Osječki matematički list 13 (2013), 139-154

O "vražjoj krivulji"

Martina Vučićević* Ivana Božić† Bojan Kovačić ‡

Sažetak

U članku se najprije opisuje veza krivulje s igrom diabolo prema kojoj je krivulja dobila i svoje originalno ime. Ukratko se izlaže povijest proučavanja krivulje, kao i osnovne definicije i pojmovi iz algebarske geometrije koji se koriste u daljnjem razmatranju. Potom se navodi definicija te razmatraju osnovna svojstva i osnovni oblici zapisa jednadžbe vražje krivulje, pri čemu se posebno izvodi parametarski oblik dotične jednadžbe. Kao tipičan primjer, zasebno se razmatra tzv. elektromotorna krivulja i njezina svojstva. Na kraju se daje jedna od mogućih elementarnih konstrukcija vražje krivulje pomoću jednakostrane hiperbole.

Ključne riječi: *vražja krivulja, igra diabolo, elektromotorna krivulja*

On the devil's curve

Abstract

In this article, we firstly describe the connection between the devil's curve and the game of "diabolo" the curve is named after. We shortly describe the history of studying the curve, as well as basic definitions and terms of algebraic geometry used in the article. Then we give the definition, basic properties and basic forms of the equation

*studentica 2. godine stručnog studija elektrotehnike, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Vrbik 8, Zagreb, HR, email: martina.vucicevic@tvz.hr

†asistent, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Vrbik 8, Zagreb, HR, email: ivana.bozic@tvz.hr

‡viši predavač, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Vrbik 8, Zagreb, HR, email: bkovacic@tvz.hr

of the curve, whereby we especially derive the parametric equation of the curve. As a typical example of the devil's curve, we consider the electric motor curve and its properties. Finally, we consider one of the possible constructions of the devil's curve using the equilateral hyperbola.

Keywords: *devil's curve, the diabolo game, electric motor curve*

1 Uvod

Zanimljiv naziv vražje krivulje nije povezan s vragom, kako se to na prvi pogled čini, već s igrom diabolo koja prati oblik te krivulje. Do zabune dolazi zbog pogrešnog tumačenja pojma "diabolo". Naime, pojam "diabolo" nije preuzet iz talijanske riječi "diavolo" (vrag) kako se obično misli, nego je izveden iz grčkih riječi "dia bolo" (baciti preko).
"Zasluge" za ovaj naziv pripisuju se francuskom izumitelju Gustaveu Philippartu.

1.1 Opis i povijest igre diabolo

Diabolo je žonglirajući predmet koji se sastoji od dva "stošca" spojena na vrhovima i koji se vrti, baca i hvata pomoću užeta vezanog za dva štapića (otuda potječe naziv "vrag na dva štapića"). Najčešće se izrađuje od mješavine plastike i gume, što mu omogućava savijanje ali i zadržavanje oblika (vidjeti sliku 1).

Diabolo se razvio iz kineskog jo-joa tj. kineskog diabola koji se danas, poput svojih prethodnika, izrađuje od bambusa i ima otvore sa strane. Ti otvori pri vrtnji proizvode glasan šum koji su u prošlosti prodavači iskorištavali za privlačenje kupaca. Za razliku od zapadnjačkog diabola koji je u obliku stošca, kineski diabolo ima dugu tanku osovinu s kotačima u obliku diska. Diabolo su u Europu iz Kine donijeli misionari. Sam oblik igre postao je vrlo popularan u Engleskoj i Francuskoj. Moderni diabolo razvijen je početkom dvadesetog stoljeća. 1906. godine francuski inženjer i izumitelj Gustave Philippart predstavio je diabolo načinjen od dva metalna stošca, s rubovima zaštićenim gumom. Zahvaljujući prijedlogu engleskog znanstvenika Charlesa Burgessa Frya, kojega je Philippart konzultirao u vezi materijala, umjesto metala počinje se upotrebljavati celuloid. Danas se diabolo koristi na mnogim područjima: kao vježba trikova u cirkusima diljem svijeta, u obliku sportske razonode i sl.

