

ALBERT WILLIAN FARIA

**MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DE PLAQUES
COMPOSITES : CONTRIBUTION A L'ETUDE DE
L'AMORTISSEMENT, ENDOMMAGEMENT ET PRISE
EN COMPTE D'INCERTITUDES**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

2010

THÈSE

présentée à

LA FACULTE D'INGENIERIE MECANIQUE (FEMEC)
DE L'UNIVERSITÉ FEDERALE D'UBERLANDIA

pour obtenir le
GRADE DE DOCTEUR
DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTE
et
DE L'UNIVERSITE FEDERALE D'UBERLANDIA
Spécialité Mécanique

Thèse en cotutelle Université de Franche-Comté – Université
Fédérale d'Uberlândia

**MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DE PLAQUES
COMPOSITES : CONTRIBUTION À L'ETUDE DE
L'AMORTISSEMENT, ENDOMMAGEMENT ET PRISE EN
COMPTE D'INCERTITUDES**

par

Albert Willian FARIA

Soutenue le 19 novembre 2010 devant la Commission d'Examen :

Président :

M. V. STEFFEN Jr. : Professeur, FEMEC, Université Fédérale d'Uberlandia

Rapporteurs :

M. A. ELHAMI, Professeur, INSA de Rouen, France

M. M.-A. TRINDADE, Professeur, EESC, Université de Sao Paulo

Examineurs :

M. L. BOUBAKAR, Professeur, Université de Franche-Comté

M. D. A. RADE, Professeur, FEMEC, Université Fédérale d'Uberlandia, (Co-Directeur de thèse)

M. N. BOUHADDI, Professeur, Université de Franche-Comté (Co-Directeur de thèse)

ALBERT WILLIAN FARIA

**MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DE PLAQUES COMPOSITES :
CONTRIBUTION À L'ETUDE DE L'AMORTISSEMENT,
ENDOMMAGEMENT ET PRISE EN COMPTE D'INCERTITUDES**

TESE apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientadores: Prof. Dr. Domingos Alves Rade
Prof. Dr. Noureddine Bouhaddi

UBERLÂNDIA - MG

2010

REMERCIEMENTS

Les travaux rapportés dans ce mémoire sont le fruit d'une collaboration scientifique entre le Laboratoire de Mécanique des Structures Prof. José Eduardo Tannus Reis, de la Faculté de Génie Mécanique de l'Université Fédéral d'Uberlândia, au Brésil, sous la co-direction du Professeur Domingos Alves RADE, et du Laboratoire de Mécanique Appliquée R. Chaléat (LMARC) de l'Université de Franche-Comté, à Besançon-France, sous la co-direction du Professeur Noureddine BOUHADDI, dans le cadre du Projet CAPES-PDEE.

Je remercie cordialement le Professeur RADE de m'avoir accueilli au sein du LMest et encadré pendant deux ans de Master et ces trois années de thèse. Il a mis en place les conditions propices au bon déroulement de mes travaux et a su me prodiguer des inestimables réflexions. Ses conseils en matière d'enseignement et de recherche ont toujours été précieux et je suis heureux de pouvoir lui exprimer ici mes remerciements.

J'exprime aussi toute ma reconnaissance au Professeur BOUHADDI pour m'avoir accueilli et dirigé au sein du LMARC dans son groupe de doctorants, pendant douze mois, où j'ai pu travailler sur les sujets abordés dans ce mémoire et qui ont contribué de manière profonde à son enrichissement.

Je tiens à remercier tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail : en premier Professeur Abdelkhalak ELHAMI et Professeur Marcelo Areias TRINDADE qui ont accepté d'être à la fois rapporteurs du manuscrit et membres du jury, puis Professeur Lamine BOUBAKAR qui a accepté d'être rapporteur et Professeur Valder STEFFEN JR. qui en a assuré la présidence.

J'ai aussi une pensée toute particulière pour M Lamine BOUBAKAR et Mme Frédérique TRIVAUDEY pour m'avoir accueilli au LMARC, et plus spécialement pour cette dernière qui m'a dédié de nombreuses heures durant mes travaux au laboratoire sur le sujet de l'endommagement, et ceci avec amitié et intérêt. Son assistance a été à tout moment palpable et je désire qu'elle accepte mes profonds remerciements.

Je remercie cordialement M Antonio Marcos Gonçalves de LIMA, professeur à la Faculté de Génie Mécanique de l'Université Fédéral d'Uberlândia, pour son aide indispensable dans les développements des outils informatiques utilisés durant mes travaux de recherche au Brésil concernant les traitements viscoélastiques par couche contrainte, la thématique des éléments

finis stochastiques et pour les conseils qu'il m'a prodigués tant en matière d'enseignement que de recherche.

Pour tous mes amis qui m'ont apporté leur soutien moral mais aussi scientifique, pendant ces années d'études dans les laboratoires LMest et LMARC, je leur en suis sincèrement reconnaissant. Parmi ceux-ci, je dois citer : la Prof. Raquel Santini Leandro RADE, Dalila Andrade LARA, Edson KOROISHI, Romes Antônio BORGES, Danuza Cristina SANTANA, Petr DAVID, Adailton SILVA BORGES, Lizeth Vargas PALOMINO, Karina Mayiumi TSURUTA, Matthieu Remiggio Roux GRAVADE, Murilo Borges BARROS, Leonardo LEUCAS, Alexandre BEZERRA, Thiago de Paula SALES, Wellington Luziano DE PAULO, Francisco Eustáquio ARAÚJO, Carlos Humberto de Freitas VIEIRA, Guillaume HAM, Tobias Souza MORAIS, William Henrique Pereira GUIMARÃES, Mylène VILLARS, Olivia PÉTILLOT, Edson Borges DE ÁVILA, Leandro CHAVES, Leandro COUTINHO, Felipe MARIANO, Odair NUNES JUNIOR, Jhojan Enrique ROJAS, José Reis V. MOURA JÚNIOR, Rogério R. dos SANTOS et Thierry VERDOT. Je souhaite remercier mes amis Sylvain LAMBERT, Jean de CAZENOVE et Emmanuel PILLET pour les gentilles suggestions concernant la rédaction en français, et plus particulièrement ce dernier pour sa collaboration au développement des éléments finis stochastiques pour les composites, mais aussi pour les heures gourmandes que nous avons passé dans les divers restaurants d'Uberlândia.

J'ai eu la chance de pouvoir être financé personnellement par les agences boursières brésiliennes de la Coordination de la Formation de Perfectionnement du Personnel de Niveau Supérieur (CAPES), pendant mon séjour de trois ans au Brésil, ainsi que du Conseil National de Développement Scientifique et Technologique (CNPq), pendant mon séjour d'un an en France.

Finalement, il m'aurait été impossible de réaliser ce travail sans le soutien de ma famille, en particulier de ma mère Madame Cleusa Ilda PEREIRA, qui dès l'enfance m'a fait savoir l'importance des études et qui pendant tout mon parcours m'a encouragé à me dévouer à mes rêves, même en sachant que ceux-ci m'imposaient plusieurs milliers de kilomètres entre nous.

« Si j'ai vu plus loin que les autres, c'est parce que j'ai été porté par des épaules de géants. » ...

Isaac NEWTON

et tous ci-dessus cités sont pour moi de vrais géants.

MERCI À TOUS.

**MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DE PLAQUES COMPOSITES :
CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE L'AMORTISSEMENT,
ENDOMMAGEMENT ET PRISE EN COMPTE D'INCERTITUDES**

TESE a ser **APROVADA** pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Domingos Alves RADE – FEMEC/UFU (Orientador)

Prof. Dr. Noureddine BOUHADDI – LMARC/UFC (Coorientador)

Prof. Dr. Lamine BOUBAKAR – LMARC/UFC (Examinador)

Prof. Dr. Abdelkhalak EL HAMI – INSA de Rouen (Relator)

Prof. Dr. Valder STEFFEN JR. – FEMEC/UFU (Examinador-Presidente)

Prof. Dr. Marcelo Areias TRINDADE – EESC/USP (Relator)

Uberlândia, novembro de 2010.

FARIA, A. W. **MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS COMPOSTAS: CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO AMORTECIMENTO, DANO E INCERTEZAS**. 2010. 319f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia (Uberlândia-Brasil) e Universidade de Franche-Comté (Besançon-França).

Resumo

No estado tecnológico atual, os materiais compostos são cada vez mais utilizados em produtos de alta tecnologia, sobretudo no setor aeroespacial, em virtude de sua resistência/peso superior às dos materiais metálicos, e em virtude de sua elevada rigidez e resistência mecânica à fadiga. Além disso, devido ao seu melhor comportamento ao choque mecânico e à combustão química, as estruturas em material composto oferecem uma boa condição de segurança. Estruturas fabricadas em material composto ou metálico são submetidas a uma grande variedade de carregamentos mecânicos ao longo de sua vida útil, que podem ser dependentes ou independentes do tempo, quer dizer, de natureza estática ou dinâmica. Acima das condições de serviço para as quais elas são concebidas, no domínio estático ou dinâmico, as estruturas compostas podem desenvolver diferentes formas de dano em seus elementos constitutivos. Nas últimas décadas, devido a sua capacidade de absorver e dissipar sob a forma de calor uma parte da energia de vibração dos sistemas estruturais, os materiais viscoelásticos vêm sendo intensamente empregados para reduzir os níveis de vibração e sonoros indesejáveis no domínio da dinâmica das estruturas. Nesta tese, estes materiais são aplicados sob a forma de tratamento interno em estruturas compostas, que permite o aumento das deformações por cisalhamento da camada viscoelástica e, assim, a dissipação da energia de vibração e a diminuição do dano. Interessa-se também, neste trabalho, o estudo de um mecanismo interno de dano ao nível da matriz polimérica no domínio dinâmico. Este mecanismo de dano é muito comum nos materiais estratificados constituídos de fibras orientadas em uma única direção. Nesta tese, é apresentada a modelagem por elementos finitos utilizando os elementos retangulares Serendipity, a oito pontos nodais, de placa composta, considerando três diferentes teorias para a aproximação do campo de deslocamento mecânico: FSDT (First-order Shear Deformation Theory), HSDT (Higher-order Shear Deformation Theory) e Layerwise-FSDT. As duas primeiras teorias permitem a modelagem de estruturas com multicamadas e a segunda é formulada para uma configuração assimétrica formada por três camadas, cuja formulação é

obtida pela imposição da continuidade dos deslocamentos ao longo da espessura do estratificado. Estas teorias são implementadas em ambiente MATLAB[®] para a modelagem de modelos EF de estruturas compostas de geometria simples. Para considerar a dependência no domínio da frequência e do tempo das propriedades dos materiais viscoelásticos, a aproximação através do uso do Módulo Complexo é utilizada. No entanto, para levar em conta sua dependência no domínio do tempo e da temperatura utiliza-se a aproximação através do uso de Derivadas Fracionárias. Utiliza-se também, neste trabalho, o emprego do Modelo Histerético Complexo (independente do tempo, da temperatura e da frequência) para considerar o amortecimento natural das camadas do estratificado. Além disso, esta tese propõe o uso de uma metodologia de propagação de incertezas em estruturas compostas. Para isso, adota-se a aproximação de Karhunen-Loève para a discretização do campo aleatório bidimensional. E, através de diversas simulações numéricas, são ilustrados os temas abordados ao longo deste trabalho de tese.

Palavras-chave: modelagem por elementos finitos, amortecimento viscoelástico, Módulo Complexo, Módulo Histerético Complexo e Derivadas Fracionárias, Dano, elementos finitos estocásticos.

FARIA, A. W. **MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DE PLAQUES COMPOSITES : CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE L'AMORTISSEMENT, ENDOMMAGEMENT ET PRISE EN COMPTE D'INCERTITUDES**. 2010. 319f. Thèse de Doctorat, Université Fédéral d'Uberlândia (Uberlândia-Brésil) et Université de Franche-Comté (Besançon-France).

Résumé des travaux

Dans l'état technologique actuel, les matériaux composites sont de plus en plus intégrés aux produits de haute technologie, surtout dans le secteur aérospatial, car leurs rapports résistance/poids est de loin supérieur à celui des métaux et ils présentent une rigidité et une résistance à la fatigue élevée. De plus, grâce à leurs meilleurs comportements aux chocs mécaniques et à la combustion chimique, les structures composites offrent de bonnes conditions de sécurité de structure. Les structures fabriquées en matériaux composites, ou métalliques, sont soumises à une grande variété de chargements mécaniques au cours de leur vie qui peuvent être dépendantes ou indépendantes du temps, c'est-à-dire, peuvent être de nature statique ou dynamique. Au-delà des conditions de service pour lesquelles elles ont été conçues, dans le domaine statique ou dynamique, les structures composites peuvent développer différentes formes d'endommagement dans leurs éléments constitutifs, et ceci à différents niveaux. Ces dernières décennies, de par leur capacité à absorber et dissiper sous forme de chaleur une partie de l'énergie vibratoire des systèmes structuraux, les *matériaux viscoélastiques* ont été intensivement utilisés pour réduire les niveaux vibratoire et sonores indésirables dans le domaine de la dynamique des structures. Dans ce mémoire, ces matériaux sont appliqués sous la forme de traitements internes dans les structures composites, permettant ainsi d'augmenter les déformations par cisaillement de la couche viscoélastique, et en conséquence, la dissipation de l'énergie vibratoire et la diminution d'endommagement. Nous nous intéressons aussi à l'étude dans le domaine de la dynamique, d'un *mécanisme interne d'endommagement* au niveau de la matrice polymérique. Celui-ci est très courant dans les matériaux stratifiés constitués de fibres orientées dans une seule direction. Dans ce mémoire de thèse, nous présentons la modélisation par éléments finis en utilisant des éléments rectangulaires *Serendipt*, à huit nœuds, de plaque composite, en considérant trois théories différentes pour l'approximation du champ de déplacement mécanique : *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*. Les deux premières utilisent plusieurs plis, et la dernière a une configuration

asymétrique à trois plis obtenue par l'imposition de la continuité des déplacements selon l'épaisseur du stratifié. Ces éléments ont été codés dans le logiciel MATLAB® pour la modélisation de modèles *EF* de systèmes de géométries académiques. Pour prendre en compte la dépendance en fréquence et en température des propriétés des matériaux viscoélastiques, nous utilisons l'approche du *module complexe*, et pour prendre en compte leur dépendance temporelle et en température nous adoptons l'approche des *dérivées fractionnaires*. En outre, nous employons un *modèle hystérétique complexe* indépendants de ces paramètres de temps, de température et de fréquence, pour prendre en compte l'amortissement des plis du stratifié. Nous proposons également une méthodologie de propagation des incertitudes dans les structures composites. Nous nous intéressons à la technique de discrétisation des champs aléatoires s'appuyant sur le développement de *Karhunen-Loève* pour des systèmes bidimensionnels en matériaux composite. À travers de nombreuses simulations numériques, nous illustrons les développements abordés tout au long du mémoire.

Mots clés : modélisation éléments finis, amortissement viscoélastique, module complexe et dérivées fractionnaires, endommagement, éléments finis composites stochastiques.

LISTE DE SYMBOLES

a	larguer de la structure
$A_{j+1}^{(\alpha)}$	coefficients de Grünwald
b	longueur de la structure
c	constant non-dimensionnel du modèle de Grünwald-Letnikov et du modèle de Gear Scheme
$C[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$	fonction covariance bidimensionnelle
$[C_g]$	matrice d'amortissement globale
$[C^g], [C^l]$	matrice des constantes d'élasticité de chaque dans le système de référence globale et local
$(E_0, E_\infty, \tau, \alpha)$	paramètres du modèle à DF
E'_{ij}, G'_{ij}	modules de stockage du stratifié
ε	critère de convergence
ε_i	précision en % entre les fréquences propres obtenues par deux systèmes quelconques
$\{\varepsilon^g\}$	vecteur de déformations dans le système global
$f_r(x, y)$	fonctions propres de la covariance bidimensionnelle
$\{F_g\}$	vecteur de chargement généralisé
$\{F_e(t, \bar{t})\}, \{\tilde{F}_e^v(t, \bar{t})\}$	force externes et internes élémentaires dépendants du temps et de la température
$\{\bar{F}_g(t, \bar{t})\}$	vecteur de chargement modifié par les vecteurs de forces externes et internes
$[\Phi_e], [\Phi_g]$	matrice de transformation de Guyan au niveau élémentaire et globale
(G_1, G_r, b, α)	paramètres du modèle à DF

x

λ_r	valeurs propres définies de la covariance bidimensionnelle
h	épaisseur total de la structure
h^k	épaisseur par pli
$H(x, y, \theta)$	champ aléatoire bidimensionnel
J	Jacobien
k_1, k_2	coefficients de correction des cisaillements transversaux
$[\bar{k}_r^e], [\bar{m}_r^e]$	matrices de raideur et de masse déterministes au niveau élémentaire
K	l'énergie cinétique totale du système
$[K_e], [K_g]$	matrices de raideur élémentaire et globale
$L_{cor,x}, L_{cor,y}$	longueur de corrélation dans la direction x et y du système discrétisé
$[L_e]$	matrice de connectivité
$[\Lambda]$	matrice spectrale
$[M_e], [M_g]$	matrices de masse élémentaire et globale
N_c	nombre total de plis selon l'épaisseur du stratifié
N_{ddl}	nombre total de ddls
N_e	numéro d'éléments finis dans lesquels la structure est discrétisée
N_i	fonctions de forme de l'élément Serendip à 8 nœuds
$N_{nœud}$	nombre total de nœuds
N_p	nombre de paramètres aléatoires
N_t	nombre de points au lieu de toute l'histoire de la fonction $f(t)$ à être dérivée
η_i	facteur d'amortissement de la structure d' i -ési mode de vibration
η_{ij}^E, η_{ij}^G	facteurs de perte du stratifié
ω	fréquence propre
$\bar{\omega}_1$	fréquence fondamentale
Ω_x, Ω_y	domaine de corrélation dans la direction x et y du système discrétisé

p^k	constantes d'élasticité : $E_1^k, E_2^k, E_3^k, G_{23}^k, G_{13}^k$ et G_{12}^k
P	l'énergie potentielle totale du système
$[\Psi]$	matrice modal
$[R]$	l'inverse de la matrice de transformation $[T]$
ρ^k	densité du matériel d'un pli k quelconque
$\{\sigma^g\}$	vecteur de contraintes dans le système global
t	temps
\bar{t} ou T	température
$[T]$	matrice de transformation du système locale au globale
$[\mathbf{T}_0]$	base de réduction nominale
θ^k	angle de rotation par pli k
$\{u, v, w\}$	composantes du champ de déplacements
$\{u_g\}$	vecteur de déplacement généralisé
$\{\hat{U}\}, \{\bar{U}\}, \{\widehat{U}\}$	vecteurs de déplacements des théories FSDT, HSDT et Layerwise-FSDT
W	travail total des forces externes
(x, y)	système de coordonnées globales d'élément plan
(ξ, η)	système de coordonnées locales d'élément plan
z_k, z_{k+1}	coordonnées des interfaces, supérieur et inférieur, par un pli k
$[Z(\omega, \bar{t})]$	matrice de raideur dynamique complexe
\cup	assemblage de matrices

ABRÉVIATIONS

<i>ddl</i>	degrés de liberté
<i>CLT</i>	Théorie Classique des Stratifiés
<i>FSDT</i>	Théorie de la Déformation de Cisaillement de Premier Ordre
<i>HSDT</i>	Théorie de la Déformation de Cisaillement d'Ordre Supérieur
<i>MEF</i>	Méthode des Éléments Finis
<i>LAYERWISE-FSDT</i>	Théorie en Couches Équivalentes Partielles Dépendants
<i>PVH</i>	Principe Variationnel de Hamilton
<i>PCEV</i>	Principe de la Correspondance Élastique-Viscoélastique
<i>PEFT</i>	Principe de l'Équivalence Fréquence-Température
<i>FRFs</i>	Fonctions de Réponses en Fréquences
<i>MC</i>	Modèle du Module Complexe
<i>DF</i>	Modèle à Dérivées Fractionnaires
<i>MEF-STOCHASTIQUE</i>	Modèle d'éléments Finis Stochastique
<i>HCL</i>	Latin Hyper Cube
<i>MEF-FSDT</i>	Méthode des Éléments Finis utilisant la théorie FSDT
<i>MEF-HSDT</i>	Méthode des Éléments Finis utilisant la théorie HSDT
<i>MAC</i>	De l'anglais « Modal Assurance Criterion »
<i>KL</i>	Karhunen-Loève

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I	INTRODUCTION GÉNÉRALE	19
1.1	Matériaux composites	20
1.2	MEFs déterministes pour structures en matériaux composites	22
1.3	Techniques de contrôle de vibrations appliquées aux structures en matériaux composites	23
1.4	Modèle d'évolution temporelle de l'endommagement	26
1.5	MEF-Stochastique appliquée aux structures en matériaux composites	27
1.6	Contenu du mémoire	28
CHAPITRE II	MATERIAUX COMPOSITES: ASPECTES THÉORIQUES ET NUMÉRIQUES	33
2.1	Introduction	34
2.2	Théories utilisées dans la formation numérique de structures composites	36
2.2.1	Théorie Classique des Stratifiés (CLT)	37
2.2.2	Théorie de la Déformation de Cisaillement de Première Ordre (FSDT)	40
2.2.3	Théorie de la Déformation de Cisaillement d'Ordre Supérieur (HSDT)	41
2.2.4	Théorie en Couches Équivalents Discrètes: Théorie Layerwise-FSDT	44
2.3	Relations déplacements-déformations	48
2.4	Équations constitutives des matériaux composites	50
2.5	Conclusions	57

CHAPITRE III	FORMULATION DES MODÈLES ELEMENTS FINIS PAR LES THÉORIES FSDT, HSDT ET LAYERWISE-FSDT	59
3.1	Introduction	59
3.2	Description de l'élément fini Serendip	61
3.3	Déplacements et déformations des théories FSDT et HSDT	63
3.4	Approximation des déplacements et des déformations de la théorie HSDT	69
3.5	Approximation des déplacements et de déformations de la théorie FSDT	72
3.6	Déplacements et déformations mécanique de la théorie Layerwise-FSDT	75
3.7	Approximation par éléments finis des déplacements et déformations de la théorie Layerwise-FSDT	81
3.8	Équation d'équilibre dynamique de la structure mécanique non-amortie	83
3.9	Fréquences propres et modes propres de la structure composite non-amortie	86
3.10	Simulations numériques	87
3.10.1	Validation numérique des formulations FSDT et HSDT	87
3.10.2	Comparaison numérique des MEFs avec les théories FSDT et Layerwise-FSDT	89
3.11	Conclusions	95
CHAPITRE IV	AMORTISSEMENT DES STRUCTURES EN MATÉRIAUX COMPOSITES VISCOELASTIQUES	97
4.1	Introduction	97
4.2	Mécanismes d'amortissement des matériaux viscoélastiques	100
4.2.1	Modèle du Module Complexe (MC)	100
4.2.2	Modèle à Dérivées Fractionnaires (DF)	102
4.3	Mécanismes d'amortissement du matériau stratifié	104
4.4	Formulation des MEFs incluant le modèle viscoélastique MC et le modèle hystérétique complexe (MHC)	112
4.5	Formulation des MEFs incluant le modèle viscoélastique DF	115
4.5.1	Introduction à l'étude des Dérivées Fractionnaires	115

4.5.2	Dérivées Fractionnaires appliquées à la modélisation d'éléments viscoélastiques	118
4.5.3	Incorporation du modèle viscoélastique DF dans la MEF	120
4.6	Analyse modale des structures viscoélastiques	125
4.7	Fonctions de Réponse en Fréquence de structures viscoélastiques	127
4.8	Réponses temporelles de systèmes dynamiques non-linéaires	128
4.9	Applications numériques	130
4.9.1	Étude d'amortissement de plaques composites sandwichs munies d'un noyau viscoélastique utilisant le MHC	131
4.9.2	Étude de la variation d'amortissement en fonction de l'épaisseur d'une plaque composite munie d'un noyau viscoélastique	136
4.9.3	Le modèle d'ordre fractionnaire appliqué aux formulations par éléments finis de structures amorties par matériau viscoélastique	147
4.9.4	Réponses harmoniques et transitoires de poutres sandwichs	151
4.10	Conclusions	155

CHAPITRE V	MÉCANISMES D'ENDOMMAGEMENT DANS LES MATERIAUX COMPOSITES	159
-------------------	---	------------

5.1	Introduction	159
5.2	Mécanisme d'endommagement dans le Milieu Continu	163
5.2.1	Paramètre scalaire d'endommagement	166
5.2.2	Concept de contrainte effective – Équivalence en déformation	167
5.3	Modèles Thermodynamiques	171
5.4	Modèle de comportement du matériau élastique endommagé	172
5.4.1	Élasticité endommagée	172
5.4.2	Fonction de charge	176
5.4.3	Définition de la contrainte effective	178
5.4.4	Écriture incrémentale - Schéma prédicteur-correcteur	178
5.5	Application de la MEF au modèle d'endommagement	180
5.5.1	Intégration numérique : méthode de la quadrature de Gauss	182

5.5.2	Calcul des déformations et des contraintes effectives aux points de Gauss	184
5.6	Méthode d'intégration temporelle implicite de Newmark appliquée au modèle dynamique endommagé	186
5.7	Résultats numériques	191
5.7.1	Validation au niveau élémentaire du mécanisme d'endommagement incorporé dans la formulation par élément finis avec la théorie FSDT	193
5.7.2	Analyse de l'endommagement dynamique de la poutre en matériau stratifié	197
5.7.3	Analyse de l'endommagement dynamique d'une plaque composite	202
5.8	Conclusions	211

CHAPITRE VI FORMULATION D'UN ÉLÉMENT FINI COMPOSITE STOCHASTIQUE - 213
APLICACION DE TÉCNICAS DE REDUCCIÓN DE MODELOS PARA
L'ÉTUDE DES STRUCTURES COMPOSITES

6.1	Introduction	213
6.2	Paramétrage du MEF-FSDT	216
6.3	Réduction modale des MEFs	218
6.4	Condensation de Guyan appliquée à la théorie HSST	221
6.5	Formulation générale du MEF-FSDT composite stochastique	223
6.5.1	Modélisation du champ stochastique	223
6.5.2	Modélisation des matrices de masse et raideur stochastiques	225
6.5.3	Modélisation des incertitudes	226
6.5.4	Méthodes de tirages aléatoires	228
6.6	Résultats numériques	229
6.6.1	Condensation de Guyan : Poutre métallique	229
6.6.2	Condensation de Guyan : Plaque composite	231
6.6.3	MEF-FSDT composite stochastique : Analyse de sensibilité des paramètres épaisseur, orientation, densité et module de cisaillement	235
6.7	Conclusions	244

CHAPITRE VII	CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES	247
7.1	Résumé des travaux et Contributions	247
7.2	Perspectives	254
ANNEXES		257
A.1	Transformations entre les systèmes de référence des matériaux composites	257
B.1	Principe variationnel de Hamilton	260
C.1	Introduction des conditions aux limites	268
C.2	Modal Assurance Criterion (MAC)	271
D.1	Fondements de la viscoélasticité linéaire	272
D.2	Modèles du comportement viscoélastique linéaire	274
D.3	Influence des facteurs environnementaux et opérationnels sur les matériaux viscoélastiques	279
D.4	Lissage des paramètres du modèle DF	284
E.1	Exemple de rupture mécanique provenant des mécanismes internes d'endommagement dans le matériau	288
E.2	Principes de la thermodynamique des processus irréversibles	290
F.1	Méthodologie pour le paramétrage des constantes d'élasticité et de l'orientation des fibres des plis	293
F.2	Méthodologie pour le paramétrage de l'épaisseur et la densité et l'obtention des matrices élémentaire et globales paramétrées	297
F.3	Modélisation du champ stochastique	302
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES		305

CHAPITRE I

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Pour commencer ce mémoire, il convient de souligner que le travail présenté est le fruit d'une co-tutelle qui s'inscrit dans le cadre de la coopération scientifique Brésil-France. Le travail a été réalisé, du côté brésilien, au sein du groupe de recherche en dynamique des structures de la *Faculté de Génie Mécanique (FEMEC)* de l'*Université Fédérale d'Uberlândia (UFU)*, plus précisément, dans le *Laboratoire de Mécanique des Structures Professeur José Eduardo Tannus Reis (LMEst)*, et du côté français, dans le *Département de Mécanique Appliquée Raymond Chaléat*, de l'*Institut FEMTO-ST*, à Besançon.

En résumé, le travail rapporté dans ce mémoire de thèse comprend les études synthétisées ci-dessous :

(1) une étude de l'état de l'art actuel des techniques de modélisation par éléments finis des matériaux composites stratifiés. Nous utilisons les théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*, formulées numériquement en utilisant le logiciel Matlab® ;

(2) des procédures de modélisation par éléments finis de structures composites amorties passivement par traitements viscoélastiques. Ces procédures utilisent soit le modèle du *Module Complexe (MC)* soit le modèle à *Dérivées Fractionnaires (DF)*. Les études sont réalisées dans le domaine temporel en utilisant les *DF* et dans le domaine fréquentiel en utilisant le *MC* ;

(3) une étude de l'amortissement intrinsèque de matériau stratifié. Dans ce cas, le modèle *Complexe Hystérétique*, de type structurel, est appliqué à des études dans le domaine fréquentiel ;

(4) une étude des aspects associés à un mécanisme interne d'endommagement dans le matériau stratifié. Plus spécifiquement, nous nous intéressons à sa représentation mathématique et son incorporation dans la formulation par éléments finis, basée sur la théorie *FSDT*, pour l'étude de structures composites endommagées dans les domaines statique et

dynamique temporel. Dans le domaine temporel, les équations du mouvement du système doivent incorporer le mécanisme interne d'endommagement associé à la matrice de raideur du pli de la structure. L'équation du mouvement du système endommagé résultant est résolue dans le domaine temporel en employant la *méthode d'intégration implicite de Newmark*, combinée avec la *méthode de Newton* ;

(5) la mise en œuvre de techniques permettant de réduire le coût de calcul associé aux modèles éléments finis (*MEFs*) formulés pour la modélisation de structures composites, amorties ou non. Plus particulièrement, sont utilisées les techniques de *paramétrage du MEF-FSDT*, de *condensation de Guyan* du *MEF-HSDT* et de *réduction modale* ;

(6) une étude de l'influence des incertitudes de quelques paramètres aléatoires du matériau composite. Les paramètres d'intérêt sont les épaisseurs des plis, les orientations des plis, des propriétés mécaniques des plis. Le *MEF-FSDT* paramétré est utilisé pour l'obtention d'un *MEF-FSDT-Stochastique* construit selon la théorie des éléments finis stochastiques. Les incertitudes sont propagées dans le *MEF-Stochastique* en employant l'expansion de *Karhunen-Loève*, et leurs influences sur les fonctions de réponse fréquentielles sont examinées.

Le but des prochaines sections est d'illustrer, de manière succincte, quelques aspects associés aux études synthétisées ci-dessus, et qui seront abordés et approfondis dans la suite de ce mémoire. Le contenu des chapitres est présenté à la fin de cette introduction.

1.1 Matériaux composites

Dans l'état technologique actuel, les matériaux composites sont de plus en plus intégrés aux produits de haute technologie, surtout dans le secteur aérospatial.

Les matériaux composites sont formés par deux ou plusieurs matériaux (ou phases) de différentes constitutions, ayant des propriétés mécaniques et physiques différentes les unes des autres (REDDY, 1997). Ces combinaisons sont effectuées de manière à ce que le matériau résultant ait un comportement mécanique différent des matériaux d'utilisation traditionnel, tel que les métalliques.

Différentes classifications des matériaux composites sont rencontrées dans la littérature scientifique. Ces matériaux peuvent être classés selon (1) la morphologie des agents de renforcement (les fibres ou particules) ou selon (2) ses composantes structurelles (les plis stratifiés) (SOUZA, 2003; PEREIRA Jr., 2004). La deuxième classification subdivise les

composites en *composites structuraux*, qui à leur tour, sont subdivisés en *composites sandwichs* et *composites stratifiés*. Ainsi, l'étude de divers aspects associés aux *composites structuraux* (modélisation, amortissement, endommagement) est un des buts de ce travail.

Selon Chalaye (2002), bien que les matériaux composites offrent plusieurs avantages en comparaison à l'utilisation des matériaux plus traditionnels, l'utilisation des matériaux plus traditionnels, tel que l'acier et l'aluminium, est normalement plus répandue que l'utilisation des matériaux composites, puisque ses performances et son comportement mécanique sont déjà mieux connus. Le principal avantage des matériaux composites, du point de vue mécanique, est son *ratio résistance/poids*. Celui-ci est de loin supérieur aux autres types de matériaux métalliques. De plus, les matériaux composites augmentent la durée de vie de certains équipements, en raison de ses propriétés mécaniques (rigidité élevée, bonne résistance à la fatigue), chimiques (résistance à la corrosion). De plus, grâce à son meilleur comportement mécanique aux chocs mécaniques et à la combustion chimique, les structures composites offrent de bonnes conditions de sécurité des structures. Certaines structures composites offrent un isolement thermique supérieur à celui des matériaux traditionnels, permettant la conception de formes structurales complexes et l'optimisation du *ratio coût/performance*.

Comme il est bien connu, le coût de fabrication des matériaux composites est supérieur à celui des matériaux traditionnels. Néanmoins, les avantages des matériaux composites rendent son utilisation rentable, de par l'augmentation de la vie de la structure, et en particulier quand ils sont appliqués en structures à haute valeur ajoutée (par exemple dans l'industrie aéronautique).

Dans de nombreuses applications, telles que les cellules d'avions, les structures composites sont souvent exposées à des sollicitations statiques, ou quasi-statiques, et à des perturbations dynamiques. De plus, elles sont exposées aux facteurs environnementaux, tels que le rayonnement solaire et l'humidité. Ces perturbations affectent les propriétés mécaniques du matériau composite et, en conséquence, peuvent affecter l'intégrité de la structure, car elles changent ses réponses statiques (tels que les déformations, la distribution de contraintes) et dynamiques (tels que les modes propres de vibrations, les fréquences propres et les facteurs d'amortissement). Ces changements conduisent à une dégradation soit immédiate de la structure, soit après une longue période d'exposition aux perturbations.

Pour conclure la présente section, on observe dans la littérature scientifique qu'il existe toujours la nécessité du développement incessant de techniques pour la modélisation efficace du comportement mécanique des matériaux composites, car leur domaine d'application est chaque jour plus large, plus complexe et plus importante. La modélisation, numérique ou

analytique, doit prendre en compte les différents types de sollicitations de conditions limites et de dégradations mécaniques auxquelles les structures composites sont soumises.

1.2 MEFs déterministes pour structures en matériaux composites

Parmi les différentes techniques d'approximation numérique des structures composites, la *méthode des éléments finis (MEF)* est la plus appropriée, principalement en raison de sa caractéristique avantageuse de flexibilité et de relative facilitée de mise en œuvre numérique. De plus, la *MEF* est aujourd'hui un outil d'ingénierie très mature, dont les potentialités et les limitations sont bien connues.

Par contre, comme il sera détaillé dans le *troisième chapitre*, nous pouvons observer dans les publications scientifiques l'existence de plusieurs variantes des techniques de modélisation par éléments finis de structures composites.

Parmi les formulations les plus utilisées, on trouve la *Théorie de la Déformation de Cisaillement de Premier Ordre (First-order Shear Deformation Theory - FSDT)* et la *Théorie de la Déformation de Cisaillement de Troisième Ordre*, aussi connue comme *Théorie de la Déformation de Cisaillement d'Ordre Supérieur (Higher-order Shear Deformation Theory - HSDT)*. L'ordre de la fonction polynomiale adoptée pour l'approximation des variables du champ de déplacements mécaniques du matériau composite est la principale différence entre ces deux théories.

Le choix, de l'une ou de l'autre des formulations est principalement conditionnée par l'épaisseur du composant modélisé. Dans les structures composites épaisses, l'utilisation de la théorie *HSDT* est recommandée par rapport à la théorie *FSDT*. Toutefois, celle-ci, en comparaison avec la théorie *HSDT*, présente un coût numérique moins lourd, car elle nécessite moins de degrés de liberté par élément fini.

De plus, le champ de déplacement mécanique selon l'épaisseur de la structure composite doit également être bien représenté, principalement dans le cas de structures hétérogènes (ARAÚJO et al., 2008). La structure hétérogène est composé d'au moins un pli de matériau dont les propriétés mécaniques sont différentes des autres plis du stratifié. La théorie dite *Théorie en Couches Équivalentes Partielles Dépendantes (TCE-PD)* (REDDY, 1997), ou simplement appelée ici théorie *Layerwise-FSDT*, est utilisée pour contourner les limitations des théories *FSDT* et *HSDT*.

1.3 Techniques de contrôle de vibrations appliquées aux structures en matériaux composites

Les vibrations structurales provenant de perturbations périodiques sont généralement indésirables et peuvent donner origine à des dégâts sérieux, à la fatigue structurale, causant du bruit interne ou externe par rayonnement acoustique ... etc. Cependant, il est possible de limiter les effets néfastes des vibrations structurales grâce à trois types de techniques de réduction de vibrations, décrites par Trindade (2000).

La première est la *technique d'annulation* (ou de *suppression*), utilisée surtout pour éliminer le bruit provenant de la vibration et non la vibration elle-même. Cette technique produit une source secondaire de bruit en face de la première, afin d'aboutir à l'annulation de la source primaire. La seconde technique est l'*isolation* qui consiste à éviter la transmission des vibrations d'un système à un autre sans éliminer les vibrations du système émetteur. Enfin, la troisième technique, dite d'*atténuation*, est utilisée pour diminuer l'amplitude des vibrations d'un système, en cas de l'échec ou de l'impossibilité de son isolation. De plus, elle est utilisée pour réduire le rayonnement acoustique, en cas d'impossibilité de production ou d'inefficacité d'une source secondaire d'anti-bruit. Les techniques d'atténuation consistent à diminuer l'amplitude des vibrations structurales dont les fréquences sont au voisinage des fréquences propres de la structure. Par conséquent, ces techniques permettent d'atténuer, ou même d'éliminer, les résonances des vibrations indésirables de la structure. Habituellement, les techniques d'atténuation sont classées en méthodes *actives* et en méthodes *passives*.

Selon Trindade (2000), les *techniques passives d'amortissement* des vibrations structurales utilisent l'intégration ou l'ajout de matériaux ou systèmes attachés à la structure à être amortie, sans aucune intervention extérieure supplémentaire, et l'énergie vibratoire est dissipée sous la forme de chaleur. C'est le principe du *contrôle passif de vibrations*.

Les *matériaux polymères viscoélastiques* sont des traitements passifs très efficaces pour réduire les amplitudes de résonance de structures vibrantes. Selon Johnson (1995), environ 85% des traitements passifs dans les applications industrielles modernes utilisent des matériaux polymères viscoélastiques.

Un autre moyen efficace d'atténuation des vibrations indésirables utilise les *circuits électriques shunts* (dans le topologie inductive, résistive, résonante, capacitive, multimodales,...). Ces circuits sont attachés au matériau piézoélectrique, qui est, à son tour, collé ou embouti dans la structure à être amortie (MOHEIMANI et FLEMING, 2006).

Un autre dispositif passif d'atténuation de vibrations est connu comme *Absorbeur Dynamique de Vibration (ADV)* et est employé sur la structure de base afin d'atténuer une fréquence d'excitation spécifique. Ce type de dispositifs a un comportement mécanique qui ressemble beaucoup à celui des circuits électriques shunt dans sa topologie du type résonante (HAGOOD et VON FLOTOW, 1991). Toutefois, son applicabilité industrielle est principalement limitée en raison de la diminution de son efficacité lorsque la fréquence d'excitation change, même de manière très faible. On trouvera des études sur les ADVs dans les travaux de Cunha Jr. (1999), Barros (2009) et autres.

Les avantages qui expliquent la popularité des matériaux viscoélastiques dans l'industrie sont leur capacité d'amortissement sur de larges bandes fréquentielles, leur facilité d'obtention commerciale et leur adaptation aux différents types de structures (plaques, coques, poutres, etc.). De plus, ils peuvent être fabriqués sous diverses formes, sont relativement simples à manipuler, et leur coût d'achat et d'application est relativement modéré. Néanmoins, ils ont des inconvénients, tels que : l'addition supplémentaire de masse à la structure, une efficacité fortement dépendante des conditions de travail et aux facteurs environnementaux.

Les techniques de contrôle actif de vibrations permettent de contrôler les vibrations de la structure à chaque instant par des *actionneurs* qui agissent sur la structure selon une *loi de commande* conçue en vue de minimiser les amplitudes de vibrations, tenant compte de mesures basées sur les réponses. Ces mesures sont fournies par une référence, ou par des *capteurs* intégrés à la structure (TRINDADE, 2000).

Pour la conception d'actionneurs employés dans le cadre du contrôle actif e passif, différents *matériaux adaptatifs* sont couramment utilisés étant donnée leur capacité de transformer différents types d'énergie. Ainsi, on distingue : (1) les *matériaux piézoélectriques*, *électro-restrictives* et *fluides électro-rhéologiques* qui transforment *l'énergie électrique en mécanique et réciproquement* ; (2) les *matériaux magnéto-restrictives* et les *fluides magnéto-rhéologiques* qui transforment, réciproquement, *l'énergie magnétique en mécanique* ; (3) les *alliages à mémoire de forme (Shape Memory Alloys - SMA)* qui transforment, réciproquement, *l'énergie thermique en énergie mécanique* (ROGERS, 1992; PIEFORT, 2001). Parmi les différents matériaux adaptatifs, les *matériaux piézoélectriques* sont indubitablement les plus utilisés dans les applications industrielles employant les techniques de contrôle actif de vibrations (FARIA, 2006).

Les techniques de contrôle passif de vibrations sont considérées comme stables, sûres et ayant une faible nécessité énergétique. Dans ce mémoire, celles-ci sont préférées aux

techniques de contrôle actif. Parmi les différentes options de contrôle passif, nous employons le traitement avec matériaux viscoélastiques, pour d'atténuer les vibrations indésirables des structures composites.

La fabrication de structures composites offre une grande variété de matériaux, mais nous nous intéressons seulement aux matériaux stratifiés et sandwichs. Les premiers sont constituées de l'empilage de plis avec différentes orientations, les seconds d'un stratifié collés à un noyau central. Le noyau est normalement fabriqué avec un matériau plus léger, de faible rigidité et résistance mécanique à la traction par rapport aux couches de la base et de la peau de la structure. Toutefois, il possède de bonnes propriétés mécaniques en compression (BERTHELOT, 1992; MENDONÇA, 2005). La peau et la base sont fabriquées en matériau stratifié, ou en matériau métallique. Dans ce mémoire, on adopte de pour le noyau des matériaux viscoélastiques.

La combinaison des matériaux composites avec les stratégies de contrôle passif par matériaux viscoélastiques a reçu beaucoup d'attention de la part des chercheurs pendant ces dernières années, tels que, par exemple, Trindade (2000), Wang, G (2001), Menieur et Shenoï (2003), Lima (2003), Stoppa (2003), Galucio et al. (2004), Malekzadeh et al. (2005), Shin et al. (2006), Lima (2007), Araújo et al. (2008) et autres.

Le mécanisme d'amortissement passif employant des matériaux viscoélastiques est formulé dans ce mémoire en utilisant les modèles basées sur le *Module Complexe* et sur les *Dérivées Fractionnaires*. Le choix est associé au domaine d'étude des structures, c'est-à-dire, le *domaine fréquentiel* ou le *domaine temporel*. Dans le premier cas, l'amortissement est formulé en utilisant le *Principe de la Correspondance Élastique-Viscoélastique (PCEV)* et le *Principe de l'Équivalence Fréquence-Température (PEFT)*. Dans le deuxième cas, l'amortissement du matériau viscoélastique est formulé en utilisant le *Calcul Fractionnaire*

De plus, dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'amortissement intrinsèque des plis du stratifié. Dans ce cas, nous utilisons le *modèle Complexe Hystérétique*, exprimé dans le domaine fréquentiel.

Les équations du mouvement du système mécanisme, amorti ou non amorti, obtenues par la modélisation par éléments finis, peuvent être résolues dans le domaine temporel ou fréquentiel. Ces équations du mouvement appliquées à la modélisation de structures composites, sans ou avec couche viscoélastique, sont résolues dans le domaine temporel en utilisant la *méthode d'intégration implicite de Newmark*. Dans le domaine fréquentiel, l'équation

du mouvement est utilisée dans le calcul des *Fonctions de Réponses en Fréquences (FRFs)* du système amorti.

1.4 Modèle d'évolution temporelle de l'endommagement

Du point de vue du matériau, un des inconvénients majeurs des structures fabriquées en matériaux composites, par rapport à celles en matériaux traditionnels, concerne le développement de mécanismes internes d'endommagement. Ceux-ci peuvent diminuer la rigidité et la résistance mécanique du matériau composite, et s'observent à différentes échelles dans le matériau. À l'échelle *micromécanique*, on observe par exemple, la rupture de fibres, la microfissuration matricielle et la décohésion fibre-matrice. À l'échelle *macromécanique*, on observe par contre, le délaminage entre plis adjacents, des fissurations visibles, de trous, etc. L'évolution de mécanismes internes d'endommagement est déclenchée de manière, soit autonome, soit associée. Dans les cas très évolués, ces phénomènes peuvent diminuer le niveau de sécurité de la structure composite par la réduction de la rigidité et de la résistance mécanique du matériau vierge.

Malgré la grande quantité de publications scientifiques associées aux *MEFs* incorporant les mécanismes internes d'endommagement, la plupart des études numériques concernent des études de structures composites dans les domaines, soit *statiques*, soit *quasi statiques*. Néanmoins, le nombre d'études dans le domaine dynamique a augmenté au cours des dernières années. Sur les publications scientifiques associées à l'étude de structures composites dans le domaine statique, on dispose des références de Boubakar et al. (2002-2003-2005), Zako et Uetsuji (2002), Kumar et Talreja (2003), Pavan et al. (2010), et autres. Dans le domaine dynamique, on trouve les publications de Lombardi (2003), Yann et al. (2006), Cheng et Li (2005), Yan et Yam (2004), Zhang et Taheri (2004), Seidel et al. (2005), Ahci et Talreja (2006), Fu et Lu (2006), Tan et al. (2008), Hassan et Batra (2008) et Elmarakbi et al. (2009).

Le mécanisme interne d'endommagement étudié dans ce mémoire est celui situé dans la matrice du pli. Ce genre de mécanisme est considéré comme un type générique d'endommagement, assez courant dans les plis constitués de *fibres de carbone*, de *verre* ou d'*aramide*, et insérés dans une matrice de type polymérique. Ces fibres sont employées dans la fabrication d'un pli unidirectionnel. Ce type d'endommagement est aussi présent dans les plis

d'architectures un peu plus complexes, comme dans les *composites renforcés par des tissus* (VRELLOS et al., 2006).

Ce mécanisme interne d'endommagement est formulé mathématiquement en employant la *Mécanique d'Endommagement des Milieux Continus*, associée aux principes de la *Thermodynamique des Processus Irréversibles*.

Dans ce mémoire, l'équation du mouvement du système mécanique incorporant le mécanisme interne d'endommagement, est obtenue par la formulation par éléments finis en utilisant la théorie *FSDT*, pour des études dans le domaine temporel de structures composites endommagées. Cette équation du mouvement est résolue en employant la méthode *d'intégration de Newmark, de type implicite*, incorporant la *méthode de Newton*.

1.5 MEF-Stochastique appliquée aux structures en matériaux composites

Les matériaux composites sont fabriqués avec des fibres insérées dans une matrice. L'assemblage harmonieux, *physiquement* et *chimiquement*, entre ces deux différents matériaux donne origine au pli du stratifié. La *micro-échelle* et la *macro-échelle*, résultants de l'association des différents composants du matériau composite, empêchent la connaissance précise des variations des propriétés mécaniques du matériau stratifié résultant, de sorte que les modèles de comportement doivent intégrer la notion *d'incertitude* sur les caractéristiques physiques du matériau composite. De plus, d'autres types d'aléas sont observés dans le processus de fabrication et d'application des matériaux composites, tels que, par exemple, les *aléas sur les conditions aux limites*, les aléas d'origine *géométrique* de la structure composite, et *sur les chargements imposés*. Mathématiquement, cette classe de problème est modélisée par des *équations de mouvement stochastiques*, dont les paramètres d'entrée sont des champs aléatoires. En ce sens, des changements aléatoires doivent être ajoutés au *MEF* afin de prendre en compte les effets stochastiques, conduisant ainsi à des *MEF-Stochastiques* (ZHANG et LU, 2004, GHANEM et SPANOS, 2003).

Les *aléas géométriques* sont associés à l'épaisseur de plis, à l'orientation des fibres. Les *aléas « matériau »* sont associées aux constantes d'élasticité et de cisaillement, aux coefficients de Poisson, etc. Les *aléas dus au chargement* sont associées au type de distribution de chargement, à sa localisation et valeur absolue, etc. Enfin, les aléas sur les *conditions limites*

sont associées au type de conditions limites appliquées à la structure (appuis simples, encastrement, etc.).

Les *MEF-Stochastiques*, pour le calcul de structures composites, sont plus réalistes que les *MEF-Déterministes*, car ils considèrent les différentes sources d'aléas sur la structure.

Parmi les *MEF* pour la considération des différents aléas, la *méthode des Moments*, basée sur des *expansions de Karhunen-Loève* (ZHANG et LU, 2004) et de *Neumann* (GHANEM et SPANOS, 2003), fournissent des résultats précis quand le niveau des incertitudes n'est pas très élevé. La *méthode de Monte Carlo* n'a pas cette restriction, mais le coût numérique est considérable (ZHANG, 2002 ; CHAKRABORTY et DEY, 1995). Selon Ghanem et Spanos (2003), une alternative au grand nombre de calculs numériques inhérents à la résolution de l'équation de mouvement du système stochastique est l'utilisation de la *méthode de Galerkin Spectrale*, développée par Ghanem et Spanos (2003). Toutefois, la taille du système d'équations à résoudre résultant de la méthode est sensiblement plus grande que celle obtenue par le calcul *MEF-déterministe* (AZEVEDO, 2009).

Récemment, Babuška et al. (2005) ont proposé la *méthode Spectrale de Galerkin Modifiée*. Celle-ci est basée sur l'utilisation de l'*expansion de Karhunen-Loève* et du *chaos polynomial* pour la construction d'une solution dépendant des incertitudes sur les paramètres du modèle proposé. D'abord, le champ aléatoire est décomposé en somme de *variables aléatoires gaussiennes normalisées* par l'*expansion de Karhunen-Loève*. Ensuite, la *moyenne* et la *variance* de la solution sont estimées sur l'ensemble des points de l'espace échantillonné. La méthode du Latin Hyper Cube (*HCL*) (IMAN et CONOVER, 1980; MANTEFEL, 2000) permet de réduire de manière significative les coûts de calcul de la simulation de Monte Carlo, tout en conservant son niveau de prédiction. Celle-ci est utilisée dans ce mémoire.

1.6 Contenu du mémoire

Hormis ce chapitre introductoire, ce mémoire est organisé en *six chapitres*, détaillés ci-dessous. Chaque chapitre contient l'état de l'art du contenu évoqué, le développement de la formulation (avec l'utilisation d'équations mathématiques, de tableaux et d'illustrations), des exemples d'applications numériques, des conclusions partielles du chapitre, et pour finaliser, les références bibliographiques utilisées.

Le **deuxième chapitre** présente une brève révision sur la caractérisation et utilisation des composites structuraux. Ensuite, il discute des fondements théoriques de la modélisation numérique des composites structuraux, en mettant l'accent sur la *MEF* des théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*. La relation entre *déformation-déplacement* pour chaque théorie est exprimée mathématiquement. Les théories *FSDT* et *HSDT* sont formulées par un pli équivalent selon la direction d'épaisseur du stratifiée, et la *Layerwise-FSDT* par plis discrets.

Le **troisième chapitre** fournit les principes de la formulation de l'élément fini *Serendip*, adopté dans les *MEFs*. La relation entre *déformation-déplacement* des théories est exprimée en utilisant les *variables nodales* et *fonctions de forme* de l'élément fini. Ensuite, en employant le *principe variationnel d'Hamilton*, au niveau élémentaire, et quelques transformations pour l'assemblage élémentaire-global, on obtient *l'équation du mouvement du système mécanique non amorti*. Celle-ci est formulée numériquement par des *MEFs*, aux niveaux élémentaire et global. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux solutions numériques, dans le domaine statique et fréquentiel, de *l'équation du mouvement du système mécanique non amorti*, considérant différentes structures composites et de conditions aux limites et chargements appliqués variés. Les fréquences et modes propres de vibration sont obtenus en employant des trois théories proposées.

L'objectif du **quatrième chapitre** est l'étude des mécanismes d'amortissement du matériau composite, notamment du type structural, en appliquant notamment les traitements viscoélastiques au travers d'élastomères. Les structures résultantes sont étudiées dans le domaine temporel et fréquentiel. Dans le domaine temporel, l'intérêt est le développement d'un modèle viscoélastique aux *Dérivées Fractionnaires (DF)*. Dans le domaine fréquentiel, nous employons le modèle du *Module Complexe (MC)*. Ces deux modèles sont incorporés à la *MEF* des théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*, pour la formulation par éléments finis de structures composites amorties. Les structures sandwichs résultantes ont une couche centrale en matériaux viscoélastique. Les modèles *MC* et *DF* sont appliqués pour l'approximation numérique du comportement réel des matériaux viscoélastiques. Les modèles *MC* et *DF* nous permettent d'insérer la dépendance du matériau viscoélastique par rapport à la température et à la fréquence d'excitation, dans les domaines temporel et fréquentiel. Pour la résolution des équations du mouvement du système amorti dans le domaine temporel, avec les *DF*, on utilise un algorithme *d'intégration explicite de Newmark*, en considérant de petits déplacements. Cet algorithme est comparé avec une version implicite implémentée numériquement, selon une référence de la littérature. Dans le domaine fréquentiel, en utilisant les *MC* pour la formulation

des matériaux viscoélastiques, nous utilisons des *Fonctions de Réponses en Fréquences (FRF)* pour l'observation des solutions des équations du mouvement du système amorti.

De plus, on s'intéresse à la formulation du mécanisme d'amortissement intrinsèque de la matrice polymérique du pli. Nous utilisons un modèle *Hystérétique Complexe* appliqué dans les constantes d'élasticité des matériaux composites. Dans ce mémoire, l'amortissement intrinsèque n'est pas dépendant de la température et fréquence d'excitation. Les modèles d'amortissement sont incorporés aux *MEF* de structures en matériaux composites de géométries simple (plaques e poutres), pour l'obtention des fréquences propres et facteurs d'amortissement des structures amorties analysées, en utilisant des procédures numériques itératives.

Dans les exemples numériques proposés, pour différentes structures composites (sans ou avec couche viscoélastique), nous obtenons *les réponses dynamiques dans les domaines temporel et fréquentiel*.

Le **cinquième chapitre** s'intéresse à l'étude de mécanismes d'endommagements, particulièrement dans la matrice polymérique du matériau composite. L'endommagement est formulé en utilisant la *Mécanique des Milieux Continus*, qui décrit les mécanismes internes de création d'endommagement. Ceux-ci, associé à la *thermodynamique des processus irréversibles*, permis la formulation du mécanisme de l'évolution temporel d'endommagement, avec l'utilisation des concepts de *variables d'état*. La *mécanique d'endommagement dans le Milieux Continus* fournit des concepts tels que le *paramètre scalaire d'endommagement*, la *contrainte effective et la déformation effective*. Elle présente également certains *critères de rupture* étudiés selon l'état de contrainte dans la structure. Un modèle d'endommagement numérique est formulé, en employant ces concepts et est postérieurement utilisé dans l'assemblage avec le *MEF-FSDT* pour l'étude des structures en composites endommagés. En utilisant les notions des deuxième et troisième chapitres, différents exemples numériques sont proposés. Ils sont employés pour la validation analytique, dans le domaine statique, du mécanisme interne d'endommagement dans une structure composite. L'étude du mécanisme d'endommagement sur les détériorations de la résistance et de la rigidité mécanique, pour des structures composites étudiées dans le domaine temporel, est utilisé en employant, dans l'équation du mouvement du système endommagé, le méthode d'intégration implicite de Newmark.

Le **sixième chapitre** présente une technique de paramétrage du *MEF-FSDT*, dont théorie *FSDT* est formulée dans le *troisième chapitre*. Ce chapitre présente également des techniques

de condensation, pour la réduction du coût de calcul numérique du *MEF-FSDT*. Celles-ci incluent les techniques de paramétrage du *MEF-FSDT*, les techniques de condensation modale des *MEFs* et la technique de condensation de *Guyan* appliquée au *MEF-HSDT*. En utilisant les deux premières techniques de réduction, un *MEF-FSDT-Stochastique* est proposé. Celui-ci considère la variation des paramètres incertains, de type géométrique et matériau dans le *MEF-FSDT*, pour l'étude stochastique de structures composites. Les champs aléatoires du *MEF-Stochastique* des structures composites sont générés en employant l'expansion de *Karhunen-Loève* afin de propager les incertitudes. Les *FRFs* de la structure composite sont obtenues et comparées avec celles obtenues en appliquant la *méthode directe de Monte Carlo* sur le *MEF-FSDT* déterministe

Finalement, le **septième chapitre** apporte les résultats et conclusions générales de ce mémoire de thèse, en présentant quelques perspectives aux études réalisées au long des différents chapitres.

Pour finaliser, nous tenons à préciser que, parmi les thématiques de recherche du *LMEst* en concernant les thèmes abordés dans ce mémoire de thèse, on a l'étude de structures fabriquées en métaux avec des traitements viscoélastiques et qui sont étudiées depuis quelques années. Particulièrement en ce qui concerne : (1) les aspects relatifs à son modélisation numérique par éléments finis, (2) des mesures expérimentales des facteurs d'amortissement structural et (3) l'optimisation multicritère et robuste des structures métalliques amorties. Ces études sont traitées, par d'exemple, dans les travaux de Stoppa (2003) et de Lima (2003-2007). Dans son rapport de Master, de Faria (2006) explore les techniques de modélisation numérique par éléments finis de structures composites stratifiées, avec ou sans patchs piézoélectriques collés sur la structure. La présente thèse de Doctorat peut être considérée comme l'extension naturelle du travail de Master réalisé précédemment. D'autres travaux sur la même thématique incluent : l'évolution et la détection d'endommagement dans les structures composites stratifiées, en employant la technique des mesures expérimentales d'impédance électromécanique (travaux de Pereira Jr. (2004) et de Tsuruta (2008)).

Dans le cadre de recherches du *LMARC* communes à ce travail de thèse, on trouve des publications diverses sur les thématiques de modélisation numérique par éléments finis de structures composites, mécanismes de l'évolution d'endommagement aux structures composites, modélisation des matériaux viscoélastiques, condensation et réduction de *MEF*, formulation des éléments finis stochastiques, etc. Parmi les travaux portant sur la thématique citée, nous citons, par exemple, les publications de Gelin (1992), Perreux et al. (1992), Perreux

et Oytana (1993), Gelin et Nguegang (1996), Richard et Perreux (2000), Perreux et Lazuardi (2001 - partie A et partie B), Boubakar et al. (2002) et (2003), Raynaud et al, (2003), Boubakar et al. (2005) et Guedri (2006).

Ainsi, grâce à l'ancienne relation de coopération existant entre les deux laboratoires de recherche, et aux ressources financières des agences boursières du *CNPq* et de la *CAPES*, ce travail de thèse a été réalisé.

CHAPITRE II

MATERIAUX COMPOSITES: ASPECTES THÉORIQUES ET NUMÉRIQUES

Ce chapitre aborde les principaux aspects théoriques sur les matériaux composites utilisés dans ce mémoire de thèse, en ce qui concerne les types de matériaux composites commerciaux et ses principales caractéristiques, des applications industrielles et la terminologie utilisée pour son identification. De plus, ce chapitre présente une discussion brève sur leurs fondements théoriques, particulièrement sur les théories utilisées dans l'approximation numérique du champ de déplacements mécaniques des structures composites. Spécifiquement, ce chapitre présente la *Théorie Classique des Stratifiés (CLT)*, la *Théorie des Déformations de Cisaillement de Première Ordre (FSDT)* et la *Théorie des Déformations de Cisaillement de Troisième Ordre (HSDT)*. Celles-ci sont formulées sur le principe d'une couche équivalente unique selon l'épaisseur du stratifié. De plus, ce chapitre expose la *Théorie en Couches Équivalents Discrètes (Théorie Layerwise)*, formulée en couches équivalentes distinctes (*discrètes*). Ces théories sont employées dans la littérature pour la modélisation, analytique ou numérique, des composites structuraux. De plus, nous examinons quelques unes des leurs avantages et désavantages.

2.1 Introduction

Les matériaux composites résultent d'une association de deux ou plusieurs types de matériau différents, visant à l'utilisation de leurs caractéristiques les plus avantageuses, de manière simultanée. De par leur composition, les matériaux composites sont hétérogènes et anisotropes.

Actuellement, les secteurs industriels qui utilisent des matériaux composites incluent : (1) *l'industrie automobile* (pour la fabrication, par exemple, de capots, carters d'huile, colonnes de direction, chaîne cinématique, ressorts, panneaux stratifiés, ...); (2) *l'industrie du sport et des loisirs* (pour la fabrication, par exemple, de planches et bateaux à voile, kayaks, skis, cadres de vélo, bâtons de golf, raquettes de tennis, planches de surf, ...), (3) *l'industrie aérospatiale* (pour la fabrication de panneaux solaires des satellites, antennes, capsules, robot pour ramassage, véhicules de lancement de satellites, ...) et d'autres secteurs.

En particulier dans le secteur aérospatial les matériaux composites sont massivement utilisés dans les composants d'avions civils et militaires, tel que par exemple dans les volets, gouvernails, fuselages, spoilers, saumon d'aille, nacelles, ailerons, réservoirs de carburant, ascenseurs, cône du nez, et d'autres (Figure 2.1). Ceux sont traditionnellement fabriqués en *alliages d'aluminium*, de *titane* ou d'*aciers*. Toutefois, actuellement on observe, de plus en plus, leurs fabrications en matériaux polymériques avancés.

La Figure 2.2 illustre l'utilisation des matériaux composites dans les aéronefs Boeing 777, Airbus A-380 et Embraer 170. Actuellement, les nouveaux projets des aéronefs, tel que du Airbus A-380, emploient environ 25 % de poids en matériaux composites. Particulièrement, la Figure 2.1 illustre l'utilisation des matériaux composites dans les avions EMB 170 de l'entreprise brésilienne Embraer.

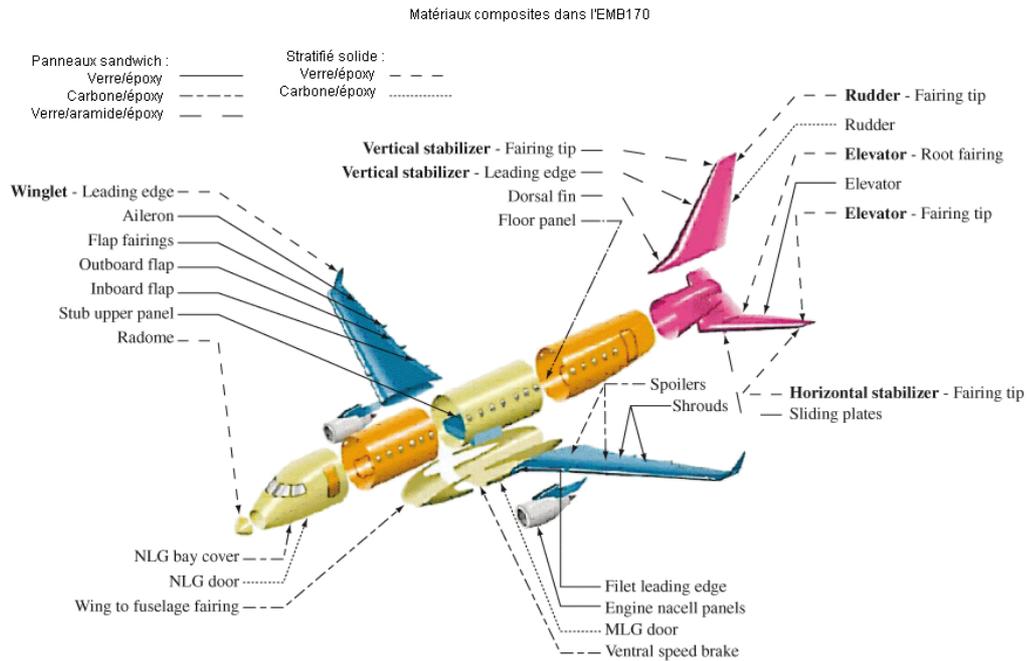


Figure 2.1 - Vue éclatée de l'EMB-170, en illustrant ses composants en matériau composite (figure adaptée de Rezende (2007)).

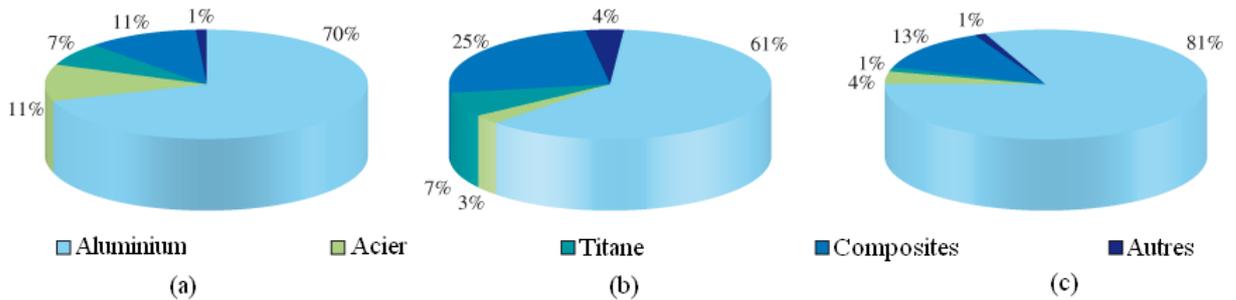


Figura 2.2 - Pourcentage total des matériaux utilisés dans la fabrication d'aéronefs, distribution en % globale de poids, dans le : (a) BOEING 777; (b) AIRBUS A380 et (c) EMB-170 (figure adaptée de Rezende (2007)).

Les principaux types de matériaux composites utilisés pour la fabrication de systèmes structuraux sont ceux formés par une phase discontinue, appelée *renfort*, insérée dans une phase solide, appelée *matrice*. La *distribution* et *l'interaction, physique et chimique*, entre les deux phases donne les propriétés mécaniques finales du matériau composite. Chaque phase,

sa distribution et interaction est étudié par l'approche *micromécanique*. En général, les composites structuraux sont présentés sous la forme d'un empilage de plusieurs plis, chacun présentant des fibres orientées selon une direction préférentielle. L'ensemble matrice-fibres forme le pli, l'ensemble de plis orientés forme le stratifié (IRISSARI, 2009). L'étude du comportement mécanique du stratifié est effectuée dans le domaine de la *macromécanique*.

Les propriétés mécaniques moyennes de chaque pli sont obtenues par la *règle de mélange* (Garcia, 2003). Selon celle-ci, certaines propriétés du pli, telles que ses modules d'élasticité et sa densité, sont obtenus grâce à l'utilisation de la *fraction volumique de fibres et de la matrice* (BERTHELOT, 1992 ; CHOU, 1992 et MENDONÇA, 2005).

La *macromécanique* étudie le comportement du pli à partir de ses propriétés mécaniques moyennes, obtenues de la *micromécanique*. Au sein de la *macromécanique*, les théories de *première ordre (FSDT)* et *troisième ordre (HSDT)* sont celles les plus suivies utilisées, car elles sont capables de fournir, selon l'épaisseur des matériaux anisotropes, la distribution des contraintes de cisaillements de manière la plus réaliste, par rapport à la *Théorie Classique des Stratifiés (CLT)* (GARCIA, 2003).

Les *propriétés macromécaniques des structures composites* (déformations, fréquences et modes propres, facteurs d'amortissement, charges de flambage, etc.) sont dépendants des propriétés individuelles des plis (tel que leur nombre, leurs propriétés mécaniques et orientation de fibres). Celles-ci peuvent être déterminées, soit par l'emploi de *formulations analytiques* ou *numériques*, soit par de mesures *expérimentales* (MENDONÇA, 2005). Dans ce mémoire de thèse, notre intérêt est la formulation numérique pour l'étude des propriétés macromécaniques des structures composites. Des détails supplémentaires sur l'étude des propriétés mécaniques employant des formulations analytiques ou des mesures expérimentales, peuvent être trouvés, par exemple, dans les travaux de Berthelot (1992), Reddy (1997) et Mendonça (2005).

La section suivante aborde brièvement les différentes théories utilisées dans la formulation analytique et numérique des structures composites.

2.2 Théories utilisées dans la formulation numérique de structures composites

Différentes théories, utilisées pour l'approximation du déplacement et de la déformation mécanique, ont été initialement utilisées pour la modélisation de structures métalliques (en matériau isotrope), puis étendues à l'étude de structures composites (en matériau anisotrope,

orthotrope ou transversalement isotrope). Ces théories sont essentiellement divisées en deux catégories:

- ✓ celles formulées tenant pour base la notion d'une seule couche équivalente, appelées *Théorie en Couche Équivalente Unique (Equivalent Single Layer Theory)*;
- ✓ celles formulées sur le concept de couches distinctes (discrètes), appelées *Théorie en Couches Equivalentes Discrètes (Discrete Layer Theory)*, ou simplement *Théorie Layerwise (Layerwise Theory)*.

La première catégorie inclue la *Théorie Classique des Stratifiés (CLT)*, la *Théorie de la Déformation de Cisaillement de Premier-Ordre (FSDT)*, la *Théorie de la Déformation de Cisaillement de Troisième-Ordre* (ou simplement *Théorie de Déformations de Cisaillement de L'Haute-Ordre (HSDT)*) et d'autres. D'autre part, la deuxième catégorie inclue la *Théorie en Couches Indépendantes (TCI)* et la *Théorie de Couches Dépendantes (TCD)*. On peut citer les publications de Berthelot (1992), de Reddy (1997) et de Kollar et Springer (2003) qui présentent ces différentes théories.

Selon Reddy (1997), si le but de l'étude est la détermination de la réponse globale de la structure composite, telles que déflexions, charges critiques de flambage, fréquences et modes propres, l'étude peut être réalisée de manière assez précise en utilisant les théories *fondées sur l'hypothèse en une seule couche équivalente (CLT, FSDT, HSDT...)*. Par contre, lorsque le but de l'étude est associé aux réponses locales, tels que à l'identification des zones plus critiques en relation au niveau des contraintes selon l'épaisseur du stratifié, ou la localisation des zones d'incidence probable d'endommagement, on recommande l'emploi de théories *fondées en couches discrètes (TCI, TCD, ...)*.

Dans les sections subséquentes, les caractéristiques des théories en couche équivalente unique (des types *CLT, FSDT* et *HSDT*) et de celles formulées en couches équivalentes distinctes (*Théorie Layerwise*) sont fournies.

2.2.1 Théorie Classique des Stratifiés (CLT)

La *Théorie Classique des Stratifiés* est basée sur les *hypothèses cinématiques de Kirchhoff*, employées pour l'étude de structures du type plaque, et sur les hypothèses cinématiques de *Kirchhoff-Love*, utilisées pour l'étude de structures du type coques courbes. D'après cette théorie, une ligne droite et perpendiculaire à la surface moyenne indéformée de la structure (connue comme *surface de référence* ou *surface neutre*), reste droite et perpendiculaire à la surface de référence, ne changeant pas sa forme dans la direction de

l'épaisseur, c'est-à-dire, elle reste inextensible dans cette direction, tel que représenté sur la Fig. 2.3 (A) et (B).

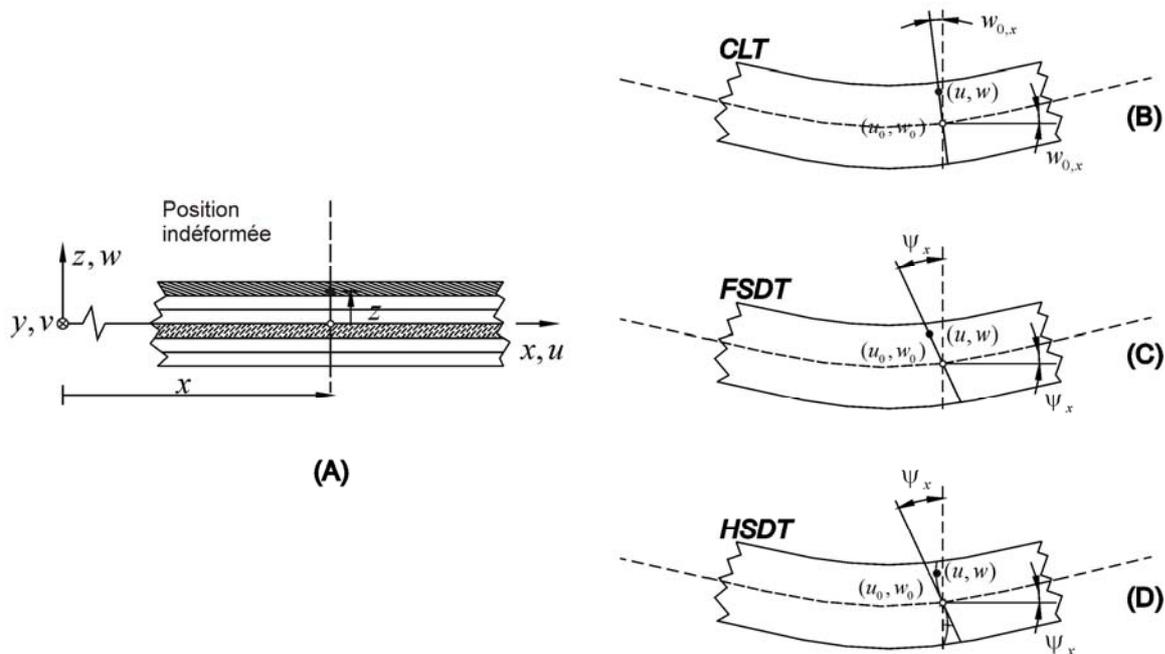


Figure 2.3 - Représentation schématique d'une plaque en matériau composite (A), et illustration de la cinématique de déformation présentée par couche équivalente, en utilisant les théories : *CLT* (B), *FSDT* (C) et *HSDT* (D) (figure adaptée de Reddy (1997)).

Selon Reddy (1997) et Mendonça (2005), dans la théorie *CLT* les effets des *déformations de cisaillements transversaux* (γ_{xz}, γ_{yz}) et la *déformation normale transversale* (ε_{zz}), ne sont pas considérés. Les autres hypothèses adoptées pour la formulation de la théorie *CLT*, sont:

- (1) les plis sont parfaitement liés les uns aux autres, c'est-à-dire que, entre eux il n'existe pas de glissement, ou décollement ;
- (2) les déplacements selon des plis sont continus ;
- (3) le matériau de chaque pli présente un comportement élastique ;
- (4) le stratifié est considéré mince, c'est-à-dire, que les plis de la structure sont relativement minces par rapport aux dimensions planes (largeur et longueur) de la structure ;
- (5) les déformations, les déplacements et les rotations sont petits.

Selon Reddy (1997), le champ de déplacements de la théorie *CLT* est donné par l'expression suivante:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - zw_{0,x}(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - zw_{0,y}(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

où (x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes choisies, de sorte que, $(x, y, 0)$ est le plan moyen indéformé, t est le temps, $u(x, y, z, t)$ et $v(x, y, z, t)$ sont, respectivement, les déplacements selon les directions des axes x et y , $w(x, y, z, t)$ est le déplacement transversal selon la direction de l'épaisseur z du stratifié; u_0 , v_0 et w_0 sont, respectivement, les déplacements dans les directions des coordonnées (x, y, z) d'un point matériel dans la surface de référence $(x, y, 0)$, et $w_{0,x} = \partial w_0 / \partial x$ et $w_{0,y} = \partial w_0 / \partial y$ sont, respectivement, les rotations autour respectivement des axes y et x (Figure 2.3 (B)).

Une fois connus les déplacements (u_0, v_0, w_0) du plan de référence, les déplacements de tout point dans la direction de l'épaisseur du stratifié peuvent être déterminés par l'équation. (2.1).

Cependant, cette théorie exige la continuité du champ des déplacements, qui doivent être représentés par des fonctions appartenant à l'espace C^1 , c'est-à-dire des fonctions avec dérivées continues. Sur le plan des solutions analytiques, ce fait n'est pas restrictif ; toutefois, dans le cadre des formulations numériques par éléments finis, la formulation des fonctions d'interpolation dans l'espace C^1 est beaucoup plus contraignant par rapport à celles appartenant à l'espace C^0 .

En raison de l'hypothèse de déplacements linéaires et tenant compte du fait que les déformations de cisaillement transverse ne sont pas prises en compte, la précision de la théorie *CLT* n'est adéquate que dans l'étude structures minces. Ainsi, selon Cen et al. (2002) et Mendonça (2005), l'erreur commise par son emploi augmente avec le ratio de l'épaisseur-largeur des structures composites.

2.2.2 Théorie de la Déformation de Cisaillement de Première Ordre (FSDT)

Les modèles élaborés selon la *Théorie de la Déformation de Cisaillement de Première Ordre (FSDT)*, sont basés sur les hypothèses adoptées dans la théorie des plaques de *Mindlin-Reissner*, selon lesquelles une ligne droite et perpendiculaire au plan moyen d'une couche quelconque, reste droite avant la déformation, toutefois, elle ne reste pas nécessairement normale à ce plan de référence après la déformation de la structure (Figure 2.3 (C)).

Le champ de déformations de la théorie *FSDT* est défini selon :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

où ψ_x et ψ_y indiquent respectivement les rotations autour des axes y et x , et sont représentés sur la Fig. 2.3 (C).

La théorie *FSDT* suppose que les contraintes de cisaillement transversal (σ_{xz}, σ_{yz}) varient de façon linéaire selon l'épaisseur du stratifié. Selon les auteurs Reddy (1997), Cen et al. (2002) et Chugal et Shimpi (2002), pour qu'il y ait l'accord de leurs valeurs maximales avec les situations réelles (caractérisées par des distributions paraboliques selon l'épaisseur du stratifié), il se fait nécessaire l'introduction de *facteurs de correction de cisaillement*.

Cette théorie a besoin de fonctions appartenant à l'espace C^0 et peut être utilisée pour la *modélisation des structures minces et modérément épaisses* (CEN et al., 2002). D'ailleurs, la théorie *FSDT* est considérée la théorie qui fournit la meilleure relation entre *capacité de prévision* et *coût de calcul numérique-computationnel* pour une large gamme d'applications industrielles. (CHUGAL et SHIMPI, 2002). De plus, la formulation par éléments finis en utilisant la théorie *FSDT* (ainsi que la théorie *CLT*) est disponible en divers logiciels commerciaux d'éléments finis.

La théorie *FSDT* est également assez précise numériquement pour l'estimation de diverses réponses obtenues dans le domaine de la macromécanique, telles que les déflexions, les fréquences et modes propres et charges critiques de flambage. Toutefois, celle-ci n'est pas assez précise dans la prédiction numérique des fréquences et modes propres d'ordre élevée, et dans la distribution de contraintes selon l'épaisseur du stratifié. Selon Chugal et Shimpi (2002) et Mendonça (2005), la théorie *FSDT* peut présenter de *problèmes de blocage* (*shear locking*),

dans la *modélisation des structures trop minces*, phénomène qui se traduit par une rigidité excessive de la structure modélisée par éléments finis.

2.2.3 Théorie de la Déformation de Cisaillement d'Ordre Supérieur (HSDT)

Comme les deux théories *CLT* et *FSDT* sont incapables de prédire le comportement statique et dynamique des structures composites de certaines formes géométriques, des théories plus élaborées ont été formulées, parmi lesquelles on a la *Théorie des Déformations de Cisaillement d'Ordre Supérieur (HSDT)*. Celle-ci adopte une variation cubique pour le champ des déplacements au long de l'épaisseur du stratifié. Dans la théorie *HSDT*, n'est pas nécessaire l'introduction des *facteurs de correction de cisaillement*, car sa distribution des déformations de cisaillement transversal ont la forme parabolique le long de l'épaisseur, similaire à la condition réel prévue par la théorie de l'élasticité et observée expérimentalement. Selon Cen et al. (2002), Chugal et Shimpi (2002), Kulkarni et Bajoria (2003) et Mendonça (2005), cette théorie conduit aux répartitions des déformations de cisaillement normal (ε_{zz}) et transversales (γ_{xz}, γ_{yz}) le long de l'épaisseur du stratifié, de manier semblable à la *Théorie Tridimensionnelle d'Élasticité*.

Le champ de déplacements de la théorie *HSDT*, avec une expansion dans les termes de troisième ordre pour les déplacements (u, v) et de deuxième ordre pour (w), sont exprimés par Lo et al. (1977) comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\zeta_x(x, y, t) + z^3\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\zeta_y(x, y, t) + z^3\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t) + z^2\zeta_z(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

où les fonctions $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z, \phi_x$ et ϕ_y sont fonctions dépendantes des coordonnées (x, y) , qui n'ont pas de sens physique clair ; toutefois, elles peuvent être considérées comme rotations d'ordre supérieur qui décrivent la déformation d'une ligne normale au plan moyen de référence (MENDONÇA, 2005). Selon cette théorie, après la déformation de la structure, la ligne ne reste pas droite (Figure 2.3 (D)).

L'introduction de six variables dans la théorie *HSDT* augmente clairement le coût de calcul numérique associé a son implémentation numérique par rapport aux autres théories présentées

préalablement. Ainsi, d'autres formulations ont été développées, tels que la théorie *HSDT* de Reddy (1987). Selon celle-ci, les fonctions ψ_z et ζ_z intervenant dans l'équation (2.3) sont adoptées nulles. Par contre, les fonctions ζ_x , ζ_y , ϕ_x et ϕ_y ne sont pas arbitraires, et doivent assurer que les contraintes de cisaillement transversal s'annulent, sur les faces inférieure et supérieure de la structure composite modélisée. Toutefois, il existe un certain nombre de restrictions en termes de son applicabilité dans les formulations par éléments finis, car les termes en z^3 et les déformations résultantes, sont fonctions des dérivées de w_0 .

L'équilibre des forces interlaminaires entre deux couches adjacentes d'une structure composite formée par deux couches est représenté sur la Fig. 2.4.

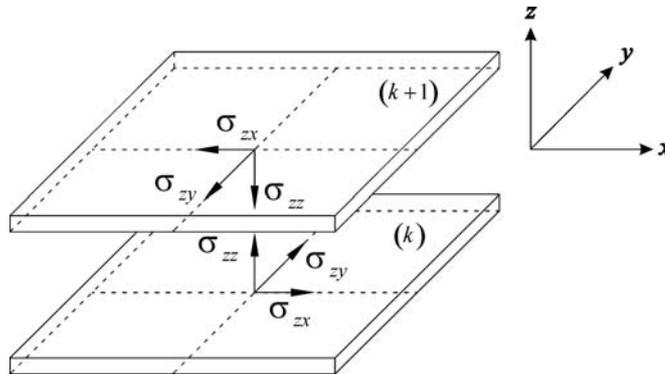


Figure 2.4 - Équilibre des contraintes interlaminaires aux couches k et $k+1$
(figure adapté de Reddy (1997)).

La continuité du champ de contraintes interlaminaires est fournie en imposant les conditions suivantes sur les interfaces :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \neq \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k+1)} \quad (2.4)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^{(k+1)} \quad (2.5)$$

De plus, les champs de déformations et de déplacements des couches adjacentes k et $k+1$, doivent satisfaire les conditions suivantes sur les interfaces :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k+1)} \quad (2.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}^{(k)} \neq \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}^{(k+1)} \quad (2.7)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^{(k+1)} \quad (2.8)$$

Selon Reddy (1997), dans la *Théorie des Stratifiés en Couche Équivalent Unique (CLT, FSDT, HSDT)*, les déplacements sont des fonctions continues (C^0) selon l'épaisseur du stratifié. Toutefois, les déformations entre des plis sont discontinues, contrairement à ce qui s'observe avec l'utilisation de la *Mécanique des Milieux Continus*. Ainsi, dans la *Théorie des Stratifiés en Couche Équivalent Unique (TSCE-U)*, les contraintes transversales, en agissant entre les interfaces de deux plis adjacentes, sont discontinues :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^{(k)} \neq \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^{(k+1)} \quad (2.9)$$

Pour les structures composites minces, l'erreur due à la discontinuité des contraintes peut être négligée. Toutefois, pour les structures composites épaisses, la théorie *TSCE-U* fournit des prédictions erronées en toutes les contraintes, par conséquent, nous donnons préférence à l'utilisation de la *Théorie en Couches Équivalents Discrètes (Layerwise-FSDT, Layerwise-HSDT)*, abordée dans la section suivante.

2.2.4 Théorie en Couches Équivalents Discrètes: Théorie Layerwise-FSDT

La *Théorie en Couches Équivalents Discrètes (Layerwise)* est formulée de manière à ce que le champ de déplacements (u, v, w) ait uniquement des fonctions C^0 , c'est-à-dire de fonctions continues selon l'épaisseur du stratifié.

La théorie *Layerwise* peut être subdivisée en deux autres théories, à savoir :

(1) la *Théorie en Couches Équivalentes Partielles (Partial Layerwise Theory)*, en utilisant des composantes (u, v) du champ de déplacements ;

(2) la *Théorie en Couches Équivalentes Totales (Full Layerwise Theory)*, qui emploie les trois composantes (u, v, w) du champ de déplacements.

Par rapport à la *TSCE-U*, la *Théorie en Couches Équivalentes Partielle (TCE-P)* présente une description réaliste de la cinématique du stratifié en considérant les déformations de cisaillement transversales $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$. Cependant, la *Théorie en Couches Équivalentes Totale (TCE-T)* ajoute conjointement les déformations $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ et la déformation normale transversale (ε_{zz}) en couches distinctes (LEE, 2001).

Selon Reddy (1997), la théorie *Layerwise (TCE-P et TCE-T)* peut être utilisée pour la formulation numérique de structures composites, minces ou épaisses.

Les théories *TCE-P* et *TCE-T* représentent le comportement du déplacement sous la forme « zig-zag » selon l'épaisseur de structures quelconques (en forme de poutres, plaques, couches et cætera). Le comportement en « zig-zag » est observé aux solutions exactes en utilisant la *Théorie Tridimensionnelle de l'Élasticité*, et est plus évident sur des structures épaisses, où les déformations $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ changent brusquement selon l'épaisseur de la structure (MENDONÇA, 2005). De plus, la théorie *TCE-P*, selon le nombre de variables du modèle cinématique, est sous-divisée dans les théories :

(a) *Théorie en Couches Équivalentes Partielles Dependentes (TCE-PD, Figure 2.5 (A)).*

(b) *Théorie en Couches Équivalentes Partielles Independentes (TCE-PI, Figure 2.5 (B) et Figure 2.5 (C)).*

Dans la théorie *TCE-PD*, le nombre de variables inconnues Φ_k du modèle mathématique est dépendant du nombre de plis k de la structure. En raison de cette dépendance, le coût impliqué dans les calculs numériques est plus élevé en comparaison avec la théorie *TCE-PI*, où le nombre de variables Φ du modèle ne dépend pas du nombre de couches.

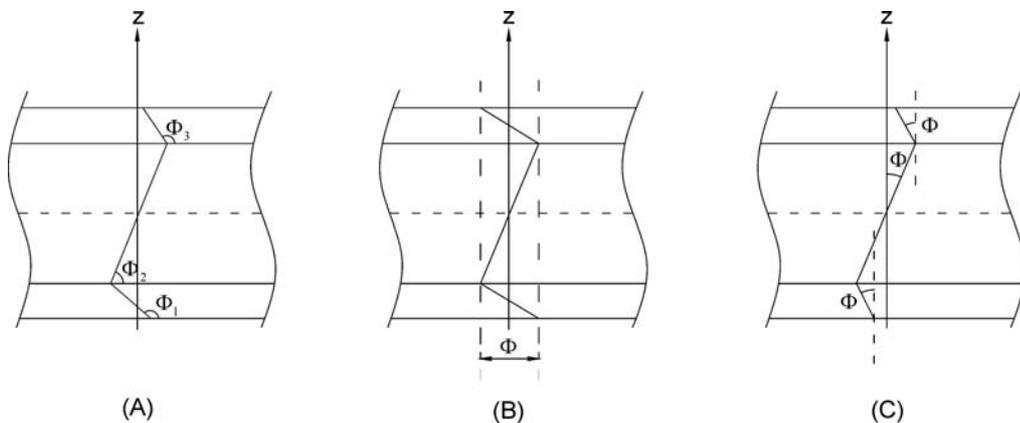


Figure 2.5 - Fonctions en zig-zag selon l'épaisseur d'une structure stratifiée de trois plis, en employant des fonctions distinctes (A) ou une seule fonction, indépendante (B) et dépendante (C) de l'épaisseur du stratifier (figure adaptée de Di et Rothert, 1995).

La Figure 2.5 montre les trois différentes conceptions de la fonction linéaire en « zig-zag » selon l'épaisseur du stratifié :

- ✓ en (A), chaque pli k de la structure a des rotations indépendantes ;
- ✓ en (B), le paramètre Φ est défini de manière à ce que la section transversale de chaque pli ait la même projection sur le plan (x, y) de la structure ;
- ✓ en (C), le paramètre Φ est défini comme la rotation des plis par rapport à l'axe z .

La conception présentée sur la Fig. 2.5, spécifiquement la configuration (A), présente un coût de calcul numérique plus grand par rapport aux deux autres conceptions (B et C) car le nombre de variables Φ_k augmente avec le nombre de plis. Les conceptions présentées en (B) et en (C) sont équivalentes, sauf si les épaisseurs des plis sont très différentes. Dans ce cas, la

conception présentée en (C) est plus appropriée, car le paramètre Φ reflètera l'influence des épaisseurs des plis (Di et Rothert, 1995).

Selon l'ordre de l'approximation employée dans le champ de déplacements de la théorie *TCE-PI*, celle-ci peut être subdivisée en deux autres théories :

- (1) *Théorie en Couches Équivalentes Partielles Zig-zag de Premier Ordre*, ou simplement *Théorie Zig-Zag de Premier Ordre* ;
- (2) *Théorie en Couches Équivalentes Partielles Zig-Zag de Troisième Ordre*, ou simplement *Théorie Zig-Zag de Troisième Ordre*.

Dans la première théorie, une fonction linéaire par segment (*piecewise linear function*) est superposée au champ de déplacements linéaire utilisé. Cette théorie subdivise le stratifié en $(N_k - 1)$ plis discrets.

