mathbb{R}^n é o fecho convexo de uma coleção de $(p+1)$ pontos $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ no \mathbb{R}^n , onde cada $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$ formam um conjunto linearmente independente. Os elementos x_0, x_1, \dots, x_p são chamados **vértices** de s .*

Exemplo 2. *Os 0-simplexos são os pontos do \mathbb{R}^n , os 1-simplexos são segmentos de reta do \mathbb{R}^n , os 2-simplexos são triângulos do \mathbb{R}^n com sua fronteira e seu interior e os 3-simplexos são tetraedros do \mathbb{R}^n com sua fronteira e seu interior, como podemos visualizar na figura a seguir.*



Proposição 7. *Seja $x_0, x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *O conjunto $\{x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0\}$ é linearmente independente;*

ii) *Se*

$$\sum_{i=0}^p s_i x_i = \sum_{i=0}^p t_i x_i \text{ e } \sum_{i=0}^p s_i = \sum_{i=0}^p t_i,$$

então $s_i = t_i$, para $i = 0, \dots, p$.

Demonstração:

(i) \Rightarrow (ii) Se $\sum_{i=0}^p s_i x_i = \sum_{i=0}^p t_i x_i$ e $\sum_{i=0}^p s_i = \sum_{i=0}^p t_i$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^p (s_i - t_i) x_i = \sum_{i=0}^p (s_i - t_i) x_i - \left[\sum_{i=0}^p (s_i - t_i) \right] x_0 \\ &= \sum_{i=1}^p (s_i - t_i) (x_i - x_0). \end{aligned}$$

Por i) temos que o conjunto $\{x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0\}$ é linearmente independente, logo $s_i = t_i$ para $i = 1, \dots, p$. Finalmente, isso implica $s_0 = t_0$, desde que $\sum_{i=0}^p s_i = \sum_{i=0}^p t_i$.

(ii) \Rightarrow (i) Se $\sum_{i=1}^p (t_i)(x_i - x_0) = 0$, então $\sum_{i=1}^p t_i x_i = \left(\sum_{i=1}^p t_i \right) x_0$, ou seja,

$$t_0 x_0 + t_1 x_1 + \dots + t_p x_p = (t_0 + t_1 + \dots + t_p) x_0 + 0 x_1 + \dots + 0 x_p,$$

sendo $t_0 + t_1 + \dots + t_p = (t_0 + t_1 + \dots + t_p) + 0 + \dots + 0$. Assim por (ii) os coeficientes t_1, \dots, t_n todos devem ser zero. Isso prova a independência linear do conjunto $\{x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0\}$. \square

Corolário 1. *Se o p -simplexo s é o fecho convexo de $\{x_0, \dots, x_p\}$ então todo ponto de s tem uma única representação da forma $\sum_{i=0}^p t_i x_i$, onde $t_i \geq 0$, para todo i e $\sum t_i = 1$.*

Demonstração: Considere

$$s = \left\{ \sum_{i=0}^p t_i x_i \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^p t_i = 1 \text{ e } t_i \geq 0 \right\}$$

O conjunto s é convexo.

De fato, sejam $p, q \in s$, então $p = \sum_{i=0}^p t_i x_i, q = \sum_{i=0}^p s_i x_i$, tal que $\sum_{i=0}^p t_i = \sum_{i=0}^p s_i = 1, s_i \geq 0, t_i \geq 0$.

Considere o segmento de reta, $tp + (1 - t)q, 0 \leq t \leq 1$, então

$$tp + (1 - t)q = t \left(\sum_{i=0}^p t_i x_i \right) + (1 - t) \left(\sum_{i=0}^p s_i x_i \right) = \sum_{i=0}^p (tt_i + (1 - t)s_i) x_i \in S,$$

pois

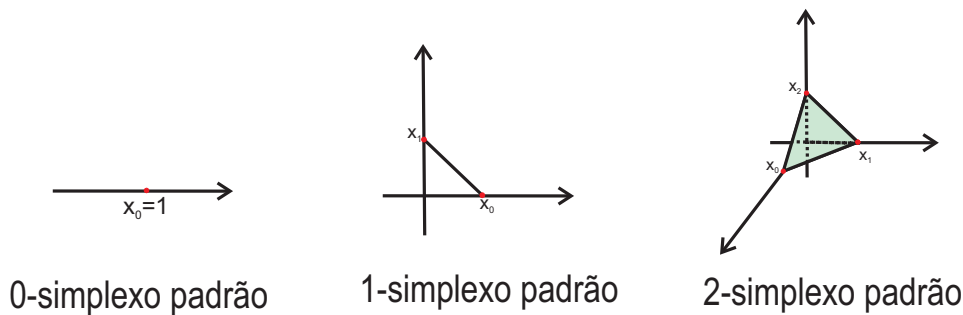
$$\sum_{i=0}^p (tt_i + (1 - t)s_i) = t \sum_{i=0}^p t_i + (1 - t) \sum_{i=0}^p s_i = t.1 + (1 - t).1 = 1 \text{ e } tt_i + (1 - t)s_i \geq 0.$$

Note que s é o fecho convexo do conjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$. Portanto, se o p -simplexo de s é o fecho convexo de $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ então, pela proposição anterior, todo ponto de s tem uma única representação da forma $\sum_{i=0}^p t_i x_i$, onde $t_i \geq 0$, para todo i e $\sum_{i=0}^p t_i = 1$. \square

Definição 15. O p -simplexo σ_p do \mathbb{R}^{p+1} com vértices $x_0 = (1, 0, \dots, 0), x_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, x_p = (0, \dots, 0, 1)$, é denominado o **p -simplexo padrão**.

Observação 2. O p -simplexo padrão σ_p é o conjunto de todos os pontos $(t_0, t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, com $\sum_{i=0}^p t_i = 1$ e $t_i \geq 0$, para cada i .

Exemplo 3. O 0-simplexo padrão σ_0 é o conjunto formado pelo elemento $1 \in \mathbb{R}$, o 1-simplexo padrão σ_1 é o conjunto $\{(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2 \mid \sum t_i = 1, t_i \geq 0\}$ e o 2-simplexo padrão σ_2 é o conjunto $\{(t_0, t_1, t_2) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum t_i = 1, t_i \geq 0\}$, como visualizados na figura a seguir.