Slika 1: Diabolo

1.2 Povijest proučavanja vražje krivulje

Gabriel Cramer (1704.–1752.) *švicarski matematičar po kome je poznata eksplicitna formula za rješavanje sustava linearnih jednadžbi s istim brojem nepoznanica i jednadžbi*

Vražju krivulju je prvi proučavao švicarski matematičar Gabriel Cramer 1750. godine (vidjeti [11]). On je promatrao krivulju zadanu algebarskom jednadžbom

$$y^4 - 96y^2 - x^4 + 100x^2 = 0.$$

Nakon Cramera krivuljom se bavio i francuski matematičar Sylvestre François Lacroix 1810. godine (vidjeti [12]). On je promatrao familiju algebarskih krivulja zadanih jednadžbom oblika

$$y^4 - 96a^2y^2 - x^4 + 100a^2x^2 = 0 \quad (a \neq 0, a \in \mathbb{R}).$$

Spomenimo da je 1858. godine tekst o vražjoj krivulji objavljen i u časopisu *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Danas pojam "vražja krivulja" (engl. devil's curve), osim u matematičkom kontekstu, možemo naći i u nematematičkim područjima. Izdvojimo dva zanimljiva primjera. Devil's Curve je naziv opasnoga zavoja na ruti 56 u bazi Allegheny Ridgea (New Paris, Pennsylvania, SAD). Također, Devil's Curve je naziv za dio autoceste na području sjeverno-peruanske Amazone, u blizini grada Bagua, gdje je u lipnju 2009. godine u sukobu snaga sigurnosti i domorodaca ubijeno najmanje 30 ljudi zbog nemogućnosti dogovora vlade i autohtonih prosvjednika oko korištenja zemlje i prirodnih resursa.

2 Osnovne definicije vezane uz krivulje i klasifikacija krivulja 4. reda

Radi daljnjih razmatranja ukratko podsjetimo na neke osnovne definicije vezane uz krivulje. Opća podjela svih krivulja razlikuje ravninske i prostorne krivulje. Svaka od tih klasa dodatno se dijeli na algebarske i transcendentne.

Definicija 2.1. *Neka je $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilo koji polinom drugoga stupnja. Skup svih realnih nultočaka toga polinoma, tj. skup $N_p := \{T \in \mathbb{R}^2 : p(T) = 0\}$ naziva se* ***ravninska algebarska krivulja****.*

Ravninske algebarske krivulje mogu se klasificirati s obzirom na **red**, **razred** i **stupanj**.

Definicija 2.2. ***Red*** *ravninske algebarske krivulje (oznaka n) je maksimalan broj njezinih sjecišta s bilo kojim pravcem pripadajuće ravnine.* ***Razred*** *ravninske krivulje (oznaka r) je broj tangenata koje je moguće konstruirati iz bilo koje točke ravnine. Ako je red krivulje jednak njezinu razredu, tj. ako je $n = r$, kraće kažemo da krivulja ima* ***stupanj*** *jednak n (ili r).*

Alternativno možemo reći da je *ravninska algebarska krivulja* svaka ravninska krivulja koja ima svoj red i svoj razred, dok je *ravninska transcendentna krivulja* svaka ravninska krivulja takva da postoji barem jedan pravac koji tu krivulju siječe u beskonačno mnogo međusobno različitih točaka. Vražja krivulja pripada u klasu ravninskih algebarskih krivulja, pa u nastavku umjesto ravninska algebarska krivulja kraće govorimo algebarska krivulja.

Sjecišta algebarske krivulje i nekoga pravca određuju se kao rješenja sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice. Ta rješenja mogu biti konjugirano-kompleksna, pa ih ne možemo grafički prikazati u standardnoj euklidskoj ravnini. Dobijemo li dvostruko realno rješenje, a pravac nije tangenta krivulje, tada govorimo o **dvostrukoj točki** algebarske krivulje. Može se pokazati da ravninska algebarska krivulja reda n može imati najviše $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ različitih dvostrukih točaka [8].

Točke algebarske krivulje u kojima postoji jedinstvena tangenta na tu krivulju nazivamo **regularnim točkama** krivulje. Grubo možemo reći da su gotovo sve točke algebarske krivulje regularne. Osim regularnih, algebarska krivulja može sadržavati i **singularne točke**, odnosno točke u kojima se na krivulju mogu povući barem dvije različite tangente. Takve su točke npr. ranije spomenute dvostruke točke algebarske krivulje.

