UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

SECCIÓN DE MATEMÁTICA

TESIS:

“TEOREMA DE SEIFERT – VAN KAMPEN”.

PRESENTADO POR:

JOSÉ LUIS RIVERA LÓPEZ

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

JULIO DE 2011

SAN MIGUEL, EL SALVADOR CENTROÁMERICA.

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

M.Sc. RUFINO ANTONIO QUEZADA SÁNCHEZ.
RECTOR

M.Sc. MIGUEL ÁNGEL PÉREZ RÁMOS
VICERRECTOR ACADÉMICO

M.Sc. OSCAR NOÉ NAVARRETE
VICERRECTOR ADMINISTRATIVO

Lic. DOUGLAS BLADIMIR ALFARO CHÁVEZ
SECRETARIO GENERAL

FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

Dra. ANA JUDITH GUATEMALA DE CASTRO
DECANA EN FUNCIONES

Ing. JORGE ALBERTO RUGAMAS RAMÍREZ
SECRETARIO

Lic. CRISTOBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ
ADMINISTRADOR ACADÉMICO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES

Y MATEMÁTICAS

Lic. ABEL MARTÍNEZ LÓPEZ

JEFE DEL DEPARTAMENTO

SECCIÓN DE MATEMÁTICA

Licda. MARÍA OLGA QUINTANILLA DE LOVO

COORDINADORA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA

“TEOREMA DE SEIFERT – VAN KAMPEN”.

PRESENTA:
JOSÉ LUIS RIVERA LÓPEZ

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

M.Sc. MARCELINO MEJÍA GONZÁLEZ
ASESOR DIRECTOR

Lic. PEDRO FLÓRES SÁNCHEZ
ASESOR METODOLÓGICO

CIUDAD UNIVERSITARIA DE ORIENTE JULIO DE 2011.

TESIS APROBADA POR

Lic. RAÚL ANTONIO ALFARO HERNÁNDEZ

COORDINADOR DE PROCESOS DE GRADUACIÓN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

M.Sc. MARCELINO MEJÍA GONZÁLEZ

ASESOR DIRECTOR

Lic. PEDRO FLÓRES SÁNCHEZ

ASESOR METODOLÓGICO

“Si simplemente hace girar la rueda es álgebra,

pero si contiene una idea, es topología”

Sólomon Lefschetz.

A mis padres, por darme la vida, y el apoyo

que siempre necesité.

A José Antonio Fuentes (Q.D.D.G.),por ser

una inspiración en mis estudios

de matemática y en mi labor docente.

“Bienvenidos a pensar”

Agradecimientos

A Dios todo poderoso por darme paciencia, confianza, sabiduría y sobre todo la salud, que me permitieron en todo momento seguir adelante a pesar de las dificultades encontradas.

A mis familiares y amigos por la fe que siempre me demostraron y el apoyo que me brindaron.

A mis asesores: Director Marcelino Mejía por enseñarme con el ejemplo a sobreponerme aun sobre la enfermedad y por creer en mis capacidades; y Metodológico Pedro Flores por mostrarme que se bebe pensar el doble antes de expresar una idea.

A todos los docentes que tuvieron parte en mi formación, porque mis conocimientos académicos son la unión de sus esfuerzos.

A mis compañeros de la especialidad por haberme permitido compartir y mejorar mis ideas junto con las suyas.

Resumen

En el presente trabajo se muestra el desarrollo que la topología ha tenido a través de la historia, así como la estrecha relación que posee con otras áreas, no solo con la matemática, lo cual le ha permitido una evolución vertiginosa. Aunque el objetivo primordial de este trabajo es, el planteamiento y desarrollo del Teorema de Seifert – Van Kampen, la naturaleza del mismo es la que hace necesario, el recorrido histórico para contextualizar la topología, seguidamente se estudia la base teórica de la topología y las relaciones que tiene con otras áreas de la matemática para poder, de esta manera reconstruir el camino lógico que culmina con la demostración del teorema en mención.

El trabajo está dividido en los siguientes capítulos:

Capítulo 1. Historia de la topología y algebra de conjuntos. En este se presenta el desarrollo que la topología a obtenido en el transcurso de la historia, se plantean los problemas más representativos que dieron origen a la topología, que paso de ser considerada una Geometría característica, hasta convertirse en una rama especifica de la matemática, que en la actualidad cuenta con divisiones dentro de ella, además, se presenta la relación que la topología tiene con otras áreas como: la Teoría de Grafos, Análisis Matemático, Ecuaciones Diferenciales, Ecuaciones Funcionales, Variable Compleja, Geometría Diferencial, Geometría Algebraica, Álgebra Conmutativa, Estadística, Teoría del Caos, Geometría Fractal... Incluso tiene aplicaciones directas en Biología y Sociología.

Posteriormente se plantea un breve recorrido por el algebra de conjuntos, en donde se presentan definiciones, teoremas y propiedades que son fundamentales en el estudio de la topología, en esta parte especifica no se hace un estudio riguroso, simplemente se mencionan para su posterior uso en nuestro estudio de la topología.

Capítulo 2. Topología general. Iniciando con la definición de espacio topológico, en este capítulo se estudia la parte teórica básica de la topología, que debido a su gran amplitud, solamente se tratan aquellas definiciones, teoremas, lemas, axiomas y propiedades que posteriormente utilizaremos en el análisis del Teorema que ha dado origen al presente estudio, entre los tópicos que se estudian en este capítulo tenemos: base de una topología, topología del orden, topología producto, topología del subespacio, espacios conexos, compacidad, entre otros.

Capítulo 3. Topología algebraica. En este capítulo se estudia la relación de la topología con el algebra, tomando una estructura algebraica muy importante como lo es el grupo, de él, se estudian las operaciones de producto y suma, grupos especiales como los grupos libres y abelianos, hasta propiedades como la homotopía, para finalmente estudiar y analizar el Teorema de Seifert – Van Kampen.

Índice general

Capítulo 3. Conexión y compacidad.

3. Tercera parte. TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

Capítulo 4. El grupo fundamental.

Introducción

La topología es una rama de la matemática de reciente formación, que gracias a su estrecha relación con otras ramas tales como el algebra y la geometría, entre otras, a alcanzado un desarrollo de grandes proporciones, ya que de pasar a ser considerada como una geometría característica por el matemático suizo Gottfried Wilhelm Leibniz, en 1679, hasta la actualidad que cuenta con divisiones dentro de ella, han pasado relativamente pocas décadas; entre las divisiones con que la topología cuenta en la actualidas, se pueden mencionar: La topología general o conjuntista, La topología algebraica y La topología diferencial.

Dicho desarrollo fue posible gracias al empuje que grandes matemáticos, a través del tiempo le fueron proporcionando en la solución de problemas que, desde otro punto de vista no podrían haberse resuelto, entre los más notables están: "El problema de los puentes de Konigsberg", "La Banda de Moebius", "La formula de Lhuilier para poliedros", "El problema de los cuatro colores", entre otros. El planteamiento de las soluciones de dichos problemas conlleva un desarrollo topológico, apoyándose en las distintas ramas de la matemática; para la época respectiva fueron considerados innovadores.

Una de las grandes bondades de la topología es la relación que tiene con otras áreas como : la Teoría de Grafos, Análisis Matemático, Ecuaciones Diferenciales, Ecuaciones Funcionales, Variable Compleja, Geometría Diferencial, Geometría Algebraica, Álgebra

Conmutativa, Estadística, Teoría del Caos, Geometría Fractal, y su desarrollo a sido tal que, inclusive tiene aplicaciones directas en Biología y Sociología.

Para el estudio de la topología sin embargo, es necesario iniciar por la rama de la topología general ya que es en ésta donde se desarrolla la teoría básica necesaria para su entendimiento. Teniendo en cuenta lo anterior, el estudio de la teoría de conjuntos es indispensable, aunque no debe ser necesariamente profundo, bastará con comprender las operaciones y propiedades de los conjuntos, del mismo modo se deben abordar las funciones ya que su estrecha relación con los conjuntos hacen de estas otro pilar importante para el desarrollo de la topología, ya que con el estudio de la teoría de conjuntos y las funciones se posee la base para poder desarrollar lo que son los espacios topológicos, su conexidad y su compacidad que son propiedades fundamentales de estos espacios. La parte de topología general o conjuntista ha merecido un estudio mas detallado debido a la naturaleza del presente trabajo, por este motivo, se han desarrollado todas las pruebas y demostraciones que forman la base teórica para el siguiente paso, en el estudio de la topología.

Teniendo desarrollada toda base teórica en la topología general, se puede continuar con la topología algebraica, además de la topología general conlleva el estudio de estructuras algebraicas como los grupos, los grupos conmutativos, los grupos libres y sus propiedades, tales como los homomorfismos, monomorfismos, entre otros, y las operaciones de grupos como lo son las sumas y productos.

Una vez desarrollada toda la teoría necesaria en la topología general y la topología algebraica, podemos plantear y desarrollar el Teorema de Seifert – Van Kampen que no es más que un método general para calcular grupos fundamentales.

Primera Parte

HISTORIA DE LA TOPOLOGÍA Y ALGEBRA DE CONJUNTOS

1.1 Historia de la topología.

Antes de iniciar nuestro recorrido histórico sobre el surgimiento y desarrollo de la Topología, se hace necesario primero, tener una idea clara de lo que es la topología y de su objeto de estudio.

La topología, es la rama de las matemáticas, que se ocupa de los objetos geométricos atendiendo a la forma, tamaño o posición, es decir, a sus propiedades cualitativas.
No tiene en cuenta aspectos relativos a magnitudes ni requiere cálculos con cantidades. Así, desde el punto de vista topológico, una esfera, un cubo o la superficie de una naranja representan el mismo objeto geométrico, no importa si tiene picos o está arrugado (los objetos mostrados en la *figura* 1 son topológicamente iguales); dicho de otra forma, podemos pasar de uno a otro de manera continua.

***Figura* 1**

De un modo informal, la topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes. Imaginemos que dibujamos un cuadro sobre una banda de hule como se muestra en la *figura* 1*a*; al deformarla quedaría algo semejante a lo que se muestra en la *figura* 1*b*.

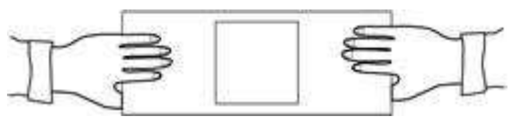


Figura 1a.

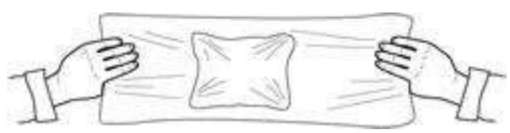


Figura 1b.

¿Cuáles propiedades del cuadro cambiaron y cuáles no?

Cambiaron el área, el perímetro, los ángulos internos y externos. Estos cambiaron porque son propiedades geométricas, sin embargo, no cambió el hecho de que la figura resultante sigue siendo una curva cerrada que determina un interior y un exterior.

Como se mostro en el caso anterior, en topología nunca nos preguntamos: "¿qué longitud?", "¿a qué distancia?", "¿de qué tamaño?" sino que preguntamos "¿dónde?", "¿entre qué?", "¿interior o exterior?". Podemos ahora hacernos una idea de las diferencias entre la Topología y la Geometría.

La transformación del cuadro mostrada en las figuras presupone, en otras palabras, que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la *figura* 1*a* y los de la *figura* 1*b*, y que la deformación hace corresponder *puntos próximos* a *puntos próximos*, por casos como éste es que se ha hecho popular el dicho de que un topólogo no distingue entre una dona y una taza de café (como se muestra en la *figura* 2). Como si de objetos de goma elástica se tratasen, podemos doblarlos, estirarlos o encogerlos para pasar de uno a otro. En cambio, no se permite por ejemplo cortar, pegar por puntos distintos o pinchar, porque ello provocaría una discontinuidad.

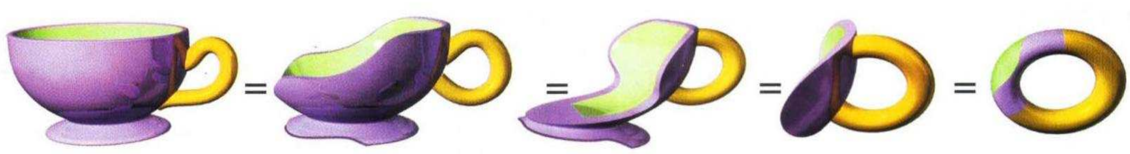


***Figura* 2 *Una taza transformándose en una rosquilla* (*Toro*)**

Topología es una palabra que desde su nombre hace referencia al estudio de la posición o de lugar, del espacio (***Topo*** lugar ***logía*** estudio).

Históricamente, las primeras ideas topológicas conciernen al concepto de límite y al de completitud de un espacio métrico, y se manifestaron principalmente en la crisis de los inconmesurables de los pitagóricos, ante la aparición de números reales no racionales.

En 1679, el matemático suizo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) publica su famoso libro "*Characteristica Geometrica"*(Característica Geométrica), en el cual, en términos modernos, intenta enunciar las propiedades geométricas básicas de las figuras, relacionarlas con símbolos para representarlas y combinar estas propiedades bajo operaciones que produjeran otras, intenta estudiar más las propiedades topológicas que las puramente métricas de las figuras.

Insiste en que, aparte de la representación coordenada de figuras, "*se necesita de otro análisis, puramente goemétrico o lineal, que también defina la posición*, *como el álgebra define la magnitud*". Las ideas de Leibniz no tuvieron repercusión en las matemáticas debido quizá a la imprecisión y a los pocos ejemplos que él propuso.

Los matemáticos en el siglo XVIII muestran poco interés en topología, hasta que la solución de un problema antiguo puso a la topología en vías de desarrollo, y fue el suizo Leonhard Paul Euler (1707-1783) cuyo genio comprende todas las matemáticas quien pudo resolverlo.

Sobre el río Pregel, que atraviesa la ciudad rusa de Konigsberg (antes perteneciente a Prusia), hay construidos siete puentes que unen las dos islas con las riberas como se muestra en la *figura* 3.

Los habitantes de la ciudad se divertían intentando cruzar los siete puentes en un paseo continuo sin pasar dos veces por ninguno de ellos, volviendo al lugar de partida (se excluyen paseos que crucen dos veces un mismo puente y paseos que omitan algún puente). La cuestión consiste en demostrar si es posible.

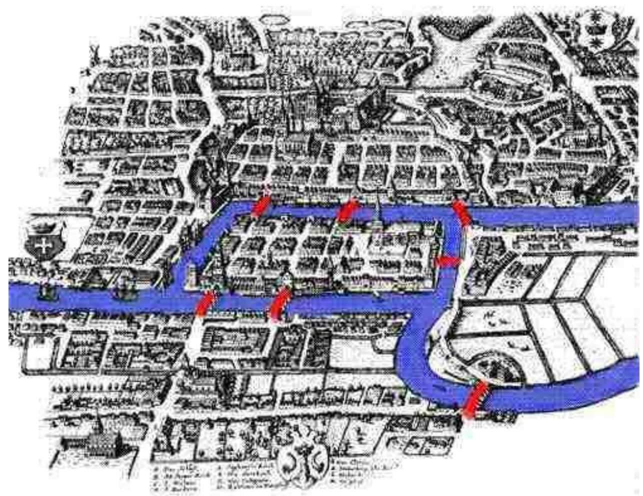


***Figura* 3.**

En 1736, Euler publica un artículo con la solución al famoso *Problema de los puentes de Konigsberg*, titulado *"Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis"* ("Solución de un problema relacionado con la geometría de posición"). El título ya indica que Euler es consciente de que está trabajando con una clase diferente de matemática, en la que la geometría ya no es importante.

Euler demuestra que es imposible atravesar los siete puentes de *Konigsberg* pasando exactamente una vez por cada uno de ellos. Para ello, traduce el problema en otro en el que intervienen vértices (uno por cada región que podemos caminar a pie) y aristas (una por cada puente) como se muestra en la *figura* 4.

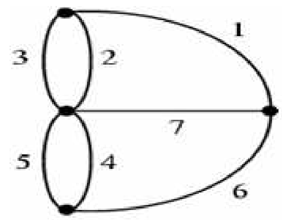


***Figura* 4.**

El problema de los puentes de *Konigsberg* dio origen a lo que hoy llamamos Teoría de Grafos[1].

Se trata pues de encontrar un camino[2], que pase por todas y cada una de las aristas, una y sólo una vez, (o, dicho de otro modo, dibujar la figura sin levantar el lápiz del papel), un Grafo con esta propiedad se conoce como hoy en día como *Grafo Euleriano*.

El problema en general tiene solución si y sólo si tal figura contiene como mucho dos vértices con un número impar de aristas. Esto no ocurre en el caso de los puentes de *Konigsberg*.

Ciertamente, la resolución de Euler del problema utiliza una forma de pensar totalmente topológica, y la solución del problema nos lleva a la característica de Euler,

[1] *Un grafo G es un par G = (V, E), donde V es un conjunto finito (vértices, nodos) y E es un multiconjunto de pares no ordenados de vértices, denotados por* (*x, y*), *que se denominan lados, aristas.*

[2] *Este término se utiliza cuando se trabaja con Digrafos o grafos dirigidos, estos son grafos donde los caminos deben realizarse de acuerdo a la dirección de los lados.*

el primer invariante de la Topología Algebraica, pero sería muy arriesgado y arbitrario fechar en ese momento la aparición de la Topología.

El siguiente paso en ésta *liberación* de la matemática también se debe a Euler. En 1750 escribe una carta a C. Goldbach (1690-1764) en la que da la famosa *fórmula de Euler para un poliedro*[1], algunos ejemplos se muestran en la *figura* 5.

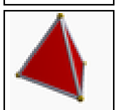
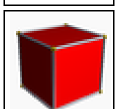
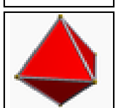
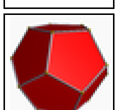
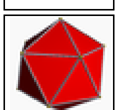
Nombre	**Imagen**	**Vértices** v	**Lados** l	**Caras** c	**Característica de Euler** $v - l + c$
Tetraedro		4	6	4	**2**
Hexaedro o cubo		8	12	6	**2**
Octaedro		6	12	8	**2**
Dodecaedro		20	30	12	**2**
Icosaedro		12	30	20	**2**

***Figura* 5.**

1 , *donde* v *es el número de vértices del poliedro,* l *es el número de lados (o aristas) y* c *el número de caras*.

La fórmula, de asombrosa simplicidad, parece que fue olvidada por Arquímedes (287 AC - 212 AC) y René Descartes (1596 - 1650), aunque los dos escribieron extensamente sobre poliedros.