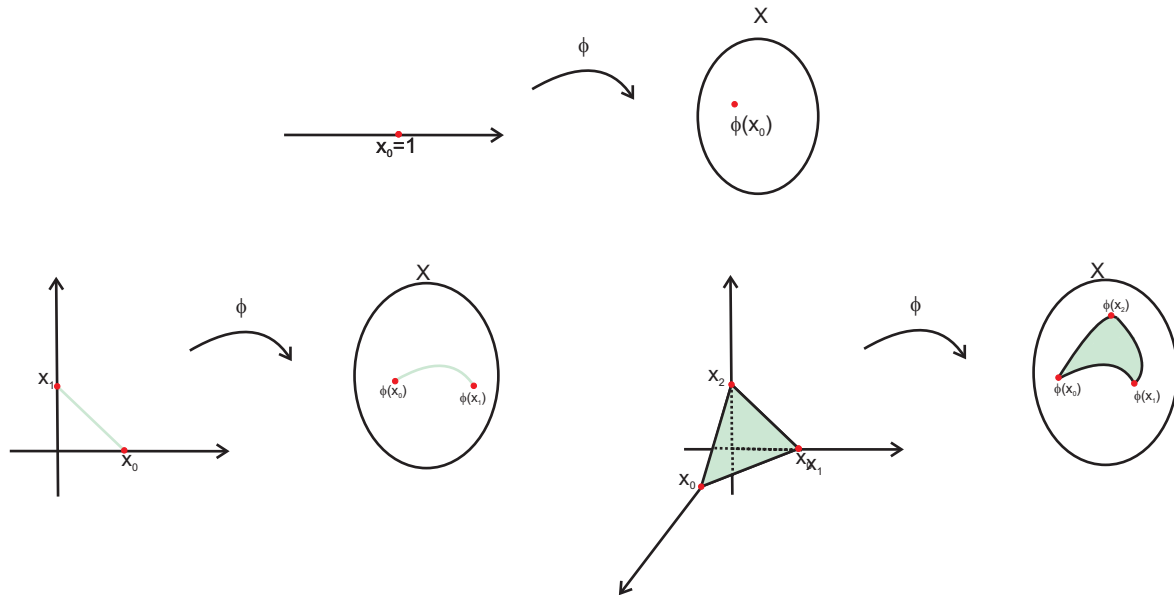


Observação 3. Note que existem infinitos p -simplexos em \mathbb{R}^n , mas p -simplexo padrão existe apenas um e tem representação em \mathbb{R}^{p+1} e dimensão p .

Definição 16. Se X é um espaço topológico, um p -simplexo singular em X é uma aplicação contínua $\phi : \sigma_p \rightarrow X$. Os p -simplexos singulares são também chamados de **simplexos de dimensão p** .

Observação 4. Denotemos $C_n(X)$ o conjunto dos p -simplexos singulares de X .

Exemplo 4. Os 0-simplexos singulares podem ser identificados como pontos de X , os 1-simplexos singulares podem ser identificados como caminhos de X e os 2-simplexos singulares podem ser identificados em X , como na figura a seguir.



Definição 17. Para um espaço topológico X e um anel comutativo R , o R -módulo das p -cadeias singulares em X , $S_p(X)$, é o módulo livre sobre R no qual a base B é um conjunto de todos os p -simplexos singulares de X , isto é, $B = C_p(X) = \{\phi : \sigma_p \rightarrow X; \phi \text{ é um } p\text{-simplexo singular}\}$, cuja notação é $S_p(X) = \langle C_p(X) \rangle$.

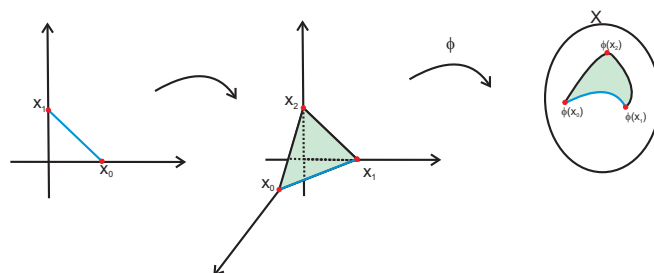
Observação 5. Os elementos de $S_p(X)$ não são funções contínuas de σ_p em X , são combinações lineares formais com coeficientes no anel R , de funções contínuas $\phi : \sigma_p \rightarrow X$. Um elemento de $S_p(X)$ tem a forma $\sum_{\phi} n_{\phi} \phi$, sendo n_{ϕ} inteiros e apenas um número finito deles não nulos.

3.2 OPERADOR BORDO

Definição 18. Se ϕ é um p -simplexo singular em X ($\phi : \sigma_p \rightarrow X$) e i é um inteiro com $0 \leq i \leq p$, definimos a i -ésima **face** de ϕ por $F_i(\phi)$, um $(p - 1)$ -simplexo singular em X , por

$$F_i(\phi)(t_0, \dots, t_{p-1}) = \phi(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}).$$

Exemplo 5. Na figura a seguir, ilustramos o caso $p = 2$ e $i = 2$.



Definição 19. O operador bordo $\partial_p : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$ é definido por

$$\partial_p = F_0 - F_1 + F_2 - \cdots + (-1)^n F_n = \sum (-1)^i F_i.$$

Proposição 8. A composição $\partial_{p-1} \circ \partial_p$ em

$$\cdots \rightarrow S_p(X) \xrightarrow{\partial_p} S_{p-1}(X) \xrightarrow{\partial_{p-1}} S_{p-2}(X) \rightarrow \cdots$$

se anula para todo p , ou seja, $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.

Demonstração: [5], Proposição 1.3. □

Devido a proposição anterior, temos que se X é um espaço topológico, o complexo de cadeias singular de X sobre o anel R é $\{S_p(X)\}_{p \geq 0}$ com aplicações $\partial_p : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$ (se $p = 0$, considere $\partial_p = 0$) :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{p+2}} S_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial_{p+1}} S_p(X) \xrightarrow{\partial_p} S_{p-1}(X) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots \rightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Definição 20. Um elemento $c \in S_p(X)$ é um p -ciclo se $\partial_p(c) = 0$ e um elemento $d \in S_p(X)$ é um p -bordo se existe $e \in S_{p+1}(X)$ tal que $d = \partial_{p+1}(e)$. Assim, $Z_p(X) = \text{Ker } \partial_p = \{c \in S_p(X) | c \text{ é um } p\text{-ciclo}\}$ e $B_p(X) = \text{Im } \partial_{p+1} = \{d \in S_p(X) | d \text{ é um } p\text{-bordo}\}$.

Definição 21. Seja X um espaço topológico. Considere $S_p(X)$, $\partial_p : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$, $Z_p(X)$ e $B_p(X)$. O p -ésimo **grupo de homologia singular** de X , é

$$H_p(X) = \frac{\text{Ker } \partial_p}{\text{Im } \partial_{p+1}} = \frac{Z_p(X)}{B_p(X)} = \{\bar{c} = c + B_p(C) | c \in Z_p(X)\}.$$

3.3 A HOMOLOGIA DO PONTO

Seja $X = \{a\}$ e R um anel comutativo com unidade. O conjunto dos n -simplexos singulares de X é dado por $C_p(X) = \{\phi : \sigma_p \rightarrow X; \phi \text{ é contínua}\}$, ou seja, para cada $p \geq 0$ existe um único p -simplexo singular e será denotado por ϕ_p , isto é, $C_p(X) = \{\phi_p\}$. Logo, $S_p(X) \simeq R$, para todo n .