Radi potpunosti kasnijih razmatranja, spomenimo da se sve krivulje četvrtoga reda obično dijele na

- krivulje koje nemaju singularnih točaka
- krivulje s jednom dvostrukom točkom
- krivulje s dvije dvostruke točke
- krivulje s tri dvostruke točke ili jednom trostrukom.

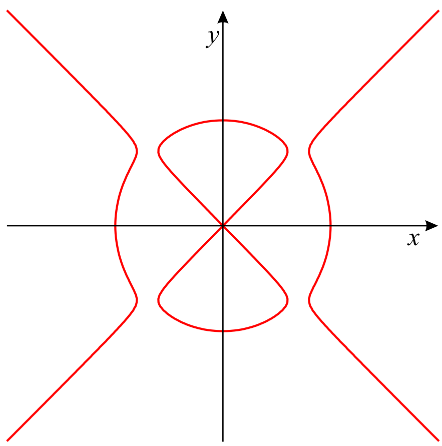
3 Definicija, osnovna svojstva i oblici zapisa jednadžbe vražje krivulje

Definicija 3.1. *Vražja krivulja je algebarska krivulja zadana algebarskom jednadžbom*

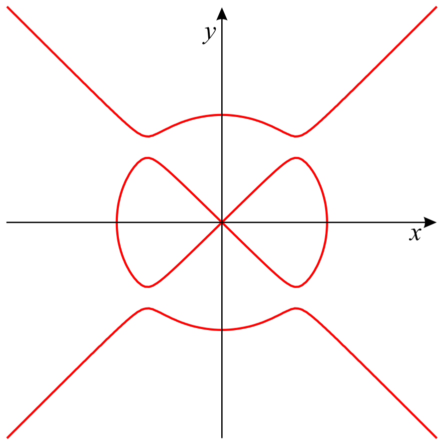
$$y^4 - x^4 - a^2y^2 + b^2x^2 = 0, \tag{1}$$

pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

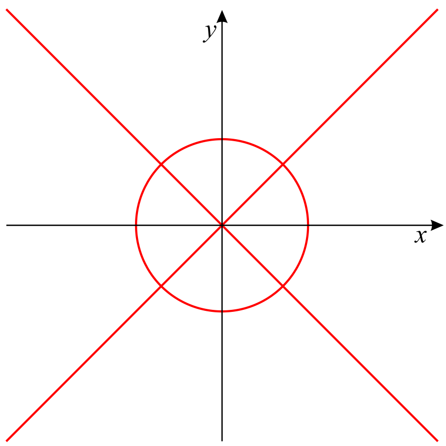
Vražja krivulja je krivulja četvrtoga reda i može se pokazati da ima točno jednu dvostruku točku. Zavisno o odnosu veličina a i b, vražja krivulja ima ili čvor ili izoliranu točku u ishodištu koordinatnoga sustava (vidjeti slike 2, 3, 4).



Slika 2: Slučaj $a < b$



Slika 3: Slučaj $a > b$



Slika 4: Slučaj $a = b$

Za $a = b$ dobivamo jednadžbu

$$y^4 - x^4 - a^2(y^2 - x^2) = 0 \tag{2}$$

koju možemo zapisati u obliku

$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2 - a^2) = 0, \tag{3}$$

odnosno u obliku

$$(y - x)(y + x)(y^2 + x^2 - a^2) = 0. \tag{4}$$

U tom je slučaju vražja krivulja unija pravaca $y = -x$, $y = x$ i kružnice $x^2 + y^2 = a^2$.