La razón debe ser que, para todo el mundo antes de Euler, parecía imposible pensar en propiedades geométricas sin que la medida estuviera involucrada. Euler publica los detalles de esta fórmula en 1752 en dos artículos, donde además da una demostración basada en la disección de sólidos en *rodajas tetraédricas*. Pero Euler pasa por alto algunos problemas en su prueba; por ejemplo, supone que los sólidos son convexos.

Pero el suizo, Simon Antoine Jean Lhuilier (1750-1840) continúa el camino iniciado por Euler con su fórmula poliédrica. En 1813, Lhuilier publica un importante trabajo, donde indica que la fórmula de Euler es falsa para sólidos con asas sobre ellos: si un sólido tiene g asas (un *asa* es un toro adjuntado al espacio), como se muestra en la *figura* 6, Lhuilier prueba que la fórmula se escribe , donde g representa el número de agujeros del poliedro. Este es el primer resultado conocido sobre *invariantes topológicos*.

***Figura* 6.**

El término *topología*, fue usado por primera vez por el alemán Johann Benedict Listing (1806-1882), en 1836 en una carta a su antiguo profesor de la escuela primaria, Müller, y posteriormente en su libro "Vorstudien zur Topologie" (Estudios previos a la topología), publicado en 1847, que fue la primera publicación acerca de los conceptos topológicos.

Alumno de Gauss (1777-1855) en 1834 y posteriormente profesor de física en Göttingen, mantuvo una estrecha correspondencia con Gauss durante los diez años anteriores a su primera publicación acerca de las ideas topológicas. Aunque el propio Gauss no publicó nada acerca de la topología, fue una gran influencia en los trabajos de Listing ya que estaba a favor del estudio de las propiedades básicas de las figuras geométricas. Listing continuó con sus investigaciones en topología y en 1858 publicó una serie de artículos bajo el nombre de *"Der Census Raümlicher Complexe"* (Censo ordenado de los Complejos), donde Listing trataba leyes cualitativas de las figuras geométricas.

A pesar de los esfuerzos de Listing, el primero que formuló de manera apropiada la naturaleza de las ideas topológicas fue el alemán August Ferdinand Moebius (1790 – 1868), ayudante de Gauss en 1813. Moebius había clasificado varias propiedades geométricas como proyección, afinidad, similitud y orientabilidad. Publicó sus trabajos en 1863 bajo el nombre de "*Theorie der elementaren Verwandschaft*" ("Teoría elemental de la relación"). La idea fundamental que propuso fue: "*el estudio de las* *relaciones entre dos figuras que estaban en correspondencia 1-1 y tales que, puntos cercanos correspondían a puntos cercanos".*

Trabajó con los resultados establecidos para poliedros, haciendo hincapié en que un poliedro puede ser considerado como una colección de polígonos 2 - dimensionales los cuales pueden ser triangularizados (ver *figuras* 7*a* y 7*b*), permitiendo entender un poliedro como una colección de triángulos. Esta idea ha resultado ser básica para la topología, demostrando que algunas superficies (variedades 2 - dimensionales) pueden ser desarrolladas como polígonos con una identificación apropiada de caras.

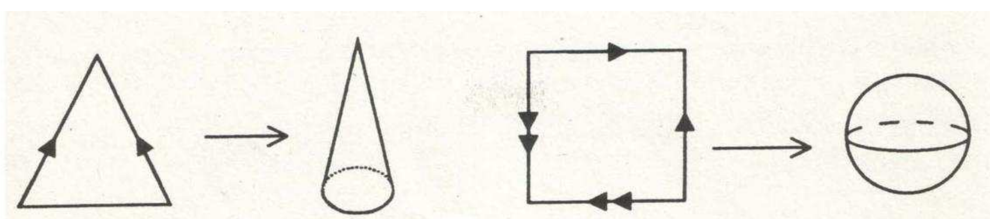


Figura 7a.

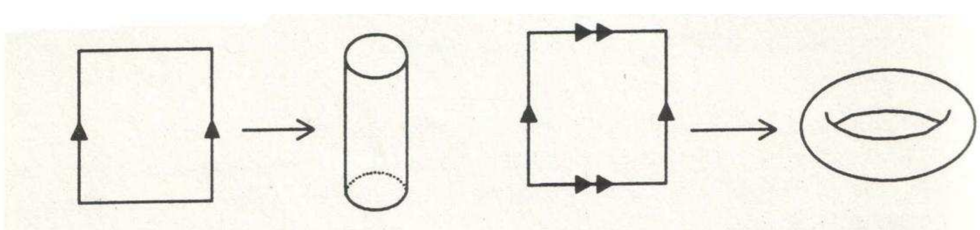


Figura 7b.

Es claro que una circunferencia contenida en un plano, divide a éste en dos regiones, una interior y otra exterior. Esta propiedad se sigue cumpliendo si deformamos continuamente la circunferencia en un cuadrado o un triángulo, o en general en cualquier curva cerrada que no se corte a sí misma.

Uno de sus aportes más conocidos es la banda de Moebius (1858), sin embargo Listing en1861, publica otro artículo, en el cual describe la banda (cuatro años antes que Moebius) y estudia la noción de *conexión* de las superficies.

A continuación se presenta una ilustración de la banda de Moebius:

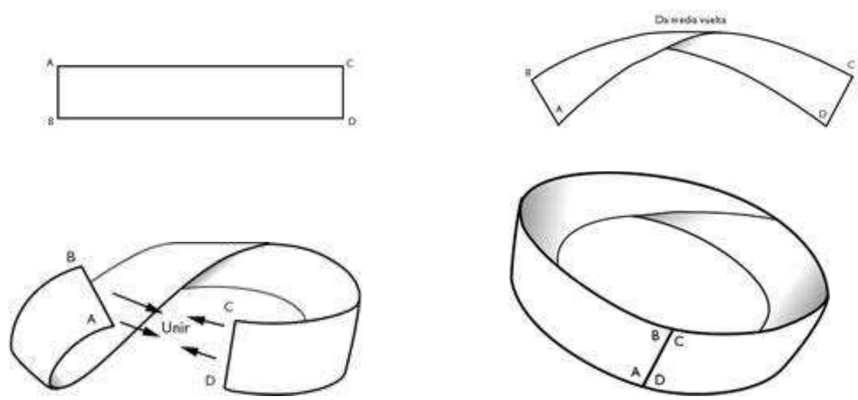


***Figura* 8.**

Las características de la Banda de Moebius son:

1. Si nos ponemos a caminar sobre ella, veremos que algunas veces estaremos caminando por el interior y otras por el exterior, ya que tiene una sola cara.

2. Tiene una sola orilla.
3. Si cortamos la cinta a la mitad obtenemos una banda con el doble del tamaño. Como se muestra en *figura* 9. Esto se debe a que, dado que se tiene una orilla, al hacer el corte por la mitad hacemos la otra orilla y, por lo tanto, obtenemos una sola banda.

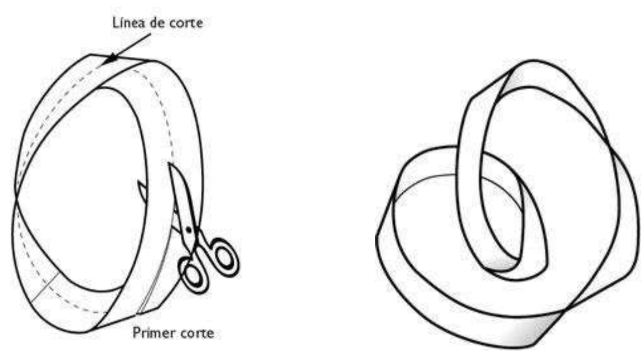


***Figura* 9.**

4. Si nuevamente cortamos a la mitad la banda resultante, se forman dos bandas, ver *figura* 10, las cuales no son de Moebius y están entrelazadas.

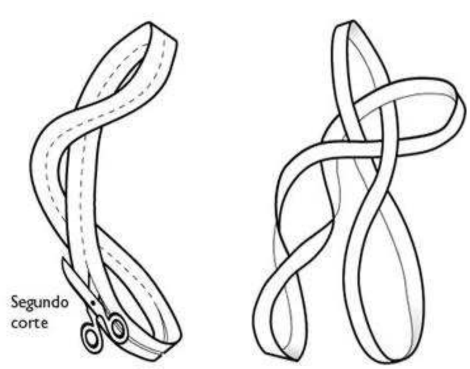


***Figura* 10.**

Al observar cuidadosamente, la media vuelta eliminó uno de los lados, es sorprendente.

Una forma de ver esto, es trazando una línea recta a lo largo de la banda de Moebius y continuándola hasta el punto de partida. Al separar los bordes de donde estaba unida la cinta se verá que ambos lados han sido recorridos por la línea recta, aun cuando al trazarla, no se cruzó ninguno de los bordes (orillas). En una banda normal habría tenido que cruzar una de las orillas para poder pasar del otro lado.

Si se corta la Banda de Moebius con cortes simultáneos, como se muestra en la *figura* 11, se genera una sucesión de forma natural, esta es una de las variadas aplicaciones que se le pueden atribuir a dicha banda.

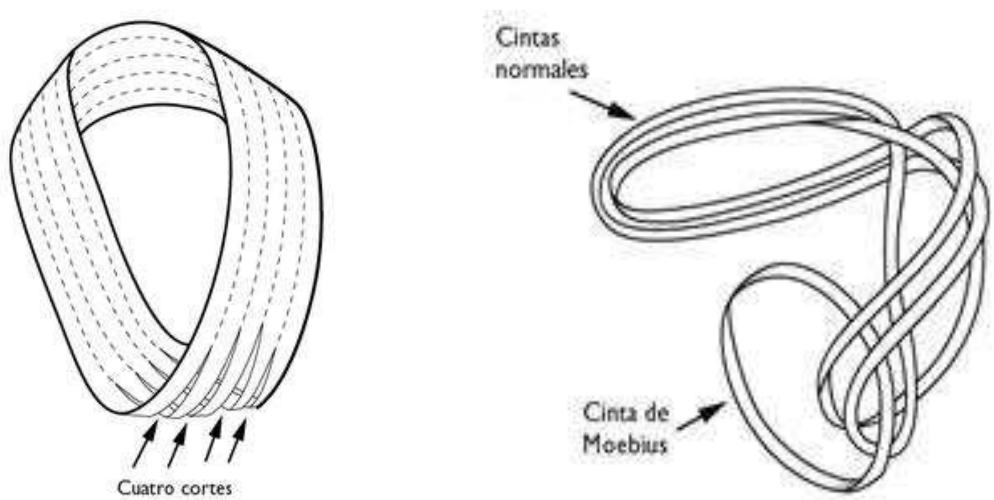


***Figura* 11.**

Con un corte ocurre lo que ya sabíamos (característica 3 de la Banda de Moebius); ahora con dos cortes, se formarán dos bandas, pero una pequeña y otra grande. Si realizamos tres cortes, se forman 4 bandas, pero del mismo tamaño.

Al realizar 4, 5, 6, o más cortes, se genera una sucesión, la cual está representada en la tabla de la *figura* 12.

<table>
<tr><td colspan="2">Número de cortes</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>. . . n</td></tr>
<tr><td colspan="2">Número de bandas</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tamaños</td><td>Grande</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>Pequeña</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td colspan="2">Término de la sucesión A_n</td><td>1</td><td>1.5</td><td>2</td><td>2.5</td><td>3</td><td>3.5</td><td>4</td><td>. . .</td></tr>
</table>

***Figura* 12.**

En la tabla se observa que el número de cortes está asociado con el conjunto de los números enteros y está relacionado con el tamaño de la banda; también se puede ver que el tamaño de las bandas depende de que el corte sea par o impar, diferenciándose en que cuando el corte es par, las bandas son una pequeña y las grandes van aumentando a razón de los números enteros y cuando es impar, todas las bandas son del mismo tamaño. De esta manera, haciendo estas consideraciones, podemos encontrar la sucesión de Moebius dada por la fórmula:

Donde n representa el número de cortes que se le han efectuado a la banda.

Otro trabajo a destacar en el desarrollo de la topología se debe al matemático alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) sobre la teoría de funciones de variable compleja introduciendo las superficies de Riemann y tratando aspectos como la conexión de tales superficies.

Otros problema que favoreció el desarrollo de la topología, pero en este caso mucho más complicado, es: **el Problema de los cuatro colores.** En 1850 Francis Guthrie (1831-1899) pregunto a su hermano Frederick, en aquel momento estudiante de Augustus de Morgan, el porqué cuatro colores bastaban para colorear cualquier mapa, esto es, sin que dos países colindantes tuviesen el mismo color, como se muestra en la *figura* 13, que aunque no es un mapa ilustra perfectamente el punto que se quiere tratar.

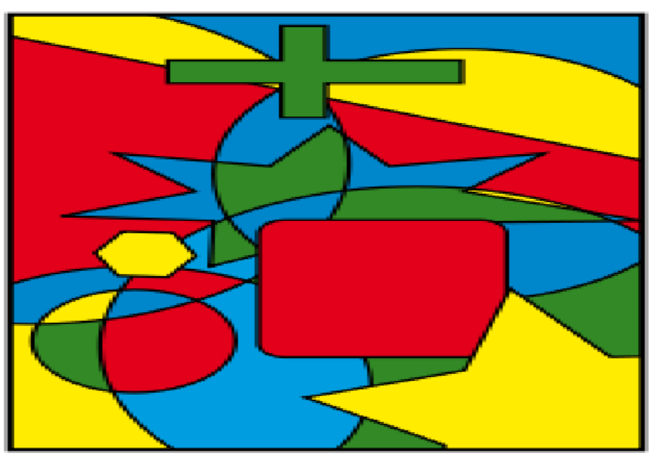


***Figura* 13.**

Más tarde en 1852 Guthrie hizo de esa conjetura un teorema conocido hoy en día como: **El Teorema de los cuatro colores**[1].

En 1996, N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour y R. Thomas (Instituto de Tecnología de Georgia), publican la prueba del teorema de los cuatro colores, utilizando para ello un ordenador que necesito 1200 horas de complejos cálculos, y demás probaron que es igualmente cierto para mapas dibujados sobre una esfera.

Gracias a todo ese empuje, que los matemáticos de la época le dieron a la Topología hoy en día esta cuenta con varias ramas, que fueron surgiendo a través del tiempo, se suelen considerar principalmente tres ramas:

- la Topología General o Topología Conjuntista,
- la Topología Algebraica
- la Topología Diferencial.

Además de estas tres ramas, que podríamos decir propiamente topológicas, la implicación en mayor o menor medida en otras disciplinas matemáticas hacen que muchos consideren parte de la Topología al Análisis Funcional, la Teoría de la Medida, la Teoría de Nudos (parte de la Topología de dimensiones baja), la Teoría de Grupos Topológicos, entre otras.

[1] *"Para colorear cualquier mapa geopolítico plano (suponiendo cada país formado por un único trozo), de tal modo que dos países con frontera común sean de distinto color, basta (como máximo) con cuatro colores"*

La topología proporciona contribuciones fundamentales a: la Teoría de Grafos, Análisis Matemático, Ecuaciones Diferenciales, Ecuaciones Funcionales, Variable Compleja, Geometría Diferencial, Geometría Algebraica, Álgebra Conmutativa, Estadística, Teoría del Caos, Geometría Fractal... Incluso tiene aplicaciones directas en Biología y Sociología.

La topología General o de conjuntos, comienza con la teoría de funcionales; iniciada por el italiano Vito Volterra (1860 – 1940) en trabajos del cálculo de variaciones, las funciones por sí mismas, se entendían como puntos de un espacio en el cual se podían definir vecindades y límite de sucesiones de puntos.

El nacimiento del análisis funcional con la introducción de espacios de Hilbert (llamados así en honor al alemán David Hilbert (1862 – 1943) y de Banach (en honor al polaco Stefan Banach (1892 – 1945), dio una importancia adicional al estudio de conjuntos. Las propiedades que demostraron ser relevantes para el análisis funcional, son de naturaleza topológica. El francés Maurice Fréchet (1878 – 1973) señaló que: *se pueden construir funciones equivalentes a la distancia euclídea*, e introdujo varios conceptos diferentes que le permitían definir puntos límite de una sucesión de puntos. Generalizó la noción de distancia e introdujo la clase de los espacios métricos. Sin embargo, es posible entender las vecindades como subconjunto, de un conjunto dado caracterizándolas en cierto sentido e incluso sin la introducción de una métrica. Tales espacios decía, tienen vecindades topológicas. Es una generalización de espacios métricos.

El matemático Félix Haussdörf (1868-1942), publica en 1914 "*Grundzüge der Mengenlehre*" (Principios de teoría de conjuntos) y construye, la teoría definitiva de espacios abstractos.

Haussdörf define un espacio topológico, como un conjunto de elementos x junto con una familia de subconjuntos $U(x)$ asociados con cada punto. A estos subconjuntos los llamó vecindades y eran tales que cumplían las siguientes condiciones:

- Para cada elemento x existe $U(x)$ tal que $x \in U(x)$
- La intersección de dos vecindades de x contiene una vecindad de x
- Si existe $U(y)$ tal que
- Si existen $U(x)$, $U(y)$ tales que (esta propiedad se conoce hoy en día como $T2$ ó Hausdorff)

Además introdujo los axiomas de numerabilidad:

- Para cada elemento x, existe una colección numerable de vecindades que contienen a x.
- El conjunto de todas las vecindades es numerable.

A partir de aquí se definen los conceptos habituales básicos para la topología tales como: conjunto abierto, conjunto cerrado, conjunto compacto, conjunto conexo o punto límite. Con estos conceptos, se pueden definir a su vez, transformaciones continuas y homeomorfismos. Por ejemplo una transformación continua es aquella: que asocia a cada punto de un espacio un único punto del espacio imagen y tal que para cualquier vecindad de un punto en la imagen $U(f(x))$, existe una vecindad del punto en el origen que contiene a la imagen inversa de la vecindad en la imagen.

Este concepto no es más que una generalización de la definición $\varepsilon - \delta$ de función continua dada por el francés Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857). Las propiedades que permanecen bajo homeomorfismos[1] se llaman invariantes topológicas.

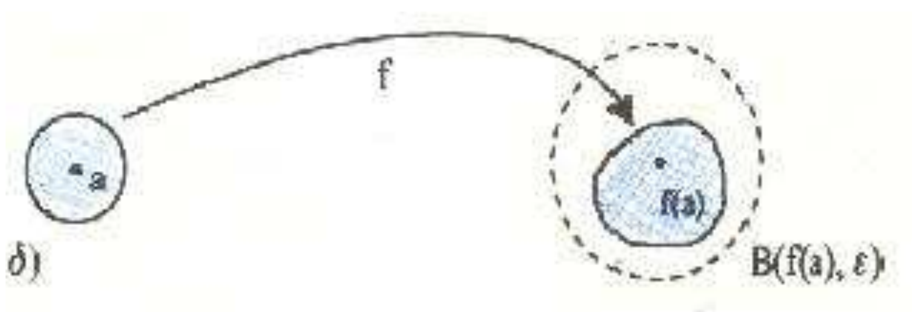


***Figura* 13.**

[1] *Un homeomorfismo es una correspondencia* 1 – 1 *continúa en ambas direcciones.*

Además Haussdorf añadió la noción de completitud de un espacio la cual había introducido Fréchet en 1906, que establecía, que un espacio es completo si toda sucesión de Cauchy tiene límite.