Observe que se $p \geq 1$, a i -ésima face de ϕ_p é dada por $F_i(\phi_p) = \phi_{p-1}$, para todo i , pois $F_i(\phi_i) \in C_{p-1}(X) = \{\phi_{p-1}\}$. O operador bordo $\partial_p : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$ é definido por

$$\partial_p(\phi_p) = \sum (-1)^i F_i \phi_p = \sum (-1)^i \phi_{p-1} = \begin{cases} 0, & \text{se } p \text{ é ímpar;} \\ \phi_{p-1}, & \text{se } p \text{ é par.} \end{cases}$$

Logo, se p for ímpar, então $\partial_p : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$ é o homomorfismo nulo e se p for par, então $\partial_p : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$ é um isomorfismo.

Note que ∂_0 é o homomorfismo nulo. Assim,

$$H_0(X) = \frac{\text{Ker } \partial_0}{\text{Im } \partial_1} = \frac{S_0(X)}{\{0\}} \simeq R.$$

Se $p > 0$ e p é ímpar, então $p + 1$ é par, então

$$H_p(X) = \frac{Ker \partial_p}{Im \partial_{p+1}} = \frac{S_p(X)}{S_p(X)} \simeq \{0\}.$$

Se $p > 0$ e p é par, então $p + 1$ é ímpar, então

$$H_p(X) = \frac{Ker \partial_p}{Im \partial_{p+1}} = \frac{\{0\}}{\{0\}} \simeq \{0\}.$$

Portanto,

$$H_p(X) = \begin{cases} R, & \text{se } p = 0 \\ 0, & \text{se } p > 0. \end{cases}$$

3.4 HOMOLOGIA SINGULAR NO NÍVEL ZERO

Proposição 9. *Se X é um espaço conexo por caminhos, não vazio, então $H_0(X) \simeq R$, onde R é um anel comutativo com unidade.*

Demonstração: Considere o complexo de cadeias singular

$$\cdots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Temos que $Ker \partial_0 = S_0(X)$ e assim $H_0(X) \simeq \frac{S_0(X)}{B_0(X)}$.

Vamos mostrar que $\frac{S_0(X)}{B_0(X)} \simeq R$.

Considere o R -homomorfismo $f : S_0(X) \rightarrow R$ definida por $f\left(\sum_{\phi} n_{\phi}\phi\right) = \sum_{\phi} n_{\phi}$.

Note que f é sobrejetora, pois dado $n \in R$, escolha $\phi \in C_0(X)$ então $f(n\phi) = n$.

Seja $d \in B_0(X) = Im \partial_1$, existe um $e = n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + \cdots + n_r\phi_r \in S_1(X)$ tal que $\partial_1(e) = d$, onde $n_i \in R$ e $\phi_i : \sigma_1 = [x_0, x_1] \rightarrow X$ são caminhos em X . Sejam $a_i = \phi_i(x_0)$ e $b_i = \phi_i(x_1)$, para $i = 1, 2, \dots, r$. Note que $\partial_1(\phi_i) = b_i - a_i$. Então

$$\begin{aligned} d &= \partial_1(n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + \cdots + n_r\phi_r) = n_1\partial_1(\phi_1) + n_2\partial_1(\phi_2) + \cdots + n_r\partial_1(\phi_r) \\ &= n_1(b_1 - a_1) + n_2(b_2 - a_2) + \cdots + n_r(b_r - a_r) \\ &= n_1b_1 - n_1a_1 + n_2b_2 - n_2a_2 + \cdots + n_rb_r - n_ra_r. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(d) &= f(n_1b_1 - n_1a_1 + n_2b_2 - n_2a_2 + \cdots + n_rb_r - n_ra_r) \\ &= (n_1 - n_1) + (n_2 - n_2) + \cdots + (n_r - n_r) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $d \in \text{Ker } f$, ou seja, $B_0(X) \subset \text{Ker } f$.

Agora, seja $y \in \text{Ker } f$. Desse modo, $y = n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + \cdots + n_r\phi_r \in S_0(X)$, tal que $f(y) = n_1 + n_2 + \cdots + n_r = 0$. Note que $\phi_i : \sigma_0 = \{x_0\} = \{1\} \rightarrow X$ são pontos em X . Para facilitar, denotemos $\phi_i(1) = w_i$. Desse modo, $y = n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + \cdots + n_r\phi_r = n_1w_1 + n_2w_2 + \cdots + n_rw_r$. Fixe um ponto $a \in X$ e, como por hipótese, X é conexo por caminhos, sejam $\phi_i : [x_0, x_1] \rightarrow X$ caminhos unindo a aos pontos w_i , isto é, $\phi_i(x_0) = a$ e $\phi_i(x_1) = w_i$, para todo $i = 1, \dots, r$.

Considere $e = n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + \cdots + n_r\phi_r \in S_1(X)$ e mostremos que $\partial_1(e) = y$.

De fato,

$$\begin{aligned} \partial_1(e) &= \partial_1(n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + \cdots + n_r\phi_r) \\ &= n_1\partial_1(\phi_1) + n_2\partial_1(\phi_2) + \cdots + n_r\partial_1(\phi_r) \\ &= n_1(w_1 - a) + n_2(w_2 - a) + \cdots + n_r(w_r - a) \\ &= n_1w_1 + n_2w_2 + \cdots + n_rw_r - (n_1 + n_2 + \cdots + n_r)a \\ &= n_1w_1 + n_2w_2 + \cdots + n_rw_r - f(y)a \\ &= n_1w_1 + n_2w_2 + \cdots + n_rw_r - 0.a \\ &= n_1w_1 + n_2w_2 + \cdots + n_rw_r = y \end{aligned}$$

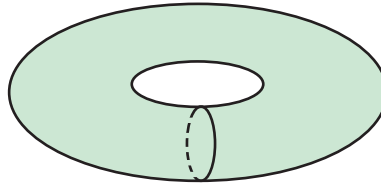
Portanto, $y \in B_0(X)$, ou seja, $\text{Ker } f \subset B_0(X)$. Logo, $B_0(X) = \text{Ker } f$.

Segue do teorema do isomorfismo de R -módulos que

$$H_0(X) \simeq \frac{S_0(X)}{B_0(X)} = \frac{S_0(X)}{\text{ker } f} \simeq R.$$

□

Exemplo 6. O toro é um espaço conexo por caminhos, logo $H_0(X) \simeq R$.