Parametarski oblik jednadžbe vražje krivulje možemo dobiti iz kartezijeva oblika jednadžbe. U tu svrhu jednadžbu (1) zapišimo u ekvivalentnom obliku

$$y^2(y^2 - a^2) = x^2(x^2 - b^2). \tag{5}$$

Pretpostavimo da je $x = r\cos t$ i $y = r\sin t$, pri čemu je $r = r(t)$ neka realna funkcija jedne realne varijable. Želimo odrediti funkciju r. Uvrstimo navedene izraze za x i y u jednadžbu (1), pa dobivamo redom:

$$\begin{aligned}
r^4\sin^4 t - a^2r^2\sin^2 t &= r^4\cos^4 t - b^2r^2\cos^2 t \\
r^2(\sin^4 t - \cos^4 t) &= a^2\sin^2 t - b^2\cos^2 t \\
r^2(\sin^2 t - \cos^2 t)(\sin^2 t + \cos^2 t) &= a^2\sin^2 t - b^2\cos^2 t \\
r^2(\sin^2 t - \cos^2 t) &= a^2\sin^2 t - b^2\cos^2 t
\end{aligned}$$

i odatle

$$r = \sqrt{\frac{a^2\sin^2 t - b^2\cos^2 t}{\sin^2 t - \cos^2 t}}.$$

Stoga je parametarski oblik jednadžbe vražje krivulje

$$x = \sqrt{\frac{a^2\sin^2 t - b^2\cos^2 t}{\sin^2 t - \cos^2 t}} \cdot \cos t, \tag{6}$$

$$y = \sqrt{\frac{a^2\sin^2 t - b^2\cos^2 t}{\sin^2 t - \cos^2 t}} \cdot \sin t. \tag{7}$$

Analogno se može pokazati da je *polarni oblik* jednadžbe vražje krivulje

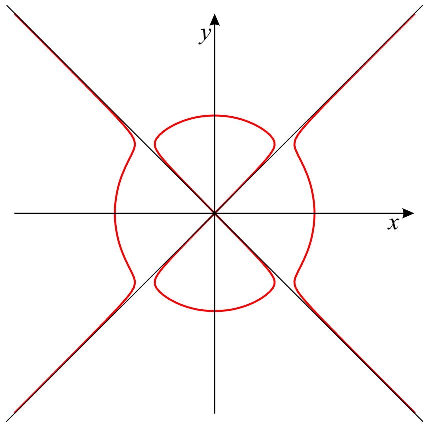
$$r^2(\sin^2\beta - \cos^2\beta) = a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta. \tag{8}$$

4 Elektromotorna krivulja

U jednadžbu (5) uvrstimo $a^2 = 96$ i $b^2 = 100$. Tako dobijemo krivulju zadanu jednadžbom

$$y^2(y^2 - 96) = x^2(x^2 - 100). \tag{9}$$

Ova vražja krivulja poznata je pod nazivom elektromotorna krivulja (vidjeti sliku 5).



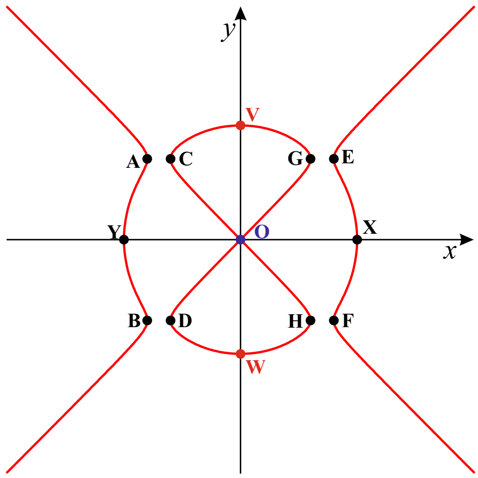
Slika 5: Elektromotorna krivulja

Sredina promatrane krivulje prikazuje namotaje žice koji rotiraju pomoću sila uzrokovanih djelovanjem okolnih magneta upravo kao i kod elektromotora. Otuda i naziv ove vrste vražje krivulje.

Osnovna svojstva elektromotorne krivulje su:

- ima točno jednu dvostruku točku $O = (0, 0)$
- nema niti jednu singularnu točku
- desetoga je razreda
- ima ukupno 18 prijevojnih točaka (što slijedi npr. iz Plückerovih formula, za detalje vidjeti [3])
- u točkama $V = (0, 4\sqrt{6})$ i $W = (0, -4\sqrt{6})$ ima vodoravne (horizontalne) tangente
- u točkama $X = (10, 0)$, $Y = (-10, 0)$, $A = (-8, 4\sqrt{3})$, $B = (-8, -4\sqrt{3})$, $C = (-6, 4\sqrt{3})$, $D = (-6, -4\sqrt{3})$, $E = (8, 4\sqrt{3})$, $F = (8, -4\sqrt{3})$, $G = (6, 4\sqrt{3})$, $H = (6, -4\sqrt{3})$ ima uspravne (vertikalne) tangente

- ima asimptote $y = x$ i $y = -x$
- osno je simetrična s obzirom na obje koordinatne osi
- centralno je simetrična s obzirom na ishodište.