La introducción de espacios abstractos se mostraba de gran interés para la investigación, por ejemplo: ¿Un espacio topológico es necesariamente metrizable? ¿Es posible introducir una métrica que conserve la estructura del espacio de manera que puntos límite continúen siendo puntos límite?

Un resultado destacado en este sentido es el trabajo del ruso Pável Samuílovich Uryson (1898-1924) que establece que cada espacio topológico normal puede metrizado. Un espacio normal es aquel en el que dos cerrados disjuntos pueden ser encerrados respectivamente en abiertos disjuntos.

El contenido de la topología de conjuntos sigue siendo enormemente activo. Su relativa facilidad para introducir especificaciones y variaciones, permite generalizar los axiomas básicos de varios tipos de espacios.

La topología general es una de las ramas más abstractas de las matemáticas en la que se estudia el concepto de continuidad, empezando con los espacios euclídeos, pasando a los espacios métricos y llegando después a espacios más generales que tienen su origen en análisis funcional, probabilidad, ecuaciones diferenciales, etc. Los objetos de estudio de la topología general son: las propiedades de los espacios invariantes respecto a las transformaciones biyectivas continuas con inversa también continua, los denominados homeomorfismos. Aparte del estudio de las propiedades invariantes respecto a homeomorfismos, las denominadas propiedades topológicas, también son de gran importancia las propiedades que se preservan bajo cualquier transformación continua.

A partir de la segunda mitad de los años sesenta del siglo XX, con la demostración por parte del matemático estadounidense Paul Joseph Cohen (1934 – 2007) de la consistencia de la negación de la Hipótesis del Continuo, con los axiomas de la teoría de conjuntos, se aumenta la influencia de la teoría de conjuntos sobre la topología general de una forma sorprendente. Si bien es cierto, que las dos ramas nunca se han divorciado. A partir de los años setenta esta unión se ha intensificado en una tendencia que dura por lo menos tres décadas. No sólo los topólogos, sino también un buen número de especialistas en análisis matemático y análisis funcional empiezan a estudiar lógica matemática ya que los métodos tradicionales no se habían mostrado ineficaces.

Recíprocamente, los especialistas en la teoría de conjuntos, hacen incursiones en la topología general y, en particular, en la teoría de cardinales invariantes (una rama de la topología general con mucho auge en los años 1960 - 1980). Los resultados de esta interrelación aparecen muy pronto. Una gran cantidad de problemas "añejos" se resuelven gracias a esta simbiosis.

Desde el nacimiento de la topología general, al inicio del siglo XX nunca se pierden los lazos estrechos de la rama con sus orígenes: el análisis matemático, la lógica matemática y el análisis funcional. No queda al margen de esta tendencia la rama más antigua de las matemáticas, el álgebra, con la cual la topología encuentra una interrelación sorprendentemente, firme y profunda. Uno de los resultados más visibles de estos lazos es: el nacimiento de la topología algebraica. Otro resultado de esta conexión es la aparición de lo que se denomina actualmente como álgebra topológica. Esta rama incluye el estudio de grupos topológicos, anillos y cuerpos topológicos y, en general, los sistemas algebraicos continuos. Entre las direcciones de investigación de mayor impacto se encuentra la dinámica topológica, donde se dan la mano ideas y conceptos algebraicos, geométricos y topológicos.

Así, la topología general suministra los conceptos, herramientas e ideas relacionadas con la continuidad a todas las ramas de las matemáticas, hasta algunas de las más alejadas de la propia topología general. También es muy fructífera la interrelación de métodos e ideas entre la lógica matemática y la topología general, donde el concepto de compacidad juega el papel de puente entre ambas ramas, siendo en muchas ocasiones absolutamente imposible trazar la frontera entre ésta y la teoría de conjuntos. Cabe mencionar que métodos topológicos se aplican con mucha eficacia en el procesamiento y reconocimiento de imágenes, la compresión de información (especialmente en casos multidimensionales), el estudio de algoritmos, y en la programación teórica.

De manera que en la Topología general o conjuntista se desarrolla toda la base teórica necesaria para continuar expandiendo sus aplicaciones en las otras ramas. Y debido a la naturaleza de nuestro estudio, haremos un recorrido más minucioso de esta Topología en los posteriores capítulos; para luego estudiar otra de las ramas de la Topología como lo es la Topología Algebraica.

La Topología algebraica es: el estudio de objetos algebraicos que constituyen invariantes de aspectos cualitativamente intrínsecos de espacios topológicos, es decir, que estudia ciertas propiedades relacionadas con la conexión de un espacio, propiedades que podríamos describir como la "porosidad" de un espacio, la cantidad de boquetes que presenta. Para ello se vale de instrumentos algebraicos, fundamentalmente la Teoría de Grupos y el Álgebra Homológica, hasta tal punto que su desarrollo es totalmente algebraico.

Fue Henri Poincaré quien introdujo en su artículo "Analisis Situs" (Análisis de Posición) el grupo fundamental precisamente para diferenciar las superficies de Riemann, en la que se incluyen la esfera y el toro). Esto forma un hito en la historia de la Topología, dado que nace lo que llamamos **Topología Algebraica**, que intenta estudiar los objetos geométricos asociándoles estructuras algebraicas, tratando así de pasar a un campo más sencillo donde trabajar.

Otras aplicaciones que tiene la topología se mencionan a continuación:

La teoría de nudos. La técnica de tejido, que precisa cruces y anudados de hilos, se conoce ya en el neolítico. Aún en épocas anteriores, existen ya métodos que permiten unir una lámina de *silex* a su mango, con tripas, nervios de animales o fibras vegetales. Lamentablemente, la descomposición de todas estas ligaduras orgánicas no permitirá nunca conocer con precisión la edad de los primeros nudos...

En la época actual, los marinos se han apropiado de esta técnica, esencial para su trabajo. En 1944, el pintor C.W. Ashley (1881-1947) describe y dibuja en su libro "El libro de los nudos de Ashley" exactamente 3,854 nudos.

Los nudos están presentes en ámbitos tan dispares como la decoración, la industria textil, la magia, el alpinismo o la cirugía. Su estudio matemático permite en la actualidad ver su relación con la física, la química o la biología molecular.

Para el matemático y especialmente para el topólogo, un nudo es una curva continua, cerrada y sin puntos dobles. Esta curva está situada en un espacio de dimensión tres y se admite que pueda ser deformada, estirada, comprimida, pero está prohibido hacer cortes.

Cuando se puede, a través de manipulaciones de este tipo (es decir, por medio un homeomorfismo) pasar de un nudo a otro, se dice que son equivalentes.

En general, es muy difícil decidir cuando dos nudos son equivalentes, y gran parte de la teoría de nudos está precisamente dedicada a intentar resolver esa cuestión. Por ejemplo, el nudo trivial (no hay nudo) equivale a este otro de apariencia complicada:

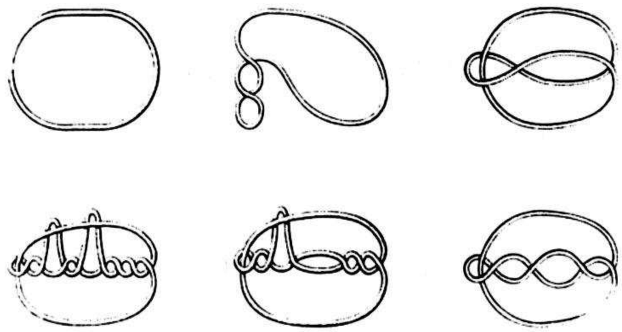
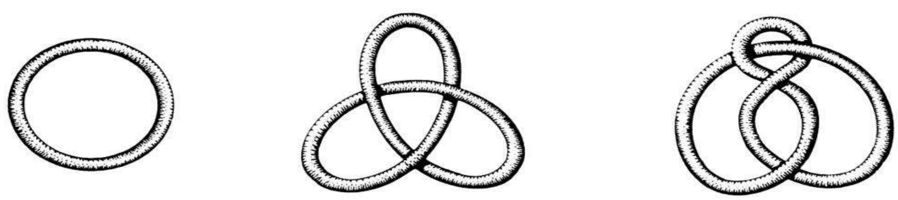


Figura 14.

Los nudos están catalogados teniendo en cuenta su complejidad. Una medida de la complejidad es el número de cruce, es decir, el número de puntos dobles en la proyección plana más simple del nudo. El nudo trivial tiene número de cruce cero. El trébol y la figura de ocho son los únicos nudos con número de cruce tres y cuatro, respectivamente como se muestra en la *figura* 15.



Nudo trivial **Nudo trébol** **Nudo figura de ocho**

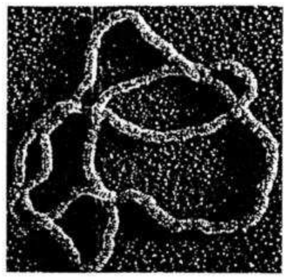
***Figura* 15.**

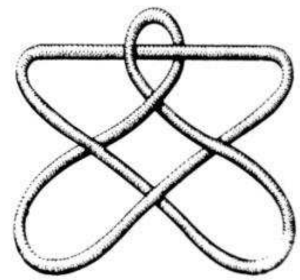
Hay dos nudos con número de cruce cinco, tres con seis y siete con número de cruce siete. Pero el número crece radicalmente: hay 12,965 nudos con trece o menos cruces en una proyección minimal, y 1,701,935 con dieciséis o menos cruces...

Los nudos se pueden sumar, restar, multiplicar e incluso dividir (el álgebra de los nudos). Pero cuando los nudos se complican, su simple descripción no basta para distinguirlos. Así, partiendo de su forma (la geometría del nudo), se han desarrollado fórmulas que funcionan para todos los nudos, hay invariantes topológicos que se obtienen al estudiar el complementario del nudo...

En la biología molecular, el ADN, el material genético más importante en la mayoría de los organismos, se ve habitualmente como una doble hélice, en la que dos cadenas de nucleótidos complementarios se enrollan a lo largo de un eje común. El eje de esta hélice doble no es lineal, sino curvo. La doble hélice puede moverse en el espacio para formar una nueva hélice de orden mayor; en este caso se habla de ADN sobre enrollado. Parece que una gran parte de los ADN conocidos se muestran de esta manera sobre enrollada en algún momento del ciclo de su vida.

El ADN circular sobre enrollado es una doble hélice de moléculas, donde cada cadena de polinucleótidos forma un anillo. Cada propiedad física, química y biológica del ADN (comportamiento hidrodinámico, en ergético, ...) es afectado por la circularidad y las deformaciones asociadas al sobre enrollamiento como se muestra en la *figura* 16.





Fotografía ADN **Nudo que la representa**

***Figura* 16.**

La comprensión del mecanismo del sobre enrollamiento y las consecuencias de estas características estructurales para el ADN, es un problema matemático bastante complejo, que hace intervenir dos ramas de la matemática: la topología y la geometría diferencial.

Para estudiar matemáticamente el sobre enrollamiento, hay que construir un modelo en el que la estructura se represente como un estrecho lazo torcido de espesor infinitesimal.

Por ello, es necesario describir los nudos, encontrar características esenciales que permitan distinguirlos, en otras palabras, clasificarlos sin riesgo a confusión. Estas características, que deben permanecer inalterables a lo largo de la deformación del nudo, se llaman invariantes del nudo.

En el estudio de la replicación del ADN celular, se encuentran sacos de nudos. El ADN está más o menos enrollado sobre si mismo y en el momento de la replicación se forman nudos que están controlados por proteínas que se llaman topoisomerasas. Conociendo mejor estas proteínas y su interacción con el ADN, se abren nuevas perspectivas en la lucha contra las enfermedades genéticas, los virus, las bacterias o el cáncer.

Estudios recientes de las ecuaciones que determinan flujos (como el de la atmósfera alrededor de nuestro planeta) muestran como las partículas pueden moverse en complicados caminos de nudos (como se muestra en la *figura* 17) .

Combinando la teoría de nudos con la teoría física de cuerdas, se ha podido dar una descripción unificada de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza: gravedad, electromagnetismo, y las interacciones fuertes y débiles entre partículas.

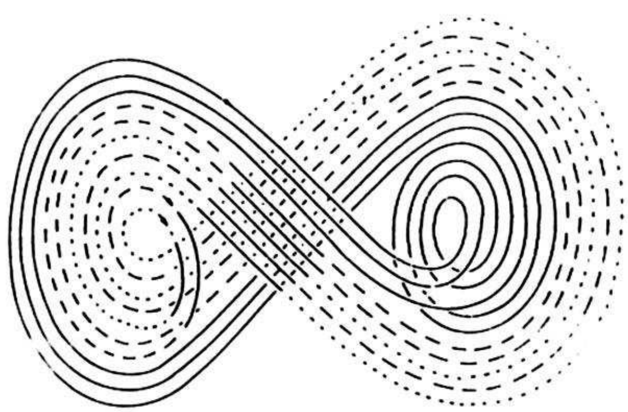


***Figura* 17.**

Los químicos crean en el laboratorio moléculas anudadas, cuyas propiedades les permiten modificar su forma o desplazarse en función de factores eléctricos, químicos o luminosos, decididos por la persona que dirige la experiencia. Estas nuevas moléculas se parecen en algunas ocasiones a aquellas que, en la naturaleza, estuvieron en el origen de la vida. Otras, permiten imaginar memorias para futuros ordenadores moleculares y ya no electrónicos.

Otra de las aplicaciones de la topología se ve en**: La psicologia toplogica vectorial de Kurt Lewin**. En la teoría guestáltica, todo ambiente es visto como una combinación de figura y fondo, es decir, entre aquello a lo que se presta atención y lo que está en segundo plano.

El psicólogo alemán Kurt Lewin (1890-1947) desarrolló su teoría del campo con el planteamiento fundamental de que el efecto de las fuerzas psicológicas que actúan simultáneamente en un campo psicológico produce una reorganización del mismo y, por tanto, proporciona las bases de la conducta psicológica.

El concepto fundamental de la teoría del campo es el espacio vital. Este concepto incluye todo lo que se necesita conocer sobre una persona, para comprender su conducta concreta en un ambiente psicológico determinado y en un determinado momento. Por lo tanto, el espacio vital incluye a la persona y a su ambiente psicológico. Es decir, si queremos comprender el comportamiento de una persona no es suficiente conocer a la persona o a su ambiente por separado, es preciso conocerlos a ambos.

La psicología de campo de Lewin es también llamada psicología topológica vectorial. En ella, aparecen conceptos provenientes de otras disciplinas, tales como la geometría y la física. De la geometría adopta el concepto "topología" y de la física el concepto "vector", dándoles sin embargo una significación algo diferente. Los conceptos fundamentales entonces de la psicología del campo son: espacio vital, topología y vector.

Con estas y otras ciencias, la topología tiene una estrecha relación que se ha visto favorecida a través del tiempo, ya que el desarrollo de una favorece al desarrollo de la otra que, en este caso es la topología y viceversa, lo cual le ha permitido a la topología alcanzar un desarrollo muy grande en poco tiempo, si la comparamos con el álgebra y la geometría y se espera que este desarrollo se mantenga constantemente y así permitirle alcanzar un estatus en la matemática acorde a sus aplicaciones.

1.2 Algebra de conjuntos.

En esta sección se retomaran las ideas básicas de la teoría de conjuntos, además de establecer la terminología y notación que se adoptara, en el presente trabajo. Se hace la aclaración, que el estudio de conjuntos que realizaremos en esta y las posteriores secciones de este capítulo, mas bien es un recorrido descriptivo ya que no se entrará en detalle al análisis o discusión de las definiciones y teoremas que plantearemos, simplemente por la naturaleza del trabajo que esta enfocado en la topología, pero tampoco podemos obviar la teoría de conjuntos ya que para el estudio de la topología general es indispensable.

Notación básica.

Generalmente para representar conjuntos se utilizan letras mayúsculas A, B, C, … y para los elementos que pertenecen a estos, letras minúsculas a, b, c, …

Sea X un conjunto. Si x ***es un elemento de*** X, se denota por . De la misma forma, denotará que x ***no es un elemento de*** X. El ***conjunto vacío*** es el conjunto que no posee elementos. Cuando se utilice la expresión $x = y$, se está diciendo que x y y representan al mismo objeto o elemento, según sea el caso, similarmente, la expresión $A = B$ se utilizará para indicar que A y B son representaciones diferentes del mismo conjunto, es decir que A y B están formados por los mismos elementos.

Si *x*, *y* son objetos diferentes, esta situación será denotada , y si *A* y *B* son conjuntos diferentes, se representará . Además para decir que A es ***subconjunto*** de X, lo representaremos , que significa que "***cada elemento de A es también un elemento de X***", lo cual se plantea en la siguiente definición.

Definición 1.2.1 Dados los conjuntos *A* y *B*. Se dice que *A* está contenido en *B*, , si para cada , es . Y se dirá que *A* es igual a *B*, , si y .

De la definición anterior podemos notar que, si no necesariamente implica que y cuando este sea el caso, lo representaremos y diremos que *A* es un ***subconjunto propio*** de *B*.

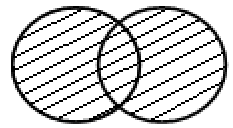
Si el conjunto *X* tiene pocos elementos, será posible enumerarlos, es decir, si el conjunto *X* está formado por los elementos *x*, *y* y *z*, lo representaremos , pero cuando el conjunto tiene muchos elementos, incluso si tiene infinidad de elementos se pueden expresar mencionando alguna propiedad que estos cumplan, por ejemplo, el conjunto de los enteros no negativos lo podemos representar

en lugar de

A continuación se definen las operaciones entre conjuntos:

Definición 1.2.2 Si y . La ***unión*** de *A* y *B*, que se representa , está dada .

La definición anterior se ilustra en el siguiente diagrama:

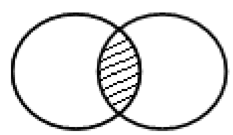


De la definición anterior se concluye que .

Definición 1.2.3 Si y . La ***intersección*** de *A* y *B*, que se representa por , está dada .