Lema 2. $H_k(\sum C^\alpha) \approx \sum_\alpha H_k(C^\alpha)$.

Demonstração: Note que pela definição de complexo de cadeias $\sum C^\alpha$ temos

$$Z_k\left(\sum C^\alpha\right) = \sum (Z_k(C^\alpha)) \text{ e } B_k\left(\sum C^\alpha\right) = \sum (B_k(C^\alpha))$$

Assim sendo

$$\begin{aligned}
H_k\left(\sum C^\alpha\right) &= Z_k\left(\sum C^\alpha\right)/B_k\left(\sum C^\alpha\right) \\
&= \sum(Z_k(C^\alpha))/\sum(B_k(C^\alpha)) \\
&\approx \sum(Z_k(C^\alpha)/B_k(C^\alpha)) \\
&= \sum H_k(C^\alpha).
\end{aligned}$$

□

Proposição 10. *Se X é um espaço topológico e $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ são componentes conexas por caminhos de X , então*

$$H_k(X) \approx \sum_{\alpha \in A} H_k(X_\alpha).$$

Demonstração: Existe um homomorfismo natural $\psi : \sum_{\alpha \in A} S_k(X_\alpha) \rightarrow S_k(X)$ dado por

$$\psi\left(\left(\sum_{\phi_\alpha} n_{\phi,\alpha} \cdot \phi_\alpha\right) : \alpha \in A\right) = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{\phi_\alpha} n_{\phi,\alpha} \cdot \phi_\alpha\right)$$

Como os grupos envolvidos são abelianos livres, ψ deve ser um monomorfismo.

Mostremos que ψ é também um epimorfismo.

De fato, seja $\phi \in S_k(X)$, observe primeiro que

$$\phi : \sigma_k \rightarrow X$$

é um k -simplexo singular, então $\phi(\sigma_k)$ está contido em algum X_α , porque σ_k é conexo por caminhos e ϕ é contínua. Assim, para qualquer um desses ϕ é associado um único $\phi_\alpha \in S_k(X_\alpha)$ com $\psi(\phi_\alpha) = \phi$. Portanto, ψ é um isomorfismo para cada k . Além disso, ψ é uma aplicação de cadeias entre complexos de cadeias, de modo que

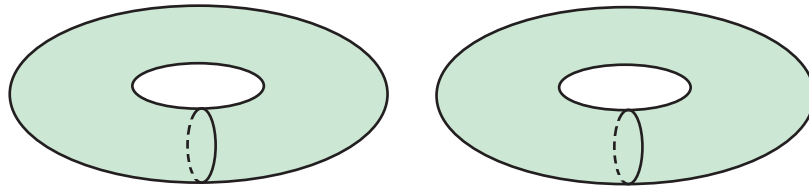
$$H_k(X) \approx H_k\left(\sum_{\alpha \in A} S_*(X_\alpha)\right).$$

Finalmente, segue do Lema 2 que

$$H_k\left(\sum_{\alpha \in A} S_*(X_\alpha)\right) \approx \sum_{\alpha \in A} H_k(X_\alpha).$$

□

Exemplo 7. *Considere X como sendo a união de dois toros disjuntos, então segue das proposições 9 e 10 que $H_0(X) \simeq R \oplus R$.*



3.5 HOMOMORFISMO INDUZIDO EM HOMOLOGIA

Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Vamos definir um homomorfismo induzido de f em homologia, isto é, $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.

Primeiramente, definiremos um homomorfismo $f_\#$ entre os grupos de n -cadeias $S_n(X)$ e $S_n(Y)$. Como $S_n(X)$ e $S_n(Y)$ são grupos abelianos livres bastará definir a aplicação na base $C_n(X)$ de $S_n(X)$ e então estender por linearidade.

Definição 22. Dada $f : X \rightarrow Y$ contínua, definimos

$$f_\# : S_n(X) = \langle C_n(X) \rangle \rightarrow S_n(Y)$$

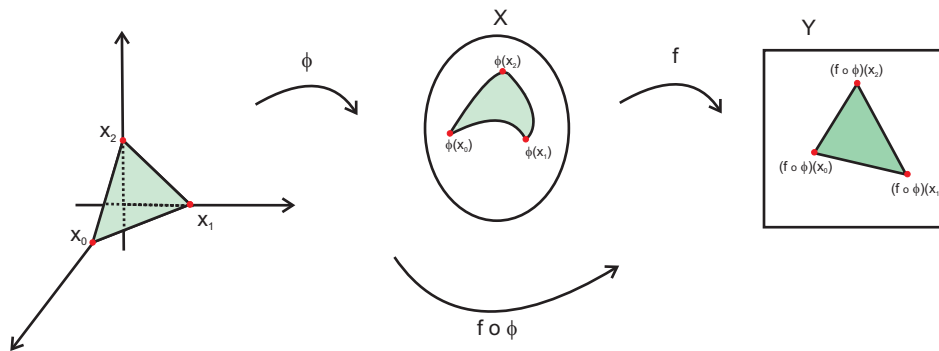
nos geradores, do seguinte modo:

$$\phi \in C_n(X) \Rightarrow f_\#(\phi) = f \circ \phi : \sigma_n \rightarrow Y$$

$$(f \circ \phi \in C_n(Y) \subset S_n(Y), \quad n - \text{simplexo singular em } Y)$$

A extensão natural por linearidade para $S_n(X)$ é dada por

$$f_\# \left(\sum n_\phi \phi \right) = \sum n_\phi (f \circ \phi).$$



Observação 6. $\{f_\#\}_n$ é uma aplicação de cadeia entre os complexos de cadeias $\{S_n(X)\}$ e $\{S_n(Y)\}$, isto é, $f_\# \circ \partial = \partial \circ f_\#$.

Proposição 11. *i) $f_\#(Z_n(X)) \subset Z_n(Y)$
 ii) $f_\#(B_n(X)) \subset B_n(Y)$*

Demonstração:

I) Seja

$$x \in f_{\#}(Z_n(X)) \implies x = f_{\#}(c), c \in Z_n(X) \implies \partial(c) = 0.$$

Então,

$$\partial(x) = \partial(f_{\#}(c)) = f_{\#}(\partial(c)) = f_{\#}(0) = 0 \in Z_n(Y).$$

II) Seja

$$x \in f_{\#}(B_n(X)) \implies x = f_{\#}(c), c \in B_n(X).$$

Então, existe $d \in S_{n+1}(X)$ tal que $c = \partial_{n+1}(d)$. Logo,

$$x = f_{\#} \circ \partial_{n+1}(d) = \partial_{n+1} \circ f_{\#}(d) \implies x \in B_n(Y),$$

pois $f_{\#}(d) \in S_{n+1}(Y)$.