Slika 6: Istaknute točke elektromotorne krivulje

Grane elektromotorne krivulje (vidjeti sliku 7) zadane su sljedećim jednadžbama:

$$f(x) = \sqrt{48 + \sqrt{x^4 - 100x^2 + 2304}} \tag{10}$$

$$g(x) = \sqrt{48 - \sqrt{x^4 - 100x^2 + 2304}} \tag{11}$$

$$h(x) = -\sqrt{48 - \sqrt{x^4 - 100x^2 + 2304}} \tag{12}$$

$$m(x) = -\sqrt{48 + \sqrt{x^4 - 100x^2 + 2304}} \tag{13}$$

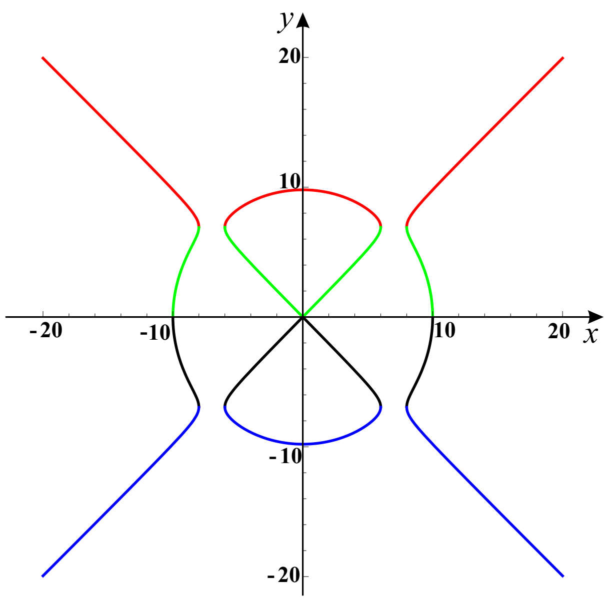
Napomena 4.1. *Može se pokazati da su grane vražje krivulje (u slučaju $a < b$) općenito zadane jednadžbama*

$$f(x) = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \sqrt{x^4 - b^2x^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}},$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \sqrt{x^4 - b^2x^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}},$$

$$h(x) = -\sqrt{\frac{a^2}{2} - \sqrt{x^4 - b^2x^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}},$$

$$m(x) = -\sqrt{\frac{a^2}{2} + \sqrt{x^4 - b^2x^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}}$$



Slika 7: Grane elektromotorne krivulje

5 Konstrukcija vražje krivulje pomoću jednakostrane hiperbole

Vražju krivulju možemo konstruirati pomoću jednakostrane hiperbole zadane osnom (kanonskom) jednadžbom $x^2 - y^2 = a^2$, pri čemu je $a > 0$. Najprije ćemo pokazati kako konstruirati grane vražje krivulje, a potom kako konstruirati središnju "osmicu".

Propozicija 5.1. *Neka je zadana jednakostrana hiperbola* $h \ldots x^2 - y^2 = a^2$. *Neka je* O *ishodište koordinatnoga sustava, a* H *bilo koja točka na hiperboli* h. *Neka je* $b \in \mathbb{R}$ *takav da je* $b > a$. *Konstruiramo pravokutan trokut* OHN *s pravim kutom u vrhu* H *tako da vrijedi* $|HN| = b$ *(vidjeti sliku 8). Tada je geometrijsko mjesto (lokus) svih točaka* $M \in OH$ *takvih da vrijedi* $|OM| = |ON|$ *krivulja koju tvore grane vražje krivulje.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $H = \left(x_H, \sqrt{x_H^2 - a^2}\right) \in h$. Jednadžba pravca OH je