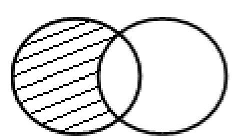
De donde se concluye que . Además *A* y *B* se dicen *disjuntos* si , es decir, que no tienen ningún elemento en común.

La definición se ilustra en el siguiente diagrama:



Definición 1.2.4 Si . La ***diferencia o complemento*** de *A* en *B*, que se representa por , está dada .

La definición se ilustra en el siguiente diagrama:



Las propiedades fundamentales de las operaciones entre conjuntos son:

(i) ***Leyes idempotentes****:* y ;

(ii) ***Leyes asociativas****:* y ;

(iii) ***Leyes conmutativas****:* y ;

*(iv) L****eyes distributivas****:* y

;

(v) ***identidades****:* , y ;

(vi) ***Propiedades del complemento****:* ,

y ;

*(vii) L****eyes de De Morgan****:* y

.

Hasta este momento solamente hemos mostrado lo que es un conjunto, algunas de las operaciones y propiedades que estos cumplen, ahora consideraremos una forma diferente de construir conjuntos y es, formando subconjuntos con los elementos del conjunto original, por ejemplo, si , podemos formar otros conjuntos con los elementos de *A* que sean subconjuntos de *A*, es decir , , , , , , y por su puesto el conjunto vacío como subconjunto de todo conjunto, todos estos conjuntos formados con los elementos de *A* tienen en común que, son todos subconjuntos de *A*. La colección de subconjuntos formados de esta manera recibe un nombre especial, como se plantea en la definición siguiente:

Definición 1.2.5 Se llama ***partes*** de X o ***conjunto potencia*** de X al conjunto de todos los subconjuntos de X, y se denota por $\mathcal{P}(X)$. Es decir, A X si y sólo si A $\mathcal{P}(X)$.

De la definición anterior, se desprende el hecho de que, hasta este momento solamente se han planteado operaciones y propiedades para dos y tres conjuntos, pero en el caso de la unión e intersección de conjuntos no hay ninguna razón que nos impida extenderlas a una cantidad arbitraria o familia de conjuntos.

Definición 1.2.5 Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos no vacíos. Definimos la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ como

Definición 1.2.6 Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos no vacíos. Definimos la intersección de los elementos de $\mathcal{A}$ como

De manera que, las leyes de De Morgan enunciadas en la propiedad (*vii*) en términos de las uniones e intersecciones planteadas en las dos definiciones anteriores, y utilizando para denotar el complemento de A, se pueden expresar como:

1.3 Funciones

La noción de función es de todo estudioso de matemática conocida por lo que en esta sección solo la exploraremos junto con algunos de los conceptos asociados. Generalmente, una función se concibe como una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A, llamado ***dominio***, un elemento de un conjunto B, llamado ***rango*** ó ***imagen***, pero mas formalmente veremos este hecho en la siguiente definición.

Definición 1.3.1 Una ***aplicación*** o ***función*** , es una correspondencia que asocia a cada , un elemento y sólo uno de B, que se denota por $f(x)$.

En una función, al conjunto formado por los $f(x)$ se les llama ***imagen o rango*** de x bajo f y el conjunto A recibe el nombre de ***dominio***. Además, el conjunto B recibe el nombre de ***conjunto de llegada***.

Así como en los conjuntos se pueden definir propiedades y operaciones, de manera semejante se pueden definir con las funciones.

Definición 1.3.2 Sea la función . Se dice que f es la ***función identidad*** si para cada , existe un y solo un elemento de A, tal que .

En muchos textos que tratan sobre funciones, la función identidad recibe una notación especial, en nuestro estudio dicha notación puede variar, pero de ser el caso se hará la aclaración para no crear confusión.

Definición 1.3.3 Sean y la función . Se dice que *f* es la ***función inclusión*** si .

Definición 1.3.4 Sea la función . Se dice que *f* es la ***función constante*** si para cada , se cumple que , donde es un punto fijo de *B*.

Definición 1.3.5 Sean la función y . Se dice que *f* es la ***función restricción***, y se representa , si , tal que para cada se satisface .

La notación se lee: "*f* restringida a ".

Definición 1.3.6 Dadas las funciones y . Se llama ***función composición*** de las aplicaciones y , a la función que a cada , le hace corresponder , y se denota es decir que, la composición de y es la función , se satisface .

De manera mas formal es una función cuya regla es , donde el rango de , es un subconjunto de .

Definición 1.3.7 Se dice que una función es ***inyectiva*** o ***uno a uno*** si para cada , con , se cumple que .

Definición 1.3.8 Se dice que una función es ***sobreyectiva*** si , es decir, para cada , existe un tal que .

Definición 1.3.9 Se dice que una función es ***biyectiva*** si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

Otra manera de ver la biyectividad es: Si entonces . Si una función es biyectiva se dice también que es una función correspondencia uno a uno.

Definición 1.3.10 Sea una función biyectiva . Se llama ***función inversa***, y se representa , a la función tal que si y sólo si .

De la definición anterior podemos notar que si la función es biyectiva su inversa también lo es, y esto nos lleva a concluir que y .

Definición 1.3.11 Sea $\mathcal{A}$ una colección no vacía de conjuntos. Una ***función indexante*** para $\mathcal{A}$ es una función sobreyectiva f de un conjunto J, llamado conjunto de índices en $\mathcal{A}$.

La familia $\mathcal{A}$, junto con la función indexante f, se denomina familia indexada de conjuntos. Dado , representaremos el conjunto por . Y representaremos la familia indexada con: , que se lee: "la familia de todos los , cuando recorre J".

La forma como utilizaremos las funciones indexantes, es para dar notaciones nuevas a las uniones e intersecciones arbitrarias de conjuntos que definimos anteriormente en las definiciones 1.2.5 y 1.2.6.

Definición 1.3.12 Sea una función indexante para A, y representemos por . Entonces se definen: la unión de una familia indexada arbitraria como

y la intersección de una familia indexada arbitraria como

Cuando nos estemos refiriendo a una colección de conjuntos indexada por el conjunto la representaremos por , y la unión e intersección de estos conjuntos respectivamente por:

De manera semejante, cuando hagamos referencia a una colección de conjuntos indexada por el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{Z}_+$ la representaremos por , y la unión e intersección de estos conjuntos respectivamente por:

Como se ha podido notar en las diferentes definiciones que en esta sección de funciones hemos tratado, se hizo mencionaron los términos dominio e imagen de una función donde estos no son mas que conjuntos que satisfacían una regla de aplicación que es la que llamamos función. De manera que las funciones cumplen con algunas propiedades similares a las de los conjuntos que mencionaremos a continuación:

Si , se verifica que:

(*i*) para cada ; y , para cada , si y sólo si f es inyectiva;

(*ii*) para cada ; y , para cada , si y sólo si f es sobreyectiva;

(*iii*) Si , entonces ;

(*iv*) para cada si y sólo si f es sobreyectiva;

(*v*) *Si* y f es sobreyectiva, entonces implica que ;

(*vi*) Si C y D son subconjuntos de Y, entonces ;

(*vii*) Si C y D son subconjuntos de Y, entonces ;

(*viii*) Si C y D son subconjuntos de Y, entonces ;

(*ix*) Si A y B son subconjunto de X y entonces ;

(*x*) Si A y B son subconjuntos de X, entonces ;

(*xi*) Si A y B son subconjuntos de X, entonces si y sólo si f es inyectiva;

(*xii*) Si A y B son subconjunto de X entonces si y sólo si f es inyectiva;

1.4 Producto cartesiano

Además, de las formas que hemos utilizado para construir conjuntos hasta ahora, hay otra, y es la de utilizar la noción de par ordenado. En geometría analítica cuando se trabaja en el plano cartesiano, se debe elegir cuando se grafican puntos, los ejes (abscisas ó eje X y ordenadas ó eje Y) en que cada coordenada o elemento de un par ordenado se debe graficar, es decir, para el par ordenado (x, y), la coordenada "x" se grafica en el eje de las abscisas y la coordenada "y" en el eje de las ordenadas y de esta manera se forma un punto cuya representación es única. Esta noción de para ordenado, se puede extender cuando se trabaja con conjuntos como se muestra a continuación.

Definición 1.4.1 Dados los conjuntos no vacíos A y B. El producto cartesiano de A con B, que se representa , es

De la definición se puede notar que los elementos de un producto cartesiano de conjuntos son pares ordenados, además como la representación de un par ordenado es única, de manera que , por lo tanto . Además Si ó , entonces .

Si se diera el caso en que , esto solo puede ser posible si y .

Cuando de trabaja con el análisis matemático la representación se utiliza para identificar un intervalo abierto de números reales x para los que se verifica que , en nuestro estudio, esta situación no debe generar dificultades ya que los contextos en los que utilizarán serán bien precisos.

Definición 1.4.2 Sean n un entero positivo y X un conjunto diferente de vacío. Una ***n – upla*** de elementos de X como función .

Si **x** es una n – *upla*, frecuentemente representaremos el valor de **x** en i por x_i en lugar de **x** (i), y lo llamaremos la i – ésima ***coordenada*** de **x**. Mientras que la función **x** la representaremos por .

Definición 1.4.3 Sean la familia de conjuntos indexada por y el conjunto . Definimos el ***producto cartesiano*** de esta familia indexada como el conjunto de todas las n – *uplas* de elementos de X tal que , para cada i. Y se representa por

Definición 1.4.4 Dado un conjunto X. Se define una ***w – upla*** de elementos de X como una función .

A esta función se le llama también ***sucesión*** o ***sucesión infinita***, de elementos de X. Y al igual que en la definición 1.4.2, si **x** es una w – *upla*, frecuentemente representaremos el valor de **x** en i por x_i en lugar de **x** (i), y lo llamaremos la i – ésima ***coordenada*** de **x**. Mientras que la función **x** la representaremos por o

.

Definición 1.4.5 Sean la familia de conjuntos indexada por $\mathbb{Z}_+$ y el conjunto . Definimos el ***producto cartesiano*** de esta familia indexada como el conjunto de todas las *w – uplas* de elementos de X, tal que , para cada i. Y se representa por

Algunas propiedades del producto cartesiano que utilizaremos en el desarrollo de nuestro estudio se presentan a continuación:

Para los conjuntos A, B, C y D, se cumple que:

(i) ;

(ii) ;

(iii) ;

(iv)

1.5 Relaciones

Un concepto más general que el de función, al menos desde el punto de vista que en este trabajo se abordará, es el concepto de relación. Hay varios tipos de relación que son muy utilizadas en matemática: las relaciones de orden y las relaciones de equivalencia, las cuales trataremos en esta sección.

Definición 1.5.1 Una ***relación*** en un conjunto A es un subconjunto R del producto cartesiano .

Si R es una relación en , utilizaremos aRb para expresar que a está relacionado con b, que es lo mismo que .

Definición 1.5.2 Una ***relación de equivalencia*** en un conjunto A, que se representa con " ", es una relación R que satisface:

(*i*) Reflexividad. , para todo .

(*ii*) Simetría. Si , entonces .

(*iii*) Transitividad. Si y , entonces .

Definición 1.5.3 Sea una relación de equivalencia sobre un conjunto A, se llama ***clase de equivalencia*** de x al conjunto [.

Definición 1.5.4 Sea una relación de equivalencia sobre un conjunto *A*. El ***conjunto cociente*** , es el conjunto de todas las clases de equivalencia de *A*.

Definición 1.5.5 Una ***partición*** de *A* es una familia de subconjuntos no vacíos de *A*, tales que:

.

Definición 1.5.6 Una relación *R* en un conjunto *A* se llama ***relación de orden*** , de ***orden simple*** o de ***orden lineal***, y se representa “ ” , si cumple:

(*i*) Comparabilidad. Si y , entonces ó .

(*ii*) Antireflexiva. Si , entonces .

(*iii*) Transitividad. Si y , entonces .

Definición 1.5.7 Si *A* es un conjunto y es una relación de orden en *A*, y si , llamaremos ***intervalo abierto*** de *A* al conjunto .

Si este conjunto es vacío, *a* se denomina ***inmediato predecesor*** de *b*, y b ***inmediato sucesor*** de *a*.

Definición 1.5.8 Supongamos que *A* y *B* son dos conjuntos con relación de orden y , respectivamente. Se dice que *A* y *B* tienen el mismo ***tipo de orden*** si existe una correspondencia biyectiva entre ellos que preserva el orden, es decir, una función biyectiva tal que .

Definición 1.5.9 Supongamos que A y B son dos conjuntos con relación de orden y , respectivamente. Definimos una relación de orden en mediante , si , o si y . Se denomina ***relación de orden del diccionario*** sobre .

Definición 1.5.10 Sean A es un conjunto ordenado por la relación y un subconjunto de A. Se dice que un elemento b es el ***máximo*** de si y si .

Definición 1.5.11 Sean A es un conjunto ordenado por la relación y un subconjunto de A. Se dice que un elemento a es el ***mínimo*** de si y si .

Definición 1.5.12 Se dice que el subconjunto de A está ***acotado superiormente*** si ; el elemento b se denomina ***cota superior*** para .

Si el conjunto de todas las cotas superiores de tiene un mínimo, este elemento se denomina ***supremo*** de y se representa , éste puede pertenecer o no a , si pertenece, es el máximo de .

Definición 1.5.12 Se dice que el subconjunto de A está ***acotado inferiormente*** si ; el elemento a se denomina ***cota inferior*** para .

Si el conjunto de todas las cotas inferiores de tiene un máximo, este elemento se denomina ***ínfimo*** de y se representa , éste puede pertenecer o no a , si pertenece, es el mínimo de .

Definición 1.5.13 Un conjunto ordenado *A* se dice que tiene la ***propiedad del supremo*** si todo subconjunto no vacío de *A* que esté acotado superiormente tiene supremo.

Definición 1.5.14 Un conjunto ordenado *A* se dice que tiene la ***propiedad del ínfimo*** si todo subconjunto no vacío de *A* que esté acotado inferiormente tiene ínfimo.

Segunda Parte

TOPOLOGÍA GENERAL

Capitulo 2

Espacios topológicos y funciones continuas

El concepto de espacio topológico se extiende más allá del estudio de la recta real y del espacio euclídeo, y del estudio de las funciones continuas sobre estos espacios.

En este capítulo se definirá lo que es un espacio topológico y se estudiaran algunos caminos para construir una topología sobre un conjunto, para convertirlo en un espacio topológico. También se consideraran algunos de los conceptos elementales que tiene que ver con espacios topológicos. Conjuntos abiertos y cerrados, puntos límite se introducen como generalizaciones naturales de las correspondientes ideas para la recta real y el espacio euclídeo.

2.1 Espacios topológicos

A lo largo de casi toda la Historia de las Matemáticas, han ido apareciendo sus estructuras y especialidades obligadas por la necesidad de resolver problemas cuantitativos. Por ello, dichas estructuras u objetos matemáticos tenían cierta rigidez, forzados por el problema de la medida que intentaban resolver.

Hasta hace unos doscientos años, ningún matemático se interesó por las propiedades cualitativas de los objetos a los que dedicaba su atención. Estas propiedades fueron apareciendo, por un lado, como simples observaciones a la existencia de cualidades que no dependían de las magnitudes y que permitían distinguir diversos objetos entre sí. Por otra parte, se hicieron necesarios al surgir el Cálculo Infinitesimal, como técnica que obligaba a considerar correctamente y formalizar las nociones vagas de *proximidad* y *continuidad*.

Estos dos caminos, unas veces independientemente y otras conjuntamente, desembocaron a principios de este siglo en la definición correcta de proximidad, continuidad y propiedad cualitativa, es decir, se encontró un objeto matemático, ***un espacio topológico***, en el que los anteriores conceptos tenían su verdadero significado y donde todas las intuiciones de las que se había partido encontraban un tratamiento riguroso.

Expondremos algunas de esas propiedades cualitativas que, haciendo abstracción de toda medida y magnitud, son el fundamento de la Topología.

Definición 2.1.1. Una ***topología*** sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

(1) $\quad , X \quad \mathcal{T}$.

(2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

(3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Un conjunto X para el que se ha definido una topología $\mathcal{T}$ se llama ***espacio topológico***. Y a los elementos de $\mathcal{T}$ se les llama ***conjuntos abiertos***, es decir:

De manera que un espacio topológico es un conjunto X junto a una colección de subconjuntos de X, llamados conjuntos abiertos, tales que , X son ambos abiertos, y tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son abiertos.

Hablando con propiedad, un espacio topológico es un par ordenado (X, $\mathcal{T}$), formado por un conjunto X y una topología $\mathcal{T}$ sobre X, pero lo podemos escribir X solamente si no existe confusión.

Definición 2.1.2. Supongamos que $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son dos topologías sobre un conjunto dado X. Si $\mathcal{T}_1$ $\mathcal{T}_2$, diremos que $\mathcal{T}_2$ es ***más fina*** que $\mathcal{T}_1$; si además $\mathcal{T}_1$ $\mathcal{T}_2$, diremos que $\mathcal{T}_2$ es ***estrictamente más fina*** que $\mathcal{T}_1$. También diremos que $\mathcal{T}_1$ es ***más gruesa*** que $\mathcal{T}_2$, o ***estrictamente más gruesa***, en ambas situaciones. Diremos que $\mathcal{T}_1$ es ***comparable*** con $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_1$ $\mathcal{T}_2$ ó $\mathcal{T}_2$ $\mathcal{T}_1$.

Para entender mejor lo anterior, debemos verlo de esta manera, si $\mathcal{T}_1$ $\mathcal{T}_2$ entonces $\mathcal{T}_2$ tiene más abiertos que $\mathcal{T}_1$, por consiguiente los abiertos de $\mathcal{T}_2$ serán iguales o más pequeños que los de $\mathcal{T}_1$. En este sentido es más fina.

2.2 Base de una topología

Se puede especificar la topología mediante la descripción de la colección completa $\mathcal{T}$ de conjuntos abiertos. Pero, hay topologías que poseen demasiados abiertos y a veces es difícil especificarlos todos. Por ello, se introduce el siguiente concepto

Definición 2.2.1. Si X es un conjunto, una ***base*** para una topología sobre X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (llamados ***elementos básicos***) tales que:

(1) Para cada x X, hay al menos un elemento básico B que contiene a x. Es decir:

(2) Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x tal que B_3 B_1 B_2.

Si $\mathcal{B}$ satisface estas dos condiciones, se define la ***topología $\mathcal{T}_B$ generada por $\mathcal{B}$*** como sigue:

Definición 2.2.2. Sean un conjunto X y una topología $\mathcal{T}_B$ generada por una base $\mathcal{B}$. Un subconjunto U de X se dice que es abierto en X, si para cada x U, existe un elemento básico B $\mathcal{B}$ tal que x B y B U.