□

Corolário 2. A aplicação $f_{\#} : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ induz um homomorfismo bem definido $f : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$, isto é, $f_n : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, para todo n .

Demonstração: Seja

$$\begin{aligned} w &= \sum n_{\phi} \phi + B_n(X) \in H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} \implies \\ \implies f_*(w) &= f_{\#} \left(\sum n_{\phi} \phi \right) + B_n(Y) = \sum n_{\phi} f_{\#}(\phi) + B_n(Y) = \\ &= \sum n_{\phi} (f \circ \phi) + B_n(Y) \in H_n(Y) = \frac{Z_n(Y)}{B_n(Y)}. \end{aligned}$$

□

3.6 INVARIÂNCIA TOPOLÓGICA E HOMOTÓPICA

Teorema 2. Se X é um subconjunto convexo do \mathbb{R}^n (em particular se $X = \mathbb{R}^n$), então $H_p(X) = 0$ para todo $p \geq 1$.

Demonstração: [5], 1.8.

□

Corolário 3. $H_p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} R, & \text{se } p = 0; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Demonstração: Como \mathbb{R}^n é conexo, segue que $H_0(\mathbb{R}^n) \simeq R$. Além disso, $H_j(\mathbb{R}^n) = 0$ para todo $j \geq 1$, uma vez que \mathbb{R}^n é convexo.

□

Observação 7. I) Se $Id : X \rightarrow X$ denota a identidade de X , então $Id_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X)$ é o homomorfismo identidade, isto é, $Id_* = Id_{H(X)}$.

II) Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções contínuas então: $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Teorema 3. (*Invariância topológica*): Se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo então $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ é um isomorfismo para todo n .

Demonstração: Como f é um homeomorfismo, então f é bijetiva, contínua e possui inversa $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$ também contínua. Assim $g \circ f = Id_X$ e $f \circ g = Id_Y$. Sabemos que f_* é um homomorfismo e $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e $Id_* = Id_{H(X)}$. Logo, $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = Id_* = Id_{H(Y)}$ e $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = Id_* = Id_{H(X)}$, isso mostra que f_* é bijetora e g_* é a inversa de f_* , isto é, $(f_*)^{-1} = g_* = (f^{-1})_*$. Assim, f_* é um isomorfismo. \square

Definição 23. Seja I o intervalo $[0,1]$ dos números reais, e sejam X, Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas. Dizemos que f e g são homotópicas e denotamos $f \sim g$, se existe uma função contínua $F : X \times I \rightarrow Y$, tal que $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$, para todo $x \in X$.

Observação 8. A relação de homotopia (\sim) é uma relação de equivalência

Teorema 4. Se $f, g : X \rightarrow Y$ são homotópicas, então $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, para todo n .

Demonstração: [5], 1.10. \square

Definição 24. Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ aplicações em espaços topológicos. Se as composições $f \circ g$ e $g \circ f$ são cada uma homotópica a sua respectiva aplicação identidade ($f \circ g \sim Id_Y, g \circ f \sim Id_X$), então f e g são ditas inversas homotópicas uma da outra. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é chamada uma equivalência de homotopia se f tem uma inversa homotópica, isto é, existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \sim Id_Y$ e $g \circ f \sim Id_X$.

Exemplo 8. Se f é homeomorfismo, então f é equivalência de homotopia.

De fato, sendo f um homeomorfismo, existe $g = f^{-1}$. Logo, $f \circ g = Id_Y \sim Id_Y$ e $g \circ f = Id_X \sim Id_X$.

Definição 25. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que X e Y tem o mesmo tipo de homotopia se existe $f : X \rightarrow Y$ equivalência de homotopia.

Exemplo 9. A circunferência S^1 tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Considere a aplicação inclusão $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tal que $f(u) = u$ e $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$ tal que $g(u) = \frac{u}{\|u\|}$. Então temos que $(g \circ f)(u) = g(f(u)) = \frac{u}{\|u\|} = u = id_{S^1}$ e $(f \circ g)(u) = f(g(u)) = \frac{u}{\|u\|}$. Como $\left[u, \frac{u}{\|u\|} \right] \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, para todo $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pois $\frac{1}{\|u\|} \neq 0$, então definimos $H : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ por $H(x,t) = (1-t)\frac{u}{\|u\|} + tu$. Então, $f \circ g \sim id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$.

Teorema 5. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma equivalência de homotopia, então $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ é um isomorfismo, para cada n .

Demonstração: Sendo f uma equivalência de homotopia, existe uma inversa homotópica g de f . Logo, $f \circ g \sim Id_Y$ e $g \circ f \sim Id_X$.

Pelo teorema anterior, $(f \circ g)_* = Id_*$ e $(g \circ f)_* = Id_*$.

Assim, $f_* \circ g_* = Id$ e $g_* \circ f_* = Id$, ou seja, $g_* = f_*^{-1}$.

Portanto, f_* é um isomorfismo. \square

Definição 26. Um espaço X é contrátil se X tem mesmo tipo de homotopia de um ponto.

Podemos obter novamente os grupos de homologia de \mathbb{R}^n fazendo agora uso do conceito de homotopia.

Proposição 12. \mathbb{R}^n é contrátil, $n > 1$ e $H_p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} R, & \text{se } p = 0; \\ 0, & p > 0. \end{cases}$

Demonstração: Devemos mostrar que \mathbb{R}^n tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto p_0 , onde $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Consideremos $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \{p_0\}$, tal que $f(p) = p_0$, para todo p e $g : \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $g(p_0) = y_0$.

Temos que $f \circ g = Id_{p_0} \sim Id_{p_0}$.

Agora, $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida $(g \circ f)(p) = g(p_0) = y_0$.

Consideremos $K : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $K(u, t) = (1-t)u + ty_0$, onde $u \in \mathbb{R}^n$ e $t \in I = [0, 1]$.

Temos $K(u; 0) = u = Id_{\mathbb{R}^n}(u)$ e $K(u; 1) = y_0 = (g \circ f)(u)$.

Logo, $g \circ f \sim Id_{\mathbb{R}^n}$. Assim, f é uma equivalência de homotopia.

Como $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \{p_0\}$ é uma equivalência de homotopia, temos que $f_* : H_*(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_*(\{p_0\})$ é isomorfismo.

Logo, considerando a homologia do ponto, obtemos $H_p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} R, & \text{se } p = 0; \\ 0, & \text{se } p > 0. \end{cases}$ □

4. APLICAÇÕES DA SEQUÊNCIA DE MAYER-VIETORIS

O objetivo neste capítulo é demonstrar um importante resultado, a sequência de Mayer Vietoris, que nos fornece uma técnica para calcular o grupo de homologia de certos espaços topológicos. Para o leitor não habituado a teoria de topologia, sugerimos [3], em especial para o entendimento da projeção estereográfica, que utilizaremos no exemplo 10. A principal referência desse capítulo é [5].