Le champ de déplacements de la *Théorie en Couches Équivalentes Partielles Zig-Zag de Premier Ordre*, selon Di e Bending (1986) est donné sous la forme :

$$\begin{aligned} u_i(x_j, x_3, t) &= u_i^0(x_j, t) - x_3 u_{3,i}^0(x_j, t) + f_{i\gamma}(x_3) \Phi_\gamma(x_j, t) \\ u_3(x_j, x_3, t) &= u_3^0(x_j, t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

où, i et j varient entre 1 et 2, et $x_1 = x$, $x_2 = y$ et $x_3 = z$. Les fonctions $f_{i\gamma}$ et Φ_γ sont déterminées de manière à ce que les déplacements et les contraintes transversales soient continus sur l'interface entre plis adjacents. Les fonctions $f_{i\gamma}$ sont dépendantes de la variable x_3 et des épaisseurs des plis.

En raison du faible ordre de l'approximation du champ de déplacements de la *Théorie Zig-Zag de Premier Ordre*, la distribution des contraintes est constant selon l'épaisseur du stratifié. Selon Reddy (1997), des améliorations du modèle ont été proposées par Bhaskar et Varadan (1989), Lee et Liu (1991), Sciuva Di (1992) et Cho et Parmerter (1993). Ces auteurs ont vérifié que la distribution des déformations de cisaillement (γ_{xz}, γ_{yz}) selon l'épaisseur des plis varient de manière parabolique et sont, tel que dans la condition réelle, discontinues dans les interfaces entre les plis. Ces observations ont incité l'origine de la *Théorie Zig-Zag de Troisième Ordre*. Toutefois, selon Reddy (1997), dans les deux théories *Zig-Zag* (de *Premier* et de *Troisième Ordre*), les contraintes de cisaillement ne sont pas nulles sur les faces supérieure et inférieure du stratifié. De plus, selon Reddy (1997), comme ces théories ne considèrent pas la

déformation normale transversale (ε_{zz}), elles ne peuvent pas représenter de manière adéquate les contraintes sur l'interface des plis à l'proximité de trous ou de fentes, ainsi que la traction sur les bords libres de la structure ou les phénomènes de délaminage entre plis adjacents. Dans la modélisation d'effets plus localisés, la contribution de la contrainte normale transversale (σ_{zz}) est significative.

Le champ de déplacements de la *Théorie en Couches Équivalents Totales* est exprimé, selon Reddy (1997), par les expressions :

$$\begin{aligned}
 u^k(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^{m-1} u_j^k(x, y, t) \varphi_j^k(z) \\
 v^k(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^{m-1} v_j^k(x, y, t) \varphi_j^k(z) \\
 w^k(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^{m-1} w_j^k(x, y, t) \Psi_j^k(z)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

où u^k , v^k et w^k représentent les composants de déplacements, respectivement, dans les directions des axes x , y et z , d'un point matériel du stratifié. Finalement, $\varphi_j^k(z)$ et $\Psi_j^k(z)$ sont fonctions continues de z . En général, $\varphi_j^k(z) \neq \Psi_j^k(z)$ et sont détaillées par Reddy (1997).

Dans ce mémoire de thèse, on utilise la *Théorie en Couches Équivalentes Partielles Dépendantes (TCE-PD)*, simplement dénotée ici de *Layerwise-FSDT*. Dans cette théorie, on emploie une formulation basée sur la théorie *FSDT* pour l'approximation du champ de déplacements par pli additionnant les conditions de continuité des déplacements mécaniques selon l'épaisseur du stratifié, dont formulation est démontrée dans le chapitre suivant. Malgré son coût de calcul numérique très important par rapport aux autres théories en couches équivalentes, celle-ci est la théorie *Layerwise* adoptée dans ce mémoire, car son implémentation numérique (utilisant les conditions de continuité des déplacements mécaniques) est de facile adaptation aux théories en couches équivalentes.

Selon Araujo et al. (2008), avant l'imposition de la continuité des déplacements, la théorie *Layerwise-FSDT* utilise le champ de déplacements de la théorie *FSDT*, modifié sous la forme :

$$\begin{aligned}
u^k(x, y, z, t) &= u_0^k(x, y, t) + (z - z^k) \psi_x^k(x, y, t) \\
v^k(x, y, z, t) &= v_0^k(x, y, t) + (z - z^k) \psi_y^k(x, y, t) \\
w^k(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

où u^k , v^k et w^k sont les composants de déplacements du pli k . ψ_x^k et ψ_y^k sont, respectivement, la rotation normale à la superficie de référence autour des axes y et x respectivement. w_0 est le déplacement transversal du pli (adopté le même pour tous les plis), z^k est la coordonnée z par rapport au plan moyen de chaque pli, k est l'exposant indiquant le pli.

Après l'utilisation de la compatibilité des déplacements (Équation (2.8)), et en employant l'équation (2.12) du champ de déplacements, nous obtenons le champ de déplacements de la théorie *Layerwise-FSDT*, et qui est, par ailleurs, déduit dans le Chapitre postérieur.

Dans ce mémoire, indépendamment de la théorie employée, le pli de référence $(x, y, 0)$ est toujours localisé dans la superficie moyenne du stratifié.

Ensuite, les relations entre *déplacements-déformations*, des théories *FSDT*, *HSDT* *Layerwise-FSDT*, sont présentées.

2.3 Relations déplacements-déformations

Les relations déplacements-déformations suivantes sont établies aux niveaux des plis du stratifié.

Pour l'obtention des relations entre les composantes des déplacements et des déformations nous considérons dans ce mémoire que ces quantités sont petites et que l'on reste dans le domaine de *l'élasticité linéaire*. Ainsi, la relation entre les déformations et déplacements est définie en fonctions des dérivées des déplacements (u, v, w) par rapport aux coordonnées (x, y, z) . Donc, selon Reddy (1997), ces relations sont exprimées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

En substituant les équations (2.3) dans (2.13), et en organisant les équations résultantes, le champ de déformations de la théorie *HSDT*, dans le système de référence global (x, y, z) , est exprimé selon :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + z^2 \left(\frac{\partial \zeta_x}{\partial x} \right) + z^3 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \\
\varepsilon_{yy} &= \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + z^2 \left(\frac{\partial \zeta_y}{\partial y} \right) + z^3 \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\
\varepsilon_{zz} &= \psi_z + 2z\zeta_z \\
\gamma_{yz} &= \left(\psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + z \left(2\zeta_y + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right) + z^2 \left(3\phi_y + \frac{\zeta_z}{\partial y} \right) \\
\gamma_{xz} &= \left(\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + z \left(2\zeta_x + \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right) + z^2 \left(3\phi_x + \frac{\partial \zeta_z}{\partial x} \right) \\
\gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + z^2 \left(\frac{\partial \zeta_x}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_y}{\partial x} \right) + z^3 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Les relations entre les déplacements et les déformations, pour la théorie *FSDT*, sont exprimées par l'équation (2.15), obtenues en annulant les termes du deuxième et troisième

ordre (z^2, z^3) , ainsi que la déformation transversale (ε_{zz}) et les variables qui ne sont pas présentes dans la formulation *FSDT*. Ainsi, pour la *FSDT* on écrit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{yy} &= \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\
 \varepsilon_{zz} &= 0 \\
 \gamma_{yz} &= \left(\psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
 \gamma_{xz} &= \left(\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Les relations entre les déformations et les déplacements pour la théorie *Layerwise-FSDT*, dépendent du pli considéré et donc leurs expressions sont obtenues en différenciant, selon les équations (2.13), le champ de déplacement (Équations (2.12)) additionné aux conditions de continuité du champ de déplacements (Équations (2.8)) pour chaque pli. Les expressions résultantes des relations entre les déformations et les déplacements de la théorie *Layerwise-FSDT* sont fournies dans le chapitre postérieur.

2.4 Équations constitutives des matériaux composites

Les contraintes (σ_{ij}) et les déformations (ε_{kl}) sont associées au tenseur de rigidité c_{ijkl} , en utilisant la *loi de Hooke dans le domaine de l'élasticité linéaire*, et sont exprimées, en notation indicielle, sous la forme :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{2.16}$$

où i, j, k, l prennent les valeurs : 1, 2 et 3, ε_{kl} est le *tenseur de déformations*, σ_{ij} est le *tenseur de contraintes* et c_{ijkl} est le *tenseur d'élasticité*.

Les neuves composantes du tenseur des contraintes peuvent être réduites a six composantes indépendantes à cause de sa symétrie. Ainsi, la notation tensorielle peut être contractée en utilisant la notation suivante :

<i>Indice du tenseur :</i>	(11)	(22)	(33)	(23, 32)	(13, 31)	(12, 21)
<i>Indice contracté :</i>	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Le tenseur des contraintes, indiquée dans l'équation (2.16), dans le repère (1, 2, 3), est exprimée dans ce mémoire sous la forme vectorielle contractée:

$$\{\sigma^l\} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}\}^T = \{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6\}^T \quad (2.17)$$

où le exposant (T) indique l'opérateur de transposition, le exposant (l) indique que le matériau est écrite dans le système de référence matériau (1, 2, 3) (Figure 2.6).

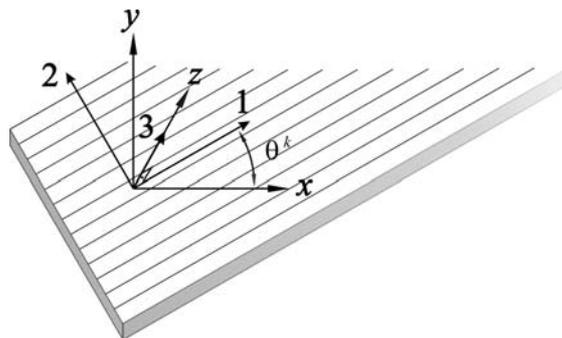


Figure 2.6 - Vue d'une couche avec orientation θ avec les deux systèmes de référence (figure adaptée de Da Rocha (1999)).

De plus, la notation contractée du tenseur de déformations, est représentée par l'expression vectorielle suivante :

$$\{\varepsilon^l\} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{12}\}^T = \{\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4 \quad \varepsilon_5 \quad \varepsilon_6\}^T \quad (2.18)$$

La *loi de Hooke* est réécrite en notation vectorielle en utilisant les formes contractées des tenseurs de contraintes (équation (2.17)) et de déformations (équation (2.18)) selon l'équation :

$$\{\sigma^l\} = [C^l] \{\varepsilon^l\} \quad (2.19)$$

dans le système de référence (1, 2, 3).

La matrice $[C^l]$, équation (2.19), est la matrice des constantes d'élasticité du matériau composite et contient originalement 36 coefficients d'élasticité, tel que peut être vérifiée dans la l'expression suivante (NYE, 1969):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^l & c_{12}^l & c_{13}^l & c_{14}^l & c_{15}^l & c_{16}^l \\ c_{21}^l & c_{22}^l & c_{23}^l & c_{24}^l & c_{25}^l & c_{26}^l \\ c_{31}^l & c_{32}^l & c_{33}^l & c_{34}^l & c_{35}^l & c_{36}^l \\ c_{41}^l & c_{42}^l & c_{43}^l & c_{44}^l & c_{45}^l & c_{46}^l \\ c_{51}^l & c_{52}^l & c_{53}^l & c_{54}^l & c_{55}^l & c_{56}^l \\ c_{61}^l & c_{62}^l & c_{63}^l & c_{64}^l & c_{65}^l & c_{66}^l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

En tenant en compte les conditions de symétrie du matériau, $[C^l]$ peut être réduite à 21 coefficients d'élasticité.

Pour le cas particulier d'un matériau orthotrope (avec 9 coefficients d'élasticité indépendants), la matrice d'élasticité est présentée dans le système de référence (1, 2, 3) selon la forme :

$$[C^l] = \begin{bmatrix} c_{11}^l & c_{12}^l & c_{13}^l & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^l & c_{22}^l & c_{23}^l & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^l & c_{23}^l & c_{33}^l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^l \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Selon Kollar et Springer (2003), le matériau orthotrope est celui qui a trois plans de symétrie, mutuellement perpendiculaires (Figure 2.7).

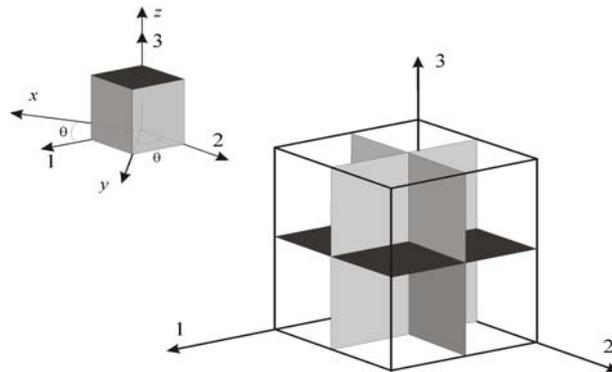


Figure 2.7 - Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie.

De la même façon que dans le matériau orthotrope, le *matériau transversalement isotrope* a trois plans de symétrie (Figure (2.7)). Toutefois, un des ces plans est isotrope. Le composite renforcé par fibres longues et uniformes est un exemple de matériau transversalement isotrope. Celui-ci a des fibres alignées par rapport à la direction 1 du système de référence matériau (Figure (2.8)). Dans ce cas, le plan perpendiculaire au plan des fibres, plan (2-3), est dit isotrope.

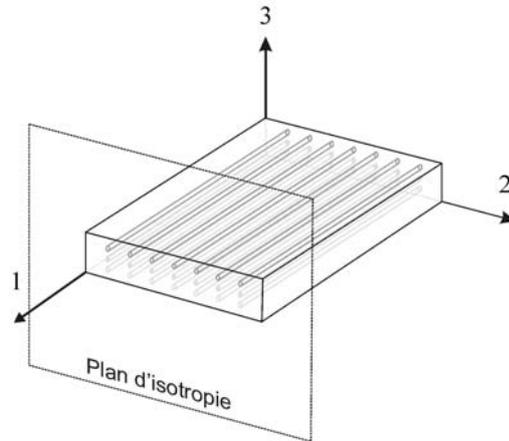


Figure 2.8 - Exemple d'un matériau transversalement isotrope.

Compte tenu de ces informations, l'équation (2.20) peut facilement être découplée, en séparant les contraintes des effets cisaillements transversaux (σ_4, σ_5) , fournis dans le sous-vecteur de contraintes $\{\sigma_s^l\}$, des contraintes des effets de membrane-flexion $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et cisaillement plan (σ_6) , fournis dans le sous-vecteur de contraintes $\{\sigma_b^l\}$. Ainsi, en utilisant cette définition, on écrit les expressions :

$$\{\sigma_b^l\} = [C_b^l] \{\varepsilon_b^l\} \quad (2.22)$$

et

$$\{\sigma_s^l\} = [C_s^l] \{\varepsilon_s^l\} \quad (2.23)$$

où, les deux formes compactes précédents sont respectivement réécrites sous les formes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^l & c_{12}^l & c_{13}^l & 0 \\ c_{12}^l & c_{22}^l & c_{23}^l & 0 \\ c_{13}^l & c_{23}^l & c_{33}^l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66}^l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

et

$$\begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_{44} & 0 \\ 0 & c'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Les notations des vecteurs de contraintes et de déformations, fournies par les équations (2.17) et (2.18), dans le repère élémentaire (x, y, z) , prennent la forme :

$$\{\sigma^e\} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{xy}\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{xy}\}^T \quad (2.26)$$

$$\{\varepsilon^e\} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad 2\varepsilon_{yz} \quad 2\varepsilon_{xz} \quad 2\varepsilon_{xy}\}^T = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}\}^T \quad (2.27)$$

où l'exposant $(^e)$ indique que les composantes indiquées sont représentées dans le système de référence élémentaire (x, y, z) de la structure (Figure 2.6).

Ainsi, les notations décrites par les équations (2.17) et (2.18) est utilisée dans ce mémoire pour informer que le matériau se trouve représenté dans son système de référence matériau $(1, 2, 3)$, tandis que la notation présenté par les équations (2.26) et (2.27), est utilisée pour informer que le matériau est représenté dans le système de coordonnées élémentaire (x, y, z) .

Selon Nye (1969), la forme inverse de l'équation (2.19), est écrite sur la forme:

$$\varepsilon_i = s_{ij} \sigma_j \quad (2.28)$$

où s_{ij} est le tenseur de souplesse.

La forme matricielle de l'équation (2.28), écrite dans le système de référence $(1, 2, 3)$, est exprimée par l'équation :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s'_{11} & s'_{12} & s'_{13} & s'_{14} & s'_{15} & s'_{16} \\ s'_{21} & s'_{22} & s'_{23} & s'_{24} & s'_{25} & s'_{26} \\ s'_{31} & s'_{32} & s'_{33} & s'_{34} & s'_{35} & s'_{36} \\ s'_{41} & s'_{42} & s'_{43} & s'_{44} & s'_{45} & s'_{46} \\ s'_{51} & s'_{52} & s'_{53} & s'_{54} & s'_{55} & s'_{56} \\ s'_{61} & s'_{62} & s'_{63} & s'_{64} & s'_{65} & s'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

ou dans sont forme compacte:

$$\{\varepsilon^l\} = [S^l] \{\sigma^l\} \quad (2.30)$$

La forme découplée présentée par les équations (2.24) et (2.25) est numériquement intéressante, car les contraintes et déformations de cisaillement transversaux de la théorie *FSDT* doivent être corrigés par l'introduction de *coefficients de correction* appliqués à la matrice de constantes d'élasticité associée aux contraintes $(\sigma_{23}, \sigma_{13})$ et aux déformations $(\gamma_{23}, \gamma_{13})$. Ainsi, quand on utilise la théorie *FSDT*, ou la théorie *Layerwise-FSDT*, l'équation (2.25) doit être réécrite sous la forme :

$$[C_s^l]^* = \begin{bmatrix} k_1 c'_{44} & \sqrt{k_1 k_2} c'_{45} \\ \sqrt{k_1 k_2} c'_{45} & k_2 c'_{55} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

où k_1 et k_2 sont les *coefficients de correction des cisaillement transversaux*. Selon Reddy (1997), dans la modélisation de structures composites en matériau composite, homogène et orthotrope, les valeurs des coefficients de corrections k_1 et k_2 sont égales à $5/6$, si on emploie un matériau isotrope inséré, elles sont égales à $2/3$.

Les coefficients d'élasticité des matrices de constantes d'élasticité, $[C_b^l]$ et $[C_s^l]$ sont adoptés selon le type de matériau composite de la structure composite. Pour un matériau de trois plans de symétrie (*matériau orthotrope*) et de deux plans de symétrie (*matériau transversalement isotrope*), ils sont en nombre de neuf et six coefficients indépendants respectivement.

En général, indépendamment du type de matériau composite utilisé, la matrice de constantes d'élasticité peut être transformée du système $(1, 2, 3)$ au système (x, y, z) par les transformations présentées dans l'Annexe A.1.

2.5 Conclusions

Nous vérifions dans la littérature scientifique qu'il existe plusieurs théories employées pour la formulation analytique ou numérique de structures composites. Parmi elles, on trouve la *Théorie des Déformations de Cisaillement de Première Ordre (FSDT)*, la *Théorie des Déformations de Cisaillement de Troisième Ordre (HSDT)* et la *Théorie en Couches Équivalentes Partielles Dépendantes (TCE-PD)*, appelée ici théorie *Layerwise-FSDT*. Celles-ci sont employées dans ce mémoire de thèse pour la modélisation de différentes structures composites. Le choix de l'une ou l'autre des théories est dicté, essentiellement, par le type de géométrie de la structure analysée (structures minces ou épaisses) et les intérêts de l'étude réalisée (comportement global ou local).

Les deux premières théories (*FSDT* et *HSDT*) sont utilisées pour la formulation de structures composites homogènes. La théorie *HSDT* est plus appropriée à l'étude de structures composites épaisses et minces, tandis que la théorie *FSDT* est plus adaptée à l'étude de structures peu épaisses voire minces. Cependant, quand l'intérêt est l'étude de structures hétérogènes et modérément minces, on peut choisir la troisième théorie (*Layerwise-FSDT*). De plus, nous devons toujours évaluer le compromis entre le coût numérique impliqué dans l'obtention des réponses et la précision numérique requise.

CHAPITRE III

FORMULATION DES MODÈLES ELEMENTS FINIS PAR LES THÉORIES FSDT, HSDT ET LAYERWISE-FSDT

3.1 Introduction

La modélisation physique de systèmes mécaniques résulte généralement des équations différentielles partielles qui ne peuvent pas être résolues analytiquement ou qui n'ont pas une solution exacte, pour raisons de complexité du domaine discrétisé du problème ou des conditions aux limites. Ainsi, une méthode numérique doit être employée pour la solution approximée du problème physique. La *Méthode des Éléments Finis (MEF)* est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature.

La *MEF* est devenue un important outil d'analyse dans les projets modernes d'ingénierie, surtout après le développement des microordinateurs modernes. Aujourd'hui, cette méthode est utilisée avec succès sur nombreuses applications, telles que dans les problèmes de transfert de chaleur, d'électromagnétisme, d'acoustique, de mécanique de fluides, de fracture et d'endommagement. Plusieurs logiciels d'éléments finis, tels que: *Ansys*[®], *Nastran*[®], *Abaqus*[®] et *Comsol Multiphysics*[®] sont largement employés commercialement pour la modélisation numérique des structures.

Les formulations par éléments finis décrites dans ce mémoire de thèse sont écrites dans le langage de programmation du logiciel *Matlab*[®]. Les formulations par éléments finis développées dans ce chapitre sont appliquées à la modélisation de structures fabriquées en matériau purement viscoélastique, sandwich, stratifié ou stratifié sandwich. Les formulations utilisent un élément fini plan à huit nœuds appelé élément de *Serendip*, pour la discrétisation du champ des déplacements mécaniques. Celle-ci est approximée numériquement, soit par une

couche équivalent unique (avec les théories *FSDT* et *HSDT*), soit en *couches discrètes* (avec la théorie *Layerwise-FSDT*), selon les définitions présentées dans le Chapitre 2.

Le choix d'un élément fini à huit nœuds est dû aux investigations auparavant réalisées par Chee (2000) qui a constaté son excellente performance dans la modélisation de *structures composites adaptatives*, de diverses épaisseurs (structures *minces* ou épaisses) étudiées dans le *domaine statique*. Les structures adaptatives sont formées par des patches piézoélectriques collées sur sa surface (en matériau métallique ou stratifié) et travaillent comme actionneur et/ou capteur, et intégrant une procédure de contrôle actif. De plus, selon l'auteur ce type d'élément fini est dépourvu du *cisaillement de blocage* (en anglais : *shear locking*) lorsqu'on utilise la théorie *HSDT* pour l'approximation du champ des déplacements mécaniques de la structure. Ainsi, la théorie *HSDT* peut être utilisée dans la formulation de structures homogènes, minces, avec des erreurs négligeables sur les réponses statiques par rapport aux mesures réelles. De plus, les structures composites, de géométrie diverse et soumises aux conditions aux limites variées peuvent être discrétisées par l'élément *Serendip*, car celles-ci sont à l'origine des éléments iso-paramétriques. De plus, cet élément fini peut également être utilisé dans la formulation de structures composites en utilisant la théorie *FSDT*. Cependant, dans ce cas particulier, on doit ajouter des corrections sur les coefficients d'élasticité du matériau. Celles-ci sont associées aux contraintes et déformations de cisaillements transverses.

Les deux théories, *FSDT* et *HSDT*, sont implémentées par éléments finis et validées numériquement dans le travail réalisé par Faria dans le cadre du master (FARIA, 2006). Dans ce travail de *Master*, les formulations (*MEF-FSDT* et *MEF-HSDT*) sont validées numériquement avec des exemples numériques en utilisant des structures composites adaptatives de géométries simples (poutres et plaques), et les études sont réalisées dans le domaine statique et en vibration libre. Ainsi, ce mémoire de thèse constitue l'extension du travail cité, avec en plus l'introduction des éléments piézoélectriques, de mécanismes d'amortissement (intrinsèque du stratifié et viscoélastique du matériau viscoélastique) et d'endommagement (du stratifié) dans les structures composites.

De plus, ce même élément *Serendip* est utilisé pour l'implémentation numérique par éléments finis de la théorie *Layerwise-FSDT*. Celle-ci peut être considérée comme une extension de la théorie *FSDT*, car on doit ajouter à celle-ci la continuité des déplacements mécaniques selon l'épaisseur z du stratifié. L'imposition de la continuité des déplacements mécaniques selon l'épaisseur du stratifié est importante surtout, comme on peut le constater

dans le Chapitre IV, lors de l'étude de structure hétérogènes (avec l'inclusion d'une couche viscoélastique selon l'épaisseur) et minces.

Notre objectif dans ce chapitre, est d'écrire les relations entre les déformations et déplacements des théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*, en termes de variables nodales et de fonctions de forme de l'élément finis *Serendip*, et qui est utilisé dans ce mémoire en discrétisation des structures. De plus, la *formulation variationnelle de Hamilton* est utilisée pour obtenir l'équation générale du mouvement du système mécanique non-amorti dans le domaine temporel.

3.2 Description de l'élément fini Serendip

La famille *Serendip* est composée d'éléments finis qui n'ont pas de nœuds intérieurs (REDDY, 1997). L'élément *Serendip* utilisé dans ce mémoire est illustré sur la Fig. 3.1, où les relations entre le système de coordonnées élémentaires et locales de l'élément sont également présentées dans les équations (3.1) et (3.2), valides dans le cas particulier d'un élément fini rectangulaire.

$$\xi = \frac{(2x - x_8 - x_4)}{x_8 - x_4} ; x = \frac{1}{2}(\xi(x_8 - x_4) + x_8 + x_4) \quad (3.1)$$

$$\eta = \frac{(2y - y_6 - y_2)}{y_6 - y_2} ; y = \frac{1}{2}(\eta(y_6 - y_2) + y_6 + y_2) \quad (3.2)$$

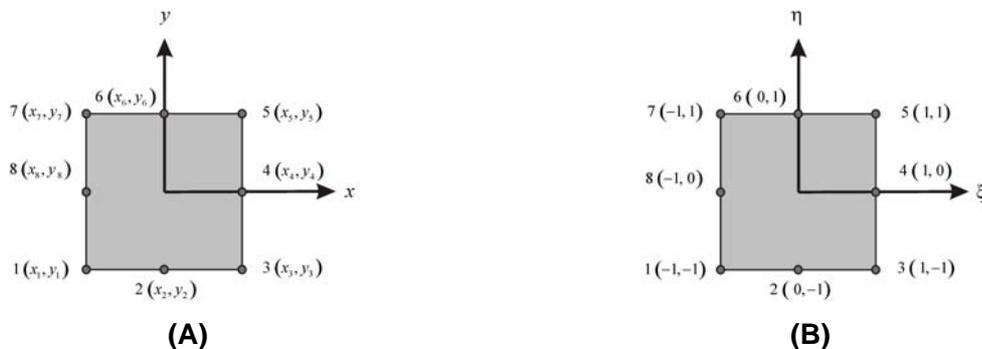


Figure 3.1 - Élément fini rectangulaire à huit nœuds en coordonnées élémentaire (A) et locales (B).

La *matrice Jacobienne*, associée au changement de coordonnées élémentaire-locales, s'exprime sous la forme :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (x_8 - x_4) & 0 \\ 0 & (y_6 - y_2) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Le *Jacobien* de l'élément fini rectangulaire est défini comme étant le déterminant de la *matrice Jacobienne* de l'équation (3.3) sous la forme suivante :

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{(y_6 - y_2)(x_8 - x_4)}{4} \quad (3.4)$$

Les huit *fonctions de forme*, $N_i(\xi, \eta)$ avec $i = 1, 2, \dots, 8$, de l'élément fini *Serendip* sont écrites dans le système de coordonnées locales (ξ, η) par les relations :

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) \\ N_2(\xi, \eta) \\ N_3(\xi, \eta) \\ N_4(\xi, \eta) \\ N_5(\xi, \eta) \\ N_6(\xi, \eta) \\ N_7(\xi, \eta) \\ N_8(\xi, \eta) \end{cases} = \begin{cases} -1/4(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \\ 1/2(1-\xi)(1+\xi)(1-\eta) \\ -1/4(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta) \\ 1/2(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta) \\ -1/4(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) \\ 1/2(1-\xi)(1+\xi)(1+\eta) \\ -1/4(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) \\ 1/2(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta) \end{cases} \quad (3.5)$$

Les dérivées de ces fonctions de forme par rapport au système de coordonnées locales (ξ, η) , sont données par les deux équations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N_{1,\xi}(\xi, n) \\ N_{2,\xi}(\xi, n) \\ N_{3,\xi}(\xi, n) \\ N_{4,\xi}(\xi, n) \\ N_{5,\xi}(\xi, n) \\ N_{6,\xi}(\xi, n) \\ N_{7,\xi}(\xi, n) \\ N_{8,\xi}(\xi, n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/4(-1+\eta)(2\xi+\eta) \\ \xi(-1+\eta) \\ 1/4(-1+\eta)(\eta-2\xi) \\ -1/2(1+\eta)(-1+\eta) \\ 1/4(1+\eta)(2\xi+\eta) \\ -\xi(1+\eta) \\ -1/4(1+\eta)(\eta-2\xi) \\ 1/2(1+\eta)(-1+\eta) \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{1,\eta}(\xi, n) \\ N_{2,\eta}(\xi, n) \\ N_{3,\eta}(\xi, n) \\ N_{4,\eta}(\xi, n) \\ N_{5,\eta}(\xi, n) \\ N_{6,\eta}(\xi, n) \\ N_{7,\eta}(\xi, n) \\ N_{8,\eta}(\xi, n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/4(-1+\xi)(\xi+2\eta) \\ 1/2(1+\xi)(-1+\xi) \\ 1/4(1+\xi)(2\eta-\xi) \\ -\eta(1+\xi) \\ 1/4(1+\xi)(\xi+2\eta) \\ -1/2(1+\xi)(-1+\xi) \\ -1/4(-1+\xi)(2\eta-\xi) \\ \eta(-1+\xi) \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Dans les paragraphes suivants, les détails liés à l'approximation numérique par éléments finis du champ de déplacements et des déformations mécaniques des théories *FSDT* et *HSDT* sont présentées.

3.3 Déplacements et déformations des théories *FSDT* et *HSDT*

Le champ de déplacements de la théorie *HSDT* est formulé en adoptant un seul pli équivalent, dans l'épaisseur de la structure composite. Par contre, le champ de déplacements de la théorie *FSDT* est obtenu par la réduction du champ d'ordre supérieur de la théorie *HSDT* et élimination de certaines composantes. Les expressions analytiques correspondantes sont fournies dans les équations (2.2) et (2.3). Pour une notation plus compacte, ces deux équations sont réécrites, respectivement, sous les formes matricielles suivantes :

$$\begin{cases} \hat{u}(x, y, z, t) \\ \hat{v}(x, y, z, t) \\ \hat{w}(x, y, z, t) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 & z^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 & z^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\hat{u}(x, y, t)\} \quad (3.8)$$

et

$$\begin{cases} \bar{u}(x, y, z, t) \\ \bar{v}(x, y, z, t) \\ \bar{w}(x, y, z, t) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\bar{u}(x, y, t)\} \quad (3.9)$$

, et qui peuvent être réécrites sous les formes suivantes :

$$\{\hat{U}(x, y, z, t)\}_{3 \times 1} = [\hat{A}(z)]_{3 \times 11} \{\hat{u}(x, y, t)\}_{11 \times 1} \quad (3.10)$$

et

$$\{\bar{U}(x, y, z, t)\}_{3 \times 1} = [\bar{A}(z)]_{3 \times 5} \{\bar{u}(x, y, t)\}_{5 \times 1} \quad (3.11)$$

soit finalement sous formes plus simplifiées :

$$\{\hat{U}\} = [\hat{A}] \{\hat{u}\} \quad (3.12)$$

et

$$\{\bar{U}\} = [\bar{A}] \{\bar{u}\} \quad (3.13)$$

Les onze fonctions, fournies dans le vecteur $\hat{u}(x, y, t)$, représentent les onze degrés de liberté (*ddl*s) de la théorie *HSDT*, *par contre* les fonctions planes du vecteur $\bar{u}(x, y, t)$ sont les

cinq *ddl*s de la théorie *FSDT*. Ces fonctions sont exprimées respectivement, sous les deux formes suivantes:

$$\hat{u}(x, y, t) = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \psi_x \quad \psi_y \quad \psi_z \quad \zeta_x \quad \zeta_y \quad \zeta_z \quad \phi_x \quad \phi_y\}^T \quad (3.14)$$

et

$$\bar{u}(x, y, t) = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \psi_x \quad \psi_y\}^T \quad (3.15)$$

Les déformations mécaniques sont définies en fonction de déplacements par :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{12}\}^T &= \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}\}^T = \\ &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}^T \end{aligned} \quad (3.16)$$

En appliquant ces relations déformation-déplacement et en tenant compte des équations (3.8) et (3.14), on obtient les expressions (3.17) et (3.18) des déformations mécaniques formulées avec la théorie *HSDT*, dont les déformations dues aux effets de *flexion*, de *membrane* et de *cisaillement plan* fournis par le vecteur $\{\hat{\varepsilon}_b\}$, les effets des *cisaillement transverse*, fournis par le vecteur $\{\hat{\varepsilon}_s\}$ sont *découplées*. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} &= \{\hat{\varepsilon}_b(x, y, z, t)\}_{4 \times 1} = \left[\hat{D}_0 + z\hat{D}_1 + z^2\hat{D}_2 + z^3\hat{D}_3 \right]_{4 \times 11} \{\hat{u}(x, y, t)\}_{11 \times 1} \\ &= \left[\hat{D}_b(z) \right]_{4 \times 11} \{\hat{u}(x, y, t)\}_{11 \times 1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

et

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} &= \{ \hat{\varepsilon}_s(x, y, z, t) \}_{2 \times 1} = \left[\hat{D}_4 + z\hat{D}_5 + z^2\hat{D}_6 \right]_{2 \times 11} \{ \hat{u}(x, y, t) \}_{11 \times 1} \\
&= \left[\hat{D}_s(z) \right]_{2 \times 11} \{ \hat{u}(x, y, t) \}_{11 \times 1}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

avec les matrices :

$$\left[\hat{D}_0 \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$\left[\hat{D}_1 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

$$\left[\hat{D}_2 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$[\hat{D}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$[\hat{D}_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$[\hat{D}_5] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$[\hat{D}_6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

En appliquant la relation déformation-déplacement, fournie par l'équation (3.16) combinée aux équations (3.9) et (3.15), on obtient les expressions des déformations mécaniques, désormais formulées avec la théorie *FSDT*. Comme dans le cas précédent, ses déformations sont partagées en effets de *flexion*, de *membrane* et de *cisaillement plan*, fourni par le vecteur $\{\hat{\varepsilon}_b\}$, et en effets des *cisaillement transverse* fourni par le vecteur $\{\hat{\varepsilon}_s\}$. Ainsi, on a les équations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \end{cases} = \{\bar{\varepsilon}_b(x, y, z, t)\}_{4 \times 1} = [\bar{D}_0 + z\bar{D}_1]_{4 \times 5} \{\bar{u}(x, y, t)\}_{5 \times 1} \quad (3.26)$$

$$= [\bar{D}_b(z)]_{4 \times 5} \{\bar{u}(x, y, t)\}_{5 \times 1}$$

et

$$\begin{cases} \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{cases} = \{\bar{\varepsilon}_s(x, y, t)\}_{2 \times 1} = [\bar{D}_2]_{2 \times 5} \{\bar{u}(x, y, t)\}_{5 \times 1} \quad (3.27)$$

$$= [\bar{D}_s]_{2 \times 5} \{\bar{u}(x, y, t)\}_{5 \times 1}$$

où les matrices $[\bar{D}_0]$, $[\bar{D}_1]$ et $[\bar{D}_2]$ sont données par :

$$[\bar{D}_0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$[\bar{D}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$[\bar{D}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

3.4 Approximation des déplacements et des déformations par la théorie HSDT

La formulation de la théorie *HSDT* utilise un élément rectangulaire bidimensionnel, illustré par la Fig. 3.2.

Les onze variables du champ de déplacement mécanique de la théorie *HSDT*, $\{\hat{u}(x, y, t)\} = \{u_0 \ v_0 \ w_0 \ \psi_x \ \psi_y \ \psi_z \ \zeta_x \ \zeta_y \ \zeta_z \ \phi_x \ \phi_y\}^T$, sont exprimées en fonction de ses 88 variables mécaniques nodales, c'est-à-dire :

$\{\hat{u}_e\} = \{u_i \ v_i \ w_i \ \psi_{xi} \ \psi_{yi} \ \psi_{zi} \ \zeta_{xi} \ \zeta_{yi} \ \zeta_{zi} \ \phi_{xi} \ \phi_{yi}\}^T$ avec $i=1,2,\dots,8$, défini par les équations (3.31) et (3.32).

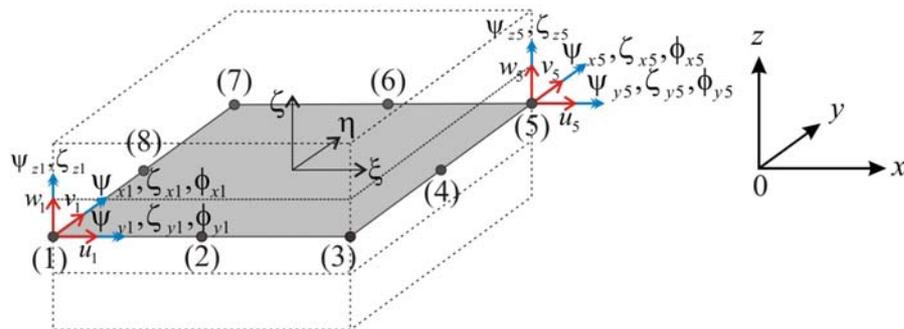


Figure 3.2 - Variables nodales des nœuds 1 et 5 d'un élément finis *Serendip* utilisant la théorie *HSDT* pour un modèle de structure composite à trois couches.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \\ \zeta_x \\ \zeta_y \\ \zeta_z \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & N_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N_2 & \cdots & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \psi_{x2} \\ \psi_{y2} \\ \vdots \\ \phi_{x2} \\ \phi_{y2} \\ \vdots \\ \phi_{y8} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

réécrite sous la forme condensée :

$$\{\hat{u}(\xi, \eta, t)\}_{(11 \times 1)} = [\hat{N}(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} \quad (3.32)$$

Les *fonctions de forme*, $N_i(\xi, \eta)$ avec $i=1$ à 8 , données par l'équation (3.5) sont incluses dans la *matrice des fonctions de forme* $[\hat{N}(\xi, \eta)]$, de taille 11×88 .

Utilisant l'équation (3.33), le *champ de déplacements mécaniques de Lo et al. (1977)* de la théorie *HSDT*, l'équation(3.8), est réécrite dans le système de coordonnées locales de l'élément fini *Serendip* sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}(\xi, \eta, z, t) \\ \hat{v}(\xi, \eta, z, t) \\ \hat{w}(\xi, \eta, z, t) \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = [\hat{A}(z)]_{3 \times 11} [\hat{N}(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} \quad (3.33)$$

ou selon l'expression simplifiée:

$$\{\hat{U}(\xi, \eta, z, t)\} = [\hat{A}(z)] [\hat{N}(\xi, \eta)] \{\hat{u}_e(t)\} \quad (3.34)$$

Soit finalement sous forme matricielle :

$$\{\hat{U}\} = [\hat{A}][\hat{N}]\{\hat{u}_e\} \quad (3.35)$$

Ainsi, comme le montre l'équation (3.35), le vecteur de déplacements mécaniques $\{\hat{U}\}$ de la théorie *HSDT* peut être exprimé en termes de *fonctions de forme* et de *variables nodales* de l'élément fini *Serendip*.

Les déformations de la théorie *HSDT*, présentées dans les équations (3.17) et (3.18), sont réécrites en termes de *fonctions de forme* et *déplacements nodales*, selon l'expression :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_b(\xi, \eta, z, t) \\ \hat{\varepsilon}_s(\xi, \eta, z, t) \end{Bmatrix}_{6 \times 1} &= \begin{bmatrix} \hat{D}_b(z) \\ \hat{D}_s(z) \end{bmatrix}_{6 \times 11} \{\hat{u}(x, y, t)\}_{11 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{D}_b(z) \\ \hat{D}_s(z) \end{bmatrix}_{6 \times 11} [\hat{N}(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{B}_b(\xi, \eta, z) \\ \hat{B}_s(\xi, \eta, z) \end{bmatrix}_{6 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} \end{aligned} \quad (3.36)$$

ou sous la forme condensée :

$$\{\hat{\varepsilon}(\xi, \eta, z, t)\} = [\hat{D}(z)][\hat{N}(\xi, \eta)]\{\hat{u}_e(t)\} \quad (3.37)$$

ou encore, on en séparant les effets découplés de cisaillement plan et transverse :

$$\{\hat{\varepsilon}_b\} = [\hat{B}_b]\{\hat{u}_e\} \quad (3.38)$$

et

$$\{\hat{\varepsilon}_s\} = [\hat{B}_s]\{\hat{u}_e\} \quad (3.39)$$

Les matrices $\begin{bmatrix} \hat{B}_b \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \hat{B}_s \end{bmatrix}$, tel que $\begin{bmatrix} \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{B}_s \end{bmatrix} \end{bmatrix}$, sont exprimées par une fonction polynomiale de la variable z selon les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\{\hat{\varepsilon}_b(\xi, \eta, z, t)\}_{4 \times 1} &= \begin{bmatrix} \hat{D}_b(z) \end{bmatrix}_{4 \times 11} \begin{bmatrix} \hat{N}(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{11 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{B}_0(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{4 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} + z \begin{bmatrix} \hat{B}_1(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{4 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} \\
&+ z^2 \begin{bmatrix} \hat{B}_2(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{4 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} + z^3 \begin{bmatrix} \hat{B}_3(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{4 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{B}_b(\xi, \eta, z) \end{bmatrix}_{4 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

et

$$\begin{aligned}
\{\hat{\varepsilon}_s(\xi, \eta, z, t)\}_{2 \times 1} &= \begin{bmatrix} \hat{D}_s(z) \end{bmatrix}_{2 \times 11} \begin{bmatrix} \hat{N}(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{11 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{B}_4(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{2 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} + z \begin{bmatrix} \hat{B}_5(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{2 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} \\
&+ z^2 \begin{bmatrix} \hat{B}_6(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{2 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{B}_s(\xi, \eta, z) \end{bmatrix}_{2 \times 88} \{\hat{u}_e(t)\}_{88 \times 1}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

3.5 Approximation des déplacements et de déformations par la théorie FSDT

La formulation de la théorie *FSDT* adopte, de la même façon que la théorie *HSDT*, l'élément rectangulaire *Serendip* (Figure 3.1). Toutefois, ses cinq variables du champ de déplacements mécaniques $\{\bar{u}(x, y, t)\}$, $\{\bar{u}(x, y, t)\} = \{u_0 \ v_0 \ w_0 \ \psi_x \ \psi_y\}^T$, sont exprimées en fonction des 40 variables nodales de la théorie *FSDT* selon le vecteur $\{\bar{u}_e\} = \{u_i \ v_i \ w_i \ \psi_{xi} \ \psi_{yi}\}^T$, avec $i = 1$ à 8, donné par les équations (3.42) et (3.43). Ainsi, on :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \psi_{x1} \\ \psi_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \psi_{x2} \\ \psi_{y2} \\ \vdots \\ \psi_{x8} \\ \psi_{y8} \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

réécrite sous la forme :

$$\{\bar{u}(\xi, \eta, t)\}_{5 \times 1} = [\bar{N}(\xi, \eta)]_{5 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \quad (3.43)$$

Les *fonctions de forme* $N_i(\xi, \eta)$, fournies par l'équation (3.5) avec $i=1$ à 8, sont contenues dans la *matrice de fonction de forme* $[\bar{N}(\xi, \eta)]$ de taille 5×40 .

Utilisant l'équation (3.43), le champ de déplacements mécaniques de la théorie *FSDT*, donné par l'équation (3.9), est réécrit dans le système de coordonnées locales, sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}(\xi, \eta, z, t) \\ \bar{v}(\xi, \eta, z, t) \\ \bar{w}(\xi, \eta, z, t) \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = [\bar{A}(z)]_{3 \times 5} [\bar{N}(\xi, \eta)]_{5 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \quad (3.44)$$

soit :

$$\{\bar{U}(\xi, \eta, z, t)\} = [\bar{A}(z)] [\bar{N}(\xi, \eta)] \{\bar{u}_e(t)\} \quad (3.45)$$

et finalement sous la forme matricielle:

$$\{\bar{U}\} = [\bar{A}][\bar{N}]\{\bar{u}_e\} \quad (3.46)$$

Ainsi, le vecteur élémentaire de déplacements mécaniques de la théorie *FSDT* est exprimé, en termes de *fonction de forme* et de *variables nodales*.

En utilisant l'équation (3.43), les expressions de la déformation mécanique de la théorie *FSDT*, fournies par les équations (3.26) et (3.27), sont réécrites sous la forme :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_b(\xi, \eta, z, t) \\ \bar{\varepsilon}_s(\xi, \eta, t) \end{Bmatrix}_{6 \times 1} &= \begin{bmatrix} \bar{D}_b(z) \\ \bar{D}_s \end{bmatrix}_{6 \times 5} [\bar{N}(\xi, \eta)]_{5 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{B}_b(\xi, \eta, z) \\ \bar{B}_s(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{6 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Soit sous forme condensée :

$$\{\bar{\varepsilon}(\xi, \eta, z, t)\} = [\bar{D}(z)][\bar{N}(\xi, \eta)]\{\bar{u}_e(t)\} \quad (3.48)$$

L'expression (3.48) est répartie en termes découplés des déformations de cisaillement plan et de cisaillement transverse dans les vecteurs :

$$\{\bar{\varepsilon}_b\} = [\bar{B}_b]\{\bar{u}_e\} \quad (3.49)$$

et

$$\{\bar{\varepsilon}_s\} = [\bar{B}_s]\{\bar{u}_e\} \quad (3.50)$$

Les deux matrices $[\bar{B}_b]$ et $[\bar{B}_s]$ présentées, sont exprimées comme fonction polynomiale de la variable z , par les expressions :

$$\begin{aligned}
\{\bar{\varepsilon}_b(\xi, \eta, z, t)\}_{4 \times 1} &= [\bar{D}_b(z)]_{4 \times 5} [\bar{N}(\xi, \eta)]_{5 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \\
&= [\bar{B}_0(\xi, \eta)]_{4 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} + z [\bar{B}_1(\xi, \eta)]_{4 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \\
&= [\bar{B}_b(\xi, \eta, z)]_{4 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

et

$$\begin{aligned}
\{\bar{\varepsilon}_s(\xi, \eta, t)\}_{2 \times 1} &= [\bar{D}_s]_{2 \times 5} [\bar{N}(\xi, \eta)]_{5 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \\
&= [\bar{B}_2(\xi, \eta)]_{2 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1} \\
&= [\bar{B}_s(\xi, \eta)]_{2 \times 40} \{\bar{u}_e(t)\}_{40 \times 1}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

3.6 Déplacements et déformations mécaniques de la théorie Layerwise-FSDT

Le champ de déplacements mécaniques de premier ordre utilisé pour la formulation de la théorie *Layerwise-FSDT*, est donné par pli, selon l'épaisseur du stratifié (Figure 3.3 (A)), en prenant la forme présentée dans l'équation (2.12) du Chapitre II.

Pour la détermination des déplacements et des déformations de la théorie *Layerwise-FSDT*, on adopte dans ce mémoire une formulation développée pour une structure composite quelconque de trois plis (Figure 3.3 (B)), car le nombre de *ddl*s de la formulation par éléments finis de cette théorie augmente rapidement avec le nombre de plis, et par conséquent le coût numérique de son implémentation est également augmenté. Le nombre total de *ddl*s (N_{ddl}), pour chaque élément fini formulé en utilisant la théorie *Layerwise-FSDT*, est donné par la relation : $N_{ddl} = 8(3 + 2Nc)$, où Nc est le nombre total de plis (ou de couches dans le cas de structures sandwiches) d'une structure composite, formulée avec cet élément finis. Ainsi, par exemple, si la structure possède trois plis, on a 72 *ddl*s pour chaque élément fini, et si elle a quatre plis, ce nombre s'élève à 88 *ddl*s (le même nombre de *ddl*s de la théorie *HSST*, qui par ailleurs, n'est pas dépendant du nombre de plis de la structure composite formulée).

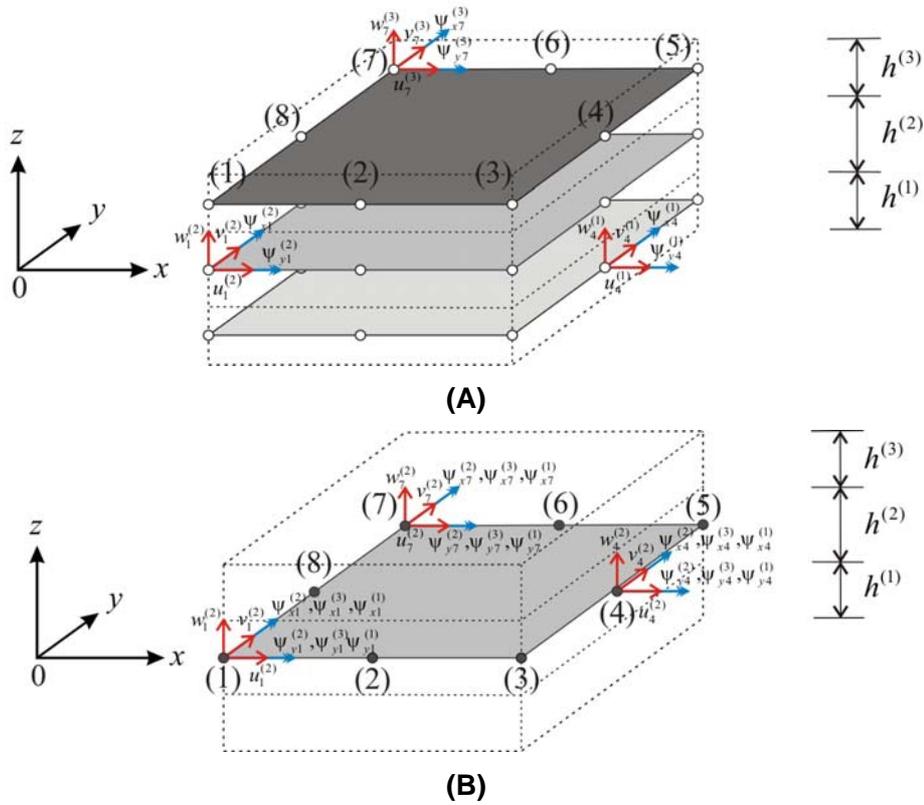


Figure 3.3 - Variables nodales de l'élément fini de la théorie *Layerwise-FSDT*, selon les nœuds 1, 4 et 7 des plis 1, 2 et 3, respectivement, avant (A) et après (B) l'imposition de la continuité de déplacements mécaniques.

Les coordonnées moyennes par pli k , illustrées sur la Fig. 3.3 (A) avec $k = 1$ à 3, de la structure sandwich à trois couches, sont données par les expressions :

$$\begin{aligned}
 z^{(1)} &= -\left(\frac{h^{(1)}}{2} + \frac{h^{(2)}}{2}\right) \\
 z^{(2)} &= 0 \\
 z^{(3)} &= \left(\frac{h^{(2)}}{2} + \frac{h^{(3)}}{2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

où les constantes $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ et $h^{(3)}$ sont, respectivement, l'épaisseur de la couche inférieure (*base*), de la couche centrale (*noyau*) et de la couche supérieure (*peau*) de la structure sandwich.

Comme nous avons présenté dans le Chapitre II, les champs de déformations et de déplacements de deux couches adjacentes k et $k+1$, on doit satisfaire la condition de continuité des déplacements, exprimée par l'équation (2.12) du Chapitre II.

En considérant un stratifié à trois couches, la continuité de déplacements mécaniques entre les interfaces communes à chaque couche, est donnée par les deux équations (3.54) et (3.55). Ainsi, pour les interfaces entre la couche base et centrale, on obtient la relation suivante :

$$\begin{cases} u^{(1)}\left(x, y, z^{(1)} + \frac{h^{(1)}}{2}, t\right) \\ v^{(1)}\left(x, y, z^{(1)} + \frac{h^{(1)}}{2}, t\right) \end{cases}^{(1)} = \begin{cases} u^{(2)}\left(x, y, -\frac{h^{(2)}}{2}, t\right) \\ v^{(2)}\left(x, y, -\frac{h^{(2)}}{2}, t\right) \end{cases}^{(2)} \quad (3.54)$$

et pour les interfaces entre la couche centrale et la couche supérieure, on a :

$$\begin{cases} u^{(2)}\left(x, y, \frac{h^{(2)}}{2}, t\right) \\ v^{(2)}\left(x, y, \frac{h^{(2)}}{2}, t\right) \end{cases}^{(2)} = \begin{cases} u^{(3)}\left(x, y, z^{(3)} - \frac{h^{(3)}}{2}, t\right) \\ v^{(3)}\left(x, y, z^{(3)} - \frac{h^{(3)}}{2}, t\right) \end{cases}^{(3)} \quad (3.55)$$

En utilisant les conditions de continuité sur les interfaces communes entre chaque couche, présentées par les équations (3.54) et (3.55), et en utilisant l'équation (3.53), on peut obtenir les expressions des déplacements mécaniques plans $(u_0^{(k)}, v_0^{(k)})$ en relation aux surfaces moyennes, de la première ($k=1$) et de la troisième ($k=3$) couche de la structure sandwich. Ces expressions sont écrites en fonction des variables du champ de déplacement mécanique de la couche centrale ($k=2$). Ainsi, on a les expressions suivantes des déplacements plans de la base et de la peau :

$$\begin{aligned}
u_0^{(1)}(x, y, t) &= \left(\frac{h^{(1)}}{2}\right) \psi_x^{(2)}(x, y, t) + u_0^{(2)}(x, y, t) + \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right) \psi_x^{(1)}(x, y, t) \\
v_0^{(1)}(x, y, t) &= \left(\frac{h^{(1)}}{2}\right) \psi_y^{(2)}(x, y, t) + v_0^{(2)}(x, y, t) + \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right) \psi_y^{(1)}(x, y, t)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
u_0^{(3)}(x, y, t) &= -\left(\frac{h^{(3)}}{2}\right) \psi_x^{(2)}(x, y, t) + u_0^{(2)}(x, y, t) - \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right) \psi_x^{(3)}(x, y, t) \\
v_0^{(3)}(x, y, t) &= -\left(\frac{h^{(3)}}{2}\right) \psi_y^{(2)}(x, y, t) + v_0^{(2)}(x, y, t) - \left(\frac{h^{(2)}}{2}\right) \psi_y^{(3)}(x, y, t)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Les équations (3.56) et (3.57) sont substituées dans l'équation du champ de déplacement de premier ordre, défini par l'équation (2.12) du Chapitre II, par couche k de la structure sandwich. Ainsi, le champ de déplacement résultant par couche k , de la théorie *Layerwise-FSDT*, est écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{(k)} \\ \mathbf{v}^{(k)} \\ \mathbf{w}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a^{(k)} & 0 & b^{(k)} & 0 & c^{(k)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a^{(k)} & 0 & b^{(k)} & 0 & c^{(k)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\widehat{\mathbf{u}}(x, y, t)\} \tag{3.58}$$

où :

$$\bar{a}^{(1)} = -\frac{h^{(2)}}{2}, \quad \bar{a}^{(2)} = z, \quad \bar{a}^{(3)} = \frac{h^{(2)}}{2}, \tag{3.59}$$

$$\bar{b}^{(1)} = 0, \quad \bar{b}^{(2)} = 0, \quad \bar{b}^{(3)} = \left(z - \frac{h^{(2)}}{2}\right), \tag{3.60}$$

$$\bar{c}^{(1)} = \left(z + \frac{h^{(2)}}{2}\right), \quad \bar{c}^{(2)} = 0, \quad \bar{c}^{(3)} = 0 \tag{3.61}$$

où les 9 *ddl*s par nœud de l'élément fini Serendip de la théorie *Layerwise-FSDT* sont groupés dans le vecteur $\widehat{u}(x, y, t)$ et représentent les *ddl*s associés aux déplacements $(u_0^{(2)}, v_0^{(2)}, w_0^{(2)})$ de la couche moyenne de référence $(x, y, 0, t)$ et les rotations des trois couches $(\psi_x^{(1)}, \psi_y^{(1)}, \psi_x^{(2)}, \psi_y^{(2)}, \psi_x^{(3)}, \psi_y^{(3)})$ du MEF la structure sandwich. Le vecteur $\widehat{u}(x, y, t)$ peut être écrit selon l'expression :

$$\widehat{u}(x, y, t) = \left\{ u_0^{(2)} \quad v_0^{(2)} \quad w_0^{(2)} \quad \psi_x^{(2)} \quad \psi_y^{(2)} \quad \psi_x^{(3)} \quad \psi_y^{(3)} \quad \psi_x^{(1)} \quad \psi_y^{(1)} \right\}^T \quad (3.62)$$

Ainsi, on peut récrire l'équation (3.58) sous la forme plus simplifiée suivante :

$$\{\widehat{U}\}^{(k)} = [\widehat{A}^{(k)}] \{\widehat{u}\} \quad (3.63)$$

En appliquant la relation entre déformations et déplacements mécaniques, exprimée par l'équation (3.16), combinée avec les équations (3.58) et (3.62), on obtient les expressions fournies dans les expressions (3.64) et (3.65) et par la suite la représentation par éléments finis de la déformation mécanique en utilisant la théorie *Layerwise-FSDT*. Les déformations de chaque couche sont découplées en termes des *effets de flexion*, de *membrane* et de *cisaillement plan*, fournis dans le vecteur $\{\widehat{\varepsilon}_b\}$, et en termes des *effets de déformation de cisaillement transverse*, fournis dans le vecteur $\{\widehat{\varepsilon}_s\}$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} &= \{\widehat{\varepsilon}_b^{(k)}(x, y, z, t)\}_{4 \times 1} = [\widehat{D}_0^{(k)} + z\widehat{D}_1^{(k)}]_{4 \times 9} \{\widehat{u}(x, y, t)\}_{9 \times 1} \\ &= [\widehat{D}_b^{(k)}(z)]_{4 \times 9} \{\widehat{u}(x, y, t)\}_{9 \times 1} \end{aligned} \quad (3.64)$$

et

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix}^{(k)} = \left\{ \widehat{\varepsilon}_s^{(k)}(x, y, z, t) \right\}_{2 \times 1} = \left[\widehat{D}_2^{(k)} \right]_{2 \times 9} \{ \widehat{u}(x, y, t) \}_{9 \times 1} = \left[\widehat{D}_s^{(k)}(z) \right]_{2 \times 9} \{ \widehat{u}(x, y, t) \}_{9 \times 1} \quad (3.65)$$

avec les matrices : $\left[\widehat{D}_0^{(k)} \right]$, $\left[\widehat{D}_1^{(k)} \right]$ et $\left[\widehat{D}_2^{(k)} \right]$ écrites sous la forme :

$$\left[\widehat{D}_0^{(k)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & a^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & b^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & c^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & a^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & b^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & c^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & a^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & a^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & b^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & b^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & c^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & c^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\left[\widehat{D}_1^{(k)} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{a}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \bar{b}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \bar{c}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \bar{b}^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \bar{c}^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & \bar{a}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & \bar{b}^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & \bar{b}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} & \bar{c}^{(k)} \frac{\partial}{\partial y} & \bar{c}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\left[\widehat{D}_2^{(k)} \right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \bar{a}^{(k)} & 0 & \bar{b}^{(k)} & 0 & \bar{c}^{(k)} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \bar{a}^{(k)} & 0 & \bar{b}^{(k)} & 0 & \bar{c}^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

avec $k = 1 \dots 3$, selon la couche k de la structure sandwich $\bar{a}^{(k)}$, $\bar{b}^{(k)}$ et $\bar{c}^{(k)}$ sont donnés, selon la couche k , par les expressions :

$$\bar{a}^{(1)} = 0, \bar{a}^{(2)} = 1, \bar{a}^{(3)} = 0, \quad (3.69)$$

$$\bar{b}^{(1)} = 0, \bar{b}^{(2)} = 0, \bar{b}^{(3)} = 1, \quad (3.70)$$

$$\bar{c}^{(1)} = 1, \bar{c}^{(2)} = 0, \bar{c}^{(3)} = 0 \quad (3.71)$$

3.7 Approximation par éléments finis des déplacements et déformations de la théorie Layerwise-FSDT

La formulation de la théorie *Layerwise-FSDT* utilise le même élément rectangulaire bidimensionnel *Serendip* employé précédemment dans les deux autres théories, et qui est illustré par la Fig. 3.2.

Les neuf variables du champ de déplacements mécaniques $\{\hat{u}(x, y, t)\} = \{u_0^{(2)} \ v_0^{(2)} \ w_0^{(2)} \ \psi_x^{(2)} \ \psi_y^{(2)} \ \psi_x^{(3)} \ \psi_y^{(3)} \ \psi_x^{(1)} \ \psi_y^{(1)}\}^T$ de la théorie *Layerwise-FSDT* sont exprimées en fonction de leurs correspondants 72 variables nodales : $\{\hat{u}_e\} = \{u_i^{(2)} \ v_i^{(2)} \ w_i^{(2)} \ \psi_{xi}^{(2)} \ \psi_{yi}^{(2)} \ \psi_{xi}^{(3)} \ \psi_{yi}^{(3)} \ \psi_{xi}^{(1)} \ \psi_{yi}^{(1)}\}^T$ avec $i=1$ à 8, tel qu'est indiqué par l'équation suivante, en utilisant les coordonnées locales (ξ, η) de l'élément fini *Serendip* :

$$\{\hat{u}(\xi, \eta, t)\}_{9 \times 1} = [\hat{N}(\xi, \eta)]_{9 \times 72} \{\hat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \quad (3.72)$$

Les fonctions de forme de l'élément fini *Serendip*, présentées dans l'équation (3.5), constituent la matrice de fonctions de forme $[\hat{N}(\xi, \eta)]$, de taille 9×72 .

Le champ de déplacement de la théorie *Layerwise-FSDT*, fourni dans l'équation (3.58), est réécrit dans le système de coordonnées locales, en substituant l'équation (3.72) dans l'équation (3.63) :

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, z, t) \\ v(\xi, \eta, z, t) \\ w(\xi, \eta, z, t) \end{Bmatrix}_{3 \times 1}^{(k)} = [\hat{A}^{(k)}(z)]_{3 \times 9} [\hat{N}(\xi, \eta)]_{9 \times 72} \{\hat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \quad (3.73)$$

Soit :

$$\{\widehat{U}(\xi, \eta, z, t)\}^{(k)} = [\widehat{A}^{(k)}(z)] [\widehat{N}(\xi, \eta)] \{\widehat{u}_e(t)\} \quad (3.74)$$

Et enfin sous forme matricielle :

$$\{\widehat{U}\}^{(k)} = [\widehat{A}^{(k)}] [\widehat{N}] \{\widehat{u}_e\} \quad (3.75)$$

Le champ de déplacement de chaque couche k , défini par l'équation (3.73) de la structure sandwich utilisant la théorie *Layerwise-FSDT*, est exprimé en termes de ses 72 variables nodales par élément fini, au lieu des 40 ou 88 respectivement, avec théories *FSDT* et *HSDT*.

Après l'imposition de la continuité des déplacements dans la théorie *FSDT* (formulée avec une *couche équivalente simple*) par couche selon l'épaisseur de la structure, Fig. 3.3 (A), on obtient la théorie *Layerwise-FSDT* (formulée en N_c couches discrètes) avec l'addition de quatre degrés *ddl*s supplémentaires par nœud de l'élément fini *Serendip*. Ces *ddl*s associés aux rotations $(\psi_{ix}^{(k)}, \psi_{iy}^{(k)})$ de la base ($k=1$) et de la peau ($k=3$), d'un nœud i quelconque de l'élément fini ($i=1 \dots 8$), sont additionnés aux *ddl*s $(u_{0i}^{(2)}, v_{0i}^{(2)}, w_{0i}^{(2)}, \psi_{xi}^{(2)}, \psi_{yi}^{(2)})$ du noyau (couche de référence). Celle-ci est la couche que présente le plan moyen de référence de la structure sandwich, avec les coordonnées $(x, y, 0)$.

Le vecteur de déformation de la théorie *Layerwise-FSDT*, présenté par les équations (3.64) et (3.65), est réécrit en termes de *fonctions de forme* et *variables nodales* d'élément *Serendip*, par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \widehat{\varepsilon}_b(\xi, \eta, z, t) \\ \widehat{\varepsilon}_s(\xi, \eta, t) \end{Bmatrix}_{6 \times 1}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \widehat{D}_b^{(k)}(z) \\ \widehat{D}_s^{(k)} \end{bmatrix}_{6 \times 9} [\widehat{N}(\xi, \eta)]_{9 \times 72} \{\widehat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} \widehat{B}_b^{(k)}(\xi, \eta, z) \\ \widehat{B}_s^{(k)}(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{6 \times 72} \{\widehat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \end{aligned} \quad (3.76)$$

ou :

$$\{\widehat{\varepsilon}(\xi, \eta, z, t)\}^{(k)} = [\widehat{D}^{(k)}(z)] [\widehat{N}(\xi, \eta)] \{\widehat{u}_e(t)\} \quad (3.77)$$

ou alors dans sa forme découplée :

$$\{\widehat{\varepsilon}_b\}^{(k)} = [\widehat{B}_b^{(k)}] \{\widehat{u}_e\} \quad (3.78)$$

$$\{\widehat{\varepsilon}_s\}^{(k)} = [\widehat{B}_s^{(k)}] \{\widehat{u}_e\} \quad (3.79)$$

Les matrices $[\widehat{B}_b^{(k)}]$ et $[\widehat{B}_s^{(k)}]$, avec $[\widehat{B}]^{(k)} = \begin{bmatrix} [\widehat{B}_b^{(k)}] \\ [\widehat{B}_s^{(k)}] \end{bmatrix}$, sont exprimées comme une fonction polynomiale de premier ordre de la variable z , selon les deux expressions :

$$\begin{aligned} \{\widehat{\varepsilon}_b(\xi, \eta, z, t)\}_{4 \times 1}^{(k)} &= [\widehat{D}_b^{(k)}(z)]_{4 \times 9} [\widehat{N}(\xi, \eta)]_{9 \times 72} \{\widehat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \\ &= [\widehat{B}_0^{(k)}(\xi, \eta)]_{4 \times 72} \{\widehat{u}_e(t)\} + z [\widehat{B}_1^{(k)}(\xi, \eta)]_{4 \times 72} \{\widehat{u}_e(t)\} \\ &= [\widehat{B}_b^{(k)}(\xi, \eta, z)]_{4 \times 72} \{\widehat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \end{aligned} \quad (3.80)$$

et

$$\begin{aligned} \{\widehat{\varepsilon}_s(\xi, \eta, t)\}_{2 \times 1}^{(k)} &= [\widehat{D}_s^{(k)}]_{2 \times 9} [\widehat{N}(\xi, \eta)]_{9 \times 72} \{\widehat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \\ &= [\widehat{B}_2^{(k)}(\xi, \eta)]_{2 \times 72} \{\widehat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \\ &= [\widehat{B}_s^{(k)}(\xi, \eta)]_{2 \times 72} \{\widehat{u}_e(t)\}_{72 \times 1} \end{aligned} \quad (3.81)$$

où les matrices $[\widehat{B}_b^{(k)}]$ et $[\widehat{B}_s^{(k)}]$ sont dépendantes de la couche k de la structure sandwich.

3.8 Équation d'équilibre dynamique de la structure mécanique non-amortie

Les structures, multicouches en matériau métallique ou stratifié, peuvent être amorties par traitements passifs avec l'insertion de couches internes en matériau viscoélastique, selon son épaisseur. Normalement, les couches en matériau viscoélastique sont collées à l'intérieur ou sur

la structure composite. Celles qui sont collées à la surface extérieur de la structure peuvent être sous forme de patches ou de couches, sans ou avec l'utilisation d'une couche contrainte. Le couplage entre le substrat (en matériaux divers : isotrope, transversalement isotrope, anisotrope, orthotrope ...) et le matériau viscoélastique doit être considéré dans le *MEF* de la structure amortie considérée. Par conséquent, on utilise le *principe variationnel de Hamilton (PVH)*, car il prend en compte les contributions énergétiques de tous les composants de la structure modélisée par éléments finis. La formulation par éléments finis basée sur le *PVH* est très pratique, car toutes les formes d'énergétiques présentes sont traitées ensembles, sans la nécessité d'utilisation des équations basées sur des forces et moments.

Le *PVH* (au niveau élémentaire et global) est utilisé dans l'Annexe B.1 pour obtenir les équations du mouvement, au niveau élémentaire, des trois théories utilisées dans la formulation par éléments finis considérée. Celles-ci sont utilisées dans la modélisation de structures considérée dans ce mémoire (stratifié, sandwich, purement viscoélastique ...).

En utilisant le *principe variationnel*, chaque expressions associée à chaque type de variation énergétique totale, doit être nulle pour satisfaire l'équation (B.30) de l'Annexe B.1. Il en résulte *l'équation du mouvement dynamique de la structure conservative globale*,

$$\left[M_g \right] \{ \ddot{u}_g(t) \} + \left[K_g \right] \{ u_g(t) \} = \{ F_g(t) \} \quad (3.82)$$

où la matrice $\left[M_g \right]$ est *la matrice de masse globale*, symétrique et définie positive. La matrice $\left[K_g \right]$ est *la matrice de raideur globale*, symétrique, définie non négative. Les vecteurs $\{ u_g \}$ et $\{ F_g \}$ sont, respectivement, *les vecteurs de déplacement généralisé* et *de chargement généralisé*. Et, finalement, t est la variable temporelle.

On peut remarquer dans l'équation (3.82), que la taille des matrices de masse, de raideur et du vecteur de forces du système global, est dépendante du *nombre total de nœuds* ($N_{nœud}$) résultants de la discrétisation de la structure et du *nombre de ddl du modèle utilisé* (N_{ddl}), c'est-à-dire $N_{ddl} = 5$, $N_{ddl} = 11$ ou $N_{ddl} = 9$, respectivement en fonction de la formulation *FSDT*, *HSDT* ou *Layerwise-FSDT* utilisée. Ainsi, les matrices $\left[K_g \right]$ et $\left[M_g \right]$, de la structure en

conditions aux limites libres, sont des matrices carrées d'ordre M ($M = N_{\text{noeud}} \times N_{\text{ddl}}$) et les vecteurs $\{F_g\}$, $\{\ddot{u}_g\}$ et $\{u_g\}$ sont de dimension $M \times 1$.

Les spécifications de la théorie utilisée dans le *MEF* de structures composites, sont données dans la formulation de la matrice $[B]$. Dans ce mémoire, les formes de la matrice $[B]$ sont données par les expressions décrites par les équations (3.40), (3.47) et (3.76).

Dans le travail de Master de Faria (2006), les matrices élémentaires $[M_e]$ et $[K_e]$, définies respectivement par les équations (B.8) et (B.20), sont intégrées en utilisant le calcul formel. L'intégration est effectuée en utilisant les fonctions « *syms* » et « *int* » du *calcul formel* du logiciel *MATLAB*[®], conduisant à un coût de calcul numérique élevé. Pour réduire ce coût pour le calcul des matrices $[K_g]$, $[M_g]$ et $\{F_g\}$, on utilise la technique l'intégration numérique à *quadrature de Gauss*, dont les détails seront donnés dans le Chapitre V.

Les trois formulations par éléments finis développées dans ce mémoire (*FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*) sont assez générales, afin de permettre la modélisation de structures de type poutre, barres, plaques, plaques légèrement courbes ..., en matériau stratifié, sandwich, plastique, viscoélastique, métallique...et avec des conditions aux limites arbitraires (libre, appuyé, encastré ...). Les structures composites peuvent être constituées de différents matériaux, situés en différentes positions dans l'épaisseur, en comportement isotrope, isotrope transverse ou orthotrope.

Les structures sandwiches sont constituées d'une base et d'une peau en matériau métallique avec un noyau ou âme en matériau viscoélastique, dont le comportement est dépendant de la température et de la fréquence d'excitation de la structure (ces points font l'objet d'étude du Chapitre IV). De plus, on montrera que la modélisation de structures composites en matériau stratifié, ou stratifié sandwich (avec noyau viscoélastique et base et peau en matériau stratifiée). prend en compte l'amortissement intrinsèque de la résine du pli du stratifié.

On présente dans l'Annexe C.1 comment sont appliquées les conditions aux limites sur l'équation (3.82).

3.9 Fréquences propres et modes propres de la structure composite non-amortie

Dans le cas particulier des *vibrations libres* de structure conservative, fournies par l'équation (3.82), le vecteur $\{F_g(t)\}$ est nul, et ainsi, dans le domaine temporel on a :

$$[M_g]\{\ddot{u}_g(t)\} + [K_g]\{u_g(t)\} = \{0\} \quad (3.83)$$

Selon Ewins (1984), dans le domaine fréquentiel on peut obtenir la solution de l'équation précédente, en adoptant une forme harmonique, sous la forme suivante :

$$\{u_g(t)\} = \{\tilde{u}_g\} e^{i\omega t} \quad (3.84)$$

ainsi, l'équation (3.83) peut être réécrite sous la forme :

$$\left([k_g] - \omega^2 [M_g] \right) \{\tilde{u}_g\} = 0 \quad (3.85)$$

L'équation (3.85) représente un problème aux valeurs propres, dont la solution est exprimée par deux matrices carrées ($i \times i$) suivantes :

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_i^2 \end{bmatrix} \text{ et } [\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21} & \dots & \Psi_{1(i)} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \dots & \Psi_{2(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{(i)1} & \Psi_{(i)2} & \dots & \Psi_{(i)(i)} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

où $[\Lambda]$ est la *matrice spectrale*, et la $[\Psi]$ est la *base modale* de la structure non amortie.

Si on s'intéresse à la comparaison des résultats numériques en fréquences et modes propres de modèles on utilise des critères de comparaison classiques (tel que la matrice *MAC* pour les vecteurs propres). Celles-ci sont fournies dans l'Annexe C.2.

3.10 Simulations numériques

Avec le but de valider les modèles *présentés* (*FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*), on illustre quelques applications numériques. Celles-ci sont effectuées dans les *domaines statique* et *fréquentiel*, sur des structures académiques de type plaques, en matériau stratifié et avec différentes conditions aux limites. Les résultats numériques de fréquences propres sont comparés aux résultats *mesurés* et de la *théorie d'Élasticité 3D*, qui sont fournis dans la littérature.

3.10.1 - Validation numérique des formulations FSDT et HSDT

Pour la vérification expérimentale et la comparaison des résultats obtenus entre les théories *FSDT* et *HSDT*, on utilise les travaux de Cugnoni et Schorderet (2004).

Dans cette application numérique une plaque rectangulaire en matériau stratifié, de dimensions $290 \times 234 \times 5$ mm, avec huit plis de même épaisseur et orientés à $(90^\circ / 0^\circ)_{2s}$ et avec ses bords libres-libres, est étudiée. La structure stratifiée est discrétisée selon un maillage à 8×8 éléments finis,

Les propriétés mécaniques du matériau stratifié sont : $E_1 = 23,5$ GPa, $E_2 = E_3 = 9,4$ GPa, $G_{12} = G_{13} = 2,5$, $G_{23} = 1,8$, $\nu_{12} = 0,08$, $\nu_{13} = 0,35$, $\nu_{32} = 0,38$ et $\rho = 1463$ Kg/m³ (CUGNONI et SCHORDERET, 2004).

Le *facteur de correction du cisaillement transverse* adapté à la théorie *FSDT* est celui donné pour Reddy (1997): $k_1 = k_2 = 5/6$. Ils sont utilisés pour des éléments finis de structures composites et homogènes.

Le Tableau 3.1 regroupe les résultats numériques du *MEF-FSDT* et *MEF-HSDT* de la plaque composite comparés aux résultats expérimentaux réalisés par Cugnon et Shorderet (2004).

Tableau 3.1 - Comparaison numérique et expérimental des fréquences propres de vibration [Hz] de la plaque composite.

Fréquences	<i>HSDT (I)</i>	<i>FSDT (II)</i>	<i>Expérimental (III)</i>	(I) x (III)	(II) x (III)
	<i>2475 dds</i>	<i>1125 dds</i>	<i>(référence)</i>	(%)	(%)
	Eq.(3.85)	Eq. (3.85)		Eq. (C.11)	Eq. (C.11)
1	102,1	102,4	101,7	0,4	0,7
2	188,4	198,1	190,1	0,9	4,2
3	279,3	287,6	273,9	2,0	5,0
4	339,5	354,1	340,9	0,4	3,9
5	395,1	406,6	389,7	1,4	4,3
6	525,0	556,1	524,5	0,1	6,0
7	567,5	585,6	558,2	1,7	4,9

Les figures 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 et 3.8 illustrent les formes des cinq premiers modes propres obtenus par le *MEF-HSDT* de la plaque composite.

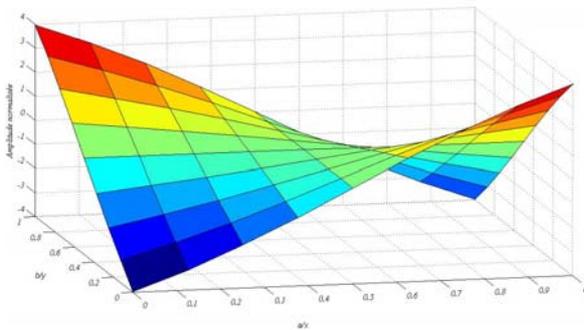


Figure 3.4 - premier mode propre, $\omega_1 = 102,1$ Hz.

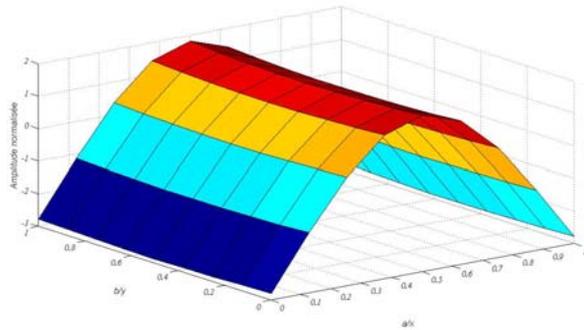
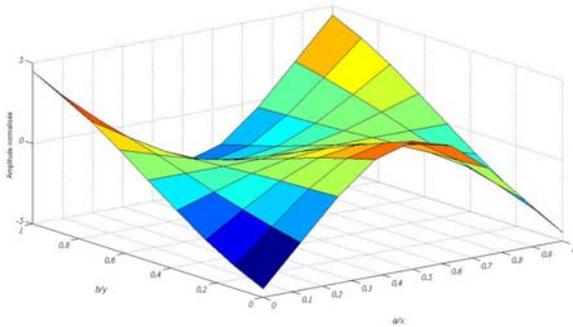
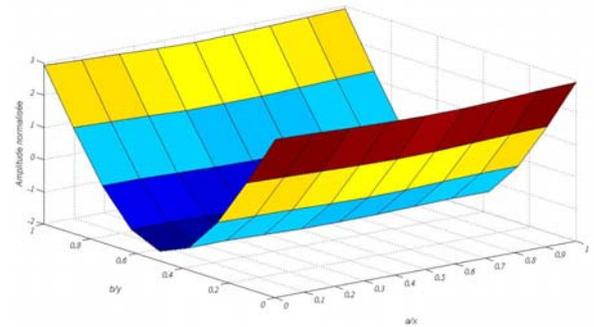
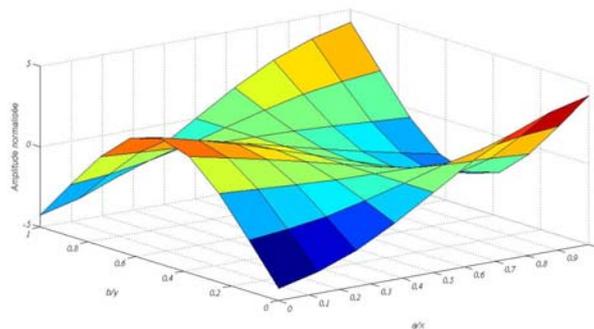


Figure 3.5 - 2ème mode propre, $\omega_2 = 188,4$ Hz.

Figure 3.6 - 3ème mode propre, $\omega_3 = 279,3$ Hz.Figure 3.7 - 4ème mode propre, $\omega_4 = 339,5$ Hz.Figure 3.8 - 5ème mode propre, $\omega_5 = 395,1$ Hz.

Les résultats numériques relatifs aux fréquences propres avec la théorie *HSDT* se rapprochent davantage des résultats expérimentaux de Cugnon et Schorderet (2004) que ceux de la théorie *FSDT*.

3.10.2 - Comparaison numérique des MEFs avec les théories *FSDT* et *Layerwise-FSDT*

Cet exemple est utilisé pour l'étude dans les domaines fréquentiel et statique d'une plaque quadrangulaire en matériau stratifié. On s'intéresse à l'obtention de la *fréquence fondamentale* ω_1 (première fréquence propre de la structure) et son *mode propre*. Dans le cas *statique*, on s'intéresse *aux* déplacements de la structure composite sous chargement statique.

La structure composite, en matériau stratifié, est constituée de quatre plis. Celle-ci est formulée par éléments finis selon les théories *FSDT* et *Layerwise-FSDT*.

La première fréquence propre (*fréquence fondamentale*) de la structure composite s'exprime par la relation normalisée :

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \tag{3.87}$$

où les variables ω_1 , h , a et ρ sont, respectivement, la fréquence fondamentale de la structure, sont épaisseur, sa largeur et la densité du stratifié.

La structure a des dimensions $(a \times a \times h)$ normalisées. Elle est constituée de quatre plis de même épaisseur $h/4$, et orientés à $(0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ)$, comme illustré sur la Fig. 3.8 (A).

Comme les deux plis centraux sont orientés à 90° , et sont de même matériau et de même épaisseur, on peut employer une discrétisation par éléments finis avec seulement trois plis dans l'épaisseur du stratifié, car la théorie *Layerwise-FSDT* est formulée dans le cas de structures composites à trois plis.

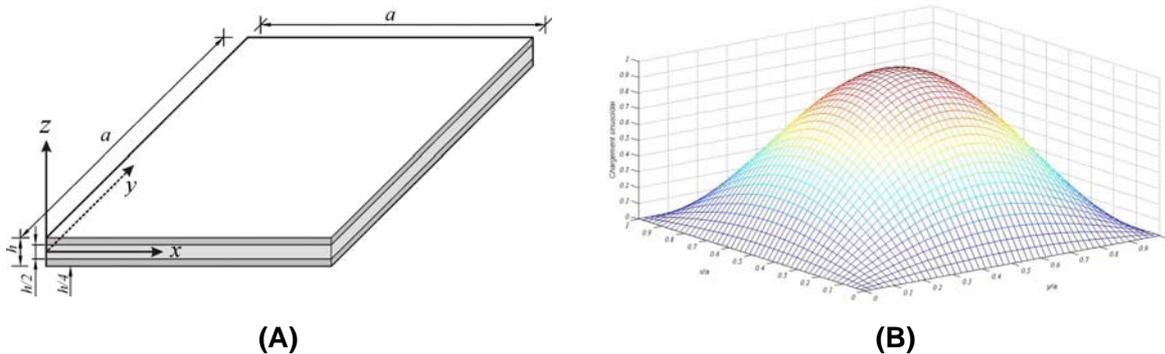


Figure 3.9 - (A) Représentations de la géométrie de la plaque composite, (B) et le chargement sinusoïdale $q(x, y)$ appliqué.

La plaque composite est appuyée sur ses quatre bords. Pour les bords parallèles au repère x on adopte :

$$u_0 = w_0 = \psi_x = 0 \tag{3.88}$$

et pour les bords parallèles au repère y , on utilise :

$$v_0 = w_0 = \psi_y = 0 \tag{3.89}$$

La structure composite est discrétisée par un maillage à 8×8 éléments finis, avec 925 et 1689 *ddl*s, obtenus respectivement par la discrétisation de la structure en employant les formulations *FSDT* et *Layerwise-FSDT*.

Selon Nayak et al. (2002), les propriétés mécaniques normalisées du matériau stratifié (et typiques d'un stratifié en graphite-époxy) sont égales à : $E_1 = E_2 = 40$, $G_{12} = G_{13} = 0,6 E_2$, $G_{23} = 0,5 E_2$, $\nu_{12} = 0,25$. Sa densité normalisée est égale à $\rho = 1$.

Pour les deux formulations *FSDT* et *Layerwise-FSDT*, on adopte $k_1 = k_2 = 5/6$ comme facteurs de correction de cisaillement transverse.

Les fréquences fondamentales normalisées, équation (3.87), sont comparées avec celles obtenues avec l'utilisation de la solution exacte de la *théorie d'élasticité tridimensionnelle*, présentée dans la publication de Reddy et Phan (1985). Celles-ci sont obtenues avec différents ratios a/h ($a/h = 5, 10, 100$) et sont, selon Reddy et Phan (1985), respectivement, égales à 10,989, 15,270 et 18,755.

Le Tableau 3.2 regroupe les résultats des fréquences fondamentales normalisées résultants du modèle par éléments finis de la plaque composite en utilisant les théories *FSDT* et *Layerwise-FSDT* en comparaison avec les résultats analytiques issus de la *théorie d'élasticité tridimensionnelle (TET)* fournis par Reddy et Phan (1985).

Tableau 3.2 - Comparaison des fréquences propres normalisées $\bar{\omega}_1$ d'une plaque composite quadrangulaire, avec différents ratios a/h .

$\frac{a}{h}$	<i>Théories</i>		
	<i>TET</i> (référence)	<i>FSDT</i> 925 <i>ddl</i> s	<i>Layerwise-FSDT</i> 1689 <i>ddl</i> s
5	10,989	10,881	8,470
10	15,270	15,193	10,822
100	18,755	18,950	18,674
150	-	19,003	18,892
200	-	19,030	18,892
250	-	19,048	18,918
300	-	19,061	18,933
400	-	19,079	18,948

Les résultats obtenus, des fréquences fondamentales normalisées par différents ratios a/h , de la structure composite modélisée présentées dans le Tableau 3.2, par les théories *FSDT* et *Layerwise-FSDT*, sont aussi illustrées sur la Fig. 3.9.

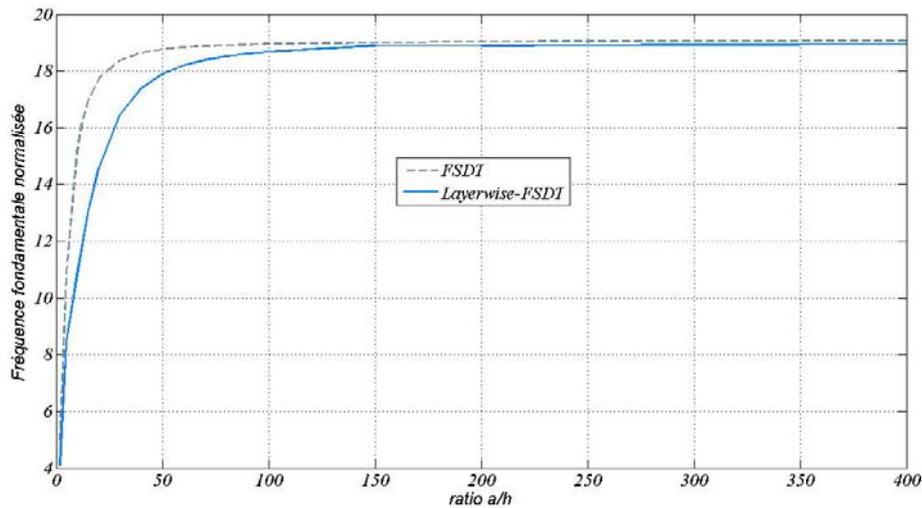


Figure 3.10 - Variation de la fréquence fondamentale normalisée avec la variation du ratio a/h , d'une plaque composite quadrangulaire.

La Figure 3.10 montre que les valeurs de la fréquence fondamentale normalisée, obtenues par les deux formulations, tendent rapidement vers une valeur limite presque constante (quand le ratio $a/h \geq 150$) avec l'augmentation du ratio a/h .

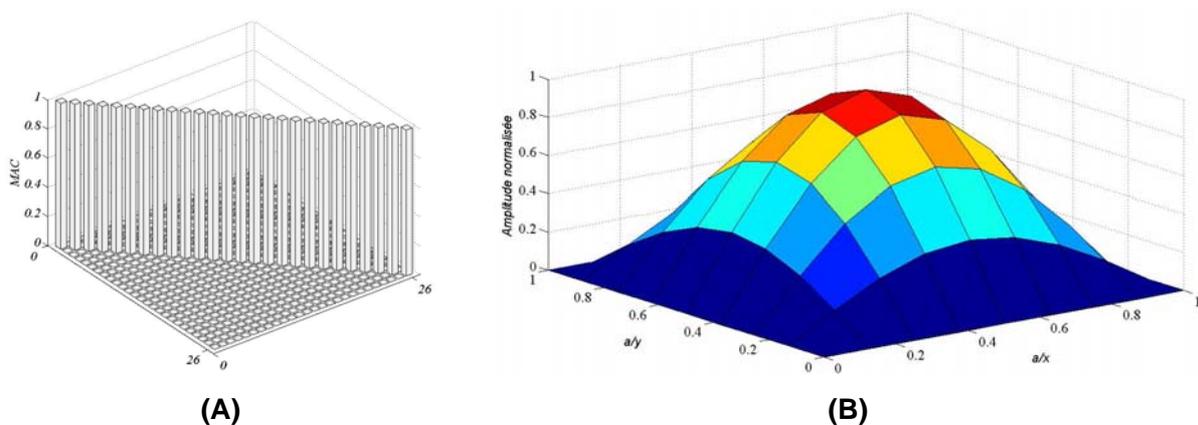


Figure 3.11 - *MAC* des formulations *FSDT* et *Layerwise-FSDT*, (A). Illustration de la forme du premier mode propre, $\bar{\omega}_1=19,048$, de la structure composite, de ratio $a/h = 250$, (B).

La Figure 3.11 (A) montre la bonne corrélation entre les 26 premiers modes de propres, obtenus avec la modélisation de la structure composite en utilisant les *MEFs* avec les théories *FSDT* et *Layerwise-FSDT*, en utilisant la matrice de *MAC*. La matrice *MAC* est diagonale à valeur unitaire.

La Figure 3.11 (B) illustre la forme du premier mode propre normalisé (avec sa valeur maximale) de la plaque composite, de ratio $a/h = 250$. Cette structure est modélisée par éléments finis *FSDT*.