Nótense dos cosas en la definición, la primera es, como U es un abierto en X mediante la topología $\mathcal{T}_B$, entonces U es un elemento de $\mathcal{T}_B$, y la segunda es que cada elemento básico es así mismo un elemento de $\mathcal{T}_B$.

Comprobaremos que la colección $\mathcal{T}_B$ es, efectivamente, una topología sobre X.

Definamos primero $\mathcal{T}_B$:

La condición (1) de topología nos pide que , X $\mathcal{T}_B$.

Como es subconjunto de X , porque vacio es subconjunto de cualquier conjunto, y además es abierto, entonces .

Probaremos ahora que X $\mathcal{T}_B$.

Sea x X.

(por definición 2.2.1)

Como $\mathcal{B}$ es la base que genera a $\mathcal{T}_B$ en X, entonces todo elemento de $\mathcal{B}$ es subconjunto de X, de aquí que X $\mathcal{T}_B$.

La segunda condición de topología nos pide que una unión cualquiera de elementos de $\mathfrak{T}_B$ esté en $\mathfrak{T}_B$.

Sea x U

Ahora probaremos que si U_1, U_2, ... , U_n son elementos no vacios de $\mathfrak{T}_B$, entonces su intersección está en $\mathfrak{T}_B$.

De la última implicación se tiene que: si entonces existe un B_1 en $\mathscr{B}$ talque , si entonces existe un B_2 en $\mathscr{B}$ talque , y así sucesivamente, si entonces existe un B_n en $\mathscr{B}$ talque . Cabe resaltar que con los índices 1, 2, . . . , n, no se debe pensar que los B_i son ordenados, es decir que, si no específicamente el , sino que para cada x en existe un B_i en $\mathscr{B}$ que contiene a x y está dentro de un U_i. Si , , . . . , entonces

■

De manera que: elementos básicos más pequeños implican topologías más finas.

Otra forma de describir la topología generada por una base es la que se da en el siguiente lema:

Lema 2.2.1. Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una base para una topología $\mathcal{T}_B$ sobre X. Entonces $\mathcal{T}_B$ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$.

<u>*Demostración*</u>.

, $\mathcal{T}_B$ la topología generada por $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ la colección de conjuntos de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$.

Como una unión cualquiera de abiertos es abierta

Sea U $\mathcal{T}_B$, elijamos para cada x en U un en $\mathcal{B}$ que contiene a x tal que ,

por definición 2.2.2

Como $\mathcal{C}$ es la colección de uniones de elementos básicos

Este lema establece que cada conjunto abierto U de X se puede expresar como la unión de elementos básicos. Esta representación para U no es, sin embargo, única.

De esta forma, el uso del término "base" en topología difiere enormemente de su uso en algebra lineal, donde la ecuación que expresa un vector dado como combinación lineal de los vectores de la base es única.

Se ha descrito de dos formas diferentes como llegar, a partir de una base, a la topología que genera. Algunas veces necesitaremos ir en la dirección contraria, es decir, desde una topología hasta una base que la genera. A continuación se da un método para obtener una base para una topología dada y se usara frecuentemente.

Lema 2.2.2. Sea X un espacio topológico. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos abiertos de X tal que, para cada conjunto abierto U de X y cada x en U, existe un C de $\mathcal{C}$ tal que x C U. Entonces $\mathcal{C}$ es una base para la topología de X.

Demostración.

Se debe probar que $\mathcal{C}$ es una base.

Veamos la primera condición.

Sean x X y $U = X$.

Lo que prueba la primera condición.

Comprobemos la segunda.

Sea x , donde C_1 y C_2 son elementos de $\mathcal{C}$.

Se ha probado que $\mathcal{C}$ es una base para X, ahora falta probar que la topología generada por $\mathcal{C}$ coincide con la topología de X, esto es necesario porque se dijo anteriormente que la topología de un espacio topológico no es única y en la hipótesis del lema que estamos probando solo se dice que X es un espacio topológico, esto nos da la certeza que X tiene al menos una topología pero no nos garantiza que sea la generada por $\mathcal{C}$.

Sea $\mathcal{T}$ una topología sobre X, la que se da por hipótesis, es decir, que $\mathcal{T}$ es la colección de conjunto abiertos en X y sea $\mathcal{T}_C$ la topología generada por $\mathcal{C}$.

Sean

(por lema 2.2.2)

Sea

como V es abierto e igual a la unión de elementos de $\mathcal{C}$, entonces cada elemento de $\mathcal{C}$ es abierto y por tanto pertenece a $\mathcal{T}$

$$\therefore \mathcal{T} = \mathcal{T}_C \qquad \blacksquare$$

Cuando se dan topologías a partir de las bases, es útil tener un criterio en términos de las bases para determinar si una topología es más fina que la otra. Un criterio semejante es el siguiente:

Lema 2.2.3. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases para las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente, sobre X. Entonces son equivalentes:

(1) $\mathcal{T}$ $\mathcal{T}'$ ($\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$)

(2) Para cada x X y cada elemento básico B $\mathcal{B}$ que contiene a x, existe un elemento básico B' $\mathcal{B}'$ tal que x $B' \subset B$.

<u>*Demostración*</u>.

(1) (2).

Sean x X y B $\mathcal{B}$, con x B.

(por definición 2.1.1)

y como $\mathcal{T}$ $\mathcal{T}'$ por condición (1)

(por definición 2.1.1)

Además $\mathcal{B}'$ es la base de $\mathcal{T}'$

(por definición 2.2.2)

(2) (1).

Sean y x U.

Como $\mathcal{B}$ es la base de $\mathcal{T}$ y U es abierto en $\mathcal{T}$

Por la condición (2)

es abierto (por definición 2.2.2)

■

Se definirán a continuación, tres topologías sobre la recta real $\mathbb{R}$, todas ellas interesantes.

Definición 2.2.3. Si $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ es la colección de todos los intervalos abiertos en la recta real,

La topología generada por $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ se denomina ***topología usual*** sobre la recta real. Siempre que estudiemos $\mathbb{R}$ supondremos que viene con esta topología, a menos que digamos lo contrario. Si $\mathscr{B}_{\ell}$ es la colección de todos los intervalos semiabiertos del tipo

Donde $a < b$, la topología generada por $\mathscr{B}_{\ell}$ se llama ***topología del límite inferior*** sobre $\mathbb{R}$. Cuando $\mathbb{R}$ este dotada de la topología del límite inferior, lo denotaremos por $\mathbb{R}_{\ell}$. Finalmente, sea – , y sea $\mathscr{B}_{K}$ la colección de todos los intervalos abiertos (a, b), junto con todos los conjuntos de la forma $(a, b) - K$. La topología generada por $\mathscr{B}_{K}$ se llamará la ***K – topología*** sobre $\mathbb{R}$. Cuando $\mathbb{R}$ este dotada de esta topología, lo denotaremos como $\mathbb{R}_{K}$.

Probaremos que estas tres colecciones son bases.

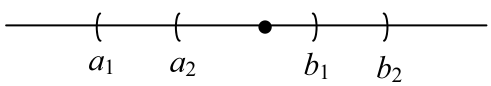
Sea $\mathscr{T}_{\mathbb{R}} = \{ U \,/\, U = (a, b)$ con $a, b \quad \mathbb{R}$ y $a < b \}$ la topología generada por $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ en $\mathbb{R}$.

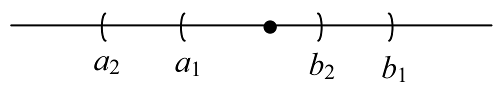
Sea $x \quad \mathbb{R}$

Lo que prueba la condición (1) de base.

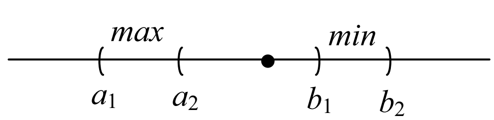
Sean y x , con $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

No se debe perder de vista que se esta trabajando con intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, para ver mas claro que forma tiene la intersección nos auxiliaremos de una ilustración.





De manera que para nuestra intersección puede haber más de una posibilidad, porque si la ubicación de los intervalos es como se muestra en la figura de la derecha entonces y este seria nuestro B_3, pero si su posición es, como se muestra en la figura de la izquierda, entonces siendo este el B_3 que tendríamos que tomar. Para evitar esta ambigüedad podemos tomar nuestro B_3 de la siguiente manera: y así nos estamos asegurando que x esta en B_3 y este es a su vez subconjunto de la intersección, no importando la posición que ocupan B_1 y B_2 en la recta real. Como se muestra en la siguiente ilustración:



De manera que:

Lo que prueba la condición (2) de base.

$\therefore \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es una base para $\mathbb{R}$ ■

Sea $\mathcal{T}_\ell = \{ U \ / \ U = [\, a, b\,)$ con $a, b \quad \mathbb{R}$ y $a < b \}$ la topología generada por $\mathcal{B}_\ell$ en $\mathbb{R}_\ell$.

Sea $x \quad \mathbb{R}_\ell$.

Lo que prueba la condición (1) de base.

Sea x , donde son elementos de $\mathcal{B}_\ell$.

Para la intersección se hace un planteamiento similar al de la prueba anterior, de ahí que:

Lo que prueba la condición (2) de base.

$\therefore \mathcal{B}_\ell$ es una base para $\mathbb{R}_\ell$ ■

Para esta prueba debemos considerar dos casos: cuando − y cuando −, esto es por como esta definido el conjunto $\mathbb{R}_K$.

Si −, los elementos de $\mathbb{R}_K$ serán de la forma $(a, b) - \mathbb{K}$.

Sea x $\mathbb{R}_K$

Lo que prueba la condición (1) de base.

Sean y x , con .

Tomando Se tiene que:

Lo que prueba la condición (2) de base.

Si −

Sean $\mathcal{T}_K$ = { U / U = (a, b) – K con a, b $\mathbb{R}$ y a < b } la topología generada por $\mathcal{B}_K$ en $\mathbb{R}_K$ y x $\mathbb{R}_K$.

De esta forma se verifica la condición (1) de base.

Sea x , donde son elementos de $\mathcal{B}_K$.

Lo que prueba la condición (2) de base.

$\therefore \mathcal{B}_K$ es una base para $\mathbb{R}_K$ ■

La relación entre estas topologías es la siguiente:

Lema 2.2.4. Las topologías de $\mathbb{R}_\ell$ y $\mathbb{R}_K$ son estrictamente más finas que la topología usual sobre $\mathbb{R}$, pero no son comparables entre sí.

<u>*Demostración*</u>.

Sean las $\mathcal{T}_R$, $\mathcal{T}_\ell$ y $\mathcal{T}_□$ las topologías para $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_\ell$ y $\mathbb{R}_K$ respectivamente.

Probaremos primero que $\mathcal{T}_R \subset \mathcal{T}_\ell$. Sea (a, b) $\mathcal{T}_R$ y sea x (a, b) tal que $a < x < b$.

Además, podemos elegir un $[x, b)$ que es un básico en $\mathcal{T}_\ell$ que contiene a x.

$\mathcal{T}_\ell$

Si $[x, b)$ $\mathcal{T}_\ell$, x $[x, b)$ entonces no existe un intervalo abierto (a, b) en $\mathcal{T}_R$ que contenga a x y este dentro de $[x, d)$ de manera que $\mathcal{T}_\ell$ $\mathcal{T}_R$.

$\therefore \mathcal{T}_\ell$ es estrictamente más fina que $\mathcal{T}_R$ ■

Probaremos ahora que $\mathcal{T}_R \subset \mathcal{T}_□$.

Si $x = -$ K, entonces los elementos de $\mathscr{B}_K$ son de la forma $(a, b) - \mathbb{K}$.

Como los elementos de $\mathscr{T}_R$ son de la forma (a, b), que por teoría elemental de conjuntos (a, b) (a, b) y ambos son abiertos en $\mathscr{T}$ y $\mathscr{T}_R$, además si $a < x < b$, son abiertos que contienen a x, de manera que

Si $x \neq -$ $(a, b) - K$

Sean (a, b) $\mathscr{T}_R$ y x (a, b) tal que $a < x < b$.

$\mathscr{T}$

Sean $B_K = (-1, 1) - K$ $\mathscr{T}$, y $x = 0$ $(-1, 1) - K$, no existe un intervalo abierto (a, b) en $\mathscr{T}$ que contenga a x y este dentro de B de manera que $\mathscr{T}$ $\mathscr{T}_R$.

$\therefore \mathscr{T}$ es estrictamente más fina que $\mathscr{T}_R$. ■

Y por ultimo probaremos que $\mathbb{R}_\ell$ y $\mathbb{R}_K$ no son comparables.

Sean $[-1, 1)$ $\mathscr{T}_\ell$, y x $[-1, 1)$, con $-1 \leq x < 1$.

Si x = — , para $n = -1$, entonces no existe ningún elemento $(a, b) - K$ en $\mathcal{T}_{\square}$ que contenga a -1, y este incluido en $[-1, 1)$, por lo tanto $\mathcal{T}_{\ell}$ $\mathcal{T}_{\square}$.

Sea $A = (-1, 1) - \mathrm{K}$ $\mathcal{T}_{\square}$ y sea x A, con $-1 \leq x < 1$.

Si $x = 0$, no existe ningún elemento $[a, b)$ en $\mathcal{T}_{\ell}$ que contenga a 0 y este dentro de A, por lo tanto $\mathcal{T}_{\square}$ $\mathcal{T}_{\ell}$.

$\therefore$ $\mathcal{T}_{\ell}$ y $\mathcal{T}_{\square}$ no son comparables ■

En este punto puede surgir una pregunta. Puesto que la topología generada por una base $\mathcal{B}$ puede ser descrita como la colección de uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}$, ¿Qué ocurre si comenzamos con una colección dada de conjuntos y tomamos intersecciones finitas de ellos además de uniones arbitrarias? Esta pregunta nos lleva a la noción de subbase para una topología.

Definición 2.2.4. Una ***subbase*** $\mathbb{S}$ para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X. La ***topología generada por la subbase*** $\mathbb{S}$ se define como la colección $\mathcal{T}$ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathbb{S}$.

Se debe comprobar que $\mathcal{T}$ es una topología. Para este fin será suficiente probar que la colección $\mathcal{B}$ de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathbb{S}$ es una base, y por lo tanto, la colección $\mathcal{T}$ de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$ será una base, por el lema 2.2.1. $\mathcal{T}$ será una topología.

Probaremos la condición (1) de una base.

Sean x X y $\mathcal{B}$ la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathbb{S}$.

(por definición de $\mathbb{S}$)

(por lema 2.2.1)

Ahora veamos la segunda condición.

Sean y dos elementos de $\mathbb{S}$.

Sea $\mathscr{T}$ la colección de todas las uniones de elementos de $\mathscr{B}$, entonces por lema 2.2.1, $\mathscr{T}$ es una topología. ■

2.3 La topología del orden.

Si X es un conjunto simplemente ordenado, existe una topología obvia para X, definida usando la relación de orden. Se llama ***topología del orden***; en esta sección la analizaremos y estudiaremos algunas de sus propiedades.

Supongamos que X es un conjunto con una relación de orden simple <. Dados dos elementos a y b, hay cuatro subconjuntos de X que se llaman ***intervalos*** determinados por a y b. Que presentamos a continuación:

1. Se llama intervalo abierto en X.
2. Se llama intervalo semiabierto en X.
3. Se llama intervalo semiabierto en X.
4. Se llama intervalo cerrado en X.

La notación utilizada es la misma cuando X es la recta real, pero estos son intervalos en un conjunto ordenado cualquiera. El uso del término "abierto" en esta relación sugiere que los intervalos abiertos en X deberían convertirse en conjuntos abiertos cuando se introduzca una topología sobre X, y así será.

Definición 2.3.1. Sea X un conjunto, con más de un elemento, con una relación de orden simple. Sea $\mathscr{B}$ la colección de todos los conjuntos de los siguientes tipos:

(1) Todos los intervalos abiertos (a, b) en X.

(2) Todos los intervalos de la forma $[a_0, b)$, donde a_0 es el mínimo (si lo hay) de X.

(3) Todos los intervalos de la forma $(a, b_0]$, donde b_0 es el máximo (si lo hay) de X.

La colección $\mathscr{B}$ es una base para la topología sobre X, que se llama ***topología del orden***.

Si X no tiene elemento mínimo, no existen conjuntos del tipo (2), y si X no tiene elemento máximo, no existen conjuntos del tipo (3).

Comprobare que $\mathscr{B}$ satisface los requisitos para una base.

Sea x X.

Lo anterior significa que: si x fuese un elemento mínimo pertenecería a los intervalos del tipo (2), si fuese un elemento máximo pertenecería a los intervalos del tipo (3), si no fuese ni mínimo, ni máximo, entonces pertenecería a los intervalos del tipo (1).

Sean y

Como se puede notar hay muchas más relaciones entre los intervalos descritos en (1), (2) y (3), pero al final llegaremos al mismo resultado, cualquier intersección de elementos de X estará en X. De manera que $\mathcal{B}$ es una base. ■

Definición 2.3.2. Si X es un conjunto ordenado y a es un elemento de X, existen cuatro subconjuntos de X que se llaman rayos determinados por a. Son los siguientes:

Los conjuntos de los dos primeros tipos se denominan ***rayos abiertos*** y los conjuntos de los dos últimos tipos se denominan ***rayos cerrados***.

El uso del término "abierto" sugiere que los rayos abiertos en X sean conjuntos abiertos en la topología del orden. Y así son.

Consideremos el rayo . Si X tiene un elemento máximo b_0, entonces es igual al elemento básico $(a, b_0]$.

Si X no tiene elemento máximo, entonces es igual a la unión de todos los elementos básicos de la forma (a, x), para $x > a$. En otro caso, es abierto.

Consideremos ahora el rayo . Si X tiene un elemento mínimo c_0, entonces es igual al elemento básico $[c_0, a)$.

Si X no tiene elemento mínimo, entonces es igual a la unión de todos los elementos básicos de la forma (x, a), para $x < a$. En otro caso, es abierto.

2.4 La topología producto sobre X Y

Si X e Y son espacios topológicos, existe un método natural de definir una topología sobre el producto cartesiano X Y. Analizaremos esta topología a continuación, y también estudiaremos algunas de sus propiedades.

Definición 2.4.1. Sean X e Y espacios topológicos. La topología producto sobre X Y es la topología que contiene como base la colección $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos de la forma U V, donde U es un subconjunto abierto de X y V es un subconjunto abierto de Y.

Se comprobara que $\mathcal{B}$ = es una base.

Veamos la primera condición de base.

Sea

En la segunda condición, probaremos que la intersección de cualesquiera dos elementos básicos de $\mathcal{B}$ es otro elemento básico.

Sean .