4.1 SEQUÊNCIA DE MAYER-VIETORIS

Sejam X um espaço topológico, $U, V \subset X$ tais que $X = \text{Int}(U) \cup \text{Int}(V)$ onde Int denota o interior do conjunto. Denotaremos por \mathbb{U} o par (U, V) . Podemos associar à \mathbb{U} um novo complexo de cadeias $S_*^{\mathbb{U}}(X)$ dado da seguinte forma:

Seja $C_p^{\mathbb{U}}(X) \subset C_p(X)$, onde $\phi \in C_p^{\mathbb{U}}(X)$ é um p -simplexo singular de X , $\phi : \sigma_p \rightarrow X$, tal que $\phi(\sigma_p) \subset U$ ou $\phi(\sigma_p) \subset V$. Considere $S_p^{\mathbb{U}}(X) \subset S_p(X)$ o R -módulo livre gerado por $C_p^{\mathbb{U}}(X)$, cujos elementos são somas formais $n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + \dots + n_r\phi_r$, onde $\phi \in C_p^{\mathbb{U}}(X)$ e $n_i \in R$, para todo i .

Consideremos $\partial_p : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$. Se $\phi \in S_p^{\mathbb{U}}(X)$ então $F_i(\phi) : \sigma_{p-1} \rightarrow X$ é tal que $F_i(\phi)(t_0, \dots, t_{p-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1})$, que está contido em U ou em V , pois $\text{Im}(F_i(\phi)) \subset \phi$.

Desde que o operador ∂_p é a soma alternada das faces de ϕ , temos que $\partial_p(\phi) \in S_{p-1}^{\mathbb{U}}(X)$, sempre que $\phi \in S_p^{\mathbb{U}}(X)$ e portanto $\partial_p(S_p^{\mathbb{U}}(X)) \subset S_{p-1}^{\mathbb{U}}(X)$ e temos bem definido o operador bordo:

$$\partial_p : S_p^{\mathbb{U}}(X) \rightarrow S_{p-1}^{\mathbb{U}}(X).$$

Assim, temos o complexo de cadeias $S_*^{\mathbb{U}}(X)$, associado à cobertura $\mathbb{U} = (U, V)$ de X e pode-se verificar que a aplicação inclusão natural $i : S_*^{\mathbb{U}}(X) \rightarrow S_*(X)$ é uma aplicação de cadeia.

O R -módulo de homologia de $S_*^U(X)$ é dado por

$$H_p^U(X) = H_p(S_*^U(X)) = \frac{Z_p(S_*^U(X))}{B_p(S_*^U(X))} = \frac{Z_p^U(X)}{B_p^U(X)}.$$

Lema 3. Se $U = (U, V)$, com $U, V \subset X$ e $X = \text{Int}(U) \cup \text{Int}(V)$, então $i_{*p} : H_p(S_*^U(X)) \rightarrow H_p(X)$ é um isomorfismo, para cada $p \in \mathbb{N}$.

Demonstração: [5], teorema 1.14.

Teorema 6. (Sequência de Mayer Vietoris) Sejam U, V subconjuntos de um espaço topológico X , tais que $X = \text{Int}(U) \cup \text{Int}(V)$. Então existe uma sequência exata longa

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_p(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{h_*} H_p(X) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(U \cap V) \xrightarrow{g_*} \dots$$

onde $g_*(x) = (j_1^*(x), -j_2^*(x))$, $h_*(y, z) = i_{1*}(y) + i_{2*}(z)$ e Δ é o homomorfismo conectante com $j_1 : U \cap V \rightarrow U$, $j_2 : U \cap V \rightarrow V$, $i_1 : U \rightarrow X$, $i_2 : V \rightarrow X$, denotando as inclusões naturais.

Demonstração:

Sejam $A' = \{\phi : \sigma_p \rightarrow U : \phi \text{ é } n\text{-simplexo singular em } U\}$ e $A'' = \{\phi : \sigma_p \rightarrow V : \phi \text{ é } n\text{-simplexo singular em } V\}$.

Então, $S_n(U) = F'(A')$ é o módulo livre gerado por A' , $S_n(V) = F'(A'')$ é o módulo livre gerado por A'' , $S_n(U \cap V) = F'(A' \cap A'')$ é o módulo livre gerado por $A' \cap A''$ e $S_n^U(X) = F'(A' \cup A'')$ é o módulo livre gerado por $A' \cup A''$.

Logo, existe um homomorfismo natural $h : F(A') \oplus F(A'') \rightarrow F(A' \cup A'')$, definido por $h(a'_i, a''_j) = a'_i + a''_j$. Note que este homomorfismo h é um epimorfismo.

Por outro lado, existe um homomorfismo $g : F(A' \cap A'') \rightarrow F(A') \oplus F(A'')$, definido por $g(b_i) = (b_i, -b_i)$. Temos que g é monomorfismo e $h \circ g = 0$. Logo, $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(h)$.

Mostremos que $\text{Ker}(h) \subset \text{Im}(g)$.

Seja $v = (\sum n_i a'_i, \sum m_i a''_i) \in \text{Ker}(h)$. Se $h(\sum n_i a'_i, \sum m_i a''_i) = 0$, então

$$\sum n_i a'_i + \sum m_i a''_i = 0. \quad (I)$$

Desde que os módulos envolvidos são livres, temos (I) válida se, para cada n_i não nulo, $a'_i = a''_j$, para algum j e, além disso, $m_j = -n_i$. Todos os coeficientes não nulos m_j devem aparecer deste modo.

Assim, $a'_i \in A' \cap A''$, para todo i e, se $x = \sum n_i a'_i$ então $\sum m_i a''_i = -x$.

Assim,

$$x = \sum n_i a'_i \in F(A' \cap A'') \text{ e } g(x) = \left(\sum n_i a'_i, \sum m_i a''_i \right) = v.$$

Portanto, $\text{Ker}(h) \subset \text{Im}(g)$.

Temos que $\text{Im}(g) = \text{Ker}(h)$ e a sequência exata:

$$0 \rightarrow F(A' \cap A'') \xrightarrow{g} F(A') \oplus F(A'') \xrightarrow{h} F(A' \cup A'') \rightarrow 0$$

Assim, obtemos a sequência exata

$$0 \rightarrow S_p(U \cap V) \xrightarrow{g\#} S_p(U) \oplus S_p(V) \xrightarrow{h\#} S_p^U(A' \cup A'') \rightarrow 0.$$

para cada $p \in \mathbb{N}$.