$$y = \frac{\sqrt{x_H^2 - a^2}}{x_H} \cdot x. \tag{14}$$

Budući da je trokut OHN pravokutan s pravim kutom kod vrha H, primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$|OH|^2 + |HN|^2 = |ON|^2, \tag{15}$$

odnosno

$$|ON|^2 = 2x_H^2 - a^2 + b^2. \tag{16}$$

Neka je $M = (x_M, y_M)$ točka na pravcu OH takva da je $|OM| = |ON|$. Odatle slijedi $|OM|^2 = |ON|^2$, pa dobivamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$y_M = \frac{\sqrt{x_H^2 - a^2}}{x_H} \cdot x_M \tag{17}$$

$$x_M^2 + y_M^2 = 2x_H^2 - a^2 + b^2. \tag{18}$$

Iz prve jednadžbe toga sustava je:

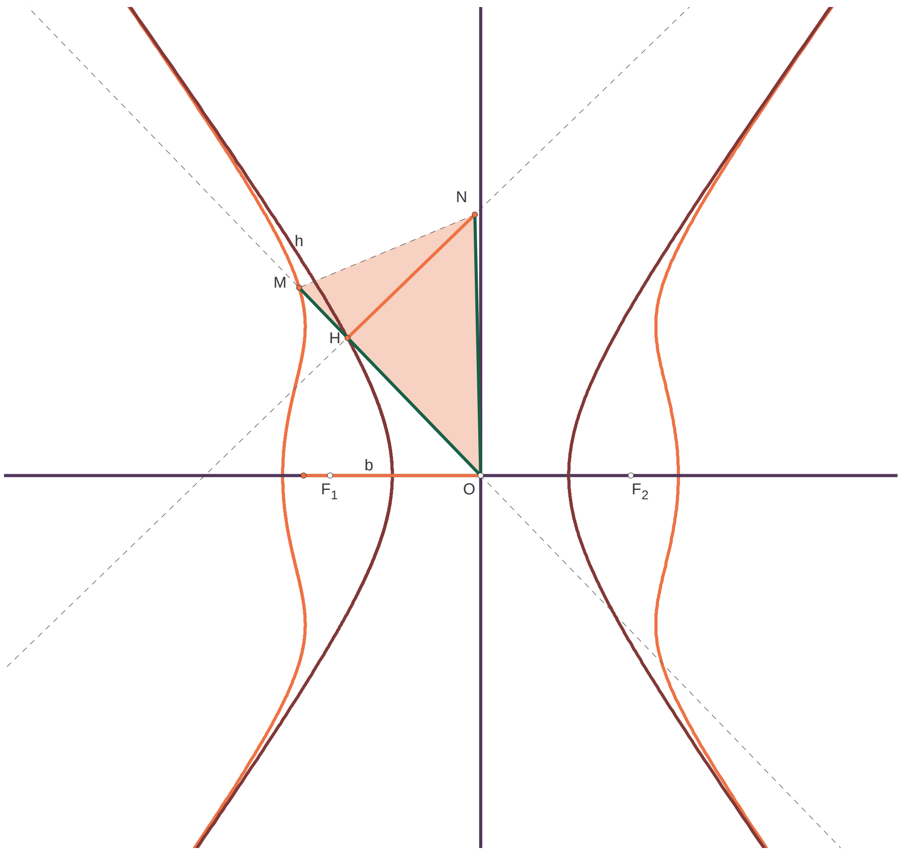
$$y_M^2 = \left(1 - \frac{a^2}{x_H^2}\right) \cdot x_M^2, \tag{19}$$

a iz druge

$$x_H^2 = \frac{1}{2}(x_M^2 + y_M^2 + a^2 - b^2). \tag{20}$$

Uvrštavanjem jednakosti (20) u jednakost (19) dobivamo:

$$y_M^2 = \left(1 - \frac{2a^2}{x_M^2 + y_M^2 + a^2 - b^2}\right) \cdot x_M^2,$$



Slika 8: Konstrukcija grana vražje krivulje pomoću jednakostrane hiperbole

$$y_M^2 = \frac{x_M^2 + y_M^2 - a^2 - b^2}{x_M^2 + y_M^2 + a^2 - b^2} \cdot x_M^2,$$