Pour l'analyse statique, on utilise la même plaque quadrangulaire soumise cette fois à un chargement statique transversal. Sa distribution sur la structure est sinusoïdale, comme illustré sur la Fig. 3.8 (B), et a pour expression :

$$q(x, y) = q_o \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \quad (3.90)$$

où : $q_o = 1N/m^2$.

La solution de ce type de problème dans le domaine statique est obtenue par l'inversion direct de l'expression fournie dans l'équation C.4 de l'Annexe C.1, où la matrice de masse $[M_g^{II}]$ est nulle.

Les déflexions normalisées (\bar{w}) par différentes ratios a/h , son obtenues le long de l'axe x du plan moyen $(x, a/2, 0)$ de la plaque composite (Figure 3.9 (A)), et sont normalisées selon l'expression :

$$\bar{w} = w \left(\frac{h^3}{|q_o| a^4} \right) \quad (3.91)$$

et les valeurs obtenues sont regroupées dans le Tableau 3.3 par les deux théories présentées.

Tableau 3.3 - déflexion Maximum normalisée de la plaque composite avec différents ratios a/h .

$\frac{a}{h}$	<i>Théories</i>	
	<i>FSDT</i>	<i>Layerwise-FSDT</i>
	<i>925 ddl</i>	<i>1689 ddl</i>
5	-0,372	-0,744
10	-0,188	-0,381
100	-0,119	-0,123
150	-0,118	-0,120
200	-0,118	-0,120
250	-0,118	-0,120
300	-0,118	-0,119
400	-0,117	-0,119

Le Tableau 3.3 montre que les valeurs des déflexions normalisées, obtenues avec l'utilisation des MEFs *FSDT* et *Layerwise-FSDT*, sont très comparables quand le ratio $a/h \geq 100$.

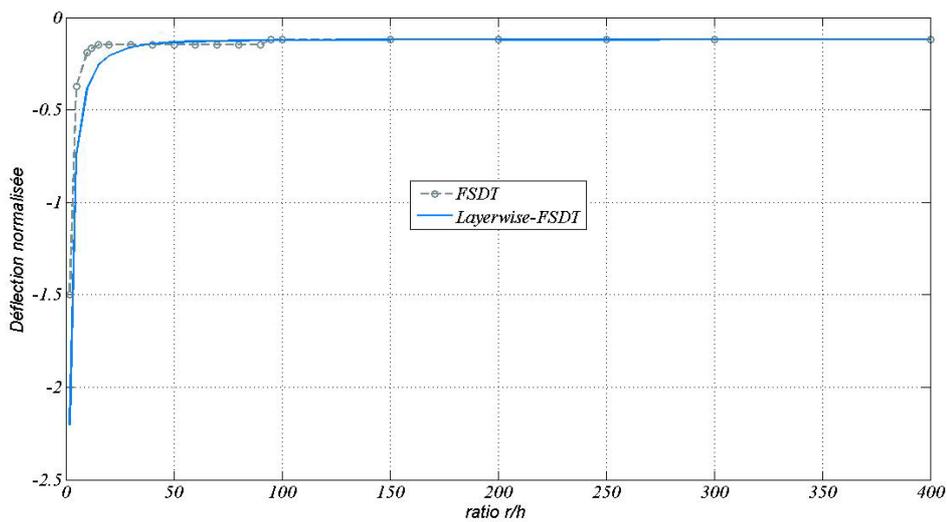


Figure 3.12 - Variation de la déflexion maximale normalisée au centre de la plaque composite selon la variation du ratio a/h .

La variation de la déflexion maximale normalisée, au centre de la plaque composite, par différents ratios a/h de la structure, en utilisant les *MEFs FSDT* et *Layerwise-FSDT*, est illustrée sur la Fig. 3.11.

La Figure 3.12 montre que les valeurs des déflexions maximales normalisées, obtenues par les deux formulations, sont presque constantes quand le ratio $a/h \geq 100$, c'est-à-dire dans le cas d'une plaque composite quadratique mince.

La Figure 3.13 montre que la déflexion maximale normalisée, obtenue au centre de la plaque composite $(x, a/2)$ de ratio $a/h = 400$, en utilisant les deux *MEFs*.

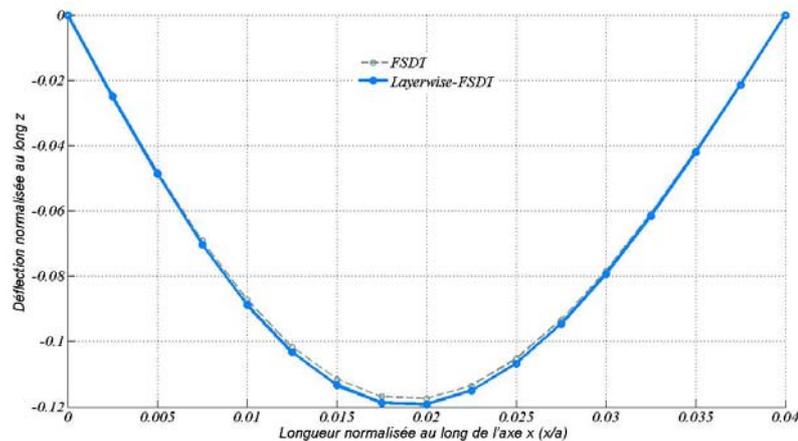


Figure 3.13 - Comparaison entre les déflexions normalisées de la plaque composite, de ratio $a/h = 400$, en utilisant les *MEFs FSDT* et *Layerwise-FSDT*.

3.11 Conclusions

Nous avons présenté les formulations par éléments finis de structure multicouches avec les théories *FSDT* et *HSST* et la nouvelle formulation par éléments finis, appelée *Layerwise-FSDT*. Celle-ci est basée sous l'adoption des procédures de continuité du champ de déplacements mécaniques de la théorie *FSDT* selon l'épaisseur de chaque pli de la structure composite formulée. Ces trois théories sont formulées avec l'utilisation de l'élément fini *Serendip*. Les applications numériques concernent la formulation par éléments finis de plaques rectangulaires, en matériau stratifié (orthotrope ou isotrope transverse), dont on fait varier les

ratios a/h . On calcule les réponses dans les domaines statique et dynamique fréquentiel. Les résultats numériques montrent que la théorie *Layerwise-FSDT*, formulée en couches équivalentes, en comparaisons à la théorie *FSDT*, formulée en couche équivalente simple, fourni des résultats assez proches à celles-ci, particulièrement dans le cas où le ratio a/h est supérieur ou égal à 150, c'est-à-dire, dans le cas de formulation de plaques composites minces. Les formulations par éléments finis avec les théories *FSDT* et *HSDT* sont validées en comparaison à des résultats expérimentaux et analytiques de la *théorie d'élasticité 3D*, fournis dans la littérature. Finalement, le choix entre l'une ou autre des trois formulations par éléments finis est associée : (1) le coût numérique, (2) les ratios géométriques de la structure (structure épaisse, légèrement épaisse, mince ...), (3) les conditions aux limites (principalement avec l'utilisation de la théorie *HSDT*), et (4) le matériau du stratifié (homogène ou hétérogène, dont l'importance sera examinée dans le chapitre IV). Ces paramètres doivent être étudiés lors de la formulation de l'élément fini afin d'éviter les problèmes, *de blocage* (dans le cas de formulation par éléments finis de structures très minces) et *d'inconsistance* des résultats numériques (dans le cas de formulation par éléments finis de structures très épaisses).

CHAPITRE IV

AMORTISSEMENT DES STRUCTURES EN MATÉRIAUX COMPOSITES VISCOELASTIQUES

4.1 Introduction

La conception de machines et de diverses structures en ingénierie implique normalement la minimisation des amplitudes des vibrations. Celle-ci est l'une des exigences les plus importantes pour la conception de projets dans l'industrie automobile, aérospatiale, militaire, ainsi qu'en construction civile. Plus spécialement, dans l'industrie aéronautique, un contrôle strict du procédé de sélection des matériaux utilisés dans la conception et la fabrication de composants, par exemple d'un aéronef, est nécessaire. Selon des données expérimentales, ces matériaux (métalliques, caoutchoucs, plastiques, stratifiés, composites métalliques, sandwich ...) sont sujets à différents chargements au cours de leur vie qui peuvent élever l'intensité de vibrations indésirables au niveau de l'aéronef, et réduire la vie de ses composants et de ses équipements, et ainsi non seulement compromettre le confort et la sécurité des utilisateurs, mais aussi augmenter les coûts associés aux opérations de maintenance. La Figure 4.1 illustre quelques sources de chargements mécaniques observés lors de différentes étapes du fonctionnement d'un aéronef construit par la société Embraer.

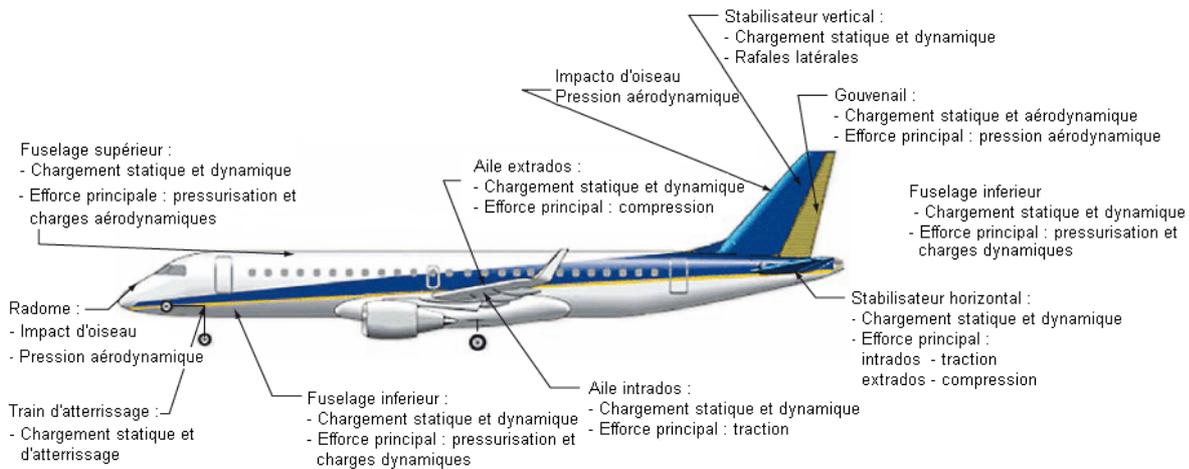


Figure 4.1 - Principales charges observées au cours du fonctionnement de l'aéronef EMB-170 (figure adaptée de Rezende (2007)).

Ainsi, selon Saravanos et Pereira (1992) l'amortissement est l'un des paramètres les plus importants dans les projets visant à l'augmentation de la résistance à la fatigue et aux impacts dans les structures, telles les aéronefs, en augmentant leur durée de vie utile. Son étude est utilisée dans la compréhension des problèmes de fatigue, d'impact et pour la surveillance de l'endommagement des structures (MANTENA et al., 1986, CHATTOPADHYAY et al. 1999).

Selon Finegam et Gibson (1999), les *techniques passives d'amortissement* par rapport aux *techniques actives d'amortissement* sont celles qui participent le plus de l'augmentation de la fiabilité des machines et des diverses structures, car elles contribuent à la réduction de la complexité du système d'amortissement, contrairement aux techniques actives de contrôle qui nécessitent des amplificateurs électroniques normalement assez complexes et un apport d'énergie au système d'amortissement. En outre, les techniques de contrôle passif sont considérées comme stables, sûres et normalement ne nécessitent pas d'introduction d'énergie dans le système.

On observe que la combinaison des matériaux classiques et modernes, tels que les matériaux métalliques, les composites stratifiés et les composites sandwichs sont couramment utilisés pour la conception des projets de structures complexes en ingénierie, en association avec les techniques passives d'amortissement, particulièrement celles qui emploient des traitements viscoélastiques. Cette stratégie est très intéressante et fait l'objet de beaucoup

d'attention de plusieurs chercheurs au cours de ces dernières années, comme par exemple Meunier et Shenoï (2001), Makhecha et al. (2002), Malekzadeh et al. (2005) et Lima (2007).

De façon plus précise, on s'intéresse dans ce mémoire à l'étude de l'amortissement de type *viscoélastique* et à l'amortissement *intrinsèque* des structures composites. Dans le premier cas, on considère l'utilisation d'un traitement interne via l'ajout d'une unique couche de matériau viscoélastique et dans le second cas, on tient compte de la nature dissipative de la matrice de pli du matériau stratifié.

Ce chapitre présente un panorama des principaux modèles (classiques et modernes) utilisés pour l'approximation du comportement physique des matériaux viscoélastiques réels, parmi lesquels les modèles connus comme le *Module Complexe (MC)*, défini par l'utilisation du *Principe de la Correspondance Élastique-Viscoélastique (PCEV)* et du *Principe de l'Équivalence Fréquence-Température (PEFT)*, et le modèle aux *Dérivées Fractionnaires (DF)*, défini dans le cadre du *Calcul Fractionnaire*. Ceux-ci sont incorporés dans la modélisation numérique par éléments finis des structures composites, en particulier pour l'utilisation des théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*, dont les formulations sont détaillées dans le Chapitre III.

Les modèles *MC* et *DF* sont appliqués, respectivement, à la modélisation numérique du comportement viscoélastique de la structure amortie, dans les domaines fréquentiel ou temporel. De plus, dans ce chapitre on s'intéresse aux mécanismes d'amortissement du matériau stratifié, particulièrement en ce qui concerne son amortissement intrinsèque dû à la nature polymérique de sa matrice. Suivant la même approche adoptée par d'autres auteurs, ce type d'amortissement est incorporé dans le modèle éléments finis (*MEF*) de *structures stratifiées et stratifiées composites*, avec les théories *FSDT* et/ou *HSDT*, en employant le *modèle hystérétique complexe (MHC)* pour lequel les propriétés viscoélastiques du matériau stratifié sont considérées comme étant indépendantes de la température et de la fréquence d'excitation. Ce modèle est appliqué à l'étude des *structures stratifiées sandwiches* (avec un noyau viscoélastique et des peaux en matériau stratifié) et des *structures stratifiées* (avec seulement des peaux en matériau stratifié) pour l'obtention des fréquences propres et des facteurs d'amortissement de la structure, via l'utilisation de *procédures numériques itératives*.

Les structures amorties analysées sont de quatre différents types, à savoir : (1) *purement viscoélastique*, (2) *sandwich*, (3) *stratifié sandwich* ou (4) *stratifié*. Ces différents matériaux sont appliqués aux structures sous la forme de *barres*, de *poutres* ou de *plaques* et sont formulés dans le contexte des éléments finis en utilisant les théories *FSDT*, *HSDT* ou *Layerwise-FSDT*. Ces modèles sont représentés par deux équations distinctes du mouvement amorti : (1) dans le

domaine temporel, incluant le modèle *MC* ou *DF* et (2) dans la modélisation du matériau dissipatif et le *modèle hystérétique complexe (MHC)* dans la modélisation du matériau stratifié.

En ce qui concerne le *MC*, selon Lima (2007), on ne peut pas obtenir les réponses transitoires des systèmes amortis en utilisant ni des méthodes d'intégration directe des *équations du mouvement du système amorti*, ni la *technique de superposition modale*. Dans ce cas, la réponse de la structure doit être obtenue d'abord dans le domaine de la fréquence, et par la suite une transformation dans le domaine temporel doit être faite par l'utilisation de la *transformée de Fourier inverse*. Cependant, l'utilisation de ce procédé peut avoir comme conséquence l'obtention de réponses non causales (assumant des valeurs non nulles pour des valeurs négatives de temps), ce qui signifie des investigations approfondies de nature théorique (Nashif et al. 1985). Cependant, dans le cas des *DF* on peut utiliser directement des méthodes d'intégration directe de l'*équation du mouvement du système amorti*, et pour cela on a opté pour la *méthode d'intégration explicite de Newmark*.

4.2 Mécanismes d'amortissement des matériaux viscoélastiques

Les fondements de la viscoélasticité linéaire, appliqués à la formulation des matériaux viscoélastiques (de nature isotrope) qui sont utilisés dans ce mémoire pour le contrôle passif des amplitudes de vibration sont donnés dans l'Annexe D.1. Toutefois, les Annexes D.2 et D.3 montrent l'influence de facteurs environnementaux et opérationnels sur le comportement dynamique des matériaux viscoélastiques et les principaux modèles mathématiques utilisés pour leur modélisation numérique. D'entre eux nous avons les modèles modernes du *Module Complexe (MC)* et aux *Dérivées Fractionnaires (DF)* qui sont utilisés dans ce mémoire. La formulation mathématique des modèles *MC* et *DF* est présentée dans les deux sections suivantes.

4.2.1 Modèle du Module Complexe (MC)

En supposant $G(t) = G_r + h(t)$, l'équation D.4 de l'Annexe D peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\sigma(t) = G_r \varepsilon(t) + h(t) \varepsilon_0 + \int_0^t h(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.1)$$

L'équation (4.1) écrite dans le domaine temporel peut être réécrite dans le *domaine de Laplace* sous la forme suivante :

$$\sigma(s) = G_r \varepsilon(s) + sh(s) \varepsilon(s) = G(s) \varepsilon(s) \quad (4.2)$$

où s est la *variable complexe de Laplace* ; G_r est le *module de stockage* ou *module de basse fréquence* ou *module de relaxation* ; $G(s) = G_r + H(s)$ est la *fonction module complexe* ; $H(s) = sh(s)$ est la *fonction de dissipation* ou *fonction de relaxation* associée au comportement dissipatif du matériau viscoélastique ; $G_r \varepsilon(s)$ représente la partie élastique du matériau viscoélastique.

L'équation (4.2) écrite dans le *domaine de Laplace*, peut être réécrite dans le *domaine fréquentiel* en utilisant la relation $s = i\omega$, et selon Nashif et al. (1985), il en résulte l'expression mathématique du module complexe dans le cas uniaxial donnée par :

$$\sigma(\omega) = G(\omega) \varepsilon(\omega) = [G'(\omega) + iG''(\omega)] \varepsilon(\omega) = G'(\omega) [1 + i\eta(\omega)] \varepsilon(\omega) \quad (4.3)$$

où $G(\omega)$ est le *module complexe du matériau viscoélastique*, $G'(\omega)$ et $G''(\omega)$ représentent, respectivement, les *parties réelle (module de stockage)* et *imaginaire (module de perte)* du module complexe du matériau viscoélastique, $i = \sqrt{-1}$ désigne l'unité complexe. De plus, le ratio

$$\eta(\omega) = G''(\omega) / G'(\omega) \quad (4.4)$$

désigne le *facteur de perte* du matériau viscoélastique qui caractérise son amortissement.

Selon Lima (2007), le *facteur de perte* traduit le rapport entre l'énergie dissipée par le matériau et l'énergie potentielle ou élastique stockée sur un cycle de déformation maximale.

Plus le *facteur de perte* η est grand, plus il y a d'énergie vibratoire dissipée par le matériau, et donc plus grande est sa capacité d'amortissement. Un *facteur de perte* de 0,05 signifie que 5% de l'énergie est dissipée pendant un cycle de vibration (JOHNSON,1995).

Dans le cas général, multiaxial, l'équation (4.3) peut être remplacée par les deux expressions suivantes :

$$\sigma(\omega) = E(\omega)\varepsilon(\omega) = [E'(\omega) + iE''(\omega)]\varepsilon(\omega) = E'(\omega)[1 + i\eta_\varepsilon(\omega)]\varepsilon(\omega) \quad (4.5)$$

$$\tau(\omega) = G(\omega)\gamma(\omega) = [G'(\omega) + iG''(\omega)]\gamma(\omega) = G'(\omega)[1 + i\eta_\gamma(\omega)]\gamma(\omega) \quad (4.6)$$

où $E(\omega)$ et $G(\omega)$ sont les *modules complexes* du matériau, $E'(\omega, \bar{t})$ et $G'(\omega, \bar{t})$ représentent leurs respectives parties réelles (*modules de stockage*), $E''(\omega, \bar{t})$ et $G''(\omega, \bar{t})$ sont les parties imaginaires associées (*modules de perte*) du module complexe du matériau viscoélastique, et finalement, $\eta_\varepsilon(\omega) = E''(\omega)/E'(\omega)$ et $\eta_\gamma(\omega) = G''(\omega)/G'(\omega)$ désignent les *facteurs de perte* du matériau viscoélastique et qui caractérisent son amortissement.

En supposant que le *coefficient de Poisson* ν est indépendant de la *fréquence d'excitation* ω et de la *température* \bar{t} , les modules $E(\omega)$ et $G(\omega)$ sont reliés par l'expression :

$$G(\omega) = E(\omega)/(2(1+\nu)) \quad (4.7)$$

ce qui signifie que deux paramètres expérimentaux sont nécessaires pour établir le troisième et ainsi obtenir les relations constitutives du matériau viscoélastique dans le domaine de la fréquence.

4.2.2 Modèle à Dérivées Fractionnaires (DF)

Le modèle à *Dérivées Fractionnaires (DF)* remplace les dérivées d'ordre entier du modèle SLS-G, donné par l'équation D.12 de l'Annexe D, par des dérivés d'ordre non-entier, de façon à ce que l'on puisse, selon Bagley et Torvik (1979) et (1983), définir l'équation constitutive généralisée suivante :

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M \widehat{a}_m \frac{d^{\alpha_m}}{dt^{\alpha_m}} \sigma(t) = \widehat{m} \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N \widehat{b}_n \frac{d^{\beta_n}}{dt^{\beta_n}} \varepsilon(t) \quad (4.8)$$

où les constantes α_m et β_n sont des exposantes fractionnaires.

D'après Bagley et Torvik (1979), des observations expérimentales indiquent que la plupart des matériaux viscoélastiques peuvent être modélisés en retenant seulement les premiers termes de la série mathématique exprimée dans l'équation précédente, ce qui conduit à une expression simplifiée de la forme :

$$\sigma(t) + \widehat{a} \frac{d^{\widehat{\alpha}}}{dt^{\widehat{\alpha}}} \sigma(t) = \widehat{m} \varepsilon(t) + \widehat{b} \frac{d^{\widehat{\beta}}}{dt^{\widehat{\beta}}} \varepsilon(t) \quad (4.9)$$

Les cinq paramètres \widehat{a} , \widehat{b} , \widehat{m} , $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ de l'équation précédente peuvent être obtenus à partir de données expérimentales au travers des procédures de lissage de courbes expérimentales. Les principaux avantages du modèle défini par l'équation (4.9) sont le nombre réduit de paramètres associés et le fait qu'il fournit une représentation plus précise des courbes expérimentales sur des larges plages de fréquence.

Des détails supplémentaires concernant les formulations mathématiques des *Dérivées Fractionnaires* et d'autres applications numériques peuvent être trouvés dans plusieurs références disponibles dans la littérature, tels que d'Oldham et Spanier (1974), de Gorenflo (2000), de Debnath (2003) et de Kilbas et al. (2006).

Etant donné que ce mémoire traite des simulations numériques de structures composites amorties par l'emploi de matériaux viscoélastiques, étudiées dans les domaines temporel et fréquentiel, on utilise les *modèles modernes MC* et *DF* incorporés dans les formulations par éléments finis, qui par ailleurs sont formulés avec les théories *FSDT*, *HSDT* ou *Layerwise-FSDT*. Ces formulations sont présentées dans les sections 4.4 et 4.5 de ce chapitre.

4.3 Mécanismes d'amortissement du matériau stratifié

En comparaison avec les matériaux traditionnellement utilisés, tels les métaux, les composites ont des mécanismes d'amortissement qui se rapportent à différentes sources. Selon Chandra et al. (1999), parmi les différentes sources de dissipation d'énergie mécanique dans les matériaux stratifiés on distingue :

(a) *la viscoélasticité naturelle de la matrice et/ou des fibres du matériau stratifié.* La viscoélasticité naturelle de la matrice est considérée comme étant le mécanisme de dissipation qui contribue le plus à l'amortissement final du matériau stratifié. Toutefois, il existe des fibres, telles les fibres de *carbone* ou de *Kevlar*, qui ont une forte capacité d'amortissement par rapport aux autres types de fibres qui peuvent être utilisées ;

(b) *l'amortissement provenant de l'interface fibre-matrice.* La région adjacente à la surface, au long de la longueur des fibres, est connue comme région d'interface fibre-matrice. On sait que les propriétés mécaniques dans cette région sont différentes de celles des fibres et de la matrice du matériau stratifié. De plus, l'interface fibre-matrice peut avoir une épaisseur importante et ainsi affecter les propriétés mécaniques du stratifié et, à son tour, son amortissement final. Selon leurs capacités de transmission de charges mécaniques entre les fibres et la matrice, les régions sont classées en : régions de faible, d'idéale, ou de forte transmission de charges. Une région, dite idéale, joue bien son rôle de transmission de charges entre les deux matériaux et ainsi ne contribue pas à l'amortissement final de la structure. Selon Chandra et al. (1999), des études utilisant des modèles, basés sur la micromécanique, constitués de trois phases (matrice-interface-fibre) indiquent que : le ratio d'aspect des fibres (ratio entre son longueur et son diamètre), les modules d'élasticité et les facteurs de perte de l'interface fibre-matrice sont quelques-uns des paramètres affectant le plus la rigidité et l'amortissement des matériaux composites renforcés par des fibres courtes. L'amélioration des modèles micromécaniques (incorporant, par exemple, les effets des modes de cisaillement et transversaux) et la caractérisation expérimentale de l'interface fibre-matrice (propriétés élastiques et facteurs de perte) sont quelques-uns des problèmes dans ce domaine d'étude.

(c) *l'amortissement induit par des mécanismes internes d'endommagement.* Ce type d'amortissement est divisé essentiellement en deux mécanismes internes de dissipation : par friction et par dissipation d'énergie. Le premier type est lié, aux glissements dans la

région d'interface fibre-matrice, ou à la présence de mécanismes de délaminage entre les plis de la structure stratifiée. Le deuxième mécanisme provient de la dissipation d'énergie dans les zones où se développent des vides, des microfissures, des ruptures de fibres et cætera ;

(d) *l'amortissement viscoplastique*. Pour des amplitudes de vibration élevées ou de grands niveaux de contraintes, les matériaux composites thermoplastiques peuvent présenter un certain degré d'amortissement non-linéaire, principalement en raison de la concentration des déformations dans des zones spécifiques entre les fibres ;

(e) *l'amortissement thermoélastique*. L'amortissement thermoélastique est beaucoup plus prononcé dans le cas des composites métalliques. Toutefois, plusieurs publications citent ce type de phénomène observé dans les composites thermoplastiques (CHANDRA et al., 1999). Ce phénomène est dû au flux cyclique de chaleur des zones de contraintes de compression vers les zones de contraintes de traction quand le composite est soumis à des cycles de vibration. Cet amortissement est fonction de la charge appliquée, de la fréquence et du numéro de cycles.

Parmi les différents mécanismes de dissipation d'énergie dans les matériaux stratifiés, ce mémoire se focalise sur l'étude de la dissipation d'énergie vibratoire provenant de la viscoélasticité naturelle de la matrice du matériau stratifié. La modélisation numérique par éléments finis de l'amortissement *induit par des mécanismes internes d'endommagement* constitue l'un des objectifs du Chapitre V. Pour plus de détails concernant les autres *sources de dissipation d'énergie* dans les matériaux composites, on peut consulter les travaux de Mele et Alberola (1996), de Dzenis (1997), de Fisher et Brinson (2001), de Birman et Byrd (2002), de Lepage (2006).

De nombreux modèles, analytiques et numériques, dédiés à la prédiction de l'amortissement aux échelles micromécanique et macromécanique de composites sont basés sur l'hypothèse de la viscoélasticité linéaire (CHANDRA et al., 1999), c'est-à-dire qu'on considère le cas des petites déformations. En se basant sur cette hypothèse, l'amortissement intrinsèque du pli du matériau stratifié peut être prédit notamment par les méthodes suivantes :

- (a) *Méthode d'Énergie de Déformation Modale (MSE - Modal Strain Energy) ;*
- (b) *Méthode des Valeurs Propres Complexes (CEM - Complex Eigenvalue Method) ;*
- (c) *Approches expérimentales.*

Selon Johnson (1995), pour représenter l'amortissement du mode de vibration i d'une structure amortie par un traitement viscoélastique, il est possible d'utiliser la *Méthode d'Énergie*

de Déformation Modale (*MSE*). En utilisant la *MSE*, l'amortissement modal d'une structure peut être approché par la somme du produit des *facteurs de perte de chaque matériau* (ou élément) j par la *fraction de l'énergie de déformation stockée dans le matériau* par chaque mode i . Ainsi, en considérant le mode i étudié, on a l'expression :

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{N_j} \eta^{(j)} \frac{SE_i^{(j)}}{SE_i} \quad (4.10)$$

où η_i est le *facteur d'amortissement de la structure* associé au i ème mode de vibration, N_j est le nombre de matériaux présents dans la structure discrétisée, $\eta^{(j)}$ est le *facteur de perte du matériau j* , $SE_i^{(j)}$ est l'*énergie de déformation dans le matériau* lorsque la structure se déforme suivant le mode vibration i , et finalement SE_i est l'*énergie de déformation totale du mode de vibration i* de la structure composite analysée.

Le *MSE* peut être appliquée à la modélisation de l'amortissement modal des structures composites stratifiées aux échelles *micromécanique* et *macromécanique*. Dans ces cas, la dénomination « *matériaux* » doit être substituée par « *élément* » dans la définition du *MSE* de l'équation (4.10). A l'*échelle micromécanique*, les éléments étudiés sont les fibres, la matrice, l'interaction fibre-matrice et le vide. D'autre part, à l'*échelle macromécanique* les couches (*plis*) sont les éléments individuels du stratifié utilisés pour l'obtention de l'énergie de déformation $SE_i^{(j)}$ et qui sont ensuite combinés pour fournir le facteur d'amortissement du mode de vibration i de la structure (CHANDRA et al., 1999).

De nombreux chercheurs utilisent le *MSE* pour la prédiction de l'amortissement des structures composites, tels que Berthelot (2006) qui utilise une formulation analytique basée sur la *Théorie Classique des Stratifiés (CLT)* pour l'étude de l'amortissement modal de plaques en matériau stratifié et Plagianakos et Saravanos (2003) qui utilisent des solutions numériques basées sur la formulation par éléments finis appliquée à l'étude de structures composites de plaque et coque en matériau stratifié, formulées par la *FSDT*.

La *Méthode des Valeurs Propres Complexes*, s'appuyant sur le *PCEV*, est basé sur l'hypothèse qu'une analyse élastique-linéaire, dans le domaine statique, peut être assimilée à une analyse viscoélastique-linéaire, dans le domaine dynamique, en remplaçant les contraintes et déformations du modèle initial statique par les contraintes et déformations correspondantes,

obtenues dans le domaine dynamique final en remplaçant les modules d'élasticité par leurs correspondants complexes décrits dans le domaine dynamique (SIAS, 2004).

En ce qui concerne l'étude analytique de l'amortissement des matériaux composites, Hashin (1966) est considéré comme le créateur des premières expressions analytiques pour l'obtention de l'amortissement de ces matériaux en utilisant le *PCEV*. D'après ses travaux, les fibres peuvent être considérées comme élastiques-linéaires et non-dissipatives et la matrice peut être considérée comme élastique-linéaire, en traction/compression, et viscoélastique-linéaire, en cisaillement. Ces considérations ont été appliquées à plusieurs modèles, aux échelles *micromécanique* ou *macromécanique*, en matériaux stratifiés renforcés par des fibres (de type alignées et discontinues) pour la prédiction de l'amortissement intrinsèque des structures composites (CHANDRA et al., 1999).

Initialement, le *PCEV* a été utilisé en combinaison avec la *Théorie Classique des Stratifiés (CLT)* pour l'obtention numérique de l'amortissement intrinsèque de structures composites stratifiés modélisés à l'échelle *micromécanique* (CHANDRA et al., 1999).

Actuellement, les travaux à l'échelle *macromécanique*, tels celui de Sheng et Deyou (2004), utilisent le *PCEV* combiné à la théorie *FSDT* pour la formulation numérique par éléments finis de structures composites amorties en matériaux stratifiés. Toutefois, peu d'études pour l'utilisation de formulations numériques avec la théorie *HSDT* combinée au *PCEV* sont rapportées dans la littérature scientifique. On peut citer celles de Meunier et Shenoï (2001), Makhecha et al. (2002), Malekzadeh et al. (2005).

En utilisant les hypothèses du *PCEV* et en supposant que *les coefficients de Poisson* sont indépendants de la fréquence et la température, selon Melo et Radford (2005), les *modules de Young* et de *cisaillement* du matériau stratifié peuvent être exprimés en termes, respectivement, des *modules de stockage* $E'_{ij}(\omega, \bar{t})$ et $G'_{ij}(\omega, \bar{t})$ et des leurs *facteurs de perte* η_{ij}^E et η_{ij}^G , d'accord aux expressions complexes suivantes :

$$E_{ij}(\omega, \bar{t}) = E'_{ij}(\omega, \bar{t}) \left(1 + i\eta_{ij}^E(\omega, \bar{t}) \right) \quad (4.11)$$

$$G_{ij}(\omega, \bar{t}) = G'_{ij}(\omega, \bar{t}) \left(1 + i\eta_{ij}^G(\omega, \bar{t}) \right) \quad (4.12)$$

où les indices i et j ont les valeurs suivantes : $i = j = 1 \text{ à } 3$; $E_{ij}(E_{11}, E_{22}, E_{33})$ et où $G_{ij}(G_{23}, G_{12}, G_{13})$ sont les *modules d'élasticité complexes* liés, respectivement, aux effets de *membrane-flexion* et de *cisaillement*. Les coefficients $E'_{ij}(\omega, \bar{t})$ et $G'_{ij}(\omega, \bar{t})$ représentent les *modules de stockage du stratifié*, et enfin, $\eta_{ij}^E(\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{33})$ et $\eta_{ij}^G(\eta_{23}, \eta_{13}, \eta_{12})$ sont leurs *facteurs de perte* respectifs.

Dans la plupart des publications disponibles dans la littérature concernant l'amortissement intrinsèque du matériau stratifié, les auteurs considèrent que celui-ci est décrit par le *MHC* (MEUNIER et SHENOI, 2001 ; MAKHECHA et al., 2002 ; MALEKZADEH et al., 2005 et LIMA et al., 2010). Le *MHC* peut être considéré comme une forme simplifiée du modèle fourni par les équations (4.11) et (4.12), car les modules sont considérés comme étant invariants par rapport à la température et à la fréquence d'excitation. Ainsi on a :

$$E_{ij} = E'_{ij} \left(1 + i\eta_{ij}^E \right) \quad (4.13)$$

$$G_{ij} = G'_{ij} \left(1 + i\eta_{ij}^G \right) \quad (4.14)$$

Les *modules de stockage* et les *facteurs de perte* respectifs peuvent être obtenus avec plusieurs des modèles à l'échelle micromécanique pour les formulations numériques ou analytiques par éléments finis, tels que les modèles de la *Micromécanique unifiée* de Hashin, de Tsai, de Zhao-Weng, de Mori-Tanaka et autres, que sont présentés par Fisher et al. (2001) et Chandra et al. (2002). Dans ces modèles micromécaniques, les *modules de stockage* et les *facteurs de perte* sont obtenus en utilisant soit les méthodes *MSE*, soit celles du *CEM*, et sont écrites en fonctions des *coefficients d'élasticité*, du *volume* et des *facteurs de perte* des fibres et de la matrice, selon les formes des sections transversales des fibres (*circulaire, elliptique*) et par l'utilisation de *variables d'approximation numérique*.

Selon Zapfe et Lesieutre (1999), certaines caractéristiques permettent d'établir une distinction entre les méthodes *CEM* et *MSE*. Ces dernières sont énumérées ci-dessous :

- (a) la méthode *MSE* prédit le comportement modal de la structure composite, en utilisant la méthode d'énergie de déformation modale totale, tandis que le *CEM*

représente la dissipation d'énergie au niveau de chaque matériau (ou élément) du stratifié ;

(b) la méthode *MSE* distingue les différents types de formes énergétiques présentes dans la structure composite, en permettant ainsi l'utilisation de matériaux avec différents facteurs de perte. Toutefois, ce modèle est incapable de prédire les phases associées aux modes de vibration de la structure ; il est capable de prédire uniquement les amplitudes de vibration ;

(c) la matrice de raideur globale amortie, obtenue par l'application du *CEM* à des valeurs propres complexes, permet une modélisation plus réaliste du comportement dynamique observé dans les structures composites.

Melo et Radford (2005) ont présenté des courbes expérimentales des *facteurs de perte* $(\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{12})$, des *coefficients de Poisson* (ν_{12}, ν_{23}) et des *modules de stockage* $(E'_{11}, E'_{22}, G'_{12})$ d'un matériau composite thermoplastique en utilisant la méthode expérimentale *DMA*, comme l'illustrent les Figures 4.2 et 4.3. Le matériau stratifié testé, de nature transversalement isotrope, est le *APC-2/IM7* produit par l'entreprise CEM (*Cytec Engineered Materials Inc.*). Il est constitué d'une matrice thermoplastique renforcée avec 32 % de fibres longues de carbone de densité surfacique 145 g/m^2 . La matrice est composée d'APC-2, une résine thermoplastique semi-cristalline de polyétherétherketone (*PEEK*), qui présente une grande rigidité et une grande tolérance aux défauts de surface.

Selon ces chercheurs, dans la bande de fréquence et de température étudiée, soit $[0 \text{ à } 10 \text{ Hz}]$ et $[-40 \text{ à } 140^\circ \text{C}]$, les propriétés viscoélastiques du matériau stratifié, appelé *PEEK/IM7*, dépendent plus de la température que de la fréquence d'excitation, en particulier pour les facteurs de perte $(\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{12})$.

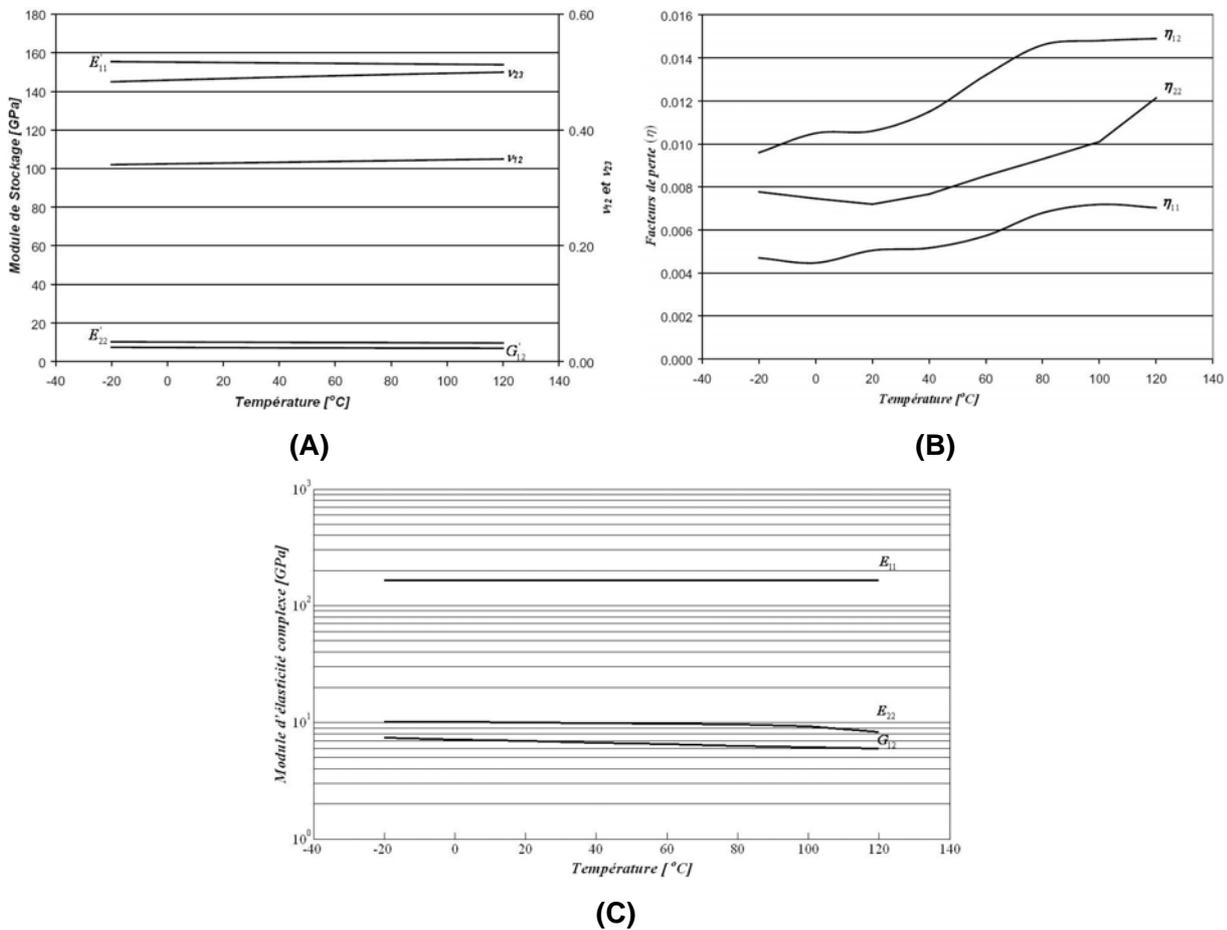


Figure 4.2 - Propriétés mécaniques et viscoélastiques du matériau stratifié PEEK/IM7 en fonction de la température (adapté de Melo et Radford (2005)).

La Figure 4.2 illustre les courbes expérimentales obtenues par Melo et Radford (2005), qui présentent les variations des *modules de stockage* (E'_{11} , E'_{22} , G'_{12}) (sur (A)) et des *coefficients de Poisson* (ν_{12} , ν_{23}) (sur (A)), des *facteurs de perte* (η_{11} , η_{22} , η_{12}) (sur (B)), des *modules d'élasticité complexe* (E_{11} , E_{22} , G_{12}) (sur (C)), dans la bande de température allant de -40 à 140 °C. On peut observer sur la Fig. 4.2 que la variation des facteurs de perte en fonction de la température est plus prononcée que les changements observés sur les modules de stockage et d'élasticité du matériau. Dans la direction des fibres, où les changements sont plus petits, des variations considérables du facteur de perte sont détectées. La Figure 4.2 (B) montre que les

facteurs de perte ($\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{12}$) du *PEEK/IM7* varient sensiblement avec la température par rapport aux modules de stockage. Le facteur de perte (η_{11}) est celui qui présente la plus petite dépendance en température par rapport aux autres facteurs, contrairement au facteur de cisaillement (η_{12}) pour lequel on observe la plus grande dépendance. Sur les courbes présentées sur la Fig. 4.2 (C), on observe que le module d'élasticité complexe (E_{11}) du composite *PEEK/IM7*, contrairement aux modules complexes (E_{22}) et (G_{12}), varie peu avec la température car, selon Melo et Radford (2005), le module d'élasticité de la fibre de carbone du stratifié est plus représentatif que la matrice thermoplastique, qui par ailleurs est peu sensible aux variations de température sur la bande en question. Toutefois, les coefficients de Poisson (ν_{12}, ν_{23}) augmentent avec la variation de température (Figure 4.2 (A)).

La Figure 4.3 montre que les *facteurs de perte* ($\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{12}$) du matériau *PEEK/IM7* ont une variation décroissante, presque proportionnelle, avec l'augmentation des valeurs de la bande fréquentielle d'observation, tandis que les *modules de stockage* ($E'_{11}, E'_{22}, G'_{12}$) restent presque invariants.

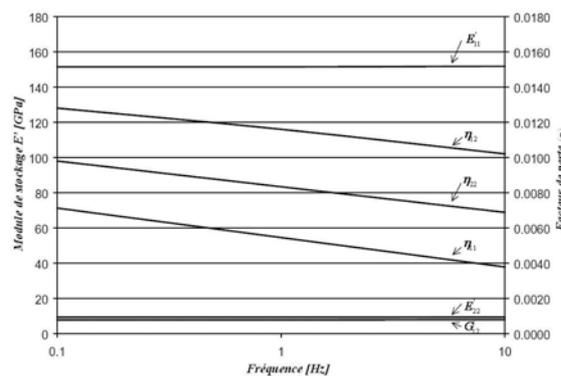


Figure 4.3 - Propriétés viscoélastiques du matériau stratifié *PEEK/IM7* en fonction de la fréquence (adapté de Melo et Radford (2005)).

Malheureusement, dans la littérature scientifique on trouve peu d'études concernant l'indentification expérimentale des propriétés viscoélastiques des matériaux stratifiés, car de nombreux paramètres indépendants doivent être mesurés dans les matériaux stratifiés de

nature anisotrope et orthotrope. Melo et Radford (2005) sont considérés comme des pionniers de la caractérisation de la viscoélasticité des matériaux composites renforcés par fibres en utilisant la méthode expérimentale *DMA*, en réduisant le nombre de paramètres par l'utilisation d'un matériau stratifié transversalement isotrope. Malheureusement, la bande de fréquence d'étude du matériau composite thermoplastique *PEEK/IM7* est limitée à $[0 : 10 \text{ Hz}]$.

L'expression mathématique de l'amortissement intrinsèque fournie par les équations (4.13) et (4.14) est utilisé dans ce mémoire en association avec les formulations par éléments finis des structures stratifiées et sandwichs, étant donné que le *MHC* est le modèle le plus utilisé dans la littérature scientifique pour l'inclusion d'amortissement intrinsèque du matériau stratifié dans les structures composites. On peut citer, à titre d'exemple, les publications de Ganapathi et al (1999), de Meunier et Shenoï (2001), de Makhecha et al. (2002) ou de Malekzadeh et al. (2005).

L'amortissement intrinsèque du matériau stratifié est introduit dans la formulation par éléments finis en considérant que les *modules d'élasticité complexes*, donnés dans les équations (4.13) et (4.14) de nature complexe, modifient les matrices de constantes d'élasticité du matériau stratifié, et sont ainsi à l'origine d'une matrice de raideur globale $[K_g^{nv}]$ complexe, dont les détails de l'obtention sont présentés dans la section suivante.

Alternativement, l'amortissement structural d'une structure composite peut être obtenu en employant *l'amortissement classique du type proportionnel*. Ce type d'amortissement est brièvement décrit dans la publication de Paultre (2005), et il est utilisé dans les exemples numériques proposés dans ce mémoire. Dans ce chapitre il n'est pas employé, puisque on est plus intéressé par les formes de dissipation intrinsèque et viscoélastiques des matériaux stratifiés et viscoélastiques.

4.4 Formulation des MEFs incluant le modèle viscoélastique MC et le modèle hystérétique complexe (MHC)

L'étude présentée dans ce mémoire concernant le modèle *MC* s'ajoute aux expériences précédentes du groupe de recherche du *Laboratoire de Mécanique des Structures Prof. José Eduardo Tannús Reis (LMEst)* en ce qui concerne son utilisation dans la formulation numérique par éléments finis des structures amorties traitées par matériau viscoélastique, en particulier pour son application à des structures métalliques dans les travaux de Lima (2003), Stoppa

(2004) et Cazenove (2009 ; 2010) et récemment dans la publication de Lima et al. (2010) portant sur les *structures stratifiées sandwichs*. On peut aussi citer le travail de Lima (2007) dans le domaine de l'optimisation multi-objectifs et robuste des structures métalliques amorties par des patches viscoélastiques et étudiées dans le domaine fréquentiel.

L'incorporation d'un traitement dissipatif dans la structure composite est réalisée par le biais de l'utilisation d'une couche viscoélastique insérée dans la structure composite, laquelle est alors constituée de deux sous-structures : l'une *purement élastique* (en matériau métallique ou stratifié), et l'autre *viscoélastique*. Ainsi, l'équation du mouvement d'une structure non-amortie résultant de la modélisation par éléments finis fournie par l'expression (3.82) du Chapitre III, peut être réécrite sous sa forme amortie, obtenue selon le MC :

$$\left[M_g \right] \{ \ddot{u}_g(t) \} + \left[K_g(\omega, \bar{t}) \right] \{ u_g(t) \} = \{ F_g(t) \} \quad (4.15)$$

avec :

$$\left[K_g(\omega, \bar{t}) \right] = \left[K_g^{nv} \right] + \left[K_g^v(\omega, \bar{t}) \right] \quad (4.16)$$

où les matrices $\left[K_g^{nv} \right]$ et $\left[K_g^v(\omega, \bar{t}) \right]$ sont, respectivement, la *matrice de raideur globale de la sous-structure purement élastique* indiquée par l'exposant $(^{nv})$, et de la *sous-structure viscoélastique* obtenue par le modèle MC et indiquée par l'exposant $(^v)$, qui par ailleurs est dépendante de la fréquence d'excitation ω et de la température \bar{t} .

Les deux matrices globales précédentes sont obtenues par élément finis à partir des matrices élémentaires correspondantes, lesquelles sont exprimées dans le système global en utilisant la *matrice de connectivité* $\left[L_e^{(k)} \right]$. Dans ce cas, il est utile de rappeler les deux transformations suivantes :

$$\left[K_g^{nv} \right] = \sum_{k=1}^{N_e} \left(\left[L_e^{(k)} \right]^T \sum_{k=1}^{N_c} \left[K_e^{(k)} \right] \left[L_e^{(k)} \right] \right) = \sum_{e=1}^{N_e} \left[L_e^{(k)} \right]^T \left[K_e^{nv} \right] \left[L_e^{(k)} \right] \quad (4.17)$$

$$\left[K_g^v(\omega, \bar{t}) \right] = G(\omega, \bar{t}) \sum_{e=1}^{N_e} \left[L_e^{(k)} \right]^T \left[K_e^v \right] \left[L_e^{(k)} \right] = G(\omega, \bar{t}) \left[\mathbf{K}_g^v \right] \quad (4.18)$$

où $\left[K_e^{nv} \right]$ et $\left[K_e^v \right]$ sont, respectivement, la matrice de raideur élémentaire des sous-structures élastique et viscoélastique factorisée (par le module complexe $G(\omega, \bar{t})$) et dont les expressions sont présentées sous forme détaillée dans le chapitre précédent. N_c et N_e sont, respectivement, le nombre de couches (ou plis) élastiques et le nombre total d'éléments finis à l'aide desquels la structure est discrétisée.

On remarquera que le comportement viscoélastique est introduit dans la matrice de raideur élémentaire du noyau viscoélastique $\left[K_e^v(\omega, \bar{t}) \right]$ par le biais de la factorisation d'un des ses deux modules complexes (E ou G), initialement supposé indépendant de la température \bar{t} et de la fréquence d'excitation ω : on obtient ainsi une matrice de raideur élémentaire factorisée de la sous-structure viscoélastique $\left[K_e^v \right]$. Puis, après l'obtention de la matrice de raideur globale de la sous-structure viscoélastique $\left[K_g^v(\omega, \bar{t}) \right]$, on introduit le module complexe factorisé, comme le montre l'équation (4.18).

La formulation par éléments finis de la matrice de raideur élémentaire est obtenue selon la théorie choisie (*FSDT*, *HSDT* ou *Layerwise-FSDT*). Les différentes formulations sont présentées en détail dans le Chapitre III.

Plus particulièrement, dans le cas de la formulation par éléments finis de *structures sandwichs*, on considère dans ce mémoire deux sous-structures purement élastiques (en matériau métallique) collées à une sous-structure centrale viscoélastique. Ainsi, les couches élastiques inférieure de la base et supérieure de la peau sont collées à une couche centrale viscoélastique (le noyau). Toutefois, dans le cas de *structures stratifiées sandwich*, les couches de la base et de la peau sont fabriquées en matériau stratifié, où normalement chaque pli représente un *amortissant intrinsèque*. L'amortissement viscoélastique et l'amortissement intrinsèque prédits respectivement dans les sous-structures viscoélastiques et élastiques sont introduits dans la formulation numérique par éléments finis de la *structure stratifiée sandwich* en employant respectivement le modèle *MC* et le *MHC*.

L'équation (4.18) montre la matrice globale de raideur du matériau viscoélastique factorisée soit par le module $G(\omega, \bar{t})$ soit par $E(\omega, \bar{t})$, et qui réduit de manière significative le

coût numérique de résolution du système global amorti dans le domaine fréquentiel, car dans la bande de fréquence étudiée le calcul de la matrice de raideur $[K_g^v]$ n'est nécessaire qu'une seule fois, et non à chaque fréquence discrète. Ainsi, on réécrit l'équation (4.15) sous sa forme factorisée par rapport au module $G(\omega, \bar{t})$:

$$[M_g] \{ \ddot{u}_g(t) \} + \left[[K_g^{nv}] + G(\omega, \bar{t}) [K_g^v] \right] \{ u_g(t) \} = \{ F_g(t) \} \quad (4.19)$$

Puisque l'un des objectifs de ce mémoire est l'étude des réponses dynamiques dans le domaine fréquentiel, la section 4.7 fournit les expressions pour le calcul direct des réponses harmoniques du système amorti (Équation (4.19)). Toutefois, la procédure qui sera exposée, devient presque inexploitable, en termes de temps de calcul, principalement pour des modèles éléments finis de grandes tailles. Ainsi, on doit envisager l'utilisation des méthodes de réduction de modèle pour les calculs envisagés. Ces aspects seront abordés dans le Chapitre VI.

4.5 Formulation des MEFs incluant le modèle viscoélastique DF

Selon Galucio et al. (2004), au début des années 1980, le *Calcul Fractionnaire* appliqué à la modélisation des matériaux viscoélastique a d'abord été interprété comme une méthode d'ajustement de courbes. Selon le même chercheur, Bagley et Torvik (1983) ont proposé dans leurs travaux une justification physique pour l'utilisation de cet outil mathématique appliqué dans le domaine scientifique de la thermodynamique. Ce modèle fractionnaire proposé est considéré comme une des références actuelles pour l'étude des matériaux viscoélastiques. Les méthodes basées sur la discrétisation en temps de l'opérateur dérivée fractionnaire dans la relation contrainte-déformation des relations constitutives des matériaux viscoélastiques sont généralement associées à l'utilisation de *la méthode de Grünwald* (GALUCIO et al., 2004).

4.5.1 Introduction à l'étude des Dérivées Fractionnaires

Selon Miller et Ross (1993), la définition formelle d'une intégration fractionnaire d'ordre α a été introduite initialement par *Riemman et Liouville*, et est donnée par l'expression :

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (4.20)$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ est la *fonction Gamma*, avec $\alpha > 0$ ou $\text{Re}(\alpha) > 0$, si α est complexe.

En ce qui concerne l'étude des dérivées fractionnaires, les deux définitions suivantes sont couramment employées :

(a) la *dérivée fractionnaire de Caputo*, définie par :

$${}_c D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-n-1} \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n} d\tau \quad (4.21)$$

(b) et la *dérivée fractionnaire de Riemman-Liouville* :

$${}_{RL} D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-n-1} f(\tau) d\tau \quad (4.22)$$

Dans les deux définitions fournies par les expressions ci-dessus, n désigne la plus petite valeur entière supérieure ou égal à α .

Pour applications pratiques dans l'ingénierie on préfère habituellement l'utilisation de l'équation (4.21) de Caputo principalement parce que ses conditions initiales sont compatibles avec le calcul traditionnel (PODLUBNY et al, 1997).

Selon Schmidt et Gaul (2002), en ce qui concerne la résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire appliquée à la dynamique des systèmes structuraux étudiés dans le domaine temporel, l'une des méthodes les plus couramment utilisées est la *méthode de Grünwald-Letnikov*, qui suggère que la dérivée fractionnaire d'une fonction $f(t)$ peut être approchée par l'expression :

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \approx \left(\frac{t}{N}\right)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} f\left(t - j \frac{t}{N}\right) \quad (4.23)$$

où l'intervalle de dérivation est donné par $[0, t)$, N étant le nombre de divisions de l'intervalle de dérivation, N_t étant le nombre de points de l'historique de la fonction $f(t)$ utilisé dans la discrétisation effectuée, et finalement, $A_{j+1}^{(\alpha)}$ représentant les *coefficients de Grünwald*, donnés par les expressions :

$$A_{j+1}^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} \quad (4.24)$$

et

$$A_{j+1}^{(\alpha)} = \frac{j-\alpha-1}{j} A_j^{(\alpha)} \quad (4.25)$$

où $A_1^{(\alpha)} = 1$ quelle que soit la valeur de α .

Schmidt et Gaul (2002) ont décrit de façon détaillée l'obtention des méthodes de discrétisation de l'opérateur fractionnaire. Dans ce même travail, ils justifient la possibilité d'utilisation d'un certain nombre fini de points N_t à la place de l'historique complet de la fonction $f(t)$ dans le calcul d'approximation de l'équation (4.23).

Une autre méthode de résolution d'équations différentielles fractionnaires discrétisées dans le domaine du temps est proposée par Galucio et al. (2006) et est basée sur la méthode (discrète) de résolution des équations différentielles ordinaires d'ordre entier proposée initialement par Gear (1971). Galucio et al. (2006) ont montré que la méthode de discrétisation de Gear (1971) appliquée aux dérivées fractionnaires, prend la forme :

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \approx \left(\frac{t}{N}\right)^{-\alpha} \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \sum_{j=0}^{N_t} \sum_{l=0}^j \left(\frac{4}{3}\right)^j \left(\frac{1}{4}\right)^l A_{j+1}^{(\alpha)} B_{l+1}^{(j)} f\left(t - j\frac{t}{N} - l\frac{t}{N}\right) \quad (4.26)$$

avec $A_{j+1}^{(\alpha)}$ donné par l'équation (4.25) et $B_{l+1}^{(j)}$ donné par :

$$B_{l+1}^{(j)} = \frac{l-j-1}{l} B_l^{(j)} \quad (4.27)$$

où $B_1^{(j)} = 1$ quelle que soit la valeur de j .

Selon Galucio et al. (2006), la méthode de discrétisation fournie par l'équation (4.26) peut être exprimée d'une manière similaire à celle de *Grünwald-Letnikov*, selon l'expression :

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \approx \left(\frac{t}{N}\right)^{-\alpha} \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \sum_{j=0}^{N_t} g_{j+1} f\left(t - j \frac{t}{N}\right) \quad (4.28)$$

en réduisant considérablement son coût d'implémentation numérique.

Galucio et al. (2006) évaluent également l'efficacité de la méthode proposée et concluent qu'elle présente un taux de convergence de deuxième ordre pour des applications dynamiques, supérieur à celui associé à l'utilisation de la méthode de *Grünwald-Letnikov*, ce qui justifie son utilisation.

4.5.2 Dérivées Fractionnaires appliquées à la modélisation d'éléments viscoélastiques

Dans le contexte de l'implémentation des modèles représentatifs de la viscoélasticité associés à la formulation par éléments finis, Schmidt et Gaul (2002) ont développé un élément fini tridimensionnel qui prend en compte les relations entre contrainte et déformation définies par les dérivées fractionnaires via la méthode de discrétisation de *Grünwald-Letnikov*, pour laquelle la connaissance de l'historique des déplacements et contraintes est nécessaire. D'autre part, Galucio et a. (2004) ont présenté une autre méthode pour la formulation numérique des matériaux viscoélastiques dans le contexte des éléments finis qui, en termes de coût numérique, est moins chère que la méthodologie adoptée par Schmidt et Gaul (2002). Son idée est d'éliminer l'une des dérivées fractionnaires présentes dans le modèle viscoélastique, illustré ici dans le cas unidimensionnel :

$$\sigma(t) + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \sigma(t)}{dt^\alpha} = E_0 \varepsilon(t) + \tau^\alpha E_\infty \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha} \quad (4.29)$$

où t est la variable temporelle, $\sigma(t)$ est la *contrainte*, $\varepsilon(t)$ est la *déformation*, τ est le *temps de relaxation* du matériau, E_0 est le *module statique* (ou de *baisse fréquence*) du matériau, et E_∞ est le *module dynamique* (ou *d'haute fréquence*) du matériau. Dans cette optique, les auteurs effectuent un changement de variables dans l'équation (4.29) en utilisant l'expression suivante :

$$\bar{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E_\infty} \quad (4.30)$$

où $\bar{\varepsilon}(t)$ est la *déformation anélastique*. En introduisant cette définition dans l'équation(4.29), on aboutit à la relation entre contrainte et déformation du matériau réécrite sous la forme :

$$\bar{\varepsilon}(t) + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \bar{\varepsilon}(t)}{dt^\alpha} = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \varepsilon(t) \quad (4.31)$$

En discrétisant la dérivée fractionnaire du modèle de *Grünwald-Letnikov*, fournie par l'équation (4.23) dans l'équation (4.31), on obtient l'expression :

$$\bar{\varepsilon}(t + \Delta t) = (1 - c) \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \varepsilon(t + \Delta t) - c \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} \bar{\varepsilon}(t + \Delta t - j\Delta t) \quad (4.32)$$

où c est une constante non-dimensionnelle, donnée par l'expression :

$$c = \frac{\tau^\alpha}{\tau^\alpha + (\Delta t)^\alpha} \quad (4.33)$$

Alternativement, on peut utiliser la méthode de discrétisation de *Gear* fournie dans l'équation (4.28) dans ce même modèle, et ainsi aboutir à une nouvelle expression de la constante c :

$$c = \frac{(3/2)^\alpha \tau^\alpha}{(3/2)^\alpha \tau^\alpha + (\Delta t)^\alpha} \quad (4.34)$$

adoptée dans ce mémoire, comme pour le modèle présenté par l'équation (4.32).

La publication de Galucio et al. (2006) souligne que plus l'indice j augmente plus les *coefficients de Grünwald* diminuent. Ces coefficients sont responsables (en termes mathématiques) pour l'effet « mémoire » observé dans les matériaux viscoélastiques, car le comportement du matériau viscoélastique, à l'instant t , dépend plus fortement de son historique de chargement récent que de son histoire antérieure. Ceci justifie l'utilisation d'un certain nombre de points N_i au lieu de l'historique complet de la fonction $f(t)$ dans le calcul d'approximation de l'équation (4.23).

4.5.3 Incorporation du modèle viscoélastique DF dans la MEF

L'implémentation de la relation constitutive du matériau viscoélastique fournie par l'équation (4.32) dans le contexte des éléments finis est développée, dans ce mémoire pour des structures purement viscoélastiques ou composites sandwichs. La structure résultante est modélisée à l'aide des *théories FSDT, HSDT ou Layerwise-FSDT*, dont la formulation par éléments finis est présentée en détail dans le chapitre précédent.

Comme la représentation mathématique du comportement viscoélastique modifie la relation contrainte-déformation, ces modifications sont prises en compte dans les *MEFs* en utilisant des *efforts internes de nature anélastique*. De plus, comme l'exprime le membre droit de l'équation (4.32), l'un ces deux composants est associé à la loi du matériau viscoélastique par le biais de l'historique des déformations anélastiques et l'autre n'est fonction que de la déformation instantanée. Ainsi, chacune de ces deux composantes est traitée individuellement : une partie qui ne nécessite pas d'historique (mais seulement la déformation instantané) est incorporée dans la matrice de raideur initiale $[K_e^v]$ de la formulation par élément finis, et une partie qui dépend de l'historique des déformations anélastiques données par le vecteur des forces internes $\{\tilde{F}_e\}$.

En considérant les formulations par éléments finis des structures sandwichs, la matrice de raideur élémentaire du matériau viscoélastique peut être calculée selon l'expression fournie par Galucio et al. (2004) :

$$\left[K_e^v(u_e(t)) \right] = \int_{V_e} [B]^T \{ \sigma^e(u_e(t)) \} dV_e = \int_{V_e} [B]^T [C^e] \{ \varepsilon^e(u_e(t)) \} dV_e \quad (4.35)$$

où $\{ \sigma^e(u_e(t)) \}$ et $\{ \varepsilon^e(u_e(t)) \}$ sont les vecteurs de contraintes et de déformations au niveau élémentaire et sont fonctions du vecteur des déplacements mécaniques $\{ u_e(t) \}$, $[B]$ est la matrice qui relie les *ddl*s du système discrétisé par élément finis $\{ u_e(t) \}$ aux déformations mécaniques correspondantes $\{ \varepsilon^e(u_e(t)) \}$, c'est-à-dire : $\{ \varepsilon^e(u_e(t)) \} = [B] \{ u_e(t) \}$, et n'est pas fonction du vecteur $\{ u_e(t) \}$. Cette matrice est liée aux dérivées des fonctions de forme adoptées pour la formulation par éléments finis employée (*FSDT*, *HSDT* ou *Layerwise-FSDT*) et à la matrice $[C^e]$ des constantes élastiques du matériau viscoélastique de nature isotrope qui associe les déformations aux contraintes, soit : $\{ \sigma^e(u_e(t)) \} = [C^e] \{ \varepsilon^e(u_e(t)) \}$.

Pour le cas de la formulation par éléments finis d'un matériau viscoélastique, la relation contrainte-déformation ne s'exprime plus via la relation classique donnée par l'expression :

$$\{ \sigma^e(u_e(t)) \} = [C^e] \{ \varepsilon^e(u_e(t)) \} \quad (4.36)$$

mais à l'aide d'un incrément de temps Δt et en utilisant le modèle fractionnaire adopté (équation (4.30)), ce qui permet d'aboutir à l'expression suivante :

$$\{ \sigma^e(t + \Delta t) \} = E_\infty \{ \varepsilon^e(t + \Delta t) \} - \{ \bar{\varepsilon}^e(t + \Delta t) \} \quad (4.37)$$

où le vecteur $\{ \varepsilon^e \}$ fourni les déformations purement élastiques soustraites des déformations anélastiques $\{ \bar{\varepsilon}^e \}$, dans l'incrément de temps Δt .

En utilisant la discrétisation de la déformation anélastique $\{\bar{\varepsilon}^e\}$, fournie par l'équation (4.32), et avec la relation contrainte-déformation d'un modèle tridimensionnel d'un matériau viscoélastique de nature isotrope (équation (4.32)), les composantes des contraintes, fournies par l'équation (4.37), peuvent être réécrites en fonction des déformations axiales et cisailantes. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \{\sigma^e(t + \Delta t)\} = \\ [C^e] \left[\left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} \right) \{\varepsilon^e(t + \Delta t)\} + c \frac{E_\infty}{E_0} \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{\varepsilon}^e(t + \Delta t - j\Delta t)\} \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

où les constantes E_0 , E_∞ et c sont des paramètres associés au modèle fractionnaire du matériau viscoélastique selon l'équation (4.32).

En tenant compte de l'expression $\{\bar{\varepsilon}^e(u_e(t))\} = [B]\{\bar{u}_e(t)\}$, où $\{\bar{u}_e(t)\}$ est le vecteur des degrés de liberté anélastiques, et de l'expression $\{\varepsilon^e(u_e(t))\} = [B]\{u_e(t)\}$, l'équation (4.38) est réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \{\sigma^e(t + \Delta t)\} = \\ = [C^e][B] \left[\left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} \right) \{u_e(t + \Delta t)\} + c \frac{E_\infty}{E_0} \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{u}_e(t + \Delta t - j\Delta t)\} \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

L'introduction de l'équation (4.39) dans l'équation (4.35), pour un incrément de temps Δt , conduit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \int_V [B]^T \{\sigma^e(u_e(t + \Delta t))\} dV = \\ = \left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} \right) [K_e^v] \{u_e(t + \Delta t)\} + c \frac{E_\infty}{E_0} [K_e^v] \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{u}_e(t + \Delta t - j\Delta t)\} \end{aligned} \quad (4.40)$$

où $\bar{u}_e(t + \Delta t)$ est donné par l'expression :

$$\{\bar{u}_e(t + \Delta t)\} = (1 - c) \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \{u_e(t + \Delta t)\} - c \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{u}_e(t + \Delta t - j\Delta t)\} \quad (4.41)$$

Par conséquent, au niveau élémentaire, l'incorporation du comportement viscoélastique dans la formulation par éléments finis résulte dans l'équation du mouvement suivante :

$$[M_e] \{\ddot{u}_e(t + \Delta t)\} + \left[[K_e^v] + [\tilde{K}_e^v] \right] \{u_e(t + \Delta t)\} = \{F_e(t + \Delta t)\} + \{\tilde{F}_e^v(t + \Delta t)\} \quad (4.42)$$

avec :

$$[\tilde{K}_e^v] = c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} [K_e^v] \quad (4.43)$$

et :

$$\{\tilde{F}_e^v(t + \Delta t)\} = -c \frac{E_\infty}{E_0} \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{u}_e(t + \Delta t - j\Delta t)\} \quad (4.44)$$

Dans équation (4.42) les termes qui s'écrivent en fonction de l'historique fourni par l'équation (4.44) sont situés dans le membre à droite.

En utilisant les matrices de transformation $[L_e]$, les matrices de raideur viscoélastique élémentaire $[K_e^v]$ et $[\tilde{K}_e^v]$; de masse $[M_e]$; et les vecteurs de force externes $\{F_e\}$ et internes $\{\tilde{F}_e^v\}$; sont exprimés dans la configuration globale, ce qui conduit à l'équation du mouvement du système amorti incluant le modèle viscoélastique DF, (équation (4.45)) , qui est utilisée pour la modélisation de structures entièrement viscoélastiques, c'est-à-dire purement viscoélastiques, dans le domaine temporel :

$$[M_g] \{\ddot{u}_g(t)\} + [\bar{K}_g^v(t)] \{u_g(t)\} = \{\bar{F}_g(t)\} \quad (4.45)$$

où $[M_g]$ est la matrice de raideur globale, $[\bar{K}_g^v(t)]$ est définie selon l'expression :

$$[\bar{K}_g^v(t)] = \sum_{e=1}^{Ne} [L_e]^T \left([K_e^v] + [\tilde{K}_e^v(t)] \right) [L_e] \quad (4.46)$$

et le vecteur de forces résultantes, selon l'expression :

$$\{\bar{F}_g(t)\} = \sum_{e=1}^{Ne} \left([L_e]^T \left(\{F_e(t)\} + \{\tilde{F}_e^v(t)\} \right) \right) \quad (4.47)$$

La modélisation par éléments finis de structures sandwichs avec trois couches (deux métalliques et un noyau central viscoélastique), dont les formulations par éléments finis sont présentées dans le chapitre précédent, est réalisée en utilisant l'équation du mouvement du système amorti incluant le modèle viscoélastique DF :

$$[\bar{M}_g] \{\ddot{u}_g(t)\} + [\bar{K}_g(t)] \{u_g(t)\} = \{\bar{F}_g(t)\} \quad (4.48)$$

avec :

$$[\bar{K}_g(t)] = \sum_{e=1}^{Ne} [L_e]^T \left[\sum_{k=1}^2 [K_e^{nv}] + \left([K_e^v] + [\tilde{K}_e^v(t)] \right) \right] [L_e] \quad (4.49)$$

Pour l'étude de structures dans le domaine temporel en utilisant le système d'équations globales non-linéaires (4.45) ou (4.48), dont la non-linéarité est présente dans les matrices de raideur $[\bar{K}_g^v(t)]$ et dans le vecteur $\{\bar{F}_g(t)\}$ dépendants du temps et de la température, il est nécessaire d'utiliser une méthode d'intégration numérique stable. Les méthodes stables pour l'analyse des systèmes dynamiques linéaires peuvent présenter des instabilités lorsqu'elles sont appliquées aux analyses de systèmes dynamiques non-linéaires. La méthode d'intégration utilisée dans ce chapitre est la *méthode explicite de Newmark* et sa formulation peut être consultée dans différentes publications, comme par exemple celle de Bathe (1996). Son

utilisation pour la résolution numérique dans le domaine temporel de structures sandwichs amorties formulées par éléments finis est étudiée dans la section 4.8.

Un autre type d'amortissement fréquemment employé dans la modélisation par éléments finis de divers types de systèmes structuraux, principalement en métaux, est l'amortissement du type proportionnel. Sa formulation est déjà bien connue dans la littérature et correspond à la définition d'une matrice d'amortissement $[C_g(\omega_i, \eta_i)]$, écrite en fonction de la fréquence ω_i et du facteur d'amortissement modal η_i par rapport au mode i . Ce type d'amortissement structural, n'étant que peu cité dans les publications scientifiques traitant de l'amortissement des structures composites, ne sera pas présenté dans ce mémoire. Toutefois, sa formulation mathématique peut être consultée, par exemple, dans la publication de Paultre (2005).

4.6 Analyse modale des structures viscoélastiques

Dû au fait que la matrice de raideur de structures contenant des éléments viscoélastiques, dépend de la fréquence, pour une valeur de température donnée, leurs solutions propres sont obtenues par la résolution du problème aux valeurs propres non-linéaire de la forme suivante (MEUNIER et SHENOI, 2001) :

$$\left([K_g(\omega)] + \lambda [M_g] \right) \{ \tilde{u}_g \} = \{ 0 \} \quad (4.50)$$

Selon Meunier et Shenoï (2001), pour résoudre ce type de problème de nature non-linéaire en fréquence, on doit utiliser des méthodes itératives, comme celle décrite par le diagramme illustré par la Fig. 4.4.

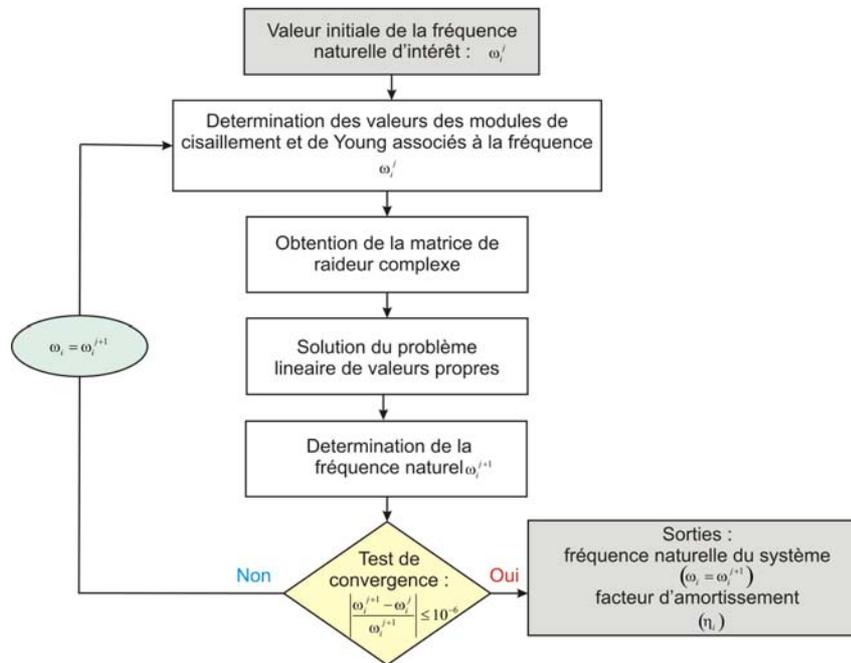


Figure 4.4 - Méthode itérative pour résoudre le problème aux valeurs propres d'un système dynamique non-linéaire en fréquence (figure adaptée de Meunir et Shenoï, 2001).

Après la convergence, les valeurs propres obtenues sont complexes que l'on écrit sous la forme :

$$\lambda_i = \lambda_i' + i\lambda_i'' \quad (4.51)$$

Avec la valeur propre du mode i étudié, la fréquence propre ω_i et le *facteur d'amortissement* η_i sont donnés respectivement par les expressions suivantes, fournies par Meunir et Shenoï (2001) :

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i'} \quad (4.52)$$

$$\eta_i = \lambda_i'' / \lambda_i' \quad (4.53)$$

De l'équation (4.52), on obtient les fréquences propres, associées à la composante réelle de l'équation (4.51).

4.7 Fonctions de Réponse en Fréquence de structures viscoélastiques

L'analyse harmonique, définie ici comme le calcul des *Fonctions de Réponse en Fréquence (FRFs)*, est effectuée à partir des équations (4.19) écrites dans le domaine temporel sans considérer la matrice d'amortissement, par inversion directe de la matrice de raideur dynamique complexe $[Z(\omega, \bar{t})]$ pour chaque valeur discrète de fréquence dans la bande de fréquence étudiée. Selon Trindade (2000) et Lima (2007), elle est donnée par la forme :

$$H(\omega, \bar{t}) = \{c\} [Z(\omega, \bar{t})]^{-1} \{b\}^T \quad (4.54)$$

avec :

$$[Z(\omega, \bar{t})] = [K_g^{nv}] + G(\omega, \bar{t}) [K_g^v] - \omega^2 [M_g] \quad (4.55)$$

où le vecteur $\{b\}$ est un *vecteur colonne* qui définit, parmi tous les *ddl*s du problème discrétisé par la *MEF*, la position où sont appliquées les forces externes d'excitation, et $\{c\}$ est un *vecteur ligne* qui contient les coordonnées où sont prises les réponses de la structure.

Comme présenté par l'équation (4.54), pour chaque valeur discrète de fréquence ω dans la bande de fréquences choisie on doit inverser directement la matrice de raideur dynamique complexe $[Z(\omega, \bar{t})]$. Étant donné que cette action a un coût de résolution numérique très élevé, surtout pour des modèles de grande taille, on doit utiliser des procédures alternatives, telles la *réduction de modèles*, constituée un point d'intérêt du Chapitre VI.

4.8 Réponses temporelles de systèmes dynamiques non-linéaires

La *méthode explicite de Newmark* est adoptée pour obtenir la solution numérique approchée dans le domaine temporel des équations du mouvement (4.45) ou (4.48), en absence d'amortissement, ces équations résultants de la modélisation par éléments finis des structures purement viscoélastiques ou sandwichs amorties par un noyau viscoélastique, formulées via l'utilisation des théories *FSDT*, *HSDT* ou *Layerwise-FSDT*. La formulation des *méthodes de Newmark* appliquées à la solution des problèmes linéaires et non-linéaires est déjà bien détaillée dans la littérature scientifique et peut être consultée dans beaucoup de publications, telles celles de Bathe (1996) et Paultre (2005).

Certaines modifications dans l'algorithme classique *d'intégration numérique explicite de Newmark* doivent être réalisées pour prendre en compte la présence du matériau viscoélastique formulé par *Dérivées Fractionnaires (DF)*.

L'algorithme d'intégration numérique explicite de Newmark est appliqué dans ce mémoire à l'étude dynamique (réponses transitoires) des structures purement viscoélastiques ou sandwich en incorporant les *DF* pour l'approximation numérique par les données expérimentales des matériaux viscoélastiques. Sa structure est détaillé dans le Tableau (4.1) divisé en deux parties A et B.

Deux observations importantes peuvent être relevées au sujet de l'algorithme présenté. Premièrement, avec un pas de temps de calcul constant, la matrice de raideur $[\bar{K}_g(t_{n+1})]$ et le chargement modifié $\{\bar{F}_g(t_{n+1})\}$ sont évalués à chaque pas de temps. Et le calcul du vecteur $\{\tilde{F}_g(t_{n+1})\}$ (Tableau 4.1 - partie B, pas 3) est dépendant de l'historique des déplacements anélastiques choisi, et donné par la variable N_t . De plus, l'historique des déplacements anélastiques peut être tronqué si l'on calcule uniquement les premiers incréments de temps, sans que cela cause des pertes significatives en termes de précision numérique des réponses obtenues, permettant ainsi une réduction significative du temps de calcul numérique.

Tableau 4.1 - *Méthode d'intégration explicite de Newmark* modifiée pour la résolution des équations du mouvement associées à la méthode *DF*. **Partie A**

Initialisation des variables :
<p>1 – Conditions et paramètres initiaux du matériau viscoélastique :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Calcul de la matrice de raideur globale : $[\bar{K}_g] = \sum_{k=1}^{N_m} [K_g^{nv}] + \sum_{k=1}^{N_v} [\bar{K}_g^v]$ - Calcul du vecteur des déplacements anélastiques initiaux $\{\bar{u}(t_0)\} = (1-c) \left(\frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \right) \{u(t_0)\}$ - Paramètres du modèle viscoélastique : $E_0, E_\infty, \tau, \alpha, \nu$ - Définition du nombre N_t des coefficients du <i>Gear scheme</i>, $j = 1 : N_t$ - Détermination des coefficients du <i>Gear Scheme</i>: $A_{j+1}^{(\alpha)} = ((j - \alpha - 1)/j) A_j^{(\alpha)}$ <p>2 – Conditions et paramètres initiaux de la méthode d'intégration temporelle :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Déplacements, vitesse et force : $\{u(t_0)\} = \{0\}, \{\dot{u}(t_0)\} = \{0\}, \{F_g(t_0)\} = \{0\}$; - Calcul de l'accélération : $\{\ddot{u}(t_0)\} = [\bar{M}_g]^{-1} (\{F_g(t_0)\} - [\bar{K}_g] \{u(t_0)\})$ - Choix des variables de la méthode d'intégration temporelle : $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$ - Choix du pas d'intégration : $\Delta t \geq T / (2\pi\sqrt{\gamma/2 - \beta}) = 0,551T$
Calculs préliminaires :
<p>1 – Calcul des constantes d'intégration : $\kappa_0 = 1/\beta\Delta t^2$, $\kappa_1 = \gamma/\beta\Delta t$, $\kappa_2 = 1/\beta\Delta t$, $\kappa_3 = (1/2\beta - 1)$, $\kappa_4 = (\gamma/\beta - 1)$, $\kappa_5 = (\gamma/2\beta - 1)\Delta t$, $\kappa_6 = (1 - \gamma)\Delta t$, $\kappa_7 = \gamma\Delta t$</p>

Tableau 4.1 - *Méthode d'intégration explicite de Newmark* modifiée pour la résolution des équations du mouvement associées à la méthode *DF*. **Partie B**

Intégration pas à pas : $n = 1, 2, 3, \dots, t_f / \Delta t$

1 – Incrément du temps : $t_{n+1} = t_n + \Delta t = (n+1)\Delta t, t_0 = 0$

2 – Calcul du vecteur des forces modifiées par le matériau viscoélastique :

$$\{\tilde{F}(t_{n+1})\} = -c \frac{E_\infty}{E_0} \sum_{j=1}^{N_i} A_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{u}(t_{n+1-j})\}$$

3 – Calcul du vecteur de forces résultant : $\{\bar{F}_g(t_{n+1})\} = \{\tilde{F}_g(t_{n+1})\} + \{F_g(t_{n+1})\}$

4 – Incrémentation du vecteur des forces effectives $\{\Delta\bar{F}_g(t_{n+1})\}$ au temps t_n :

5 – Calcul de la matrice de raideur tangente effective $[\bar{K}_g^e(t_{n+1})]$ au temps t_{n+1} :

$$[\bar{K}_g(t_{n+1})] = [\bar{K}_g(t_n)] + \kappa_0 [\bar{M}_g] + \kappa_1 [\bar{C}_g]$$

6 – Calcul du vecteur des déplacements au temps t_{n+1} :

$$[\bar{K}_{n+1}(t_n)] \{u(t_{n+1})\} = \{\bar{F}_g(t_{n+1})\}$$

7 – Actualisation du vecteur des déplacements anélastiques :

$$\{\bar{u}(t_{n+1})\} = (1-c) \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \{u(t_{n+1})\} - c \sum_{j=1}^{N_i} A_{j+1}^{(\alpha)} \{\bar{u}(t_{n+1-j})\}$$

8 – Calcul des vecteurs des vitesses et des accélérations au temps t_{n+1} :

$$\{\dot{u}(t_{n+1})\} = k_3 \{\dot{u}(t_n)\} + (k_4 - k_5) \{\ddot{u}(t_n)\} - k_6 \{u(t_n)\} + k_7 \{u(t_{n+1})\}$$

$$\{\ddot{u}(t_{n+1})\} = k_0 \{u(t_{n+1})\} - k_0 \{u(t_n)\} - k_1 \{\dot{u}(t_n)\} - k_2 \{\ddot{u}(t_n)\}$$

4.9 Applications numériques

On présente dans cette section différentes simulations numériques afin d'illustrer et de valider les procédures de modélisation pour les modèles éléments finis formulés dans le Chapitre III, et d'incorporation des modèles viscoélastiques, *MC* et *DF* auparavant formulés, de systèmes mécaniques simples. En outre, on s'intéresse à l'étude de la performance de l'utilisation de traitements viscoélastiques en termes de réduction des niveaux de vibration. Ceux-ci sont appliqués sous la forme de traitements internes (*couche contrainte passive*) dans les structures composites modélisées.

Dans les exemples numériques proposés l'efficacité des modèles *MC* et *DF* est étudiée en fonction de leurs représentations mathématiques de la dépendance en température, en

fréquence et du temps d'excitation des systèmes viscoélastiques. On s'intéresse à ces conditions sur les réponses dynamiques (amplitudes des fréquences propres et facteurs d'amortissement) de structures composites sandwichs.

Un autre intérêt de la présente section est l'étude et la validation de la formulation du mécanisme d'amortissement intrinsèque des matériaux composites, formulé par le *MHC*, et ses niveaux de réduction de vibration des réponses dynamiques de structures composites.

Pour finaliser, les théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*, sont étudiées selon leurs relations géométriques (ratio entre la largeur et l'épaisseur totale et ratio entre l'épaisseur du matériau viscoélastique et l'épaisseur totale) et la composition du matériau en fonction de l'épaisseur de la structure composite (c'est-à-dire, concernant l'existence, ou non, d'un seul type de matériau dans l'épaisseur de la structure modélisée).

4.9.1 Étude d'amortissement de plaques composites sandwichs munies d'un noyau viscoélastique utilisant le MHC

Le but de cette application numérique est le calcul des fréquences propres et des facteurs d'amortissement de trois différentes plaques composites sandwichs. Celles-ci sont constituées de deux peaux (*supérieure* et *inférieure*) et d'un noyau. Les peaux sont fabriquées en *plastique renforcé par fibres (FRP)* et le noyau en *mousse viscoélastique flexible*. La différence entre les trois plaques est le type de matériau utilisé dans sa composition, dont : le **Matériau I** (composé de peaux et d'un noyau, respectivement sans et avec capacité d'amortissement), le **Matériau II** (composé de peaux et d'un noyau, respectivement avec et sans capacité d'amortissement) et le **Matériau III** (avec peaux et noyau avec capacité d'amortissement) ont leurs propriétés mécaniques décrites dans le Tableau 4.2. Les valeurs des propriétés mécaniques fournies dans le tableau, pour la peau et le noyau, sont données par Nayak et al. (2002) et Malekzadeh et al. (2005).

On constate dans le Tableau 4.2 que les propriétés physiques des matériaux sont considérées comme étant indépendantes de la température et de la fréquence d'excitation. Ainsi, on utilise le *modèle hystérétique complexe (MHC)* pour les formulations d'amortissement de la couche contrainte viscoélastique et des couches externes stratifiées et ainsi pour l'obtention des fréquences propres et des facteurs d'amortissement de la structure. La formulation du *MHC* est décrite dans la section 4.3 par les expressions (4.13) et (4.14).

Tableau 4.2 - Propriétés mécaniques des matériaux des plaques composites sandwichs

Propriétés mécaniques	Matériau I		Matériau II		Matériau III	
	Peau	Noyau	Peau	Noyau	Peau	Noyau
E_1 (GPa)	27,86	0,1135	172,7	0,109	172,7	0,1135
E_2 (GPa)	8,07	0,1135	7,20	0,109	7,20	0,1135
$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}$	0,27	0,32	0,30	0,32	0,30	0,32
$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	3,17	0,018860	3,76	0,050	3,76	0,018860
G_{23} (GPa)	1,34	0,018860	3,76	0,050	3,76	0,018860
ρ (kg/m ³)	1650	130	1566	130	1566	130
η_{11}	0,0	0,0288	0,0045	0,0	0,0045	0,0288
η_{22}	0,0	0,0288	0,0422	0,0	0,0422	0,0288
$\eta_{12} = \eta_{13} = \eta_{23}$	0,0	0,0670	0,0705	0,0	0,0705	0,0670

Les trois plaques composites sandwichs modélisées par éléments finis ont géométrie carrée, de dimensions normalisées $a \times a$, simplement appuyées sur ses bords (Figure 4.5). Chacune des peaux extérieures possède de trois couches orientées à $(0^\circ / 90^\circ / 0^\circ)$ et de même épaisseur. Ainsi, les structures composites résultantes sont constituées de sept couches, désignées par la notation $(0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / V / 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ)$, dont six sont en matériau composite stratifié et une en matériau viscoélastique. Le ratio entre sa largeur a et son épaisseur totale h_t est choisi comme étant égal à 10, $a/h_t = 10$. L'épaisseur du noyau viscoélastique est choisie comme étant égale à 94 % de l'épaisseur totale h_t de la structure composite étudiée.

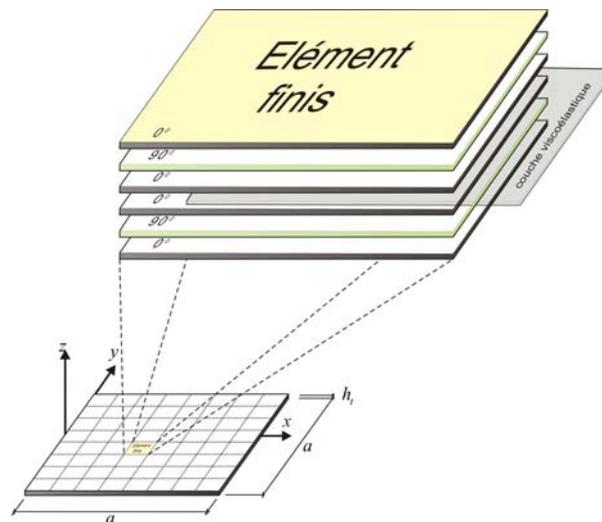


Figure 4.5 - Illustration du *MEF* de plaque composite traitée par une couche viscoélastique.

L'étude numérique des plaque composites, traitées par l'emploi d'une couche interne viscoélastique et dont les couches ont, ou non, une capacité d'amortissement, utilise le *MHC* décrit dans la section 4.3, et dont les équations sont celles fournies par les expressions (4.13) et (4.14), pour l'obtention de ses fréquences propres et de ses facteurs d'amortissement.

Les résultats numériques des trois plaques, obtenus en utilisant la théorie *HSDT*, sont comparés numériquement avec ceux obtenus par un modèle numérique, utilisant la technique de Navier proposée par Malekzadeh et al. (2005), et utilisant la théorie *HSDT de Reddy* proposée par Nayak et al. (2002).

En raison de la valeur adoptée pour le ratio entre la largeur et l'épaisseur, la présente structure est considérée dans la littérature scientifique comme étant épaisse. Ainsi, on explique dans le chapitre précédent, on adopte la formulation *HSDT* pour la formulation numérique par éléments finis de la structure composite étudiée, qui est considérée plus adaptée à cette condition. Cette théorie est aussi employée par Nayak et al. (2002) et Malekzadeh et (2005).

Le modèle éléments finis de la plaque composite possède un maillage à 8×8 éléments finis qui est illustré sur la Fig. 4.5, avec un total de 2147 *ddl*s.