Desse modo, temos a sequência exata de complexos de cadeias:

$$0 \rightarrow S_*(U \cap V) \xrightarrow{g_*} S_*(U) \oplus S_*(V) \xrightarrow{h_*} S_*^U(X) \rightarrow 0.$$

Pelo teorema do homomorfismo conectante 1, temos a seguinte sequência exata longa de homologia:

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_p(S_*(U \cap V)) \xrightarrow{g_*} H_p(S_*(U) \oplus S_*(V)) \xrightarrow{h_*} H_p(S_*^U(X)) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(S_*(U \cap V)) \dots$$

Pela definição de complexos de cadeias, segue que

$$H_p(S_*(U) \oplus S_*(V)) \cong H_p(S_*(U)) \oplus H_p(S_*(V)) = H_p(U) \oplus H_p(V).$$

Além disso, pelo lema anterior,

$$H_p(S_*^U(X)) \cong H_p(S_*(X)) = H_p(X).$$

Portanto, temos a sequência exata longa

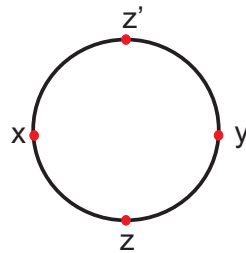
$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{g_*} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{h_*} H_p(X) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(U \cap V) \dots$$

□

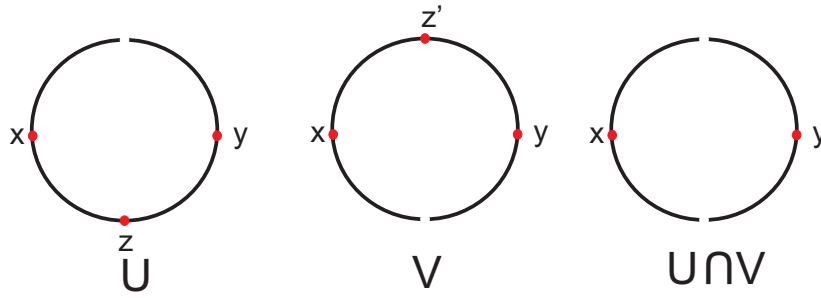
4.2 APLICAÇÕES

Exemplo 10. Se $X = S^1$ então $H_p(S^1) = \begin{cases} R, & \text{se } p=0,1; \\ 0, & \text{se } p > 1. \end{cases}$

De fato, consideremos em S^1 , z como sendo o pólo sul, z' sendo o pólo norte, x e y como mostrados na figura.



Sejam $U = S^1 - \{z'\}$ e $V = S^1 - \{z\}$, U e V são abertos e $U \cup V = X = S^1$.



Temos que $U \cap V = S^1 - \{z, z'\}$. Pelo teorema da sequência de Mayer-Vietoris, existe uma sequência exata longa

$$\cdots \rightarrow H_1(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{h_*} H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{h_*} H_0(S^1) \rightarrow 0 \quad (I)$$

Pela projeção estereográfica temos que $U = S^1 - \{z'\}$ é homeomorfo a \mathbb{R} . Como \mathbb{R} é contrátil, então

$$H_p(U) \simeq H_p(\mathbb{R}) = \begin{cases} R, & \text{se } p = 0 \\ 0, & \text{se } p \neq 0. \end{cases}$$

Analogamente, temos

$$H_p(V) \simeq H_p(\mathbb{R}) = \begin{cases} R, & \text{se } p = 0 \\ 0, & \text{se } p \neq 0. \end{cases}$$

Assim, $H_p(U) \oplus H_p(V) = 0$ se $p > 0$ e $H_0(U) \oplus H_0(V) = R \oplus R$.

Sendo S^1 um espaço conexo por caminhos, temos pela proposição 9 que $H_0(S^1) = R$.

Como $U \cap V = S^1 - \{z, z'\}$ temos que $U \cap V$ tem duas componentes conexas A e B . E pela proposição 10 obtemos $H_0(U \cap V) = R \oplus R$. Logo, $H_0(U \cap V) = \langle \bar{x}; \bar{y} \rangle$.

Logo a sequência (I) torna-se

$$\cdots 0 \rightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} R \oplus R \xrightarrow{g_*} R \oplus R \xrightarrow{h_*} R \rightarrow 0, \quad (II)$$

sendo esta uma sequência exata, temos $\text{Ker}(\Delta) = \text{Im } h_* = \{0\}$. Logo Δ é injetora.

Segue que

$$H_1(S^1) \simeq \text{Im}(\Delta) = \text{Ker}(g_*) = \text{Ker}(j_1^*, -j_2^*) \subset H_0(U \cap V) = \langle \bar{x}; \bar{y} \rangle$$

Seja $a\bar{x} + b\bar{y} \in \text{Ker}(j_1^*, -j_2^*)$, $a, b \in R$, então

$$a\bar{x} + b\bar{y} \in \text{Ker}(j_1^*, -j_2^*) \Rightarrow (j_1^*, -j_2^*)(a\bar{x} + b\bar{y}) = (j_1^*(a\bar{x} + b\bar{y}), -j_2^*(a\bar{x} + b\bar{y})) = \begin{cases} j_1^*(a\bar{x} + b\bar{y}) = 0 \\ j_2^*(a\bar{x} + b\bar{y}) = 0 \end{cases}$$

Temos que $j_1^* : H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U)$.

Além disso, $j_1^*(\bar{x}) = \bar{x}$ e $j_1^*(\bar{y}) = \bar{y} = \bar{x}$ em U , pois $x - y = \partial_1\phi$, onde ϕ é um 1-simplexo que une o ponto x ao ponto y .

Logo, $j_1^*(a\bar{x} + b\bar{y}) = (a + b)\bar{x}$.

Deste modo,

$$j_1^*(a\bar{x} + b\bar{y}) = (a + b)\bar{x} = 0 \iff a + b = 0 \iff a = -b.$$

De modo análogo,

$$j_2^*(a\bar{x} + b\bar{y}) = 0 \iff a = -b.$$

Portanto, se $(a\bar{x} + b\bar{y}) \in Ker(j_1^*, -j_2^*)$; então

$$a\bar{x} + b\bar{y} = a\bar{x} - b\bar{y} = a(\bar{x} - \bar{y}) \in \langle \bar{x} - \bar{y} \rangle \cong R,$$

ou seja,

$$Ker(j_1^* - j_2^*) \subset \langle \bar{x} - \bar{y} \rangle \simeq R.$$

É claro que $\langle \bar{x} - \bar{y} \rangle \subset Ker(j_1^*, -j_2^*)$.

Desta forma, $H_1(S_1) \simeq Ker(g_*) = Ker(j_1^*, -j_2^*) \simeq R$.

Calculemos $H_p(S_1)$, se $p > 1$.