$$y_M^4 - (b^2 - a^2)y_M^2 = x_M^4 - (a^2 + b^2)x_M^2.$$

Dakle, traženo geometrijsko mjesto je krivulja zadana jednadžbom

$$y^4 - (b^2 - a^2)y^2 = x^4 - (a^2 + b^2)x^2. \tag{21}$$

Iz pretpostavke $b > a > 0$ slijede nejednakosti $a_1^2 > 0$ i $b_1^2 > 0$. Dakle, krivulja zadana jednadžbom (21) je vražja krivulja s parametrima $a_1^2 = b^2 - a^2$ i $b_1^2 = a^2 + b^2$. Budući da niti točka H, niti točka M ne mogu biti ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava, dobivena krivulja ne prolazi ishodištem. Stoga su s (21) zadane grane vražje krivulje, a to smo i željeli pokazati. □

Propozicija 5.2. *Neka je H_1 bilo koja točka jednakostrane hiperbole $h \ldots x^2 - y^2 = a^2$ i $b \in \mathbb{R}$ takav da je $b > a$. Neka je točka M_1 takva da vrijedi $|M_1H_1| = b$ i trokut OH_1M_1 je pravokutan s pravim kutom pri vrhu O. Tada je geometrijsko mjesto točaka M_1 upravo "osmica" (vidjeti sliku 9).*

Dokaz. Neka su $H_1 = \left(x_{H_1}, \sqrt{x_{H_1}^2 - a^2}\right) \in h$ i $M_1 = (x_{M_1}, y_{M_1})$. Pretpostavka je da je trokut OH_1M_1 pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu O. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$|OH_1|^2 + |OM_1|^2 = |H_1M_1|^2, \tag{22}$$

odnosno

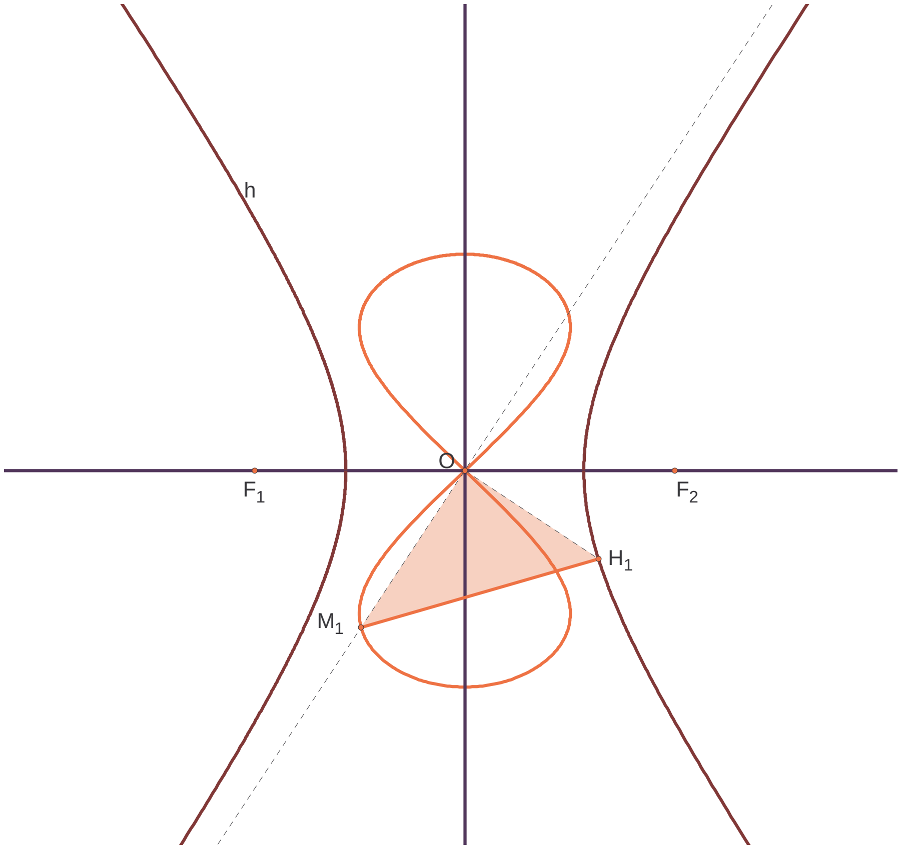
$$x_{M_1}^2 + y_{M_1}^2 = b^2 - 2x_{H_1}^2 + a^2. \tag{23}$$