Les valeurs des facteurs d'amortissement modal et des fréquences propres correspondantes sont obtenues pour les cinq premiers modes de vibration de la structure et comparés avec les résultats analytiques présentés dans les publications de Nayak et al. (2002) et Malekzadeh et al. (2005), en utilisant une formulation analytique de la théorie *HSDT*. Les

résultats numériques peuvent être vérifiés dans les Tableaux 4.3, 4.4 et 4.5 pour les trois différents matériaux utilisés, **Matériau I, II et III**, dans la composition de chaque plaque.

Tableau 4.3. Facteurs d'amortissement modal et fréquences propres pour les cinq premiers modes de vibration de la structure composite en utilisant les théories *HSDT* : **Matériau I**.

Modes	Fréquences propres			Facteurs d'amortissement		
	(Hz)			η (%)		
	HSDT (I)	HSDT (II)	HSDT (III)	HSDT (I)	HSDT (II)	HSDT (III)
1	173,07	177,88	167,94	4,00	4,15	4,40
2	315,13	317,80	297,06	5,19	5,29	5,50
3	321,95	324,16	301,78	5,35	5,45	5,69
4	417,55	417,56	388,84	5,54	5,67	6,16
5	475,84	475,41	445,59	5,74	5,82	5,88

(I) Théorie *HSDT formulée*, (II) Théorie *HSDT* de Nayak et al. (2002), (III) Théorie *HSDT* de Malekzadeh et al. (2005).

Tableau 4.4. Facteurs d'amortissement modal et fréquences propres pour les cinq premiers modes de vibration de la structure composite en utilisant les théories *HSDT* : **Matériau II**.

Modes	Fréquences propres			Facteurs d'amortissement		
	(Hz)			η (%)		
	HSDT (I)	HSDT (II)	HSDT (III)	HSDT (I)	HSDT (II)	HSDT (III)
1	304,59	305,75	288,89	0,40	0,47	0,34
2	534,47	533,44	498,72	0,27	0,29	0,17
3	543,18	542,17	516,07	0,26	0,28	0,24
4	561,61	561,52	647,47	5,83	5,83	0,12
5	561,61	561,52	729,33	5,83	5,83	0,08

(I) Théorie *HSDT formulée*, (II) Théorie *HSDT* de Nayak et al. (2002), (III) Théorie *HSDT* de Malekzadeh et al. (2005).

Tableau 4.5. Facteurs d'amortissement modal et fréquences propres pour les cinq premiers modes de vibration de la structure composite en utilisant les théories *HSDT* : **Matériau III**.

Modes	Fréquences propres			Facteurs d'amortissement		
	(Hz)			η (%)		
	HSDT (I)	HSDT (II)	HSDT (III)	HSDT (I)	HSDT (II)	HSDT (III)
1	210,69	210,67	195,39	5,83	5,90	5,98
2	350,58	348,46	321,16	6,28	6,32	6,37
3	353,85	351,90	324,17	6,29	6,34	6,39
4	452,08	446,93	411,86	6,36	6,40	6,43
5	509,14	503,58	468,78	6,41	6,45	6,53

(I) Théorie *HSDT formulée*, (II) Théorie *HSDT* de Nayak et al. (2002), (III) Théorie *HSDT* de Malekzadeh et al. (2005).

On peut vérifier dans les Tableaux 4.3, 4.4 et 4.5 la bonne qualité de l'approximation numérique entre les valeurs des facteurs d'amortissement obtenus par l'emploi de la théorie *HSDT* formulée dans ce mémoire par rapport à celles trouvées analytiquement par les autres chercheurs. On remarquera que les résultats des fréquences propres sont plus proches de ceux obtenus par le modèle numérique de Nayak et al. (2002) que de ceux numériques obtenus par Malekzadeh et al. (2005).

On peut constater grâce aux trois tableaux précédents que le modèle *HSDT* formulé dans ce mémoire est validé numériquement par les résultats issus des simulations numériques réalisées par Nayak et al. (2002), qui utilisent un modèle d'un autre ordre. Toutefois, la différence observée entre les fréquences propres et les facteurs de perte de ces deux modèles par rapport à celui proposé par Malekzadeh et al. (2005), peut être associée aux hypothèses adoptées pendant la formulation des modèles. Le modèle *HSDT* de Malekzadeh et al. (2005) adopte la condition de continuité des déplacements selon l'épaisseur du stratifié. Cependant, celle-ci n'est qu'appliquée que pour le modèle *HSDT* proposé par Malekzadeh et al. (2005).

De plus, on vérifie que les facteurs d'amortissements pour les trois premiers modes des plaques composites sandwichs varient entre 4,00 à 6,39 % dans les **Matériaux I et III**, qui considèrent l'amortissement du noyau viscoélastique, et varient entre 0,17 à 0,47 % avec dans

la plaque en **Matériau II**. Ainsi, on constate qu'il est important d'introduire un matériau viscoélastique dans le noyau de structures composites sandwichs afin de bien les amortir.

Une autre constatation, par l'observation des résultats fournis par les Tableaux 4.3, 4.4 et 4.5, est que le facteur d'amortissement des structures composites sandwichs, est supérieur à ceux typiquement rencontrés dans les structures en métaux. De plus, nous n'avons pas constaté dans la littérature, jusqu'à maintenant, des mesures expérimentales sur des matériaux composites amortis par dispositifs viscoélastiques. Les résultats de la littérature scientifique nous permettent seulement la validation numérique et analytique des modèles formulés.

4.9.2 Étude de la variation d'amortissement en fonction de l'épaisseur d'une plaque composite munie d'un noyau viscoélastique

Ce test numérique est basé sur les résultats numériques et expérimentaux présentés par Meunier et Shenoï (2001) qui ont utilisé une plaque composite appuyée sur ses quatre bords et traitée avec un noyau viscoélastique, dont les propriétés mécaniques sont dépendantes de la fréquence et de la température. La structure est modélisée numériquement par éléments finis en utilisant les théories *FSDT* et *HSDT*.

Comme dans l'exemple numérique précédant, la structure composite sandwich est constituée de deux peaux extérieures en matériau composite stratifié collées sur un noyau central viscoélastique. Les deux peaux extérieures en matériau stratifié sont constituées chacune de trois couches orientées à $(0^\circ / 90^\circ / 0^\circ)$ et de même épaisseur. Le ratio entre la largeur et l'épaisseur totale de la plaque carrée est égal à $a/h_t = 10$. Cependant, dans ce cas d'étude, les propriétés mécaniques du traitement viscoélastique sont dépendantes de la température et de la fréquence d'excitation de la structure composite.

Pour les températures en étude, 30°C et 90°C , l'amortissement intrinsèque des plis en composite stratifié est admis indépendant de la température et de la fréquence. Selon les données fournies par Meunier et Shenoï (2001), en ce qui concerne la température de 90°C , les propriétés mécaniques du traitement viscoélastique, désigné comme HEREX C70.130, varient avec la température et la fréquence, fait qui n'est observé que dans les études à 30°C . Ces propriétés mécaniques sont énumérées dans le Tableau 4.6.

Tableau 4.6 - Propriétés mécaniques du matériau HEREX C70.130 à 30 °C et 90 °C .

Température	Propriétés mécaniques du matériau						
	ρ (kg/m ³)	E' (MPa)	E'' (MPa)	η_ε	η_γ	G' (MPa)	G'' (MPa)
30 C°	130	113,5	3,27	0,028	0,067	18,86	1,26
90 C°	130	Eq. (4.56)	-	Eq.(4.58)	Eq.(4.59)	(4.57)	-

L'influence de la fréquence sur les *modules de stockage* E' et G' (en MPa) et sur les *facteurs de perte* η_ε et η_γ du noyau viscoélastique HEREX C70.130 à 90 °C a été analysée expérimentalement par Meunier et Shenoi (2001) et leurs expressions mathématiques sont les suivantes :

$$E'(\omega) = 4,9796 \ln(\omega) + 32,331 \quad (4.56)$$

$$G'(\omega) = 3,9733 (\omega)^{0,0806} \quad (4.57)$$

$$\eta_\varepsilon(\omega) = -0,013 \ln(\omega) + 0,2104 \quad (4.58)$$

$$\eta_\gamma(\omega) = 0,3886 (\omega)^{-0,0347} \quad (4.59)$$

Les propriétés mécaniques des peaux en matériau stratifié, qui sont fabriquées en Egass/DX-210 du type *FRP (Fibre Reinforced Plastic)*, prennent les valeurs : $E'_1 = 37,78$ GPa, $E'_2 = E'_3 = 10,90$ GPa, $G'_{12} = G'_{13} = G'_{23} = 4,91$ GPa, $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0,30$, $\eta_{11} = 1,385 \times 10^{-3}$, $\eta_{22} = 8,037 \times 10^{-3}$, $\eta_{12} = \eta_{23} = \eta_{13} = 1,0998 \times 10^{-2}$ et la densité $\rho = 1813,9$ kg/m³.

Une étude préliminaire de la convergence de la première *fréquence propre*, la fréquence fondamentale, et de son *facteur d'amortissement* en fonction du nombre d'éléments finis utilisé dans la discrétisation de la plaque composite étudiée, en utilisant les théories *FSDT* et *HSDT*, est réalisée et les résultats sont illustrés par les Figures 4.6 et 4.7, pour 1, 2, ... 8 éléments finis dans chaque direction x et y . Selon Reddy (1997), pour la *FSDT* on utilise des facteurs de correction des *cisaillements transversaux* (γ_{yz}, γ_{xz}) égaux à : $k_1 = k_2 = 5/6$.

Avant la présentation des résultats numériques, la convergence des résultats des valeurs propres selon le maillage de la plaque composite sandwich, pour chacune des théories *HSDT* et *FSDT* (Figures 4.8 et 4.9 respectivement), doit être calculée en utilisant les procédures indiquées dans la section 4.6 (c'est-à-dire, en adoptant une procédure itérative, puisque, dans ce type d'application numérique la matrice de raideur est dépendente des fréquences propres).

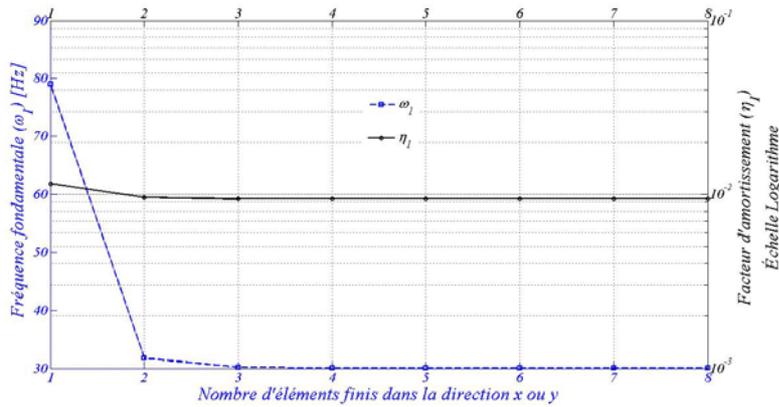


Figure 4.6 - Étude de la convergence de la fréquence fondamentale de la plaque composite avec $h_v/h_t = 0,58$ et à $90^\circ C$ formulée numériquement par l'emploi de la théorie *HSDT*.

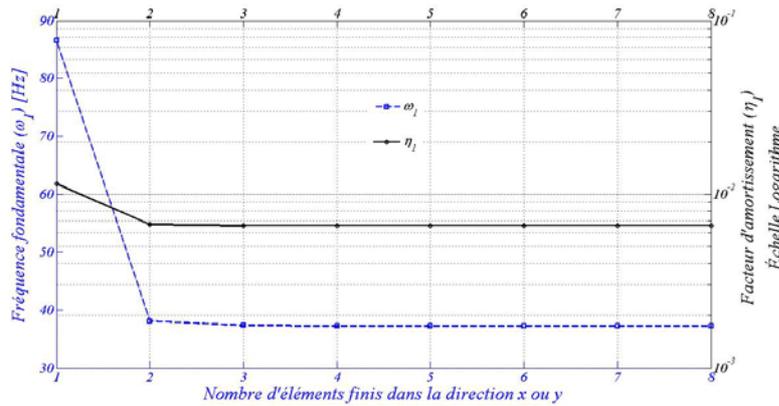


Figure 4.7- Étude de la convergence de la fréquence fondamentale de la plaque composite avec $h_v/h_t = 0,58$ et à $90^\circ C$ formulée numériquement par l'emploi de la théorie *FSDT*.

Les Figures 4.6 et 4.7 montrent la convergence des résultats avec un très faible nombre d'éléments finis dans le maillage de la structure composite sandwich pour les deux théories, *HSDT* et *FSDT*.

Les Tableaux 4.7 et 4.8 montrent les valeurs de la première fréquence propre ω_1 et du facteur d'amortissement η_1 associé, obtenus en comparaison avec celles présentées par Meunier et Shenoï (2001) pour différents ratios h_v/h_t , pour les deux valeurs de température $90^\circ C$ et $30^\circ C$. Ces résultats numériques ont été obtenus avec au maximum six itérations numériques pour une erreur adoptée $\varepsilon \leq 10^{-6}$.

Il est utile de souligner que Meunier et Shenoï (2001) utilisent la *Théorie des Déformations de Cisaillement de Haut Ordre de Reddy (HSDT-Reddy)*, tandis qu'on utilise les formulations par éléments finis des théories *FSDT* et *HSDT* pour la plaque composite et pour les deux températures étudiées.

Tableau 4.7 - Première fréquence propre et facteur d'amortissement associé pour différents ratios h_v/h_t , avec $a/h_t = 10$ et à $90^\circ C$.

h_v/h_t	<i>HSDT-Reddy</i>		<i>HSDT</i>		<i>FSDT</i>	
	ω_1 (Hz)	η_1	ω_1 (Hz)	η_1	ω_1 (Hz)	η_1
0,01	-	-	28,37	0,006	29,48	0,006
0,03	-	-	28,54	0,006	29,67	0,006
0,05	-	-	28,82	0,006	29,99	0,006
0,10	-	-	29,39	0,006	30,65	0,006
0,20	-	-	30,49	0,006	32,05	0,006
0,30	-	-	31,40	0,007	33,51	0,006
0,40	-	-	31,86	0,007	34,95	0,007
0,58	32,23	0,009	30,06	0,009	37,28	0,007
0,64	31,37	0,010	28,15	0,012	37,87	0,007
0,70	29,77	0,012	25,32	0,017	38,27	0,007
0,76	27,13	0,016	21,58	0,028	38,36	0,007
0,82	23,11	0,026	17,20	0,059	37,89	0,007
0,88	17,68	0,065	13,13	0,143	36,29	0,007
0,91	14,81	0,116	11,79	0,216	34,59	0,008
0,94	12,56	0,204	11,35	0,283	31,62	0,008
0,97	11,78	0,270	11,75	0,292	25,70	0,010

Tableau 4.8 - Première fréquence propre et facteur d'amortissement associé pour différents ratios h_v/h_t , avec $a/h_t = 10$ et à $30^\circ C$.

h_v/h_t	<i>HSDT-Reddy</i>		<i>HSDT</i>		<i>FSDT</i>	
	ω_1 (Hz)	η_1	ω_1 (Hz)	η_1	ω_1 (Hz)	η_1
0,01	-	-	28,37	0,006	29,48	0,006
0,03	-	-	28,54	0,006	29,67	0,006
0,05	-	-	28,82	0,006	29,99	0,006
0,10	-	-	29,39	0,006	30,65	0,006
0,20	-	-	30,50	0,006	32,05	0,006
0,30	-	-	31,41	0,006	33,51	0,006
0,40	-	-	31,89	0,007	34,96	0,007
0,58	32,33	0,009	30,25	0,009	37,29	0,007
0,64	31,54	0,009	28,52	0,010	37,89	0,007
0,70	30,09	0,010	26,06	0,013	38,29	0,007
0,76	27,77	0,012	23,04	0,018	38,39	0,007
0,82	24,52	0,017	20,07	0,028	37,94	0,007
0,88	20,91	0,029	18,28	0,042	36,36	0,007
0,91	19,57	0,038	18,20	0,047	34,69	0,007
0,94	18,96	0,044	18,57	0,047	31,76	0,007
0,97	18,50	0,040	18,47	0,040	25,94	0,008

Les résultats numériques de la *fréquence propre* et du *facteur d'amortissement* obtenus, pour différents ratios entre l'épaisseur de la couche viscoélastique et l'épaisseur totale de la plaque composite, prouvent qu'on peut utiliser un maillage par éléments finis très faible sans que cela cause de grands pertes de précision numérique, mais avec une réduction très significative du coût computationnel requis pour l'utilisation des théories *FSDT* et *HSDT*. Ainsi, dans les simulations numériques présentes au long de cet étude, on utilise un maillage avec 4×4 éléments finis dans le but de réduire le temps de calcul requis pour les simulations numériques qui emploient la méthode itérative illustrée sur la Fig. 4.4 pour l'obtention de la *fréquence propre* et du *facteur d'amortissement*.

Grâce aux résultats numériques présentés dans les Tableaux 4.7 et 4.8, obtenus pour différentes valeurs du ratio h_v/h_t , spécifiquement comprises entre 0,58 et 0,97, on peut constater que le *facteur d'amortissement* η_1 et sa fréquence propre associée ω_1 , obtenus utilisant les théories *HSDT-Reddy* et *HSDT*, sont les plus proches. On suppose que cela est dû à l'utilisation des facteurs de correction des cisaillement transverses qui ne sont pas exacts pour l'étude de la structure composite hétérogène analysée, car on a utilisé $k_1 = k_2 = 5/6$, valeur caractéristique des structures composites homogènes.

De plus, une autre conclusion que nous pouvons tirer des Tableaux 4.7 et 4.8, est l'importance de l'utilisation des couches contraintes pour l'augmentation des facteurs d'amortissement finaux des structures composites sandwichs. Selon les deux tableaux, l'augmentation du facteur d'amortissement final n'est bien captée pour les théories *HSDT* et *FSDT*, que si le ratio $h_v/h_t \leq 20$ et température de $90^\circ C$, et si la ratio $h_v/h_t \leq 20$ et température de $30^\circ C$. Les Figures 4.8, 4.9, 4.10 et 4.11 illustrent les données fournies à $30^\circ C$ et à $90^\circ C$, par les Tableaux 4.7 et 4.8, en utilisant les théories *HSDT* et *FSDT*, où leurs lignes continues et pointillées représentent, respectivement, la variation des fréquences propres et des facteurs d'amortissement pour différents ratios h_v/h_t .

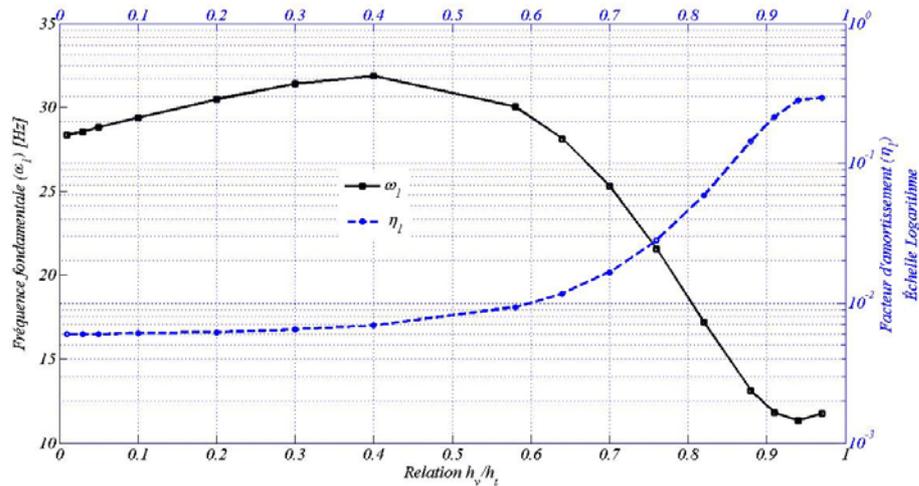


Figure 4.8 - Relation entre fréquence fondamentale et facteur d'amortissement dépendants du ratio h_v/h_t de la plaque composite à $90^\circ C$, formulée par la théorie *HSDT*.

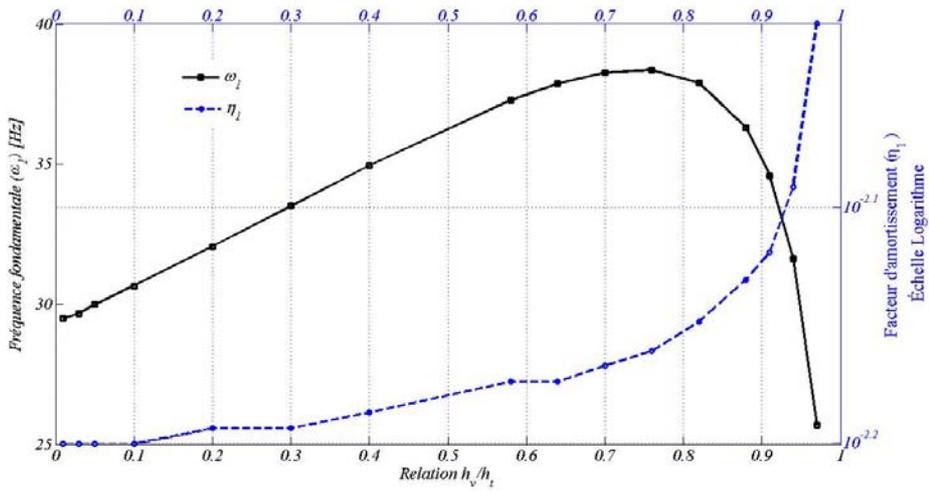


Figure 4.9 - Relation entre fréquence fondamentale et facteur d'amortissement dépendants du ratio h_v/h_t de la plaque composite à $90^\circ C$, formulée par la théorie *FSDT*.

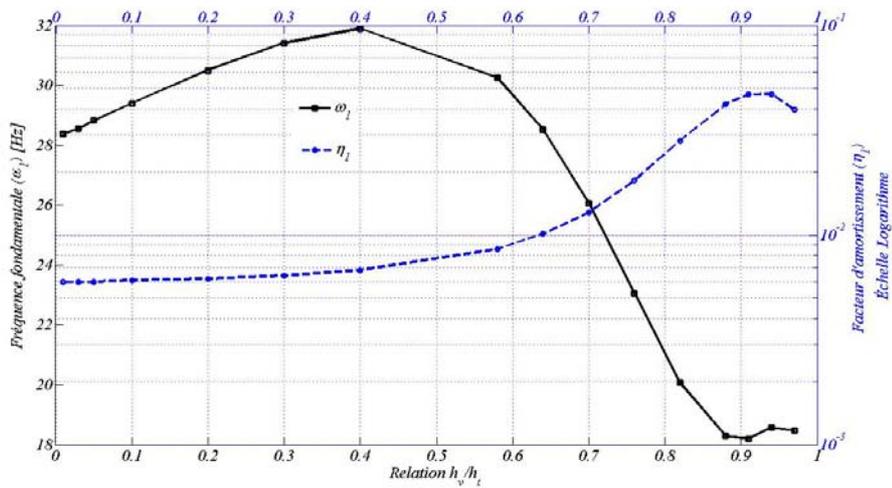


Figure 4.10 - Relation entre fréquence fondamentale et facteur d'amortissement dépendants du ratio h_v/h_t de la plaque composite à $30^\circ C$, formulée par la théorie *HSDT*.

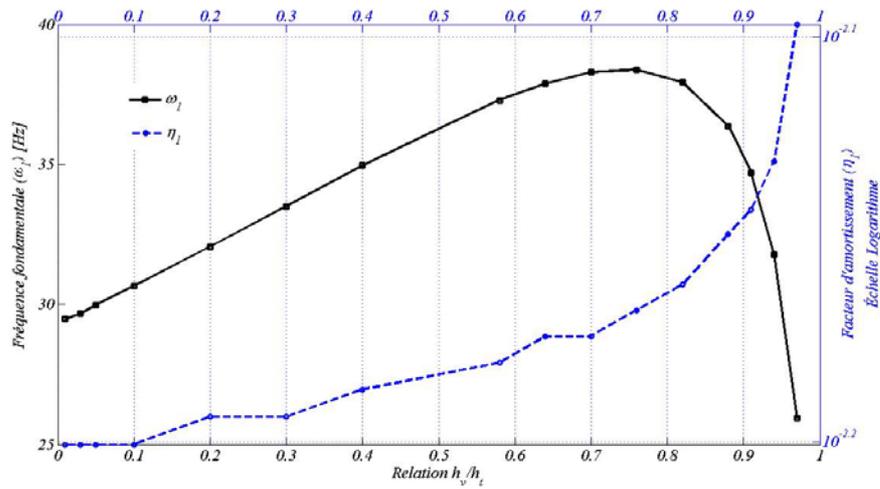


Figure 4.11 - Relation entre fréquence fondamentale et facteur d'amortissement dépendants du ratio h_v/h_t de la plaque composite à 30°C , formulée par la théorie *FSDT*.

On peut constater sur les Figures 4.8, 4.9, 4.10 et 4.11 que, plus le ratio h_v/h_t est grand (c'est-à-dire, plus l'épaisseur de la couche contrainte viscoélastique est importante) plus les valeurs des facteurs d'amortissement sont grands et plus les valeurs des fréquences fondamentales sont petites. Ceci confirme les résultats de l'exemple précédent sur l'importance de traitement viscoélastiques internes par rapport à l'amortissement intrinsèque dans l'amortissement final des structures composites sandwichs. Toutefois, la vérification de la diminution de la fréquence fondamentale avec l'augmentation du ratio h_v/h_t , peut être due à une perte de rigidité de la structure à cause de l'augmentation de l'épaisseur de la couche contrainte viscoélastique.

Une autre étude concernant la variation des propriétés géométriques, comme le ratio entre la largeur (a) et l'épaisseur totale de la structure (h_t), avec $h_v/h_t = 0,58$, a été réalisée en utilisant les théories *FSDT* et *HSDT*, et les résultats obtenus sont illustrés dans les Tableaux 4.9 et 4.10.

Tableau 4.9 - Première fréquence propre et facteur d'amortissement pour différents ratios a/h_t ,
avec $h_v/h_t = 0,58$, à $90^\circ C$.

a/h_t	<i>HSDT-Reddy</i>		<i>HSDT</i>		<i>FSDT</i>	
	ω_1 (Hz)	η_1	ω_1 (Hz)	η_1	ω_1 (Hz)	η_1
5	-	-	82,353	0,0123	123,740	0,008
10	32,23	0,009	30,065	0,0094	37,282	0,0067
25	-	-	5,923	0,0065	6,437	0,0061
50	-	-	1,551	0,0059	1,640	0,0059
75	-	-	0,700	0,0058	0,735	0,0059
100	-	-	0,399	0,0058	0,416	0,006
150	-	-	0,181	0,0060	0,188	0,0061
200	-	-	0,105	0,0062	0,108	0,0063
250	-	-	0,069	0,0065	0,071	0,0065
300	-	-	0,050	0,0068	0,051	0,0068
350	-	-	0,038	0,0072	0,038	0,0071
400	-	-	0,030	0,0075	0,030	0,0073
450	-	-	0,025	0,0078	0,025	0,0076
500	-	-	0,021	0,0081	0,021	0,0079

Tableau 4.10 - Première fréquence propre et facteur d'amortissement pour différents ratios
 a/h_t , avec $h_v/h_t = 0,58$ et à $30^\circ C$.

a/h_t	<i>HSDT-Reddy</i>		<i>HSDT</i>		<i>FSDT</i>	
	ω_1 (Hz)	η_1	ω_1 (Hz)	η_1	ω_1 (Hz)	η_1
5	-	-	83,221	0,0109	123,830	0,0079
10	32,33	0,009	30,253	0,0086	37,293	0,0066
25	-	-	5,934	0,0064	6,438	0,0060
50	-	-	1,552	0,0059	1,640	0,0059
75	-	-	0,701	0,0058	0,735	0,0059
100	-	-	0,399	0,0058	0,416	0,0059
150	-	-	0,181	0,0060	0,188	0,0061
200	-	-	0,105	0,0062	0,108	0,0063
250	-	-	0,069	0,0065	0,071	0,0065
300	-	-	0,050	0,0068	0,051	0,0068
350	-	-	0,038	0,0071	0,038	0,0071
400	-	-	0,030	0,0075	0,030	0,0073
450	-	-	0,025	0,0078	0,025	0,0076
500	-	-	0,021	0,0081	0,021	0,0079

Grâce aux résultats numériques fournis dans les Tableaux 4.9 et 4.10, on peut constater que pour de grandes valeurs du ratio a/h_t , c'est-à-dire pour des plaques composites minces, les valeurs numériques du facteur d'amortissement η_1 et de la fréquence propre ω_1 obtenus par les deux théories, *HSDT* et *FSDT*, sont proches. Cependant, pour de petites valeurs du ratio a/h_t , c'est-à-dire pour des plaques composites épaisses, les valeurs du facteur d'amortissement et de la fréquence fondamentale obtenues au travers de deux théories s'éloignent.

Ainsi, pour la formulation de plaques composites sandwichs épaisses, la théorie *HSDT* est plus appropriée que la théorie *FSDT*, en raison surtout, que cette dernière utilise un champ de déplacements moins riche en fonctions d'approximation en z . Avec la réduction de l'épaisseur du stratifié, les deux théories ont des réponses dynamiques (fréquences propres et facteurs d'amortissement) plus proches, indiquant qu'on peut utiliser la théorie *FSDT* sans grosses pertes de précision numérique.

Les Figures 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15 illustrent les valeurs fournies à 30°C et à 90°C , respectivement, par les Tableaux 4.9 et 4.10 et en utilisant les théories *HSDT* et *FSDT* pour la modélisation de la structure composite étudiée, où les lignes continues et pointillées présentées dans les deux figures sont, respectivement, la variation de *fréquence fondamentale* et la *variation du facteur d'amortissement* par rapport à différents ratios a/h_t .

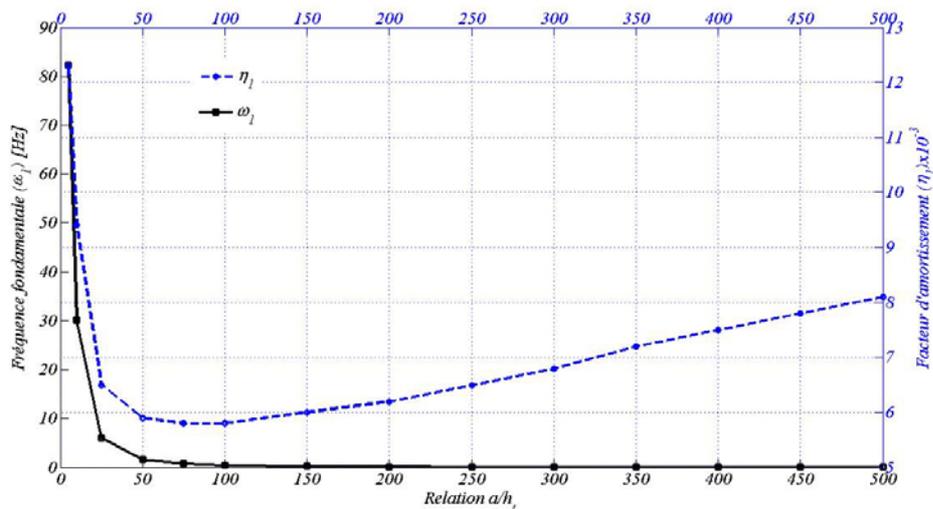


Figure 4.12 - Variation de la fréquence fondamentale et du facteur d'amortissement en fonction du ratio a/h_t pour la structure composite à 90°C , avec $h_t/h_v = 0,58$ et en utilisant la théorie *HSDT*.

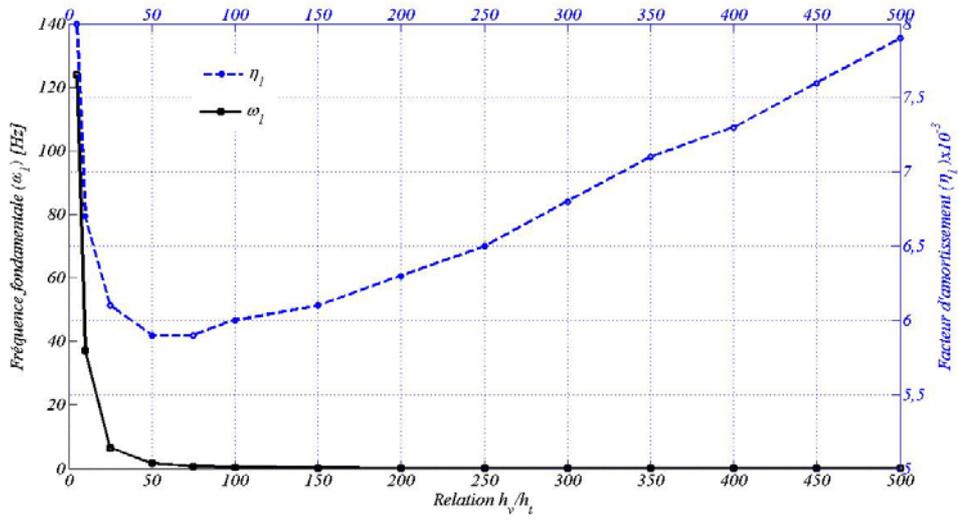


Figure 4.13 - Variation de la fréquence fondamentale et du facteur d'amortissement en fonction du ratio a/h_t pour la structure composite à $90^\circ C$, avec $h_v/h_t = 0,58$ et en utilisant la théorie *FSDT*.

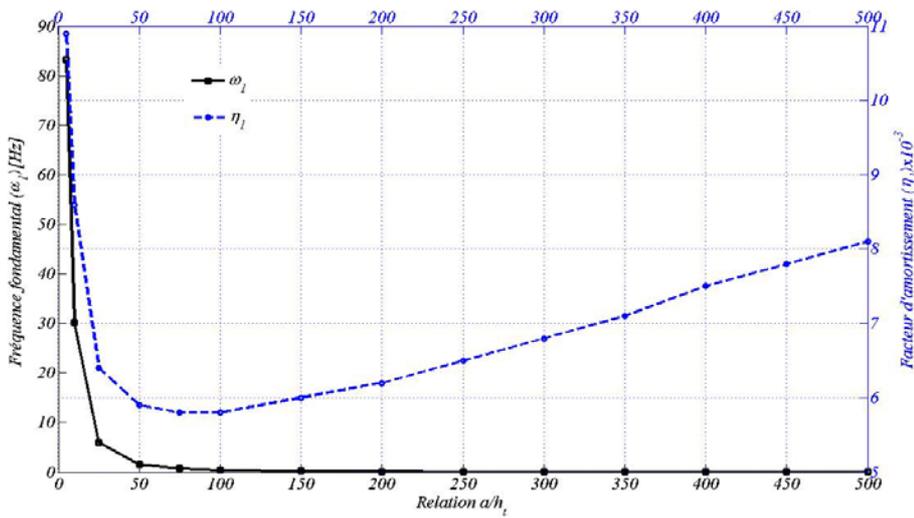


Figure 4.14 - Variation de la fréquence fondamentale et du facteur d'amortissement en fonction du ratio a/h_t pour les structures composite à $30^\circ C$, avec $h_v/h_t = 0,58$ et en utilisant la théorie *HSDT*.

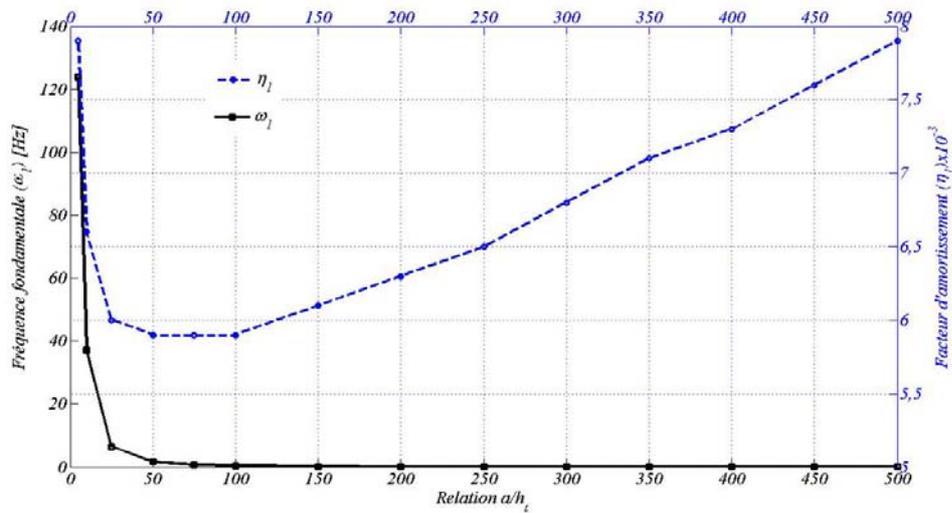


Figure 4.15 - Variation de la fréquence fondamentale et du facteur d'amortissement en fonction du ratio a/h_t pour la structures composite à $30^\circ C$, avec $h_v/h_t = 0,58$ et en utilisant la théorie *FSDT*.

4.9.3 Le modèle d'ordre fractionnaire appliqué aux formulations par éléments finis de structures amorties par matériau viscoélastique

La validation numérique des algorithmes présentés dans la section 4.5 de ce mémoire pour l'étude dans le domaine temporel des structures sandwichs est faite premièrement en tenant compte de l'exemple numérique présenté par Galucio et al. (2004). La simulation est réalisée en utilisant une barre viscoélastique encastree-libre de $L = 500$ mm de longueur, $b = 50$ mm de largeur et $h = 50$ mm d'épaisseur, comme celle illustrée par la Fig. 4.16 (A).

La structure est discrétisée en utilisant les éléments finis formulés par les théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT* et dont le modèle est constitué de 20×1 éléments finis, 103 nœuds, avec 5 degrés de liberté (théorie *FSDT*), 11 degrés de liberté (théorie *HSDT*) ou 9 degrés de liberté (théorie *Layerwise-FSDT*) par nœud.

Les résultats numériques obtenus par les deux théories sont comparés à partir des données fournies par Galucio et al. (2004) en utilisant la formulation classique de la *théorie des poutres de Timoshenko*.

Les propriétés mécaniques relatives au matériau viscoélastique sont égales à : $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $E_0 = 7 \text{ MPa}$, $E_\infty = 10 \text{ MPa}$, et $\tau = 20 \text{ ms}$.

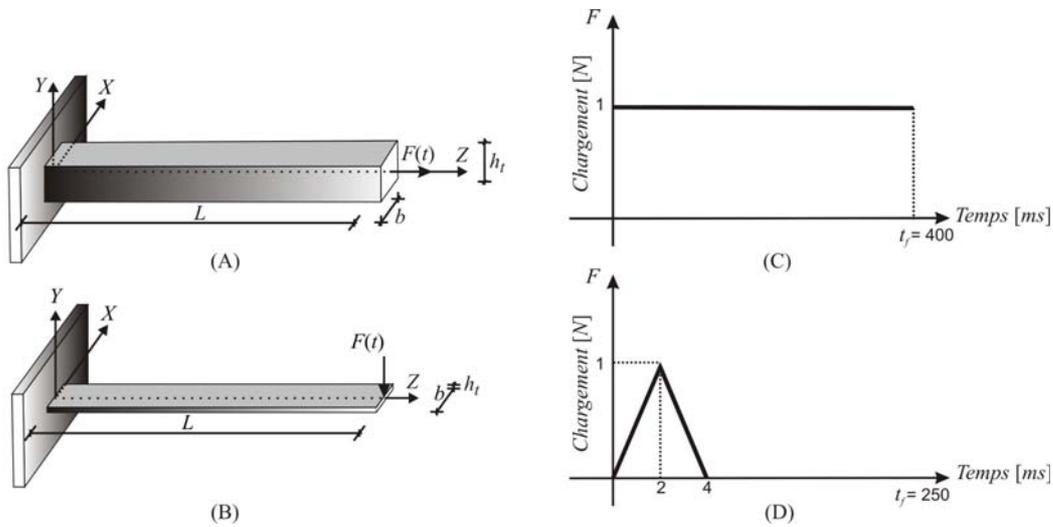


Figure 4.16 - Structures implémentées (A, B) et leurs historiques de chargement respectifs (C, D).

L'équation du mouvement du système amorti qu'inclue le modèle viscoélastique de DF proposé par Galucio et al. (2004) et qui est utilisée pour la modélisation de structures entièrement viscoélastiques, est fournie dans l'équation (4.45). Celle-ci est écrite dans le domaine temporel et résolue en employant l'algorithme *d'intégration explicite de Newmark*, fourni dans le Tableau 4.1.

La barre viscoélastique est soumise à une charge de traction unitaire, appliquée à son extrémité libre, Fig. 4.18 (C), égale à : $F(t) = 1H(t)$ N, où $H(t)$ est la *fonction de Heaviside*.

Le temps final Δt utilisé adopté dans les simulations numériques est de 400 ms et l'incrément de temps Δt employé est de 1 ms. L'ordre utilisé de la dérivée fractionnaire est égal à $\alpha = 0,5$ et on considère les cinquante premiers points ($N_t = 50$) de l'*historique des déformations anélastiques* pour le calcul de la discrétisation de l'opérateur fractionnaire des théories *FSDT*, *HSDT*, *Layerwise-FSDT* et de *Timoshenko*.

La Figure 4.17 illustre le déplacement axial obtenu à l'extrémité libre de la barre viscoélastique en fonction du temps, qui est obtenue en employant l'algorithme *d'intégration explicite de Newmark*, fourni dans le Tableau 4.1, en comparaison avec l'algorithme *d'intégration implicite de Newmark* utilisé dans la publication de Galucio et al. (2004).

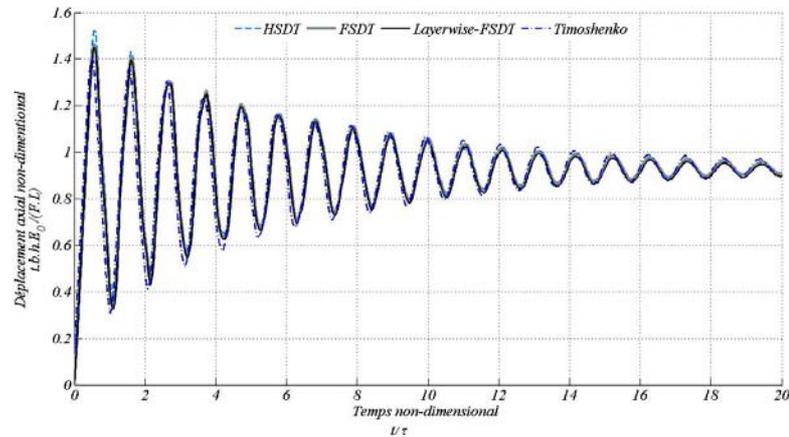


Figure 4.17 - Comparaison entre les déplacements axiaux normalisés obtenus par différentes formulations numériques de la barre viscoélastique.

On peut vérifier sur la Fig. 4.17 que les trois modèles éléments finis formulés, soit de la théorie *HSDT* soit de la théorie *FSDT* soit de la théorie *Layerwise-FSDT*, fournissent des réponses dynamiques très proches à celle fournie par Galucio et al. (2004).

De plus, les résultats illustrés sur la Fig. 4.17 permettent la validation de la méthodologie des *DF* avec les théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT* dans le cas de la modélisation par éléments finis d'une structure simple, composée d'un seul matériau viscoélastique et soumise à un chargement de traction.

La deuxième simulation numérique réalisée utilise une poutre sandwich ($200 \times 10 \times 2,2 \text{ mm}$) encastree-libre constituée d'une couche centrale en matériau viscoélastique à 27°C insérée entre deux peaux d'aluminium (Figure 4.16 (B)). La simulation est réalisée dans le domaine temporel où les réponses impulsionnelles en flexion sont comparées avec la simulation numérique présentée dans la publication de Galucio et al. (2004). Les résultats numériques obtenus par l'utilisation des trois théories (*FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*) implémentées numériquement par éléments finis, sont comparés aux données numériques fournies par Galucio et al. (2004) qui utilisent la formulation classique de la *théorie des poutres de Timoshenko*, pour la formulation numérique de la couche viscoélastique, et de la *théorie d'Euler*, pour la formulation des deux couches métalliques externes.

La couche centrale en matériau viscoélastique et chaque couche externe en aluminium ont, respectivement, 0,2 mm et 1 mm d'épaisseur. Les propriétés mécaniques du matériau

de la peau d'aluminium sont égales à $\rho = 2690 \text{ kg/m}^3$, $E = 70,3 \times 10^3 \text{ MPa}$ et $\nu = 0,345$ et celles du noyau viscoélastique sont $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,5$, $E_0 = 1,5 \text{ MPa}$, $E_\infty = 69,9495 \text{ MPa}$, $\alpha = 0,7915$ et $\tau = 1,4052 \times 10^{-2} \text{ ms}$.

L'équation du mouvement du système amorti utilisée pour la modélisation de structures sandwichs à trois couches, où une entièrement viscoélastique, incorpore le modèle viscoélastique de *DF* proposé par Galucio et al. (2004), fournie par l'équation (4.48). Cette équation, écrite dans le domaine temporel, est résolue dans ce mémoire en employant l'algorithme *d'intégration explicite de Newmark*, fourni dans le Tableau 4.1.

L'extrémité libre de la poutre sandwich est soumise à une charge d'impulsion triangulaire, comme l'illustre la Fig. 4.16 (D), appliquée dans la direction *Y* d'après la Fig. 4.16 (B).

Pour cette application numérique à la résolution du système dynamique amorti résultant on utilise *l'algorithme d'intégration numérique explicite de Newmark*, décrit dans le Tableau 4.1 (Parties A et B), tandis que Galucio et al. (2004) utilisent leur version *implicite d'algorithme d'intégration de Newmark*. Le temps final de simulation numérique adopté est $T = 250 \text{ ms}$ et l'incrément de temps utilisé est $\Delta t = 0,25 \text{ ms}$. On utilise $N_t = 50$ pour l'historique des déformations anélastiques du matériau viscoélastique en utilisant les trois théories formulées.

Les réponses en déplacement dans la direction *Y* de la poutre sandwich excitée par le chargement triangulaire obtenues par la formulation par éléments finis de la structure en utilisation les théories *FSDT*, *HSDT*, *Layerwise-FSDT* et de *Timoshenko-Euler* adaptées par Galucio et al. (2004), sont montrées dans la Fig. 4.18.

Les courbes permettent de vérifier la bonne convergence des résultats numériques entre les théories *Layerwise-FSDT* et de *Timoshenko-Euler*, cependant en utilisant les deux autres théories (*FSDT* et *HSDT*) on ne peut pas capter l'amortissement introduit par le traitement viscoélastique.

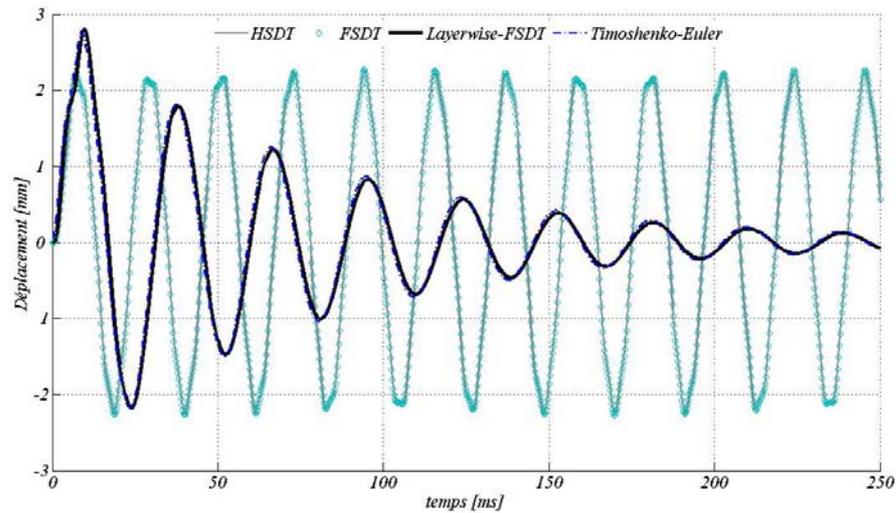


Figure 4.18 - Comparaisons entre la réponse transitoire des théories *FSDT*, *HSDT*, *Layerwise-FSDT* et de *Timoshenko-Euler*.

Les résultats numériques présentés dans la section 4.9.3 montrent que les deux théories, *FSDT* et *HSDT*, sont proches de celles de la littérature. Dans l'exemple précédent, la structure travaille en traction pure et est composée d'un matériau unique. Toutefois, dans cet exemple, la structure travaille en flexion et est composée de deux différents matériaux selon son épaisseur. Ainsi, on peut confirmer que les formulations *FSDT* et *HSDT*, sans l'imposition des conditions de continuité des déplacements mécaniques selon l'épaisseur de la structure modélisée (adoptée dans la théorie *Layerwise-FSDT*), ne se rapprochent pas des résultats de la littérature.

4.9.4 Réponses harmoniques et transitoires de poutres sandwichs

Afin d'illustrer quelques applications numériques du modèle *DF* ou *MC* du matériau *ISD112™* précédent, quelques applications numériques sont proposées. On utilise la poutre sandwich traitée avec une couche viscoélastique illustrée par la Fig. 4.16 (B), excitée par une impulsion triangulaire appliquée dans les domaines temporel et fréquentiel sur son extrémité libre, comme indiqué sur la Fig. 4.16 (D).

La couche centrale viscoélastique et chaque des deux couches extérieures en aluminium ont, respectivement, 0,2 mm et 1 mm d'épaisseur. Les propriétés mécaniques de l'aluminium de la peau sont : $\rho = 2690 \text{ kg/m}^3$, $E = 70,3 \times 10^3 \text{ MPa}$ et $\nu = 0,345$ et celles du noyau viscoélastique sont : $\rho = 950 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,50$. Les autres paramètres du *ISD112™* nécessaires à

la formulation DF du matériau viscoélastique pour l'étude dans le domaine temporel et appliqué à $27^\circ C$ sont fournis par le Tableau D.1 de l'Annexe D.4. Les paramètres sont obtenues par la procédure de lissage de courbes expérimentales.

Le modèle global de la poutre sandwich est discrétisé par 20×1 éléments finis, 103 nœuds, avec 5 (théorie $FSDT$), 9 (théorie $Layerwise-FSDT$) ou 11 (théorie $HSDT$) degrés de liberté par nœud.

La réponse transitoire du système amorti est obtenue pour l'extrémité libre de la poutre sandwich dans la direction Y , (Figure 4.16 (B)), obtenue en utilisant l'intégration numérique explicite de Newmark, est illustrée dans la Fig. 4.19. Le temps final de simulation numérique est $T = 250$ ms et l'incrément de temps utilisé est $\Delta t = 0,25$ ms. On adopte $N_t = 50$ pour l'historique des déformations anélastiques du matériau viscoélastique en utilisant les trois théories formulées.

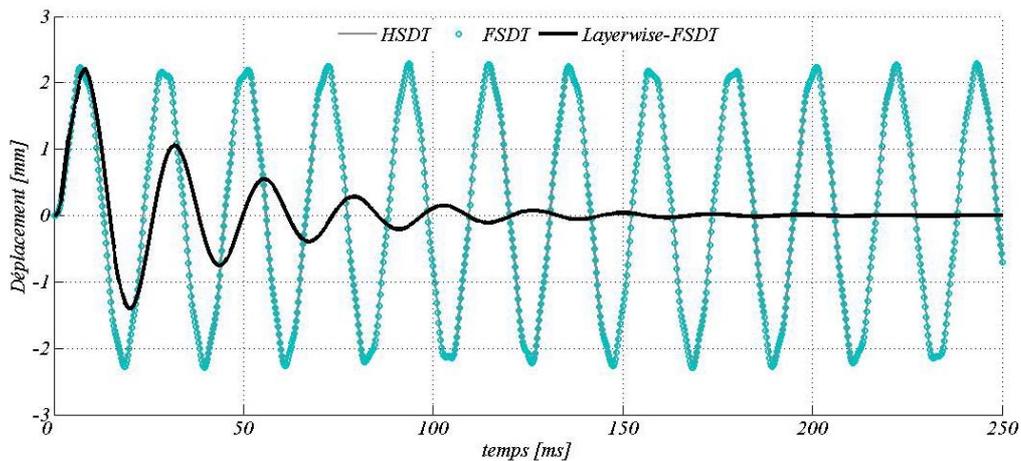


Figure 4.19 - Réponse transitoire du modèle DF avec les théories $FSDT$, $HSDT$ et $Layerwise-FSDT$ de la poutre sandwich à $27^\circ C$.

La Figure 4.20 montre les amplitudes des *Fonctions de Réponse Fréquentielle (FRFs)*, dans la bande de fréquence 0 à 1000 Hz comprenant les cinq premières fréquences propres de la poutre sandwich à différentes températures, formulée avec la théorie $Layerwise-FSDT$ et obtenue par la résolution de l'équation (4.54). À l'extrémité libre de la poutre, est appliquée une charge unitaire, dans la direction Y , et la réponse est obtenue sur le ddl de translation au point d'application de la force d'excitation.

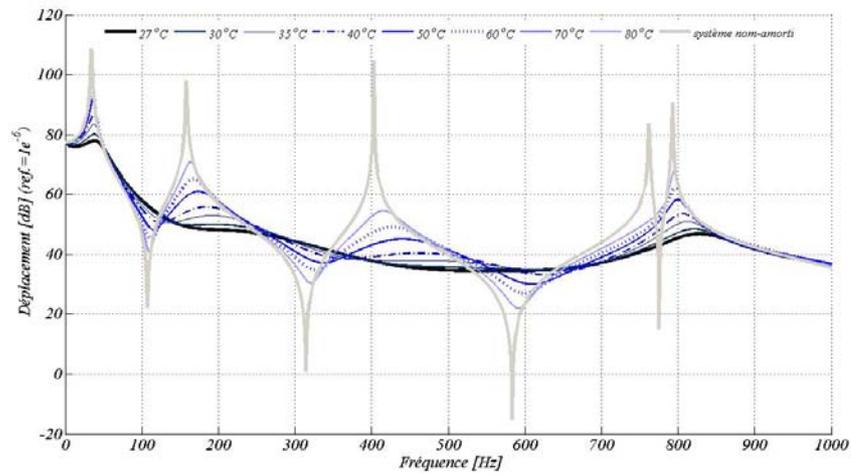


Figure 4.20 - FRFs de la poutre sandwich pour différentes températures, obtenues en utilisant la théorie *Layerwise-FSDT* – *ddl* translation en face de la force d'excitation.

La Figure 4.21 illustre le spectre en fréquence et en température de la poutre sandwich encastrée-libre, traitée par noyau viscoélastique. Elle représente les variations en fréquence et en température des amplitudes de vibration du système amorti.

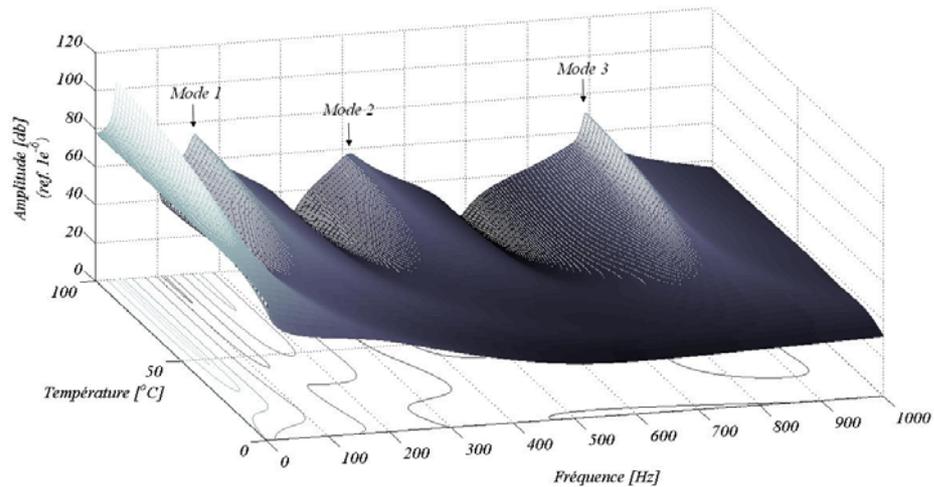


Figure 4.21 - Spectre en fréquence et en température de la poutre sandwich traitée par matériau viscoélastique et modélisée par éléments finis en utilisant la théorie *Layerwise-FSDT* avec le modèle *MC*.

À travers les changements des fréquences propres et des amplitudes de vibration du système amorti observés dans la Fig. 4.21, on déduit que les propriétés mécaniques de la structure sandwich avec matériau viscoélastique ISD112TM sont fortement dépendantes de la température et de la fréquence d'excitation.

En outre, la Figure 4.22 présente le spectre des amplitudes de vibration au long du temps d'excitation et avec différentes températures pour la même structure de poutre encastree-libre, traitée par noyau viscoélastique ISD112TM et dont les paramètres mécaniques associés au modèle *DF* sont obtenus par optimisation à chaque incrément de température dans la bande allant de 0 à 100 °C .

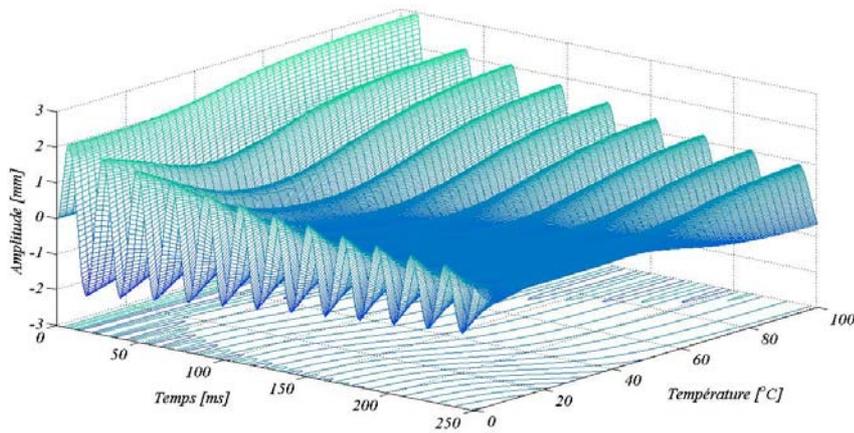


Figura 4.22 - Spectre des amplitudes de vibration dans le temps et en température de la poutre sandwich obtenu en utilisant la théorie *Layerwise-FSDT* avec le modèle *DF*.

La Figure 4.23 montre la réponse transitoire de la poutre encastree-libre obtenue pour quelques températures choisies entre 27 et 80 °C .

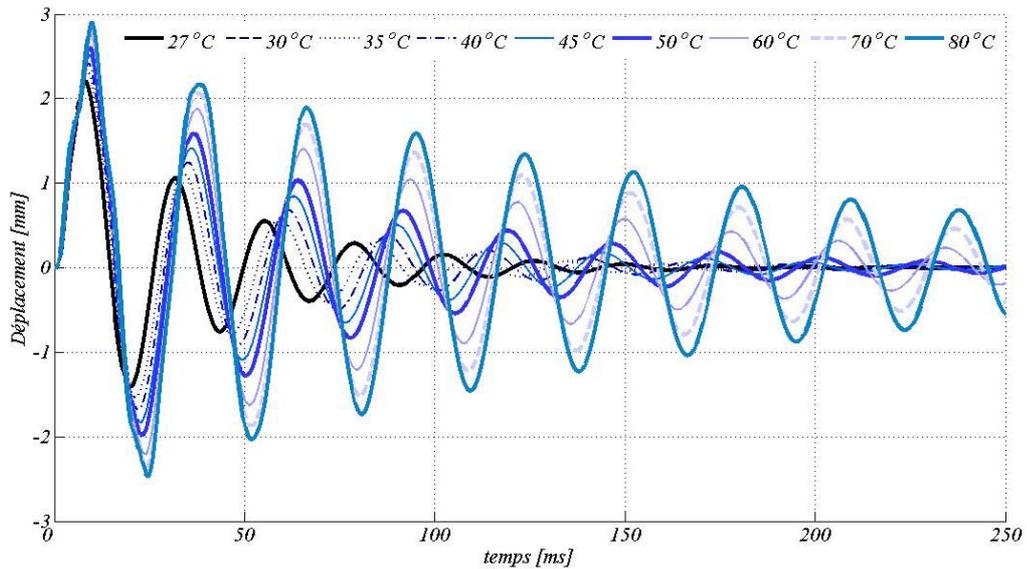


Figure 4.23 - Réponse temporelle de la poutre traitée par matériau viscoélastique à différentes températures en utilisant la théorie *Layerwise-FSDT* avec le modèle *DF*.

La Figure 4.23 montre que l'amortissement de la structure sandwich atteint sa valeur maximale à 27°C ce que confirme la réponse fréquentiel présentée Fig. 4.20. De plus, en se basant sur les amplitudes des *FRF* (Figure 4.20) et des *FRT* (Figure 4.23) nous pouvons évaluer les degrés d'influence de la fréquence, de la température et du temps d'étude sur le comportement mécanique de la structure modélisée.

4.10 Conclusions

Dans ce chapitre, on réalise un bilan des modèles utilisés pour représenter l'amortissement des matériaux viscoélastiques associés à la modélisation par éléments finis des structures composites amorties. On utilise les concepts du *PCEV* appliqué aux matériaux homogènes isotropes pour l'obtention de l'approche du *Module Complexe (MC)* destinée aux études dans le domaine fréquentiel. D'autre part, dans le domaine temporel on utilise les concepts du *Calcul Fractionnaire*, plus particulièrement pour introduire l'approche des *Dérivées Fractionnaires (DF)*. Ces modèles sont employés pour représenter le comportement des matériaux réels, après l'identification expérimentale de leurs paramètres. Les modèles *MC* ou

DF des matériaux viscoélastiques vont nous permettre de faire quelques applications numériques dans les domaines fréquentiel et temporel et de démontrer que le comportement du matériau viscoélastique est fortement dépendant des conditions environnementales de température et de fréquence d'excitation. Finalement, l'algorithme d'intégration explicite de Newmark par la résolution des systèmes dynamiques non-amortis dans le domaine temporel, avec de petits déplacements, est validé dans sa version implicite utilisée par Galucio (2004). De plus, dans ce chapitre on fournit l'introduction dans le contexte des éléments finis des traitements viscoélastiques et de l'amortissement intrinsèque des matériaux stratifiés en utilisant les théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*. Plus particulièrement, les théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT* sont utilisées pour la formulation de structures sandwichs (en trois couches), et les théories *FSDT* et *HSDT* pour la formulation par éléments finis de structures stratifiées et stratifiées sandwichs avec plusieurs plis.

Les applications numériques montrent que le choix de la théorie employée (*FSDT*, *HSDT* ou *Layerwise-FSDT*) est lié au *type de sollicitation* (axiale, de flexion ...) auquel la structure est soumise, ainsi qu'au *ratio entre sa largeur et son épaisseur* (c'est-à-dire si la structure est *mince, modérément épaisse ou épaisse*) et finalement à *son caractère homogène ou hétérogène* (c'est-à-dire sans ou avec matériau viscoélastique selon l'épaisseur de la structure composite). En se basant sur les simulations numériques réalisées on peut conclure que les déformations (ou contraintes) de cisaillement transverse (γ_{xz}, γ_{yz}) ne sont pas importantes, de telle façon que dans l'étude d'un matériau viscoélastique soumis à une traction pure, les deux théories *FSDT* et *HSDT* en couche équivalente unique ont des résultats numériques qui se rapprochent de ceux obtenus par la même structure modélisée avec la théorie *Layerwise-FSDT*. Par contre, dans le cas où les déformations (ou contraintes) de cisaillement transversal ne sont pas négligeables, c'est-à-dire dans le cas d'étude de structures hétérogènes du type sandwichs (ou alors stratifiées sandwich), les résultats numériques de la théorie des couches discrètes *Layerwise-FSDT* ne ressemblent pas à ceux qui sont obtenus avec les deux autres en couche équivalente unique (*FSDT* et *HSDT*) mais sont en conformité avec les résultats numériques trouvés dans la littérature. En utilisant la théorie *HSDT* pour la formulation numérique de l'amortissement intrinsèque de structures stratifiées épaisses, on peut constater la validation des résultats numériques concernant la fréquence fondamentale et le facteur d'amortissement par rapport à ceux fournis par les publications scientifiques. En utilisant les théories *FSDT* et *HSDT* pour la formulation numérique de *structures stratifiées sandwichs* amorties (avec plis stratifiés et un noyau viscoélastique) les fréquences propres et les facteurs d'amortissement obtenus

numériquement sont liés au ratio entre la largeur (a) et l'épaisseur totale (h_t). Plus le ratio a/h_t augmente (dans le cas des structures composites minces), plus les valeurs des fréquences propres et des facteurs d'amortissement obtenus par les deux théories se ressemblent. Toutefois, dans le cas de structures composites stratifiées hétérogènes amorties, les résultats sont attachés au ratio entre son épaisseur de la couche viscoélastique (h_v) et l'épaisseur totale (h_t). Plus le ratio (h_v/h_t) augmente plus les valeurs des fréquences propres et des facteurs d'amortissement obtenues par les théories *FSDT* et *HSDT* sont éloignées, car une influence plus importante du cisaillement transversal est observée sur les réponses de la structure analysée, qui par ailleurs n'est pas bien représentée par la théorie *FSDT*. Dans cette théorie, les *facteurs de correction des cisaillements transversaux*, ne sont pas bien corrigés, car on utilise la valeur usuelle ($5/6$) des structures composites homogènes fournie par Reddy (1997).

CHAPITRE V

MÉCANISMES D'ENDOMMAGEMENT DANS LES MATERIAUX COMPOSITES

5.1 Introduction

Les structures en matériaux composites ou métalliques (stratifié, sandwich, acier, aluminium ...) sont soumises à une grande variété de chargements mécaniques au cours de leur vie. Ces charges peuvent être dépendantes ou indépendante du temps, c'est à dire, peuvent être de nature statique ou dynamique. Au-delà des conditions de service pour lesquelles elles ont été conçues, dans le domaine statique ou dynamique, les structures composites peuvent développer différentes formes d'endommagement dans leurs éléments constitutifs à différentes échelles.

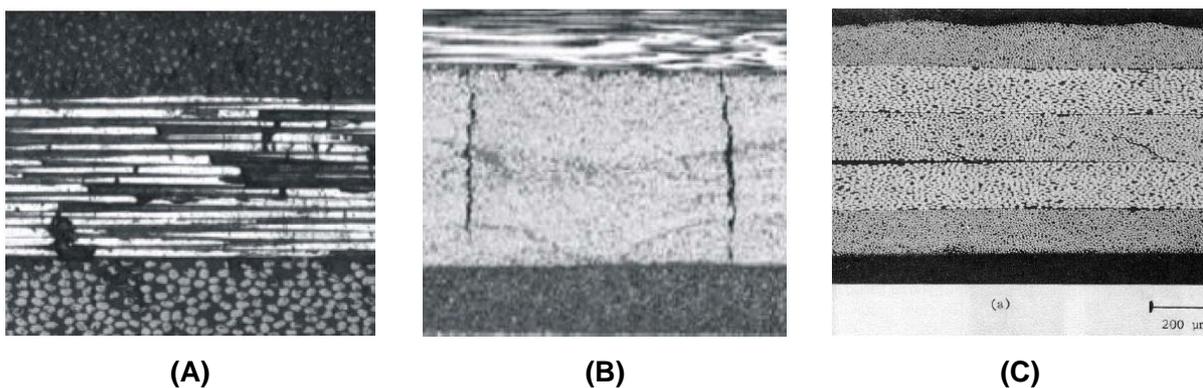


Figure 5.1 - Mécanismes d'endommagement dans le matériau stratifié : (A) fracture des fibres, (B) fissures réparties transversalement dans sa matrice et (C) délamination entre plis adjacents (figure adaptée de Rah (2007)).

La Figure 5.1 illustre les types les plus courants de mécanismes d'endommagement dans un matériau stratifié, ils sont caractérisés par l'existence de *fissures réparties de façon aléatoire dans la matrice*, par le *détachement des fibres*, par la *rupture des fibres*, par le *glissement entre les fibres et la matrice* ou par le *décollement entre plis adjacentes*.

Selon Reddy et Miravete (1995), la fissuration dans la matrice du stratifié est considérée comme le premier mécanisme d'endommagement observé lorsqu'il est soumis à des charges sévères. Pour les plis orientés à 90° , la microfissuration de la matrice est simplement appelée de *microfissuration transversale*, car l'orientation des fissures produites est transversale à la direction du chargement appliqué sur le pli. Pour les stratifiés avec des fibres de verre incorporées dans une matrice d'époxy, les fissures apparaissent lorsque la déformation atteint environ 0,4%, et augmentent progressivement en taille (REDDY et MIRAVETE (1995)) jusqu'à la rupture de la structure.

La Figure 5.2 illustre l'ouverture de *fissures longitudinales* dans la matrice d'un pli de composite renforcé par des fibres longues et leur propagation dans la direction des fibres.

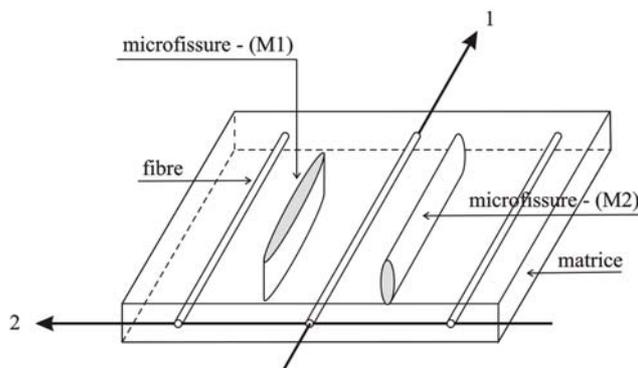


Figure 5.2 - Orientation des fissures dans une matrice polymère (figure adaptée de Boubakar et al. (2002)).

Selon Tandon et Pagano (1998), plus la fissuration de la matrice augmente, plus les contraintes de cisaillement dans l'interface entre les fibres et la matrice augmentent (et qui sont considérées constantes dans les modèles d'endommagement entre fibre-matrice de nombreux chercheurs) et conduisent au glissement à *l'interface fibre-matrice*. Ces contraintes de cisaillement peuvent être interprétées de deux points de vue différents : le premier comme un flux de *contraintes de décollement* provenant de la matrice, et le deuxième comme des

contraintes de friction dans l'interface fibres-matrices (XIAOYU et XIANGAN, 1999). Le processus d'endommagement dans l'interface fibre-matrice est un processus relativement important pour les matériaux stratifiés fragiles.

Pour les matériaux composites sandwichs et stratifiés, les contraintes de cisaillement aux interfaces peuvent provoquer un *endommagement par délaminage (glissement)*, surtout aux bords libres de la structure composite (REDDY, 1997).

La *rupture des fibres* est rarement modélisée en termes d'endommagement, car ce type d'*endommagement* se produit généralement dans la phase finale de rupture du pli (PERREUX et al., 1992).

Ces différents mécanismes d'endommagement sont étudiés dans le domaine de la *Mécanique de l'Endommagement*. Ces mécanismes d'endommagement sont pris en compte généralement à de *petites échelles* (appelées *micro-échelles*). L'augmentation des micro-défauts, l'interaction entre des mécanismes distincts d'endommagement et leurs évolutions, vont se manifester à de *grandes échelles* (appelées *macro-échelles*). Ces mécanismes, qui agissent seuls ou ensemble, peuvent provoquer une *diminution de la rigidité* et de la *résistance mécanique* du stratifié, et ainsi peuvent conduire à des *ruptures mécaniques* majeures de la structure composite, qui est le champ d'études de la *Mécanique de la Rupture*. Comme exemple de rupture mécanique provenant des mécanismes internes d'endommagement dans le matériau, on peut citer l'accident aérien en 1988 du Boeing 737-297 de la compagnie aérienne Aloha Airlines (Annexe E.1)

Afin de détecter ces petites fissures « cachées » et le vieillissement des structures composites, il est apparu nécessaire de mettre en place des techniques de contrôle de santé in situ et en temps réel, désignées sous le terme *Structural Health Monitoring (SHM)*. Ce sont des techniques non destructives d'inspection très prometteuses dans le secteur aérien et dans les autres secteurs industriels, tels que l'aérospatial, le transport, le pétrolier, la construction civile ou encore la communication. La technique de surveillance *SHM* peut être utilisée pour détecter par exemple de petites fissures qui peuvent exister sous la peinture des structures aériennes et des trains à grande vitesse, et dans la détection des zones de corrosion des tubes métalliques dans le secteur pétrolier. Cette technique utilise une maille de capteurs (par exemple piézo-électriques) pour l'extraction des paramètres de la structure sensibles à l'endommagement et ensuite celles-ci sont traitées statistiquement afin de déterminer l'état actuel du système analysé (TSURUTA, 2008).

Un outil numérique, souvent utilisé dans la phase de conception de diverses formes complexes, peut être employé pour identifier les mécanismes d'endommagement dans les structures composites ou métalliques : *la méthode des éléments finis (MEF)*.

Dans la littérature scientifique plusieurs *approches numériques* sont disponibles pour le modelage des structures composites, et celles-ci doivent être choisies en accord avec l'intérêt de l'étude. Selon Reddy et Miravete (1995), si nous nous intéressons à l'étude des mécanismes d'endommagement au niveau des fibres, de la matrice, ou entre les fibres et la matrice, ou encore entre les plis, les premiers mécanismes d'endommagement se produisent à l'échelle *micromécanique* et évoluent progressivement au niveau *macromécanique*. L'obtention du comportement global de la structure par l'utilisation de modèles éléments finis basés sur les phénomènes micromécanique est très consommatrice en temps de calcul et en place mémoire. On emploie alors des modèles mésoscopiques qui font le lien entre les phénomènes microscopiques observés au sein des constituants ou entre eux et l'échelle macroscopique du calcul qui se situera au niveau du pli.

Ce chapitre traite de l'étude de la formulation mathématique, de l'incorporation dans la méthode des éléments finis et de la propagation dans le domaine temporel, d'un mécanisme d'endommagement de matrice dans un composite renforcé par des fibres longues.

Le problème de la réduction de la rigidité et la perte de résistance mécanique de la structure composite en présence de mécanismes d'endommagement dans la matrice du matériau stratifié a été étudié par plusieurs chercheurs et différentes approximations numériques furent proposées pour la modélisation numérique ou analytique de structures composites endommagées. Parmi elles, le *Modèle de Cisaillement* (d'anglais : *Shear Lag Models*), le *Modèle Variationnel* (*Variation Model*), le *Modèle d'élasticité* (*Elasticity Models*), le *Modèle d'auto-consistance* (*Self-Consistent Model*) et le *Modèle d'Endommagement Continuum* (*Continuum Damage Model - CDM*). Ces modèles sont présentés dans les travaux de Reddy et Miravete (1995), ainsi que leurs fondements théoriques. Dans ce chapitre on s'est intéressé à la formulation mathématique du dernier modèle *CDM* utilisant la *Mécanique des Milieux Continus* combinée aux *principes de la thermodynamique des processus irréversibles*.

On se limite dans ce mémoire à l'étude du mécanisme d'endommagement dans la matrice d'époxy d'un matériau stratifié renforcé par des fibres longues, et dont les propriétés mécaniques mesurées expérimentalement sont données dans les publications d'Ikonomopoulos et Perreux (2001) et de Boubakar et al. (2002). Le mécanisme d'endommagement du modèle

CDM est incorporé à la formulation par éléments finis, qui par ailleurs est formulée avec la théorie *FSDT*.

La *propagation* et la *quantification du mécanisme d'endommagement* sont modélisées dans le domaine temporel en utilisant une variable $D(\sigma, t)$ introduite dans la formulation par éléments finis de la structure endommagée. L'*équation du mouvement du système mécanique endommagé* résultant est étudiée dans le domaine temporel en utilisant la *méthode implicite d'intégration numérique de Newmark* couplée à la *méthode de Newton*. Les structures en forme de poutres et plaques composites en matériau stratifié sont modélisées par éléments finis avec la théorie *FSDT* incorporant le modèle *CDM*. On considère, dans cette étude de propagation et de quantification d'endommagement dans le domaine temporel.

5.2 Mécanisme d'endommagement dans le Milieu Continu

Initiée par Kachanov (1958) et Rabotnov (1959), la *Mécanique de l'Endommagement des Milieux Continus (MEMC)* n'a pas cessé de se développer. Cette branche de la mécanique, connue sous le nom de *Mécanique de l'Endommagement*, étudie la diminution des propriétés mécaniques du matériau en présence de fissures micro et mésoscopiques.

A l'*échelle microscopique*, l'endommagement est caractérisé par la rupture de liaisons moléculaires (ou atomiques) de manière non-uniforme et, plus l'endommagement s'accumule, plus la densité des liaisons moléculaires du matériau diminue. Par conséquent la relation contrainte-déformation devient non linéaire et le matériau ne supporte plus la même quantité de chargement qu'avant l'endommagement, ce qui peut conduire à la rupture du matériau (ROBBINS et CHOPRA, 2007). Ainsi, l'*échelle microscopique* est l'*échelle d'initialisation* des mécanismes de déformation et d'endommagement, tandis que l'*échelle mésoscopique* (celle du pli) est celle où les équations constitutives de la mécanique d'endommagement sont écrites, L'*échelle macroscopique* est l'*échelle du stratifié*, où sont constatés visuellement les effets de l'endommagement.

L'accumulation de l'endommagement n'est pas l'unique source de non-linéarité dans la relation contrainte-déformation des matériaux composites, un autre processus plus connu est la *plasticité*. Les différences phénoménologiques entre le comportement non-linéaire du matériau dans le cas de la progression de l'endommagement et dans le cas de la plasticité sont illustrées sur la Fig. 5.3 et discutées dans la séquence.

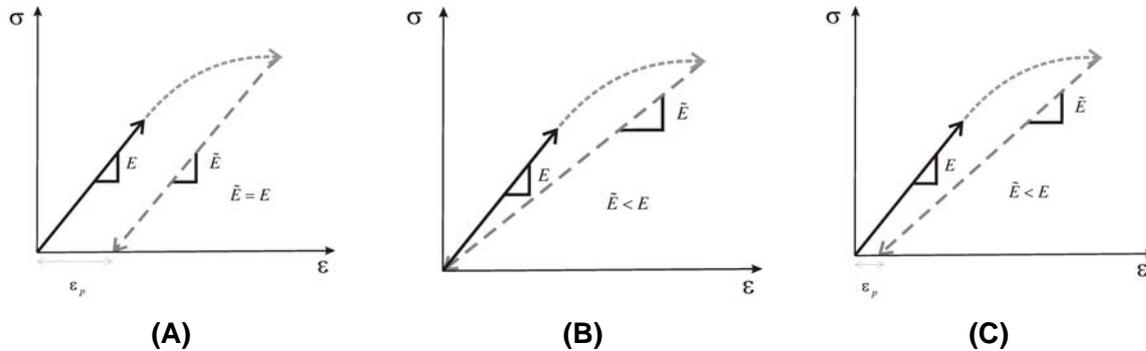


Figure 5.3 - Comportement non-linéaire du matériau composite : (A) plasticité, (B) endommagement et (C) plasticité et endommagement simultané.

La non-linéarité illustrée sur la Fig. 5.3 (A) est associée aux phénomènes de plasticité. Celle-ci est associée à l'apparition de plans de glissement dans le matériau qui provoquent une déformation plastique ε^p permanente. Toutefois, dans cette figure l'évolution de la plasticité n'affecte pas la densité des liaisons moléculaires à l'intérieur du matériau et ainsi il n'apparaît pas de réduction permanente de sa rigidité. Contrairement à la Fig. 5.3 (A), le comportement non linéaire montré sur la Fig. 5.3 (B) est du uniquement au mécanisme d'endommagement et le matériau présente une réduction permanente de sa rigidité mécanique. Après la suppression du chargement, le matériau endommagé ne présente pas de déformation permanente, comme dans le cas de la plasticité. Enfin, la Fig. 5.3 (C) illustre le comportement général non-linéaire du à l'association des deux phénomènes précédents, plasticité et endommagement ; on observe alors simultanément une perte de rigidité et une déformation plastique permanente.

Une des caractéristiques de la MEMC est l'étude et la définition de modèles constitutifs par différentes quantités, scalaires et/ou tensorielles qui nous permettent de quantifier les effets de la dégradation progressive dans le matériau.

Selon Allix et Hild (2002), un matériau à la méso-échelle (limite des équations constitutives de la MEMC), est dit endommagé lorsque des microfissures sont aléatoirement dispersées sur une grande portion de son volume. Ces microfissures diminuent en partie sa capacité à transférer les efforts mécaniques, et mènent à la consolidation du processus de fracture à l'échelle macroscopique avec l'apparition de fissures importantes, objets d'étude de la *Mécanique de la Fracture (MF)*.

En résumé, selon Hult (1988), la différence entre la *MEMC* et la *MF*, est que pour la première, la résistance de la structure est déterminée par l'évolution d'un champ de défauts (microfissures, vides ou pores) continûment distribués dans le matériau et pour la seconde, la résistance de la structure est déterminée par l'évolution d'un seul défaut (modélisé avec une petite fente aigue dont la position doit être préalablement prédite) dans un milieu mécaniquement intact. Dans la pratique, la *MEMC* permet la localisation des zones de probables défauts et l'évolution des microfissures avant la présence de fissures macroscopiques.

La *MEMC* étudie des quantités (contraintes, déformations ...) moyennes qui sont définies en points matériels définis dans un certain volume V , comme illustré sur la Fig. 5.4 (A).

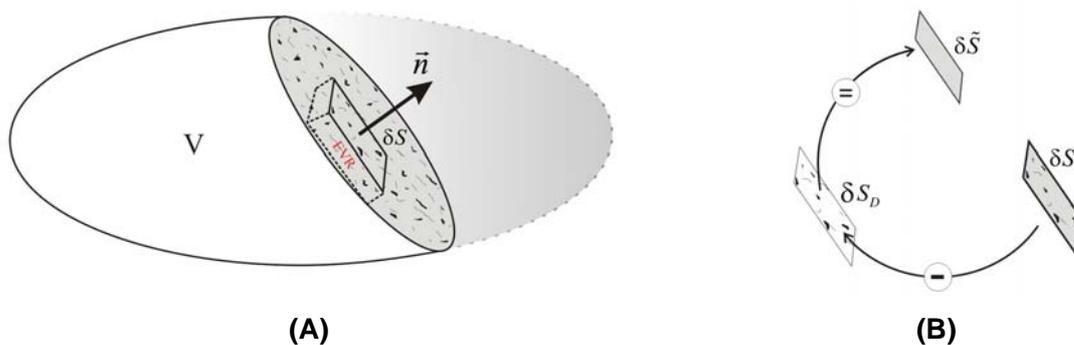


Figure 5.4 - Élément de volume représentatif (*EVR*) : (A) et l'aire totale des micro-défauts : (B).

Dans le matériau, est isolée une portion représentative de son volume, de taille plus grande que les discontinuités du matériau et suffisamment petite pour éviter la minimisation des gradients de déformations (FERREIRA, 2002). Ainsi, la représentation doit être adaptée aux valeurs moyennes des quantités observées.

Cette portion de volume, en méso-échelle, est appelée *d'Élément de Volume Représentatif (EVR)*. Les valeurs généralement adoptées pour les *EVR* sont, selon Lemaitre (1996), de : $0,1 \text{ mm}^3$ pour les métaux et céramiques, 1 mm^3 pour les polymères et composites, 10 mm^3 pour le bois et 100 mm^3 pour le béton. Ces valeurs sont plus larges que celles adoptées dans les problèmes classiques d'élasticité (dans l'ordre de μm) et plus petites comparées à l'échelle macroscopique. Elles doivent être respectées pour une représentation adéquate des modèles constitutifs de la *MEMC*. De plus, les sous-domaines considérés dans les formulations

numériques par éléments finis doivent être compatibles avec les définitions de l'EVR dans le but de réduire la dépendance de la solution au maillage (KRAJCINOVIC, 2000 et BA, 1998).

En général, l'endommagement est un phénomène beaucoup plus localisé que la déformation, car il est caractérisé par une perte de cohésion atomique (liaisons moléculaires), se limitant à certaines superficies, tandis que la déformation est caractérisée par le mouvement des atomes et plans cristallins dans le volume.

Les concepts basiques de l'EVR définis par la *Mécanique des Milieux Continus* sont étendus à la MEMC pour la définition d'un corps solide endommagé. Ceux-ci et d'autres concepts importants de la MEMC sont présentés dans les trois sections suivantes.

5.2.1 Paramètre scalaire d'endommagement

On définit δS comme l'aire d'une section transversale d'un EVR, identifiée par le vecteur normal \vec{n} , conformément à l'illustration de la Fig. 5.4 (B). Sur cette même figure, on peut également définir $\delta \tilde{S}$ ($\delta \tilde{S} < \delta S$), comme étant l'aire supportant effectivement la charge, c'est-à-dire la partie de l'aire qui ne comporte pas les vides associés aux micros défauts. Ainsi :

$$\delta S_D = \delta S - \delta \tilde{S} \quad (5.1)$$

où δS_D est l'aire totale des micro-défauts. On obtient alors un paramètre (variable) scalaire qui caractérise l'endommagement de la structure dans la direction \vec{n} en rapportant cette aire à l'aire globale de la section initiale :

$$D_{(\vec{n})} = \frac{\delta S_D}{\delta S} = 1 - \frac{\delta \tilde{S}}{\delta S} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\delta \tilde{S}}{\delta S} = 1 - D_{(\vec{n})} \quad (5.2)$$

L'équation (5.2) peut être réécrite en termes de volumes de microfissures aléatoirement distribuées dans le volume endommagé, sous la forme :

$$D_{(\vec{n})} = \frac{\delta V_D}{\delta V} \quad (5.3)$$

Les équations (5.2) et (5.3) représentent une variable scalaire de mesure mécanique d'endommagement en fonction du vecteur normal \vec{n} et qui de manière simplifiée peut présenter les valeurs :

$$\begin{aligned}
 0 < D_{\vec{n}} < 1 & \quad , \text{ qui représente l'état endommagé dans le matériau ;} \\
 D_{\vec{n}} = 0 & \quad , \text{ si le matériau ne présente aucune imperfection et ;} \\
 D_{\vec{n}} = 1 & \quad , \text{ dans le cas de rupture complète du matériau.}
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Dans le cas général de distribution anisotrope des micro-défauts dans le matériau, le paramètre scalaire d'endommagement est une fonction dépendant de la direction du vecteur \vec{n} . Dans le cas particulier isotrope ou transversalement isotrope, $D_{\vec{n}}$ ne dépend pas de la direction du vecteur \vec{n} , et ainsi il peut être représenté par une fonction scalaire D , c'est-à-dire $D_{\vec{n}} = D$. L'endommagement isotrope correspond à une distribution uniforme de microfissures dans le matériau.

5.2.2 Concept de contrainte effective – Équivalence en déformation

Pour passer de l'échelle microscopique des défauts à l'échelle de la modélisation, on considère un *EVR* et on tente de relier les grandeurs macroscopiques – contraintes et déformations – à la variable d'endommagement précédemment définie. Pour ce faire, on peut utiliser le *principe d'équivalence en contrainte ou en déformation*.

Revenons tout d'abord à une courbe de traction d'un matériau élastique endommagé (Figure 5.5). Lors du premier chargement, on constate une pente élastique E puis une non-linéarité dans la courbe qui nous amène au point A. En déchargeant on constate qu'on revient à l'origine en suivant une pente \tilde{E} . Lors du rechargement suivant, on suit le nouveau module \tilde{E} . Le matériau a gardé en mémoire le nouvel état élastique obtenu à la fin de la charge précédente.

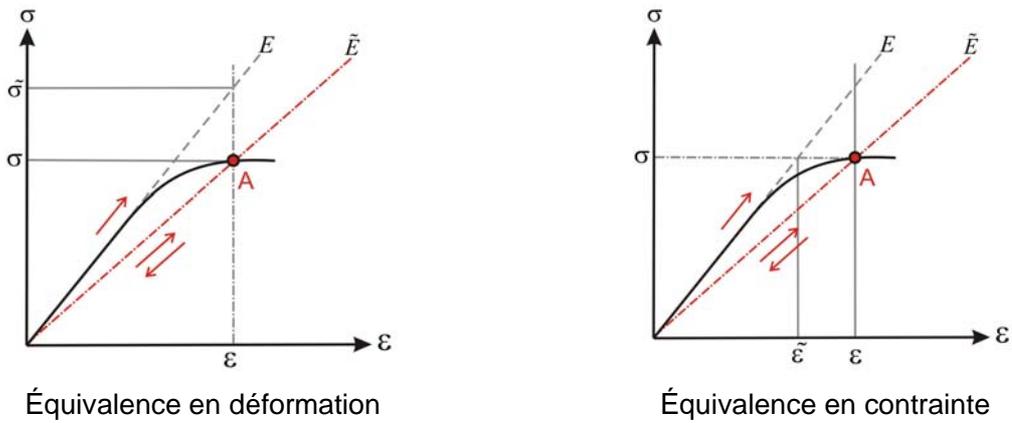


Figure 5.5 - Courbe de traction d'un matériau élastique endommagé.

Le concept d'équivalence en déformation repose sur l'idée qu'un matériau endommagé supporte moins bien la charge qu'un matériau vierge. Donc pour déformer ce matériau d'une manière équivalente quand il est vierge ou quand il est endommagé, l'effort (donc la contrainte) à exercer sur le matériau endommagé sera plus faible que celui (ou celle) à appliquer sur le matériau vierge. La *contrainte de Cauchy* σ s'exerce sur le matériau réel donc endommagé. On appelle $\tilde{\sigma}$ la *contrainte effective* associée à celle de Cauchy et s'exerçant sur le matériau vierge.

Logiquement, la contrainte effective doit être supérieure à la contrainte de Cauchy. On postule que le rapport entre ces deux contraintes est inversement proportionnel au rapport des surfaces sur lesquelles elles s'exercent :

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} = \frac{\delta S}{\delta \tilde{S}} \tag{5.5}$$

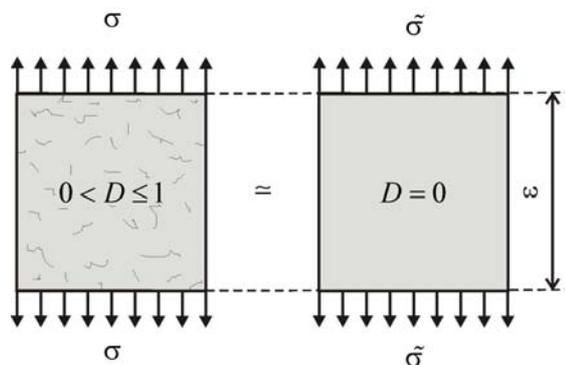


Figure 5.6 - Représentation du principe de l'équivalence en déformation.