Si [1] entonces

(

Además, como y son abiertos en X y, y son abiertos en Y

Haciendo y

■

El hecho anterior se ilustra en la figura 2.4.1.

[1] Por propiedad ***(ii)*** del producto cartesiano.

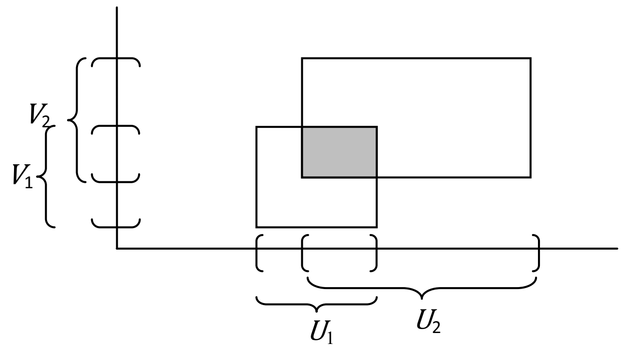


Figura 2.4.1

Obsérvese que la colección $\mathcal{B}$ no es una topología sobre $X \quad Y$. La unión de los dos rectángulos de la figura 2.4.1, por ejemplo, no es un producto de dos conjuntos, por lo que no puede pertenecer a $\mathcal{B}$, sin embargo, es abierto en $X \quad Y$.

Cada vez que se introduzca un concepto nuevo, se intentara relacionarlo con las nociones previamente vistas. En el caso actual, nos podemos preguntar: ¿Qué se puede decir si, las topologías sobre X e Y están dadas mediante bases? Y eso se responde a continuación:

Teorema 2.4.1. Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X y $\mathcal{C}$ es una base para la topología de Y, entonces la colección

Es una base para la topología sobre $X \quad Y$.

<u>*Demostración*</u>.

Sean , existen U un abierto en X y V un abierto en Y, tales que y

.

Como $\mathscr{B}$ = es la base de la topología $\mathscr{T}_X$ y $\mathscr{C}$ es la base de la topología $\mathscr{T}_Y$.

(por definición 2.2.2)

Además, si y , entonces y como y

Lo que cumple la condición (1) de Base.

Sea .

Como [1].

Tomando y

[1] Por propiedad ***(ii)*** del producto cartesiano.

Además, , entonces

Lo que cumple la condición (2) de Base.

■

Algunas veces es útil expresar la topología producto en términos de una subbase, pero antes de hacerlo definiremos ciertas funciones llamadas proyecciones.

Definición 2.4.2. Sean definida por y

definida por .

Las aplicaciones π_1 y π_2 se denominan ***proyecciones*** de *X* *Y* “sobre” su primer y segundo factor, respectivamente.

Se usa la palabra “sobre” porque π_1 y π_2 son continuas y sobreyectivas (a menos que uno de los espacios *X* o *Y* sea vacío, en cuyo caso *X* *Y* sería vacía y, por tanto, no tendría sentido hablar de ello).

Si *U* es un conjunto abierto en *X*, el conjunto es, precisamente, el conjunto *U* *Y*, que es abierto en *X* *Y*. De modo similar, si *V* es abierto en *Y*, ocurre que es *X* *V*, también abierto en *X* *Y*. La intersección de estos dos conjuntos es el conjunto *U* *V*, como se indica que la figura 2.4.2.

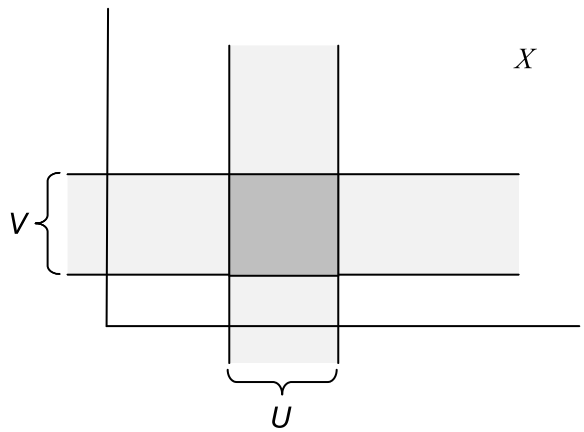


Figura 2.4.2

Lo anterior nos ayuda a enunciar el teorema siguiente:

Teorema 2.4.2. La colección

es una subbase para la topología producto sobre $X \quad Y$.

<u>*Demostración*</u>.

Sean $\mathcal{T}_{X \quad Y}$ la topología producto sobre $X \quad Y$ y $\mathcal{T}_{\mathrm{S}}$ la topología generada por $\mathbb{S}$. Y sea M .

Como y , son abiertos en $X \quad Y$.

Pero como y , entonces se tiene lo siguiente [1] por teorema 2.4.1 este pertenece a la topología producto de X Y.

Sea $\mathcal{T}_{X \quad Y}$.

Además y , son abiertos en X Y.

Como

Entonces

■

[1] Por propiedad ***(i)*** del producto cartesiano.

2.5 La topología del subespacio

Definición 2.5.1. Sea X un espacio topológico con una topología $\mathfrak{T}$. Si Y es un subconjunto de X, la colección

es una topología sobre Y, denominada ***topología de subespacio*** o ***topología relativa***. Con esta topología, Y se denomina ***subespacio*** de X; sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de X con Y.

Veamos si $\mathfrak{T}_Y$ es una topología.

Probaremos primero que y X están en $\mathfrak{T}_Y$.

Como y X están en $\mathfrak{T}$ se cumple que:

y

Entonces y X están en $\mathfrak{T}_Y$.

Sea una colección indexada de elementos de $\mathfrak{T}_Y$.

Sea una colección finita de elementos de $\mathcal{T}_Y$.

;

.

Como

■

Lema 2.5.1. Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X, entonces la colección

es una base para la topología sobre Y.

Demostración.

Sea U un abierto en X, y sea

(por definición 2.2.2)

Además, si entonces

■

Cuando se trabaja con un espacio X y un subespacio Y, es necesario ser cuidadoso al utilizar el término "conjunto abierto", porque no especifica si es un elemento de la topología de X o de la topología del subespacio Y. Y para evitar la confusión daremos la siguiente definición:

Definición 2.5.2. Si Y es un subespacio de X, diremos que un conjunto U **es abierto en Y** (o abierto relativo a Y) si pertenece a la topología de Y; y diremos que U **es abierto en X** si pertenece a la topología de X.

Se puede tener el caso especial en el que cada conjunto abierto en Y, es también abierto en X:

Lema 2.5.2. Sea Y un subespacio de X. Si U es abierto en Y e Y es abierto en X, entonces U es abierto en X.

Demostración.

Por hipótesis U es abierto en Y

(por definición 2.5.2)

(por definición 2.5.1)

y Y es abierto en X (por hipótesis)

■

Teorema 2.5.1. Si A es un subespacio de X y B es un subespacio de Y, entonces la topología producto sobre A B coincide con la topología que A B hereda como subespacio de X Y.

<u>*Demostración*</u>.

Para entender mejor lo que se trata de demostrar detallaremos primero algunos conjuntos:

Sean la topología de X Y,

la topología de A B y la topología del subespacio.

Entonces se probara que .

Sea .

.

Como y

Sea .

Además, y

■

Si X es un conjunto ordenado con la topología del orden, y Y es un subconjunto de X. La relación de orden sobre X, cuando se restringe a Y, convierte a Y en un conjunto ordenado. Sin embargo, la topología del orden resultante sobre Y no necesita la misma que la topología que Y hereda como subespacio de X.

Antes de analizar el hecho anterior es necesario primero, dar la definición siguiente:

Definición 2.5.3. Dado un conjunto ordenado X, diremos que un subconjunto Y de X es ***convexo*** en X si para cada par de puntos $a < b$ en Y, el intervalo completo (a, b) de puntos de X pertenece a Y.

Nótese que los intervalos y rayos en X son convexos en X.

Teorema 2.5.2. Sean X un conjunto ordenado en la topología del orden e Y un subconjunto de X que es convexo en X. Entonces la topología del orden sobre Y es la misma que la topología que Y hereda como subespacio de X.

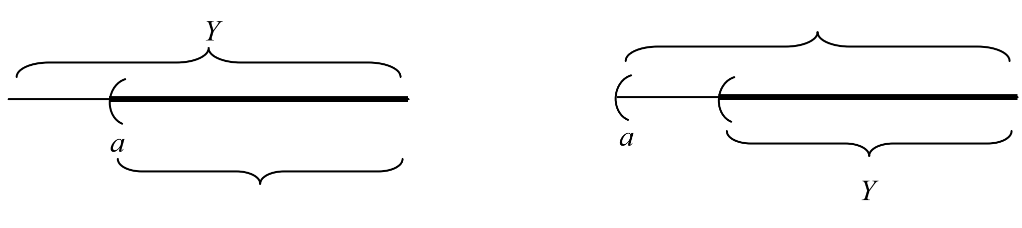
Demostración.

Los elementos de X son de la forma: , por ser un conjunto ordenado.

Sea un elemento de X.

Tendremos dos casos posibles:

1) Si entonces es un rayo abierto en el conjunto ordenado Y.
2) Si entonces a seria un límite inferior de Y o un límite superior, como se muestra en la figura 2.5.1, porque Y es convexo.



a Figura 2.5.1 *b*

De manera que si se da el caso 1), , figura 2.5.1 *a*, o un rayo abierto en *Y*, figura 2.5.1 *b*, y si se da el 2) , por ser *Y* un subconjunto convexo en *X*.

Sea un elemento de *X*.

De igual manera tendremos dos casos posibles:

1) Si entonces es un rayo abierto en el conjunto ordenado *Y*.
2) Si entonces *a* seria un límite inferior de *Y* o un límite superior, porque *Y* es convexo.

De manera que si se da el caso 1), o un rayo abierto en *Y*, y si se da el 2) , por ser *Y* un subconjunto convexo en *X*.

Como y son abiertos en el subespacio *Y*, por ser abiertos en *X* y que además si , entonces por definición 2.2.4, forman una subbase para la topología del subespacio sobre *Y*, como cada uno es abierto en la topología del orden y esta a la del subespacio.

Como los elementos de *Y* son de la forma ó con y abiertos en *X*, de manera que son abiertos en la topología del subespacio *Y*, por definición de topología del subespacio, Y como los rayos abiertos en Y son una subbase para la topología del orden sobre Y, esta topología ésta contenida en la topología del subespacio. ■

2.6 Conjuntos cerrados y puntos límite

Ahora introduciremos algunos de los conceptos básicos asociados a espacios topológicos. En esta sección, se trataran las nociones de conjunto cerrado, clausura de un conjunto y punto límite. Estas nos conducirán de modo natural a la consideración de un axioma para espacios topológicos llamado el *axioma de Hausdorff*.

Conjuntos cerrados.

Definición 2.6.1. Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es *cerrado* si el conjunto $X - A$ es abierto.

La definición anterior, nos lleva a pensar que un conjunto puede ser cerrado, abierto, cerrado y abierto a la vez, o ni abierto ni cerrado. De modo que, la colección de subconjuntos cerrados de un espacio X tiene similares propiedades a aquellas satisfechas por la colección de subconjuntos abiertos de X.

Teorema 2.6.1. Sea X un espacio topológico. Se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $\emptyset$ y X son cerrados.

(2) Las intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas.

(3) Las uniones finitas de conjuntos cerrados son cerradas.

Demostración:

(1) Si suponemos que Ø, X son cerrados no hay nada que probar, porque eso es lo que quiere probarse, de manera que supondremos lo contrario.

Supongamos que X es abierto.

(por definición 2.6.1)

Supongamos que Ø es abierto.

(por definición 2.6.1)

De manera que Ø y X son cerrados por ser los complementos de conjuntos abiertos respectivamente.

(2) Sea una colección de conjuntos cerrados

son abiertos (por definición 2.6.1)

son abiertos

[1]

Y como los son abiertos por definición, entonces

(3) Sean los conjuntos cerrados .

[2]

[1] Ley de De Morgan
[2] Ley de De Morgan

Y como los son abiertos por definición, entonces

En lugar de usar conjuntos abiertos, se podría especificar perfectamente una topología sobre un espacio dando una colección de conjuntos, llamados cerrados, satisfaciendo las tres propiedades del teorema anterior. Se podría, en ese caso, definir los conjuntos abiertos como los complementos de conjuntos cerrados y proceder exactamente igual que antes, aunque este proceso no proporciona ventaja alguna.

Cuando se trabaja con subespacios, se debe tener cuidado con el término "***conjunto cerrado***". Si Y es un subespacio de X, diremos que un conjunto ***A es cerrado en Y*** si A es un subconjunto de Y y si A es cerrado en la topología del subespacio de Y, es decir, si $Y - A$ es abierto en Y. Dicho argumento se plantea en el siguiente teorema:

Teorema 2.6.2. Sea Y un subespacio de X. Entonces un conjunto V es cerrado en Y si, y sólo si, es igual a la intersección de un conjunto cerrado de X con Y.

Demostración:

Sean U un conjunto cerrado en X y .

(por definición 2.6.1)

(por definición 2.5.1)

Como , además, por lo que y por hipótesis , por tanto .

es abierto en Y

Si $Y - V$ es abierto en Y, por definición 2.5.1, entonces $Y - V$ es la intersección de un conjunto abierto W de X con Y, es decir,

Que un conjunto sea cerrado en el subespacio no implica que lo sea en el espacio más grande, como ocurrió con los conjuntos abiertos Veremos a continuación un criterio, para determinar si un cerrado en el subespacio, lo es en el espacio mas grande.

Teorema 2.6.3. Sea Y un subespacio de X. Si V es cerrado en Y e Y es cerrado en X, entonces V es cerrado en X.

<u>*Demostración*</u>.

Por hipótesis V es cerrado en Y entonces $Y - V$ es abierto en Y.

con U abierto en X por definición 2.5.1

El complemento del conjunto abierto es el cerrado V, y el complemento de es

Como por hipótesis Y es un subespacio de X, entonces de manera que , del mismo modo , por lo tanto , asi

De manera que , con Y cerrado en X por hipótesis y $X - U$ cerrado en X por ser el complemento del abierto U de X.

es cerrada en X

Clausura e interior de un conjunto.

Antes de iniciar nuestro recorrido, veremos una terminología que se usará mucho en el transcurso de ésta y otras secciones. Se dirá que, un conjunto A interseca a un conjunto B si y A no interseca a B si .

Definición 2.6.2. Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. El ***interior*** de A es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A.

Denotaremos el interior de A por . De manera que la definición anterior la podemos expresar como:

Además si A es abierto entonces $A =$.

Definición 2.6.3. Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. La ***clausura*** de A es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A.

Denotaremos la clausura de A por . Así que la definición puede expresarse como:

Además si A es cerrado entonces $A =$.

De las definiciones anteriores se concluye que .

Cuando se trabaja con un espacio topológico X y un subespacio Y, se debe tener cuidado con las clausuras. Si A es un subconjunto de Y, la clausura de A en Y y la clausura de A en X no serán las mismas. Cuando sea el caso, reservaremos para la clausura de A en X. La clausura de A en Y se puede expresar en términos de , como sigue:

Teorema 2.6.4. Sean Y un subespacio de X y A un subconjunto de Y. Denotemos por la clausura de A en X. Entonces la clausura de A en Y es .

Demostración.

Sea U la clausura de A en Y.

Probaremos que , veamos primero si .

Sabemos por definición 2.6.3 que es cerrado en X

(por teorema 2.6.2)

Por hipótesis .

por definición 2.6.3

Además, U se define como la intersección de todos los subconjuntos cerrados de Y que contienen a A.

.

Por último veremos si .

Como U es la clausura de A en Y, entonces U es cerrado en Y.

(por definición de subespacio)

(por teorema 2.6.2)

De manera que, si y entonces .

Sabemos que es la intersección de los conjuntos cerrados de X , por definición 2.6.3, y como V es cerrado en X entonces .

A continuación veremos otro método para describir la clausura mediante la base de la topología.

Teorema 2.6.5. Sea A un conjunto del espacio topológico X.

(a) Entonces si, y sólo si, cada conjunto abierto U que contiene a x interseca a A.

(b) Suponiendo que la topología de X está dada por una base, entonces si, y sólo si, cada elemento básico B que contiene a x interseca a A.

<u>*Demostración*</u>.

La parte (a) teorema es del tipo " " , es decir P Q y para resolverlo más fácilmente, se trabajará con su equivalente negación no P no Q. De manera que el enunciado (a) nos quedará:

" "

por ser es el complemento de .

Como

Haciendo

“ ”

Si entonces

(por ser el complemento de U)

Por hipótesis , lo que significa que A no tiene ni un solo elemento en común con U, por lo tanto A debe estar en el complemento de U.

Como es un cerrado que contiene a A, por definición 2.6.3 .

Si entonces .

Veamos ahora la parte (b)

“ ”

Supongamos que la topología de X está dada por una base, entonces cada elemento básico B que contiene a x interseca a A.

Sean U un conjunto abierto de X y .

Por hipótesis la topología de X está dada por una base, de manera que: $\mathcal{B}$ tal que x B y B U por definición 2.2.2.

Además, por hipótesis y por definición 2.6.3 de aquí que .

“ ”

Supongamos que la topología de X está dada por una base y cada elemento básico B que contiene a x interseca a A, entonces

Por hipótesis cada básico B que contiene a x interseca a A, decir, .

Además, , entonces , por definición 2.6.3,

De aquí en adelante cuando se haga referencia a un conjunto abierto U que contenga a x, se dirá “U es un ***entorno*** de x”.

Puntos límite.

Otra forma para describir la clausura de un conjunto, es el que toma como base el punto límite, que analizaremos a continuación:

Definición 2.6.4. Si A es un subconjunto de un espacio topológico X y si x es un punto de X, diremos que x es un ***punto límite*** (o punto de acumulación) de A si cada entorno de x interseca a A en algún punto distinto del propio x.

La definición anterior se puede enunciar de otra forma: x es un punto de acumulación de A si pertenece a la clausura de . El punto x puede o no pertenecer a A.

Teorema 2.6.6. Sean A un subconjunto del espacio topológico X y A' el conjunto de todos los puntos límite de A. Entonces

<u>*Demostración*</u>.

a) Probaremos que .

Sea .

Si

(por definición 2.6.3)

Además si entonces

Supongamos que y .

cada entorno U de x interseca a A por teorema 2.6.5 parte (a)

porque (por definición de)

b) Ahora probaremos que .

Sea .

(por hipótesis)

Supongamos que .

cada entorno de x interseca a A en un punto distinto de x por teorema 2.6.3

Como por definición 2.6.3,

Corolario 2.6.7. Un conjunto de un espacio topológico es cerrado si, y solo si, contiene a todos sus puntos límite.

<u>*Demostración*</u>.

“ ”

Sea A un conjunto cerrado en X.