Pela sequência de Mayer Vietoris, temos

$$\dots \rightarrow H_p(U) \oplus H_p(V) \rightarrow H_p(S_1) \rightarrow H_{p-1}(U \cap V) \dots \rightarrow .$$

Como já vimos, se $p > 0$ então $H_p(U) = H_p(V) = 0$ e $U \cap V$ tem duas componentes conexas por caminhos A e B , com A e B contráteis. Portanto, temos para $p \neq 0$,

$$H_p(U \cap V) = H_p(A) \oplus H_p(B) = 0.$$

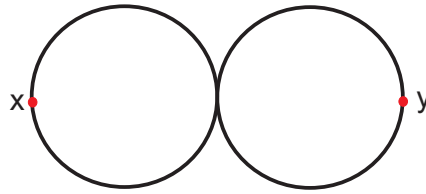
Como $p > 1$, temos $p - 1 > 0$. Portanto $H_{p-1}(U \cap V) = 0$. Desde modo, a sequência para $p > 1$ é

$$0 \rightarrow H_p(S_1) \rightarrow 0.$$

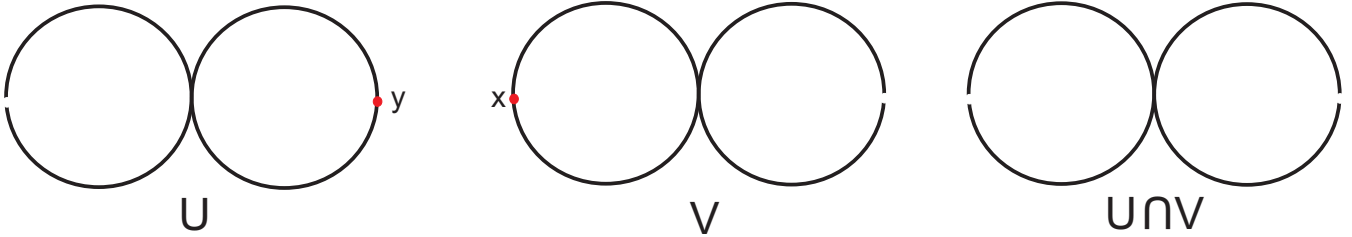
Logo, $H_p(S_1) = 0$, se $p > 1$.

Portanto, $H_p(S^1) = \begin{cases} R, & \text{se } p=0,1; \\ 0, & \text{se } p > 1. \end{cases}$

Exemplo 11. Seja X = figura 8 e $R = \mathbb{Z}$, então $H_p(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p=0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } p=1 \\ 0, & \text{se } p > 1. \end{cases}$



Consideremos $U = X - \{x\}$; $V = X - \{y\}$ e $U \cap V = X - \{x, y\}$ os subespaços de X .



Temos que U e V são abertos, $X = U \cup V$. Deste modo, pelo Teorema da Sequência de Mayer Vietoris, existe um sequência exata longa

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_p(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{h_*} H_p(X) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(U \cap V) \xrightarrow{g_*} \dots$$

Sendo X conexo por caminhos, temos que $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Além disso, temos que U e V são homotopicamente equivalentes a S^1 . Segue que,

$$H_p(U) = H_p(V) = H_p(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p=0,1; \\ 0, & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

Temos também que $U \cap V$ tem o mesmo tipo de homotopia do ponto. Logo,

$$H_p(U \cap V) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p = 0; \\ 0, & \text{se } p \neq 0. \end{cases}$$

Desde modo, para $p > 1$, temos a sequência exata

$$\dots \rightarrow 0 = H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{h_*} H_p(X) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(U \cap V) = 0 \rightarrow \dots,$$

ou seja, temos a sequência exata

$$0 \rightarrow H_p(X) \rightarrow 0.$$

Portanto, $H_p(X) = 0$, se $p > 1$.

Falta calcular $H_1(X)$. Como $U \cap V$ é conexo, segue que $H_0(U \cap V) = \mathbb{Z}$.

Da sequência exata, obtemos:

$$\begin{aligned} \dots 0 = H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_0(U \cap V) = \mathbb{Z} \rightarrow \\ \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_0(X) = \mathbb{Z} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Podemos mostrar quer $Ker(g_*) = Ker(j_1^*, -j_2^*) = 0$.

De fato, como $Ker(g_*)$ é subgrupo de $H_0(U \cap V) = \mathbb{Z}$, as possibilidades para $Ker(g_*)$, a menos de isomorfismos, são $Ker(g_*) = Ker(j_1^*, -j_2^*) = \{0\}$, isto é, g_* é injetor, ou $k\mathbb{Z}$, onde k inteiro, $k > 1$, ou \mathbb{Z} , quando g_* é o homomorfismo nulo. Se

$$Ker(g_*) = k\mathbb{Z} \Rightarrow Im(g_*) = \frac{H_0(U \cap V)}{Ker(g_*)} = \frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_k,$$

o grupo cíclico finito de ordem k .

Assim, $\mathbb{Z}_k \simeq Im(g_*) = Ker(h_*) \subset H_0(U) \oplus H_0(V) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$; o que é uma contradição pois $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ não tem elemento de ordem finita. Se

$$Ker(g_*) = \mathbb{Z} \implies Ker(h_*) = Im(g_*) = 0.$$

Logo,

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \simeq \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{0} = \frac{H_0(U) \oplus H_0(V)}{Ker(h_*)} \simeq Im(h_*) = H_0(X) = \mathbb{Z},$$

pois h_* é sobrejetora, isto é, obtemos $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$; o que é uma contradição.

Portanto, a única possibilidade é que $Ker(g_*) = Ker(j_1^*, -j_2^*) = 0$, ou seja, g_* é injetor.

Segue que, $Im(\Delta) = Ker(g_*) = Ker(j_1^*, -j_2^*) = \{0\}$, ou seja, $\Delta = 0$, onde $\Delta : H_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Deste modo, $Ker(\Delta) = H_1(X)$. Porém,

$$Ker(\Delta) = Im(h_*) = Im(i_{1*} + i_{2*}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

porque $h_* := i_{1*} + i_{2*}$ é injetora visto que $H_1(U \cap V) = 0$, uma vez que $U \cap V$ contrátil. Assim,

$$H_1(X) \simeq Im h_* = Ker(\Delta) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$\text{Finalmente, } H_p(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p=0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } p=1 \\ 0, & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Croom, F. H.: *Basic Concepts of Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [2] Hu, S. T.: *Introduction to Homological Algebra*. San Francisco: Holden-Day, 1968.
- [3] Lima, E. L.: *Elementos de Topologia Geral*. IMPA, 2009.
- [4] Lima, E. L.: *Homologia Básica*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [5] Vick, J. W.: *Homology Theory: an introduction to algebraic topology*. New York: Springer-Verlag, 1973.