La Figure 5.6 montre que dans le cas uni-axial, la déformation ε d'un matériau endommagé, soumis à la contrainte σ , est équivalente à la déformation qui est obtenue dans un matériau vierge, soumis à la contrainte effective $\tilde{\sigma}$.

Ainsi, dans le cas d'un chargement uni-axial, la loi constitutive pour un matériau isotrope endommagé, est donnée par l'expression :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\tilde{E}} \quad (5.6)$$

où ε est la déformation élastique uni-axiale et \tilde{E} est le coefficient d'élasticité ou module d'Young du matériau endommagé. Suite au principe d'équivalence en déformation, cette déformation est la même que celle obtenue par application de la contrainte effective sur le matériau vierge donc :

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} \quad (5.7)$$

En égalant les déformations, équations (5.6) et (5.7), et en tenant compte des équations (5.2) et (5.5), le rapport entre contrainte effective et contrainte de Cauchy devient, en chargement uni-axial :

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} = \frac{E}{\tilde{E}} = \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\tilde{\mathcal{S}}} = \frac{1}{1-D} \quad (5.8)$$

Le comportement élastique, plastique et viscoplastique du matériau endommagé peut alors être exprimé en utilisant la contrainte effective $\tilde{\sigma}$ au lieu de la contrainte de Cauchy σ et en travaillant sur le matériau vierge. Toutes les réponses en termes de déformations ε du matériau endommagé, dans le cas uni-axial, sont représentées par les équations constitutives du matériau vierge, en substituant la contrainte nominale σ par la contrainte effective correspondante $\tilde{\sigma}$.

De l'équation (5.8), on peut exprimer l'endommagement comme la variation relative des modules d'Young :

$$D = \frac{E - \tilde{E}}{E} = -\frac{\Delta E}{E} \quad (5.9)$$

Dans la pratique, la relation établie par l'équation (5.9) permet l'identification graphique des valeurs d'endommagement par des mesures expérimentales en essais uni-axiaux du module d'élasticité \tilde{E} .

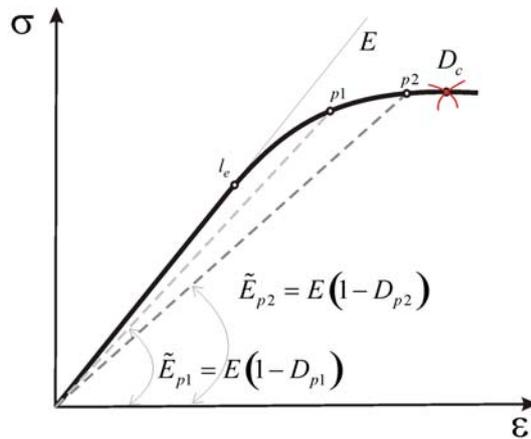


Figure 5.7 - Non-linéarité due à l'endommagement.

La Figure 5.7 illustre la courbe de la variation de la contrainte σ en fonction de la déformation ε dans un essai de traction. Entre les limites l_e , *limite de l'élasticité* et D_c , *endommagement à rupture*, le comportement du matériau n'est pas linéaire en raison de l'évolution du paramètre scalaire d'endommagement D . Pour quelques points de la courbe, tels que $p1$ et $p2$, les relations d'équivalence établies dans les équations (5.8) et ((5.9)) doivent être vérifiées. La détermination du module d'élasticité (E) et du module élastique endommagé (\tilde{E}_p) d'un point (p_n) quelconque dans la limite non-linéaire (l_e, D_c) permet d'identifier la valeur de la variable scalaire d'endommagement D_n à lui associer. Pour les deux points ($p1, p2$) en question, les valeurs de leurs variables d'endommagement (D_{p1}, D_{p2}) sont donnés par les expressions : $D_{p2} = (1 - \tilde{E}_{p2}/E)$ et $D_{p1} = (1 - \tilde{E}_{p1}/E)$. Ainsi, ces relations établies par les courbes permettent la validation statique de la mesure de l'endommagement.

Le *principe d'équivalence en contrainte* permet de définir une déformation effective d'une manière similaire à la contrainte effective : $\sigma = E\tilde{\varepsilon} = \tilde{E}\varepsilon$.

On en déduit alors la déformation effective :

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \frac{\tilde{E}}{E} = \varepsilon(1 - D) \quad (5.10)$$

5.3 Modèles Thermodynamiques

Le processus d'endommagement a un caractère évolutif et permanent et les modèles mathématiques conçus pour prédire le comportement de ce type de matériau sont basés sur les principes de la *thermodynamique des processus irréversibles (TPI)*. Les principes du *TPI* nécessaires pour la formulation du modèle d'endommagement en étude dans ce mémoire de thèse sont présentés dans l'Annexe E.2.

Le *potentiel de dissipation (cinétique)* est un potentiel dont on postule l'existence pour définir les lois d'évolution des variables internes (par exemple $\dot{r}, \dot{\alpha}, \dot{D}$ fournies dans le Tableau E1 de l'Annexe E.2). C'est une fonction à valeur scalaire, continue et convexe par rapport aux variables flux ($\dot{r}, \dot{\alpha}, \dot{D}$), les variables d'état pouvant intervenir comme paramètres.

Le travail rapporté dans ce mémoire a été réalisé à partir d'un matériau *élastique endommagé* et pour des sollicitations *isothermes*. Dans le cas d'un processus isotherme, où la dissipation plastique n'est pas considérée, la dissipation intrinsèque se réduit à :

$$Y\dot{D} \geq 0 \quad (5.11)$$

Soit $\pi(\dot{D})$ le potentiel de dissipation. Ce potentiel doit être positif, convexe et nulle à l'origine de l'espace des variables flux de telle sorte que la dissipation soit toujours positive. Les lois complémentaires des variables internes s'expriment par la propriété de normalité : *dissipativité normale* :

$$Y = \frac{\partial \pi}{\partial \dot{D}} \quad (5.12)$$

Compte tenu de l'hypothèse de continuité et de convexité du potentiel de dissipation, on assure la positivité de la dissipation car, dans ce cas la dérivée $\frac{\partial \pi}{\partial \dot{D}}$ est toujours du signe de \dot{D} .

On définit $\pi^*(Y)$ comme étant le potentiel dual de $\pi(\dot{D})$ par *transformation de Legendre-Fenchel* : $\pi^*(Y) = \sup_{\dot{D} > 0} (Y\dot{D} - \pi(\dot{D}))$, c'est à dire le potentiel exprimé en fonction de la variable duale de D . Ainsi, la force thermodynamique Y sera celle qui entraîne *la dissipation maximale*. Les fonctions π et π^* ne sont pas facilement accessibles car dissipées en chaleur.

Le principe de dissipation maximale conduit à définir un domaine pour la variable force thermodynamique associée à l'endommagement Y . Si le chargement est tel que cette force Y est à l'intérieur du domaine, il n'y aura pas d'évolution de la variable flux \dot{D} . Par contre, si le chargement entraîne la sortie de Y du domaine, alors il se produira un écoulement \dot{D} de la variable flux qui provoquera l'extension du domaine de manière à ce que Y reste en frontière de ce nouveau domaine.

La *fonction de charge* est la fonction définissant le domaine de non évolution s'exprime en fonction de la force thermodynamique et éventuellement des variables internes.

$$F(Y) = Y - \bar{Y} \quad (5.13)$$

avec $\bar{Y} = f(D)$ et $Y = -\frac{\partial \psi}{\partial D}$.

La fonction $f(D)$ doit être choisie positive pour respecter les conditions thermodynamiques. Sa forme dépend, comme pour la définition de ψ , d'observations expérimentales.

5.4 Modèle de comportement du matériau élastique endommagé

5.4.1 Élasticité endommagée

L'énergie libre spécifique pour le modèle utilisé est choisie sous la forme (BOUBAKAR et al., 2002) :

$$\psi = \frac{1}{2\rho} \underline{\underline{\varepsilon}}^e (\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{H}}(D))^{-1} \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{1}{2\rho} \underline{\underline{\varepsilon}}^e (\underline{\underline{\tilde{S}}})^{-1} \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (5.14)$$

Cette forme permet de rendre compte de l'augmentation de la souplesse du matériau avec l'endommagement par le tenseur $\underline{\underline{H}}$ appelé *tenseur endommagement*. On notera $\underline{\underline{\tilde{S}}}$ la souplesse endommagée. Comme on ne s'intéresse qu'au comportement élastique, la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ représente la déformation totale, on omettra alors l'exposant (e).

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^l = \underline{\underline{S}}^l \underline{\underline{\sigma}}^l \quad (5.15)$$

ou :

$$\underline{\underline{\sigma}}^l = (\underline{\underline{S}}^l)^{-1} \underline{\underline{\varepsilon}}^l = \underline{\underline{C}}^l \underline{\underline{\varepsilon}}^l \quad (5.16)$$

où l'exposant (l) indique que les grandeurs sont exprimées dans le repère d'orthotropie lié aux fibres. Les expressions $\underline{\underline{\sigma}}^l$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^l$ sont, respectivement, les formes *tenseurs des contraintes de Cauchy* et des *déformations élastiques*. Les tenseurs $\underline{\underline{C}}^l$ et $\underline{\underline{S}}^l$ sont respectivement, les *tenseurs de raideur* et de *souplesse* du matériau vierge.

Pour un matériau isotrope transverse vierge, le tenseur de souplesse vierge exprimée dans le repère d'orthotropie prend la forme :

$$\underline{\underline{S}}^l = [\underline{\underline{S}}^l] = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{t1}/E_t & -\nu_{t1}/E_t & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{1t}/E_1 & 1/E_t & -\nu_{1t}/E_t & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{1t}/E_1 & -\nu_{1t}/E_t & 1/E_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{tt} \end{bmatrix}; \quad -\frac{\nu_{t1}}{E_t} = -\frac{\nu_{1t}}{E_1} \quad (5.17)$$

où E_1 est le *module d'Young* dans la direction de la fibre (longitudinal) ; E_t est le *module d'élasticité* dans le plan isotrope transverse (2, 3) ; G_{1t} et G_{tt} sont, respectivement, les *modules de cisaillement* dans les plans (1, 2) (ou (1, 3)) et (2, 3) ; ν_{1t} , ν_{t1} et ν_{tt} sont les *coefficients de Poisson* du matériau.

Expérimentalement, selon Boubakar et al. (2002), l'endommagement dans les matériaux polymères renforcés par des fibres de verre longues, se présente sous forme de microfissures dans la matrice, orientées suivant la direction des fibres (Figure 5.2). L'effet de l'endommagement sur le comportement du matériau est introduit dans les composantes du tenseur des constantes d'élasticité $\underline{\underline{C}}^l$ ou de sa forme inverse $\underline{\underline{S}}^l$. Il est introduit en considérant les modes d'ouverture (M_I et M_{II}), représentés sur la Fig. 5.8.

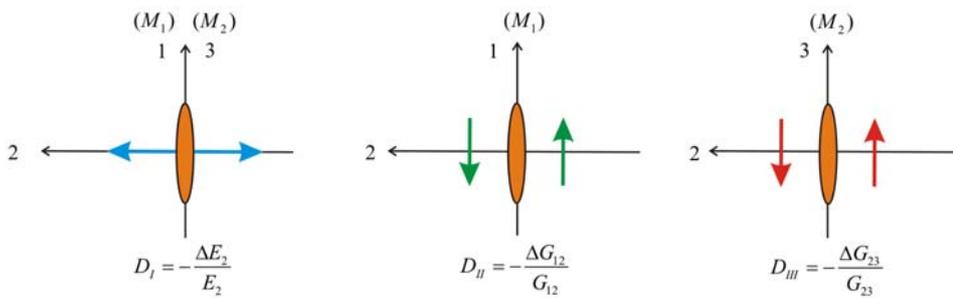


Figure 5.8 - Modes d'ouverture des microfissures (BOUBAKAR et al., 2002).

Les différents modes d'ouverture des microfissures entraînent la réduction des modules d'élasticité transverse ($E_t = E_2$), de cisaillement plan ($G_{1t} = G_{12}$) et de cisaillement transverse ($G_{tt} = G_{23}$) que l'on modélisera par l'introduction de trois paramètres (D_I, D_{II}, D_{III}) d'endommagement :

$$D_I = -\frac{\Delta E_2}{E_2} = 1 - \frac{\tilde{E}_2}{E_2} \quad (5.18)$$

$$D_{II} = -\frac{\Delta G_{12}}{G_{12}} = 1 - \frac{\tilde{G}_{12}}{G_{12}} \quad (5.19)$$

$$D_{III} = -\frac{\Delta G_{23}}{G_{23}} = 1 - \frac{\tilde{G}_{23}}{G_{23}} \quad (5.20)$$

Les quantités \tilde{E}_2 , \tilde{G}_{12} et \tilde{G}_{23} représentent les modules d'élasticité transverse, de cisaillement plan et transverse du matériau endommagé.

L'effet de l'endommagement sur le comportement élastique du matériau est introduit en utilisant le tenseur endommagement $\underline{\underline{H}}$. Les contraintes entraînant la chute des modules sont les composantes normale transverse σ_{22} , de cisaillement dans le plan σ_{12} , de cisaillement transverse σ_{23} . Ce tenseur doit permettre l'augmentation de la souplesse en augmentant les déformations produites par ces contraintes. On définit alors une souplesse endommagée $\underline{\underline{\tilde{S}}}'$ telle que :

$$\underline{\underline{\tilde{S}}}' = \underline{\underline{S}}' + \underline{\underline{H}}$$

$$\underline{\underline{H}} = [H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & H_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & H_{23} & 0 & 0 \\ Sym & & & & 0 & 0 \\ & & & & & H_{12} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Pour relier les composantes de $\underline{\underline{H}}$ aux paramètres d'endommagement, il suffit de considérer par exemple : $\tilde{S}'_{22} = S'_{22} + H_{22}$ ou encore $\frac{1}{\tilde{E}_2} = \frac{1}{E_2} + H_{22}$, et d'y intégrer la relation (5.18) pour obtenir finalement :

$$H_{22} = S'_{22} \frac{D_I}{1 - D_I} \quad (5.22)$$

De la même manière on obtient :

$$H_{23} = S_{23}^l \frac{D_{III}}{1 - D_{III}} \quad (5.23)$$

et

$$H_{12} = S_{12}^l \frac{D_{II}}{1 - D_{II}} \quad (5.24)$$

Tenant compte de la simplicité géométrique des microfissures, et utilisant une méthode auto-cohérente, les composantes du tenseur $\underline{\underline{H}}$ peuvent être comprises comme des fonctions de la densité de microfissures (PERREUX et OYTANA, 1993). En introduisant cette densité dans les relations précédentes, on obtient les composantes du tenseur $\underline{\underline{H}}$ comme fonction d'une seule variable scalaire D , dont l'expression est la suivante :

$$\underline{\underline{H}}(D) = [H(D)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D}{1-D} S_{22}^l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{D}{\sqrt{1-D}} S_{22}^l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{D}{\sqrt{1-D}} \sqrt{S_{22}^l S_{11}^l} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

On notera donc que la variable scalaire d'endommagement du modèle correspond physiquement à la diminution du module d'élasticité transverse E_2 .

5.4.2 Fonction de charge

La loi d'évolution de la variable scalaire D est exprimée en utilisant le *principe de la thermodynamique des processus irréversibles*. La fonction de charge est connue à partir de la définition du seuil du domaine \bar{Y} : $\bar{Y} = (Y_c + \alpha D^q)$ où Y_c , α et q sont des paramètres matériau positifs. Donc, $F(D) = Y - \bar{Y}$.

La force thermodynamique associée à l'endommagement s'écrit :

$$Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^T \left(\frac{\partial \underline{\underline{H}}}{\partial D} \right) \underline{\underline{\sigma}} \quad (5.26)$$

avec $\frac{\partial \underline{\underline{H}}}{\partial D}$ qui s'obtient en dérivant chaque terme du tenseur $\underline{\underline{H}}$ par rapport à D . Ainsi on a :

$$\frac{\partial \underline{\underline{H}}}{\partial D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial H_{22}}{\partial D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial H_{23}}{\partial D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial H_{12}}{\partial D} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

avec :

$$\frac{\partial H_{22}}{\partial D} = \frac{2}{(1-D)^2} S_{22}^I$$

$$\frac{\partial H_{12}}{\partial D} = \frac{(2-D)}{\sqrt[3]{(1-D)^2}} \sqrt{S_{22}^I S_{11}^I} \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial H_{23}}{\partial D} = \frac{(2-D)}{\sqrt[3]{(1-D)^2}} S_{22}^I$$

Elle permettra de déclencher ou non l'évolution de l'endommagement en fonction de l'état des contraintes (Y) et de l'état courant d'endommagement (\bar{Y}). Si le chargement est tel que la fonction $F(D, \underline{\underline{\sigma}})$ est négative ou nulle, il n'y aura pas d'évolution de l'endommagement. Si la fonction $F(D, \underline{\underline{\sigma}})$ tend à devenir positive, alors il devra se produire un accroissement de dommage de façon à contrebalancer l'accroissement de la fonction Y pour obtenir une fonction

de charge nulle. La cinétique d'endommagement \dot{D} est calculée à partir de l'équation de consistance : $\dot{F} = 0$. On aura peut-être remarqué que dans ce modèle l'effet unilatéral de l'endommagement n'a pas été traité. En effet, aucun distinguo n'est fait pour différencier le comportement quand les fissures sont ouvertes ou fermées.

5.4.3 Définition de la contrainte effective

Pour généraliser la notion de contrainte effective à un cas de chargement quelconque, on reprend l'équivalence en déformation à partir de l'écriture tensorielle des déformations et contraintes $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{H}}) \underline{\underline{\sigma}}$.

Finalement,

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \underline{\underline{S}}^{-1} (\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{H}}) \underline{\underline{\sigma}} = (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{H}}) \underline{\underline{\sigma}} \quad (5.29)$$

ou en posant $\underline{\underline{L}} = (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{H}})^{-1}$, on obtient la relation entre la contrainte de Cauchy et la contrainte effective : $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$.

5.4.4 Écriture incrémentale - Schéma prédicteur-correcteur

Comme le matériau garde la mémoire de l'état d'endommagement quand on décharge la structure, il est nécessaire de travailler de manière incrémentale. La présence de la fonction de charge garantit la mémoire de l'état d'endommagement et permet l'écoulement supplémentaire si le chargement l'induit.

Lors de l'écriture du modèle, la dépendance en temps est intégrée dans le chargement, dans la mesure où à un temps donné correspond un chargement donné. Lorsque le calcul est piloté en contrainte ($\Delta \underline{\underline{\sigma}}$ connu) et que l'on cherche les déplacements, le dépassement par les contraintes du critère d'évolution d'endommagement entraîne un incrément de dommage qui sera obtenue par la résolution de l'équation de consistance $\dot{F} = 0$. Elle se fera en fait de manière incrémentale $\Delta F = 0$.

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \Delta \underline{\underline{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial D} \Delta D = \frac{1}{2} (\Delta \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{H}}' \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{H}}' \Delta \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{H}}'' \Delta D : \underline{\underline{\sigma}}) - (\alpha D^{q-1} \Delta D) \quad (5.30)$$

Et permet de connaître l'incrément de dommage qui annulera ΔF pour un incrément de contrainte donnée. Le comportement endommagé est alors connu et les déformations puis les déplacements peuvent être calculés. La problématique associée à la méthode des éléments finis réside dans le fait que dans un incrément de calcul, la variable que l'on connaît à partir des incréments de déplacements est le tenseur des incréments de déformation élastique. A partir de ces incréments de déformation, on doit déduire les incréments de contraintes qui vérifieront à la fois les lois de comportement élastique et les lois d'évolution de l'endommagement. Pour ce faire, on utilise un *schéma prédicteur-correcteur*. Dans un premier temps, on réalise une prédiction en domaine élastique : on suppose que l'écoulement s'est produit sans déclencher de progression de l'endommagement :

$$\underline{\Delta\sigma} = \underline{\Delta\tilde{\sigma}} = \underline{\underline{C}}(D_n) : \underline{\Delta\varepsilon} \quad (5.31)$$

On obtient alors une contrainte test

$$\underline{\sigma}_{n+1}^* = \underline{\sigma}_n + \underline{\Delta\sigma} \quad (5.32)$$

Cette contrainte est utilisée pour évaluer $F(\underline{\sigma}_{n+1}^*, D_n)$. Si la valeur de cette fonction est négative ou nulle, cela signifie que la prédiction était réaliste. La contrainte test devient alors la nouvelle contrainte à l'incrément $(n+1)$. Si la valeur est positive, cela indique qu'il s'est, en fait, produit une augmentation de l'endommagement. Il faut donc corriger la contrainte test en modifiant l'incrément de contrainte de manière à tenir compte de l'incrément de dommage.

$$\underline{\Delta\sigma} = \underline{\underline{L}}' \Delta D \underline{\tilde{\sigma}} + \underline{\underline{L}} \Delta \underline{\tilde{\sigma}} \quad \text{où} \quad \underline{\underline{L}}' = \frac{\partial \underline{\underline{L}}}{\partial D} \quad (5.33)$$

Cette nouvelle contrainte est utilisée pour l'équation de consistance qui permettra d'obtenir l'incrément de dommage ΔD puis $\underline{\sigma}_{n+1}$:

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\Delta\sigma} + \frac{\partial F}{\partial D} \Delta D = \frac{1}{2} \left(\underline{\Delta\sigma} \underline{\underline{H}}' \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{\underline{H}}' \underline{\Delta\sigma} + \underline{\sigma} : \underline{\underline{H}}'' \Delta D : \underline{\sigma} \right) - \left(\alpha D^{q-1} \Delta D \right) = 0 \quad (5.34)$$

Une autre méthode consiste à écrire la fonction de charge à l'incrément (n+1) et de chercher la valeur de l'incrément de dommage qui annulera cette fonction. On exprime alors $\underline{\sigma}_{n+1}$ en fonction de ΔD :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_n + \left(\underline{L}(D_n + \Delta D) - \underline{L}(D_n) \right) : \underline{\tilde{\sigma}}_n + \underline{L}(D_n + \Delta D) : \Delta \tilde{\sigma} \quad (5.35)$$

Puis la nouvelle fonction de charge :

$$F_{n+1} = \frac{1}{2} \left((\underline{\sigma}_{n+1}) \underline{H}'(D_n + \Delta D) (\underline{\sigma}_{n+1}) \right) - \left(Y_c + \alpha (D_n + \Delta D)^q \right) = 0 \quad (5.36)$$

La résolution de cette équation non linéaire donnera directement l'incrément de dommage puis le nouvel état de contrainte.

5.5 Application de la *MEF* au modèle d'endommagement

Les matrices élémentaires de raideur et de masse du système vierge sont obtenues en utilisant le *principe variationnel de Hamilton* défini dans l'Annexe B.1. Ces matrices peuvent être réécrites dans le cas particulier d'un matériau élastique endommagé avec les expressions :

$$\left[\bar{K}_e(u_n) \right] = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left(\left[B_e \right]^T \left[C^e(u_n) \right]^{(k)} \left[B_e \right] \right) J dz d\eta d\xi \quad (5.37)$$

$$\left[M_e \right] = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^{(k)} \left(\left[N \right]^T \left[A_m \right]^T \left[A_m \right] \left[N \right] \right) J dz d\eta d\xi \quad (5.38)$$

où l'exposant nc indique le nombre de plis du stratifié, J est le *Jacobien de la transformation* des variables du repère des coordonnées locales (ξ, η) aux élémentaires (x, y) , $\rho^{(k)}$ est la densité par pli k , les matrices $\left[B_e \right] = \left[\left[B_b \right] \quad \left[B_s \right] \right]$, $\left[N \right]$ et $\left[A_m \right]$ sont définies selon la théorie

employée pour la modélisation de la structure composite, c'est-à-dire *FSDT*, *HSDT* ou *Layerwise-FSDT*, et qui sont définies dans le Chapitre III.

Dans ce chapitre on emploie la théorie *FSDT* puisqu'elle est numériquement plus efficace par rapport aux deux autres théories et qu'elle fournit de bons résultats numériques pour le modelage par éléments finis de structures composites minces et homogènes.

La matrice des constantes d'élasticité $[C^l]^{(k)}$ est définie dans la section 2.4 du Chapitre II selon le matériau en étude (isotrope, isotrope transverse ou orthotrope), et conformément l'Annexe A.1, on a la relation :

$$[C^e]^{(k)} = [T(\theta^k)]^T [C^l]^{(k)} [T(\theta^k)] \quad (5.39)$$

où θ^k est l'orientation des fibres du pli k et la matrice $[T]$ est la matrice de transformation des constantes d'élasticité du matériau stratifié du repère d'orthotropie (1,2,3) aux repères élémentaires (x, y, z) .

Dans ce mémoire on désigne par $[C^e]$, $\{\sigma^e\}$, $\{\varepsilon^e\}$, $[S^e]$, $[\tilde{S}^l]$ et $\{\Delta u\}$, l'expression matricielle et vectorielle des tenseurs $\underline{\underline{C}}^e$, $\underline{\underline{\sigma}}^e$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$, $\underline{\underline{S}}^e$, $\underline{\underline{\tilde{S}}}^l$ et $\Delta \bar{u}$ respectivement.

La matrice de raideur élémentaire $[\bar{K}_e(u_n)]$ est dépendante du déplacement u_n de la structure à un instant t_n quelconque. Cette dépendance est due à la matrice des constantes d'élasticité du matériau $[C^e(u_n)]^{(k)}$, qui elle-même dépend de l'état de l'endommagement. La matrice de masse élémentaire $[M_e]$ est considérée dans ce mémoire indépendante du déplacement de la structure.

Les contributions des forces de volume $\{Q_e\}$, de surface $\{S_e\}$ et ponctuelles $\{P_e\}$ écrites au niveau élémentaire sont indiquées dans l'Annexe B.1.

L'endommagement du matériau stratifié, pour un incrément de temps donné, entraîne des modifications dans la matrice des constantes d'élasticité du matériau vierge (qui est celle définie à l'instant (t_0)) en employant la matrice $[H(D(u_n))]$, fournie dans sa forme tensorielle par l'équation (5.25), et calculée par incrément de déplacement. Ainsi, la matrice $[H(D(u_n))]$

contient l'historique des variations des propriétés élastiques du matériau selon l'évolution de la variable scalaire d'endommagement D .

La matrice des constantes d'élasticité par pli k , à un instant (t_n) donné est calculée selon l'expression (BOUBAKAR et al., 2002) :

$$[C^l(u_n)] = [\tilde{S}^l(D(u_n))]^{-1} = \left[[S^l] + [H(D(u_n))] \right]^{-1} \quad (5.40)$$

La matrice $[C^l(u_n)]$ de l'équation (5.40) est actualisée à chaque valeur de t_n , après le calcul d'incrément de déplacement $\Delta \underline{u}$, calculé par l'expression $\Delta \underline{u} = u(t_{n+1}) - u(t_n) = u_{n+1} - u_n$, suivi du calcul des incréments de déformation $\Delta \underline{\varepsilon}^l$ puis du calcul des incréments des contraintes de Cauchy $\Delta \underline{\sigma}^l$ et effectives $\Delta \underline{\tilde{\sigma}}^l$.

La valeur de la variable scalaire d'endommagement $D(u_{n+1})$, à l'instant t_{n+1} , peut ou non augmenter. La matrice $[C^l(u_{n+1})]$ des constantes d'élasticité est actualisée en accord avec la valeur de $D(u_{n+1})$. De cette manière, la matrice raideur élémentaire $[\bar{K}_e(u_n)]$ est actualisée pour obtenir la nouvelle matrice $[\bar{K}_e(u_{n+1})]$. Les intégrales continues montrées par les expressions (5.37) et (5.38) des matrices élémentaires de raideur et de masse sont calculées numériquement de manière discrète en utilisant la technique d'approximation numérique de la *quadrature de Gauss*, décrite dans la section postérieure, et qui est développée en détail dans les publications de Reddy (1997) et de Carrol (1999) par exemple.

5.5.1 Intégration numérique : méthode de la quadrature de Gauss

L'intégration des matrices élémentaires de raideur et de masse est réalisée numériquement par l'utilisation de la *méthode de quadrature de Gauss (MQG)*, avec pour but de réduire les temps de calcul par rapport aux autres méthodes. Cette méthode est aussi utilisée pour le calcul des déformations et des contraintes nécessaires au calcul d'évolution de la variable scalaire D associée à chaque point de Gauss d'un élément fini.

En considérant la matrice des constantes d'élasticité du matériau vierge sous la forme :

$$[C^l]^{(k)} = \left[[C_b^l]^{(k)} \quad [C_s^l]^{(k)} \right]^T \quad (5.41)$$

et en considérant la répartition classique des points de Gauss, l'approximation numérique des matrices élémentaires de raideur et de masse peut être calculée, dans chaque pli k , selon les expressions :

$$[\bar{K}_e(u_n)] = \sum_{k=1}^{nc} \left[(z_{k+1} - z_k) \sum_{PG=1}^4 [w_{PG} [Rr_0]^{(k)}] + \frac{1}{2} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \sum_{PG=1}^4 [w_{PG} [Rr_1]^{(k)}] \right] \quad (5.42)$$

$$[M_e] = \sum_{k=1}^{nc} \rho^k \left[(z_{k+1} - z_k) \sum_{PG=1}^4 [w_{PG} [\bar{R}r_0]] + \frac{1}{2} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \sum_{PG=1}^4 [w_{PG} [\bar{R}r_1]] + \frac{1}{3} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \sum_{PG=1}^4 [w_{PG} [\bar{R}r_2]] \right] \quad (5.43)$$

avec :

$$\begin{aligned} [Rr_0(\xi_{PG}, \eta_{PG}, u_n)]^{(k)} &= \\ & [\bar{B}_0^b(\xi_{PG}, \eta_{PG})]^T [T(\theta^k)]^T [C_b^l(u_n)]^{(k)} [T(\theta^k)] [\bar{B}_0^b(\xi_{PG}, \eta_{PG})] \\ & + [\bar{B}_2^s(\xi_{PG}, \eta_{PG})]^T [T(\theta^k)]^T [C_s^l(u_n)]^{(k)} [T(\theta^k)] [\bar{B}_0^s(\xi_{PG}, \eta_{PG})] \\ [Rr_1(\xi_{PG}, \eta_{PG}, u_n)]^{(k)} &= \\ & [\bar{B}_1^b(\xi_{PG}, \eta_{PG})]^T [T(\theta^k)]^T [C_b^l(u_n)]^{(k)} [T(\theta^k)] [\bar{B}_1^b(\xi_{PG}, \eta_{PG})] \\ [\bar{R}r_0(\xi_{PG}, \eta_{PG})] &= [\bar{N}(\xi_{PG}, \eta_{PG})]^{-T} [\bar{A}_0]^T [\bar{A}_0] [\bar{N}(\xi_{PG}, \eta_{PG})] \\ [\bar{R}r_1(\xi_{PG}, \eta_{PG})] &= [\bar{N}(\xi_{PG}, \eta_{PG})]^{-T} [\bar{A}_1]^T [\bar{A}_1] [\bar{N}(\xi_{PG}, \eta_{PG})] \\ [\bar{R}r_2(\xi_{PG}, \eta_{PG})] &= [\bar{N}(\xi_{PG}, \eta_{PG})]^{-T} [\bar{A}_2]^T [\bar{A}_2] [\bar{N}(\xi_{PG}, \eta_{PG})] \end{aligned} \quad (5.44)$$

où : $[R_0]$, $[R_1]$, $[\bar{R}_0]$, $[\bar{R}_1]$ et $[\bar{R}_2]$ sont des matrices résultant de l'intégration numérique en utilisant la MQG pour chaque points de Gauss. Les matrices : $[\bar{N}]$, $[\bar{B}_0^b]$, $[\bar{B}_1^b]$ et $[\bar{B}_2^s]$ sont les matrices contenant les fonctions de forme et leurs dérivées et qui sont obtenues par points de Gauss (ξ_{PG}, η_{PG}) .

Le calcul des déformations et des contraintes présenté dans la section suivante doit être réalisé à chaque point de Gauss, pour chaque pli k .

5.5.2 Calcul des déformations et des contraintes effectives aux points de Gauss

Le calcul des déformations et des contraintes effectives nécessaires à la formulation du mécanisme d'endommagement dans le matériau stratifié, utilise les considérations du Chapitre III, et plus spécifiquement les équations (3.49), (3.50) et l'équation (5.29).

Les déformations, les contraintes de Cauchy et les contraintes effectives doivent être analysées pour une coordonnée donnée z_k choisie selon l'épaisseur du pli k . Dans ce mémoire, la coordonnée z_k est associée à un seul point sur l'épaisseur du pli, et sa coordonnée est donnée par l'expression :

$$z_k = \bar{z} + \frac{h_k}{2} \times H_k \quad (5.45)$$

où h_k est l'épaisseur du pli k , \bar{z} est la valeur moyenne entre les coordonnées des interfaces supérieur et inférieur du pli k , et finalement H_k est la position du point choisi, dans l'intervalle $(-1,1)$. On adopte dans ce mémoire le point central par pli k pour le calcul des déformations et contraintes dans le pli. Ainsi, on a $H_k = 0$. De plus, les déformations et les contraintes sont calculées pour chaque point de Gauss.

En utilisant les équations (3.49) et (3.50), et en adoptant l'hypothèse de petits déplacements, les valeurs des déformations incrémentales peuvent être obtenues, pour chacun des quatre points de Gauss du pli k d'un l'élément fini quelconque, selon les expressions suivantes :

$$\{\Delta \mathcal{E}_b^e\}_{4 \times 1} = \{\Delta \bar{\mathcal{E}}_b^e\}_{4 \times 1} = \left[[\bar{B}_0^b] + z_k [\bar{B}_1^b] \right]_{4 \times 40} \{\Delta u\}_{40 \times 1} \quad (5.46)$$

$$\{\Delta \mathcal{E}_s^e\}_{2 \times 1} = \{\Delta \bar{\mathcal{E}}_s^e\}_{2 \times 1} = [\bar{B}_2^s]_{2 \times 40} \{\Delta u\}_{40 \times 1} \quad (5.47)$$

où $\{\Delta \mathcal{E}_b^e\}$ et $\{\Delta u\}$ sont respectivement les vecteurs incrémentales des déformations élémentaires et les déplacements nodaux. Les matrices $[\bar{B}_0^b]$, $[\bar{B}_1^b]$ et $[\bar{B}_2^s]$ sont évaluées aux points de Gauss.

Les vecteurs incréments des contraintes effectives, $\{\Delta \bar{\sigma}_b^l\}_{4 \times 1}$ et $\{\Delta \bar{\sigma}_s^l\}_{2 \times 1}$, sont obtenus à chaque point de Gauss (*PG*) du pli (*k*) et sont calculées en employant les expressions incrémentales des déformations données par les équations (5.46) et (5.47).

En utilisant les équations (5.46), (5.47), (5.39) et le découplage de la matrice des constantes d'élasticité du matériau vierge fournie dans l'équation (5.41), les contraintes incrémentales sont obtenus par points de Gauss (*PG*) du pli (*k*) de l'élément finis en question en utilisation les expressions suivantes :

$$\{\Delta \sigma_b^l\}_{4 \times 1} = [C_b^l]_{4 \times 4}^{(k)} \left\{ [R_b(\theta^k)]_{4 \times 4} \{\Delta \mathcal{E}_b^e\}_{4 \times 1} \right\} = [C_b^l]_{4 \times 4}^{(k)} \{\Delta \mathcal{E}_b^l\}_{4 \times 1} \quad (5.48)$$

$$\{\Delta \sigma_s^l\}_{2 \times 1} = [C_s^l]_{2 \times 2}^{(k)} \left\{ [R_s(\theta^k)]_{2 \times 2} \{\Delta \mathcal{E}_s^e\}_{2 \times 1} \right\} = [C_s^l]_{2 \times 2}^{(k)} \{\Delta \mathcal{E}_s^l\}_{2 \times 1} \quad (5.49)$$

où $[R(\theta^k)] = [T(\theta^k)]^{-1}$ est la matrice de transformation du repère élémentaire (*x, y, z*) au repère d'orthotropie (1,2,3) et $[R(\theta^k)] = [R_b(\theta^k) \quad R_s(\theta^k)]$. Les contraintes qui apparaissent dans (5.48) et (5.49) sont les incréments de contraintes effectives puisque la matrice $[C^l]_{6 \times 6}^{(k)}$ vient du comportement vierge.

Avant la présentation de la forme utilisée pour le calcul des contraintes, on doit procéder à la correction de la contrainte de Cauchy σ_{33}^l afin de respecter la condition de contrainte normale perpendiculaire au plan de la plaque nulle. Ainsi on adopte :

$$(\Delta \underline{\sigma})_{33} = (\Delta \underline{L} : \underline{\tilde{\sigma}} + \underline{L} \Delta \underline{\tilde{\sigma}})_{33} = 0 \quad (5.50)$$

Après quelques manipulations mathématiques de l'équation (5.50) on obtient la valeur de la déformation incrémentale $\Delta \varepsilon'_{33}$ pour satisfaire cette hypothèse. Ainsi, on a l'expression mathématique pour la correction de la déformation $\Delta \varepsilon'_{33}$ dont l'expression est dépendante de la variable scalaire d'endommagement D et est donnée sous la forme :

$$\Delta \varepsilon'_{33} = -\nu_{12} \Delta \varepsilon'_{11} \left(\frac{E_1 + \nu_{23} E_1 (1-D)}{E_1 - (\nu_{12})^2 E_2 (1-D)} \right) - \Delta \varepsilon'_{22} \left(\frac{(\nu_{23} E_1 + (\nu_{12})^2 E_2) (1-D)}{E_1 - (\nu_{12})^2 E_2 (1-D)} \right) \quad (5.51)$$

5.6 Méthode d'intégration temporelle implicite de Newmark appliquée au modèle dynamique endommagé

La *méthode implicite de Newmark* est adoptée dans ce mémoire pour calculer la solution numérique approchée des équations du mouvement des systèmes non-linéaires résultant de la modélisation par éléments finis de structures endommagées.

La formulation mathématique de cette méthode est déjà bien connue dans la littérature et peut être consultée dans les travaux de Bathe (1996), Géradin et Rixen (1997) ou de Paultre (2005). Dans notre étude, l'algorithme de la méthode implicite de Newmark a été modifié pour prendre en compte le modèle d'endommagement dans l'étude des structures composites soumises à des chargements dynamiques. En particulier, deux types de structures académiques composites sont étudiés dans ce mémoire : (1) poutres composites et (2) plaques composites en matériau stratifié. L'amortissement intrinsèque (modélisé avec le *modèle hystérique complexe* présenté dans la section 4.3 du Chapitre IV) du stratifié n'est pas pris en compte car nous nous intéressons seulement à l'évolution et à la quantification de l'endommagement dans le stratifié.

Dans ce contexte, l'équation (3.82) du Chapitre III, est réécrite sous la forme :

$$[M_g] \{\ddot{u}_g(t)\} + [C_g(\omega, \eta)] \{\dot{u}_g(t)\} + [\bar{K}_g(u_g)] \{u_g(t)\} = \{F_g(t)\} \quad (5.52)$$

où la matrice de raideur $[\bar{K}_g(u_g)] = \bigcup_{e=1}^{Ne} [\bar{K}_e(u_e)]$ est non linéaire à cause de la perte de rigidité mécanique des plis en rapport à l'évolution de l'endommagement, dépendant des déplacements (u_g) de la structure. Ne est le nombre d'éléments finis sur lesquelles la structure est discrétisée.

Pour simplifier l'étude, dans ce chapitre la matrice d'amortissement $[C_g(\omega, \eta)]$ du stratifié composite n'est pas utilisée pour la résolution de l'équation du mouvement du système endommagé présentée dans l'équation (5.52).

L'algorithme de la *méthode implicite de Newmark modifiée* incorporant l'endommagement, et appliqué à l'étude dynamique de structures composites stratifiées incorporant le modèle d'endommagement, est fourni dans le Tableau (5.1) (dans ses parties : A, B et C) et est illustré dans le diagramme de la Fig. 5.9. Le vecteur de charge externe $\{F_g(t)\}$ est renommé $\{g(t)\}$ pour être compatible avec la notation de la méthode implicite de Newmark adoptée pour Géraudin et Rixen (1997).

Tableau 5.1 - Algorithme d'intégration par la méthode implicite de Newmark modifiée pour la résolution d'équation du système endommagement : Partie A.

Initialisations des variables :
1 – Conditions et paramètres initiaux d'endommagement :
- Endommagement dans la matrice polymère : $D_0 = \{0\}$
2 – Conditions et paramètres initiaux de la méthode d'intégration :
- Charge externe : $\{F_g(t_0)\} = \{g_0\} = \{0\}$
- Vecteur résidu : $\{r_0\} = \{0\}$
- Déplacement et vitesse : $\{u_0\} = \{0\}$, $\{\dot{u}_0\} = \{0\}$
- Calcul de la force interne équivalente : $\{f_0\} = [\bar{K}_g(u_0)]\{u_0\}$
- Calcul de l'accélération : $\{\ddot{u}_0\} = [M_g]^{-1}(\{g_0\} - \{f_0\})$
- Choix des variables de la méthode d'intégration : $\gamma = 1/2$ et $\beta = 1/4$
- Choix du pas de temps d'intégration : Δt
3 – Calculs préliminaires:
- Calcul des constantes d'intégration :
$\bar{\kappa}_0 = (1/2 - \beta)$, $\bar{\kappa}_1 = (1 - \gamma)$, $\kappa_0 = 1/\beta\Delta t^2$, $\kappa_1 = \gamma/\beta\Delta t$, $\kappa_2 = 1/\beta\Delta t^2$
(suite dans la Partie B)

Tableau 5.1 - Algorithme d'intégration par la méthode implicite de Newmark modifiée pour la résolution d'équation du système endommagement : Partie B (Prédiction)

<p>Intégration pas à pas : $n = 1, 2, 3, \dots, t_f / \Delta t$</p> <p>1 – Incrémentation du temps : $t_{n+1} = t_n + \Delta t = (n+1)\Delta t, t_0 = 0$</p> <p>2 – Calcul du vecteur des forces externes au temps t_{n+1} : $\{g_{n+1}\} = \{\bar{F}_g(t_n)\}$</p> <p>3 – Prédiction :</p> <p>3.1 Déplacement : $\{u_{n+1}\} = \{u_n\} + \{\dot{u}_n\}\Delta t + \bar{\kappa}_0 \{\ddot{u}_n\}\Delta t^2$</p> <p>3.2 Vitesse : $\{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{u}_n\} + \bar{\kappa}_1 \{\ddot{u}_n\}\Delta t$</p> <p>3.3 Accélération : $\{\ddot{u}_{n+1}\} = \{0\}$</p> <p>3.4 Incrément du déplacement prédit : $\{\Delta u\} = \{u_{n+1}\} - \{u_n\}$</p>
<p>4 – Détermination de la diminution de la rigidité par la variation d'endommagement</p> <p>- Actualisation de la matrice : $[\bar{K}_g(u_{n+1})]$ en accord avec les procédures fournies dans le Tableau 5.1 - partie C et la Figure 5.9 – B (Schéma prédicteur- correcteur)</p>
<p>5 – Calcul de la force interne $\{f_{n+1}\} = \{f(u_{n+1})\} = [\bar{K}_g(u_{n+1})]\{u_{n+1}\}$</p> <p>6 – Calcul du vecteur des forces externes $\{g_{n+1}\}$</p> <p>7 – Calcul du vecteur résidu au temps t_{n+1} : $\{r_{n+1}\} = [M_g]\{\dot{u}_{n+1}\} + \{f_{n+1}\} - \{g_{n+1}\}$</p> <p>8 – Test de convergence : $\ \{r_{n+1}\}\ < \varepsilon \ \{f_{n+1}\}\$</p> <p>Si : $\ \{r_{n+1}\}\ < \varepsilon \ \{f_{n+1}\}\ \Rightarrow$ retourner au pas 1 et donner un nouvel incrément de temps;</p> <p>Si : $\ \{r_{n+1}\}\ \geq \varepsilon \ \{f_{n+1}\}\ \Rightarrow$ continuer au pas suivant 9</p> <p>9 – Calcul de la matrice d'itération : $[S_g(u_{n+1})] = [\bar{K}_g^T(u_{n+1})] + \kappa_0 [M_g]$</p> <p>10 – Calcul de la correction des incréments en déplacement : $\{\Delta \bar{u}\} = -[S_g(u_{n+1})]^{-1} \{r_{n+1}\}$</p> <p>11 – Actualisation des vecteurs de déplacement, vitesse et accélération au temps t_{n+1} :</p> <p>- Déplacement : $\{u_{n+1}\} = \{u_{n+1}\} + \{\Delta \bar{u}\}$</p> <p>- Vitesse : $\{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{u}_{n+1}\} + \kappa_0 \{\Delta \bar{u}\}$</p> <p>- Accélération : $\{\ddot{u}_{n+1}\} = \{\ddot{u}_{n+1}\} + \kappa_1 \{\Delta \bar{u}\}$</p> <p>12 – Incrément de déplacement de la <i>méthode de Newton-Raphson</i> : $\{\Delta u\} = \{\Delta \bar{u}\}$</p>
<p>4 – Détermination de la diminution de la rigidité par la variation de l'endommagement</p> <p>- Actualisation de la matrice : $[\bar{K}_g(u_{n+1})]$ en accord avec les procédures fournies dans le Tableau 5.1 - partie C et la Figure 5.9 – B (Schéma prédicteur- correcteur)</p>
<p>11 – Retourner au pas 5 et répéter le test 8</p>

Tableau 5.1 - Algorithme d'intégration par la méthode implicite de Newmark modifié pour la solution d'équation du système endommagement : Partie C (**Schéma prédicteur- correcteur**).

4 – Détermination de la diminution de la rigidité par la variation de l'endommagement :

À partir de l'incrément des déplacements $\{\Delta u\}$, déterminé en 3.4 ou en 12 (Tab. 5.4 - Partie B) :

- Détermination de l'incrément du vecteur de déformations $\{\Delta \varepsilon\}$, Eqs. (5.46) et (5.47)
- Correction de l'incrément de la déformation $\Delta \varepsilon_{33}$, Eq. (5.51)
- Calcul du vecteur des incréments des constantes effectives : Eq. (5.31)
- Schéma prédicteur-correcteur pour obtenir $\{D_{n+1}\}$ et $\{\tilde{\sigma}_{n+1}\}$: Eq. (5.36) et (5.29)
- Actualisation de la matrice des constantes d'élasticité : $[\tilde{C}^e] = [C^e(u_{n+1})]$: Eq. (5.40) et Eq. (5.39)
- Actualisation de la matrice de raideur globale $[\bar{K}_g(u_{n+1})]$ par l'actualisation de la matrice des constantes d'élasticité $[\tilde{C}^e]$

En général, pour diminuer l'erreur du calcul des déplacements dans la *méthode implicite de Newmark*, on utilise souvent la *méthode itérative de Newton*, à l'intérieur d'un pas de temps $(n+1)$ quelconque.

Cette méthode utilise la matrice d'itération $[S_g(u_n)]$, matrice d'itération qui indique la *direction* de recherche pour la convergence de la *méthode de Newton*, exprimée dans ce mémoire selon l'expression mathématique suivante (GÉRADIN et RIXEN, 1997) :

$$[S_g(u_n)] = [\bar{K}_g^T(u_n)] + \kappa_0 [M_g] \quad (5.53)$$

où $[\bar{K}_g^T(u_n)] = \frac{\partial [\bar{K}_g(u_n)]}{\partial u_n}$ est la matrice tangente.

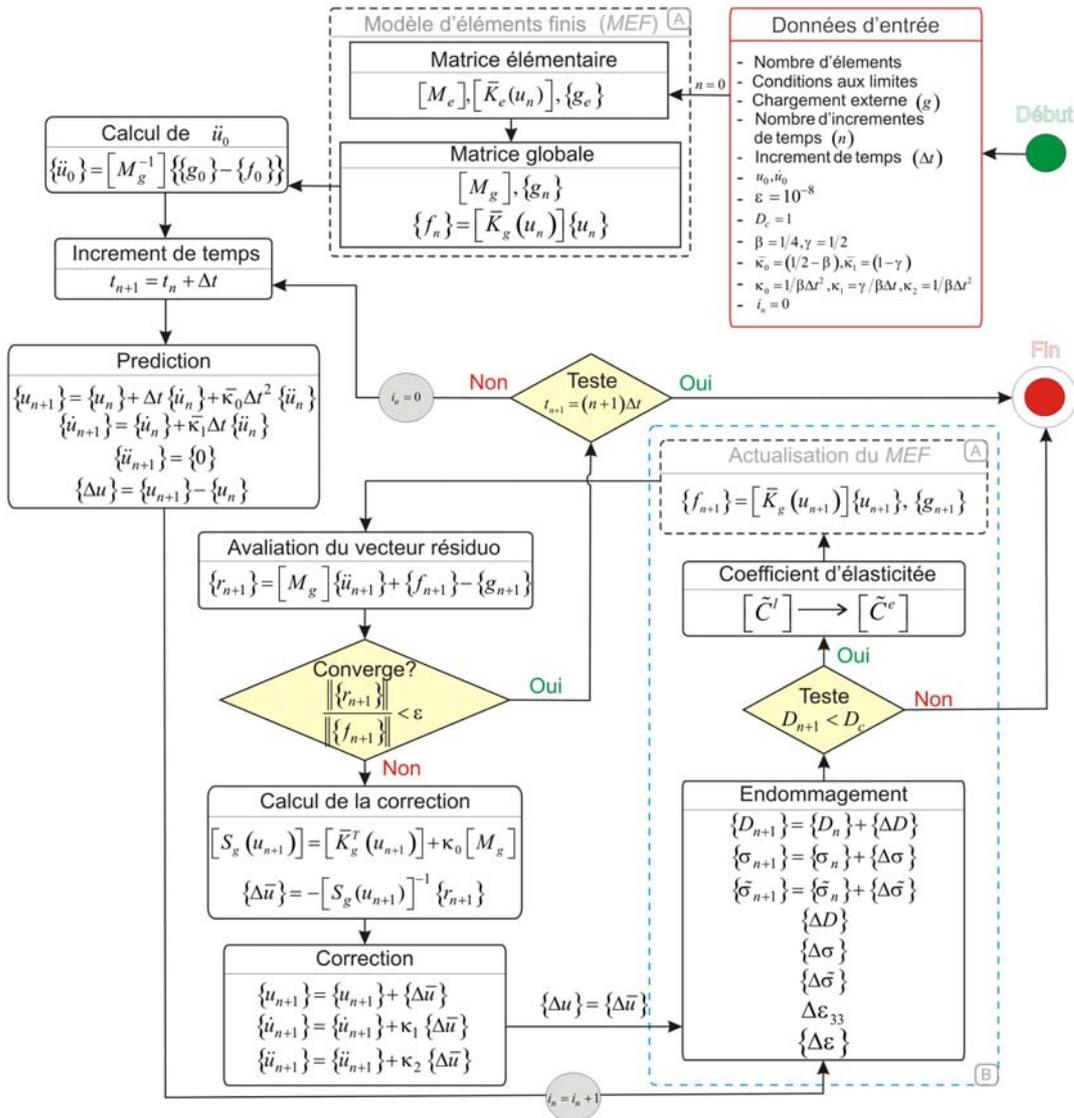


Figure 5.9 - Calcul implicite de la réponse d'un système non linéaire incorporant le modèle d'endommagement.

Pour un pas de temps t_n donné de la *méthode implicite de Newmark*, et aussi à chaque incrément i_n de déplacements, l'équilibre entre les *forces internes* ($[M_g] \{\Delta \ddot{u}_{n+1}\}$ et $\{f_{n+1}\}$) et les *forces externes* ($\{g_{n+1}\}$) est vérifié lorsque le résidu d'équilibre tombe en dessous d'un certain seuil de précision donnée par (GÉRADIN et RIXEN, 1997) :

$$\langle \|\{r_{n+1}\}\| < \varepsilon \|\{f_{n+1}\}\| \rangle \quad (5.54)$$

qui consiste à vérifier que le vecteur des forces résiduels $\{r_{n+1}\}$ à l'itération i_n est à l'intérieur d'une certaine tolérance de la force effective $\{f_{n+1}\}$. Dans ce mémoire, on adopte $\varepsilon = 10^{-8}$ pour la valeur de tolérance afin d'assurer la convergence de la *méthode de Newton*.

La matrice de raideur $[\bar{K}_g(u_n)]$ est actualisée par incrément de déplacement selon l'évolution de l'endommagement. Ainsi, au début de l'Étape B (Figure 5.9) la matrice $[\bar{K}_g(u_n)]$ est recalculée avec l'actualisation de la matrice des constantes d'élasticité $[\tilde{C}^e]_{n+1}$ si on observe une évolution de la variable scalaire d'endommagement D . Comme illustré sur la Fig. 5.9 (l'Étape B), on adopte un critère d'endommagement critique, D_c , à l'intérieur de la boucle de la *méthode de Newton*, qui consiste à vérifier, par incrément de déplacement $\{\Delta u\}$, si l'endommagement maximale est égal ou inférieur à l'unité ($D_{n+1} < D_c = 1$). (D'autres critères sont aussi ajoutés tels que : (1) ($D_{n+1} \geq D_n$) et (2) ($D_{n+1} \geq 0$), pour satisfaire la considération que la variable d'endommagement ne peut pas diminuer et n'est pas négative. Ceci est juste une vérification du calcul numérique incrémental mais ne fait pas partie de la méthode).

5.7 Résultats numériques

Dans le but de valider la méthode de prise en compte du mécanisme d'endommagement (dans la matrice du matériau stratifié) avec le modèle d'éléments finis formulée avec les théories (*MEF-FSDT*) pour le calcul de structures composites, on aborde une première étude dans le dans le domaine statique.

En vue de l'extension de cette méthodologie dans le domaine temporel, on utilise la *méthode d'intégration implicite de Newmark*, pour intégrer les équations du mouvement du système endommagé, sur deux exemples de simulations numériques. Le premier concerne la modélisation d'une poutre composite, encastree-libre et sollicitée axialement et le deuxième exemple est celui d'une plaque composite, encastree sur tous ses bords et sollicitée par des chargements de type impulsif et harmonique. Les deux structures sont en matériau stratifié en

époxy/verre et les réponses de l'évolution du facteur scalaire d'endommagement dans le temps et sa distribution par pli sont évaluées.

Dans les simulations numériques réalisées dans le domaine temporel on utilise deux types de chargements :

(1) une force de type impulsionnel appliquée pendant un intervalle de temps très court (représentation d'une force d'impact ou force d'impulsion) ;

(2) une force harmonique appliquée pendant un intervalle de temps choisi pour une fréquence d'excitation donnée.

Les deux chargements appliqués, sont respectivement traduits par les équations (5.55) et (5.56) :

$$\{g(t)\} = \begin{cases} \left(\frac{f_0}{2} (1 - \cos(2\pi t/\delta)) \right) & 0 \leq t \leq (10^{-3} \leq \delta \leq 10^{-2}) \\ 0 & (10^{-3} \leq \delta \leq 10^{-2}) < t \leq t_f \end{cases} \quad (5.55)$$

$$\{g(t)\} = f_0 (\sin(\bar{\omega}t)) \quad (5.56)$$

où $\bar{\omega}$ est l'impulsion d'excitation, en rad/s , f_0 est l'amplitude de la force d'excitation appliquée sur la structure (harmonique ou choc mécanique), δ est durée d'application de la force d'impact, variant entre $10^{-3} \leq \delta \leq 10^{-2}$, et finalement t_f est le temps final d'application de la force.

L'étude de la structure composite en matériau stratifié réalisée dans le *domaine statique* est utilisée pour la validation numérique de la méthodologie de prise en compte de l'endommagement dans le matériau. Les résultats numériques obtenus sont confrontés avec ceux obtenus analytiquement. Dans cette application numérique, on s'est intéressé à la résolution du système statique donné selon l'expression suivante, car on modélise la structure en utilisant un seul élément fini :

$$[\bar{K}_e(u_n)] \{\Delta u_{n+1}\} = \{\Delta \bar{F}_e\} \quad (5.57)$$

où $\{\Delta u_{n+1}\}$ est l'incrément de déplacement actuel, $[\bar{K}_e(u_n)]$ est la matrice de raideur élémentaire. On considère pendant la résolution du système que la valeur initiale de la matrice de raideur est celle obtenue dans l'incrément de déplacement précédent.

Pour la validation de la méthodologie avec des petits incréments de déplacements, on adopte un seul élément fini avec quatre points de Gauss (*PG*) par couche k . La matrice de raideur élémentaire $[\bar{K}_e(u_n)]$, équation (5.42), est actualisée par la matrice des constantes d'élasticité $[C^l(u_n)]$, fourni par l'équation (5.40), par incrément de déplacement $\{\Delta u_{n+1}\}$.

Tableau 5.2 - Propriétés du matériau stratifié *glass-epoxy*.

<i>Constantes du matériau stratifié :</i>	Unité	Valeur
Densité : ρ	kg/m^3	2279,9
Module d'Élasticité Longitudinal : E_1	<i>MPa</i>	45680
Module d'Élasticité Transversal : E_2	<i>MPa</i>	16470
Coefficient de Cisaillement plan : G_{12}	<i>MPa</i>	6760
Coefficient de Poisson : ν_{12}	-	0,34
Coefficient de Poisson : ν_{23}	-	0,34
<i>Constantes associées au mécanisme d'endommagement :</i>		
Y_c	<i>MPa</i>	0,0027
q	<i>MPa</i>	1,246
p	-	0,816

Le matériau stratifié utilisé dans les simulations numériques, à l'exception du premier exemple numérique, est composé d'une matrice en époxy avec des fibres de verre (*glass-epoxy*), et ses propriétés mécaniques sont fournies dans le Tableau 5.2 (fournies dans les travaux d'Ikonomopoulos et Perreux (2001)).

Dans les sections suivantes sont présentées et discutées les applications numériques proposées.

5.7.1 - Validation au niveau élémentaire du mécanisme d'endommagement incorporé dans la formulation par élément finis avec la théorie FSDT

Un seul élément fini quadratique avec deux couches, soit quatre points de Gauss par couche, d'épaisseur totale e de 0,001 m de largeur b de 0,01 m a été utilisé pour la validation des procédures d'incorporation du mécanisme d'endommagement et calcul des contraintes, dans le domaine statique, dans la formulation numérique par éléments finis avec la théorie *FSDT*, pour l'exemple statique.

Dans cette application numérique, le matériau choisi est isotrope avec un module d'élasticité E de 45680 MPa et un coefficient de Poisson ν de 0,30.

On considère $k_1 = k_2 = 2/3$ pour les valeurs des coefficients de correction des cisaillements transversaux de la formulation *FSDT* en utilisant un matériau isotrope, comme indiqué par Reddy (1997).

L'élément fini a un appui simple sur une de ses extrémités, Fig. 5.10 (A), et sur son autre coté est appliquée une charge de traction, du type distribuée P égale à 206000 N/m.

Le chargement est discrétisé en petits incréments ($\Delta \bar{F}_e$), un total de 5000 incréments de charge appliqués en deux modèles différents: (1) un modèle endommagé, c'est-à-dire sujet à la loi d'endommagement ; et (2) un modèle vierge, non endommagé. Le but de cette simulation numérique est de comparer les valeurs des contraintes de Cauchy σ_{22}^T et du module d'élasticité E_{22}^T théoriques déterminées analytiquement avec celles obtenues par la *MEF* incorporant les mécanismes d'endommagement de la matrice polymère du stratifié avec chargement imposé.

Théoriquement, on sait que la valeur de la contrainte de Cauchy σ_{22}^T peut être obtenue, dans le cas de la traction pure, sous la forme analytique :

$$\sigma_{22}^T = \frac{F}{(b \times e)} = \frac{P}{e} \quad (5.58)$$

où b et e sont respectivement, la largeur et l'épaisseur de l'élément finis adopté, P (N/m²) est le chargement distribué par unité de largeur, et F (N) la force concentrée équivalente du chargement distribué. La valeur théorique σ_{22}^T (N/m²) ainsi obtenue est égale à $206,0 \times 10^6$ N/m² (206,0 MPa).

La Figure 5.10 (B) illustre la variation de la contrainte σ_{22} en fonction des déformations ε_{22} du système non endommagé et endommagé et la Fig. 5.11 illustre la variation de l'endommagement en fonction du chargement.

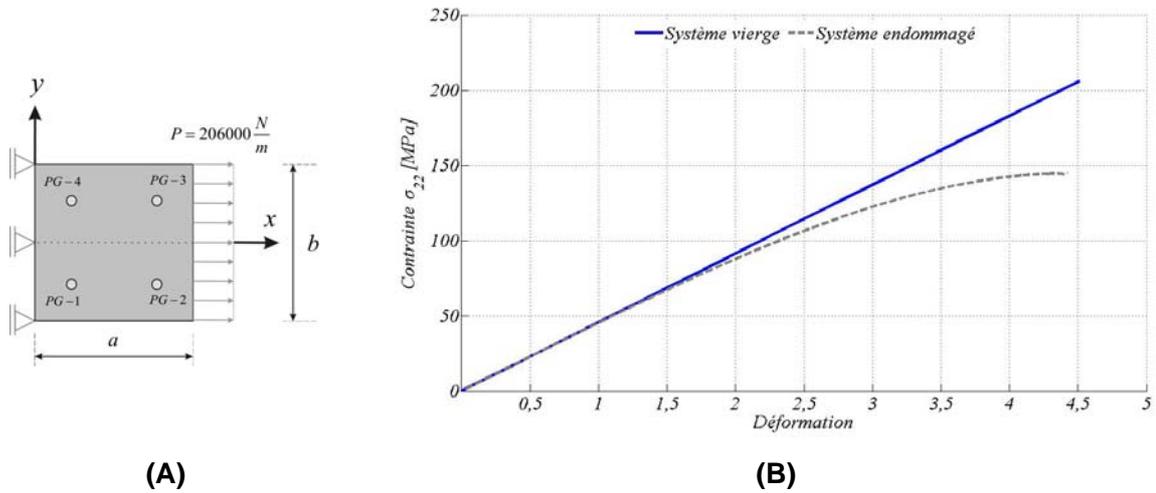


Figure 5.10 - (A) Élément fini analysé, (B) contrainte de Cauchy σ_{22} en fonction de la déformation ε_{22} obtenue pour le système vierge et endommagé.

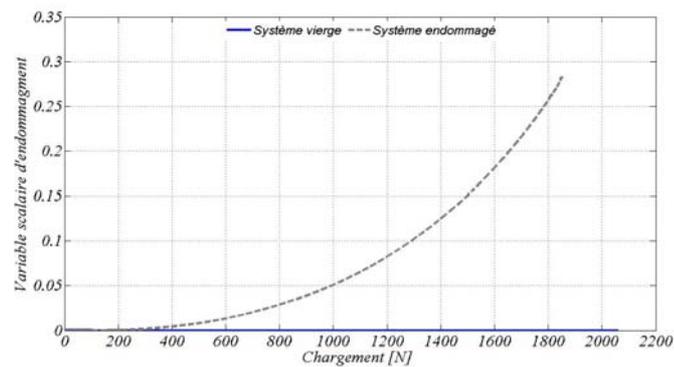


Figure 5.11 - Évolution de la variable scalaire d'endommagement D avec l'incrément de force.

Après 5000 itérations on obtient une valeur de la contrainte σ_{22} (Figure 5.10 (B)), égale à la valeur théorique, c'est-à-dire $\sigma_{22} = \sigma_{22}^T = 206,0$ MPa. Dans les huit *PG* de l'élément fini étudié (quatre *PG* par pli) on obtient la même valeur de la contrainte σ_{22} .

En utilisant la *loi de Hooke* : $E_{22} = \sigma_{22} / \varepsilon_{22}$ et les deux courbes de la Fig. 5.10 (B) (du système vierge et endommagé), on peut obtenir les valeurs du *module d'élasticité de la structure vierge* E_{22}^T et du *module d'élasticité effective* \tilde{E}_{22}^l de la structure endommagée à différents valeurs de la force externe \bar{F} appliquées, quelques unes de ces valeurs sont affichées dans le Tableau 5.3.

Tableau 5.3 - Valeurs du module d'élasticité E_{22} du système endommagé et vierge selon différentes valeurs de la force appliquée.

Force N	D	E_{22}	$E_{22}^T = \sigma_{22} / \varepsilon_{22}$	MPa	
				$\tilde{E}_{22}^l = \sigma_{22}^l / \varepsilon_{22}^l$	$\tilde{E}_{22}^l = (1-D) E_{22}^l$
250,1	0,00	45680	45680	45638	45638
1000,3	0,05	45680	45680	43346	43346
1500,1	0,15	45680	45680	38786	38786
1856,5	0,28	45680	45680	32768	32768

Selon les données fournies dans le Tableau 5.3, le module d'élasticité théorique obtenu numériquement par la loi de Hooke, E_{22}^T , est constant et égal à 45680 MPa, et est identique à celui du matériau stratifié E_{22} . Toutefois, le module d'élasticité effective \tilde{E}_{22}^l varie selon la valeur de la force appliquée sur l'extrémité de l'élément finis étudié. La valeur du module d'élasticité effective est obtenue en utilisant l'équation :

$$\tilde{E}_{22}^l = (1-D) E_{22}^l \quad (5.59)$$

et, est dépendante de la valeur de la variable scalaire d'endommagement fournie sur la Fig. 5.11 selon la force appliquée.

D'accord avec le Tableau 5.3, les valeurs des modules d'élasticités obtenues graphiquement (selon la loi de Hooke $\tilde{E}_{22}^l = \sigma_{22}^l / \varepsilon_{22}^l$ et les valeurs dans la courbe du système endommagé de la Fig. 5.10 (B)) et théoriquement (selon l'expression (5.59)) sont égales.

La valeur maximale obtenue pour la variable scalaire d'endommagement D est égale à 0,28 pour les huit points de Gauss (quatre par pli). Cette valeur est atteinte avant la fin des 5000 itérations, à exactement 4508 itérations car l'endommagement augmente très rapidement après celle-ci en dépassant de l'unité. En considérant cette valeur scalaire d'endommagement, la valeur du module élastique \tilde{E}_{22}^l du matériau endommagé est presque 72% de la valeur initiale du module d'élasticité E_{22} du matériau vierge.

Ainsi, les procédures numériques adoptées dans le domaine statique pour la loi d'évolution de la variable scalaire d'endommagement selon l'historique du chargement appliqué, fournissent des valeurs cohérentes de la contrainte σ_{22} dans tous les points de Gauss de l'élément fini utilisé. Cette validation statique du modèle d'endommagement, nous permet son extension au *domaine temporel* pour des applications à des structures endommagées diverses (poutres, plaques ...), avec différentes conditions aux limites, orientations des couches et etc.

5.7.2 - Analyse de l'endommagement dynamique de la poutre en matériau stratifié

Cette application numérique traite de l'analyse dans le domaine temporel d'une poutre composite, encadrée-libre de dimension : longueur l de 300 mm, largeur b de 30 mm et épaisseur h de 1 mm. La poutre a trois plis orientés chacun à $(0^\circ / 90^\circ / 0^\circ)$ et dont tous les plis ont la même épaisseur, ses propriétés mécaniques sont fournies dans le Tableau 5.2. La structure est illustrée sur la Fig. 5.12 (A), elle est discrétisée par 10×3 éléments finis pour un total de 550 *ddl*s.

La structure est sollicitée par une force d'excitation impulsive, caractérisée par l'équation (5.55), appliquée à son extrémité libre dans la direction X du repère global de la structure (Figures 5.12 (A) et 5.12 (B)). L'amplitude de la force d'excitation impulsive de traction f_0 choisie est de 3250 N et sa durée d'application est égale à $\delta = 1$ ms. La structure est étudiée jusqu'au temps t_f de 2 ms, discrétisé en 200 incréments de temps.

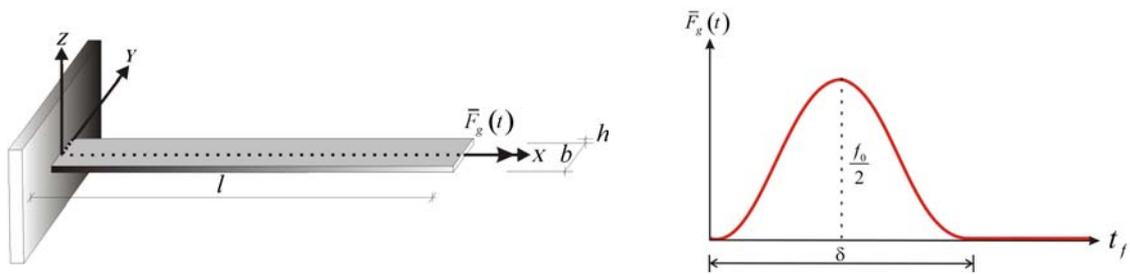


Figure 5.12 - (A) Géométrie de la poutre composite et (B) la force impulsive appliquée sur son extrémité libre.

Les figures (5.13), (5.14) et (5.15) suivantes sont les distributions et les valeurs maximales de la variable scalaire d'endommagement par pli de la poutre composite obtenues à la fin du temps t_f de 2 ms. Dans les trois premières figures, la distribution de la variable D est obtenue dans la superficie moyenne par pli.

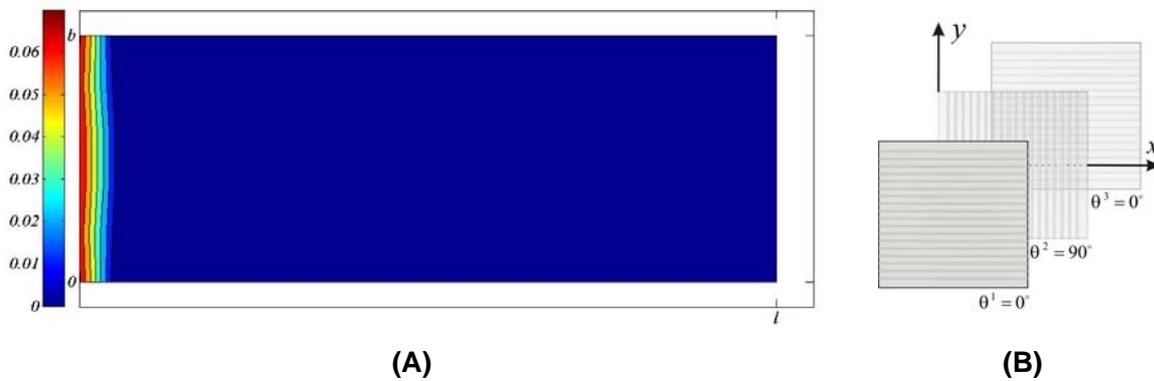


Figure 5.13 - Distribution de la variable scalaire d'endommagement D (A) du pli de la base (B) de la poutre composite, avec $D_{\max} = 0,0721$.

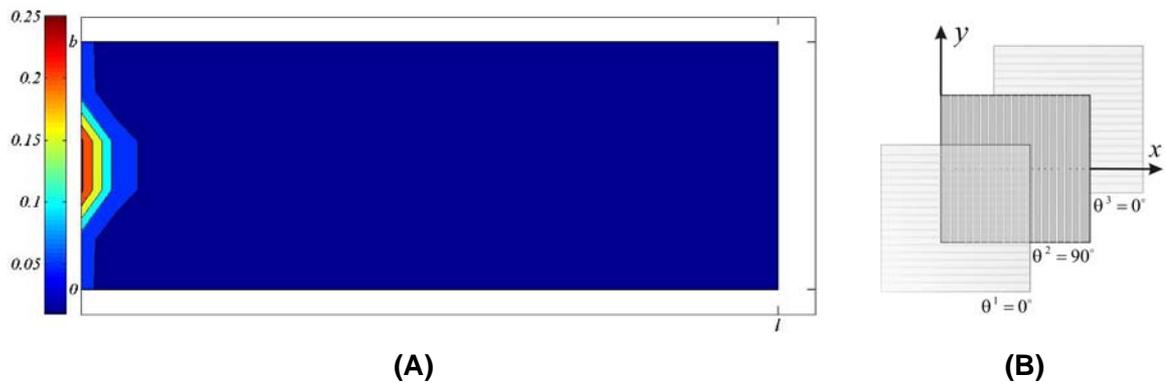


Figure 5.14 - Distribution de la variable scalaire d'endommagement D (A) du pli central (B) de la poutre composite, avec $D_{\max} = 0,2625$.

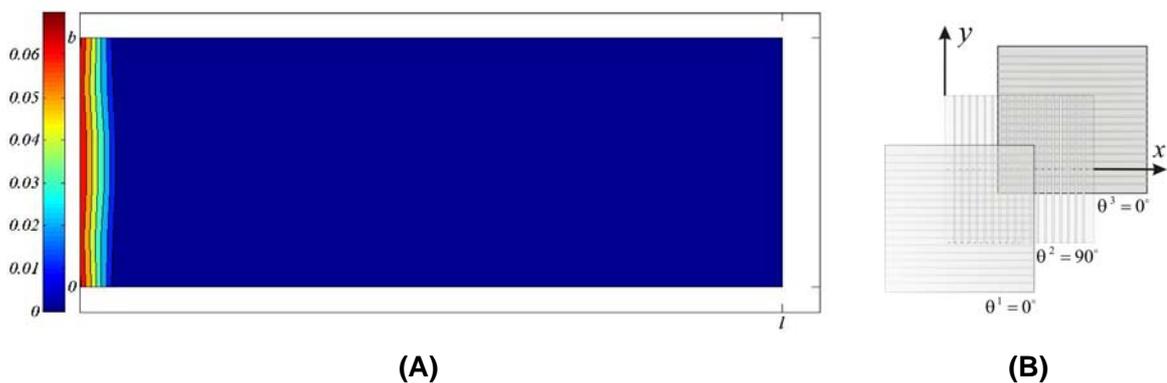


Figure 5.15 - Distribution de la variable scalaire d'endommagement D (A) du pli de la peau (B) de la poutre composite, avec $D_{\max} = 0,0721$.

Selon les trois figures précédentes, le pli central a la valeur de la variable scalaire d'endommagement la plus grande, car ses fibres sont orientées perpendiculairement à la direction du chargement appliqué.

La Figure 5.16 (A) représente les réponses impulsionnelles obtenues pour les systèmes endommagé et vierge, respectivement, au temps final d'excitation de la structure et au début des calculs. La Figure 5.16 (B) représente l'évolution de la variable scalaire d'endommagement du point de Gauss le plus proche de l'encastrement du pli central le plus endommagé.

On peut constater dans la Fig. 5.16 (A) qu'il y n'a pas de différences considérables entre les deux systèmes (endommagé et vierge), même avec l'évolution de la variable

d'endommagement. La Figure 5.16 (B) montre que la valeur de la variable scalaire d'endommagement, obtenue dans le pli central de la structure par le point de Gauss le plus proche de l'encastrement de la poutre, augmente jusqu'à $\delta = \frac{1}{2}$ ms puis reste constante, car l'état de contraintes dans le matériau stratifié de le pli central varie peu, après quelques cycles de traction et compression dans le pli non-amorti en question. Ainsi, la valeur maximale de la variable scalaire d'endommagement D_{\max} à la fin de l'application du chargement est égale à 0,2625 .

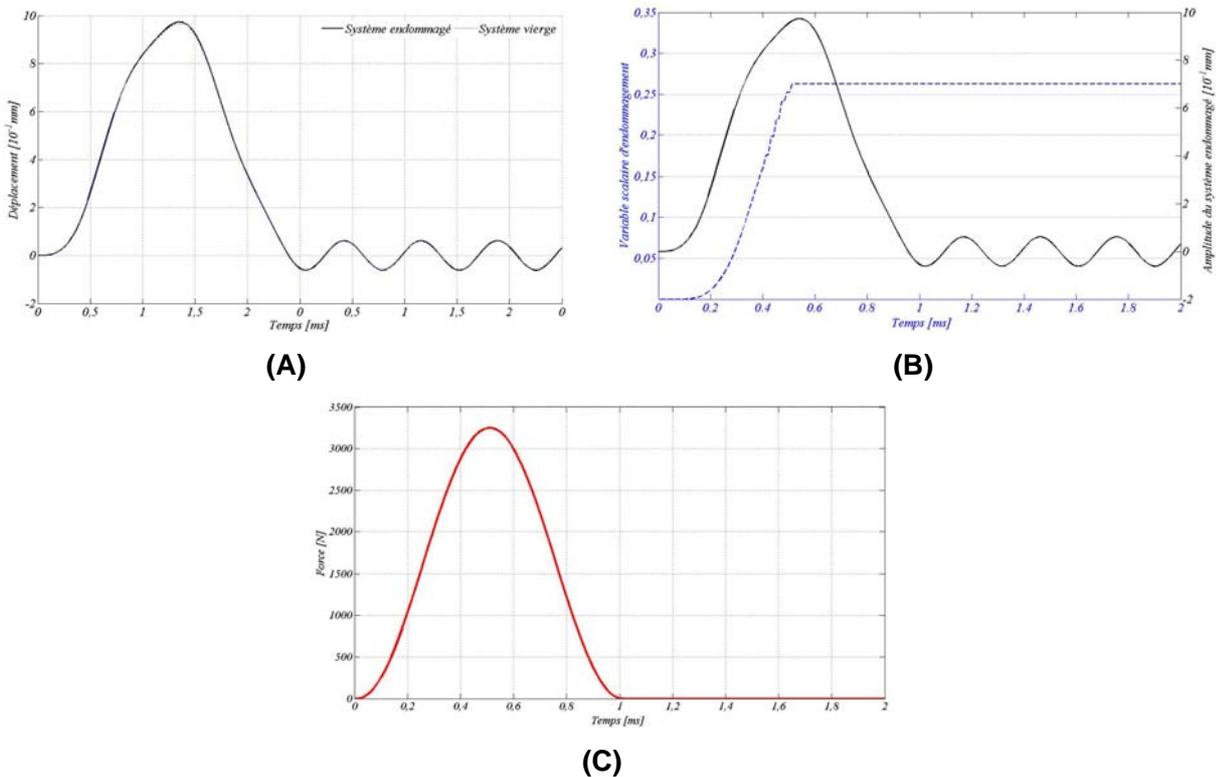


Figure 5.16 - Réponse impulsionnelle du système endommagé et vierge (A). Évolution de la variable scalaire d'endommagement avec le temps (B) en fonction du chargement d'impulsion (C).

Le tableau ci-dessous montre les dix premières fréquences propres de la poutre composite dans les états endommagé et vierge, du système mécanique respectivement au début et à la fin du temps d'étude.

Tableau 5.4 - Fréquences propres de la poutre composite stratifiée saine et endommagée.

Mode	Système	Système	Système
	Vierge (I)	endommagé (II)	endommagé $\varepsilon_i = 100 \times (f_i^I - f_i^{II}) / f_i^I$ (%)
	550 dds	550 dds	(%)
1	8,1872	8,1860	0,01
2	51,2944	51,2886	0,01
3	99,1661	99,2387	-0,07
4	143,8246	143,8156	0,01
5	218,7019	218,2634	0,20
6	282,9858	282,9891	0,00
7	301,5978	301,8012	-0,07
8	471,6003	471,6469	-0,01
9	516,1821	516,4767	-0,06
10	714,1779	714,3147	-0,02

La Figure 5.17 montre une bonne corrélation des déformées dans les deux cas d'étude : structure saine – structure endommagée. Dans les deux cas, la matrice *MAC* est diagonale.

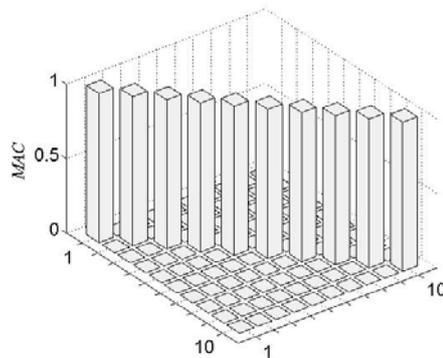


Figure 5.17 - Matrice *MAC* : structure saine - structure endommagée

Dans ce cas, l'endommagement affecte peu les modes propres de la structure et conduit seulement à un léger décalage des fréquences propres de la structure.

5.7.3 - Analyse de l'endommagement dynamique d'une plaque composite

L'application numérique suivante traite de l'analyse dans le domaine temporel de l'évolution de l'endommagement scalaire dans une plaque en matériau stratifié. La structure (Figure 5.18 (A)), est encadrée sur ses quatre bords et a pour dimension : longueur a de 400 mm, largeur b de 300 mm et épaisseur h de 1 mm. La plaque est composée de trois plis, de même épaisseur et orientés à $(0^\circ / 90^\circ / 0^\circ)$ et avec des propriétés mécaniques fournies dans le Tableau 5.2.

La structure composite est discrétisée à 12×16 éléments finis avec un total de 2605 *ddl*s.

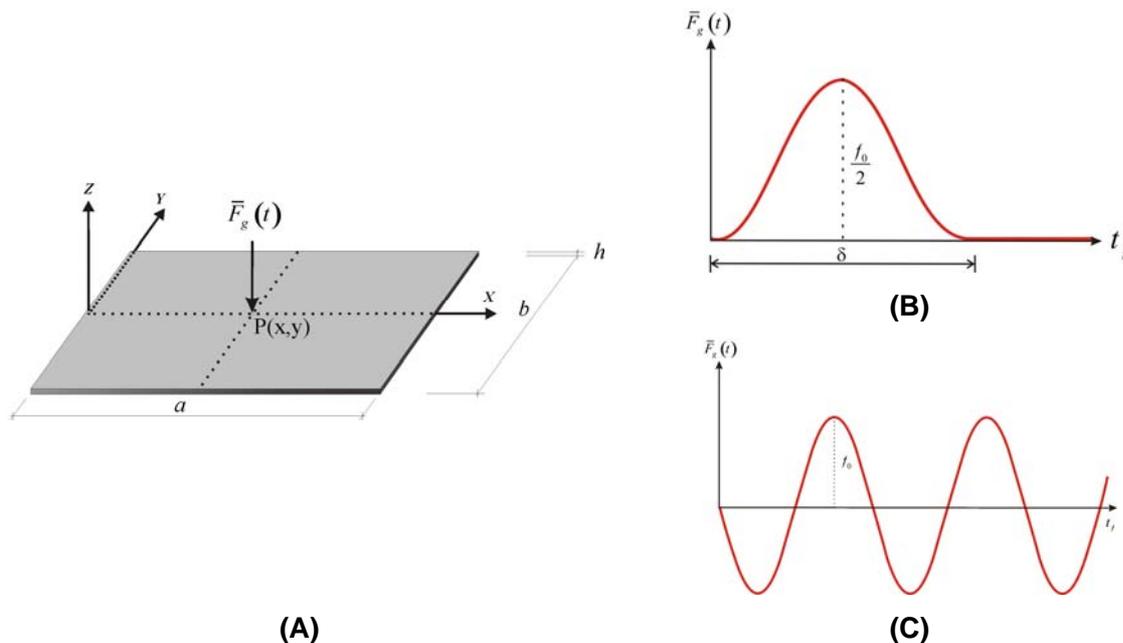


Figure 5.18 - (A) Géométrie de la plaque composite et la direction du chargement appliqué : (B) chargement impulsif et (C) chargement harmonique.

La plaque composite (Figure 5.18 (A)) est sollicitée avec deux différents types de sollicitations :

(1) une charge impulsive, équation (5.55) et Fig. 5.18 (B), appliquée dans la direction du repère Z , au centre de la plaque $P(a/2, b/2)$;

(2) et une charge harmonique, du type sinusoïdale, équation (5.56) et Fig. 5.18 (C), appliquée aussi au centre de la plaque.

On considère le premier cas de chargement avec une amplitude f_0 de -118 N et une durée d'application δ de 100 ms. Le temps final de l'étude t_f de 200 ms, subdivisé dans un total de 200 incréments de temps.

Les trois figures suivantes illustrent la distribution de la variable scalaire d'endommagement et sa valeur maximale atteinte au temps t_f , pour chacune des superficies moyennes de la structure composite.

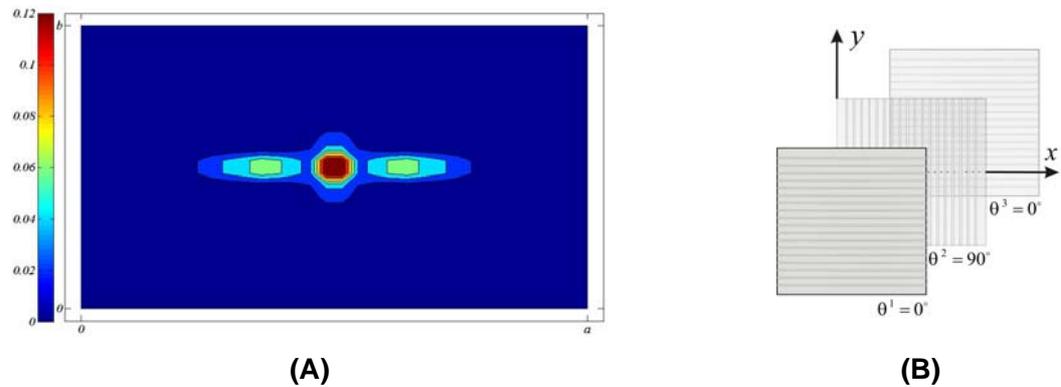


Figure 5.19 - Distribution de la variable scalaire d'endommagement D (A), du pli de la base (B), de la plaque composite, où $D_{\max} = 0,1376$.

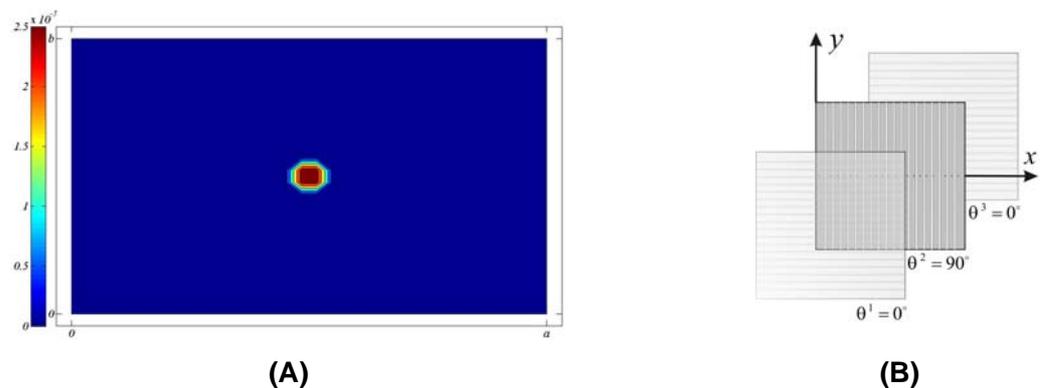


Figure 5.20 - Distribution de la variable scalaire d'endommagement D (A), du pli central (B), de la plaque composite, où $D_{\max} = 0,0027$.

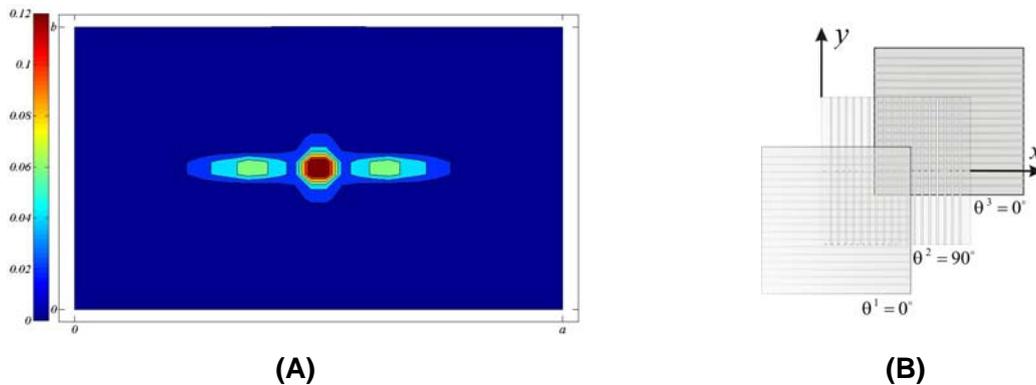


Figura 5.21 - Distribution de la variable scalaire d'endommagement D (A), du pli de la peau (B), de la plaque composite, où $D_{\max} = 0,1376$.

La différence entre les endommagements dans les différentes couches peut s'expliquer par la variation linéaire des contraintes dans l'épaisseur de la couche. Ce qui fait que la couche centrale se trouve au niveau des contraintes nulles puisqu'il n'y a que de la flexion.

Les trois figures précédentes montrent que les valeurs de la variable scalaire d'endommagement des plis des bases supérieure et inférieure sont plus élevées que celles du pli central, car les plis des faces de la structure ont des fibres qui sont orientées selon la direction de la longueur de la plaque composite, c'est-à-dire selon la direction X du repère global de la structure (Figures 5.18 (A), 5.19 (B) et 5.21 (B)), tandis que celles du pli central sont orientées dans la direction de la largeur de la structure (Figure 5.20 (B)). Les repères global de la structure (X, Y, Z) et le repère élémentaire (x, y, z) de chaque élément fini, sont adoptés parallèles entre eux. L'orientation des fibres des deux plis extérieures est favorable à l'ouverture de microfissures, comme on peut constater sur les valeurs de la variable scalaire d'endommagement des plis externes par rapport au pli central, tel qui est illustrées sur les figures 5.19, 5.20, et 5.21.

La Figure 5.22 (A) illustre la réponse impulsionnelle du système endommagé et vierge (sans endommagement), et la Fig. 5.22 (B) l'évolution de la variable scalaire d'endommagement dans le temps d'étude, dont celle-ci est obtenue dans le point de Gauss le plus proche du centre du premier pli, c'est-à-dire $(a/2, b/2, 0)$.