(por definición 2.6.3)

Como por teorema 2.6.6.

Por teoría de conjuntos, si entonces y

“ ”

Sea A el conjunto que contiene todos sus puntos límite.

Por Teorema 2.6.6

(por definición 2.6.3)

Espacios de Hausdorff.

Cuando Félix Hausdorff dio su definición de topología (en 1914 en su libro Orientaciones generales de los conjuntos) incluyo una propiedad “que cualquier par de puntos puede separarse mediante un par de conjuntos abiertos” y es esta propiedad, la que estudiaremos a continuación.

Definición 2.6.5. Un espacio topológico X se denomina ***espacio de Hausdorff*** si para cada par de puntos x_1, x_2 distintos de X, existen entornos U_1 y U_2 de x_1 y x_2 respectivamente, que son disjuntos.

Teorema 2.6.7. Cada conjunto con un número finito de puntos en un espacio de Hausdorff es cerrado.

<u>*Demostración*</u>.

Como el desarrollo de la prueba es el mismo, si el conjunto tiene uno o n elementos, entonces es suficiente probar para conjuntos de un elemento.

Probaremos que el conjunto es cerrado.

Sean el espacio de Hausdorff X y .

Si

por definición 2.6.5.

Como es un entorno que contiene a y entonces de manera que .

Además, por teorema 2.6.6 , como y x no es un punto limite de por lo tanto de aquí que .

Como entonces es cerrado.

La condición de que los conjuntos con un número finito de puntos sean cerrados se denomina ***axioma T_1*** y la analizaremos en el teorema siguiente.

Teorema 2.6.8. Sea X un espacio que satisface el axioma T_1 y A un subconjunto de X. Entonces el punto x es un punto límite de A si, y sólo si, cada entorno de x contiene infinitos puntos de A.

<u>*Demostración*</u>.

“ ”

Probaremos que: si x es un punto límite de A, entonces cada entorno de x contiene infinitos puntos de A.

Así que nuestra prueba ahora es suponer que: si x es un punto límite de A, entonces “cada entorno de x contiene finitos puntos de A” es una contradicción.

Sean x un punto límite de A y U_x un entorno de x que interseca a A en un número finito de puntos.

Si interseca a A en un número finito de puntos , entonces interseca a por definición 2.6.4.

Sea .

Como X es un espacio de Hausdorff es cerrado, por teorema 2.6.7.

Si , por definición 2.6.1, entonces

Es un entorno de x, porque y son abiertos, que además no intersecan a , lo que contradice nuestra hipótesis de que x es un punto límite de A. De manera que: cada entorno de x contiene infinitos puntos de A.

“ ”

Si cada entorno de x contiene infinitos puntos de A entonces x es un punto límite de A.

Sea U_x un entorno de x que contiene infinitos puntos de A.

Si por definición 2.6.4

Teorema 2.6.9. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces una sucesión de puntos de X converge a lo sumo a un punto de X.

Demostración.

Demostraremos el teorema por contradicción, es decir que supondremos la sucesión converge en dos puntos diferentes.

Sea una sucesión de puntos de X .

Supongamos que converge a x e y, con , tales que .

X es un espacio de Hausdorff por hipótesis

Como , entonces , excepto para un número finito de valores de n.

Además, por hipótesis , por lo que no puede contener a x_n bajo las condiciones que cumple . De manera que x_n no puede converger a y .

Teorema 2.6.10. Cada conjunto simplemente ordenado es un espacio de Hausdorff en la topología del orden. El producto de dos espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff. Un subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.

Demostración.

Como se puede ver, el teorema se divide en tres partes, es decir son tres pruebas las que hay que realizar:

1) Cada conjunto simplemente ordenado es un espacio de Hausdorff en la topología del orden.
2) El producto de dos espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.
3) Un subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.

Probaremos la parte 1).

Sean U un conjunto simplemente ordenado en la topología del orden y tales que

Supongamos que $x < y$. Como los elementos de un conjunto simplemente ordenado bajo la topología del orden son intervalos abiertos, entonces entre x e y debe existir una distancia.

Tomando ——.

Se puede formar un entorno que contiene a x y un entorno que contiene a y, que estén en U, tales que ,

Supongamos que $y < x$.

Tomando ——.

Se puede formar un entorno que contiene a y y un entorno que contiene a x, que estén en U, tales que ,

Probaremos 2), es decir: El producto de dos espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.

Sean X, Y dos espacio de Hausdorff, ; tales que y , tales que .

Sea el producto de X con Y.

Por definición 2.4.1 los elementos de son de la forma , donde U es abierto en X y V es abierto en Y.

Eligiendo y , se tiene que

Además, se sabe que: y

(por propiedad (*ii*)[1])

---

[1] Propiedad (*ii*) del producto cartesiano.

entonces ,

Como en *X* y en *Y*, de manera que

Y por ultimo probaremos que:

3) Un subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.

Sean *X* un espacio de Hausdorff, *Y* un subespacio de *X* y , tales que .

Si , entonces , por ser *Y* un subespacio de *X*. Además, como *X* es de Hausdorff, .

Por definición 2.5.1 los elementos de *Y* son de la forma , donde *U*, es un abierto en *X*.

Como , entonces y , con y abiertos en *Y*, además:

Pero , de manera que

Así, hemos encontrado conjuntos abiertos en Y que contienen elementos distintos que además son disjuntos.

2.7 Funciones continuas.

La continuidad, en sus concepciones más primitivas, se aplica independientemente a dos situaciones: la continuidad en la materia de un objeto y la continuidad del tiempo. Posteriormente y en un estado más avanzado de abstracción, estas dos nociones se fusionan en la de la continuidad del movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria. Es decir, en un instante t, se le asigna un lugar $f(t)$ del recorrido dado. La continuidad del movimiento se traduce entonces en que, al variar t en un intervalo de tiempo, los valores $f(t)$ recorren un camino continuo. Estas observaciones físicas, dan una idea bastante natural de cuando una función $f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ no es continua: si para algún instante de su dominio se produce una *rotura* en su recorrido. El concepto de continuidad debe descansar en el de proximidad.

En esta sección, estudiaremos una definición de continuidad donde muchas propiedades son generalizaciones directas de conceptos que se estudiaron sobre funciones continuas en cálculo y análisis.

Continuidad de una función.

Definición. 2.7.1. Sean *X* e *Y* espacios topológicos. Una función se dice que es continua si para cada subconjunto abierto *V* de *Y*, el conjunto es un subconjunto abierto de *X*.

Se debe tener en cuenta que , es decir que, indica la imagen inversa conjuntista. Además, si .

La continuidad de una función *f* no depende solamente de *f*, sino que, depende también de las topologías que determinan su dominio y recorrido. Se puede decir entonces que, *f* es continua relativa a las topologías sobre *X* e *Y*.

Teorema 2.7.1. Sean *X* e *Y* espacios topológicos y sea $\mathcal{B}$ la base que genera la topología en *Y*. Entonces es continua si, para cada , es abierta.

<u>*Demostración*</u>.

Partiendo de que para cada , es abierta, probaremos que es continua.

Del Lema 2.2.1, se tiene que: cada elemento de la topología generada por la base es igual a la colección de todas las uniones de elementos básicos, tomaremos un conjunto con estas características:

Teorema 2.7.2. Sean X e Y espacios topológicos y sea $\mathbb{S}$ la subbase que genera la topología en Y. Entonces es continua si, para cada , es abierta.

<u>*Demostración*</u>.

Partiendo de que para cada , es abierta probaremos que es continua.

De la Definición 2.2.4, se tiene que: cada elemento de la topología generada por la subbase se puede escribir como las uniones de intersecciones finitas de elementos de la subbase, tomaremos un elemento con estas particularidades:

Sea , talque .

Además, es abierta por hipótesis, entonces es abierta.

Teorema 2.7.3. Sean X e Y espacios topológicos; sea . Entonces son equivalentes:

(1) f es continua

(2) Si entonces

(3) Si B es cerrado en Y entonces es cerrado en X.

(4) Para cada y cada entorno V de f(x), existe un entorno talque

Si se cumple (4) para el punto x de X, diremos que f es ***continua en el punto x***.

Demostración.

Probaremos que (1) (2) f es continua y, si entonces .

Sean f una función continua, A un subconjunto de X y .

Entonces se probará que .

Sea un entorno de $f(x)$.

(por hipótesis)

De manera que debe intersecar a A en algún punto x_1.

interseca a $f(A)$ en el punto $f(x_1)$

■

Probaremos que (2) (3) y . Si B es cerrado en Y, entonces es cerrado en X.

Sean B cerrado en Y y .

Por teoría de conjuntos se tiene que:

como

Como [1]. Y como de aquí que .

Si

por hipótesis

Y como B es cerrado, entonces

Como f es continua y B es cerrado, entonces .

De manera que A es cerrado. ■

Probaremos que (3) (1) B es cerrado en Y , es cerrado en X entonces f es continua.

---

[1] Si , se verifica que: para cada , propiedad **(*ii*)** de funciones.

Sea V un conjunto abierto en Y.

Haciendo $B = Y - V$ se tiene que:

– , y como – [1] , entonces

– .

Por hipótesis B es cerrado en Y y es cerrado en X.

De manera que es abierto en X. ■

Probaremos que (1) (4) f es continua, entonces para cada y cada entorno V de f(x), existe un entorno talque

Sean y un entorno de $f(x)$.

(por hipótesis)

Probaremos que (4) (1) Para cada y cada entorno V de f(x), existe un entorno talque entonces, f es continua.

Sean V un conjunto abierto en Y y x un punto de .

(por hipótesis)

Como , entonces de aquí que,

[1] Si C y D son subconjuntos de Y, entonces propiedad **(*viii*)** de funciones.

Además se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos , por lo que es abierto. ■

Homeomorfismos.

Definición 2.7.2. Sean *X* e *Y* espacios topológicos; sea una biyección. Si la función *f* y la inversa , son ambas continuas, entonces se dice que es un ***homeomorfismo***.

El significado de la condición, sea continua, es que para cada conjunto abierto *U* de *X*, la imagen inversa de *U* mediante la aplicación es abierta en *Y*. Si embargo la imagen inversa de *U* mediante la aplicación es la misma que la imagen de *U* mediante la aplicación *f* (ver figura 2.7.1).

De manera que, otra forma de definir un homeomorfismo es, que es una correspondencia biyectiva talque es abierto en *Y* si, y solo si, *U* es abierto en *X*.

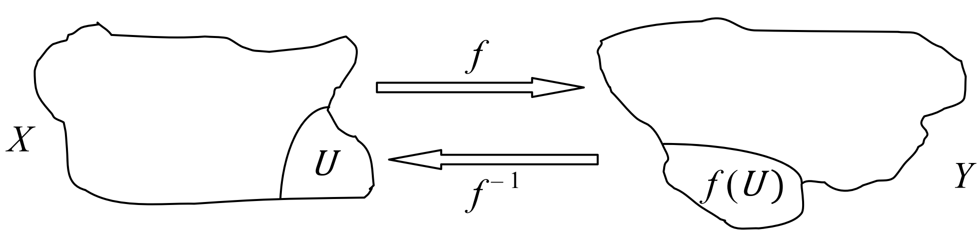


Figura 2.7.1.

El extraño nombre de homeomorfismo proviene de la etimología: ***Homeo* → *Semejante*** y ***Morfo* → *Forma***. Los homeomorfismos son importantes en topología, porque transforman a en una correspondencia uno a uno los abiertos de X en los de Y y viceversa. De manera que, dos espacios homeomorfos son indistinguibles topológicamente y solo difieren en el nombre "Abiertos", es decir, los abiertos de X y los abiertos en Y.

Definición 2.7.3. Sean X e Y espacios topológicos, una biyección y Z el conjunto imagen $f(X)$, considerado como un subespacio de Y. Entonces la función obtenida al restringir el rango de f, es biyectiva. Si ocurre que es un homeomorfismo de X con Z, decimos que la aplicación es un ***embebimiento topológico***, o simplemente ***embebimiento***, de X en Y.

Construcción de funciones continúas.

Hay varios métodos utilizados en análisis para construir funciones continuas, y algunos simplemente se generalizan para utilizarlos en espacios topológicos, y son estos, con los que daremos inicio en esta sección. A continuación se presenta un teorema que contiene ***reglas para construir funciones continuas***.

Teorema 2.7.4. Sean X, Y y Z espacios topológicos.

(a) Si envía todo punto de X a un mismo punto y_0 de Y, entonces f es continua. En este caso f se llamara ***función constante***.

(b) Si A es un subespacio de X, la función es continua. j se llamara ***función inclusión***.

(c) Si y son continuas, entonces la aplicación es continua. La aplicación se llama ***composición***.

(d) Si es continua y A es un subespacio de X, entonces es continua. A se le llama ***función restringida*** o ***restricción del dominio***.

(e) Sea una función continua . Si Z es un subespacio de Y que contiene el conjunto imagen $f(X)$, entonces la función , obtenida al restringir el rango de f, es continua. Si Z es un espacio con Y como subespacio, entonces la función obtenida el extender el recorrido de f es continua.

(f) La aplicación es continua si X se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos tales que es continua para cada α.

<u>*Demostración*</u>.

(a) Sean y V un abierto en Y.

El conjunto si V contiene a y_0, y como X es abierto , será abierto. Pero si V no contiene a y_0, el conjunto , que también es abierto de manera que, en ambos casos y por lo tanto f es continua. ■

(b) Sean U en abierto en X y la función inclusión definida como .

Como es abierto en A por definición 2.5.1, de manera que j es continua. ■

(c) Sea U un abierto en Z.

es abierto en Y (por hipótesis)

es abierta en X (por hipótesis)

Como por teoría elemental de conjuntos

es continua. ■

(d) Como es continua y es la función restringida a un subespacio A de X, y en (b) se probó que una aplicación , de un subespacio A de X es continua, entonces, podemos tomar .

De manea que si U es abierto en Y, entonces es abierto en A que se probo en (b) y es abierto en X, como se probo en Teorema 2.7.3, además

Como es abierta, entonces es abierta

es continua ■

(e) Sea la función continua .

Por hipótesis se tiene que, . De manera que se debe probar que obtenida a partir de f es continua.

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$X \longrightarrow Z$$

$$X \longleftarrow Y \longleftarrow Z$$

Sea W un abierto en Z.

para algún abierto V de Y por hipótesis

Aplicando la inversa a se tiene, , donde es un conjunto de Y. Si aplicamos la inversa de a se tiene , como , entonces ,de manera que , y como es abierta por ser continua, por lo tanto es abierta y g es continua.

Si Z tiene a Y como subespacio, podemos tomar h como la composición de y , siendo j la inclusión, como ya se demostró es continua. ■

(f) Sea V un abierto en Y.

porque ambas expresiones representan el conjunto de los para los que .

Como , es abierta para los , de manera que es abierto en X, por ser X la unión de los . Pero

Por lo que es abierta en X.

es continua. ■

Teorema 2.7.5. (***Lema del pegamiento***). Sea , donde A y B son cerrados en X. Sean y continuas. Si $f\ (x) = g\ (x)$ para cada , entonces f y g se combinan para dar una función , definida mediante $h\ (x) = f\ (x)$ si , y $h\ (x) = g\ (x)$ si .

Demostración.

Sea C un subconjunto cerrado de Y.

Como es continua, entonces es cerrado en A.

Del mismo modo es continua, entonces es cerrado en B.

De manera que es cerrado en y como , entonces dicha unión es cerrada en X.

Definiendo h como: $h\ (x) = f\ (x)$ si , y $h\ (x) = g\ (x)$ si .

Haciendo , así que, es cerrada en X.

es continua. ■

El teorema es verdadero para A y B abiertos en X y este seria, un caso especial de la regla de formulación local de continuidad.

Teorema 2.7.6. (**Aplicaciones en productos**). Sea dada por la ecuación . Entonces f es continua si, y solo si, las funciones y son continuas.

Demostración.

“ ”

Probaremos que si f es continua entonces las funciones y son continuas.

Sean y las proyecciones sobre el primer y segundo factor, respectivamente.

Como y , que además son continuas, de manera que serán abiertas si U y V lo son.

Además, para cada , se tiene que

Como f es continua, entonces y son composiciones de funciones continuas de y respectivamente, y por lo tanto serán continuas.

“ ”

Probaremos que si las funciones y son continuas, entonces f es continua.

Sean y un elemento básico de

Por hipótesis

Supongamos que .

Como y .

(por hipótesis)

De manera que y como y son continuas, entonces son abiertos, por lo tanto su intersección es abierta.

es continua. ■

2.8 La topología producto.

Anteriormente en la sección 2.4 se había definido una topología sobre el producto X Y, de dos espacios topológicos. En esta sección retomaremos y ampliaremos dicha definición en productos cartesianos más generales.

Consideremos los productos cartesianos

Donde cada es un espacio topológico. Hay dos procedimientos posibles:

El primero podría ser, tomar como base todos los conjuntos de la forma en el primer caso y los de la forma para el segundo, donde los son abiertos de , para cada *i*. Con este procedimiento se define efectivamente una topología sobre el producto cartesiano que se llama ***topología por cajas***.

El segundo procedimiento, consiste en generalizar la formulación de subbases de la definición 2.4, de manera que, se toma como subbase todos los conjuntos de la forma

, donde i es cualquier índice y es un conjunto abierto de . Esta topología se conoce como topología producto.

La diferencia entre estas dos formas de proceder consiste en que: para la primera un elemento básico B es una intersección finita de elementos básicos , para $i = 1, \ldots, n$. De manera que un punto $\mathbf{x}$ pertenece a B si, y solo si, , para todo $i = 1, \ldots, n$.

En cambio, en la segunda topología un elemento básico B, es una intersección de elementos de la subbase , para , así que, un punto $\mathbf{x}$ pertenece a B si, y solo si, , para , y no hay ninguna restricción sobre para otros valores de i.

En esta sección estudiaremos estas dos topologías para llegar al hecho de que ambas coinciden para y difieren para

Definición 2.8.1 Sea J un conjunto de índices. Dado un conjunto cualquiera X, definimos una ***J – upla*** de elementos de X como una función . Si α es un elemento de J, denotaremos el valor de $\mathbf{x}$ en α mediante en lugar de ; lo llamaremos *α – ésima* ***coordenada*** de $\mathbf{x}$. Y la función $\mathbf{x}$ la denotaremos

Para un conjunto arbitrario de índices de J. Y denotamos al conjunto de todas las *J – uplas* de elementos de X por X^J.

Definición 2.8.2 Sea una familia de conjuntos indexada y sea

Se define como el conjunto de todas las $J-$ uplas de elementos de X tales que para cada . Esto es, el conjunto de todas las funciones

tales que para cada .