Također, iz pretpostavke da je trokut OH_1M_1 pravokutan slijedi da je pravac OM_1 okomit na pravac OH_1. U dokazu Propozicije 5.1. vidjeli smo da je jednadžba pravca OH zadana s (14), pa je jednadžba pravca OM_1

$$y = -\frac{x_{H_1}}{\sqrt{x_{H_1}^2 - a^2}} \cdot x. \tag{24}$$

Točka M_1 pripada pravcu OM_1, pa mora vrijediti jednakost:

$$y_{M_1} = -\frac{x_{H_1}}{\sqrt{x_{H_1}^2 - a^2}} \cdot x_{M_1}. \tag{25}$$



Slika 9: Konstrukcija "osmice" pomoću jednakostrane hiperbole

Tako smo dobili sljedeći sustav jednadžbi:

$$y_{M_1} = -\frac{x_{H_1}}{\sqrt{x_{H_1}^2 - a^2}} \cdot x_{M_1}, \tag{26}$$

$$x_{M_1}^2 + y_{M_1}^2 = b^2 - 2x_{H_1}^2 + a^2. \tag{27}$$

Kvadriranjem prve jednadžbe toga sustava dobijemo:

$$y_{M_1}^2 = \frac{x_{H_1}^2}{x_{H_1}^2 - a^2} \cdot x_{M_1}^2 \tag{28}$$

a odatle je

$$x_{H_1}^2 = \frac{y_{M_1}^2 \cdot a^2}{y_{M_1}^2 - x_{M_1}^2}. \tag{29}$$

Uvrštavanjem jednakosti (29) u jednakost (27) dobijemo:

$$\begin{aligned} x_{M_1}^2 + y_{M_1}^2 &= b^2 - 2 \cdot \frac{y_{M_1}^2 \cdot a^2}{y_{M_1}^2 - x_{M_1}^2} + a^2, \\ y_{M_1}^4 - x_{M_1}^4 &= (a^2 + b^2)(y_{M_1}^2 - x_{M_1}^2) - 2 \cdot y_{M_1}^2 \cdot a^2, \\ y_{M_1}^4 - (b^2 - a^2)y^2 &= x_{M_1}^4 - (a^2 + b^2)x_{M_1}^2. \end{aligned}$$

Dakle, traženo geometrijsko mjesto točaka je krivulja

$$y^4 - (b^2 - a^2)y^2 = x^4 - (a^2 + b^2)x^2. \tag{30}$$

Iz istih razloga kao u dokazu propozicije 5.1. zaključujemo da je s (30) određena vražja krivulja s parametrima $a_1^2 = b^2 - a^2$ i $b_1^2 = a^2 + b^2$. Međutim, budući da točka M_1 ne pripada istom pravcu kao i točka M iz propozicije 5.1., ovom konstrukcijom ne dobivamo ranije dobivene grane vražje krivulje. Dakle, traženo geometrijsko mjesto (lokus) točaka M_1 je "osmica", što smo i tvrdili. □

Literatura

[1] V. Niče, *Deskriptivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.

[2] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2003.

[3] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[4] http://www.diabolotricks.com/whatisit.html, (javno dostupno 28.2.2013.)

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Diabolo, (javno dostupno 28.2.2013.)

[6] http://wikimapia.org/1464217/Devil-s-Curve, (javno dostupno 28.2.2013.)

[7] http://mathworld.wolfram.com/DevilsCurve.html, (javno dostupno 28.2.2013.)

[8] http://www.grad.hr/geomteh3d/skripta/algebarske.html, (javno dostupno 28.2.2013.)

[9] http://www.2dcurves.com/quartic/quarticd.html, (javno dostupno 28.2.2013.)

[10] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Devils.html , (javno dostupno 28.2.2013.)

[11] Introduction a L'analyse des Lignes Courbes Algébriques , str. 19. (Ženeva, 1750.)

[12] Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral , str. 334-336. (Pariz, 1797.)