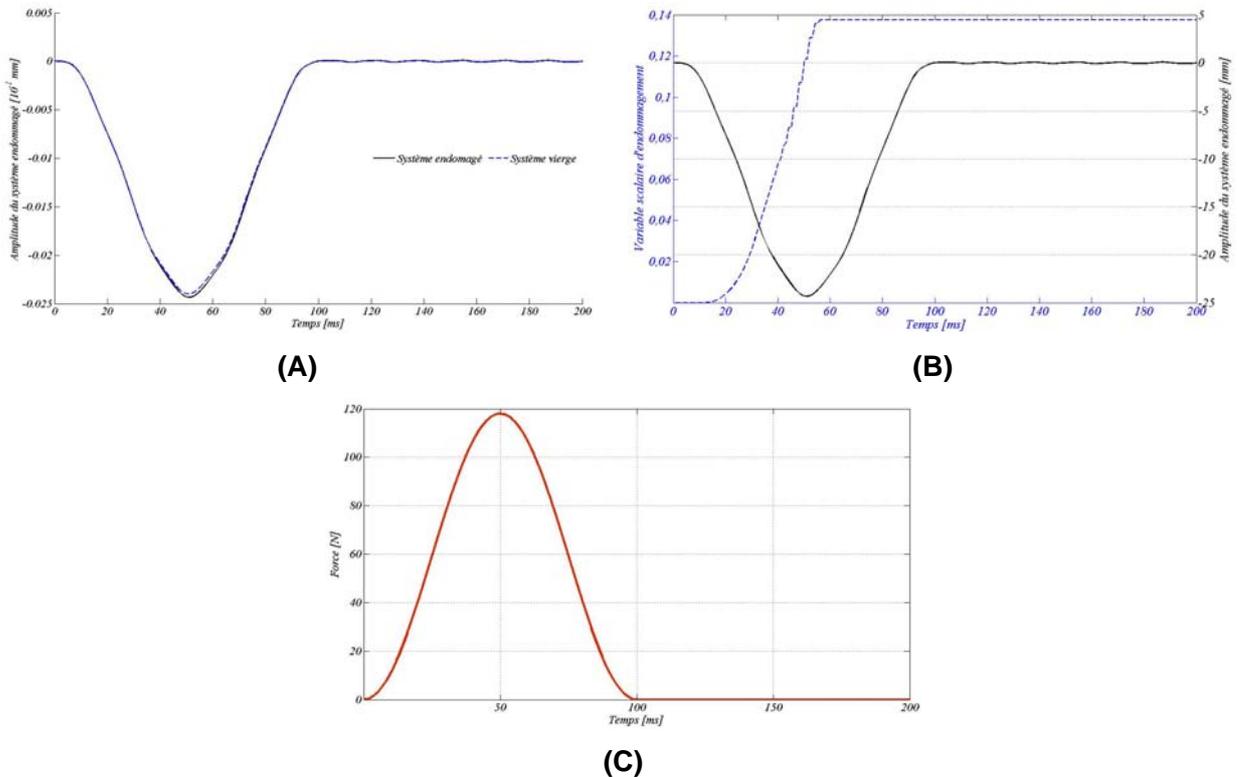


Figure 5.22 - Réponse impulsionnelle du système endommagé et vierge (A). Évolution de la variable scalaire d'endommagement avec le temps de la plaque excitée (B) en fonction du chargement d'impulsion (C).

On peut constater dans la Fig. 5.22 (A) qu'il y n'a pas une différence notable entre les courbes du déplacement entre les modèles endommagé et vierge. La Figure 5.22 (B) montre que la valeur de la variable scalaire d'endommagement, obtenue pour le point de Gauss le plus proche du point d'application du chargement et dans le pli de la base de la plaque composite, augmente vite jusqu'à le temps $\delta = \frac{100}{2} \text{ ms}$ et reste constante jusqu'au temps final d'étude.

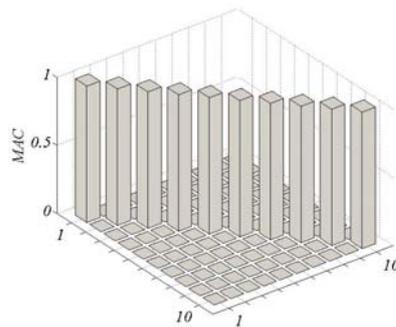
L'endommagement atteint sa valeur maximale, $D_{\max} = 0,1376$, à la fin du temps t_f .

Le Tableau 5.5 résume les résultats des fréquences propres calculées pour la structure saine et endommagée du modèle de plaque composite.

Tableau 5.5 - Fréquences propres de la plaque composite stratifiée saine et endommagée.

Mode	Système	Système	Système
	Vierge (I)	endommagé (II)	endommagé $\varepsilon_i = 100 \times (f_i^I - f_i^H) / f_i^I$
	2605 dds	2605 dds	(%)
1	61,2936	61,1959	0,16
2	87,0429	86,8602	0,21
3	134,1827	133,6487	0,40
4	155,6802	155,6558	0,02
5	177,6409	177,6014	0,02
6	201,5857	200,9447	0,32
7	218,7644	218,6478	0,05
8	281,253	281,1389	0,04
9	288,2813	286,7706	0,52
10	299,0921	298,8879	0,07

La Figure 5.23 montre une bonne corrélation des déformées dans les deux cas d'étude : structure saine – structure endommagée. Dans les deux cas, la matrice *MAC* est diagonale.

Figure 5.23 - Matrice *MAC* : structure saine - structure endommagée

Dans ce cas, l'endommagement affecte peu les modes propres de la structure et conduit seulement à un léger décalage des fréquences propres de la structure.

Dans un deuxième exemple numérique, on applique un chargement harmonique de type sinusoïdal donné par l'équation (5.56). Le chargement est appliqué au point $(a/2, b/2, 0)$, selon

la direction Z du repère global de la plaque composite (Figures 5.18 (A) et (C)). Son amplitude f_0 est de -70 N pour une fréquence d'excitation choisie à 80 rad/s. Ce chargement harmonique est appliqué avec un pas de temps $\Delta s = 0,5$ ms, entre 0 et le temps finale $tf = 450$ ms (Figure 5.27 (C)).

Les trois figures suivantes illustrent la distribution et la valeur maximale de la variable scalaire d'endommagement par pli, et qui sont obtenues à la fin du temps tf d'étude.

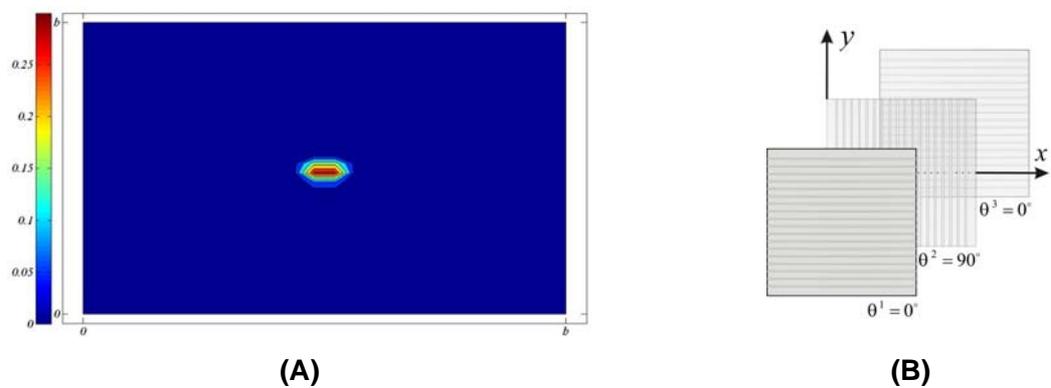


Figure 5.24 - Distribution de la variable scalaire d'endommagement D (A), du pli de la base, (B), de la plaque composite, où $D_{\max} = 0,3076$.

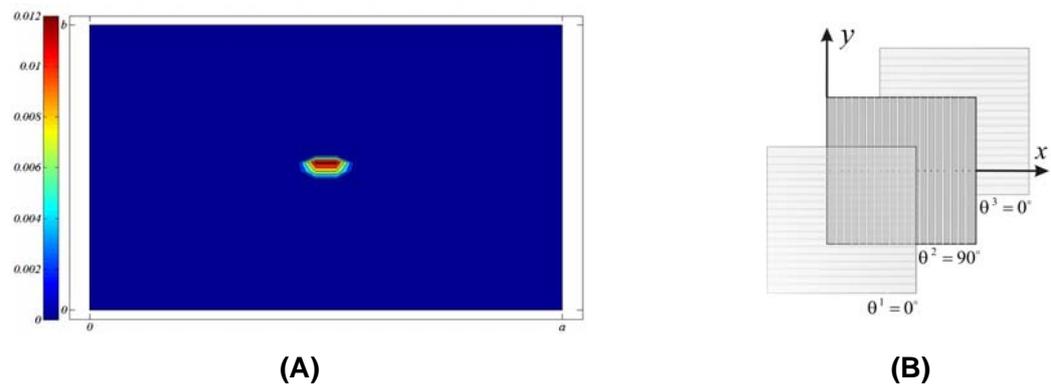


Figure 5.25 - Distribution de la variable scalaire d'endommagement D (A), du pli central, (B), dans la plaque composite, où $D_{\max} = 0,012$.

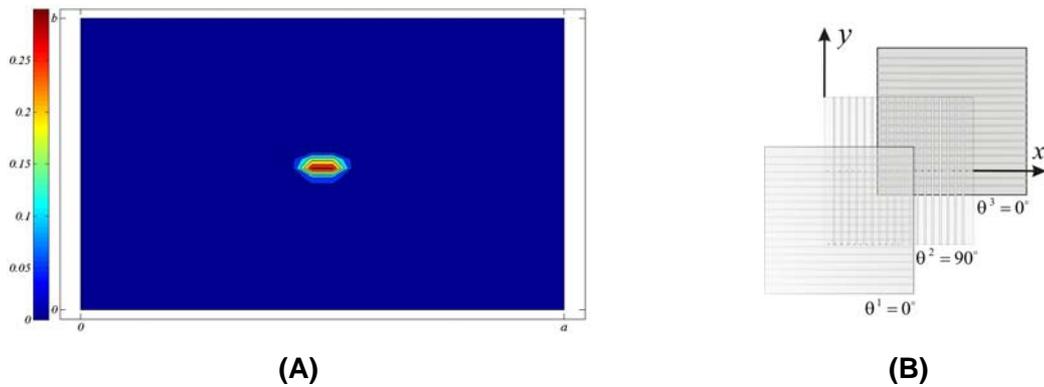


Figura 5.26 - Distribution de la variable scalaire d'endommagement D , (A), du pli de la peau, (B), dans la plaque composite, où $D_{\max} = 0,3076$.

La valeur maximale de la variable scalaire d'endommagement est située dans la zone proche du point d'application de la force harmonique et sa valeur est la même par les plis de la base et de la peau de la structure composite étudiée. Toutefois, la zone d'endommagement maximum, se déplace légèrement en fonction de la position du pli. Dans les plis des bases supérieure et inférieure (orientés chacune à 0°) la distribution de la variable scalaire d'endommagement se ressemblent beaucoup, et se distingue de celle obtenue dans au pli central (orienté à 90°).

La Figure 5.27 (A) illustre la réponse impulsionnelle, des systèmes endommagé et vierge. La Figure 5.27 (B) illustre la variation de la variable scalaire d'endommagement avec le temps. Celle-ci est obtenue dans le point de Gauss plus proche de la position $(a/2, b/2, 0)$ localisé au centre de plaque composite. La force d'excitation est indiquée par la Fig. 5.27 (C).

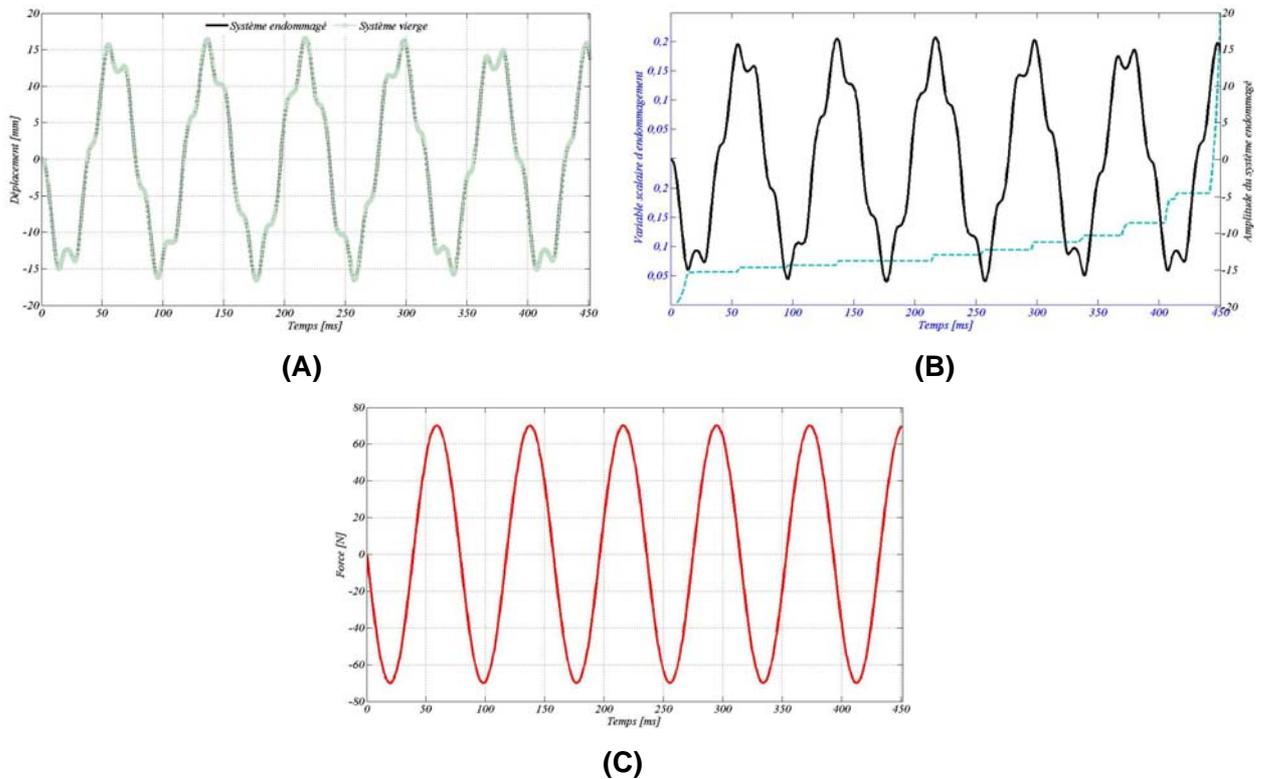


Figure 5.27 - Réponse impulsionnelle du système (A) et la variation de la variable scalaire d'endommagement avec le temps (C) de la plaque composite excitée par le chargement (C).

Dans la Figure 5.27 (B) nous remarquons que la valeur de la variable d'endommagement augmente, après cinq cycles et demi d'excitation de la structure composite (Figures 5.27 (B) et (C)), très rapidement jusqu'à son valeur maximale D_{\max} de 0,3076 .

Le Tableau 5.6 regroupe les dix premières fréquences propres de la plaque composite, calculées dans l'état vierge ($t = t_0$) et endommagé ($t = t_f$) du matériau.

Tableau 5.6 - Fréquences propres de la plaque composite stratifiée, saine et endommagée.

Mode	Système	Système	Système
	Vierge (I)	endommagé (II)	endommagé $\varepsilon_i = 100 \times (f_i^I - f_i^H) / f_i^I$
	2605 dds	2605 dds	(%)
1	61,2936	61,2291	0,11
2	87,0429	87,0592	-0,02
3	134,1827	133,7892	0,29
4	155,6802	155,7080	-0,02
5	177,6409	177,7533	-0,06
6	201,5857	201,6118	-0,01
7	218,7644	219,1306	-0,17
8	281,253	282,0368	-0,28
9	288,2813	287,4503	0,29
10	299,0921	299,0623	0,01

Les résultats du tableau précédent montrent qu'il y n'a pas de différences remarquables entre les fréquences propres obtenues dans l'état vierge et endommagé de la structure composite étudiée.

La Figure 5.28 montre la bonne corrélation des déformées dans les deux cas d'étude : structure saine – structure endommagée. Dans les deux cas, la matrice MAC est diagonale.

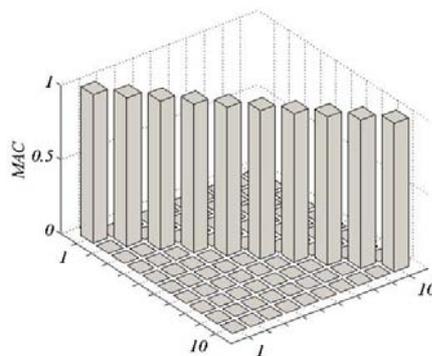


Figure 5.28 - Matrice MAC : structure saine - structure endommagée

Tel que dans le cas l'étude précédent, l'endommagement affecte peu les modes propres de la structure et conduit seulement à un léger décalage des fréquences propres de la structure.

Des Figures 5.22 (A) et (B), et les Figures 5.27 (A) et (B), nous pouvons remarquer que les valeurs de la variation du déplacement transversal u selon le temps sont grands. Le *MEF-FSDT* endommagé présenté dans ce chapitre, formulé avec l'hypothèse des petits déplacements, font qu'illustrer le comportement de la variation scalaire d'endommagement dans les plaques composites qui sont étudiées, car il y est nécessaire d'utiliser une formulation par éléments finis qui tient en compte des grands déplacements, et ainsi obtenir la bonne distribution et valeurs de la variable scalaire d'endommagement.

5.8 Conclusions

Dans la littérature, il existe plusieurs modèles mathématiques d'endommagement pour des matériaux composites, où chacun est associé à l'endommagement d'un des composants du stratifié (matrice, fibres, interface fibre-matrice) ou à l'interaction entre eux. Toutefois, il n'y a pas suffisamment de travaux concernant la méthodologie de leur incorporation aux codes éléments finis d'une part, et l'analyse dynamique de structures endommagées d'autre part. Partant de ce constat nous avons proposé d'aborder ces aspects dans ce chapitre. La plupart des codes d'éléments finis sont associés aux applications dans le domaine statique. Particulièrement, dans ce chapitre nous avons essayé de développer une méthodologie de calcul par éléments finis, en utilisant la théorie *FSDT*, avec la *méthode d'intégration implicite de Newmark*, pour la formulation de structures composites endommagées dans le domaine temporel. Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à l'étude de structures composites, minces et en déconsidèrent l'effet de plasticité et de viscoélasticité du matériau composite. Un modèle classique d'évolution de la variable scalaire d'endommagement est incorporé à l'élément fini Serendip. Suite à l'incrémentation du déplacement de la structure avec le temps, les matrices des constantes d'élasticité du matériau stratifié, sont actualisées. La *méthode d'intégration implicite de Newmark*, couplé à une correction des déplacements par le *Newton-Raphson*, est utilisée. Les résultats numériques, lors de l'évolution de la variable scalaire d'endommagement dans le temps, sont bons quantitativement par rapport au cas de traction pure d'une structure composite. Cependant, dans les cas de flexion, nous avons la nécessité d'une formulation

basée sur les grands déplacements, pour mettre en évolution la variable scalaire d'endommagement.

Dans le cas la méthodologie d'incorporation d'endommagement avec le *MEF-FSDT*, dans le cas statique, est validée avec de courbes qui montrent la variation de déformation avec les contraintes effectives. Dans le domaine dynamique, particulièrement dans le cas de traction pure, les résultats numériques de l'évolution de la variable scalaire d'endommagement sont conformes à l'hypothèse de petits déplacements du *MEF-FSDT*. Cependant, dans le cas de flexion, nous avons la nécessité d'une formulation basée sur l'hypothèse de grands déplacements, pour mettre en évolution l'endommagement. Le mécanisme interne d'endommagement, dans la matrice du pli, affecte peu les modes propres de la structure, en conduisant à un léger décalage des fréquences propres de la structure.

En résumé, dans les applications numériques réalisées nous avons constaté que nous devons bien choisir : (1) le type de *mécanisme d'endommagement* ; (2) les *modèle d'éléments finis* utilisés ; (3) la *taille de maillage* de la structure et, (4) la *méthode d'intégration numérique* utilisée pour la résolution, dans le domaine temporel, de l'équation du mouvement du système endommagé. Ainsi, nous avons de différents mécanismes d'endommagement, en considérant : l'ouverture et fermeture des microfissures, l'endommagement orthotrope, l'endommagement entre plis, l'endommagement des fibres et de l'interface fibre-matrice. Par rapport aux différents *MEFs* des structures composite endommagées, nous pouvons choisir par exemple : celles des théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise*. Le choix entre l'une ou l'autre est associé, entre autres choses : à l'épaisseur de la structure composite, à la distribution des déformations et des contraintes selon l'épaisseur de la structure composite et le coût numérique associé à la modélisation de la structure composite.

CHAPITRE VI

FORMULATION D'UN ÉLÉMENT FINI COMPOSITE STOCHASTIQUE - APPLICATION DE TECHNIQUES DE RÉDUCTION DE MODÈLES POUR L'ÉTUDE DES STRUCTURES COMPOSITES

6.1 Introduction

Le paramétrage du modèle éléments finis permet que les matrices de raideur et de masse globales factorisées restent inchangées dans un processus itératif, tel que les problèmes d'optimisation, de recalage de modèles, de sensibilité ... etc. Par exemple, les fonctions objectifs des problèmes d'optimisation multi-objectifs sont constituées d'un ensemble de paramètres (géométriques et/ou matériels) analysés durant le cycle itératif d'évaluation de la fonction objectif et une partie importante du coût de calcul du processus d'optimisation est lié à la réactualisation des matrices élémentaires et leurs assemblages. À ce sujet, on peut citer la publication de Lima (2007) sur la modélisation de structures sandwichs planes et légèrement courbes traitées avec des matériaux viscoélastiques. Selon l'auteur, le paramétrage adopté conduit à des réductions importantes du coût de calcul des processus d'optimisation multi-objectif des structures sandwichs amorties analysées. Un autre travail, de Lima et al. (2010) désormais dans le domaine des structures en matériaux composites, utilise les techniques de paramétrage dans un *MEF* utilisant la théorie *HSDT* (*MEF-HSDT*) pour la modélisation par éléments finis de plaques sandwichs laminées amorties par traitements viscoélastiques dans des études de sensibilité aux variations des paramètres d'épaisseur, d'orientations de plis et de module de cisaillement du matériau viscoélastique. Les réponses des amplitudes sous la forme de *FRFs* des structures composites y sont utilisées.

Ce chapitre propose une méthode de paramétrage du *MEF* avec la théorie *FSDT* (*MEF-FSDT*) théorie qui sera utilisée pour la modélisation numérique de structures composites et pour l'étude de sensibilité des *FRFs* à certains paramètres de la structure.

On prend en compte les paramètres associés à l'orientation des fibres (θ^k), aux constantes d'élasticité (p^k), à la densité (ρ^k) et à l'épaisseur (h^k) du matériau stratifié du pli k de la structure composite du *MEF-FSDT* paramétré. Ce chapitre a pour principaux objectifs :

1 - L'obtention d'un *MEF-FSDT* paramétré obtenu par la factorisation des variables de conception ($\theta^k, p^k, \rho^k, h^k$) dans les matrices élémentaires de masse et de raideur par pli.

Le *MEF-FSDT* paramétré ainsi obtenu découple les effets de membrane, flexion et cisaillement plans des effets de cisaillements transversaux ;

2 - La réduction du temps de calcul nécessaire à l'obtention de la solution de l'équation du mouvement du système global paramétré (ou non paramétré) dans le domaine fréquentiel. En effet, l'inversion directe de la matrices dynamique $[Z]$ associée à l'obtention de la *FRF* du système mécanique pour chaque pas de fréquence, selon l'équation (4.54) du Chapitre IV, conduit à des temps de calcul prohibitifs. L'équation du mouvement du système mécanique peut être obtenue par les théories *FSDT*, *HSDT* ou *FSDT-Layerwise* qui sont utilisées dans ce mémoire dans la modélisation par éléments finis de structures composites (avec ou sans traitement viscoélastique). Pour réaliser cette réduction du temps de calcul, nous adoptons la technique de réduction modale qui consiste à projeter les équations du mouvement du système sur une base de réduction modale $[\mathbf{T}_0]$ afin de réduire le nombre de degrés de liberté (*ddl*s) du système original et donc accélérer la résolution numérique du problème ;

3 - Après l'application de la technique de paramétrage et de réduction modale, le troisième objectif est d'utiliser la technique de condensation de Guyan pour l'étude de la réduction des *ddl*s non physiques de la théorie *HSDT*, car l'introduction de variables additionnelles dans son champ de déformations conduit dans un *MEF-HSDT* dont le coût numérique est plus grand que celui issu de la théorie *FSDT* (*MEF-FSDT*), de la théorie *Layerwise-FSDT*. Afin de remédier à cet inconvénient de la formulation *HSDT*, dont la cinématique nécessite 11 *ddl*s par nœud, une formulation *HSDT* avec 7 *ddl*s a été proposée ici, basée sur le travail de Shankara et Iyengar (1996). Un autre inconvénient de la formulation *HSDT* réside dans la taille du *MEF* plus ou moins grande qui en résulte

avec une cinématique à 11 *ddl*s, et plus particulièrement, pour des structures composites complexes. Le couplage de cette théorie avec la *méthode de condensation de Guyan* permet de réduire la taille du modèle statique ou dynamique à résoudre (SUBBIAH et al., 1988).

Les fréquences et les modes propres associés au problème dynamique sont obtenues avec une bonne précision numérique dans la bande fréquentielle $[0 - f_c / 3]$, où f_c est la fréquence de coupure. Cette fréquence de coupure est la plus petite fréquence propre de la structure dite « *esclave* » qui correspond à la structure avec tous les *ddl*s maîtres (*ddl*s conservés) bloqués (BOUHADDI et FILLOD, 1992).

Pour obtenir un bon compromis entre la capacité de prédiction et le coût de calcul, nous proposons dans ce mémoire, une méthode qui permet de coupler la formulation *HSDT* et la réduction de Guyan soit au niveau élémentaire avant assemblage, soit au niveau global du modèle élément fini après assemblage. Au niveau élémentaire, nous obtenons un super-élément avec une cinématique à 7 *ddl*s par nœud (appelé *EHSdT*). Les *ddl*s sont répartis en 5 *ddl*s physiques et 2 *ddl*s généralisés. Au niveau global, nous obtenons un modèle avec une cinématique à 5 *ddl*s physiques par nœud ou bien à 7 *ddl*s par nœud (5 physiques et 2 non-physiques) (appelé *GHSdT*). La cinématique à 5 *ddl*s physiques est complètement compatible avec la cinématique des éléments finis standard. Des exemples académiques permettront de mettre en évidence le domaine de validité de la méthode proposée, ses performances et son intérêt pratique ;

4 - De plus, un des challenges de ces dernières années est associé au développement des méthodes d'analyse robustes pour la prise en compte des incertitudes en calcul de structures. Cependant, il n'existe encore pas de stratégies efficaces pour traiter le cas des aléas sur la géométrie et matériau des matériaux composites. Une approche non intrusive (type *Monte Carlo*), couplée à un *MEF*, peut bien sûr être appliquée. Elle nécessite cependant autant de remaillages (car le *MEF* n'est pas paramétré par rapport au maillage) que de réalisations de la géométrie, ce qui rend le coût de calcul prohibitif. Dans ce chapitre nous présentons un *MEF-FSDT* stochastique appliqué aux études de structures composites permettant la prise en compte d'aléas sur la géométrie, sur quelques propriétés élastiques du matériau stratifié et ses orientations de plis, sans nécessiter de remaillage. Cette méthode repose sur une représentation du champ aléatoire utilisant l'*expansion de Karhunen-Loève (KL)* (GHANEM et SPANOS, 2003), qui consiste à coupler un développement en série du champ aléatoire. Elle conduit par un

calcul direct réalisé sur un maillage fixe, à une solution d'une grande précision, en fonction des variables de base décrivant l'aléa sur la géométrie et les propriétés matériaux. Ainsi, le quatrième et dernier objectif de ce chapitre concerne la formulation d'un *MEF-FSDT stochastique* appliqué à la modélisation de structures composites. Nous emploierons les concepts établis auparavant pour le paramétrage *MEF-FSDT* et la réduction modale. Nous utiliserons dans les applications numériques de ce chapitre, le *MEF-FSDT stochastique* pour l'étude de la sensibilité paramétrique de structures composites en matériau stratifié en considérant les incertitudes sur les paramètres d'orientation de plis, des propriétés du matériau et l'épaisseur des plis. Les *FRFs* de la structure composite sont obtenues et comparées avec celles obtenues en appliquant la *méthode directe de Monte Carlo* sur le *MEF-FSDT déterministe*.

Les implémentations numériques des techniques de paramétrage, de réduction modale, de condensation de Guyan et de la formulation d'un élément fini composite stochastique ont été mises en œuvre dans le logiciel MATLAB® et les formulations analytiques seront présentées dans les sections suivantes.

6.2 Paramétrage du MEF-FSDT

Le paramétrage du *MEF-FSDT* consiste à factoriser les *paramètres mécaniques* et/ou *géométriques* appelés *paramètres de conception*, des matrices globales de masse $[M_k^g]$ et de raideur $[K_k^g]$ associées à un chaque pli k d'une structure composite quelconque. L'exposant $(^g)$ indique que les matrices sont au niveau global dans la formulation par éléments finis.

Les paramètres de conception mécaniques et géométriques sont notés respectivement par k^k et m^k et agissent, respectivement, sur les matrices globales $[M_k^g]$ et $[K_k^g]$. Celles-ci sont obtenues par l'assemblage global d'une ensemble de matrices élémentaires factorisées de masse $[m_k^e]^{(i)}$ et de raideur $[k_k^e]^{(i)}$ associées respectivement aux paramètres $(k^k)^{(i)}$ et $(m^k)^{(i)}$.

Les paramètres de conception associés aux notations k^k et m^k du pli k du stratifié sont : l'épaisseur h^k , la densité ρ^k , l'orientation θ^k des fibres et ses constantes d'élasticité $p^k (E_1^k, E_2^k, E_3^k, G_{23}^k, G_{13}^k, G_{12}^k)$. Ainsi on a : $k^k (h^k, \theta^k, p^k)$ et $m^k (h^k, \rho^k)$.

Les matrices globales $[K_k^g]$ et $[M_k^g]$ du pli k sont obtenues en réalisant l'assemblage des matrices élémentaires factorisées $[k_k^e]$ et $[m_k^e]$ multipliées par leurs paramètres de conception correspondant, k^k ou m^k (équations F.26 et F.27). Ainsi, les matrices élémentaires de raideur et de masse sont fonctions des paramètres $k^k (\theta^k, h^k, p^k)$ et $m^k (h^k, \rho^k)$, qui à l'exception de la densité ρ^k , interviennent de manière non linéaire dans les matrices élémentaires, selon les expressions :

$$[K_k^g] = \bigcup_{e=1}^{Ne} [K_k^e (k^k (\theta^k, h^k, p^k))] \quad (6.1)$$

$$[M_k^g] = \bigcup_{e=1}^{Ne} [M_k^e (m^k (h^k, \rho^k))] \quad (6.2)$$

où Ne indique le nombre total d'éléments finis discrétisant la structure composite. L'assemblage est fait en employant la matrice de connectivité $[L_e]$ dont les détails d'utilisation sont décrits dans l'Annexe B.1. Le symbole \bigcup indique l'assemblage de matrices.

Les matrices précédentes sont associées à un pli k quelconque de la structure composite. Toutefois, pour tous ses Nc plis, nous avons les expressions suivantes des matrices de raideur et de masse au niveau global de la formulation par éléments finis :

$$[K^g] = \sum_{k=1}^{Nc} [K_k^g] \quad (6.3)$$

$$[M^g] = \sum_{k=1}^{Nc} [M_k^g] \quad (6.4)$$

Les détails concernant l'obtention des matrices élémentaires de masse et de raideur paramétrées d'un élément fini quelconque formulé avec la théorie *FSDT* sont présentés dans les deux Annexes F.1 et F.2. L'Annexe F.1 présente la méthodologie pour le paramétrage des constantes d'élasticité et de l'orientation des fibres des plis et l'Annexe F.2 la méthodologie pour le paramétrage de l'épaisseur et la densité.

Le calcul des *Fonctions Réponse Fréquentielle (FRFs)*, lors de l'analyse dynamique dans domaine fréquentiel de structures composites formulées par éléments finis, tel qu'il est décrit dans la section 4.7 du Chapitre IV pour un système amorti peut s'avérer très coûteux voir impraticable pour des modèles de grande taille. Il est alors nécessaire d'utiliser les techniques de réduction de modèle afin de diminuer le coût de calcul du système résultant du *MEFs*, amorti ou non. Nous détaillerons ce problème dans la prochaine section.

6.3 Réduction modale des MEFs

Un des inconvénients d'un *MEF* utilisant l'élément Serendip est associé à la grande taille des équations du mouvement du système non amorti, ou amorti, données par les équations (3.82) et (4.19) présentées respectivement dans les Chapitre III et IV.

Soit $N_{\text{nœud}}$ le nombre total de nœuds d'un *MEF* construit avec les théories *HSDT*, *Layerwise-FSDT* ou *FSDT*. L'élément fini Serendip disposant d'un total de 11 degrés de liberté (*ddl*s) par nœud, le nombre total N_{ddl} de *ddl*s est égal à $N_{\text{nœud}} \times 11$, ce qui correspond aussi à l'ordre des matrices globales de masse et de raideur dans l'équation du mouvement du système mécanique sans l'application des conditions limites. Dans les formulations par éléments finis des théories *Layerwise-FSDT* et *FSDT*, le nombre de *ddl*s se réduit, respectivement, à 9 et à 5 *ddl*s par nœud et N_{ddl} est donné par $N_{\text{nœud}} \times 9$ et $N_{\text{nœud}} \times 5$. En fonction de la taille de maillage adoptée, la taille des matrices de masse et raideur globales de l'équation du mouvement augmente de façon significative, et ainsi, il devient nécessaire d'adopter des techniques pour la réduction des équations du mouvement du système.

Selon Stoppa (2003), il existe plusieurs techniques pour la réduction des *MEFs*. Parmi elles, nous trouvons la *méthode de condensation de Guyan* (1965) (détaillée dans la prochaine section), la *méthode d'équilibre interne* proposée par Moore (1981), la *méthode de l'équilibre*

interne modifiée proposée par Yae et Inman (1993) et la technique simple mais efficace de *réduction modale*.

La description détaillée de la technique de *réduction modale*, appliquée aux équations du mouvement des systèmes amortis et non amortis, peut être consultée dans le travail de Raynaud et al. (2006). Il introduit une base de réduction nominale, appelée ici $[\mathbf{T}_0]$, composée de trois composantes différentes: $[\Psi]$, $[\mathbf{R}]$ et $[\mathbf{R}_\Delta]$, respectivement les *modes propres du système non amorti*, le *résidu statique*, et le *résidu de la partie imaginaire* qui par ailleurs est associé à l'amortissement introduit par le traitement passif avec des matériaux viscoélastiques, quand il existe dans la structure composite modélisée.

Plus spécifiquement, dans la base de réduction nominale, la composante $[\Psi]$ contient les premiers modes retenus parmi ceux obtenus par la résolution des équations du problème aux valeurs propres fournie dans l'équation (3.83) du Chapitre III pour un système non amorti. Ainsi, le premier terme de la base de réduction nominale $[\mathbf{T}_0]$, est donné par les N_r premiers modes propres de la matrice $[\Psi]$ (équation (3.86) du Chapitre III dans le cas non amorti), c'est-à-dire : $[\Psi] = [\Psi_1 \ \Psi_2 \ \dots \ \Psi_{N_r}]$. En général, on choisit $2,5 \times N_r$ comme le nombre de modes à retenir propres pour une approximation adéquate de la réponse fréquentiel des N_r premiers modes propres choisis.

Pour enrichir la base de réduction nominale, Balmès et Germès (2002) ont proposé d'utiliser des résidus statiques basés sur le vecteur des déplacements $\{b\}$ associés aux chargements imposés à la structure, méthode connue comme *correction statique du premier ordre*, qu'e l'on peut obtenir selon l'expression :

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{K}_g]^{-1} \{b\} \quad (6.5)$$

où la matrice de raideur global $[\mathbf{K}_g]$ et le vecteur de déplacements $\{b\}$ interviennent dans le système à condenser.

Le résidu statique fourni par l'équation précédente est complété, à cause de l'incorporation d'un traitement viscoélastique, par le calcul de la réponse statique aux

chargements produits par la partie imaginaire de la matrice de raideur complexe du matériau viscoélastique, selon l'expression suivante (LIMA, 2007) :

$$[\mathbf{R}_\Delta] = [\mathbf{K}_g]^{-1} [\mathbf{K}_g^v]^{-1} [\Psi] \quad (6.6)$$

où la matrice de raideur complexe $[\mathbf{K}_g^v]$ est celle de la sous-structure purement viscoélastique et qui est fournie par l'équation (4.18) du Chapitre IV.

Selon Lima (2007), le résidu fourni par l'équation (6.6) est associé aux effets viscoélastiques du système nominal amorti, afin de tenir compte des forces viscoélastiques.

Finalement, la base de réduction nominale enrichie, peut être exprimée comme suit :

$$[\mathbf{T}_0] = [[\Psi] \quad [\mathbf{R}] \quad [\mathbf{R}_\Delta]] \quad (6.7)$$

La base de réduction nominale fournie par l'équation (6.7) précédente peut être utilisée pour réduire la taille des équations du mouvement du système amorti, ou non amorti, avec une précision raisonnable. La prise en compte ou non de la contribution du résidu $[\mathbf{R}_\Delta]$ dépend de la présence ou non du traitement viscoélastique sur la structure. Toutefois, la base de réduction nominale n'est pas forcément « robuste » et ne permet pas de tenir compte des *modifications paramétriques*. En effet, on cherche à obtenir cette robustesse lorsque l'on utilise des procédures de condensation de modèles pendant les processus itératifs d'optimisation et/ou de recalage de modèles. La stratégie d'enrichissement de la base donnée par l'équation (6.7) est faite par un ensemble de vecteurs de *réponses résiduelles statiques* issues des *modifications paramétriques*. Sa formulation mathématique peut être consultée dans le travail de Lima (2007). En considérant l'expression (6.7) précédent et la fonction de transfert exprimée dans l'équation (4.54) du Chapitre IV, la fonction de transfert $H(\omega, \bar{t})$ peut être approchée par :

$$H(\omega, \bar{t}) = \{c\} [\mathbf{Z}(\omega, \bar{t})]^{-1} \{b\}^T \quad (6.8)$$

où $[\mathbf{Z}(\omega, \bar{t})]$ est la matrice de rigidité dynamique réduite, donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} [\mathbf{Z}(\omega, \bar{t})] = \\ [\mathbf{T}_0]^T [\mathbf{K}_g^{nv}] [\mathbf{T}_0] + G(\omega, \bar{t}) [\mathbf{T}_0]^T [\mathbf{K}_g^v] [\mathbf{T}_0] - \omega^2 [\mathbf{T}_0]^T [\mathbf{M}_g] [\mathbf{T}_0] \end{aligned} \quad (6.9)$$

Dans la section suivante nous présentons la méthode de condensation de Guyan.

6.4 Condensation de Guyan appliquée à la théorie HSDT

Dans cette section, on propose de coupler la formulation *HSDT* et la *condensation de Guyan* au niveau élémentaire (*EHSDT*).

On définit la matrice $[\varphi_e]$ de *transformation de Guyan au niveau élémentaire*, sous sa forme standard :

$$[\varphi_e]_{((m+s) \times m)} = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_e^{mm}] \\ -[\mathbf{K}_e^{ss}]^{-1} [\mathbf{K}_e^{sm}] \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

où $[\mathbf{I}_e^{mm}]$ est la matrice identité au niveau élémentaire de dimension $(m+s) \times (m)$. Chaque nœud est constitué de 5 *ddl*s physiques $(u_0, v_0, w_0, \psi_x, \psi_y)$ et 2 *ddl*s non-physiques (ζ_x, ϕ_x) . Il en résulte $m = 56$ par élément fini à 8 nœuds. Parmi les *ddl*s éliminés existe un *ddl* physique (ψ_z) et 3 *ddl*s non-physiques $(\zeta_y, \zeta_z, \phi_y)$ par nœud. Il en résulte $s = 32$ pour un élément fini à 8 nœuds.

Ainsi, les matrices de masse et de raideur élémentaires, obtenues dans l'Annexe B.1, équations (B.8) et (B.20), sont transformées comme suit :

$$[\bar{\mathbf{K}}_e]_{(m \times m)} = [\varphi_e]_{((m+s) \times m)}^T [\mathbf{K}_e]_{((m+s) \times (m+s))} [\varphi_e]_{((m+s) \times m)} \quad (6.11)$$

$$[\bar{\mathbf{M}}_e]_{(m \times m)} = [\varphi_e]_{((m+s) \times m)}^T [\mathbf{M}_e]_{((m+s) \times (m+s))} [\varphi_e]_{((m+s) \times m)} \quad (6.12)$$

Ces expressions condensées de matrices de raideur et de masse sont ensuite utilisées pour l'assemblage des matrices au niveau élémentaire.

Par conséquent, le couplage formulation *HSDT - réduction de Guyan Élémentaire* conduit à un super-élément à 7 *ddl*s (5 *ddl*s physiques $(u_0, v_0, w_0, \psi_x, \psi_y)$ + 2 *ddl*s non-physiques (ζ_x, ϕ_x)) par nœud au lieu des 11 *ddl*s par nœud (6 *ddl*s physiques + 5 *ddl*s non-physiques) dans la formulation classique *HSDT*.

La *réduction de Guyan au niveau global (GHSDT)* est réalisée de la même manière que la réduction de Guyan au niveau élémentaire sauf qu'elle utilise comme référence l'équation d'équilibre obtenue par l'assemblage de matrices élémentaires de la formulation *HSDT*. La matrice de *transformation de Guyan au niveau global* est de la forme suivante :

$$\left[\varphi_g \right]_{((S+M) \times M)} = \begin{bmatrix} \left[I_g^{MM} \right] \\ \hline -\left[K_g^{SS} \right]^{-1} \left[K_g^{SM} \right] \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

où $\left[I_g^{MM} \right]$ est la matrice identité au niveau global de dimensions $(M+S) \times (M)$, avec M le nombre de *ddl*s physiques $(u_0, v_0, w_0, \psi_x, \psi_y)$ et non-physiques (ζ_x, ϕ_x) de la structure complète. Ainsi, $M = 7 \times (N_{\text{nœud}})$. L'exposant S est le nombre total de *ddl*s non-physiques $(\zeta_y, \zeta_z, \phi_y)$ et physiques (ψ_z) . Ainsi, $S = 4 \times (N_{\text{nœud}})$.

Les matrices globales de masse et de raideur des équations (B.26) et (B.28) de l'Annexe B.1 sont condensées en utilisant la transformation (6.13) :

$$\left[\bar{M}_g \right]_{(M \times M)} = \left[\varphi_g \right]_{((M+S) \times M)}^T \left[M_g \right]_{((M+S) \times (M+S))} \left[\varphi_g \right]_{((M+S) \times M)} \quad (6.14)$$

$$\left[\bar{K}_g \right]_{(M \times M)} = \left[\varphi_g \right]_{((M+S) \times M)}^T \left[K_g \right]_{((M+S) \times (M+S))} \left[\varphi_g \right]_{((M+S) \times M)} \quad (6.15)$$

Les deux méthodes de condensations exposées dans ce mémoire sont couplées en vue d'obtenir une condensation à deux niveaux :

- ✓ **Niveau 1** : condensation de Guyan sur les *ddl*s de la formulation *HSDT*;
- ✓ **Niveau 2** : réduction modale pour réduire la taille du modèle dynamique global.

Dans ce chapitre, la réduction modale est appliquée aux formulations des *MEFs-FSDT*, stochastique et déterministe, pour l'obtention des fonctions de transfert $H(\omega, \bar{t})$ des structures composites modélisées. Par contre, la technique de *condensation de Guyan* est employée dans l'étude sur la possibilité de réduction de la taille du *MEF-HSDT*. Cette condensation, au niveau élémentaire et global, est mise en œuvre sur la modélisation par éléments finis de structures composites, étudiées dans les domaines statique et dynamique.

6.5 Formulation générale du MEF-FSDT composite stochastique

6.5.1 - Modélisation du champ stochastique

L'incorporation des incertitudes dans le *MEF-FSDT* paramétré, plus spécifiquement dans les matrices de raideur et de masse déterministes paramétrées fournies dans les équations par les équations (F.26) et (F.27) de l'Annexe F.2, est faite en considérant que quelques-uns de ses paramètres suivent une variation aléatoire donnant origine à un champ aléatoire.

Un champ stochastique $H(X, \theta)$ est une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre continu $X \in \Omega$, avec $\Omega \in \mathbb{R}^d$ l'espace en décrivant la géométrie du système physique. La variable appelé aléa, est associée aux réalisations du champ aléatoire. Un champ stochastique permet de représenter une variation spatiale.

Ce champ peut être *unidimensionnel* ($d=1$) ou *multidimensionnel* ($d>1$). Nous considérons dans la suite que la discrétisation est basée dans l'approximation d'un *champ aléatoire bidimensionnel* $H(x, y, \theta)$, tel que $x \in \Omega$, $y \in \Omega$ et $\Omega \in \mathbb{R}^2$.

En effet, nous utiliserons ce champ stochastique pour réaliser des études de sensibilité aux incertitudes dans l'orientation de fibres, l'épaisseur de plis et quelques constantes d'élasticité des structures composites fabriquées en matériau stratifié, discrétisés par des éléments finis plans bidimensionnels du type Serendip. Parmi les familles de méthodes pouvant être utilisées pour discrétiser le champ aléatoire bidimensionnel $H(x, y, \theta)$, nous choisissons d'utiliser la *décomposition de Karhunen-Loève (DKL)*, tel que proposé par Ghanem et Spanos (2003). La *DKL* permet de décomposer tout champ aléatoire $H(x, y, \theta)$, en une partie

déterministe et une partie aléatoire décomposée sur la base des valeurs propres $\sqrt{\lambda_r}$ et fonctions propres $f_r(x, y)$ de la fonction de covariance $C[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ (BERVEILLER, 2005).

Ainsi, le champ aléatoire bidimensionnel $H(x, y, \boldsymbol{\theta})$, gaussien homogène (Figure 6.1 (B)), est projeté sous la forme orthonormée tronquée suivante :

$$H(x, y, \boldsymbol{\theta}) = E(x, y) + \sum_{r=1}^{N_p} \sqrt{\lambda_r} f_r(x, y) \xi_r(\boldsymbol{\theta}) \quad (6.16)$$

où $f_r(x, y)$ et $\sqrt{\lambda_r}$ représentent, respectivement, les *fonctions propres* et les *valeurs propres* définies de la *covariance bidimensionnelle* $C[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ associée au champ aléatoire bidimensionnel $H(x, y, \boldsymbol{\theta})$, bornée, symétrique et définie positive. De plus, nous avons $\{\xi_r, i = 1, \dots, N_p\}$, où N_p est le nombre de paramètres aléatoires.

La décomposition spectrale de $C[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ pour une configuration géométrique relativement simple, tel qu'une *plaque composite rectangulaire*, est exprimée sous la forme de suivante fournie en Ghanem et Spanos (2003) :

$$C[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \exp\left(-\frac{|x_1 - x_2|}{L_{cor,x}} - \frac{|y_1 - y_2|}{L_{cor,y}}\right) \quad (6.17)$$

où $(x_1, x_2) \in \Omega_x$ et $(y_1, y_2) \in \Omega_y$, $L_{cor,x}$ et $L_{cor,y}$ représentent respectivement les longueurs de corrélation dans les directions x et y pour les domaines d'élément fini : $\Omega_x = [-a', +a']$ et $\Omega_y = [-b', +b']$ (Figure 6.1 (A)).

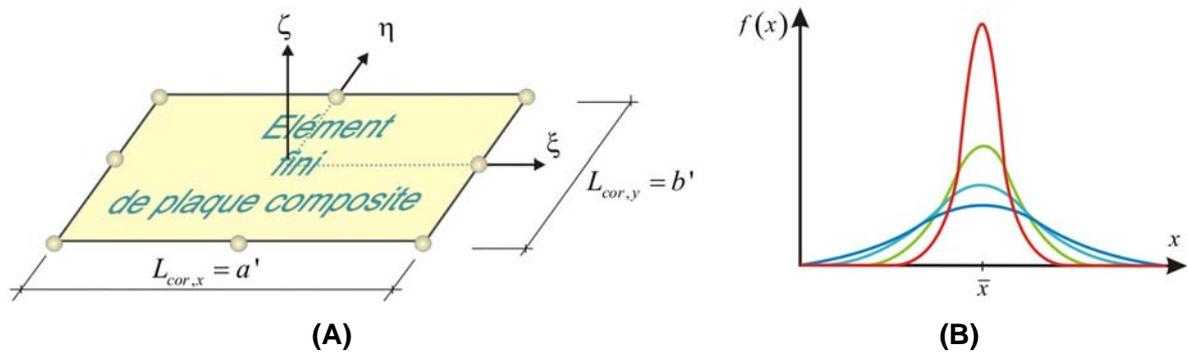


Figure 6.1 - Définition du domaine de corrélation pour l'élément fini de plaque composite (A) et les différentes d'écart type (B).

En considérant la propriété de séparabilité de la fonction de covariance de l'équation (6.17), il résulte que le problème bidimensionnel peut être décomposé en deux problèmes unidimensionnels de fonctions et valeur propres calculées de manière indépendante, soit :

$$f_r(x, y) = f_i(x) f_j(y) \quad (6.18)$$

$$\lambda_r = \lambda_i \lambda_j \quad (6.19)$$

Ainsi, les couples $(\lambda_i, f_i(x))$ sont obtenus avec une longueur de corrélation $L_{cor,x}$ dans le domaine $\Omega_x = [-a', +a']$, alors que les couples $(\lambda_j, f_j(y))$ sont obtenus en résolvant le même problème, mais avec une la longueur de corrélation $L_{cor,y} \in \Omega_y = [-b', +b']$. La formulation mathématique des couples $(\lambda_i, f_i(x))$ est présentée dans l'Annexe F.3.

6.5.2 - Modélisation des matrices de masse et raideur stochastiques

La *DKL* détaillée auparavant a été choisie pour l'incorporation des incertitudes dans les matrices déterministes (de masse et de raider élémentaires paramétrées fournies par les équations F.24 et F.25 de l'Annexe F.2) et exprimée sous la forme présentée dans les deux équations suivantes (GHANEM et SPANOS, 2003) :

$$\left[M^e(\boldsymbol{\theta}) \right]^{(k)} = \left[M_k^e \right] + \sum_{r=1}^{N_p} \left[\bar{m}_r^e \right]^{(k)} \xi_r^k(\boldsymbol{\theta}) \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \left[K^e(\boldsymbol{\theta}) \right]^{(k)} &= \left[K_k^{e,b} \right]^{(k)} + \left[K_k^{e,s} \right]^{(k)} + \sum_{r=1}^{N_p} \left[\bar{k}_r^{e,b} \right]^{(k)} \xi_r^k(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{r=1}^n \left[\bar{k}_r^{e,s} \right]^{(k)} \xi_r^k(\boldsymbol{\theta}) = \\ &= \left[K_k^e \right]^{(k)} + \sum_{r=1}^{N_p} \left[\bar{k}_r^e \right]^{(k)} \xi_r^k(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (6.21)$$

où $\left[K_k^e \right]$ et $\left[M_k^e \right]$ sont respectivement les matrices déterministes de raideur et de masse.

Si $\xi_r^k(\boldsymbol{\theta}) = \bar{\xi}_r^k + \Delta \xi_r^k(\boldsymbol{\theta})$, sont les variables aléatoires factorisées associées à un élément fini pour chaque pli k , les approximations de raideur $\left[\bar{k}_r^e \right]$ et de masse non déterministes $\left[\bar{m}_r^e \right]$ sont calculées tel qu'indiqué dans les deux expressions suivantes :

$$\left[\bar{k}_r^e \right]^{(k)} = \int_{x=0}^{x=a'} \int_{y=0}^{y=b'} \sqrt{\lambda_r} f_r(x, y) \left[N(x, y) \right]^T \left[A_m \right]^T \left[A_m \right] \left[N(x, y) \right] dy dx \quad (6.22)$$

$$\left[\bar{m}_r^e \right]^{(k)} = \int_{x=0}^{x=a'} \int_{y=0}^{y=b'} \sqrt{\lambda_r} f_r(x, y) \left[N(x, y) \right]^T \left[A_m \right]^T \left[A_m \right] \left[N(x, y) \right] dy dx \quad (6.23)$$

Cette procédure est réalisée pour toutes les matrices élémentaires de l'élément fini de plaque composite, en intervenant directement dans le processus d'intégration de chaque pli, pour chaque matrice paramétrée associée aux effets de membrane, flexion et cisaillement, à travers les fonctions de forme, dans le but d'obtenir toutes les matrices élémentaires stochastiques (*paires* et *impaires*), qui sont utilisées dans la série tronquée de *DKL*.

6.5.3 - Modélisation des incertitudes

Les sources d'incertitudes et erreurs selon Alvin (1998) et Vinot (2001) en fonction des phases où elles interviennent au cours de la modélisation et du calcul peuvent être classées telles que venant de :

- (A) la *modélisation mathématique* : associée à l'approximation de la loi de comportement du matériau (approximation linéaire par rapport à une non-linéarité), incertitudes liées à l'adaptation d'ordre du modèle (condensation, structuration, expansion, choix du

type d'éléments finis ...), incertitudes sur les dimensions et propriétés matériaux dues aux processus de fabrication, transformation du système faiblement non-linéaire en linéaire associé ... ;

(B) des *erreurs de discrétisation* : liées aux topologies et comportements complexes exigeant de faire un compromis entre la finesse de discrétisation et le temps de calcul, conditions limites, données indiciaires, éléments finis dégénérés ... ;

(C) des *simplifications géométriques* : associées, par exemple, aux trous discrétisés par plusieurs segments, les arrondis de tôles pliées remplacés par des angles droits ... ;
des erreurs numériques : critère de convergence de l'algorithme de résolution du code de calcul, précisions de la machine ... ;

(D) des *erreurs humaines* lors de l'obtention, la lecture et l'interprétation des résultats.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux *incertitudes sur les dimensions des structures composites et propriétés du matériau stratifié* associées à la modélisation mathématique.

La plupart des méthodes traitant des incertitudes ont comme point de départ une modélisation des incertitudes par des lois probabilistes. Les lois les plus courantes dans la littérature sont le *modèle uniforme* et le *modèle de type gaussien*.

Soit x la variable aléatoire, x_{\min} et x_{\max} sont les valeurs minimale et maximale définissant l'intervalle de variation $[x_{\min} \ x_{\max}]$. La densité de probabilité $f_r(x)$ de valeurs situées à l'intérieur de l'intervalle est identique et celle des valeurs situées à l'extérieur de l'intervalle est nulle. Le densité de probabilité du *modèle uniforme* est donc définie par :

$$\mathbf{Si} \ x \in [x_{\min} \ x_{\max}] \quad f_r(x) = \frac{1}{x_{\max} - x_{\min}} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{Si} \ x \notin [x_{\min} \ x_{\max}] \quad f_r(x) = 0 \quad (6.25)$$

Soient \bar{x} et σ , respectivement la moyenne et l'écart type de la variable aléatoire (Figure 6.1 (B)). La densité de probabilité de la valeur de x de la variable aléatoire est définie par (VINOT, 2001) :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad (6.26)$$

Selon Vinot (2001), beaucoup des mesures suivent une loi normale lorsque la taille de l'échantillon est suffisamment grande (Figure 6.1 (B)). De plus, dans la plupart des cas, on ne s'intéresse qu'aux valeurs comprises dans l'intervalle $[\bar{x} - 3\sigma \quad \bar{x} + 3\sigma]$. La forme de la fonction de probabilité est caractéristique (forme de cloche) et plus la valeur de l'écart type est grand, plus la forme de la courbe est aplatie (Figure 6.1 (B)) et correspond à une grande dispersion des valeurs.

6.5.4 - Méthodes de tirages aléatoires

Ces approches sont plus particulièrement utilisées pour des incertitudes modélisées par des intervalles ou des lois de probabilités. Parmi celles existantes, nous intéressons ici aux *méthodes de Monte Carlo* et *du Latin Hypercube*. Selon la révision présentée dans le travail de Vinot (2001) :

- (A) **Méthode de Monte Carlo** : consiste à générer des tirages aléatoires des valeurs de paramètres incertains puis à calculer les réponses de la structure dans le but d'effectuer une étude statistique. Sa mise en œuvre est très simple et peut s'appliquer à toutes les lois de probabilité définissant les incertitudes des paramètres.
- (B) **Méthode Latin Hypercube** : est considérée comme l'une des meilleures approches de tirages aléatoires de petits échantillons. La méthode *Latin Hypercube* consiste à diviser l'intervalle de variation des variables incertaines en n intervalles dont les probabilités d'obtenir les valeurs incluses dans ceux-ci sont égales. Dans chaque intervalle, on choisit une valeur particulière. Cette valeur peut être définie comme le milieu de l'intervalle ou déterminée de manière aléatoire. La méthode consiste ensuite à choisir de manière aléatoire une valeur particulière parmi les n valeurs de chaque paramètre puis à exécuter le calcul. Lorsqu'une valeur d'une variable a été sélectionnée, elle est éliminée et ne peut pas être sélectionnée une seconde fois. Il y a donc n calculs à effectuer.

On doit remarquer que dans la *méthode de Monte Carlo*, le nombre de tirages aléatoires doit être suffisant pour assurer une certaine confiance dans le résultat calculé et le coût de calcul devient prohibitif dès qu'il s'agit de structures complexes. La *méthode du Latin*

Hypercube, selon Vinot (2001), est moins coûteuse en temps de calcul et semble plus robuste pour calculer la moyenne et la variance.

6.6 Résultats numériques

Nous présentons dans ce qui suit des applications de la technique de réduction de Guyan et des études de sensibilité de structures plaques composites du *MEF-FSDT* à partir des modèles stochastique formulés.

Dans les exemples présentés concernant l'étude de la condensation de la théorie *HSDT* par la *technique de réduction de Guyan*, la précision sur les fréquences propres et les modes propres est calculée par les critères classiques établis selon les équations C.11 et C.12 de l'Annexe C.2. Cette technique est appliquée à des études de structures en forme de poutre métallique et plaque composite.

De plus, pour quantifier l'influence des variables de conception on propose une méthodologie numérique pour évaluer la sensibilité des *FRFs* de systèmes composites par rapport aux paramètres géométriques et matérielles des structures composites académiques. Cette méthodologie utilise le modèle d'éléments finis *FSDT-stochastique*, paramétré, dont son champ aléatoire est obtenu en utilisant l'*expansion de Karhunen-Loève (KL)*.

6.6.1 Condensation de Guyan : Poutre métallique

La poutre en matériau métallique est une structure de conditions limites encastrée-libre. La structure a : $a = 302$ mm de longueur, $b = 24,5$ mm de largeur et $h_f = 3,15$ mm d'épaisseur. Les propriétés physiques du matériau sont : $E = 70$ GPa, $\nu = 0,34$ et $\rho = 2780$ kg/m³.

La poutre est modélisée par 12 éléments finis en utilisant la théorie *HSDT* et ensuite le couplage *HSDT* avec condensation de *Guyan* au niveau élémentaire (*EHSdT*) et *HSDT* avec condensation de *Guyan* au niveau global (*GHSdT*).

Le Tableau 6.1 donne les déplacements statiques obtenus avec l'application d'une force constante de 1 *kgf* à l'extrémité libre de la poutre dans la direction *Z*, perpendiculaire à son plan moyen.

Tableau 6.1. Déplacements [cm] de la poutre métallique.

Noeud	Formulations		
	<i>HSDT</i> 660 ddls	<i>GHSDT</i> 420 ddls	<i>EHSDT</i> 420 ddls
1	-0,02	-0,02	-0,02
2	-0,08	-0,08	-0,08
3	-0,18	-0,18	-0,18
4	-0,3	-0,3	-0,3
5	-0,46	-0,46	-0,46
6	-0,64	-0,64	-0,64
7	-0,84	-0,84	-0,84
8	-1,06	-1,06	-1,06
9	-1,3	-1,3	-1,3
10	-1,54	-1,54	-1,54
11	-1,8	-1,8	-1,8
12	-2,05	-2,05	-2,05

On constate une bonne approximation des déplacements par les méthodes de réduction en comparaison avec la référence issue de la formulation *HSDT*.

En ce qui concerne la dynamique, un calcul a priori de la fréquence de coupure qui définit le domaine de validité de la condensation de Guyan donne une fréquence très élevée ($f_c \geq 2.10^5 Hz$). Par conséquent, le domaine de validité de la réduction de *Guyan* au niveau élémentaire ou global est très large et permet de garantir une bonne prédiction de cette méthode jusqu'à la fréquence $f_c/3$.

Le Tableau 6.2 résume les 5 premières fréquences propres calculées par les 3 méthodes. On constate une bonne concordance des résultats des deux méthodes de réduction avec la référence.

Tableau 6.2. Fréquences propres de la poutre

Modes	Formulations		
	<i>HSDT</i>	<i>GHSDT</i>	<i>EHSDT</i>
1	28,03	28,03	28,03
2	176,77	176,77	176,77
3	500,18	500,18	500,18
4	995,54	995,54	995,54
5	1679,95	1679,95	1679,95

6.6.2 Condensation de Guyan : Plaque composite

Cet exemple concerne la modélisation et l'analyse dynamique d'une plaque en matériau composite qui a également été étudiée par Cugnoni and Schorderet (2004).

La plaque, en conditions libres, est de forme rectangulaire de dimensions $a = 290$ mm, $b = 234$ mm et $h_t = 5$ mm. Elle est formée de huit couches de même épaisseur qui sont orientées à $(90^\circ / 0^\circ)_{2s}$.

Les propriétés physiques de chaque plie sont : $E_1 = 23,5$ GPa, $E_2 = E_3 = 9,4$ GPa, $G_{12} = G_{13} = 2,5$ GPa, $G_{23} = 1,8$ GPa, $\nu_{12} = 0,08$, $\nu_{13} = 0,35$, $\nu_{32} = 0,38$ et $\rho = 1463$ kg/m³.

Le modèle global est discrétisé par 8×8 éléments finis.

La matrice d'amortissement est supposée proportionnelle et un facteur de 2% est introduit dans les réponses dynamiques.

Le Tableau 6.3 résume les résultats des fréquences propres calculées par les 3 modèles : *HSDT*, *GHSDT* et *EHSDT*. Le tableau 6.4 montre la précision des méthodes élémentaires *EHSDT* et globale *GHSDT* en comparaison avec la référence *HSDT*. La méthode globale donne des résultats très précis.

Tableau 6.3. Fréquences propres de la plaque composite

Modes	Formulations		
	<i>HSDT</i>	<i>GHSDT</i>	<i>EHSDT</i>
	2250 <i>ddls</i>	1575 <i>ddls</i>	1575 <i>ddls</i>
1	102,13	102,13	101,83
2	188,37	188,37	188,31
3	279,27	279,27	278,57
4	339,49	339,49	318,61
5	395,13	395,13	376,99
6	525,05	525,05	524,46
7	567,51	567,51	553,56
8	606,27	606,27	604,99
9	879,74	879,74	868,20

La méthode élémentaire a un niveau de prédiction acceptable à l'exception des modes 4 et 5. La fréquence de coupure est dans ces cas telle que $f_c \geq 68000 \text{ Hz}$.

Tableau 6.4. Précision en fréquence [Hz] des méthodes *EHSDT* et *GHSDT*

Fréquences	Formulations		
	<i>HSDT</i>	<i>GHSDT</i>	<i>EHSDT</i>
	2250 <i>ddls</i>	[%]	[%]
1	102,13	0,00	0,29
2	188,37	0,00	0,03
3	279,27	0,00	0,25
4	339,49	0,00	6,15
5	395,13	0,00	4,59
6	525,05	0,00	0,11
7	567,51	0,00	2,46
8	606,27	0,00	0,21
9	879,74	0,00	1,31

Les précisions des déformées propres calculées sont évaluées par le critère *MAC* de l'équation C.12 de l'Annexe C.2.

Les Figures 6.2 (A) et (B) montrent une bonne corrélation des déformées dans les deux cas de couplage *HSDT* – réduction de Guyan. Dans les deux cas, la matrice *MAC* est diagonale.

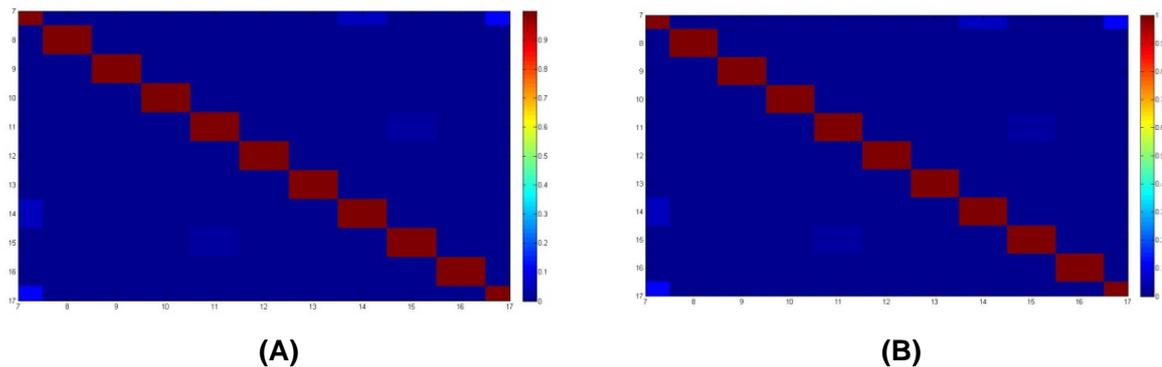


Figure 6.2. *MAC* formulations *HSDT* – *GHSdT* : (A) poutre composite, (B) plaque composite.

Les Figures (6.3), (6.4) et (6.5) montrent une comparaison entre les amplitudes des *Fonctions de Réponses Fréquentielles (FRF)* obtenues par les modèles Guyan global (*GHSdT*), Guyan élémentaire (*EHSdT*) et la méthode de référence *HSDT* dans la bande de fréquence $[0 - 500 \text{ Hz}]$ contenant les cinq premiers modes propres élastiques de la plaque composite. Ces réponses sont calculées par projection sur des bases modales tronquées allant jusqu'à $2 \times f_{\max}$ ($f_{\max} = 500 \text{ Hz}$).

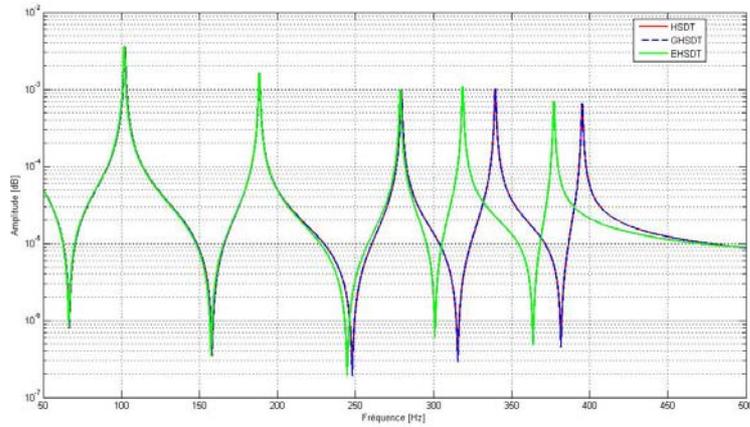


Figure 6.3. Prédiction *FRF* par les 3 méthodes – *d/dl* translation

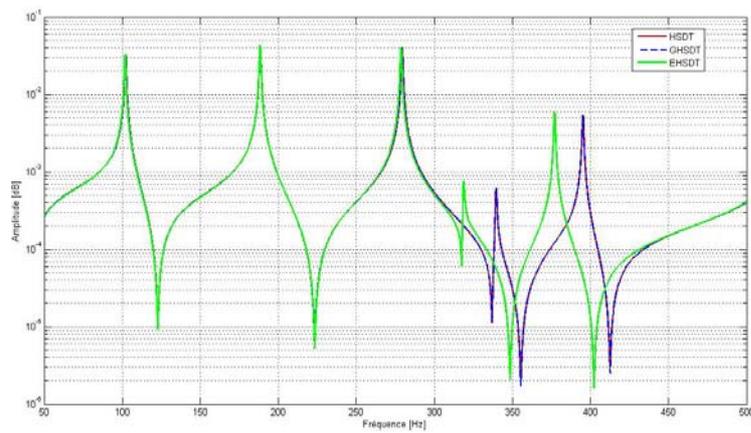


Figure 6.4. Prédiction *FRF* par les 3 méthodes – *d/dl* translation en face de la force d'excitation

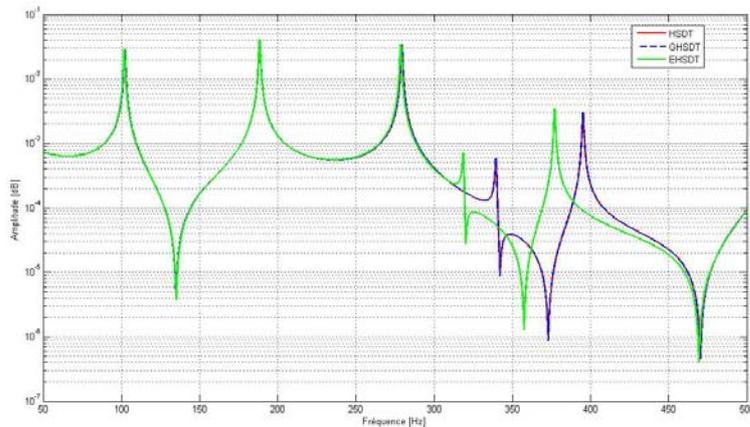


Figure 6.5. Prédiction *FRF* par les 3 méthodes – *d/dl* rotation

On constate que la méthode *GHSDT* prédit les réponses dynamiques avec une grande précision. La méthode *EHSDT* donne également une bonne prédiction car les niveaux des réponses correspondent exactement aux niveaux des réponses de la référence mais il existe un décalage fréquentiel en fin de la bande d'analyse.

6.6.3 *MEF-FSDT* composite stochastique : Analyse de sensibilité des paramètres épaisseur, orientation, densité et module de cisaillement

La seconde application numérique concerne l'étude, dans le domaine fréquentiel, de la sensibilité des paramètres de l'épaisseur, de l'orientation des fibres, de la densité et du module de cisaillement plan d'une plaque composite. Cette structure, illustrée par les Figures 6.6 (A) et (B), est encadrée sur ses quatre bords et présente longueur a de 400 mm, largeur b de 300 mm et épaisseur h_i de 3 mm. La plaque est composée de trois plis, chacune de même épaisseur, orientées à $(0^\circ / 90^\circ / 0^\circ)$ et dont leurs propriétés mécaniques sont fournies dans le Tableau 5.2 du Chapitre V. La matrice d'amortissement est supposée proportionnelle et un facteur d'amortissement de 2% est introduit dans les réponses dynamiques.

La structure composite est discrétisée à 8×8 éléments finis avec un total de 805 *ddl*s. Les calculs consistent à obtenir les sensibilités des *FRFs* sont associées au point I , dénoté sur la Fig. 6.6 (A), dont on applique une force ponctuelle F de -1×10^{-3} N.

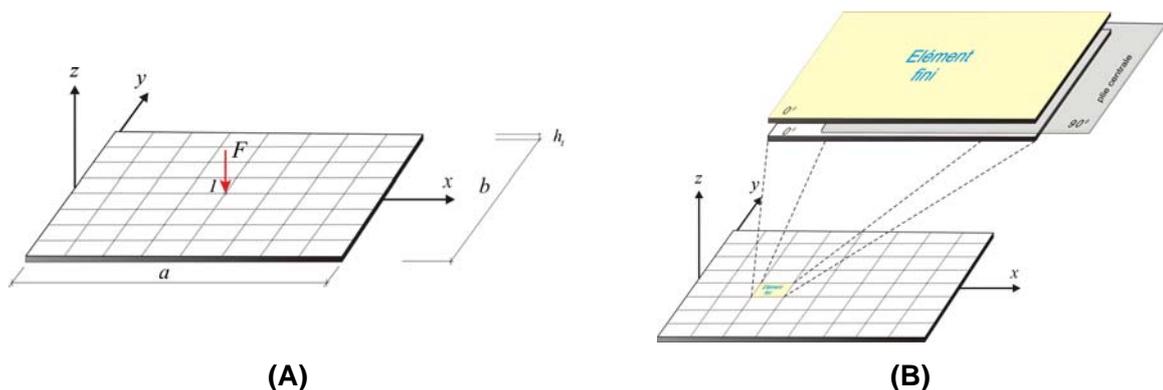


Figura 6.6 - (A) Géométrie de la plaque composite et chargement appliqué. (B) orientation et épaisseur par pli.

On considère la structure avec quatre niveaux d'incertitudes, sur les paramètres de l'épaisseur : $(\delta h_i = P_j \bar{h})$; l'orientation des plis : $(\delta \theta_i = P_j \bar{\theta})$; la densité : $(\delta \rho = P_j \rho)$ et le module de cisaillement plan $(\delta G_{12} = P_j G_{12})$. Où, $i=1,2,3$, \bar{h} et $\bar{\theta}$ sont respectivement l'épaisseur et orientation moyennes du stratifié. Notre intérêt sont les études associés à deux cas dispersions sur les paramètres de conception, c'est-à-dire : cas 1 - $P_1 = 5\%$ et cas 2 - $P_2 = 10\%$.

Nous utiliserons dans cette application numérique, le *MEF-FSDT stochastique* pour l'étude de la sensibilité paramétrique de la plaque composite (Figura 6.6) en considérant les incertitudes sur les quatre paramètres cités auparavant. Nous appliquerons aussi la *méthode directe de Monte Carlo* sur le *MEF-FSDT déterministe* pour le paramètre jugé le plus influent de la structure composite lors de l'analyse du *MEF-FSDT stochastique*.

Les figures 6.7, 6.8, 6.9 et 6.10 illustrent la variabilité de la réponse aléatoire en utilisant le *MEF-FSDT stochastique*. Elles montrent respectivement les *moyennes* et les *statistiques extrêmes* pour les deux cas d'incertitudes étudiés au bout des 500 observations utilisées. Si on compare les figures, on peut vérifier l'influence très significative de l'épaisseur sur les réponses du système, et par ailleurs, l'influence très faible du module de cisaillement plan G_{12} . De plus, on remarque que l'influence des paramètres augmente avec l'augmentation de la fréquence. Car en moyenne et haute fréquence il existe toujours une grande variabilité des réponses du système vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres de conception. La robustesse dans les domaines moyenne fréquence et haute fréquence est plus faible qu'en basses fréquences.

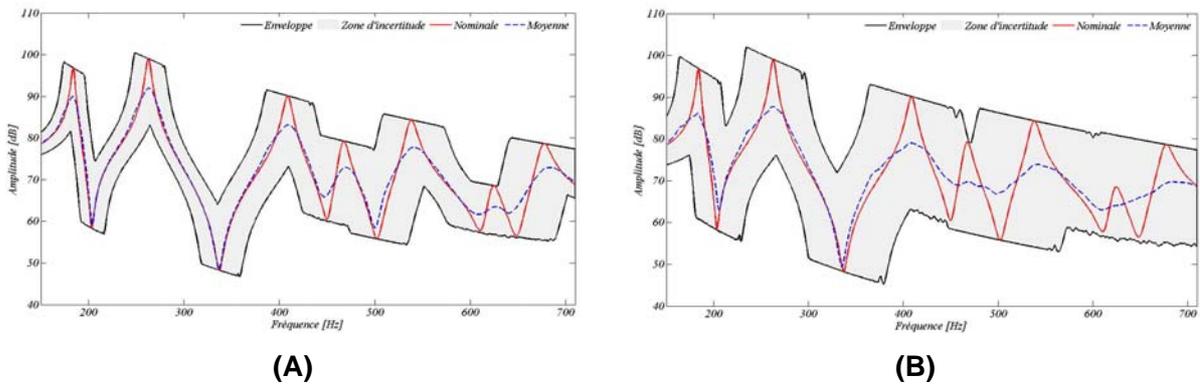


Figure 6.7 - Moyenne et statistiques extrêmes de la réponse aléatoire en fonction de l'épaisseur : cas 1 (A), cas 2 (B).

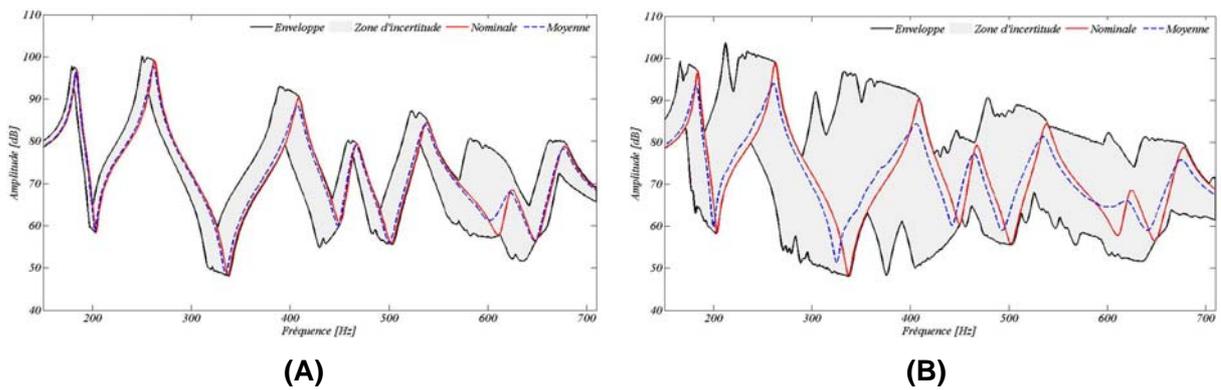


Figure 6.8 - Moyenne et statistiques extrêmes de la réponse aléatoire en fonction de l'orientation des fibres : cas 1 (A), cas 2 (B).

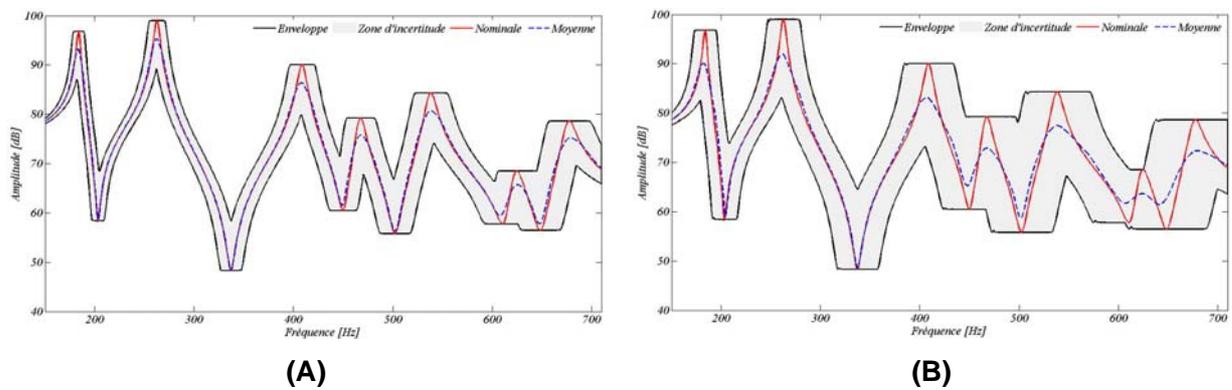


Figure 6.9 - Moyenne et statistiques extrêmes de la réponse aléatoire en fonction de la densité : cas 1 (A), cas 2 (B).

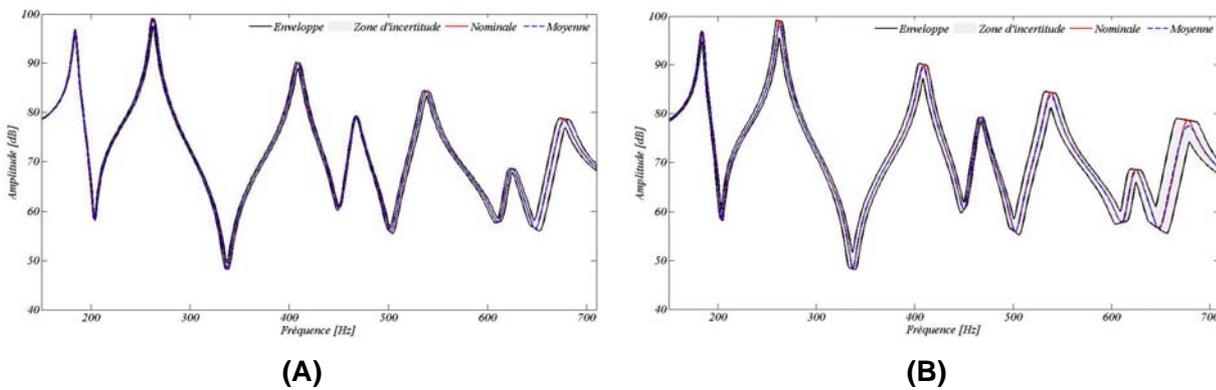


Figure 6.10 - Moyenne et statiques extrêmes de la réponse aléatoire en fonction du module de cisaillement G_{12} : cas 1 (A), cas 2 (B).

Les figures 6.11, 6.12, 6.13 et 6.14 représentent les variabilités de la réponse aléatoire, représentent, respectivement, les moyennes et l'intervalle de confiance à 99 % pour les deux cas d'incertitudes étudiés. Les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle de confiance sont définies selon (SOIZE et BJAUOUI, 2000). Les figures montrent que les effets de dispersions des variables de conception aux voisinages des fréquences propres de résonance et d'antirésonance sont plus larges par rapport aux autres zones. De plus, la dispersion du paramètre du module de cisaillement plan G_{12} par rapport à la moyenne des amplitudes est plus petite par rapport aux autres paramètres.

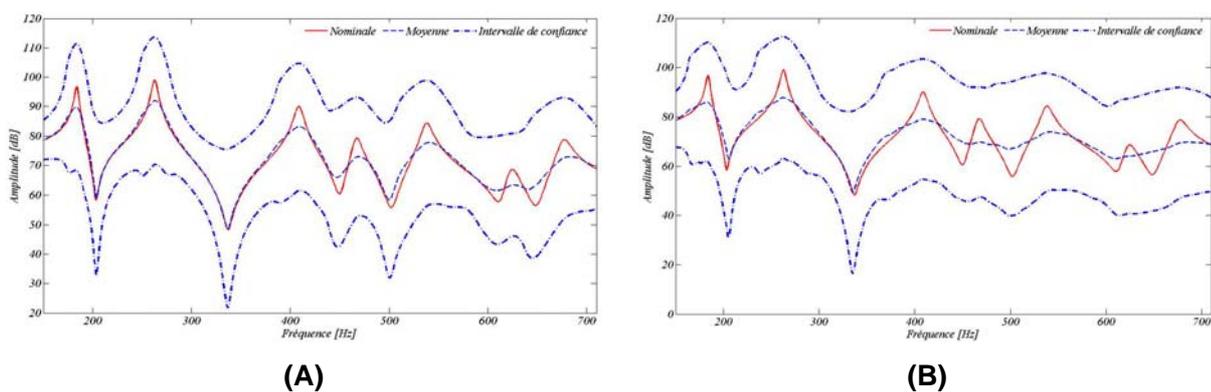


Figure 6.11 - Déviation standard de la réponse aléatoire en fonction de l'épaisseur : cas 1 (A), cas 2 (B).

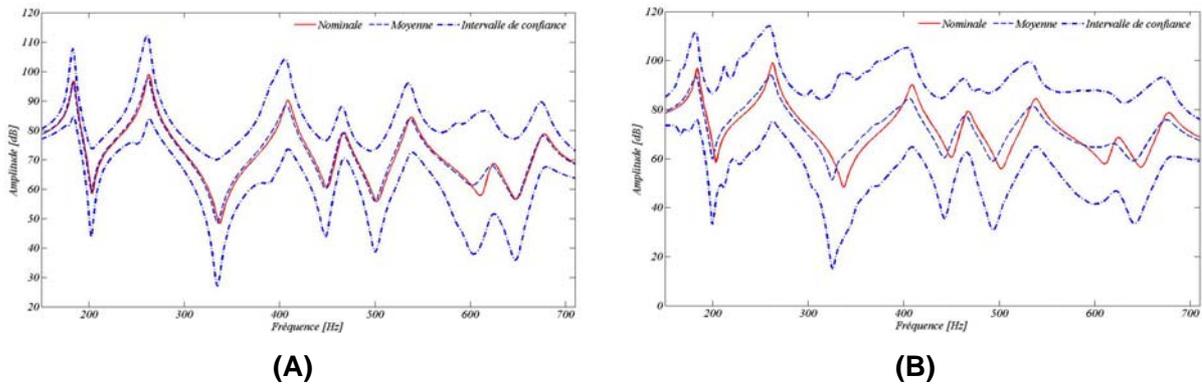


Figure 6.12 - Déviation standard de la réponse aléatoire en fonction de l'orientation des fibres : cas 1 (A), cas 2 (B).

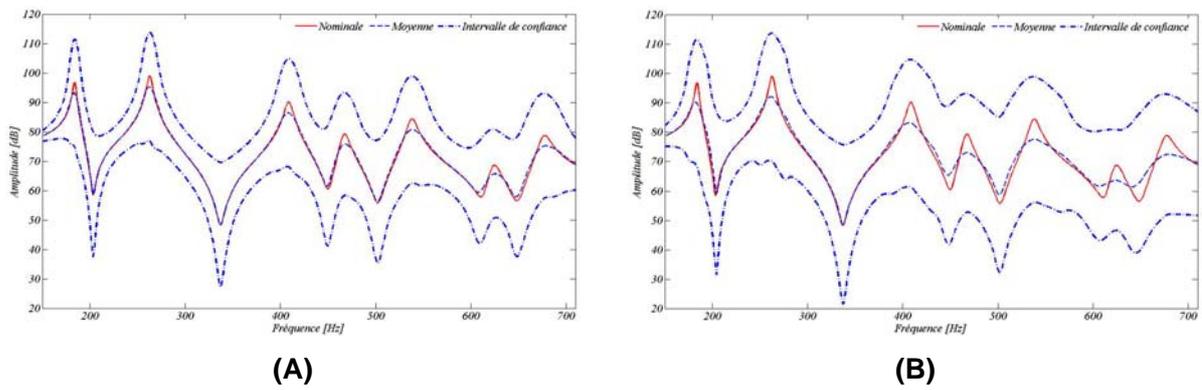


Figure 6.13 - Déviation standard de la réponse aléatoire en fonction de la densité : cas 1 (A), cas 2 (B).

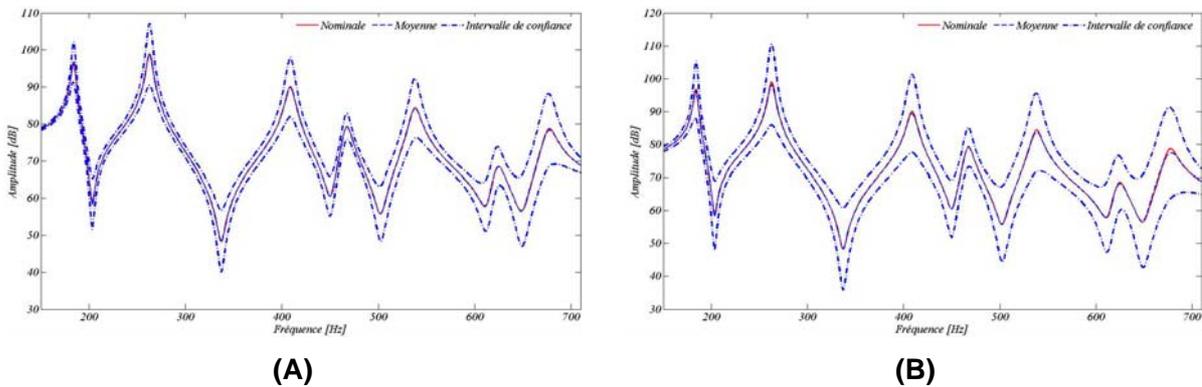


Figure 6.14 - Déviation standard de la réponse aléatoire en fonction du module de cisaillement G_{12} : cas 1 (A), cas 2 (B).

Nous utilisons dans nos applications deux méthodes graphiques pour juger de la convergence, les *méthodes des sommes cumulatives (Cumsum)* (YU et MYKLAND, 1998) et la *convergence des moyennes* (PILLET, 2008). Les figures 6.15 à 6.19 montrent la bonne convergence des moyennes et de la *Cumsum* des réponses aléatoires obtenues pour le premier mode de vibration de la plaque composite. Dans le cas de la moyenne, on observe la convergence du graphe au bout des 500 observations utilisées. Dans le cas de la *Cumsum* celle-ci apparaît comme très irrégulière, indiquant une bonne convergence comme conseillé dans le travail de Yu et Mykland (1998).

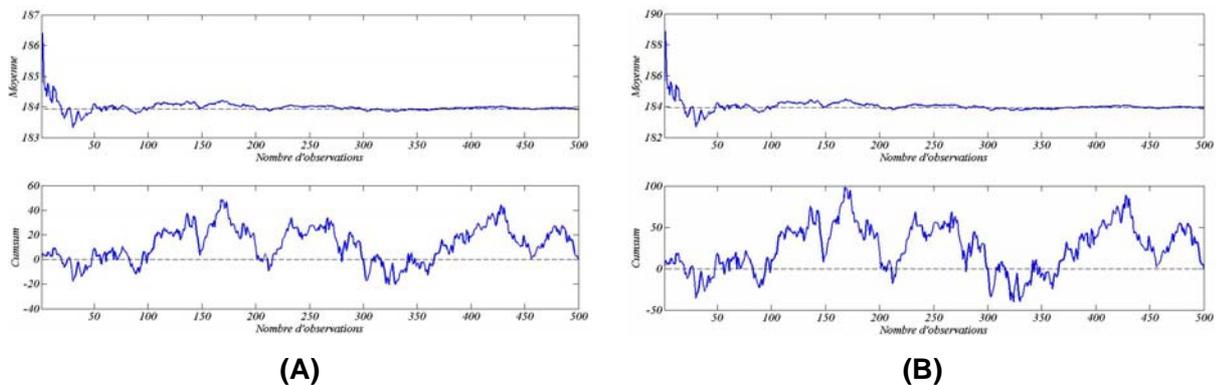


Figure 6.15 - Courbes de convergence de la réponse aléatoire en fonction de l'épaisseur : cas 1 (A), cas 2 (B) du premier mode de vibration.

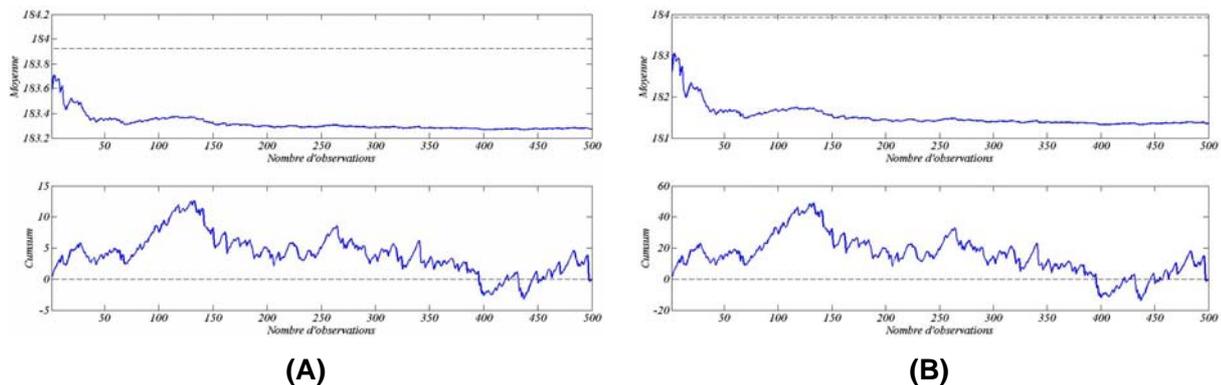


Figure 6.16 - Courbes de convergence de la réponse aléatoire en fonction de l'orientation des fibres : cas 1 (A), cas 2 (B) du premier mode de vibration.

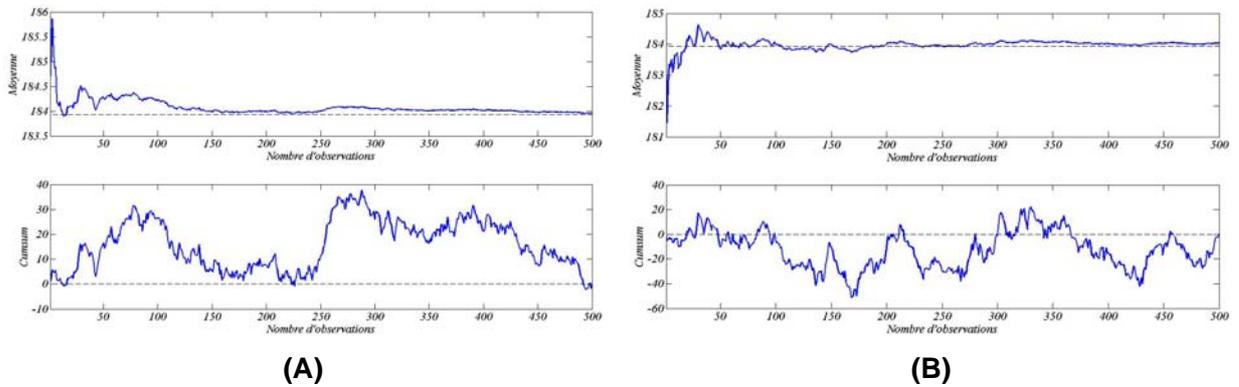


Figure 6.17 - Courbes de convergence de la réponse aléatoire en fonction de la densité : cas 1 (A), cas 2 (B) du premier mode de vibration.

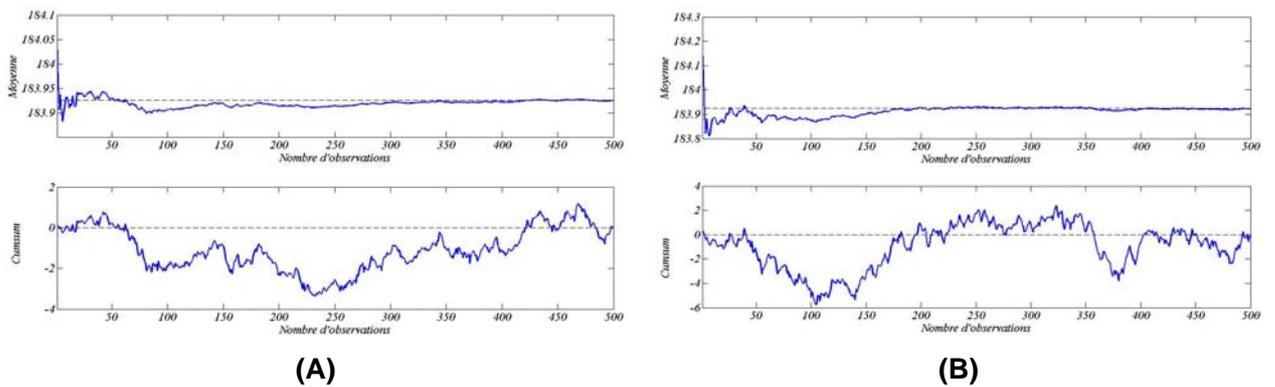


Figure 6.18 - Courbes de convergence de la réponse aléatoire en fonction du module de cisaillement G_{12} : cas 1 (A), cas 2 (B) du premier mode de vibration.

Les Figures 6.19, 6.20 illustrent la variabilité de la réponse aléatoire en fonction de l'épaisseur, en utilisant le *MEF-FSDT déterministe* en comparaison avec les résultats obtenus avec le *MEF-FSDT stochastique*. Les Figures 6.19 et 6.20 montrent les moyennes et les statistiques extrêmes pour les deux cas d'incertitudes étudiés utilisant 500 observations.

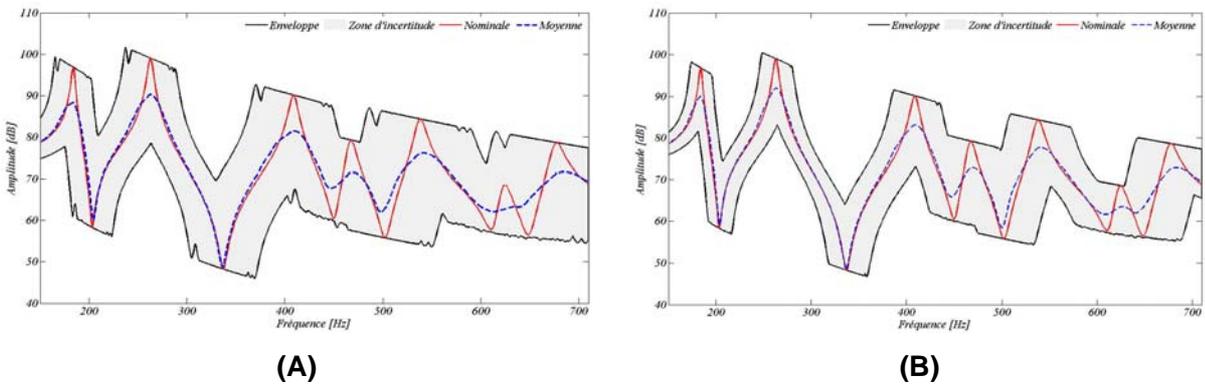


Figure 6.19 - Moyenne et statiques extrêmes de la réponse aléatoire en fonction de l'épaisseur avec $P_1 = 5\%$ et en adoptant le *MEF-FSDT composite déterministe*, (A), et le *MEF-FSDT stochastique*, (B).

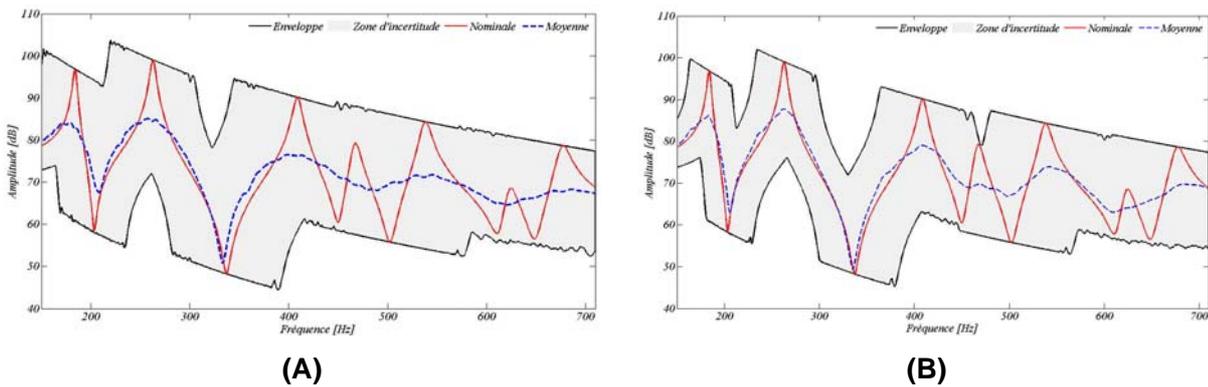


Figure 6.20 - Moyenne et statiques extrêmes de la réponse aléatoire en fonction de l'épaisseur avec $P_2 = 10\%$ et en adoptant le *MEF-FSDT déterministe* (A) et le *MEF-FSDT stochastique* (B).

Les Figures 6.19 et 6.20 montrent que les effets de dispersions des variables de conception sur la réponse aux voisinages des fréquences propres de résonance et d'antirésonance sont plus importantes pour le modèle déterministe par rapport au stochastique. La dispersion associée à l'épaisseur dans le *modèle stochastique* dépend de plus de facteurs que celle du modèle déterministe (maillage, longueur de corrélation de la fonction de corrélation adoptée, ordre de l'expansion de KL). Ceci peut expliquer, en partie, les différences observées entre les deux figures. De plus, on remarque que la dispersion due à l'épaisseur augmente avec l'augmentation de la fréquence dans les deux modèles et qu'elle est plus faible par les deux premiers modes de vibration de la plaque composite.

Les Figures 6.21 et 6.22 montrent respectivement les variabilités des réponses aléatoires (moyennes et intervalle de confiance) et leurs bonnes convergences. Celles-ci sont obtenues par le *MEF-FSDT déterministe* pour les deux cas d'incertitudes étudiés (cas 1 : $P_1 = 5\%$ et cas 2 : $P_2 = 10\%$).

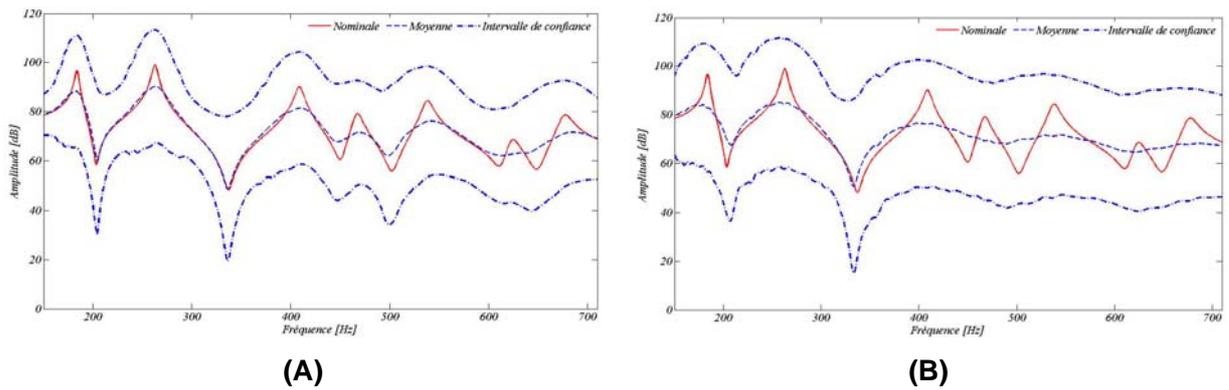


Figure 6.21 - Déviation standard de la réponse aléatoire sur l'épaisseur : cas 1 (A), cas 2 (B).

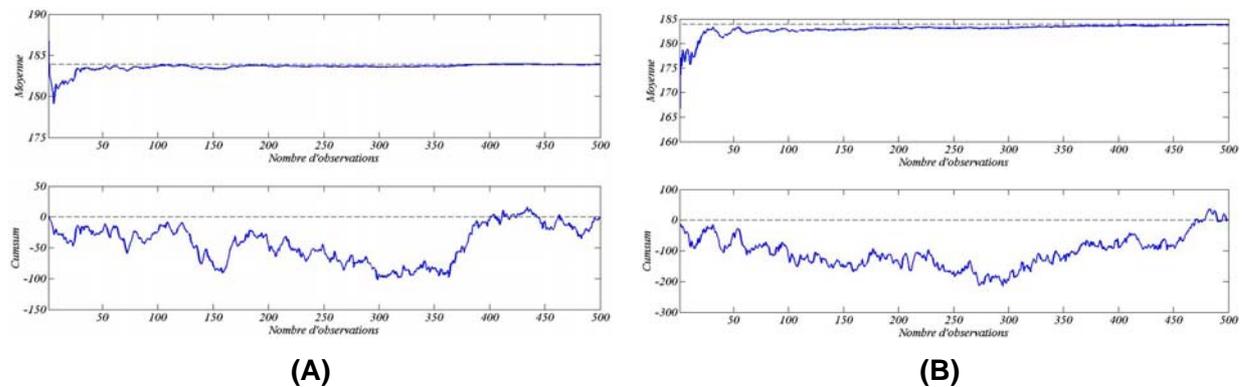


Figure 6.22 - Courbes de convergence de la réponse aléatoire sur le module de cisaillement G_{12} : cas 1 (A), cas 2 (B) du premier mode de vibration.

Comme les études de sensibilité réalisées utilisent une réduction modale, la Figure 6.23 montre les amplitudes des FRFs calculées en utilisant les bases $[\Psi]$ et $[[\Psi] \quad [\mathbf{R}]]$, équations (3.86) et (6.5), confrontées avec la FRF de référence. La base $[\Psi]$ est constituée de 16 vecteurs propres et $[\mathbf{R}]$ d'un résidu. La Figure 6.24 montre que la précision de la réduction est

améliorée par l'enrichissement de la base de réduction par l'inclusion du vecteur statique résiduel prenant en compte l'effort extérieur.

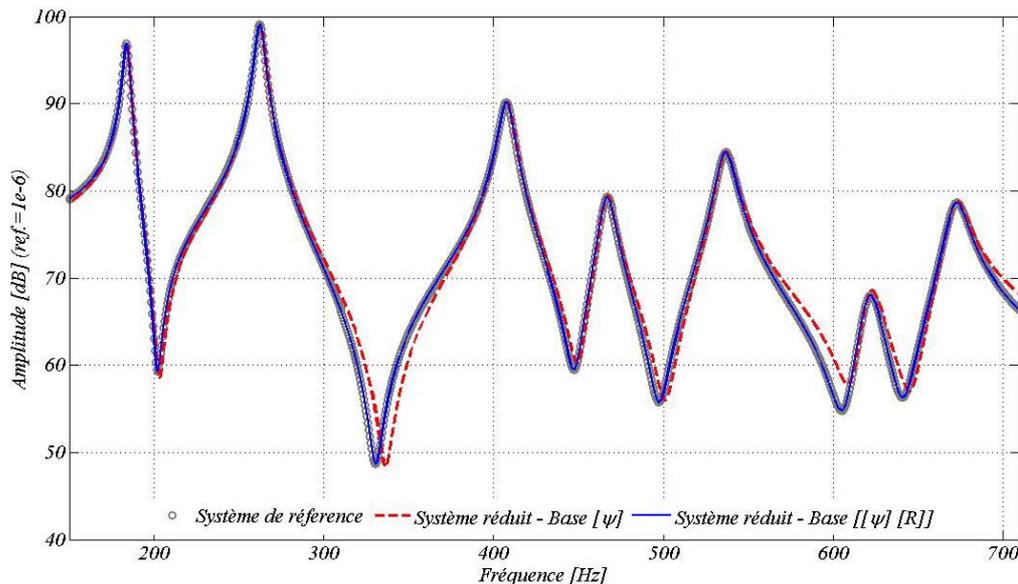


Figure 6.23 - FRFs des systèmes de référence et réduits avec les deux bases de réduction.

L'évaluation de la précision des amplitudes des FRFs de systèmes viscoélastiques, calculés en ajoutant la base de réduction $[\mathbf{R}_\Delta]$ aux bases $[\Psi]$ et $[\mathbf{R}]$, peut être consultée dans les travaux de Balmès et Germès (2002) et de Lima (2007).

6.7 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons proposé le couplage de la formulation *HSDT* avec la réduction de Guyan au niveau élémentaire et au niveau global. Ce couplage conduit à deux modèles qui ont un bon niveau de prédiction en statique et en dynamique à la fois pour le calcul des modes propres et des niveaux de réponses vibratoires. La méthode globale donne des résultats exacts en statique et quasi exacts en dynamique dans une bande de fréquence d'analyse très large.

La précision de la méthode élémentaire est inférieure à celle de la méthode globale, car elle est affectée par la qualité de l'approximation de *Guyan* dans le calcul des efforts relatifs aux *ddl*s non-physiques éliminés dans la réduction avant l'assemblage, au niveau des *ddl*s d'interfaces.

Les deux approches proposées globale et élémentaire, présentent des potentialités intéressantes que nous proposons d'approfondir dans des études futures. En particulier, la méthode globale permet de disposer d'un modèle de plaque composé exclusivement de *ddl*s physiques ce qui est comparable aux modèles standards disponibles dans les codes éléments finis.

De plus, dans ce chapitre on propose un modèle de propagation des incertitudes dans le modèle d'éléments finis *FSDT* de structures composites de façon originale, sur une forme paramétrée, à travers de la création des matrices stochastiques élémentaires du modèle. Pour cela, on a utilisé la technique de discrétisation des champs aléatoires basée sur un développement de *Karhunen-Loève* pour les problèmes bidimensionnels.

Les paramètres incertains sont pris en compte en utilisant la méthode d'*Hyper Cube Latin (HCL)*. Celle-ci est utilisée pour réduire les coûts numériques. La méthode *HCL* est alors retenue pour évaluer les réponses aléatoires du modèle d'éléments finis *FSDT-stochastique*.

Pour réduire les coûts numériques induits par la taille du modèle d'éléments finis *FSDT-stochastique* et les calculs itératifs *HCL* issus des incertitudes, on a présenté le modèle paramétré de plaque composite, ainsi que la méthode de condensation capable de réduire davantage le temps de calcul.

On a montré les enveloppes des réponses dynamiques dues aux dispersions des paramètres : épaisseur, orientation de fibres, densité et module de cisaillement plan, de structures composites académiques. Ces enveloppes constituent une aide à la conception robuste de structures composites en présence de paramètres incertains, où on peut quantifier leurs influences sur la performance, dans le domaine fréquentiel d'intérêt, de la structure.

Dans ce chapitre, nous avons proposé l'utilisation d'une base de réduction enrichie par des résidus statiques associés aux forces extérieures et aux effets dus aux modifications viscoélastiques. À travers un exemple numérique nous montrons que la condensation modale présentée en début de chapitre peut bien approximer les FRFs du système de référence sans grande perte de précision et avec un temps de calcul numérique plus faible.

CHAPITRE VII

CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES

7.1 Résumé des travaux et Contributions

Ce mémoire de thèse vise à apporter une contribution aux développements récents de la modélisation des structures composites, en ce qui concerne : (1) l'étude et formulation numérique par éléments finis de structures composites utilisant les théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT* ; (2) la modélisation numérique de traitements viscoélastiques en utilisant les modèles du *module complexe (MC)* et aux *dérivées fractionnaires (DF)* avec le but de réduire les amplitudes des vibrations de structures sandwichs ; (3) l'incorporation d'un mécanisme interne d'endommagement dans la matrice de raideur du matériau stratifié, pour l'étude de son évolution temporel et l'évaluation de son influence sur les réponses dynamiques de structures composites ; (4) l'application de techniques de réduction de modèles d'éléments finis et leurs paramétrages (en combinaison avec les théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*) en vue de la réduction du coût numérique, et finalement (5) le développement d'un élément fini stochastique incorporant les incertitudes dans les paramètres de conceptions, physiques et/ou géométriques, des structures composites.

Ce mémoire s'inscrit dans la continuité du travail de master de Faria (2006) qui porte sur la modélisation numérique de structures composites intelligentes, en incorporant des patches piézoélectriques. En particulier, ce mémoire de thèse s'intéresse à la modélisation de structures composites, de géométrie académique (poutres et plaques simples).

Dans le **premier chapitre** de ce mémoire, des commentaires préliminaires sur les différents sujets abordés sont présentés, concernant : (1) l'importance des matériaux composites aux applications industrielles modernes ; (2) les techniques d'atténuation de vibrations (particulièrement celles du type passif en utilisant des traitements viscoélastiques) ;

(3) la *Théorie de la Déformation de Cisaillement de Première Ordre (FSDT)*, la *Théorie de la Déformation de Cisaillement de Haut Ordre (HSDT)* et la *Théorie en Couches Équivalents Partielles Dépendent de Première Ordre (Layerwise-FSDT)* qui sont utilisées pour la formulation numérique par éléments finis de structures composites ; (4) une synthèse sur les mécanismes d'endommagement et leurs domaines de formulation mathématique (soit micromécanique, soit mesomécanique) ; et finalement, (5) sur les éléments finis stochastiques. Ces distincts sujets sont abordés et approfondis dans les chapitres suivants, décrits par la suite.

Le **deuxième chapitre** aborde les principaux aspects théoriques sur le thème des matériaux composites, à savoir : (1) des exemples récents de leurs applications industrielles ; (2) des fondements théoriques sur la modélisation (analytique et numérique) des composites structurels, en particulier celles qui adoptent les théories *CLT*, *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*. Particulièrement, dans ce deuxième chapitre, nous présentons les avantages et les inconvénients de chacune des théories citées et les relations mathématiques entre déformations et déplacements. Les simulations numériques appuyées sur des références de la littérature, montrent que le choix entre les différentes théories abordées dépend essentiellement : (a) du type de géométrie de la structure en étude (c'est-à-dire si la structure est mince, peu épaisse ou épaisse) ; (b) si l'intérêt de la modélisation est l'obtention des solutions globales du système d'équations du mouvement résultants (comme par exemple les fréquences et modes propres de vibration, champs de déplacements dynamiques) ou des solutions plus localisées (comme par exemple les déformations et contraintes).

En synthèse, les théories *FSDT* et *HSDT* peuvent être convenablement utilisées pour la formulation analytique ou numérique, par éléments finis, de structures composites et homogènes, c'est-à-dire, que son stratifié est constituée d'un seul type de matériau (stratifié) selon l'épaisseur de la structure composite. En particulier, la théorie *HSDT* est considérée la plus appropriée aux études de structures composites, homogènes, épaisses et peu épaisses, alors que la théorie *FSDT* est plus convenable aux études de structures composites, homogènes et peu épaisses. De plus, si l'on s'intéresse à la modélisation par éléments finis de *structures composites hétérogènes* (c'est-à-dire avec l'incorporation, par exemple, d'une couche contrainte viscoélastique selon l'épaisseur des plis de la structure composite) et minces, la théorie *Layerwise-FSDT* est la plus recommandée. Dans tous les cas, on doit toujours chercher un bon compromis entre capacité de prédiction numérique et coût de calcul numérique des réponses du modèle.

L'intérêt du **troisième chapitre** est l'établissement de relations mathématiques entre déformations et déplacements des théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*, en termes des *variables nodales* et *fonctions de forme* de l'élément fini Serendip. Celui-ci est utilisé pour la formulation par éléments finis des structures composites d'intérêt dans ce mémoire. La formulation *variationnelle de Hamilton* est utilisée pour l'obtention de l'*équation générale du mouvement du système non-amorti* pour chaque théorie. Particulièrement, on présente la originale formulation par éléments finis, appelée ici *Layerwise-FSDT*, développée et obtenue avec l'imposition de la continuité des déplacements selon l'épaisseur de la structure composite. Un modèle par éléments fini de plaque sandwich amortis de trois couches, en utilisant la théorie *Layerwise-FSDT*, dont les peaux sont en matériau métallique et le noyau en matériau viscoélastique, a été présenté. Dans cette théorie, on utilise le champ de déplacement de la théorie *FSDT* pour chaque pli. La théorie *Layerwise-FSDT* est appliquée spécialement dans ce mémoire pour la modélisation par éléments finis de structures composites minces du type sandwichs, car dans ce type d'application les deux théories *FSDT* et *HSDT* ne sont pas adéquates à la bonne représentation du facteur d'amortissement du système modélisé par éléments finis. Les détails pertinents sont présentés dans le Chapitre IV, ainsi que la validation numérique de la formulation *Layerwise-FSDT* appliquée à la modélisation par éléments finis de structures sandwichs amortis par traitements viscoélastiques). De plus, dans le troisième chapitre, on présente les particularités sur l'imposition des conditions aux limites lors de la modélisation par éléments finis avec l'utilisation de la théorie *HDST*. En outre, l'équation générale du mouvement de structures composites non amorties est résolue pour l'obtention des fréquences et modes propres de vibration. À la fin de ce chapitre, quelques résultats numériques obtenus en utilisant chacune des trois théories formulées par éléments finis sont fournis, dans le but de démontrer leurs validations numériques par des études dans les domaines statique et fréquentiel. Les solutions numériques obtenues indiquent que la théorie *Layerwise-FSDT* est appropriée à la formulation par éléments finis de structures sandwichs minces. En outre, les formulations par éléments finis des théories *FSDT* et *HSDT* sont validées numériquement par comparaisons aux résultats expérimentaux et analytiques, avec l'emploi de la *théorie d'élasticité 3D*, fournis par la littérature. Ainsi, au travers des résultats numériques on peut constater que pour le choix de la théorie on doit être toujours considérer : (1) le coût numérique pour leur implémentation par éléments finis ; (2) le ratio a/h de la structure composite en question (c'est-à-dire, si la structure est épaisse, peu épaisse, mince ou très

mince) ; et si (3) la structure composite est homogène (structure composite) ou hétérogène (structure sandwich ou structure composite sandwich).

Le **quatrième chapitre** présente un panorama des principaux modèles, classiques et modernes, employés pour la modélisation des matériaux viscoélastiques. D'entre les modèles considérés, l'intérêt majeur est dirigé *au Module Complexe (MC)* et au modèle basé sur les *Dérivées Fractionnaires (DF)*. Le premier est formulé en considérant le *Principe de la Correspondance Élastique-Viscoélastique (PCEV)* et le *Principe de la Équivalence Fréquence-Température (PEFT)*. Par contre, le modèle à *DF* est basé dans les principes mathématiques du *Calcul Fractionnaire*. Ces deux modèles modernes sont incorporés à la formulation par éléments finis des théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*, pour la formulation de structures composites amorties, via l'utilisation d'une couche contrainte viscoélastique. Les modèles du *MC* et à *DF*, sont respectivement appliqués dans les domaines fréquentiel et temporel, pour l'approximation numérique du comportement réel des matériaux viscoélastiques.

Les modèles *MC* et *DF*, incorporés aux formulations par éléments finis de structures composites, ont permis de vérifier la forte dépendance du matériau viscoélastique aux températures, fréquences et temps d'excitation. L'incorporation des modèles aux codes d'éléments finis n'additionnent pas des coûts numériques importants dans les modèles d'éléments finis de structures composites amorties. Particulièrement, les formulations par éléments finis, basée sur les théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*, incorporent au modèle *DF* et utilisant l'élément Serendip plane, sont réalisées de manière originale. Jusqu'à le présent moment, le modèle *DF* a été incorporé, dans son grosse majorité, aux éléments finis de poutres, aux théories de *Timoshenko* ou d'*Euler*, et pour la formulation par éléments finis de poutres multicouches amortis, en matériau métallique avec viscoélastique. De plus, une comparaison des modèles *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT*, appliqués à l'étude de l'amortissement passif (modèles *MC* et *DF*) dépendant de la fréquence, de la température et du temps d'excitation de la structure est présentée et constitue une des originalités de ce travail.

Pour la résolution de l'équation du mouvement du système amorti dans le domaine temporel, on utilise l'algorithme *d'intégration explicite de Newmark*, en considérant de petits déplacements. Ceci est validé numériquement selon sa version *implicite*, décrite dans une référence de la littérature.

Les résultats des simulations numériques, montrent que le choix d'une théorie employée pour la formulation par éléments finis de structures composites amortis par l'effet viscoélastique est associé au : (1) type de sollicitation mécanique appliquée à la structure (*axial*, de

flexion...) et, (2) ratio entre largeur-épaisseur de la structure modélisée, c'est-à-dire, s'il s'agit d'une structure *mince, peu épaisse* ou *épaisse*.

De plus, dans ce chapitre on introduit dans la formulation numérique un mécanisme d'amortissement intrinsèque. Celui-ci est associé à la nature polymérique de la matrice du pli. Ce type de mécanisme d'amortissement peut être incorporé dans la formulation par éléments finis de structures composites. La formulation mathématique est basée sur le *modèle hystérétique complexe (MHC)*, qui considère les propriétés mécaniques du pli comme indépendants de la température et de la fréquence d'excitation. Le *MHC* est utilisé pour l'obtention des fréquences propres et facteurs d'amortissement des structures composites par des procédures numériques itératives.

L'utilisation des traitements amortissants passifs, associant les matériaux viscoélastiques aux matériaux composites pour la formation d'une seule structure (composite sandwich), permet l'augmentation de l'amortissement final dans cette structure, de manière très importante. Les valeurs ajoutées des structures composites sont légèrement plus grandes que celles des structures en métaux. Toutefois, on doit rester attentif au risque de perte de rigidité de la structure composite sandwich résultant de l'introduction des couches contraintes viscoélastiques de grande épaisseur.

Le but du **cinquième chapitre** est la formulation mathématique d'un mécanisme d'évolution temporel d'endommagement, présent dans le stratifié de structures composites, ainsi que le développement d'une méthodologie pour son incorporation dans le modèle d'élément finis de la théorie *FSDT* dans les domaines statique et dynamique. On présente l'état d'art et la formulation mathématique du modèle d'endommagement. Sa formulation utilise des concepts de la *Mécanique des Milieux Continus* combinés aux *principes de la thermodynamique des processus irréversibles*. Dans ce mémoire on se limite à la formulation d'un mécanisme interne d'endommagement présent dans la matrice polymérique du pli du stratifié. Son *évolution* et sa *quantification* est faite en utilisant la variable scalaire $D(u)$ dont la considération dans le *MEF-FSDT* donne naissance à une *équation du mouvement dynamique du système mécanique endommagé*. Celle-ci est résolue dans le domaine temporel en utilisant la *méthode d'intégration implicite de Newmark*, couplée à la *méthode de Newton* pour la correction des déplacements dans un pas de temps quelconque. La méthodologie adoptée pour la résolution temporelle de l'équation du mouvement du système mécanique endommagé, est faite de manière original, car le nombre de publications qui traitent ce sujet (dans le domaine dynamique) est très faible. L'intérêt est la modélisation de structures composites de formes géométriques académiques

(poutres et plaques composites), pour la validation numérique de la méthodologie, ainsi que la propagation et la quantification de la variable $D(u)$ dans la structure formulée. Les courbes qui sont obtenues permettent la validation de la méthodologie à la modélisation par éléments finis des structures en matériau isotrope dans la condition statique. Dans le cas dynamique, particulièrement avec la modélisation par éléments finis d'une poutre composite sollicitée par une force de traction pure, les résultats numériques de l'évolution de la variable scalaire d'endommagement respectent l'hypothèse de *petits déplacements* de la formulation par éléments finis du *MEF-FSDT*. Toutefois, dans le cas de la modélisation par l'élément finis de plaques composites sollicitées en flexion, on doit utiliser une formulation basée sur l'hypothèse de *grands déplacements* pour mettre en évolution de grosses valeurs de $D(u)$. On a observé que le mécanisme interne d'endommagement formulé, affecte très peu les modes propres des structures composites et conduit seulement à un léger décalage des fréquences propres de la structure. En outre, on a constaté qu'on doit bien choisir : (1) le *type de mécanisme d'endommagement d'intérêt* (*endommagement de fibres, de la matrice, d'interface entre fibre-matrice, etc.*) ; (2) le *type de théorie utilisée* (c'est-à-dire : *CLT, FSDT, HSDT, Layerwise-FSDT, Layerwise-HSDT ...*) ; (3) la *taille du maillage* de la structure composite ; (4) le *type de chargement appliqué* (impulsif, harmonique ...) et, finalement, (5) la *méthode d'intégration numérique* utilisée. Dans ce chapitre on n'a pas constaté de problèmes d'instabilité numérique dans la résolution dans le domaine temporel de l'équation du mouvement du système endommagé en utilisant l'algorithme *d'intégration implicite de Newmark*.

Dans le **sixième chapitre**, on propose une méthode de propagation des incertitudes, introduite de façon originale au niveau des éléments finis *FSDT* de plaques composites. Dans le *MEF-FSDT stochastique* on adopte comme variables aléatoires : (1) les épaisseurs ; (2) les orientations de fibres des plis ; (3) la densité et (4) les constantes de cisaillement plan des plis. Ces paramètres caractérisent le comportement dynamique de structures composites. On utilise la technique de discrétisation des champs aléatoires basée sur un développement de *Karhunen-Loève* pour les problèmes bidimensionnels. Les réponses dynamiques du système aléatoire, c'est à dire, du *MEF-FSDT stochastique*, ont été obtenues par la méthode de tirages aléatoires d'*Hyper Cube Latin (HCL)*. Celle-ci est utilisée pour générer les enveloppes des réponses dynamiques du système stochastique. On a montré les enveloppes des réponses dynamiques dues aux dispersions des paramètres de conception (1), (2), (3) et (4) de structures composites académiques. Les enveloppes constituent une aide à la conception de structures composites en

présence de paramètres incertains, où on peut quantifier leurs influences sur la performance, dans le domaine fréquentiel, de la structure d'intérêt.

Le Chapitre VI fournit le paramétrage du *MEF-FSDT* déterministe. Celle-ci s'avère très utile, puisque les paramètres de conception apparaissent en dehors des matrices globales de chaque pli, et pour chaque des effets mécaniques (membrane, flexion et cisaillement). Ainsi, le paramétrage permet d'introduire les incertitudes dans les paramètres de conception de la structure composite, et de mener facilement l'analyse de sensibilité et optimisation des variables de conception.

De plus, pour réduire le coût de calcul numérique, et pour la conformité de la formulation *HSDT* aux codes éléments finis standards, (cinq degrés de liberté (*ddl*s) au lieu de onze *ddl*s de la formulation *HSDT*), on propose dans ce chapitre d'utiliser les *méthodes de réduction modale* sur les modèles d'éléments finis et la *méthode de condensation de Guyan* sur la formulation *HSDT*. Le couplage de la formulation *HSDT* avec la condensation de Guyan est réalisé au *niveau élémentaire* et au *niveau global*. La méthode globale donne des résultats exacts en statique et quasi exacts en dynamique dans une bande de fréquence d'analyse très large. La méthode élémentaire, dont sa précision est inférieure à la méthode globale, est affectée par la qualité de l'approximation de Guyan dans le calcul des efforts relatifs aux *ddl*s éliminés dans la réduction. Les deux approches proposées globale et élémentaire, présentent des potentialités intéressantes que nous proposons d'étudier dans des études futures. En particulier, la méthode globale permet de disposer d'un modèle de plaque exclusivement à *ddl*s physiques qui est comparable aux modèles standard des codes éléments finis. Déjà les méthodes de *réduction modale* s'avère très efficace pour prévoir les réponses dynamiques des systèmes, amortis ou non amortis, et de réduire davantage le temps de calcul des solutions dynamiques dans le domaine fréquentiel, en utilisant des bases de réduction nominale, enrichies par l'introduction de résidus statiques et de résidus produits par la partie imaginaire de la matrice de raideur complexe du matériau viscoélastique (dans le cas l'utilisation de traitements viscoélastiques).

7.2 Perspectives

Les travaux réalisés dans ce mémoire de thèse donnent lieu à plusieurs perspectives de de recherche, dont on peut citer les plus intéressantes :

- ✓ Il paraît nécessaire de préciser en termes de ratio a/h les zones les plus adéquates pour le choix entre les théories *FSDT*, *HSDT* et *Layerwise-FSDT* à la modélisation des structures composites ;
- ✓ On peut mettre en œuvre des éléments finis coque pour la modélisation de structures composites courbes. De plus, dans le cas particulier de l'utilisation de la théorie *Layerwise-FSDT* pour la modélisation de structures composites, il paraît intéressant de développer une formulation moins coûteuse du point de vue du coût de calcul, car son nombre total de *ddl*s augmente très rapidement avec le nombre de plis du stratifié ;
- ✓ Il serait intéressant d'étendre les trois théories pour le contrôle du type hybride actif-passif des vibrations de structures composites, en utilisant des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques combinés. Dans ce type d'étude, on doit considérer le couplage piézo-thermo-mécanique, étant donné que la température joue un rôle très important sur les propriétés des différents matériaux impliqués ;
- ✓ Utilisation des modèles à *Dérivées Fractionnaire* et du *Module Complexe* pour la formulation par éléments finis de l'amortissement intrinsèque des matériaux composites, en considérant les dépendances par rapport à la fréquence et à la température. En particulier, pour établir cette dépendance, on est obligé d'effectuer de mesures expérimentales et lissage des courbes représentant les résultats ;
- ✓ Intégration de traitements viscoélastiques avec les matériaux composites pour des applications d'intérêt industriel ;
- ✓ Couplage de la méthode de condensation robuste avec les techniques de propagation d'incertitudes des structures composites, sans ou avec traitement viscoélastique ;
- ✓ Optimisation multi-objectif, en prenant en compte les incertitudes sur les structures composites, amorties ou non. Particulièrement, l'optimisation incluant : (1) les dimensions et la localisation du traitement viscoélastique, (2) les orientations de plis, (3) le volume de fibres et de matrice, (4) le nombre et épaisseur des couches ;
- ✓ Approfondissement de la méthode des éléments composites stochastiques par l'introduction des matériaux viscoélastiques ;

- ✓ Approfondissement de la méthode des éléments finis endommagés. En particulier, le développement des éléments finis formulés avec l'hypothèse de grands déplacements, en considérant les effets de la viscoélasticité et de la plasticité du matériau composite. Dans ce cas, on doit poursuivre l'étude d'une méthode d'intégration stable des équations du mouvement du système endommagé dans le domaine de grands déplacements ;
- ✓ La formulation d'un élément finis endommagé stochastique en prenant en compte les incertitudes sur les paramètres expérimentaux associés au modèle d'endommagement ;
- ✓ Comme le modèle viscoélastique standard est dépendant de la fréquence, alors que l'endommagement évolue dans le domaine temporel, ceci conduit à une difficulté de modélisation de deux phénomènes simultanément. Une des solutions qu'on propose consiste à utiliser le modèle viscoélastique temporel, à DF , ajouté au modèle d'endommagement évolutif temporel, pour la formulation de structures composites endommagées amorties, par dispositifs viscoélastiques, et, par conséquence, l'étude de l'effet de l'amortissement sur le niveau d'endommagement de la structure ;
- ✓ Dans un contexte expérimental, plusieurs essais pourraient être réalisés pour, d'une part, valider quelques résultats numériques d'amortissement passif par de traitements viscoélastiques dans les domaines temporel et fréquentiel. D'autre part, pour valider dans le domaine temporel le modèle d'évolution de l'endommagement.

ANNEXES

Annexe A.1 - Transformations entre les systèmes de référence des matériaux composites

Nous adoptons un système de référence commun à toute la structure, qui s'appelle *système de référence global* (X, Y, Z) , et un autre associé à un élément fini quelconque isolé (x, y, z) , dite *système de référence élémentaire*, qui est utilisé dans la formulation de la lois du comportement du matériau composite et dans la modélisation numérique par éléments finis des structures composites en étude. Comme dans ce mémoire nous travaillons avec des structures planes (plaques et poutres) les deux systèmes de référence sont choisis parallèles entre eux.

La matrice de constantes d'élasticité du matériau, au niveau du pli, définie dans le système de référence matériau $(1, 2, 3)$, peut être passée par le système de référence global en employant l'angle de rotation θ^k par pli k , autour de l'axe global Z . Ainsi, pour cette transformation, on doit utiliser une matrice de transformation appropriée, $[T]$, donnée par l'équation suivante.

$$[T(\theta^k)] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -\bar{s} \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & \bar{s} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ s \cdot c & -s \cdot c & 0 & 0 & 0 & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

où $c = \cos(\theta^k)$, $s = \sin(\theta^k)$, $c^2 = \cos^2(\theta^k)$, $s^2 = \sin^2(\theta^k)$ et $\bar{s} = \sin(2\theta^k)$.

De plus, les vecteur de contraintes et de déformations peuvent être transformés à l'aide de la matrice $[T(\theta^k)]$. Ainsi, les quantités fournies dans le système de référence matériau $(\sigma^l, \varepsilon^l)$, peuvent être transformées dans le système de référence élémentaire $(\sigma^e, \varepsilon^e)$, selon les expressions suivantes (REDDY, 1997; CHEE, 2000):

$$\{\sigma^e\} = [T]\{\sigma^l\} \quad (\text{A.2})$$

$$\{\varepsilon^e\} = [R]^T \{\varepsilon^l\} \quad (\text{A.3})$$

où $[R]$ est l'inverse de la matrice de transformation $[T]$, défini par l'équation (A.1), c'est-à-dire :

$$[R] = [T]^{-1}.$$

Ainsi, la relation entre les contraintes et déformations, est exprimée sous la forme :

$$\{\sigma^e\} = [[R][C^l][T]^T]\{\varepsilon^e\} = [C^e]\{\varepsilon^e\} \quad (\text{A.4})$$

Après la rotation autour de l'axe z , et en utilisant l'équation (A.1), les coefficients d'élasticité du matériau orthotrope écrits dans le système (x, y, z) , sont donnés par l'équation générale:

$$[C^e] = \begin{bmatrix} c_{11}^e & c_{12}^e & c_{13}^e & 0 & 0 & c_{16}^e \\ c_{12}^e & c_{22}^e & c_{23}^e & 0 & 0 & c_{26}^e \\ c_{13}^e & c_{23}^e & c_{33}^e & 0 & 0 & c_{36}^e \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^e & c_{45}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45}^e & c_{55}^e & 0 \\ c_{16}^e & c_{26}^e & c_{36}^e & 0 & 0 & c_{66}^e \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Les coefficients d'élasticité du matériau sont définis en fonction des constantes de l'ingénierie E_i , ν_{ij} et G_{ij} , avec $i, j = 1, 2, 3$. Ceux-ci sont, respectivement, les *modules d'élasticité* (ou *modules de Young*), les *coefficients de Poisson* et les *modules de cisaillement* et

sont définis dans le système de référence matériau. Selon Reddy (1997), les constantes d'élasticité d'un matériau orthotrope quelconque, dans le système de référence matériau, sont exprimés selon les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 c'_{11} &= E_1 (1 - \nu_{23}\nu_{32}/\Delta) \\
 c'_{12} &= E_1 (\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}/\Delta) = E_2 (\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}/\Delta) \\
 c'_{13} &= E_1 (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}/\Delta) = E_3 (\nu_{13} + \nu_{21}\nu_{23}/\Delta) \\
 c'_{23} &= E_2 (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})/\Delta \\
 c'_{22} &= E_2 (1 - \nu_{13}\nu_{31}/\Delta) \\
 c'_{33} &= E_3 (1 - \nu_{12}\nu_{21}/\Delta) \\
 c'_{44} &= G_{23} \\
 c'_{55} &= G_{13} \\
 c'_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

où, $\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$.

Selon Reddy (1997), pour les matériaux orthotropes, nous pouvons constater expérimentalement les relations suivantes :

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \tag{A.7}$$

et

$$E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{23}, G_{13} > 0 \tag{A.8}$$

où $i, j = 1, 2, 3$.

La relation présente dans l'équation (A.7) représente la relation de réciprocité entre les coefficients de Poisson ν_{ij} et les modules de élasticité E_i , tandis que l'équation (A.8) est utilisée

pour limiter que les valeurs des modules d'élasticité du matériau soient *non nulles* et *positives* (REDDY, 1997).

Pour un matériau isotrope ($E_1 = E_2 = E_3 \equiv E$, $G_{12} = G_{23} = G_{13} \equiv G$ et $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} \equiv \nu$) les trois constantes (E, G, ν) gardent la relation suivante :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A.9})$$

où seulement deux d'entre elles sont indépendants entre si.

En raison de l'isotropie du matériau, ses relations constitutives sont :

$$E_3 = E_2, \quad G_{13} = G_{12}, \quad \nu_{13} = \nu_{12} \quad (\text{A.10})$$

Pour le matériau isotrope transversalement, on admit la validité de la relation suivante :

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} \quad (\text{A.11})$$

De plus, d'autres types différents de matériau composites, tels que les matériaux anisotropes et monocliniques, sont employés dans la fabrication des plis de la structure composites, et sont présentés dans les travaux de Reddy (1997) et de Kollar et Springer (2003).

Annexe B.1 – Principe variationnel de Hamilton

1) Principe variationnel de Hamilton au niveau élémentaire

Selon Meirovitch (2000), le *principe variationnel de Hamilton (PVH)* peut être mathématiquement exprimé selon l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta P + \delta W) dt = 0 \quad (\text{B.1})$$

où P et K sont, respectivement, l'énergie potentielle et cinétique totale du système, W est le travail total des forces externes, t_0 et t_1 sont des instants de temps arbitraires.

Les intégrales de la variation de l'énergie cinétique (δK) et potentielle (δP) sont exprimées par éléments finis avec la transformation du volume total de la structure (V) dans une somme d'intégrales de volumes élémentaires (V_e), et en considérant les fonctions de forme et variables nodales appropriées.

L'énergie cinétique, au niveau élémentaire, est donc donnée par l'expression :

$$K_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho^{(k)} \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} dV_e \quad (\text{B.2})$$

où $\rho^{(k)}$ est la densité du matériel d'une pli k quelconque, V_e est le volume élémentaire. Le vecteur vitesse $\{\dot{U}\}$ est donné par la dérivée du vecteur déplacements $\{U\}$, défini en accord avec la théorie utilisée, c'est-à-dire :

$$\{U\} = \{\hat{U}\} \quad (\text{B.3})$$

si on s'intéresse à formulation de la théorie *HSDT*, dont le vecteur de déplacements est défini par l'équation (3.12) du Chapitre III, alors :

$$\{U\} = \{\bar{U}\} \quad (\text{B.4})$$

si on s'intéresse à formulation de la théorie *FSDT*, dont le vecteur de déplacements est défini par l'équation (3.13) du Chapitre III, alors

$$\{U\} = \{\widehat{U}\}^{(k)} \quad (\text{B.5})$$

si on s'intéresse à formulation de la théorie *Layerwise-FSDT*, le vecteur de déplacements est défini par l'équation (3.63) du Chapitre III.

Selon Meirovitch (2000), en utilisant l'intégration par parties par rapport au temps, et en rappelant que $\delta U_T(t_0)$ et $\delta U_T(t_1)$ sont nulles, alors la variation de l'énergie cinétique totale du système est présentée sous la forme élémentaire selon l'expression :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta K_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \rho^{(k)} \{\delta \dot{U}\}^T \{\dot{U}\} dV_e dt = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \rho^{(k)} \{\delta U\}^T \{\ddot{U}\} dV_e dt \quad (\text{B.6})$$

L'intégrale de la variation de l'énergie cinétique, au niveau élémentaire, est donnée par l'équation suivante :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta K_e dt = - \int_{t_0}^{t_1} \{\delta u_e\}^T [M_e] \{\ddot{u}_e\} dt \quad (\text{B.7})$$

La matrice de masse élémentaire $[M_e]$ est exprimée par la relation :

$$[M_e] = \int_{V_e} \rho^{(k)} [N]^T [A_m]^T [A_m] [N] dV_e \quad (\text{B.8})$$

où la matrice $[A_m]$ peut être égale aux matrices : $[\widehat{A}]$, $[\overline{A}]$ ou $[\widehat{A}^{(k)}]$, présentées respectivement dans l'équation (3.12), (3.13) et (3.63) du Chapitre III, si on est intéressé, respectivement, à la formulation par éléments finis des théories *HSDT*, *FSDT* ou *Layerwise-FSDT*.

L'énergie potentielle élémentaire est donnée par expression suivante :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left(\{\sigma^e\} d\varepsilon^e \right) dV_e dt \quad (\text{B.9})$$

Cette équation peut être exprimée en fonction de : (a) la matrice des propriétés d'élasticité du matériau en question (viscoélastique, stratifié, métallique ...) $[C^e]^{(k)}$, associée à chaque pli (ou couche) k , dans sa forme désaccouplée :

$$[C^e]^{(k)} = \begin{bmatrix} [C_b^e]^{(k)} & \\ & [C_s^e]^{(k)} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.10})$$

et, (b) le vecteur de déformations $\{\varepsilon^e\}$ sous sa forme découplée :

$$\{\varepsilon^e\} = \left\{ \left\{ \varepsilon_b^e \right\} \quad \left\{ \varepsilon_s^e \right\} \right\}^T \quad (\text{B.11})$$

où les effets de membrane, de flexion et de cisaillement plan sont indiqués par un indice ($_b$), et les effets de cisaillement transverse sont indiqués par un indice ($_s$). L'exposant (e) indique que le matériau est écrit dans le système de référence élémentaire (x, y, z) de la structure. Ainsi, l'équation (B.9) de l'énergie potentielle élémentaire peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left(\left\{ \sigma_b^e \right\} \left\{ \delta \varepsilon_b^e \right\} + \left\{ \sigma_s^e \right\} \left\{ \delta \varepsilon_s^e \right\} \right) dV_e dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left(\left\{ \delta \varepsilon_b^e \right\}^T \left([C_b^e]^{(k)} \left\{ \varepsilon_b^e \right\} \right) + \left\{ \delta \varepsilon_s^e \right\}^T \left([C_s^e]^{(k)} \left\{ \varepsilon_s^e \right\} \right) \right) dV_e dt \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Les matrices et vecteurs fournis par l'équation (B.12), sont définies conformément au choix de la théorie utilisée.

Si on s'intéresse à la formulation *FSDT*, on a :

$$\left\{ \varepsilon_b^e \right\} = \left\{ \bar{\varepsilon}_b \right\}, \quad \left\{ \varepsilon_s^e \right\} = \left\{ \bar{\varepsilon}_s \right\}, \quad [B_b] = [\bar{B}_b], \quad [B_s] = [\bar{B}_s] \quad (\text{B.13})$$

Et dans le cas de la formulation *HSDT*, on a :

$$\{\varepsilon_b^e\} = \{\hat{\varepsilon}_b\}, \{\varepsilon_s^e\} = \{\hat{\varepsilon}_s\}, [B_b] = [\hat{B}_b], [B_s] = [\hat{B}_s] \quad (\text{B.14})$$

Finalement, avec la formulation de la théorie *Layerwise-FSDT*, on obtient :

$$\{\varepsilon_b^e\} = \{\hat{\varepsilon}_b^{(k)}\}, \{\varepsilon_s^e\} = \{\hat{\varepsilon}_s^{(k)}\}, [B_b] = [\hat{B}_b^{(k)}], [B_s] = [\hat{B}_s^{(k)}] \quad (\text{B.15})$$

En utilisant l'intégrale de l'énergie potentiel exprimée par l'équation (B.12), et en effectuant quelques manipulations, on obtient la somme des contributions de l'énergie potentielle d'une élément fini, donnée par l'expression :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left(\{\delta u_e\}^T \left([B_b]^T [C_b^e]^{(k)} [B_b] + [B_s]^T [C_s^e]^{(k)} [B_s] \right) \{u_e\} \right) dV_e dt \quad (\text{B.16})$$

L'intégration sur l'épaisseur z de l'élément fini Serendip peut contenir différents types de matériau (viscoélastique, piézoélectrique, métallique ...) selon l'épaisseur totale de la structure considérée. Ainsi, l'équation (B.16) est réécrite selon l'expression suivante :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_x \int_y \sum_{k=1}^{Nc} \int_{z_k}^{z_{k+1}} [A_k] dz dy dx \right] dt \quad (\text{B.17})$$

où :

$$[A_k] = \{\delta u_e\}^T \left([B_b]^T [C_b^e]^{(k)} [B_b] + [B_s]^T [C_s^e]^{(k)} [B_s] \right) \{u_e\} \quad (\text{B.18})$$

avec Nc le nombre total de plis (couches) selon l'épaisseur du stratifié, et z_k et z_{k+1} sont les coordonnées des interfaces supérieur et inférieur par pli k . Les matrices $[B_b]$ et $[B_s]$ de la théorie *Layerwise-FSDT*, données par l'équation (B.15), sont dépendantes du pli k . Par contre, dans la théorie *FSDT* et *HSDT*, elles sont indépendantes du pli k et sont données respectivement pour les équations (B.13) et (B.14). Cette remarque caractérise une des

principales différentes, en termes de formulation par éléments finis, entre les formulations en *couches équivalentes discrètes*, dans le cas de la théorie *Layerwise-FSDT*, et des théories en *couche simples équivalente*, dans le cas des théories *FSDT* et *HSDT*.

Pour effectuer l'intégration fournie dans l'équation (B.17), écrite dans le système de coordonnées élémentaire plans (x, y) , celles-ci doivent être transformées dans le système de coordonnées locales plans (ξ, η) . Le passage du système (x, y) à (ξ, η) est réalisé avec l'introduction de la matrice *Jacobienne*, définie par l'équation (3.4) du Chapitre III pour l'élément fini rectangulaire Serendip adopté dans ce mémoire. Ainsi, l'équation (B.17) est réécrite en fonction des coordonnées (ξ, η) sous la forme :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \left(\sum_{k=1}^{N_c} \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} [A_k] dz \right) J d\eta d\xi \right] dt \quad (\text{B.19})$$

où J est le *jacobien* fonction de l'aire de élément fini rectangulaire adopté.

L'intégrale présentée par l'équation (B.17) est réorganisée et réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} [K_e] &= \sum_{k=1}^{N_c} \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \left([B_b]^T [C_b^e]^{(k)} [B_b] + [B_s]^T [C_s^e]^{(k)} [B_s] \right) J dz d\eta d\xi \\ &= [K_e^b] + [K_e^s] \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

où la matrice $[K_e]$ est connue comme *matrice de raideur élastique élémentaire*. Les matrices $[K_e^b]$ et $[K_e^s]$, sont respectivement les *matrices de raideur associées aux effets découplés de membrane, de flexion et de cisaillement plan et de cisaillement transverse*.

Le dernier terme de l'intégrale fournie par l'équation (B.1) représente le *travail des efforts extérieurs*. Le travail virtuel des chargements extérieurs appliqués est donné par le produit des *coordonnées variationnelles généralisées* $\{\delta U\}$ avec les *forces virtuelles*. Pour les structures considérées, le travail mécanique peut être réalisé par différents types de forces, tels que *forces de volume* $\{F^V\}$, *forces de surface* $\{F^S\}$ et *forces ponctuelles* $\{F^P\}$. Ainsi, l'intégrale du travail virtuel est définie par l'expression :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta W_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{V_e} \{\delta U\}^T \{F^V\} dV_e + \int_{S_e} \{\delta U\}^T \{F^S\} dS_e + \{\delta U\}^T \{F^P\} \right) dt \quad (\text{B.21})$$

où $\{F^V\} = \{F_x^V \ F_y^V \ F_z^V\}^T$, $\{F^S\} = \{F_x^S \ F_y^S \ F_z^S\}^T$ et $\{F^P\} = \{F_x^P \ F_y^P \ F_z^P\}^T$. Le vecteur $\{\delta U\}^T$ est le *vecteur de déplacements* et S_e désigne l'*aire élémentaire*.

La contribution des *forces de volume, de surface et ponctuelles*, exprimées selon l'équation précédent, est écrite en termes de *fonctions de forme* et de *quantités nodales* données par les équations (3.35), (3.46) ou (3.75) du Chapitre III en accord avec la théorie formulée (*FSDT, HSDT ou Layerwise-FSDT*). En substituant ces équations dans l'expression (B.21), conformément à la formulation, et en effectuant quelques manipulations, on obtient l'expression suivante au niveau élémentaire :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta W_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\{\delta u_e\}^T \{F_e\} \right) dt \quad (\text{B.22})$$

où le vecteur $\{F_e\}$ est le vecteur des forces nodales généralisées au niveau élémentaire, écrite selon l'expression :

$$F_e = \int_{V_e} [N]^T [A_m]^T \{F^V\} dV_e + \int_{S_e} [N]^T [A_m]^T \{F^S\} dS_e + [N]^T [A_m]^T \{F^P\} \quad (\text{B.23})$$

Le *principe variationnel de Hamilton* au niveau élémentaire est développée en remplaçant les intégrales des énergies, exprimées selon les équations (B.7), (B.17) et (B.21) dans l'intégrale fournie dans l'équation (B.1). Il en résulte ainsi l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (\delta K_e - \delta P_e + \delta W_e) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \{\delta u_e\}^T [M_e] \{\ddot{u}_e\} dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(\{\delta u_e\}^T [K_e] \{u_e\} \right) dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left(-\{\delta u_e\}^T \{F_e\} \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

2) Principe variationnel de Hamilton au niveau global

Les expressions des énergies au niveau élémentaire, indiquées par l'indice ($_e$), peuvent être transformées au niveau global, indiquées par l'indice ($_g$), en introduisant la *matrice de connectivité* $[L_e]$ (RADE, 2004; ASSAN, 2003).

Pour N_e éléments finis dans lesquels la structure est discrétisée, la *variation de l'énergie cinétique totale de la structure* est donnée par l'expression :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta K dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{e=1}^{N_e} \{ \delta u_g \}^T [L_e]^T [M_e] [L_e] \{ \ddot{u}_g \} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \{ \delta u_g \}^T [M_g] \{ \ddot{u}_g \} dt \quad (\text{B.25})$$

où la matrice $[M_g]$ est la matrice de masse globale de la structure, définie par l'équation :

$$[M_g] = \sum_{e=1}^{N_e} [L_e]^T [M_e] [L_e] \quad (\text{B.26})$$

La variation de l'énergie potentielle de la structure est exprimée par l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta P dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\{ \delta u_g \}^T [K_g] \{ u_g \} \right) dt \quad (\text{B.27})$$

où la matrice $[K_g]$ s'écrit selon l'équation :

$$[K_g] = \sum_{e=1}^{N_e} [L_e]^T [K_e] [L_e] \quad (\text{B.28})$$

Pour un élément fini quelconque, le *travail virtuel total* des contributions des forces externes et internes est défini par la somme des contributions de toutes les forces au niveau élémentaire, c'est-à-dire pour les N_e éléments finis, le travail virtuel total de toutes les forces qui agissent sur la structure peut être exprimé sous la forme suivante :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta W_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\{\delta u_e\}^T \{F_e\} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(-\{\delta u_g\}^T \sum_{e=1}^{Ne} [L_e] \{F_e\} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(-\{\delta u_g\}^T \{F_g\} \right) dt \quad (\text{B.29})$$

où le vecteur $\{F_g\}$ est le *vecteur de forces nodales globales* qui agit sur le système.

L'équation (B.1), est développée au niveau global en remplaçant toutes les intégrales variationnelles d'énergie, écrites au niveau élémentaire par le niveau global, en utilisant les équations (B.25) et (B.29). Ainsi, au niveau global on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta P + \delta W) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \{\delta u_g\}^T [M_g] \{\ddot{u}_g\} dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(\{\delta u_g\}^T [K_g] \{u_g\} \right) dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left(-\{\delta u_g\}^T \{F_g\} \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Annexe C.1. Introduction des conditions aux limites

Le vecteur déplacement global $\{u_g\}$ et les matrices de masse $[M_g]$ et de raideur $[K_g]$ globales peuvent être partitionnés en composantes libres (l) et imposées (i), selon les expressions suivantes :

$$\{u_g\} = \left\{ \left\{ u_g^l \right\} \quad \left\{ u_g^i \right\} \right\}^T \quad (\text{C.1})$$

$$[M_g] = \begin{bmatrix} [M_g^{ll}] & [M_g^{li}] \\ [M_g^{il}] & [M_g^{ii}] \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$[K_g] = \begin{bmatrix} [K_g^{ll}] & [k_g^{li}] \\ [k_g^{il}] & [k_g^{ii}] \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

En respectant cette répartition, l'équation (3.82) du Chapitre III peut être réécrite, sous la forme suivante :

$$\left[M_g^{ll} \right] \{ \ddot{u}_g^l \} + \left[K_g^{ll} \right] \{ u_g^l \} = \{ \bar{F}_g \} \quad (C.4)$$

avec :

$$\{ \bar{F}_g \} = \{ F_g^l \} - \left[M_g^{li} \right] \{ \ddot{u}_g^i \} - \left[K_g^{li} \right] \{ u_g^i \} \quad (C.5)$$

Le membre de gauche de l'équation (C.4) est exprimée en termes de ses coordonnées libres, cependant, dans le terme de droite il y a de composantes imposées, libres et de couplage entre ces composantes libres-imposés (li). De cette équation on peut calculer les déplacements nodaux $\{ u_g^l \}$, correspondant aux *ddl*s libres. Les forces de réactions, exprimées par le vecteur $\{ \bar{F}_g \}$, sont associées aux *ddl*s imposés, et peuvent être obtenues par l'équation (C.5).

On utilise la notation en exposant pour préciser si les *ddl*s sont libres ou imposés. Cette notation peut également être utilisée pour indiquer l'ordre des matrices de l'équation du mouvement dans la condition d'application des conditions aux limites. Ainsi, l'exposant (l) représente le nombre total de *ddl*s libres, tandis que (i) fait référence au nombre total de *ddl*s imposés. Par exemple, l'ordre de la matrice de raideur $\left[K_g^{il} \right]$ peut être exprimé simplement par la variable \bar{N} , où $\bar{N} = i + l$. Le nombre total de *ddl*s de la structure libre (M), c'est-à-dire sans l'application des conditions aux limites, peut être alternativement calculé par la somme du nombre *ddl*s imposés (i) avec les livres (l), c'est-à-dire $M = i + l$.

Dans la littérature, relativement à la théorie d'ordre supérieur (*HSDT*), on constate un désaccord dans les travaux en ce qui concerne l'application des conditions aux limites sur ses *ddl*s relatif aux variables d'ordre élevée. Celles-ci n'ont pas une interprétation physique évidente dans la théorie d'ordre supérieur (*HSDT*).

Correia et al. (2000) exprime la condition d'*appui simple*, selon les considérations suivantes :

- Pour les bords de la structure parallèles au repère global x , ils adoptent :

$$u_0 = w_0 = \psi_x = \psi_z = \zeta_x = \zeta_z = 0 \quad (\text{C.6})$$

- Pour les bords de la structure parallèles au repère y , ils emploient :

$$v_0 = w_0 = \psi_y = \psi_z = \zeta_y = \zeta_z = 0 \quad (\text{C.7})$$

Dans d'autres travaux Sadek (1998), Chee (2000) et Khare et al. (2003) considèrent que la condition *d'appui simple* est donnée par les considérations suivantes :

- Pour le côté parallèle au repère x , ils adoptent : $u = w = 0$. Ainsi, selon l'équation (2.3) du Chapitre II du champ de déplacement de la théorie *HSDT*, cette condition est issue de l'hypothèse :

$$u_0 = w_0 = \psi_x = \psi_z = \zeta_x = \zeta_z = \phi_x = 0 \quad (\text{C.8})$$

- Pour le côté parallèle au repère y , ils adoptent : $v = w = 0$. Et, ainsi on a :

$$v_0 = w_0 = \psi_y = \psi_z = \zeta_y = \zeta_z = \phi_y = 0 \quad (\text{C.9})$$

On adopte dans ce mémoire, quand cela est nécessaire, les considérations de Correia et al. (2000) sur l'application des conditions aux limites. On est conscient de l'importance d'une étude approfondie sur ce sujet.

Pour les structures avec des bords encastree les auteurs Sadek (1998), Chee (2000), Khare et al. (2003) et Correia et al. (2000), sont d'accord avec les expressions :

$$u_0 = \psi_x = \zeta_x = \theta_x = v_0 = \psi_y = \zeta_y = \theta_y = w_0 = \psi_z = \zeta_z = 0 \quad (\text{C.10})$$

Annexe C.2. Modal Assurance Criterion (MAC)

Nous pouvons utiliser l'équation (3.85) du Chapitre III en % pour les écarts relatifs sur les fréquences propres entre le modèle de référence et le modèle utilisé.

$$\varepsilon_i = 100 \times \left(f_i^{ref} - f_i^{cal} \right) / f_i^{ref} \quad (C.11)$$

où f_i^{ref} est la ième fréquence propre du modèle de référence, et, f_i^{cal} est la ième fréquence propre du modèle comparé.

Toutefois, pour la comparaison des vecteurs propres, on dispose de plusieurs critères comme : *Modal Scale Factor (MSF)*, *Orthogonality (OR)*, *Cross-Orthogonality (XOR)*, *Modal Effective Mass (MEM)*, *Modal Assurance Criterion (MAC)*, *Normalized Cross Orthogonality (NCO)* et d'autres. Selon Ewins (1984), le *MAC* est le critère le plus simple et le plus couramment utilisé.

Pour calculer la matrice de *MAC*, on doit, si nécessaire, réduire l'ordre du modèle à être comparé au même ordre que celui du modèle de référence. Ainsi, les composantes des vecteurs de modes sont découplés en deux groupes: des *ddl masters* et *esclaves*. Puis, la matrice de *MAC* est calculée. Selon Ewins (1984), la matrice de *MAC* calcule l'écart quadratique minimum entre deux modes propres arbitraires, et est donnée par l'équation :

$$MAC_{(ij)} = \left| \left(\phi_i^{ref} \right)^T \left(\phi_j^{cal} \right) \right|^2 / \left(\left(\phi_i^{ref} \right)^T \phi_i^{ref} \right) \left(\left(\phi_j^{cal} \right)^T \phi_j^{cal} \right) \quad (C.12)$$

où : ϕ_i^{ref} est le ième mode propre considéré comme celui de référence, et ϕ_j^{cal} est le jème mode à être comparé. Lorsque deux modes propres sont bien corrélés, le *MAC* est voisin de 1, sinon il est voisin de 0. De plus une bonne corrélation conduit à une matrice *MAC* diagonale pour les modes découplés.

Annexe D.1 : Fondements de la viscoélasticité linéaire

Les matériaux viscoélastiques sont le plus souvent des élastomères de chaînes moléculaires longues et qui transforment l'énergie mécanique en chaleur lorsqu'ils sont soumis à des déformations mécaniques cycliques. Ces matériaux passent d'un état peu rigide (*caoutchouteux*), associé à des températures élevées et à de basses fréquences de vibration, à un état rigide (*vitreux*), associé à de basses températures et à de hautes fréquences de vibration. Dans la *zone de transition* entre ces états, leurs propriétés varient rapidement et le matériau transforme une partie de l'énergie de déformation mécanique de la structure en énergie thermique qui est dissipée sous forme de chaleur.

Le comportement mécanique des matériaux viscoélastiques peut être vu, selon Persoz (1987), comme la composition de deux principaux types de comportement mécanique, soit :

(a) un comportement qui ressemble à celui d'un *solide élastique linéaire*, sous lequel les contraintes sont proportionnelles aux déformations (de traction-compression et de cisaillement) et indépendantes du taux de déformation ;

(b) un comportement qui ressemble à celui d'un *fluide visqueux newtonien* dont les contraintes sont proportionnelles au taux de déformation dû au cisaillement et indépendantes de la déformation.

Le comportement d'un *solide élastique linéaire* et d'un *fluide visqueux newtonien*, caractérisé dans le cas d'une sollicitation dans une seule direction (*uniaxiale*) et des petites déformations, peut être exprimé par les deux équations suivantes :

(a) Pour un *solide élastique linéaire* :

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) \quad (\text{D.1})$$

$$\tau(t) = G\gamma(t) \quad (\text{D.2})$$

(b) Pour un *fluide visqueux newtonien* :

$$\tau(t) = \mu\dot{\gamma}(t) \quad (\text{D.3})$$

où E et G désignent, respectivement, le *module de Young* et le *module de cisaillement* du matériau, et ε , γ et $\dot{\gamma}$ désignent, respectivement, les *déformations axiales* et de *cisaillement*

et la *vitesse de cisaillement*. Enfin, μ représente la *viscosité du fluide* (caractéristique particulière de résistance à l'écoulement de chaque fluide).

Selon Christensen (1982), lorsque le matériau viscoélastique est soumis à un chargement cyclique, la formation de *boucles d'hystérésis*, qui caractérisent sa capacité à dissiper l'énergie vibratoire, sont observées. Selon le même chercheur, ce phénomène peut être représenté dans le domaine temporel par l'équation suivante, réduite au cas uniaxial et linéaire (c'est-à-dire sous l'hypothèse des petites déformations) :

$$\sigma(t) = G(t)\varepsilon_0 + \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{D.4})$$

où $\sigma(t)$ et $\varepsilon(t)$ représentent, respectivement, les *contraintes* et les *déformations* (normales ou de cisaillement), $G(t)$ désigne la *fonction module du matériau* et t désigne la *variable temporelle*.

La *fonction de relaxation* $G(t)$ peut être obtenue à partir de données *expérimentales de relaxation*, où une déformation constante ε_0 est appliquée au matériau et où la contrainte σ est obtenue au cours du temps, selon l'expression :

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (\text{D.5})$$

Un autre paramètre caractéristique des matériaux viscoélastiques est la *fonction de fluage* $J(t)$, définie selon Theisen (2006) comme une déformation lente mais progressive au cours du temps t du matériau soumis à une contrainte constante σ_0 . Ce comportement est observé dans les matériaux viscoélastiques si on effectue le *test de fluage* (de l'anglais *creep-test*). Son expression mathématique s'écrit :

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (\text{D.6})$$

Annexe D.2 : Modèles du comportement viscoélastique linéaire

Selon Nashif et al. (1985), il existe essentiellement deux types de modèles mathématiques utilisés pour représenter le comportement mécanique des matériaux viscoélastiques linéaires : les *modèles classiques*, appelées aussi *rhéologiques*, et les *modèles modernes*.

Parmi les modèles classiques se distinguent ceux de *Hooke*, de *Newton*, de *Maxwell*, de *Kelvin-Voigt*, de *Kelvin-Voigt Généralisé*, de *Maxwell Généralisé* et de *Zener* (connu aussi sous la dénomination de *modèle Solide Linéaire Standard - SLS*) (DROZDOV, 1998). Ces modèles sont représentés par une combinaison de *ressorts* (G) et d'*amortisseurs visqueux simples* (μ) qui sont sujets à des *forces* (ou *déplacements*) *externes* F appliquées, comme l'illustre symboliquement la Fig. D.1.

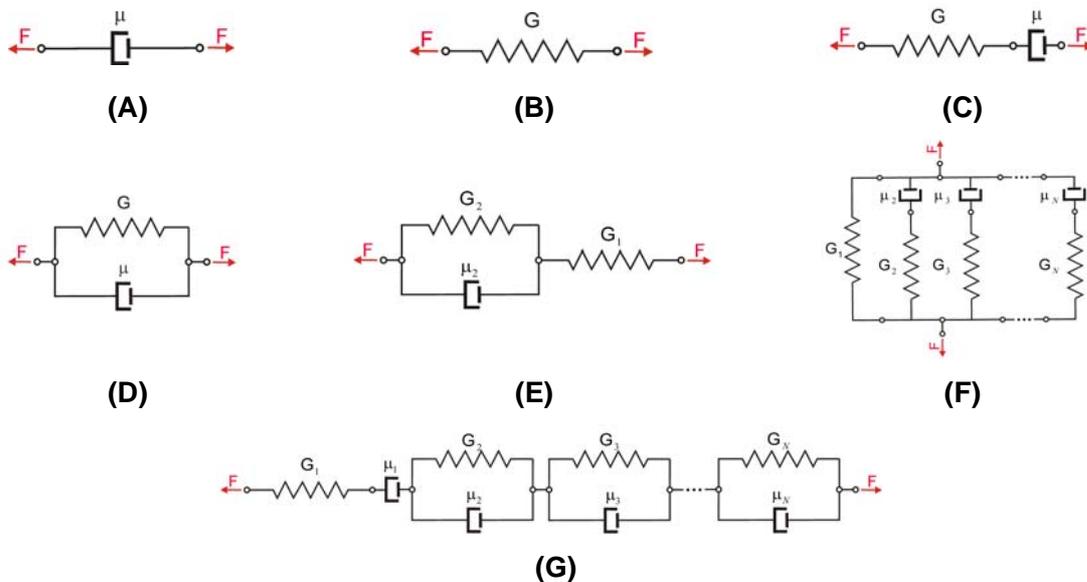


Figure D.1 - Modèles rhéologiques simples : (A) de *Newton*, (B) de *Hooke*, (C) de *Maxwell*, (D) de *Kelvin-Voigt*, (E) de *Zener*, (F) de *Maxwell Généralisé*, (G) et de *Kelvin-Voigt Généralisé*.

(Adapté de Barbosa (2000)).

Les lois de comportement définies par la suite sont celles qui décrivent les quatre premiers modèles illustrés par la Fig. D.1, et qui sont fournis par Barbosa (2000) ainsi que par Carpinteri et Mainardi (1997). Ainsi on a :

$$\text{Modèle de Newton : } \sigma(t) = \widehat{b} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad \begin{cases} \mathbf{J}(t) = t/\widehat{b} \\ \mathbf{G}(t) = \widehat{b} \delta(t) \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

$$\text{Modèle de Hooke : } \sigma(t) = \widehat{m} \varepsilon(t) \quad \begin{cases} \mathbf{J}(t) = 1/\widehat{m} \\ \mathbf{G}(t) = \widehat{m} \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

$$\text{Modèle de Maxwell : } \sigma(t) + \widehat{a} \frac{d\sigma(t)}{dt} = \widehat{b} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad \begin{cases} \mathbf{J}(t) = \frac{\widehat{a}}{\widehat{b}} + \frac{t}{\widehat{b}} \\ \mathbf{G}(t) = \frac{\widehat{b}}{\widehat{a}} e^{-t/\tau_\sigma} \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

$$\text{Modèle de Kelvin-Voigt : } \sigma(t) = \widehat{m} \varepsilon(t) + \widehat{b} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad \begin{cases} \mathbf{J}(t) = \frac{1}{\widehat{m}} [1 - e^{-t/\tau_\varepsilon}] \\ \mathbf{G}(t) = \widehat{m} + \widehat{b} \delta(t) \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

où $\sigma(t)$ est la *contrainte uniaxiale*, $\varepsilon(t)$ est la *déformation uniaxiale*, $\delta(t)$ représente l'*impulsion de Dirac (fonction impulsion unitaire)*, \widehat{a} , \widehat{b} et \widehat{m} sont des *paramètres expérimentaux des modèles*, $\tau_\varepsilon = \widehat{b}/\widehat{m}$ est le *temps de fluage*, $\tau_\sigma = \widehat{a}$ est le *temps de relaxation*, $\mathbf{J}(t)$ est la *fonction de fluage* (déformation obtenue par une contrainte d'entrée de type fonction échelon d'amplitude unitaire) et enfin, $\mathbf{G}(t)$ est la *fonction de relaxation* du matériau (contrainte obtenue par une déformation d'entrée de type fonction échelon d'amplitude unitaire).

Les expressions relatives aux forces et déplacements des modèles de *Maxwell Généralisé* et de *Kelvin-Voigt Généralisé* sont plus complexes que celles des quatre autres modèles fournis par les équations (D.7), (D.8), (D.9) et (D.10), et doivent être étudiées à part, en raison du grand nombre de combinaisons possibles entre les ressorts et les amortisseurs.

On observe, par le biais de considérations thermodynamiques, qu'aussi bien expérimentalement, qu'analytiquement la *fonction de fluage* $\mathbf{J}(t)$ des matériaux viscoélastiques augmente avec le temps et tend asymptotiquement vers une valeur constante, alors que la *fonction de relaxation* $\mathbf{G}(t)$ diminue avec le temps en tendant vers une asymptote horizontale (BARBOSA, 2000 ; WANG, 2001).

La Figure D.2 illustre la dépendance temporelle du comportement mécanique de certains des *modèles classiques*, tels que ceux de *Maxwell*, de *Zener* et de *Kelvin-Voigt*, en comparaison avec ceux d'un *Solide Purement Élastique (SPE)*.

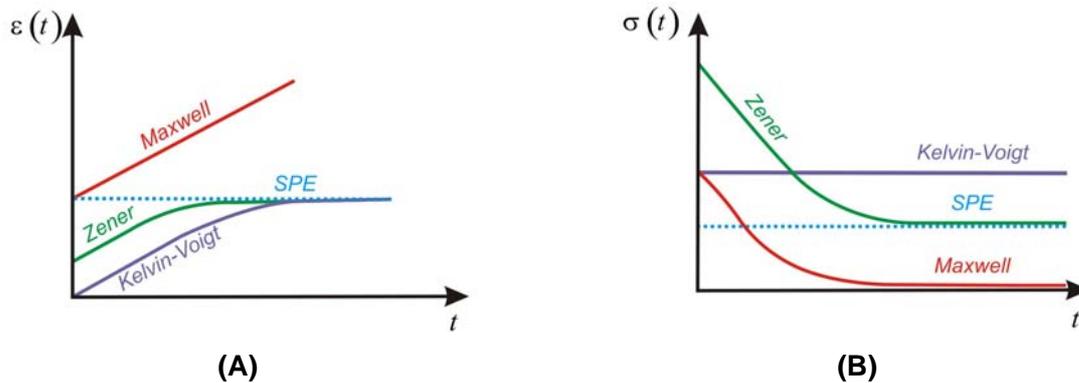


Figure D.2 - Fonction de fluage (A) et de relaxation (B) de différents modèles classiques (figure adaptée de Barbosa (2000) et Wang (2001)).

La Figure D.2 (B) montre que la *fonction de relaxation* prévue par le modèle de *Kelvin-Voigt* ne correspond pas au comportement réel observé, car elle est invariante avec le temps. De plus, comme l'illustre la Figure D.2 (A), la *fonction de fluage* du modèle de *Maxwell* augmente jusqu'à l'infini avec le temps et donc ne correspond pas au comportement observé des *matériaux viscoélastiques réels*. Par contre, le modèle de *Zener* n'a pas ces limitations et peut être considéré comme la première approximation mathématique du comportement de matériaux viscoélastiques réels. Son équation mathématique est donnée par l'expression :

$$\sigma(t) + \hat{a} \frac{d\sigma(t)}{dt} = \hat{m} \varepsilon(t) + \hat{b} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad \begin{cases} J(t) = J_g + \chi_+ [1 - e^{-t/\tau_\varepsilon}] \\ G(t) = G_e + \chi_- e^{-t/\tau_\sigma} \end{cases} \quad (D.11)$$

où : $J_g = \hat{a}/\hat{b}$, $\chi_+ = 1/\hat{m} - \hat{a}/\hat{b}$, $\tau_\varepsilon = \hat{b}/\hat{m}$, $G_e = \hat{m}$, $\chi_- = \hat{b}/\hat{a} - \hat{m}$ et $\tau_\sigma = \hat{a}$. La condition $0 < \hat{m} < \hat{b}/\hat{a}$ garantit que χ_+ et χ_- sont supérieurs à zéro et que $0 < J_g < J(+\infty) < \infty$, $0 < G(+\infty) < G_e < \infty$ et $0 < \tau_\sigma < \tau_\varepsilon < \infty$ (CARPINTERI, A. et MAINARDI, 1997).

Dans le cas où le *modèle de Zener* ne représente pas les données expérimentales, une des solutions consiste à utiliser le modèle *Solide Linéaire Standard Généralisé (SLS-G)*, qui consiste à introduire des dérivées d'ordre plus élevé aux contraintes et déformations de l'équation (D.11) en menant à la relation constitutive présentée par l'expression mathématique suivante, donnée par Carpinteri et Mainardi (1997) :

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M \hat{a}_m \frac{d^m \sigma(t)}{dt^m} = \hat{m} \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N \hat{b}_n \frac{d^n \varepsilon(t)}{dt^n} \quad (\text{D.12})$$

, avec : \hat{a}_m ($m = 1, \dots, M$), \hat{b}_n ($n = 1, \dots, N$) et \hat{m} sont paramètres du modèle *SLS-G*.

Et général, les *modèles classiques* ont généralement un nombre élevé de paramètres à identifier, lié au nombre de dérivées d'ordre entier de leurs modèles mathématiques, par conséquent la combinaison de ce type de modèle avec la *MEF* conduit à un système d'équations du mouvement d'ordre très élevé, dont la solution induit un coût de calcul significatif. Ainsi, l'utilisation des *modèles classiques* pour les structures complexes rencontrées en mécanique est limitée, ou même impraticable, en termes du coût d'obtention des réponses de la structure.

Parmi les *modèles modernes*, utilisés pour la représentation mathématique du comportement expérimental des matériaux viscoélastiques, on peut distinguer les modèles rhéologiques à *Dérivées Fractionnaires (DF)*, de *Golla-Hughes-McTavish (GHM)* et du *Champ de Déplacements Anélastiques (CDA)*.

Le modèle *GHM* représente le module complexe du matériau viscoélastique par un développement en série de fractions rationnelles. Selon Benjeddou (2001), ce type de modèle conduit à des équations du mouvement de second ordre, obtenues par l'introduction de variables dissipatives internes (α_i , ξ_i et ω_i) dans le système original et ainsi, le *GHM* peut fournir une description générale de l'effet de relaxation et de la dépendance fréquentielle des propriétés mécaniques du matériau viscoélastique. Dans le domaine de *Laplace*, le modèle *GHM* est s'exprimé mathématiquement de la façon suivante (GOLLA et HUGHES, 1985) :

$$G(s) = G_r \left(1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{s^2 + 2\xi_i \omega_i s}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \right), \quad (\text{D.13})$$

où G_r est le *module de basse fréquence* (ou *module de relaxation* ou *module statique*) et n est le nombre micro-oscillateurs masse-raideur-amortissement.

Le modèle du *Champ de Déplacements Anélastiques (CDA)*, de l'anglais *ADF - Anelastic Displacement Field*, sépare le champ de déplacements en deux parties : une partie *purement élastique*, instantanément proportionnelle à la contrainte, et une partie *anélastique* qui représente le phénomène de relaxation du matériau viscoélastique linéaire. Le *CDA* conduit à des équations du mouvement de premier ordre (contrairement au *GHM*) conformément aux procédures numériques d'analyse par éléments finis grâce à l'obtention d'un système d'équations couplé sous la forme d'équations d'état (BENJEDDOU, 2001).

Le *CDA* est représenté dans le *domaine de Laplace* par l'expression suivante (LESIEUTRE et BIANCHINI, 1995) :

$$G(s) = G_r \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i s}{s + \Omega_i} \right) \quad (\text{D.14})$$

où Ω_i est l'inverse du temps de relaxation à déformation constante, Δ_i est l'intensité de la relaxation et n est le nombre de champs de déplacements anélastiques. Les deux paramètres Ω_i et Δ_i sont obtenus par lissage des courbes expérimentales de cisaillement du matériau viscoélastique utilisé.

L'inconvénient principal de l'utilisation des modèles *CDA* et *GHM*, lorsqu'ils sont appliqués à la discrétisation par éléments finis dans les domaines temporel ou fréquentiel, est qu'ils conduisent à des systèmes globaux d'équations du mouvement possédant des nombres élevés de *degrés de liberté (ddl)*, puisqu'ils ajoutent de nombreuses variables de nature dissipative au système original non-amorti pour pouvoir représenter le comportement viscoélastique. Ainsi, ces deux modèles sont pratiquement inapplicables aux applications numériques d'intérêt industriel associées à des géométries complexes et à des matrices globales de grande taille. Selon Stoppa (2003), le nombre total de *ddl* ajoutés au système global original sans amortissement est d'ordre $N = N_{ddl} (1 + n_a)$, où N_{ddl} est le nombre de *ddl* du système d'origine avant l'ajout du

modèle d'amortissement et n_a est le nombre de paramètres du modèle dissipatif (*CDA* ou *GHM*) nécessaire à une représentation adéquate du comportement expérimental. À priori, le nombre optimal de paramètres n_a du *CDA* ou *GHM* n'est pas connu, toutefois le nombre de paramètres est déterminé en fonction de la largeur de la bande fréquentielle utilisée pour son identification expérimentale par lissage de courbes. Normalement, selon Lima (2007), plus la bande fréquentielle est large, plus il faut de paramètres pour bien ajuster les courbes expérimentales à celles des modèles *CDA* ou *GHM*. Ainsi, d'autres modèles, tels les modèles à *dérivées fractionnaires* (*DF*) sont une alternative intéressante, car il suffit alors de n'identifier que trois, quatre ou cinq paramètres dans la bande fréquentielle de lissage, bien qu'ils soient employés normalement dans le domaine temporel.

Récemment, dans le but de réduire le coût numérique du calcul des systèmes mécaniques avec traitements viscoélastiques étudiés dans le domaine fréquentiel, de nombreux chercheurs, tels que Trindade (2000), Lima (2007), Guedri et al. (2010) et Cazenove (2010), ont utilisé directement les données expérimentales des matériaux viscoélastiques sous la forme de nomogrammes ou de tableaux, en utilisant le *modèle du Module Complexe (MC)* et en employant le *Principe de la Correspondance Élastique-Viscoélastique (PCEV)* et le *Principe de l'Équivalence Fréquence-Température (PEFT)*. Selon Nashif et al (1985), du point de vue pratique on peut résoudre les problèmes de viscoélasticité comme des cas particuliers de l'élasticité où les propriétés des matériaux viscoélastiques sont complexes et dépendent de la fréquence d'excitation.

Annexe D.3 : Influence des facteurs environnementaux et opérationnels sur les matériaux viscoélastiques

Selon Mead (1998) et Nashif et al. (1985), le comportement mécanique des matériaux viscoélastiques est fortement lié aux facteurs environnementaux et opérationnels, tels que la fréquence, la température, la précontrainte statique, le vieillissement, la contamination par l'huile et la pression. Parmi ces facteurs, la température est considérée comme celui qui influence le plus les propriétés mécaniques du matériau viscoélastique. La Figure D.3 (A) montre qu'une petite variation de la température a un effet semblable à celui d'une variation plus grande de la fréquence. La Figure D.3 (B) adaptée de Nashif et al. (1985) montre la forte influence de la variation de la fréquence et de la température sur les amplitudes de vibration des quatre

premiers modes de vibration d'une poutre encastrée-libre en métal traitée par un matériau viscoélastique.

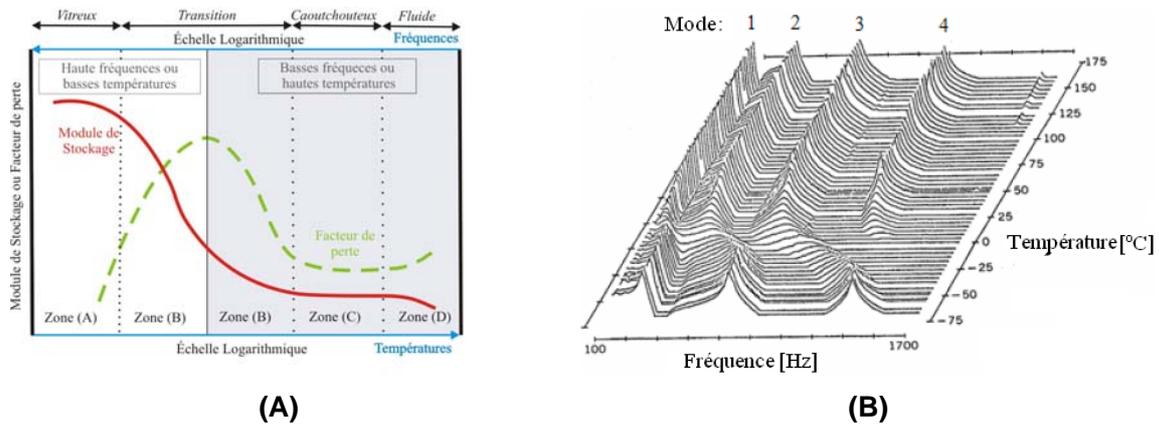


Figure D.3 - (A) Variation du module de stockage et du facteur de perte d'un matériau viscoélastique quelconque en fonction de la fréquence à température constante. (B) Spectre en fréquence et en température d'une poutre encastrée-libre traitée viscoélastiquement (Adaptées respectivement de Johnson (1995) et de Nashif et al. (1985)).

Selon Renault (2008), si la température d'un matériau augmente, alors qu'il est excité à fréquence constante, sa réorganisation moléculaire interne devient plus mobile et le matériau devient plus élastique. Inversement, une réduction de température réduit la mobilité des molécules. Le matériau devient plus rigide et a des propriétés vitreuses. Pour un matériau à température constante soumis à des fréquences d'excitation variables, le phénomène qui apparaît est inversé. À basse fréquence la période d'oscillation des contraintes est assez lente pour que les molécules aient le temps de s'enrouler et se dérouler. Le comportement du matériau est *caoutchouteux*. À haute fréquence, la période est si élevée que le matériau n'a pas le temps de détendre. Il est donc rigide et a des propriétés vitreuses. Il est alors équivalent d'augmenter la température ou de réduire la fréquence. Ce phénomène, qui a été constaté expérimentalement par H. Leaderman en 1941, selon Renault (2008), est connu comme le *Principe d'Équivalence Fréquence-Température (PEFT)*.

D'après Johnson (1995) la Fig. D.3 (A) illustre les quatre états physiques (*l'état vitreux*, de *transition*, *caoutchouteux* et *fluide*) du matériau viscoélastique et définit aussi les zones optimales d'application de divers types de dispositifs d'amortissement. La première zone, la zone (A), est associée aux basses températures ou aux fréquences élevées, où le matériau est

dans son état vitreux, caractérisé par un module de stockage atteignant sa valeur maximale et variant peu avec la température. Le facteur de perte dans cette zone est très faible et augmente rapidement avec la température. La zone (B) de transition est caractérisée par un module de stockage qui décroît fortement avec la température du matériau. Cette zone de transition est caractérisée par un facteur de perte qui atteint sa valeur maximale au milieu de la bande de température en permettant une utilisation optimale des propriétés amortissantes du matériau viscoélastique. Selon Johnson (1995), celle-ci est la zone la plus appropriée pour l'emploi de mécanismes d'amortissement passif avec matériaux viscoélastiques, tel que celles en couches *viscoélastiques libres (free-layer)* ou *contraintes (constrained-layer)*. Plus particulièrement, la zone (C), appelée zone *caoutchouteuse*, est la plus adaptée à l'utilisation des *ADVs (Absorbeurs Dynamiques de Vibrations)* car cette zone est caractérisée par une très faible influence de la température et de la fréquence sur le module de stockage et le facteur de perte. Finalement, dans la zone (D), le matériau viscoélastique se comporte tel qu'un fluide, et en raison de son instabilité cette zone est peu considérée dans les études pour la conception de projets mécaniques d'amortissement de structures. Dans la littérature, on trouve plusieurs techniques expérimentales pour déterminer les propriétés de matériaux viscoélastiques, qui sont décrites normalement en fonction de la fréquence d'excitation ω et de la température d'étude \bar{t} . Parmi ces techniques, on retiendra les techniques expérimentales appelées *Test de Résonance avec Poutres (BEAM)*, *l'Analyse Mécanique Dynamique (DMA)* et *l'Analyse Rhéologique-Rheovibron (RHEO)*, qui sont détaillées dans le travail de Barbosa (2000). Pour l'étude du matériau viscoélastique fabriqué par l'entreprise 3M et connu sous la dénomination technique ISD112TM (*Industrial Scotchdamp-112*), les courbes caractéristiques expérimentales du *module de stockage E'* et du *facteur de perte η_ϵ* obtenues par les trois techniques expérimentales citées ci-dessus sont illustrées par la Figure D.4, fournie par Barbosa (2000).

Sur la Figure D.4 (A), on peut observer que les propriétés du matériau viscoélastique ISD112TM varient considérablement selon la technique appliquée pour sa caractérisation expérimentale.

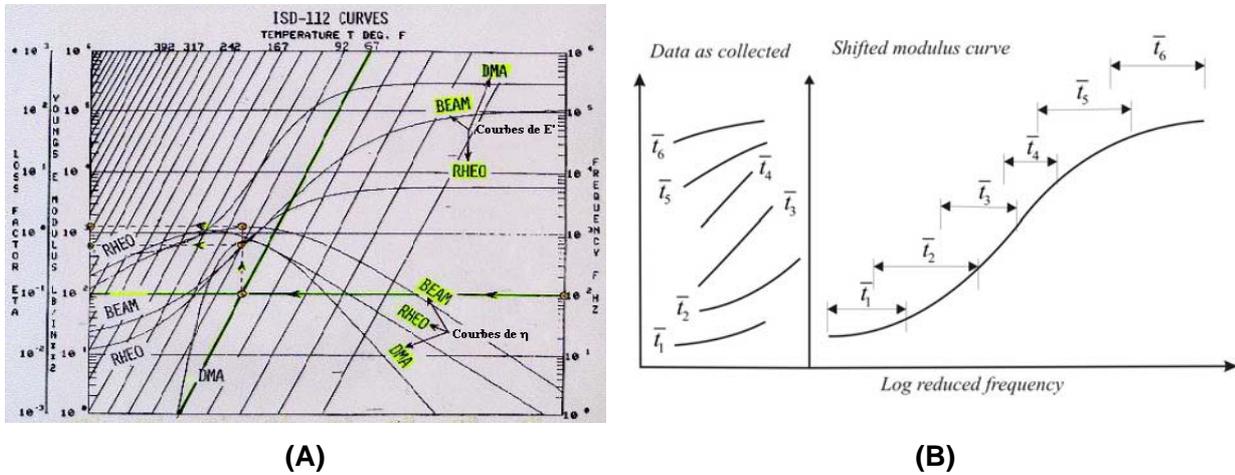


Figure D.4 - (A) Comparaison entre les *modules de stockage* et les *facteurs de perte* du matériau ISD112TM obtenus par différentes techniques expérimentales. (B) Illustration du *PEFT*. (figures adaptées, respectivement, de Barbosa (2000) et Renault (2008))

Pour construire le *nomogramme expérimental* comme celui illustré par la Fig. D.4 (A), on doit représenter la dépendance des parties *réelles* et *imaginaires du module* choisi (ou encore du *facteur de perte*) correspondant à une *température donnée* \bar{T} et pour une *gamme de fréquences étendue* (Figure D.4 (B)). D'abord on doit choisir une *température de référence* sur laquelle sont superposées, par décalage sur l'axe des abscisses, les courbes expérimentales obtenues pour des températures inférieures ou supérieures à la température de référence, jusqu'à ce que les courbes coïncident. Le processus est répété pour toutes les températures, et est terminé quand toutes les données expérimentales sont analysées.

Les équations (D.15) et (D.16), présentées par Lima (2007), sont le fruit du travail réalisé expérimentalement par Drake et Soovere (1984). Il s'agit des représentations analytiques, obtenues par lissage de données expérimentales, du *module complexe* $G(\omega, \bar{T})$ et du *facteur de décalage* $\alpha_{\bar{T}}$ du matériau ISD112TM en fonction de la *température* \bar{T} et de la *fréquence* ω_r , appelée *fréquence réduite*, qui est liée à la *fréquence d'excitation physique* ω du matériau viscoélastique selon l'expression : $\omega_r = \alpha_{\bar{T}}(\bar{T}) \omega$, avec l'introduction du *facteur de décalage* $\alpha_{\bar{T}}$ fourni dans l'équation (D.16). A chaque *température* \bar{T} correspond un *facteur de décalage* $\alpha_{\bar{T}}$ qui définit une droite d'isothermes dans le plan des fréquences réduites et physiques (ω_r, ω) du monogramme illustré selon la Fig. D.5 (A).

$$G(\omega, \bar{t}) = G(\omega, \alpha_{\bar{t}}) = G(\omega_r) = B_1 + \frac{B_2}{\left(1 + B_5 \left(\frac{i\omega_r}{B_3}\right)^{-B_6}\right)} + \left(\frac{i\omega_r}{B_3}\right)^{-B_4} \quad (\text{D.15})$$

$$\log(\alpha_{\bar{t}}) = \bar{a} \left(\frac{1}{\bar{t}} - \frac{1}{\bar{t}_r} \right) + 2,303 \left(\frac{2\bar{a}}{\bar{t}_r} - \bar{b} \right) \log \left(\frac{\bar{t}}{\bar{t}_r} \right) + \left(\frac{\bar{b}}{\bar{t}_r} - \frac{\bar{a}}{\bar{t}_r^2} - S_{AZ} \right) (\bar{t} - \bar{t}_r) \quad (\text{D.16})$$

où les constantes prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} B_1 &= 0,4307 \text{ MPa} ; B_2 = 1200 \text{ MPa} ; B_3 = 0,1543 \text{ MPa} ; B_4 = 0,6847 ; B_5 = 3,241 ; B_6 = 0,18 ; \\ \bar{t}_r &= 290 \text{ K} ; \bar{t}_L = 210 \text{ K} ; \bar{t}_H = 360 \text{ K} ; S_{AZ} = 0,05956 \text{ K}^{-1} ; S_{AL} = 0,1474 \text{ K}^{-1} ; S_{AH} = 0,009725 \text{ K}^{-1} ; \\ C_B &= (1/\bar{t}_L - 1/\bar{t}_r) ; C_A = C_B^2 ; C_C = (C_{AL} - C_{AZ}) ; D_B = (1/\bar{t}_H - 1/\bar{t}_r) ; D_A = D_B^2 ; \\ D_C &= (S_{AH} - S_{AZ}) ; \bar{a} = (D_B C_C - C_B D_C) / D_E \text{ et } \bar{b} = (D_C C_A - C_C D_A) / D_E . \end{aligned}$$

La Figure D.5 illustre les courbes normalisées de Drake et Soovere (1984) en représentant les variations du *module de stockage* et du *facteur de perte* en fonction de la *fréquence réduite* ω_r pour l'ISD112™.

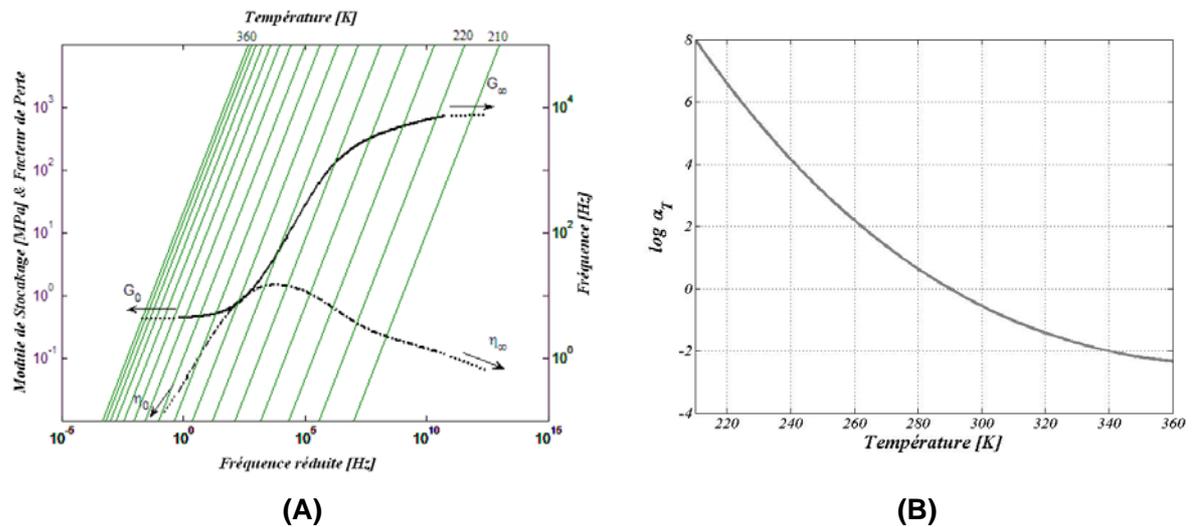


Figure D.5 - Abaque représentant les propriétés du matériau viscoélastique ISD112™.

Selon Christensen (1982), le facteur de décalage $\alpha_{\bar{t}}$ est appliqué aux matériaux thermorhéologiquement simples, c'est-à-dire aux matériaux pour lesquels le facteur $\alpha_{\bar{t}}$ est le même quel que soit le temps de relaxation. On définit ainsi le *Principe de l'Équivalence Fréquence-Température (PEFT)*, qui définit l'équivalence entre les effets de la fréquence d'excitation et de la température liés par l'introduction d'un facteur de décalage $\alpha_{\bar{t}}$. Ce facteur de décalage n'est donc pas valable si le matériau change de phase dans l'intervalle de température considéré ou bien si c'est un composite avec des procédés multiples qui donnent naissance à de la viscoélasticité, ou encore si le mécanisme de relaxation dominant n'est pas activé thermiquement.

Dans ce mémoire, pour la modélisation du comportement des matériaux viscoélastiques dans le domaine de la fréquence, on emploie directement les données expérimentales du module complexe $G(\omega, \bar{t})$ sous la forme de monogrammes, ce qui selon Barbosa (2000), Stoppa (2003) et Lima (2007) présente les avantages suivants :

(a) On peut représenter le comportement du matériau viscoélastique sur une large bande de fréquence ;

(b) On peut éviter les étapes de choix du modèle mathématique qui représente le mieux le comportement viscoélastique et l'étape d'identification numérique de ses paramètres, car les données d'entrée sont définies directement via l'emploi d'une fonction module complexe, et finalement ;

(c) les données expérimentales peuvent être facilement combinés avec les *MEFs*, en permettant le calcul des *Fonctions de Réponse en Fréquence (FRFs)* du modèle de petite ou de grande taille.

D.4 Lissage des paramètres du modèle DF

Avant la présentation de la méthodologie et des résultats numériques obtenus dans cet exemple, on fera remarquer qu'il existe dans la littérature différentes valeurs de la densité associée au matériau viscoélastique ISD112TM, et qui est utilisée dans cette section et dans la section 4.9.4 du Chapitre IV. Par exemple, on peut citer les travaux de Lima (2007, 2010), Trindade (2006), Vasques et al. (2010), Alan (2000), Haddad (1995) et Galucio et al. (2004), qui adoptent pour la densité du 3M ISD112TM, respectivement, 950, 1000, 1140, 1250, 1300, 1600

kg/m³. Dans cette section, on présente le lissage des paramètres du modèle *DF* à partir des courbes maîtresses du matériau viscoélastique ISD112TM présentées par Lima (2007, 2010). Ce lissage est réalisé à l'aide de la boîte à outils d'optimisation du logiciel commercial Matlab[®], plus particulièrement de la fonction « *fmincon* ».

Pour le lissage des courbes, on adopte la même méthode que celle proposée par Lima (2003, 2007) et Trindade (2006), qui utilisent la fonction objectif

$$F_{obj} = \sum_{i=1}^{N_{\omega}} \left(\left| \frac{G'(\omega_i) - G'_r(\omega_i)}{G'_r(\omega_i)} \right| + \left| \frac{G''(\omega_i) - G''_r(\omega_i)}{G''_r(\omega_i)} \right| \right) \quad \text{pour les lissages}$$

effectués. Où N_{ω} est le nombre de points fréquentiels utilisés pour le lissage ; et les paires (G', G'') et (G'_r, G''_r) sont les modules (réel, complexe) du matériau viscoélastique. Ceux-ci sont obtenus, respectivement, dans le processus de lissage et par des données expérimentales. Pour le matériau viscoélastique ISD112TM, l'expression de la paire (G'_r, G''_r) est donnée par les équations, (D.15) et (D.16), à chaque fréquence ω_i , dans la bande de fréquence et de température choisie.

Dans ce mémoire, nous adoptons quatre paramètres par le modèle *DF*, désignés par les notations $(E_0, E_{\infty}, \tau, \alpha)$, utilisée par Galucio et al. (2004), ou, alternativement, (G_1, G_r, b, β) , utilisée par Lima (2003, 2007) et Trindade (2006). La différence entre ces notations est associée à la manière, dont les chercheurs cités expriment l'équation du modèle des *DF*. Par exemple, l'équation (4.29) du Chapitre IV utilise la notation de Galucio et al. (2004). Les transformations entre les deux différentes notations sont données par les expressions : $\alpha = \beta$, $\tau^{\alpha} = b$, $E_0 = G_r$ et $\tau^{\alpha} E_{\infty} = G_1$. Pour le lissage de courbes, les fonctions représentant les parties réelles et imaginaires du modèle *DF* sont obtenues après l'application de la *transformée de Laplace* sur l'équation (4.29), et des changements de notation des modèles de *DF* de Galucio et al. (2004) et de Lima (2003, 2007) et de Trindade (2006). L'expression finale obtenue est $G(s) = (G_r + G_1 s^{\alpha}) / (1 + b s^{\alpha})$ (LIMA, 2003 et 2007 ; TRINDADE, 2006).

La bande de fréquence étudiée dans le lissage effectuée doit être plus large que celle considérée dans l'analyse du système amorti de manière à minimiser, selon Trindade (2000), l'effet aux bords de la bande. Ainsi, dans cette application numérique on a choisi la bande entre [8 - 8000] Hz, avec au maximum 35 points en fréquence.

Les résultats obtenus sont donnés par le Tableau D.1 par le matériau ISD112™ pour huit températures différentes : 27, 30, 35, 40, 50, 60, 70, 80 °C . Les paramètres du modèle *DF* obtenus par lissage sont utilisés dans les applications numériques présentées dans la section 4.9.4 du Chapitre IV.

Tableau D.1 - Paramètres optimaux du modèle *DF* du matériau ISD112™ à différentes températures pour la bande [8-8000Hz] avec les notations de Trindade (2000) et Galucio et al. (2004).

Température	Paramètres du matériau ISD112™						
\bar{t}	G_r	G_1	α	b	E_0	E_∞	τ
[°C]	[MPa]	[MPa]	-	[10 ⁻⁴]	[MPa]	[MPa]	[μs]
27	0,4291	0,0296	0,6794	2,3878	0,4291	124,0747	4,6668
30	0,4295	0,0233	0,6800	1,9416	0,4295	120,2391	3,4766
35	0,4301	0,0161	0,6811	1,4688	0,4301	109,3897	2,3570
40	0,4304	0,0114	0,6819	1,1371	0,4304	100,3520	1,6450
50	0,4306	0,0063	0,6830	0,7319	0,4306	86,0922	0,8804
60	0,4307	0,0039	0,6835	0,5148	0,4307	75,7666	0,5321
70	0,4307	0,0027	0,6838	0,3914	0,4307	68,7032	0,3587
80	0,4307	0,0021	0,6840	0,3216	0,4307	63,8391	0,2702

La Figure D.1 montre le lissage du *module de stockage* et du *facteur de perte* du matériau viscoélastique ISD112™ à 27°C en utilisant seulement quatre paramètres du modèle *DF* dans la bande allant de 8 à 8000 Hz.

Les Figures D.6 (A) et D.6 (B) présentent, respectivement, l'ajustement du *module de stockage* et du *facteur de perte* avec quatre paramètres du modèle *DF*. À la convergence, le modèle *DF* utilisé dans la bande de fréquence étudiée représente les courbes maîtresses avec une erreur maximale de 1,6 %, localisée au bord supérieur de la bande de fréquence, comme l'illustre la Fig. D.6 (C), montrant ainsi l'effet aux bords de la bande constaté par le chercheur Trindade (2000).

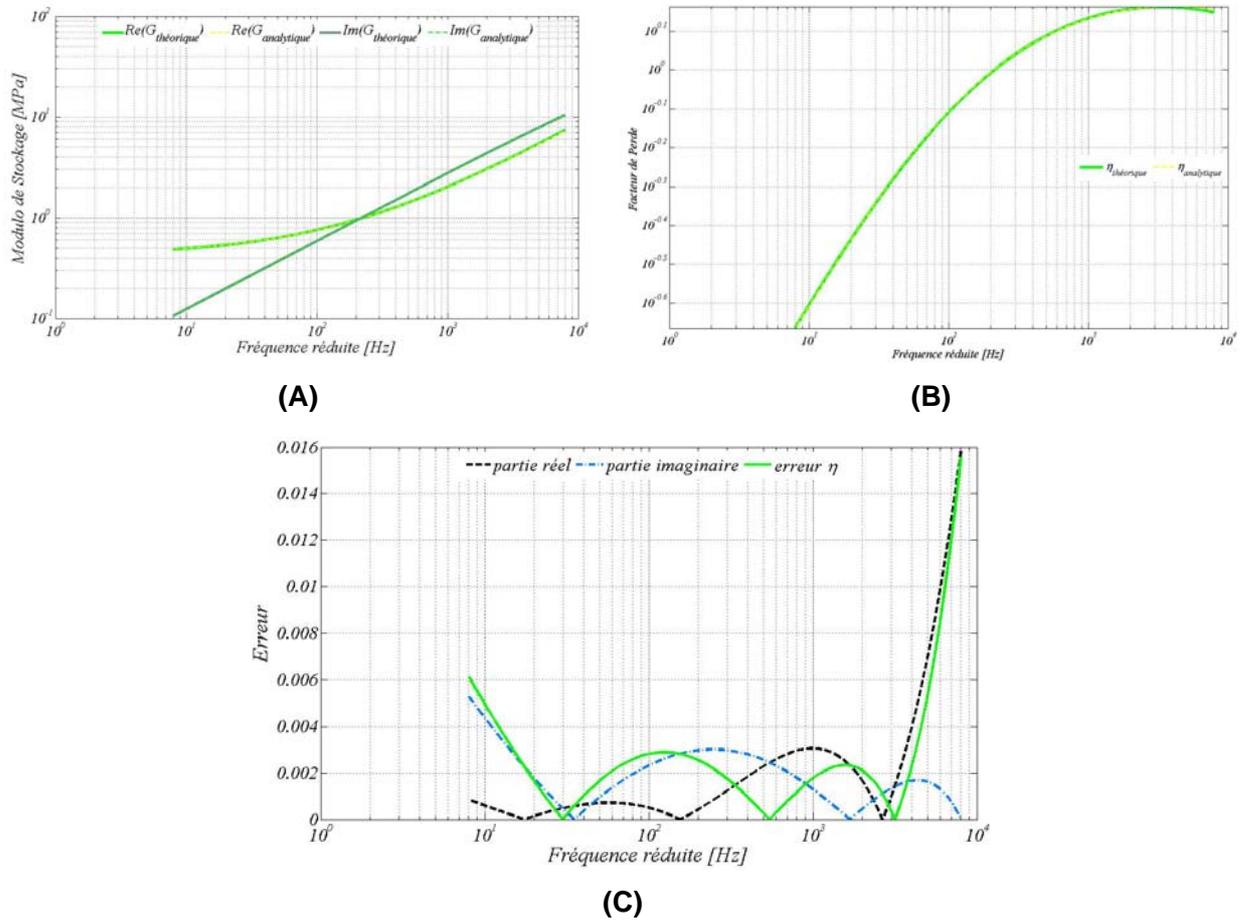


Figura D.6 - Lissage des courbes maîtresses de l'ISD112TM à 27°C avec quatre paramètres du modèle DF .

Les valeurs des quatre paramètres du modèle DF ($E_0, E_\infty, \tau, \alpha$) qui sont obtenues dans cette section, pour le ISD112TM de densité 950 kgf/m³, sont utilisées dans la simulation numérique pour la modélisation d'une structure sandwich avec un noyau viscoélastique.

Annexe E.1 : Exemple de rupture mécanique provenant des mécanismes internes d'endommagement dans le matériau

Comme exemple de rupture mécanique provenant des mécanismes internes d'endommagement dans le matériau, on peut citer l'accident aérien en 1988 du Boeing 737-297 de la compagnie aérienne Aloha Airlines (Figure E.1 (A)), lors du vol entre les villes de Hilo et Honolulu à Hawaï et qui est classiquement mentionné dans la littérature pour aborder ce thème.

Le fuselage traditionnel d'un avion, tel que dans la structure citée, est composé de pièces métalliques circonférentielles renforcées par barres longitudinales et recouvertes d'une couche mince, généralement en aluminium (Figure E.1 (C)).

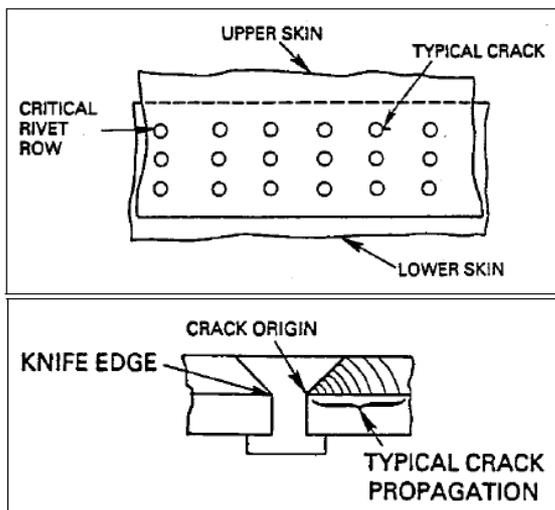
Comme le fuselage d'un aéronef est soumis à des contraintes de traction-compression qui se produisent naturellement pendant le fonctionnement normal de l'appareil en service (en particulier lors des cycles de pressurisation-dépressurisation en plein vol), des micro-fissures (mécanismes d'endommagement par fatigue) dans les couches métalliques du fuselage peuvent se développer. Sous l'action des cycles de pressurisation-dépressurisation pendant le vol, ces micro-fissures peuvent augmenter, et si elles ne sont pas détectées à temps, elles peuvent provoquer des ruptures mécaniques catastrophiques. En effet, le rapport final de l'accident (GALAXY SCIENTIFIC CORPORATION, 1988) a déterminé que celui-ci était lié aux endommagements causés par fatigue mécanique du fuselage (en aluminium) accompagnés d'une décompression explosive de l'appareil en plein vol.

Actuellement, les fuselages en aluminium sont remplacés par des structures fabriquées en matériaux composites (stratifié et sandwich) parce qu'ils sont plus légers et résistants mécaniquement (FAAW-JH TECHNICAL CENTER, 1999) que les matériaux métalliques utilisés traditionnellement. Toutefois, celles-ci peuvent subir une perte de rigidité et de résistance mécanique en raison de la présence de mécanismes internes d'endommagement, plus diversifiés que dans les matériaux traditionnels.

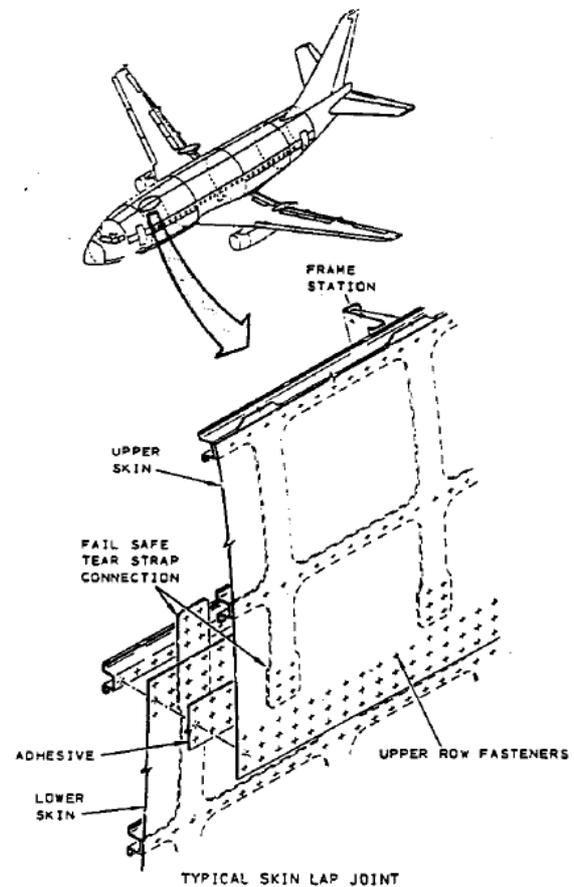
Les mécanismes d'endommagement peuvent apparaître dans les différents composants de la cellule d'un avion, tel que dans son fuselage, sa voilure (aile et empennage), son train d'atterrissage ou les éléments mobiles de la voilure (ailerons, gouvernes, volets). Ces mécanismes sont dus à différentes sources dans un aéronef : défauts dans le processus de fabrication des matériaux composites, cycles de chargement/déchargement, impacts d'objets étrangers (oiseaux, débris de satellites, grêles...) ou encore charges statiques et aérodynamiques pendant le vol.



(A)



(B)



(C)

Figure E.1 - (A) Accident aérien par endommagement par fatigue mécanique dans le Boeing 737-297 et (B)-(C) localisation de l'élément endommagé dans son fuselage (figure adaptée du rapport de Galaxy Scientific Corporation (1988)).

Afin d'identifier la présence de fissures dans les fuselages, les entreprises aériennes font des inspections constantes sur leurs appareils. Parmi celles-ci, l'inspection visuelle est une des techniques importantes du processus de détection de fissures dans les composants d'un aéronef. Toutefois dans la phase d'initiation, elles ne sont pas évidentes à localiser et leur détection à l'œil nu est difficile, voire impossible (fissures « cachées » sous la tête de l'un des rivets d'un fuselage, Figure E.1 (B) par exemple). Elles ne peuvent donc pas être facilement détectées avec une simple inspection visuelle extérieure du fuselage. En outre, cette technique d'inspection estime l'intégrité de la structure à un moment donné et la périodicité de l'inspection

peut ne pas correspondre avec la détection d'endommagements préjudiciables à la structure au moment opportun. De plus, ce type d'inspection visuelle nécessite quelques fois le démontage des éléments à inspecter, démontage qui peut aussi être source d'endommagements.

Annexe E.2 : Principes de la thermodynamique des processus irréversibles

Le processus d'endommagement a un caractère évolutif et permanent et les modèles mathématiques conçus pour prédire le comportement de ce type de matériau sont basés sur les *principes de la thermodynamique des processus irréversibles (TPI)*.

La *TPI* postule l'existence des *potentiels d'état et de dissipation* et les relations constitutives obtenues par ces deux potentiels caractérisent l'irréversibilité du processus en question.

Le potentiel d'état ψ (*énergie libre*) est écrit en fonction des *variables d'état*. Celles-ci déterminent les *lois d'état* et les *variables associées aux variables d'état (variables duales)*, avec pour but le calcul de l'énergie impliquée dans un processus physique.

En adoptant l'hypothèse de petits déplacements et de déformations, les variables d'état à la méso-échelle sont groupées en :

- (1) *variables observables* (déformation totale $\underline{\varepsilon}$ et température T) ;
- (2) *variables internes* (déformation élastique $\underline{\varepsilon}^e$, plastique $\underline{\varepsilon}^p$, déformation plastique cumulée r , déformation de durcissement cinématique $\underline{\alpha}$, endommagement D et entropie s).

La *seconde loi de la thermodynamique*, écrite ici sous la forme de *l'inégalité de Clausius-Duheim* stipule que la dissipation d'énergie dans une transformation doit toujours être positive.

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}} - \rho \left(s \dot{T} + \dot{\psi} \right) - \frac{\bar{q}}{T} \cdot \bar{\nabla} T \geq 0 \quad (\text{E.1})$$

En remplaçant la dérivée de l'énergie libre par son expression :

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}} - \rho \left(s \dot{T} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}^e} : \underline{\dot{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}} : \underline{\dot{\alpha}} + \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} \right) \right) - \frac{\bar{q}}{T} \cdot \bar{\nabla} T \geq 0 \quad (\text{E.2})$$

En partitionnant les déformations élastique et plastique et en séparant les dissipations thermique et intrinsèque, il vient :

$$\left(\underline{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}^e} \right) : \underline{\dot{\varepsilon}}^e + \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p - \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}} : \underline{\dot{\alpha}} + \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} \right) \geq 0$$

$$\rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} + \frac{\bar{q}}{T} \cdot \bar{\nabla} T \geq 0$$
(E.3)

On définit alors les variables associées aux variables internes :

$$R = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial r} ; \underline{X} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}} ; Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D}$$
(E.4)

L'annulation du premier terme de la dissipation intrinsèque nous fournit la relation contraintes-déformations élastiques et température-entropie :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}^e}$$

$$s = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial T}$$
(E.5)

Le second terme de la dissipation mécanique, la dissipation intrinsèque devient :

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p + R \dot{r} + \underline{X} : \underline{\dot{\alpha}} + Y \dot{D} \geq 0$$
(E.6)

Et la dissipation thermique :

$$\frac{\bar{q}}{T} \cdot \bar{\nabla} T \geq 0$$
(E.7)

L'expression analytique de la fonctionnelle ψ nous permet de définir les relations contraintes-déformations. Elle est choisie à partir des observations expérimentales, en supposant les hypothèses suivantes :

- comportement linéaire (dans le domaine élastique) ;
- équivalence de la déformation avec le concept de contrainte effective ;
- pas de couplage entre la plasticité et l'élasticité ;
- pas de couplage entre endommagement et plasticité ;
- les relations classiques du durcissement (isotrope et cinématique) avec la saturation en grandes déformations plastiques et ;
- processus isotherme.

Les grandeurs \dot{r} , $\dot{\alpha}$ et \dot{D} seront obtenues à partir de la donnée d'un potentiel de dissipation.

Le Tableau E.1 fourni par Allix et Hild (2002) résume la relation entre les *variables d'état* et les *variables associées* utilisées pour décrire le *potentiel de dissipation*.

Tableau E.1 - Tableau récapitulatif des variables thermodynamiques

Phénomène isotherme	Variables d'état		Variables associées	Paramètres du matériau
	Observables	Internes		
Déformation	ε	-	σ	-
Élasticité	-	ε^e	σ	E, ν
Plasticité	-	ε^p	$-\sigma$	σ_y
Durcissement Isotrope	-	r	R	R_∞, γ_0
Durcissement cinématique	-	α	X	X_∞, γ
Endommagement	-	D	Y	$S, s, \varepsilon_{pD}, m, D_{1c}, h$

Annexe F.1 : Méthodologie pour le paramétrage des constantes d'élasticité et de l'orientation des fibres des plis

Selon l'équation (5.41) du Chapitre V, la matrice $[C^l]$ des constantes d'élasticité du matériau stratifié dans le système de coordonnées (1,2,3), du stratifié peut être facilement désaccouplée en matrices de *membrane*, de *flexion* et de *cisaillement plan*, fournies par la matrice $[C_b^l]$, et en matrices de *cisaillements transversaux*, données dans la matrice $[C_s^l]$, c'est-à-dire :

$$[C^l] = \begin{bmatrix} [C_b^l] & [C_s^l] \end{bmatrix} \quad (\text{F.1})$$

La matrice de transformation des constantes d'élasticité, qui réalise le passage du système de coordonnées (1,2,3) au système de coordonnées élémentaire (x,y,z), est précisée dans l'équation (A.1) de l'Annexe A.1, et peut également être réécrite sous la forme partitionnée indiquée ci-dessous :

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_b] & [T_s] \end{bmatrix} \quad (\text{F.2})$$

Ainsi, les matrices $[C_b^l]^{(k)}$ et $[C_s^l]^{(k)}$ de chaque pli k de la structure composite écrites dans le système de coordonnées (1,2,3) peuvent être transposées dans le système de coordonnées élémentaire (x,y,z) en utilisant, respectivement, les matrices de transformation $[T_b^k]$ et $[T_s^k]$, comme indiqué dans les expressions suivantes :

$$[C_b^e]^{(k)} = [T_b^k] [C_b^l]^{(k)} [T_b^k]^T \quad (\text{F.3})$$

$$[C_s^e]^{(k)} = [T_s^k] [C_s^l]^{(k)} [T_s^k]^T \quad (\text{F.4})$$

En considérant que le système matériau de référence (1, 2, 3) d'un matériau orthotrope quelconque, tel qu'il est indiqué dans l'équation (2.21) du Chapitre II, et en utilisant le découplage des effets présentées dans l'équation (F.1), la matrice des constantes d'élasticité associée aux effets de membrane, de flexion et de cisaillement plan peut être réécrite sous la forme présentée dans l'équation ci-dessous, où sont factorisées les constantes d'élasticité du pli :

$$\left[C_b^l (E_1^k, E_2^k, E_3^k, G_{12}^k) \right]^{(k)} = E_1^k \begin{bmatrix} c_{11}^l & c_{12}^l & c_{13}^l & 0 \\ c_{12}^l & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + E_2^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}^l & c_{23}^l & 0 \\ 0 & c_{23}^l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + E_3^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G_{12}^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{F.5})$$

où les constantes d'élasticité : c_{11}^l , c_{12}^l , c_{13}^l , c_{22}^l , c_{23}^l , c_{33}^l et Δ sont fournies par l'équation (A.6) de l'Annexe A.1 et sont associées à chaque pli du stratifié composite.

L'équation précédente est réécrite sous la forme compacte :

$$\left[C_b^l \right]^{(k)} = E_1^k \left[c_{1b}^l \right] + E_2^k \left[c_{2b}^l \right] + E_3^k \left[c_{3b}^l \right] + G_{12}^k \left[c_{4b}^l \right] \quad (\text{F.6})$$

La matrice de transformation des effets de membrane, de flexion et de cisaillement plan indiquée dans l'équation (A.1), peut être réécrite sous la forme factorisée suivante :

$$\left[T_b^k (\theta^k) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cos^2(\theta^k) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \sin^2(\theta^k) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \sin(\theta^k) \cos(\theta^k) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (\cos^2(\theta^k) - \sin^2(\theta^k)) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{F.7})$$

, ou sous une forme plus compact :

$$\left[T_b^k \right] = \left[T_{0b} \right] + (c^k)^2 \left[T_{1b} \right] + (s^k)^2 \left[T_{2b} \right] + s^k c^k (\theta^k) \left[T_{3b} \right] + \left((c^k)^2 - (s^k)^2 \right) \left[T_{4b} \right] \quad (\text{F.8})$$

L'équation ci-dessus conduit à la factorisation de l'orientation θ^k des fibres du pli k du stratifié. Cependant, elle est écrite sous la forme de fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

En substituant les équations (F.8) et (F.6) dans l'équation (F.3) et en regroupant les variables associées aux constantes d'élasticité E_1^k , E_2^k , E_3^k et G_{12}^k et aux fonctions trigonométriques fonctions de θ^k , l'équation développée résultante se traduit par un ensemble d'équations composées de 100 matrices ($5 \times 4 \times 5$), où quelques-unes d'entre elles sont des matrices nulles.

Maintenant, en considérant que les propriétés du matériau sont considérée dans le système (1, 2, 3), selon les équations (2.21) du Chapitre II et (A.6) de l'Annexe A.1, et en utilisant l'équation (F.1), la matrice des constantes d'élasticité associée aux effets de cisaillements transversaux peut être réécrite sous la forme développée présentée ci-dessous, où sont factorisées les constantes d'élasticité G_{23}^k et G_{13}^k du pli k :

$$\left[C_s^l (G_{23}^k, G_{13}^k) \right]^{(k)} = G_{23}^k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + G_{13}^k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{F.9})$$

ou sous sa forme condensée :

$$\left[C_s^l \right]^{(k)} = G_{23}^k \left[c_{1s}^l \right] + G_{13}^k \left[c_{2s}^l \right] \quad (\text{F.10})$$

La matrice de transformation, associée à chaque pli k , du système de coordonnées de référence (1, 2, 3) au système (x, y, z) est donnée par la matrice $\left[T_s^k \right]$ peut être écrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} T_s^k(\theta^k) \end{bmatrix} = \cos(\theta^k) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin(\theta^k) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.11})$$

, de forme condensée :

$$\begin{bmatrix} T_s^k \end{bmatrix} = c^k \begin{bmatrix} T_{0s} \end{bmatrix} + s^k \begin{bmatrix} T_{1s} \end{bmatrix} \quad (\text{F.12})$$

En substituant les équations (F.10) et (F.12) dans l'équation (F.4) nous avons :

$$\begin{bmatrix} C_s^e \end{bmatrix}^{(k)} = \left(c^k \begin{bmatrix} T_{0s} \end{bmatrix} + s^k (\theta^k) \begin{bmatrix} T_{1s} \end{bmatrix} \right) \left(G_{23}^k \begin{bmatrix} c_{1s}^L \end{bmatrix} + G_{13}^k \begin{bmatrix} c_{2s}^L \end{bmatrix} \right) \left(c^k \begin{bmatrix} T_{0s} \end{bmatrix} + s^k \begin{bmatrix} T_{1s} \end{bmatrix} \right)^T \quad (\text{F.13})$$

En regroupant les variables G_{23}^k et G_{13}^k avec les expressions trigonométriques fonctions de θ^k nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_s^e \end{bmatrix}^{(k)} &= (c^k)^2 G_{23}^k \left(\begin{bmatrix} T_{0s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1s}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{0s} \end{bmatrix}^T \right) + c^k s^k G_{23}^k \left(\begin{bmatrix} T_{0s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1s}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1s} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} T_{1s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1s}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{0s} \end{bmatrix}^T \right) \\ &+ (c^k)^2 G_{13}^k \left(\begin{bmatrix} T_{0s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{2s}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{0s} \end{bmatrix}^T \right) + c^k s^k G_{13}^k \left(\begin{bmatrix} T_{0s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{2s}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1s} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} T_{1s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{2s}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{0s} \end{bmatrix}^T \right) \\ &+ (s^k)^2 G_{23}^k \left(\begin{bmatrix} T_{1s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1s}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1s} \end{bmatrix}^T \right) + (s^k)^2 G_{13}^k \left(\begin{bmatrix} T_{1s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{2s}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1s} \end{bmatrix}^T \right) \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Nous avons présenté la méthodologie pour le paramétrage des variables E_1^k , E_2^k , E_3^k , G_{23}^k , G_{12}^k , G_{13}^k et θ^k associées à la matrice des constantes d'élasticité $\begin{bmatrix} C^e \end{bmatrix}^{(k)}$, $\begin{bmatrix} C^e \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_b^e \end{bmatrix}^{(k)} & \begin{bmatrix} C_s^e \end{bmatrix}^{(k)} \end{bmatrix}$, particulièrement de la matrice $\begin{bmatrix} C_s^e \end{bmatrix}^{(k)}$. Nous présentons désormais la méthodologie pour le paramétrage de l'épaisseur h^k et de la densité ρ^k du pli k pour les matrices de raideur et de masse élémentaires et globales.

Nous remarquons que les *coefficients de Poissons* du matériau *orthotrope* $(\nu_{23}^k, \nu_{13}^k, \nu_{12}^k, \nu_{32}^k, \nu_{31}^k, \nu_{21}^k)$ ne sont pas paramétrés dans la matrice élémentaire $\begin{bmatrix} C^e \end{bmatrix}^{(k)}$ et sont adoptés dans ce mémoire comme constants et indépendants des paramètres E_1^k , E_2^k et E_3^k .

Dans le cas des matériaux isotropes transverses, la relation $E_2^k = 2G_{23}^k(1 + \nu_{23}^k)$, fournie dans l'équation (A.11) de l'Annexe A.1, doit normalement être vérifiée. En utilisant cette dernière relation, en adoptant $E_2^k = E_3^k$ et en considérant ν_{23}^k constant, le nombre de paramètres associés aux constantes d'élasticité dans le cas de matériau isotrope transverse se réduit à quatre paramètres $(E_1^k, E_2^k, G_{12}^k, G_{13}^k)$.

Annexe F.2 : Méthodologie pour le paramétrage de l'épaisseur et la densité et l'obtention des matrices élémentaire et globales paramétrées

La coordonnée z est liée à l'épaisseur de chaque pli k du stratifié composite et peut être paramétrée de l'intégration volumétrique indiquée dans l'équation (B.20) de l'Annexe B.1 en exprimant les matrices \bar{B}_b et \bar{B}_s (où $B_b = \bar{B}_b$ et $B_s = \bar{B}_s$ pour la formulation *FSDT*) comme des fonctions polynomiales équivalentes de variable z , tel qu'il est indiqué dans l'équation (3.51) et (3.52) du Chapitre III de la formulation par éléments finis en utilisant la théorie *FSDT*. En s'appuyant sur les deux dernières équations citées, nous avons :

$$[\bar{B}]_{6 \times 40} = \left[\begin{array}{c} [\bar{B}^b]_{4 \times 40} \\ [\bar{B}^s]_{2 \times 40} \end{array} \right] \quad (\text{F.15})$$

$$[\bar{B}^b(\xi, \eta, z)]_{4 \times 40} = [\bar{B}_0^b(\xi, \eta)]_{4 \times 40} + z[\bar{B}_1^b(\xi, \eta, z)]_{4 \times 40} \quad (\text{F.16})$$

$$[\bar{B}^s(\xi, \eta)]_{2 \times 40} = [\bar{B}_2^s(\xi, \eta)]_{2 \times 40} \quad (\text{F.17})$$

où $[\bar{B}_0^b]$, $[\bar{B}_1^b]$ et $[\bar{B}_2^s]$ sont les matrices associées aux fonctions de forme et aux dérivées des déplacements et qui sont obtenues numériquement (par points de Gauss (ξ_{PG}, η_{PG}) comme expliqué dans le Chapitre V) ou symboliquement.

Selon l'équation (F.16) de la formulation *FSDT*, la matrice de raideur élémentaire associée aux effets de membrane, de flexion et de cisaillement plan pour un pli k quelconque est donnée selon l'expression :

$$\begin{aligned}
[K_{k,b}^e] &= \int_{V_e} \left([\bar{B}_0^b] + z[\bar{B}_1^b] \right)^T [C_b^e]^{(k)} \left([\bar{B}_0^b] + z[\bar{B}_1^b] \right) dV_e \\
&= \int_{V_e} [\bar{B}_0^b]^T [C_b^e] [\bar{B}_0^b] dV_e \\
&\quad + \int_{V_e} \left([\bar{B}_0^b]^T [C_b^e]^{(k)} [\bar{B}_1^b] + [\bar{B}_1^b]^T [C_b^e]^{(k)} [\bar{B}_0^b] \right) z dV_e \\
&\quad + \int_{V_e} [\bar{B}_1^b]^T [C_b^e]^{(k)} [\bar{B}_1^b] z^2 dV_e \tag{F.18} \\
&= Z^{(1)} \int_{S_e} [\bar{B}_0^b]^T [C_b^e]^{(k)} [\bar{B}_0^b] dS_e \\
&\quad + Z^{(2)} \int_{S_e} \left([\bar{B}_0^b]^T [C_b^e]^{(k)} [\bar{B}_1^b] + [\bar{B}_1^b]^T [C_b^e]^{(k)} [\bar{B}_0^b] \right) dS_e \\
&\quad + Z^{(3)} \int_{S_e} [\bar{B}_1^b]^T [C_b^e]^{(k)} [\bar{B}_1^b] dS_e
\end{aligned}$$

avec $Z^{(1)} = (z_{\text{inf}}^k - z_{\text{sup}}^k)$, $Z^{(2)} = \left((z_{\text{inf}}^k)^2 - (z_{\text{sup}}^k)^2 \right) / 2$ et $Z^{(3)} = \left((z_{\text{inf}}^k)^3 - (z_{\text{sup}}^k)^3 \right) / 3$.

Le paramétrage précédent de la matrice élémentaire de raideur est réalisé en substituant les équations (F.8) et (F.6) dans l'équation (F.3) et en regroupent les variables liées aux constantes d'élasticité E_1^k , E_2^k , E_3^k , G_{12}^k et aux fonctions trigonométriques du paramètre θ^k . L'équation finale est substituée dans l'équation (F.18) précédente, et les paramètres mécaniques et géométriques communs sont regroupés. En raison de l'existence de nombreux termes nuls dans les équations (F.6) et (F.8), le nombre total d'intégrations se réduit à 37. Ces intégrations ne sont pas détaillées dans ce mémoire, mais une procédure similaire pour le paramétrage des variables G_{23}^k , G_{13}^k et θ^k est détaillée ci-dessous, pour l'obtention des matrices élémentaires paramétrées de raideur des effets de cisaillements transversaux. Ainsi, après l'intégration double (par *quadrature de Gauss* ou *symboliquement*) nous obtenons un ensemble de matrices élémentaires paramétrées dont les paramètres sont factorisés.

Nous pouvons vérifier si le paramétrage est correct, en multipliant les paramètres factorisés par leurs matrices élémentaires factorisées respectives. Ainsi, on peut reconstruire la matrice de raideur élémentaire originale, non factorisée.

En utilisant l'équation (F.17), la matrice de raideur élémentaire associée aux effets de cisaillement transversal pur un pli quelconque est donnée par l'intégration :

$$\left[K_{k,s}^e \right] = \int_{V_e} \left[\bar{B}_2^s \right]^T \left[C_s^e \right]^{(k)} \left[\bar{B}_2^s \right] dV_e = \left(z_{\text{inf}}^k - z_{\text{sup}}^k \right) \int_{S_e} \left[\bar{B}_2^s \right]^T \left[C_s^e \right]^{(k)} \left[\bar{B}_2^s \right] dS_e \quad (\text{F.19})$$

Le paramétrage de la matrice de raideur élémentaire des effets de cisaillements transversaux est fait en substituant l'équation (F.14) dans l'équation (F.19) précédente. L'équation résultante se traduit par un ensemble de 6 matrices ($1 \times 6 \times 1$) données par l'expression :

$$\begin{aligned} \left[K_{k,s}^e \right] = & \left(c^k \right)^2 G_{23}^k Z^{(1)} \left[\bar{k}_{k,s}^e \right]^{(1)} + c^k s^k G_{23}^k Z^{(1)} \left[\bar{k}_{k,s}^e \right]^{(2)} + \left(c^k \right)^2 G_{13}^k Z^{(1)} \left[\bar{k}_{k,s}^e \right]^{(3)} \\ & + c^k s^k G_{13}^k Z^{(1)} \left[\bar{k}_{k,s}^e \right]^{(4)} + \left(s^k \right)^2 G_{23}^k Z^{(1)} \left[\bar{k}_{k,s}^e \right]^{(5)} + \left(s^k \right)^2 G_{13}^k Z^{(1)} \left[\bar{k}_{k,s}^e \right]^{(6)} \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

Les six matrices de raideur factorisées associées aux effets de cisaillement transversal, $\left[\bar{k}_{k,s}^e \right]^{(i)}$ avec $i = 1 \dots 6$, peuvent être calculées par intégration numérique ou symbolique.

Le paramétrage de la matrice de masse élémentaire diffère un peu de celui des matrices de raideur car dans ce cas il n'y a que le paramètre z associé à la l'épaisseur h^k et le paramètre ρ^k associé de la densité du pli k .

Dans l'équation (B.8) de l'Annexe B.1, le produit $\left[A_m \right]^T \left[A_m \right]$, avec $\left[A_m \right] = \left[\bar{A}_m \right]$ dans le cas de la formulation par éléments finis de la théorie *FSDT*, est fonction seulement de la variable z . La matrice résultante est donnée par l'expression :

$$\left[\bar{A} \right] = \left[\bar{A}_m \right]^T \left[\bar{A}_m \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & z^2 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \quad (\text{F.21})$$

La variable z de la matrice $\left[\bar{A} \right]$ peut être factorisée, en résolvant l'équation :

$$\left[\bar{A} \right] = \left[\bar{A}_0 \right] + \left[\bar{A}_1 \right] z + \left[\bar{A}_2 \right] z^2 \quad (\text{F.22})$$

En substituant l'équation précédente dans l'équation (B.20), la matrice de masse élémentaire, par pli k avec la théorie *FSDT*, est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned}
[M_k^e] &= \int_{V_e} \rho^k [\bar{N}]^T \left([\bar{A}_0] + [\bar{A}_1]z + [\bar{A}_2]z^2 \right) [\bar{N}] dV_e \\
&= \int_{V_e} \rho^k [\bar{N}]^T [\bar{A}_0] [\bar{N}] dV_e + \int_{V_e} \rho^k [\bar{N}]^T [\bar{A}_1] [\bar{N}] z dV_e + \int_{V_e} \rho^k [\bar{N}]^T [\bar{A}_2] [\bar{N}] z^2 dV_e \\
&= \rho^k Z^{(1)} \int_{S_e} [\bar{N}]^T [\bar{A}_0] [\bar{N}] dS_e + \rho^k Z^{(2)} \int_{S_e} [\bar{N}]^T [\bar{A}_1] [\bar{N}] dS_e \\
&\quad + \rho^k Z^{(3)} \int_{S_e} [\bar{N}]^T [\bar{A}_2] [\bar{N}] dS_e \\
&= \rho^k Z^{(1)} [m_k^e]^{(1)} + \rho^k Z^{(2)} [m_k^e]^{(2)} + \rho^k Z^{(3)} [m_k^e]^{(3)}
\end{aligned} \tag{F.23}$$

où $[m_k^e]^{(i)}$, $i = 1 \dots 3$, sont les matrices de masse élémentaires paramétrées.

Il ne reste alors que le découplage de l'épaisseur h^k associée à chaque pli k . Nous avons par ailleurs la variable h^k est fonction de la coordonnée z du stratifié, c'est-à-dire : $h^k(z) = z_{\text{inf}}^k - z_{\text{sup}}^k$, où z_{inf}^k est la coordonnée de l'interface inférieur et z_{sup}^k de la supérieur de chaque pli k .

Le processus de paramétrage de h^k découle du nombre total de plis de la structure composite modélisée par éléments finis.

Par exemple, pour une structure composite avec trois plis, nous pouvons exprimer les coordonnées z_{inf}^k et z_{sup}^k selon l'épaisseur de chaque pli en adoptant la notation (2) pour le pli central (adopté comme celui de référence et localisé au centre du stratifié ($x, y, z = 0$)), (1) pour celui de la base et (3) pour celui de la peau. Ainsi, dans cet exemple nous avons les relations suivantes : $(z_{\text{inf}}^{(1)}, z_{\text{sup}}^{(1)}) = (-h^{(2)}/2 - h^{(3)}, -h^{(2)}/2)$, $(z_{\text{inf}}^{(2)}, z_{\text{sup}}^{(2)}) = (-h^{(2)}/2, h^{(2)}/2)$, $(z_{\text{inf}}^{(3)}, z_{\text{sup}}^{(3)}) = (h^{(2)}/2, h^{(2)}/2 + h^{(3)})$. En substituant les trois expressions précédentes dans les expressions en termes de variable z de chaque pli k nous pouvons réécrire les matrices de

masse et de raideur élémentaires en termes d'épaisseurs de chaque pli de la structure composite en question.

En résumé, après l'obtention des matrices de masse et raideur élémentaires paramétrées de la théorie *FSDT* et en éliminant celles qui sont nulles, le nombre final de matrices de raideur élémentaires paramétrées associées aux effets de membrane, de flexion et de cisaillement plan $[k_{k,b}^e]^{(i)}$ est égal à 37, 6 sont associées aux effets de cisaillements transversaux $[k_{k,s}^e]^{(i)}$, et finalement 3 sont associées aux matrices de masse élémentaire paramétrées $[m_k^e]^{(i)}$. Ainsi, nous pouvons écrire les expressions :

$$[K_k^e] = \sum_{i=1}^{37} (k_b^k)^{(i)} [k_{k,b}^e]^{(i)} + \sum_{i=1}^6 (k_s^k)^{(i)} [k_{k,s}^e]^{(i)} \quad (\text{F.24})$$

$$[M_k^e] = \sum_{i=1}^3 (m^k)^{(i)} [m_k^e]^{(i)} \quad (\text{F.25})$$

où $(k^k)^{(i)} = ((k_b^k)^{(i)} \quad (k_s^k)^{(i)})$. Les indices (s) et (b) indiquant, respectivement, le découplage des effets des cisaillements transversaux des effets de membrane, flexion et cisaillement plan. L'exposant (i) indiquant l'association entre les matrices et leurs paramètres factorisés respectifs.

Les matrices de masse $([m_k^e]^{(i)})$ et de raideur $([k_{k,b}^e]^{(i)}$ et $[k_{k,s}^e]^{(i)})$ élémentaires paramétrées, des équations (F.24) et (F.25) précédentes, peuvent être réécrites sous la forme de matrices triangulaires supérieures, car elles sont symétriques. Ensuite, elles peuvent être réécrites sous la forme de matrice « *sparse* ». En utilisant, les fonctions « *triu* » et « *sparse* » de Matlab® en vue de réduire les coûts de calcul.

Ainsi, en utilisant respectivement les équations (F.24) et (F.25), nous pouvons réécrire les équations (6.1) et (6.2) du Chapitre VI. sous les formes :

$$\begin{aligned} [K_k^g] &= \bigcup_{e=1}^{Ne} [K_k^e] = \sum_{i=1}^{37} \left[(k_b^k)^{(i)} \bigcup_{e=1}^{Ne} [k_{k,b}^e]^{(i)} \right] + \sum_{i=1}^6 \left[(k_s^k)^{(i)} \bigcup_{e=1}^{Ne} [k_{k,s}^e]^{(i)} \right] = \\ & \sum_{i=1}^{37} \left[(k_b^k)^{(i)} [k_{k,b}^g]^{(i)} \right] + \sum_{i=1}^6 \left[(k_s^k)^{(i)} [k_{k,s}^g]^{(i)} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

$$[M_k^g] = \bigcup_{e=1}^{Ne} [M_k^e] = \sum_{i=1}^3 \left[(m^k)^{(i)} \bigcup_{e=1}^{Ne} [m_k^e]^{(i)} \right] = \sum_{i=1}^3 \left[(m^k)^{(i)} [m_k^g]^{(i)} \right] \quad (\text{F.27})$$

Finalement, les matrices de raideur globales paramétrées $[k_{k,b}^g]^{(i)}$ et $[k_{k,s}^g]^{(i)}$, et celles de masse, $[m_k^g]^{(i)}$, sont obtenues après application des procédures d'assemblage de leurs matrices élémentaires associées, et sont multipliées respectivement par leurs variables paramétrées associées, $(k_b^k)^{(i)}$, $(k_s^k)^{(i)}$ et $(m^k)^{(i)}$.

Annexe F.3 : Modélisation du champ stochastique

Les couples $(\lambda_i, f_i(x))$, de la modélisation du champ stochastique, sont, selon Ghanem et Spanos (2003), exprimés selon les deux équations suivantes :

(a) Si i et j sont impaires $i \geq 1$ et $j \geq 1$:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2} & f_i(x) &= \alpha_i \cos(\omega_i x) \\ \lambda_j &= \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2} & f_j(x) &= \alpha_j \cos(\omega_j y) \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

où :

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a' + \frac{\sin(2\omega_i a')}{2\omega_i}}} \quad \alpha_j = \frac{1}{\sqrt{b' + \frac{\sin(2\omega_j b')}{2\omega_j}}}$$

(b) **Si i et j sont paires $i \geq 2$ et $j \geq 2$:**

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2} \quad f_i(x) = \alpha_i \sin(\omega_i x)$$

$$\lambda_j = \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2} \quad f_j(x) = \alpha_j \sin(\omega_j y) \quad (\text{F.29})$$

où :

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a' - \frac{\sin(2\omega_i a')}{2\omega_i}}} \quad \alpha_j = \frac{1}{\sqrt{b' - \frac{\sin(2\omega_j b')}{2\omega_j}}}$$

Dans les équations (F.28) et (F.29) précédentes, nous avons adopté : $c_1 = 1/L_{cor,x}$ et $c_2 = 1/L_{cor,y}$. Les termes ω_i et ω_j sont les solutions des équations transcendantales définies sur les domaines indiqués par les expressions :

(a) **Si i et j sont impaires $i \geq 1$ et $j \geq 1$:**

Équations : $c_1 - \omega_i \tan(\omega_i a') = 0$ $c_2 - \omega_j \tan(\omega_j b') = 0$

Domaines : $\left[(i-1)\frac{\pi}{a'}, \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a'} \right]$ $\left[(j-1)\frac{\pi}{b'}, \left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b'} \right]$ (F.30)

(b) **Si i et j sont impaires $i \geq 2$ et $j \geq 2$:**

Équations : $\omega_i - c_1 \tan(\omega_i a') = 0$ $\omega_j - c_2 \tan(\omega_j b') = 0$

Domaines : $\left[\left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a'}, i\frac{\pi}{a'} \right]$ $\left[\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b'}, j\frac{\pi}{b'} \right]$ (F.31)

Selon Guedri et al. (2010), les valeurs des longueurs de corrélation adoptées influence les valeurs et fonctions propres.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AHCI, E. and TALREJA, R. Characterization of Viscoelasticity and Damage in High Temperature Polymer Matrix Composites. **Composites Science and Technology**. v. 66, p. 2506-2519, 2006.

ALAN, A. B. **Aeromechanical Stability Augmentation of Helicopters using Enhanced Active Constrained Layer Damping Treatment on Rotor Flex Beams**. 2000. Thesis of Doctor in Mechanical Engineering, Pennsylvania State University, USA.

ALLIX, O. and HILD, F. **Continuum Damage Mechanics of Materials and Structures**. Elsevier, Paris, 2002.

ALVIN, K. F., OBERKAMPF, W. L., DIEGERT, K. V. and RUTHERFORD, M. Uncertainty Quantification in Computational Structural Dynamics: A New Paradigm for Model Validation. **Proceeding of IMAC XVI**. p. 1191-1197, Santa Barbara, California, 1998.

ARAÚJO, A. L., MOTA SOARES, C. M., MOTA SOARES, C. A. and HERSKOVITS, J. Damping Optimization of Viscoelastic Laminated Sandwich Composite Structures. **EngOpt 2008, International Conference on Engineering Optimization**. Rio de Janeiro, Brazil, 2008.

ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos**. 2^o ed. Editora Unicamp, Campinas, 2003.

AZEVEDO, J.S. **Métodos de Elementos Finitos Estocásticos em Múltiplas Escalas: Aplicação à Geomecânica de Reservatórios de Petróleo Heterogêneos**. Projeto de Pesquisa LNCC-Departamento de Matemática Aplicada e Computacional. Petrópolis, RJ, Brasil, 2009.

BA, N. N. Damage Modeling of Laminated Composites by the Use of Multilayer Volume Elements. **Composites Science and Technology**, v. 58, p. 891-905, 1998.

BABUŠKA, I., NOBILE, T. and TEMPONE, R. A Stochastic Collocation Method for Elliptic Partial Differential Equations with Random Input Data. **Technical Report ICES, 05-47, The Institute for Computational Engineering and Sciences**, Austin. 2005.

BAGLEY, R. L. and TORVIK, P. J. A Generalized Derivative Model for an Elastomer Damper. **Shock and Vibration Bull.** v. 49, n. 2, p. 135-143, 1979.

BAGLEY, R. L. and TORVIK, P. L. Fractional Calculus - A Different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures, **AIAA Journal.** v. 21, n. 5, p. 741-748, 1983.

BALMÈS, E. and GERMÈS, S. **Tools for Viscoelastic Damping Treatment Design: Application to Automotive Floor Panel.** In: Proceedings of the 28th International Seminar on Modal Analysis (ISMA), 2002, Leuven, Belgium.

BARBOSA, F. S. **Modelagem Computacional de Estrutura com Camadas Viscoelásticas Amortecidas.** 2000. 196f. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

BARROS, M. B. **Proposição, Avaliação Numérica e Experimental de um Absorvedor Dinâmico de Vibrações Multimodal.** 2009. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

BATHE, K-J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis.** Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

BENJEDDOU, A. Advances in Hybrid Active-Passive Vibration and Noise Control Via Piezoelectric and Viscoelastic Constrained Layer Treatments. **Journal of Vibration and Control.** v. 7, p. 565-602, 2001.

BERTHELOT, J. M. **Matériaux Composites: Comportement Mécanique et Analyse des Structures.** Paris: Masson, 1992.

BERTHELOT, J. M., Damping Analysis of Laminated Beams and Plates using the Ritz Method. **Composite Structures.** v. 74, p. 186-201, 2006.

BERVEILLER, M. **Éléments Finis Stochastiques : Approches Intrusive et Non Intrusive pour des Analyses de Fiabilité.** Thèse de Doctorat. Université Blaise Pascal – Clermont II, Clermont-Ferrand, France, 2005.

BIRMAN, V. and BYRD, L.W. Effect of Matrix Cracks on Damping in Unidirectional and Cross-Ply Ceramic Matrix Composites. **Journal of Composite Materials.** v. 36, p. 1859-1877, 2002.

BOUBAKAR, M.L, TRIVAUDEY, F., PERREUX, D. and VANG, L. A Meso-macro Finite Element Modeling of Laminate Structures. Part I: Time-independent behavior. **Composite Structures.** v. 58, p. 271-286, 2002.

BOUBAKAR, M. L., VANG, L., TRIVAUDEY, F. and PERREUX, D. A Meso–macro Finite Element Modeling of Laminate Structures: Part II: Time-dependent Behavior. **Composite Structures**. v. 60, issue 3, p. 275-305, 2003.

BOUBAKAR, M. L., VIEILLE, B. and BOISSE, P. Superelastic Shell Structures Modeling: Part I: Element formulation. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** v. 194, p. 5273-5294, 2005.

BOUHADDI, N. and FILLOD, R. A Method for Selecting Master DOF in Dynamic Substructuring using the Guyan Condensation Method. **Computers and Structures**. v. 45, p. 5-6, 1992.

CARPINTERI, A. and MAINARDI, F. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. **Springer**, New York, 1997.

CARROL, W. F. **A Primer for Finite Elements in Elastic Structures**. John Wiley & Sons, Inc., Florida, 1999.

CAZENOVE, J. and RADE, D. A. Numerical Analysis of Self-heating Effects in Viscoelastic Dampers. **International Congress of Mechanical Engineering**. 15-20, 2009, Gramado, RS, Brasil.

CAZENOVE, J. **Modelagem Numérico-Computacional e Avaliação Experimental do Efeito do Autoaquecimento de Materiais Viscoelásticos**. 2010. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

CEN, S., SOH, A., LONG, Y. and YAO, Z. A New 4-node Quadrilateral FE Model with Variable Electrical Degrees of Freedom for the Analysis of Piezoelectric Laminated Composite Plates. **Composite Structures**. v. 58, n. 4, p. 583-599, 2002.

CHAKRABORTY, S. and DEY, S. S. Stochastic Finite Element Method for Spatial Distribution of Material Properties and External Loading. **Computers and Structures**. v. 41, p. 41-45, 1995.

CHALAYE, H. Les Matériaux Composites: Dynamisme et Innovation. **Le 4 Pages: des statistiques industrielles, DiGIPTIP: Ministère de l'Économie, des Finances et de l'Industrie**. n.158, fev. 2002.

CHANDRA, R., SINGH, S. P. and GUPTA, K. Micromechanical Damping Models for Fiber-reinforced Composites: a Comparative Study. **Composites: Part A**. v. 33, p. 787-796, 2002.

CHANDRA, R.; SINGH, S. P. and GUPTA, K. Damping Studies in Fiber-reinforced Composites - A review. **Composite Structures**. v. 46, p. 41-51, 1999.

CHATTOPADHYAY, A., NAM, C. and KIM, Y. Damage Detection and Vibration Control of a Delaminated Smart Composite Plate. 1999. **Proc of the 12th Int. Conf. on Composite Materials (ICCM/12)**.

CHEE, C. Y. K. **Static Shape Control of Laminated Composite Plate Smart Structure using Piezoelectric Actuators**. 2000. Thesis of PHD - University of Sydney: Department of Aeronautical Engineering, Sydney, Australia.

CHENG, X.-Q. and LI, Z.-N., Damage Progressive Model of Compression of Composite Laminates after Low Velocity Impact. **Applied Mathematics and Mechanics**. v. 26, n. 5, 2005.

CHOU, T.-W. **Microstructural Design of Fiber Composites**. 1.ed. New York: Cambridge University Press, 1992.

CHRISTENSEN, R. M. **Theory of Viscoelasticity: An Introduction**. Inc.: Academic Press, New York, 2nd edition, 1982.

CHUGAL, Y. M. and SHIMPI, R. P. A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**. v. 21, n. 9, 2002.

CORREIA, V. M. F, GOMES, M. A. A., SULEMAN, A., SOARES, C. M. M. and SOARES, C. A. M. Modeling and Design of Adaptive Composite Structures. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.** v. 185, p. 325-346, 2000.

CUGNONI, J. T. G. and SCHORDERET, A. Modal Validation of a Set of C^0 -compatible Composite Shell Finite Elements. **Composites Science and Technology**. p. 2039-2050, 2004.

CUNHA Jr., S. S. **Estudo Teórico e Numérico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações**. 1999. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.

DA ROCHA, W. F. **Determinação da Velocidade de Instabilidade Aeroelástica de Asas Retangulares Constituídas de Material Compósito em Regime de Vão Subsônico**. 1999. 68f. Dissertação de Mestrado - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP.

DEB, M., BABUŠKA, I. and ODEN, J. T. Solution of Stochastic Partial Differential Equations using Galerkin Finite Element Techniques. **CMAME**. v. 190, p. 6359-6372, 2001.

DEBNATH, L. Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering, **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**. v. 2003, n. 54, p. 3413-3442, 2003.

DI, S. and BENDING, M. Vibration, and Buckling of Simply Supported Thick Multilayered Orthotropic Plates: An Evaluating of a New Displacement Model. **Journal of Sound and Vibration**. v. 105, p. 425-442, 1986.

DI, S. and ROTHERT, H. A Solution of Laminated Cylindrical Shells using an Unconstrained Third-order Theory. **Journal of Composite Structures**. v. 32, p. 667-680, 1995.

DRAKE, M. L. and SOOVERE, J. A Design Guide for Damping of Aerospace Structures, In: **AFWAL Vibration Damping Workshop Proceedings 3**, 1984.

DROZDOV, A. **Viscoelastic Structures: Mechanics of Growth and aging**. Academic Press. 1998.

DZENIS, Y. A. Effective Thermo-Viscoelastic Properties of Fibrous Composites with Fractal Interfaces and an Interphase. **Composites Sciences and Technology**. v. 57, p. 1057-1063, 1997.

ELMARAKBI, A.M., HU, N. and FUKUNAGA, H. Finite Element Simulation of Delamination Growth in Composite Materials using LS-DYNA, **Composites Science and Technology**, 2009.

ESPÍNDOLA, J. J. and SILVA, H. P. Modal Reduction of Vibration by Dynamic Neutralizers, **Proc. of the Tenth International Modal Analysis Conference**, San Diego, USA, p. 1367-1374, 1997.

EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory and Practice**. In: John Wiley & Sons Inc, 1984.

FAAW-JH Technical Center's - FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION WILLIAM J. HUGHES TECHNICAL CENTER'S. **Review of Damage Tolerance for Composite Sandwich Airframe Structures. Final Report**. National Technical Information Service, Springfield, Virginia, 1999.

FARIA, A. W. **Modelagem por Elementos Finitos de Placas Compostas Dotadas de Sensores e Atuadores Piezoelétricos: Implementação Computacional e Avaliação Numérica**. 2006. 152f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

FARIA, A. W., VIANA, F. C. A. e RADE, D. A. Amortecimento Passivo de Vibrações em Materiais Compostos Laminados e Isotrópicos Utilizando Circuitos Elétricos Shunt: Otimização do Posicionamento e Parâmetros de Sintonia Utilizando Métodos Naturais e Híbridos de Otimização. In: 17^º POSMEC, 2007, Universidade Federal de Uberlândia, 2007, Uberlândia, MG, Brasil. **Anais do 17^º POSMEC**.

FARIA, A. W., VIANA, F. C. A. e RADE, D. A. Formulação em Elementos Finitos de Estruturas Compostas Laminadas Amortecidas Passivamente por Circuitos Shunt. In: **16º POSMEC**, 2006, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil. **Anais do 16º POSMEC**.

FERREIRA, W. G. **Desenvolvimento de Ferramentas Computacionais para Análise Estrutural em Fadiga e Geração de Malhas de Elementos Finitos**. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2002, Campinas, SP.

FINEGAM, I. C. and GIBSON, R. F. Recent Research on Enhancement of Damping in Polymer Composites, **Composite Structures**. v. 44, p. 89-88, 1999.

FISHER, F. T. and BRINSON, L. C. Viscoelastic Interphases in Polymer-matrix Composites: Theoretical Models and Finite-element Analysis. **Composites Sciences and Technology**. v. 61, p. 731-748, 2001.

FU, Y. M. and LU, Y. H. Analysis of the Nonlinear Dynamic Response of Viscoelastic Symmetric Cross-ply Laminated Plates with Transverse Matrix Crack. **Composite Structures**. v. 72, p. 469-476, 2006.

GALAXY SCIENTIFIC CORPORATION. **Aloha Airlines - Official Accident Report Index Page**. Maintenance Accident Report InfoBase developed by Galaxy Scientific, 1988.

GALUCIO, A. C. and DEÜ, J.-F., MENGUÉ, S. and DUBOIS, F. An Adaptation of the Gear Scheme for Fractional Derivatives. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** v. 195, p. 6073-6085, 2006.

GALUCIO, A. C., DEÜ, J.-F. and OHAYON, R. Finite Element Formulation of Viscoelastic Sandwich Beams Using Fractional Derivative Operators. **Computational Mechanics**. v. 33, p. 282-291, 2004.

GANAPATHI, M., PATEL, B. P. SENTIL KUMAR, T. and TOURATIER, M. Torsional Vibration and Damping Analysis of Sandwich Beams. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**. v. 18, n. 96, 1999.

GARCIA, O. A. **Elementos Finitos Generalizados na Análise Estática de Placas e Cascas**. 2003. 176f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2003.

GEAR, C. **Numerical Initial Value Problems In Ordinary Differential Equation**. Prentice-Hall, 1971.

GELIN, J. C. and Nguegang, B. V. Modeling of the Thermomechanical Coupling During Hot Forming of Viscoplastic Materials. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 60, p. 441-446, 1996.

GELIN, J. C. Dynamic Loading, Viscoplasticity and Temperature Effects on the Evolution of Damage in Metal Forming Processes. **Journal of Materials Processing Technology**. v. 32, Issues 1-2, p. 169-178, 1992.

GÉRADIN, M. and RIXEN, D. **Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics**. Second Edition, John Wiley & Sons Ltd, England, 1997.

GHANEM, R. G. and SPANOS, P. D. **Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach. Revised Editions**. Dover Publications, INC, Mineola, New York, 2003.

GOLLA, D. F. and HUGHES, P. C. Dynamics of Viscoelastic Structures - A Time-domain, Finite Element Formulation. **Journal of Applied Mechanics**. v. 52, n. 4, p. 897-906, 1985.

GORENFLO, R. and MAINARDI, F. **Essentials of Fractional Calculus**. Preprint submitted to MaPhySto Center, 2000.

GUEDRI, M., BOUHADDID, N. and MAJEDA, R. Reduction of the Stochastic Finite Element Models Using a Robust Dynamic Condensation Method. **Journal of Sound and Vibration**. v. 297, p. 123-145, 2006.

GUEDRI, M., LIMA, A. M. G., BOUHADDI, N. and RADE, D. A. Robust Design of Viscoelastic Structures Based on Stochastic Finite Element Models. **Mechanical Systems and Signal Processing**. v. 24, p. 59-77, 2010.

GUYAN, R. J. Reduction of Stiffness and Mass Matrices. **AIAA Journal**, v. 3, p. 380, 1965.

HADDAD, Y. M. **Viscoelasticity of Engineering Materials**. Chapman & Hall, London, 1995.

HAGOOD, N. W. and VON FLOTOW, A. Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Network. **Journal of Sound and Vibration**. v. 146, n.2, p. 243-268, 1991.

HASHIN, Z. Viscoelastic Fiber Reinforced Materials. **AIAA Journal**. v. 4, n. 8, p. 1411-1417, 1966.

HASSAN, N. M. and BATRA, R. C. Modeling Damage in Polymeric Composites. **Composites: Part B**. v. 39, p. 66-82, 2008.

HULT, J. **Continuum Damage Mechanics**, In: Post Critical Behavior and Fracture of Dissipative Solids. CISM, Udine, 1988.

IKONOMOPOULOS, G. and PERREUX, D. Reliability of Composite Laminates through a Damage Tolerance Approach: Applications into Carbon-Epoxy and Glass-Epoxy Composite Shells. **Journal of Composite Materials**. v. 35, n. 3, p. 202-236, 2001

IMAN, R. L. and CONOVERS, W. J. Small Sample Sensitivity Analysis Techniques for Computers Models, with an Applications to Risk Assessment. **Communications Statistics**. v. A9, p. 1749-1842, 1980.

IRISARRI, F.X. **Stratégies de Calcul pour l'Optimisation Multiobjectif des Structures Composites**. Thèse de doctorat. Université de Toulouse III - Paul Sabatier, Toulouse, France, 2009.

JOHNSON, C. D. Design of Passive Damping Systems. **Journal of Mechanical Design and Journal of Vibration and Acoustics** (50th anniversary combined issue). v. 117, p. 171-175, 1995.

JUNIOR, I. P. P. **Caracterização Numérica e Experimental da Evolução do Dano em Materiais**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2004.

KACHANOV, L. M. On the Time to Rupture under Creep Conditions. *Izv. Acad. Nauk SSSR*, OTN. v. 8, p. 26-31, 1958.

KHARE, R. K., KANT, T. and GARG, A. K. Closed-Form Thermo-Mechanical Solutions of Higher-Order Theories of Cross-Ply Laminated Shallow Shells. **Journal of Composite Structures**. v. 59, n. 313-340, 2003.

KILBAS, A. A., SRIVASTAVA, H. M. and TRUJILLO, J. J. **Theory and Applications of Fractional Differential Equations**, 1^oed., Amsterdam, Elsevier, 2006, 541 f.

KOLLAR, L. P. and SPRINGER, G. **Mechanics of Composite Structures**. Cambridge University Press. 2003.

KRAJCINOVIC, D. Damage Mechanics: Accomplishments, Trends and Needs. **International J. of Solids and Structures**. v. 37, p. 267-277, 2000.

KULKARNI, S. A. and BAJORIA, K. M. Finite Element Modeling of Smart Plates/Shells using Higher Order Shear Deformation Theory. **Journal of Composite Structures**. v. 62, p. 41-50, 2003.

KUMAR, R. S. and TALREJA, R. A Continuum Damage Model for Linear Viscoelastic composite materials. **Mechanics of Materials**. v. 35, p. 463-480, 2003.

LEE, H.-J. Finite Element Analysis of Active and Sensory Thermopiezoelectric Composite Materials. **National Aeronautics and Space Administration (NASA), Aerospace Institute.** Cleveland, Ohio, CR-2001-210892, p. 1-125, 2001.

LEMAITRE, J. **A Course on Damage Mechanics.** Second ed. Springer, 1996.

LEPAGE, S. **Stochastic Finite Element Method for the Modeling of Thermoelastic Damping in Micro-Resonators.** 2006. Tese de Doutorado, UK.

LESIEUTRE, G. A. and BIANCHINI, E. Time Domain Modeling of Linear Viscoelasticity using Anelastic Displacement Fields. **Journal of Vibration and Acoustic.** v. 117, n. 4, p. 424-430, 1995.

LIMA, A. M. G. **Modelagem e Otimização Robusta de Sistemas Dinâmicos em Presença de Amortecimento Viscoelástico.** 2007. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.

LIMA, A. M. G. **Modelagem Numérica e Avaliação Experimental de Materiais Viscoelásticos Aplicados ao Controle Passivo de Vibrações Mecânicas.** 2003. 122f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.

LIMA, A. M. G., FARIA, A. W. and RADE, D. A. Sensitivity Analysis of Frequency Response Functions of Composite Sandwich Plates Containing Viscoelastic Layers. **Composite Structures.** v. 92, n. 2, p. 364-376, 2010.

LO, K. H; CHRISTENSEN, R. M. and WU, E. M. A High Order Theory of Plate Deformation - Part 1: Homogeneous Plates. **Journal of Applied Mechanics.** v. 44, p. 663-668, 1977.

LOMBARDI, A. V. A Meso-macro Model for a Damage Tolerance Analysis of Composite Structures. **Composite Structures.** v. 59, p. 37-43, 2003.

MAKHECHA, D. A., GANAPATHI, M. and PATEL, B. P. Vibration and Damping Analysis of Laminated/Sandwich Composite Plates using Higher-Order Theory. **Journal of Reinforced Plastic and Composites.** v. 21, n. 6, p. 554-575, 2002.

MALEKZADEH, K., KHALILI, M. R. and MITTAL, R. K. Local and Global Damped Vibrations of Plates with a Viscoelastic Soft Flexible Core: an Improved High-order Approach. **Journal of Sandwich Structures and Materials.** v. 7, p. 431-456, 2005.

MANTEFEL, R. D. Evaluating the Convergence of Latin Hypercube Sampling. **AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conference.** v. 3, p.100-106, 2000.

MANTENA, R., GIBSON, R. F. and PLACE, T. A. Damping Capacity Measurements of Degradation in Advanced Materials. **SAMPE Q.** v. 17, n. 3, p. 20-31, 1986.

MEAD, D. J. **Passive Vibration Control.** Inc.: John Wiley & Sons, Canada, 1998.

MEIROVITCH, L. **Principles and Techniques of Vibrations.** New Jersey: Prentice-Hall, 2000.

MELE, P. and ALBEROLA, N. D. Prediction of the Viscoelastic Behaviour of Particulate Composites: Effect of Mechanical Coupling. **Composites Science and Technology.** v. 56, p. 849-853, 1996.

MELO, J. D. D. and RADFORD, D. W. Time and Temperature Dependence of the Viscoelastic Properties of CFRP by Dynamic Mechanical Analysis. **Composite Structures.** v. 70, p. 240-253, 2005.

MELO, J. D. D. and RADFORD, D. W. Viscoelastic Characterization of Transversely Isotropic Composite Laminae. **J. Compos. Mater.** v. 37, n. 2, p. 129-145, 2003.

MENDONÇA, P. T. R. **Materiais Compostos & Estruturas - Sanduíche: Projeto e Análise.** 1.ed. Manole, 2005.

MEUNIER, M. and SHENOI, R. A. Dynamic Analysis of Composite Sandwich Plates with Damping Modelled using High-order Shear Deformation Theory. **Composite Structures.** v. 54, p. 243-254, 2001.

MEUNIER, M. and SHENOI, R. A. Forced Response of FRP Sandwich Panels with Viscoelastic Materials. **Journal of Sound and Vibration.** v. 263, p. 131-151, 2003.

MILLER, K. S. and ROSS, B. **An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.** John Wiley, New York, 1993.

MOHEIMANI, S. O. R. and FLEMING, A. **Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping.** Springer-Verlag London Limited, 2006.

MOORE, B. C. Principal Component Analysis for Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction. **Institute of Electronic Engineers Transaction on Automatic Control.** AC-26, p. 17-32, 1981.

NASHIF, A. D., JONES, D. I. G. and HENDERSON, J. P. **Vibration Damping.** Inc.: John Wiley & Sons, 1985.

NAYAK, A. K., SHENOI, R.A. and MOY, S. S. J. Analysis of Damped Composite Plates using Plate Bending Elements with Substitute Shear Strain Fields based on Reddy Higher-order Theory. **Int. Journal Mech. Engrs. Part C.** v. 216, p. 591-606, 2002.

NAYAK, A. K, MOY, S. S. J. and SHENOI, R. A. Free Vibration Analysis of Composite Sandwich Plates Based on Reddy's Higher-order Theory. **Composites: Part B**. v. 33, p. 505-519, 2002.

NYE, J. F. **Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices**. 4.ed. London: Oxford University Press, 1969.

OLDHAM, K. B. and SPANIER, J. **The Fractional Calculus, Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order**, California, Academic Press, 240f. v. 111, 1974.

PAULTRE, P. **Dynamique des Structures: Applications aux Ouvrages de Génie Civil**. Germes, Lavoisier, 2005.

PAVAN, R. C., OLIVEIRA, B. F., MAGHOUS, S. and CREUS, G. J. A Model for Anisotropic Viscoelastic Damage in Composites. **Composite Structures**. v. 92, p. 1223-1228, 2010.

PEREIRA Jr., I. P. **Caracterização Numérica e Experimental da Evolução do Dano em Materiais**. 2004. 164f. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, MG, Brasil.

PERREUX, D. and OYTANA, C. Continuum Damage Mechanics for Microcracked Composites. **J. Comp. Engng**. v. 3, issue 2, p. 115-122, 1993.

PERREUX, D., SURI, D., VARCHON, D. and OYTANA, C. **Endommagement mécanique de Matériaux Composites: Rôle sur les Propriétés Hygrothermiques**. La construction navale en composites. FREMER. Actes de colloques n° 15, communication n° 36. Paris, 7-9 décembre 1992.

PERSOZ, B. **Introduction a l'Étude de la Rhéologie**. Dunod, 1987.

PIEFORT, V. **Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures**. 2001. 126f. Thèse de Doctorat - Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgique.

PILLET, E. **Méthodologies d'Aide à la Décision en Conception Robuste**. Thèse de Doctorat. 2008. 176 pages. U.F.R des Sciences et Techniques de L'Université de Franche-Comté, Besançon, France.

PLAGIANAKOS, T. S. and SARAVANOS, D. A. Mechanics and Finite Elements for the Damped Dynamic Characteristics of Curvilinear Laminates and Composite Shell Structures. **Journal of Sound and Vibration**. v. 263, p. 399-414, 2003.

PODLUBNY, I. DORCAK, L. and KOSTIAL, I. On Fractional Derivatives, Fractional-Order

Dynamic Systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ -controllers. IEEE, **Conference on Decision & Control**, 1997, San Diego, California, USA.

RABOTNOV, YU. N. **A Mechanism of a Long Time Failure**. In Creep Problems in Structural Members, AN SSSR Publ., 1959.

RADE, D. A. **Apostila do Curso: Métodos dos Elementos**. Faculdade de Eng. Mecânica, UFU, 2004.

RAH, K. **Damage Modeling in Laminated Composite Structures**. FirW PhD Symposium, Universiteit Gent, Holanda, 2007.

RAYNAUD, J. L., BOUHADDI, N., PERRIOTA, A. and VAN HERPE, F. Updating Complex Structures by a Robust Multilevel Condensation Approach. **Journal of Sound and Vibration**. v. 270, p. 403-416, 2006.

REDDY, J. N. A generalization of Two-dimensional Theories of Laminated Composite Plates. **Communications in Appl. Num. Meth.** v. 3, p. 173-180, 1987.

REDDY, J. N. and MIRAVETE, A. **Practical Analysis of Composite Laminates**. CRC Press, 1995.

REDDY, J. N. and PHAN, N. D. Stability and Vibration of Isotropic, Orthotropic and Laminated Plates According to a Higher-order Shear Deformation Theory. **Journal of Sound and Vibration**. v. 98, n. 2, p. 57-70, 1985.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis**. 2.ed. Florida: CRC Press, 1997.

RENAULT, A. **Caractérisation Mécanique Dynamique de Matériaux Poro-visco-élastique**. 2008. Thèse de Doctorat, Université de Sherbrooke, Canada.

REZENDE, M. C. Fractografia de Compósitos Estruturais. **Polímeros**. v. 17, n. 3, p. 4-11, 2007.

RICHARD, F. and PERREUX, D. A Reliability Method for Optimization of $[+\varphi, -\varphi]_n$ Fiber Reinforced Composite Pipes. **Reliability Engineering and System Safety**. v. 68, p. 53-59, 2000.

ROBBINS, D. H. and CHOPRA, I. Modeling of Progressive Damage in the Adhesive Bond Layers of Actuated Plates. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**. v. 18, p. 893-921, 2007.

ROGERS, C. A. **Intelligent Material Systems: The Dawns of a New Materials Age**. 1992. 13f. Classes Material - Virginia Tech, Virginia, USA.

SADEK, E. A. Some Serendipity Finite Elements for the Analysis of Laminated Plates. **Journal of Computers and Structures**. v. 69, p. 37-51, 1998.

SALIBA Jr., C. C. **Avaliação das Propriedades Mecânicas de Poliuretano tendo como Agente de Reforço uma Nova Fibra Inorgânica Natural**. 2003. 89f. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

SARAVANOS, D. A. and PEREIRA, J. M. Effects of Interply Damping Layers on the Dynamic Characteristics of Composite Plates. **AIAA J**. v. 30, n. 2, p. 2906-2913, 1992.

SCHMIDT, A and GAUL, L. Finite Element Formulation of Viscoelastic Constitutive Equations using Fractional Time Derivatives. **Nonlinear Dynamics**. v. 29, p. 37-55, 2002.

SEIDEL, G. D., ALLEN, D. H, HELMS, K.L.E and GROVES, S. E. A Model for Predicting the Evolution of Damage in Viscoelastic Particle-reinforced Composites. **Mechanics of Materials**. v. 37, p. 163-178, 2005.

SHANKARA, C. A. and IYENGAR, N. G. R. A C^0 Element for the Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates. **Journal of Sound and Vibration**. v. 5, p. 721-738, 1996.

SHENG, L. and DEYOU, Z. Numerical Simulation of Active Control of Structural Vibration and Acoustic Radiation of a Fluid-loaded Laminated Plate. **Journal of Sound and Vibration, Journal of Sound and Vibration**. v. 272, p. 109-124, 2004.

SHIN, W-H, OH, I-K, HAN, J-H and LEE, I. Aeroelastic Characteristics of Cylindrical Hybrid Composite Panels with Viscoelastic Damping Treatments. **Journal of Sound and Vibration**. v. 296, p. 99-116, 2006.

SIAS, D. F. **Programa Computacional para Análise Dinâmica de Estruturas Incluindo Amortecimento Viscoelástico**. 2004. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

SOIZE and K. BJAOUOI. Estimation of Fuzzy Structure Parameters for Continuous Junctions. **Journal of the Acoustical Society of America**. v. 107, p. 2011-2020, 2000.

SOUZA, C. E. **Otimização em Dois Níveis da Orientação e da Topologia de Cascas Laminadas**. 2003. 117f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

STOPPA, M. H. **Modelagem Numérica e Projeto Ótimo de Sistemas de Amortecimento Viscoelástico Aplicados a Placas Retangulares**. 2003. 164f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG, Brasil.

SUBBIAH, M., SHARAN, A. M. and JAIN, J., A Study of the Dynamic Condensation Techniques for the Machine Tools and Robotic Manipulators. **Mech. Mach. Theory**. v. 23, p. 63-69, 1988.

TAN, Y., WU, G., SUH, S. S., YANG, J. M. and HAHN, H. T. Damage Tolerance and Durability of Selectively Stitched Stiffened Composite Structures. **International Journal of Fatigue**. v. 30, p. 483-492, 2008.

TANDON, G. P. and PAGANO, N. J. Micromechanical Analysis of the Fiber Push-out and Re-push Test. **Composites Science and Technology**. v. 58, p. 1709-1725, 1998.

THEISEN, K. M. **Aplicação do Princípio da Correspondência Elasto-viscoelástica para Previsão de Deformabilidade de Misturas Asfálticas**. 2006. 150f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RG.

TITA, V. **Análise Dinâmica Teórica e Experimental de Vigas Fabricadas a Partir de Materiais Compósitos Poliméricos Reforçados**. 1999. 134f. Dissertação de Mestrado - Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

TRINDADE, M. A. **Contrôle Hybride Actif-Passif des Vibrations de Structures par des Matériaux Piézoélectriques et Viscoélastiques: Poutres Sandwich/Multicouches Intelligentes**. 2000. Thèse de Doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM), France.

TRINDADE, M. A. Reduced-Order Finite Element Models of Viscoelastically Damped Beams through Internal Variables Projection. **Journal of Vibration and Acoustics**. v. 128, 501-508, 2006.

TRIVAUDEY, F. **Cours de Mécanique des Structures : Éléments Finis**. 2ème Année, 2006-2007.

TSURUTA, K. M. **Monitoramento de Integridade Estrutural de Materiais Compostos Sujeitos a Impactos Empregando a Técnica da Impedância Eletromecânica**. 2008. 155f. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, MG, Brasil.

VASQUES, C. M. A., MOREIRA, R. A. S. and RODRIGUES, J. D. Viscoelastic Damping Technologie - Part II: Experimental Identification Procedure and Validation. **Journal of Advanced Research in Mechanical Engineering**. v. 1, issue 2, p. 96-110, 2010.

VINOT, P. **Robustesse des Modèles et Optimisation à partir de Modèles Condensés ou Simplifiés**. Thèse de Doctorat. Université de Franche-Comté, Besançon, France, 2001.

VRELLOS, N., OGIN, S. L. and SMITH, P. A. **Matrix Crack Initiation and Propagation in Laminates with off-axis plies. Fracture of Nano and Engineering Materials and Structures.** Book Chapter. p. 1283-1284, 2006.

WANG, G. **Analyses of Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores.** Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy. Faculty of the Graduate School of the University of Maryland, College Park, 2001.

XIAOYU, J. and XIANGAN, K. Micro-mechanical Characteristics of Fibre/matrix Interfaces in Composite Materials. **Composites Science and Technology.** v. 59, p. 635-642, 1999.

YAE, K. H. and INMAN, D. J. Control-Oriented Order Reduction of Finite Element Model. **Dynamic Systems and Control.** v. 115, p. 708-711, 1993.

YAN, Y. J. and YAM, L.H. Detection of Delamination Damage in Composite Plates using Energy Spectrum of Structural Dynamic Responses Decomposed by Wavelet Analysis. **Computers and Structures.** v. 82, p. 347-358, 2004.

YANN, R., DAMIEN, D., RACHID, E-G. and PATRICK, F. Anisotropy of Hygrothermal Damage in Fiber/polymer Composites: Effective Elasticity Measures and Estimates. **Mechanics of Materials.** v. 38, p. 1143-1158, 2006.

YU, B. and MYKLAND, P. Looking at Markov Samplers through Cusum Path Plots: a Simple Diagnostic Idea. **Statistics and Computing.** v. 8, p. 275-286, 1998.

ZAKO, M. and UETSUJI, Y. On the Damage Behavior of Fiber Reinforced Composite Materials. **International Journal of Damage Mechanics.** v. 11, 2002.

ZAPFE, J. A. and LESIEUTRE, G. A. A Discrete Layer Beam Finite Element for the Dynamic Analysis of Composite Sandwich Beams with Integral Damping Layers. **Computers and Structures.** v. 70, p. 647-666, 1999.

ZHANG, D. and LU, Z. An efficient, High-order Perturbation Approach for Flow in Random Porous Media via Karhunen-Loève and Polynomial Expansions. **Journal of Computational Physics.** v. 194, p. 773-794, 2004.

ZHANG, D. **Stochastic Methods for Flow in Porous Media: Coping with Uncertainties.** San Diego, Academic Press. 2002.

ZHANG, Z. and TAHERI, F. Dynamic Damage Initiation of Composite Beams Subjected to Axial impact. **Composites Science and Technology.** v. 64, p. 719-728, 2004.