En ocasiones representaremos el producto simplemente por , y a su elemento general , si el conjunto índice está claramente sobreentendido.

Si todos los conjuntos son iguales a un conjunto X, entonces el producto cartesiano es el conjunto X^J de todas las $J-$ *uplas* de elementos de X.

Definición 2.8.3 Sea una familia indexada de espacios topológicos. Tomemos como base para una topología sobre el espacio producto

la colección de todos los conjuntos de la forma

La topología generada por esta base se llama ***topología por cajas***.

Ahora probaremos que la intersección de dos básicos cualesquiera de es otro básico.

Además, como y son abiertos en , entonces es abierta en ; por lo tanto

■

Definición 2.8.4 Sea

La función que asigna a cada elemento del espacio producto su coordenada $\beta - \acute{e}sima$,

Se denomina ***aplicación proyección*** con el índice β.

Definición 2.8.5 Sea $\mathbb{S}_\beta$ la colección

y denotemos por $\mathbb{S}$ a la unión de esas colecciones,

La topología generada por la subbase $\mathbb{S}$ se denomina ***topología producto***. En esta topología, se denomina ***espacio producto***.

Teorema 2.8.1 (comparación de las topologías por cajas y producto). La topología por cajas sobre tiene como base a todos los conjuntos de la forma , donde es abierto en para cada α. La topología producto sobre tiene como base a todos los conjuntos de la forma , donde es abierto en para cada α y es igual a excepto para un numero finito de valores de α.

Demostración.

Vamos a demostrar que las topologías por cajas y producto son iguales para un número finito de productos.

Sean la topología por cajas sobre y la topología generada por una base ***B***.

La colección ***B*** esta formada por todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathbb{S}$. Ahora, si intersecamos elementos que pertenecen al mismo conjunto $\mathbb{S}_{\beta}$ se obtiene otro elemento del mismo $\mathbb{S}_{\beta}$, es decir:

Se obtiene el mismo resultado cuando intersecamos un número finito de elementos de $\mathbb{S}_{\beta}$.

De manera que, solo obtendremos algo nuevo cuando intersequemos elementos de conjuntos diferentes de $\mathbb{S}_{\beta}$. Así, un elemento cualquiera de $\mathbb{S}_{\beta}$, puede ser descrito como: un conjunto de finito de índices distintos del conjunto J.

Sean un conjunto de finito de índices distintos del conjunto J y un abierto en , para .

Entonces es un elemento cualquiera de ***B***.

Si un punto esta en B, entonces su β_1 – ésima coordenada esta en , su β_2 – ésima coordenada esta en y así hasta su β_n – ésima coordenada que estará en . De manera que no existe restricción alguna sobre la coordenada α – ésima de si α no es uno de los índices .

Sea .

Como B lo podemos escribir

y como ,

Sea .

Por definición 2.8.3, , donde abierto .

Por definición 2.8.4, la función le asigna a cada un , de manera que, si , entonces , si , entonces y así sucesivamente para .

De esta forma para podemos, mediante , encontrar un que este incluido en un abierto , así que

∎

Los teoremas que veremos a continuación son una generalización de los teoremas trabajados para el producto .

Teorema 2.8.2 Supongamos que la topología sobre cada espacio esta dada por una base . La colección de todos los conjuntos de la forma

donde para cada α, es una base para la topología por cajas .

<u>*Demostración*</u>.

Sea .

(por hipótesis)

Lo que prueba la primera condición de base.

Veamos ahora la segunda condición.

La colección de todos los conjuntos de la misma forma, donde para un conjunto finito de índices α y para todos los índices restantes, servirá como base para la topología producto

Teorema 2.8.3 Sea un subespacio de , para cada . Entonces es un subespacio de si en ambos productos está dada la topología por cajas, o si en ambos productos está dada la topología producto.

Demostración.

Supongamos que en y en es dada la topología por cajas, entonces probaremos que es un subespacio de

Sea la topología del subespacio .

Como en esta dada la topología por cajas y por hipótesis es un subespacio de , entonces es abierto en y es abierto en , . Así que

es un abierto en

Teorema 2.8.4 Si cada espacio es un espacio de Hausdorff, entonces es un espacio de Hausdorff en las topologías por cajas y producto.

Demostración.

Sea una familia indexada de espacios Hausdorff, en las que está dada la topología por cajas.

Sean , con .

Como entonces .

Por hipótesis existen conjuntos abiertos y en , tales que

Además, por hipótesis en esta dada la topología por cajas, es decir, que tiene como base

Por definición 2.8.3. De manera que

Dado que . Y como

entonces

Teorema 2.8.5 Sea una familia indexada de espacios y sea , para cada α. Si esta dotado por la topología por cajas o producto, entonces

Demostración.

Sean , y un elemento básico para la topología por cajas que contiene a .

Si , entonces , , de manera que, podemos elegir un punto para cada α.

Como está en y en , entonces .

Además, como es un elemento cualquiera y , entonces está en la cerradura de , es decir

Se probará que para cualquier índice dado β, se tiene que , para ello usaremos la función proyección dada en la definición 2.8.4.

Sea un conjunto abierto cualquiera de , tal que .

Si es un abierto de que contiene a , entonces es abierto en , por ser continua. De manera que debe existir un .

Además, si , entonces , de manera que

y por lo tanto

Teorema 2.8.6 Sea dada por la ecuación

Donde para cada α. Tomemos sobre la topología producto. Entonces la función f es continua si, y solo si, cada función es continua.

<u>*Demostración*</u>.

“ ”

Probaremos que: si la función f es continua, entonces cada función es continua.

Para ello probaremos que es una composición de funciones continuas.

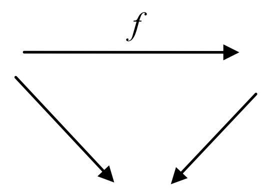
Sea la proyección del producto sobre su factor β – ésimo.

, definida como

La función es continua por definición 2.4.2, de manera que si es abierto en ,

entonces el conjunto es un elemento de la subbase para la topología producto sobre por definición 2.8.5.

Supongamos que es continua. El hecho que se nuestra en la figura siguiente:



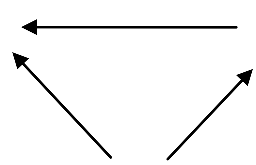
Como y f son continuas, entonces por teorema 2.7.4 (c) su composición es continua.

“ ”

Se probara que: si cada función es continua, entonces la función f es continua.

Para probar esto, bastará con ver que f^{-1} de cada elemento de la subbase es abierto en A.

Como es continua y por definición 2.8.5 es un elemento de la subbase para la topología producto sobre , para algún índice β, entonces es abierto en .



Como entonces

De manera que

Puesto que es continua, es abierto en *A*. Que era precisamente lo que se quería probar. ■

Capitulo 3

Conexión y compacidad

El término conexo significa, de una sola pieza, conectado, no separado. La cuestión de fijar la definición apropiada de conjunto conexo en un espacio topológico general fue un proceso complicado. Han habido varias definiciones matemáticas de este concepto, posiblemente Karl Theodor Wilhelm Weierstrass fue el primero que intentó dar una definición precisa, introduciendo el concepto de ***conexión por arcos***; en su forma más general, su enunciado es el siguiente: "*A es conexo por arcos si, y solo si para cada existe una imagen homeomorfa de en A, de la cual x e y son los puntos extremos*". Claramente una clase suficientemente amplia de espacios no contiene copias homeomorfas de segmentos, y por lo tanto, esta definición no puede aplicarse en general. Y aunque fue aplicable, la definición no siempre coincide con la usada hoy en día, excepto para conjuntos abiertos.

En 1883, Georg Waldemar Cantor aproximó el problema de un modo completamente distinto: definió una entre dos puntos a y b, como un conjunto finito de puntos , donde , para . Y entonces estableció: "*A es conexo cuando dos puntos cualesquiera de A pueden unirse por una en A, con ε suficientemente pequeño*". Como este concepto se basa en la noción de distancia, no se puede usar para espacios topológicos generales.

El siguiente paso fue dado por Marie Ennemond Camille Jordan en la segunda edición de "Cursos de Análisis" en 1893, donde definió: "*Un conjunto cerrado y acotado es conexo si, y solo si no se puede descomponer como la unión de dos conjuntos cerrados, no vacíos y disjuntos*". La ventaja de esta definición es que tiene sentido en un espacio general, aunque la hipótesis de acotación debe suprimirse y se debe probar en cada caso lo de la unión de conjuntos cerrados, limitándola al uso solo para este tipo de conjuntos.

La dificultad de extender esto a conjuntos arbitrarios llegó en 1906, cuando Frigyes Riesz consideró el conjunto dado con su topología relativa. Riesz dio dos definiciones de conexión, siendo la más fuerte y la utilizada en nuestros días, la que en 1911 fue propuesta por Niels Johann Lennes: *"A es conexo si, y sólo si para cualquier descomposición de A en dos conjuntos* B_1 *y* B_2 *no vacíos y disjuntos, o bien* B_1 *contiene puntos límite de* B_2 *o viceversa"*.

En 1914, Félix Hausdorff, evidentemente ignorando el trabajo de Riesz y Lennes, redescubrió la definición de Riesz y procedió entonces a dar un desarrollo sistemático de las propiedades de los conjuntos conexos. Fue, el que introdujo el concepto de componente como subconjunto conexo maximal.

¿Por qué ***la definición de Riesz – Lennes – Hausdorff***[1] se aceptó? La razón es, probablemente, que posee las propiedades siguientes: es general (con lo que puede aplicarse a subconjuntos arbitrarios de espacios topológicos cualesquiera); es un invariante topológico; esta noción y los resultados obtenidos usándola coinciden, en gran medida, con el concepto intuitivo de conexión; es una definición simple y da lugar a una amplia cantidad de resultados.

3.1 Espacios conexos

La conexión es una extensión de la idea de que un intervalo de la recta real es *de una pieza*. El problema de decidir cuando un espacio topológico es *de una pieza*, se resuelve decidiendo, cuando puede *romperse o separarse* en dos abiertos disjuntos, y por ello iniciaremos con la siguiente definición.

Definición 3.1.1 Sea X un espacio topológico. Una ***separación*** de X es un par U, V de abiertos no vacios de X, tales que y .

Si uno de los dos abiertos es vacio, se dice que la separación es trivial.

Definición 3.1.2 Sea X un espacio topológico. Se dice que X es ***conexo*** si no existe una separación de X.

[1] Esta se conoce así, porque: de la definición de espacio topológico conexo dada por C. Jordan en 1893 para subconjuntos compactos de espacios euclídeos, la generalización a espacios abstractos se debe a Riesz en 1907, Lennes en 1911 y Hausdorff en 1914.

Obviamente, la conexión es una propiedad topológica, ya que se formula completamente en términos de la colección de conjuntos abiertos de X. Dicho de otra forma, si X es un espacio conexo, también lo es cualquier espacio homeomorfo a X.

Otra forma de enunciar la definición de conexión es la siguiente:

Teorema 3.1.1 Un espacio X es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y el propio X.

Demostración.

“ ”

Probaremos que: “Si X es un espacio conexo, entonces los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacio y el propio X”.

Como es mas sencillo hablar de separación en lugar de conexión, y esta prueba es del tipo , de modo que nosotros trabajaremos con , es decir: “si vacio y X no son los únicos subconjuntos abiertos y cerrados en X, entonces X no es conexo.

Sea U un subconjunto propio no vacío de X que es abierto y cerrado a la vez.

Como y (por definición 3.1.1)

“ ”

Probaremos que: “Los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacio y el propio X entonces X es un espacio conexo”.

Al igual que la implicación anterior, esta la probaremos , es decir: “Si no es X un espacio conexo, entonces vacio y X no son los únicos subconjuntos abiertos y cerrados en X.

Por hipótesis X no es conexo, esto significa que admite una separación, entonces sean U y V un par de subconjuntos de X, tales que: .

Si aplicamos una diferencia a , es decir, entonces obtenemos: , por las leyes de De Morgan.

Además, como , entonces , y como , entonces .

Así: , por lo tanto de manera que U es abierto y cerrado en X.

Por lo tanto vacio y X no son los únicos abiertos y cerrados en X. ■

Para un subespacio Y de un espacio topológico X existe otra manera de formular la definición de conexión.

Lema 3.1.1 Si Y es un subespacio de X, una separación de Y es un par A, B de conjuntos no vacios y disjuntos cuya unión es Y de modo que ninguno de ellos contiene puntos límite del otro. El espacio Y es conexo si no existe una separación de Y.

<u>*Demostración*</u>.

Probaremos primero que: Si Y es un subespacio de X, una separación de Y es un par A, B de conjuntos no vacios y disjuntos cuya unión es Y de modo que ninguno de ellos contiene puntos límite del otro.

Supongamos que A, B forman una separación de Y.

(por definición 3.1.1)

Efectuando una diferencia de conjuntos en con respecto a B, tenemos .

Por las leyes de De Morgan , pero entonces ; además , de manera que:

Por lo tanto , de aquí que A es abierto y cerrado en Y.

Como la adherencia de A en X es y Y es un subespacio de X, entonces la adherencia de A en Y es por teorema 2.6.4.

Además, A es cerrado en Y, de manera que por definición 2.6.3 , de aquí que . Como por teorema 2.6.6, donde es el conjunto de puntos límite de A, por lo tanto B no contiene puntos límite de A.

Ahora efectuando una diferencia de conjuntos en con respecto a A, tenemos

.

Por teoría de conjuntos , pero entonces

; además , de manera que:

Por lo tanto , de aquí que B es abierto y cerrado en Y.

Como la adherencia de B en X es y Y es un subespacio de X, entonces la adherencia de B en Y es por teorema 2.6.4.

Además, B es cerrado en Y, de manera que por definición 2.6.3 , de aquí que . Como por teorema 2.6.6, donde es el conjunto de puntos límite de B, por lo tanto A no contiene puntos límite de B.

Ahora probaremos que Y es conexo.

Supongamos que Y no es conexo.

Como Y no es conexo, entonces admite una separación. Supongamos que A y B forman una separación de Y.

y

.

Como y su unión es Y, entonces A no contiene puntos límite de B y viceversa.

Si es la adherencia de A en X, entonces por teorema 2.6.4 es la adherencia de A en Y, se utiliza el mismo argumento para determinar que es la adherencia de B en Y.

De lo anterior se tiene que y y por lo tanto y por lo que A y B son cerrados.

Como se supuso que A y B forman una separación de Y, por lo tanto eran abiertos, de manera que A y B son abiertos y cerrados en Y. ■

Lema 3.1.2 Si los conjuntos C y D forman una separación de X, y además Y es un subespacio conexo de X, entonces Y está contenido bien en C, bien en D.

Demostración.

Por hipótesis C y D forman una separación de X.

y

.

La implicación anterior es por definición 3.1.1. Como Y es un subespacio de X podemos tomar y que son abiertos en Y por definición 2.5.1.

Por teoría de conjuntos se tiene

.

Si ambos y fueran igual a vacío, entonces , o si ambos fueran diferentes de vacío, entonces porque y formarían una separación en Y, lo que contradice la hipótesis de que Y es un subespacio conexo de X; pero el hecho que , nos deja la única opción de que alguno de ellos debe ser vacío.

Si , entonces , del mismo modo si , entonces ; en cualquiera de ambos casos Y estaría contenido enteramente en C o en D.

■

Teorema 3.1.2 La unión de una colección de subespacios conexos de X que tienen un punto en común es conexa.

Demostración.

Sean una colección de subespacios conexos de un espacio X y a un punto de .

Entonces probaremos que es conexo.

Como se ha mencionado en pruebas anteriores de esta sección es más fácil probar una separación que una conexidad. Pero esta vez haremos la prueba por contradicción, es decir, partiremos de que X_1 no es conexo.

Supongamos que U y V forman una separación de X_1.

(por definición 3.1.1)

Como a es un punto de

Supongamos que . Como y es conexo, , puede ser que ó , pero como ya se dijo que y , entonces , De manera que lo que contradice nuestra hipótesis, ya que se supuso que U y V eran una separación de X_1, es decir un par de conjuntos abiertos distintos de vacío cuya unión es X_1 y cuya intersección es vacía. ■

Teorema 3.1.3 Sea A es un subespacio conexo de X. Si , entonces B también es conexo.

Demostración.

Al igual que la prueba anterior, esta la haremos por contradicción, es decir: partiremos de que B no es conexo.

Sean A conexo y .

Como B no es conexo, admite una separación, supongamos que , talque .

Como A es un subespacio conexo, y B admite una separación, por lema 3.1.2 ó .

Supongamos que , aplicando cerradura en ambos lados de la inclusión se tiene . Como y , entonces B no puede intersecar a V, de manera que , pero por hipótesis teníamos que U y V eran una separación de B, por lo tanto ambos son diferentes de vacío.

Por lo tanto B es conexo. ■

Teorema 3.1.4 La imagen de un espacio conexo bajo una aplicación continua es un espacio conexo.

<u>*Demostración*</u>.

Sean X un espacio conexo, una aplicación continua y $f(X)$ la imagen de X.

Si hacemos $f(X) = Z$. De manera que se probara que $f(X)$ es conexo.

Por teorema 2.7.4 (e) la aplicación obtenida de f al restringir su rango al espacio Z es también continua. Supongamos que es esa aplicación continua.

Después de toda esta construcción de las aplicaciones nuestro enunciado es:

"Si X es un espacio conexo y es una aplicación continua, entonces el espacio imagen $f(X)$ que es una aplicación f al restringir su rango al espacio Z, es conexo".

Como se ha vuelto costumbre en esta sección esta prueba la haremos por contradicción, es decir, supondremos que nuestro espacio Z no es conexo.

Si Z no es conexo entonces, por definición 3.1.1 sea y una separación de Z talque U y V son distintos de vacío y abiertos en Z que cumplen y .

Como U y V son una separación de Z talque .

Aplicando a , se obtiene , como es continua y entonces) y cumplen y como es continua son abiertos en X , además entonces de manera que y forman una separación de X, lo que es una contradicción.

De manera que $f(X) = Z$ es conexo. ■

3.2 Subespacios conexos de la recta real

Los teoremas que se trataron en la sección anterior nos muestran cómo construir nuevos espacios conexos partiendo de ciertos espacios conexos dados. En esta sección enfocaremos nuestra atención en los reales, es decir, veremos si $\mathbb{R}$ con sus intervalos y rayos son conexos.

Definición 3.2.1 Un conjunto simplemente ordenado L con más de un elemento se dice que es un ***continuo lineal*** si se verifican las condiciones siguientes:

(1) L tiene la propiedad del supremo.

(2) Si $x < y$, entonces existe z tal que $x < z < y$.

Teorema 3.2.1 Si L es un continuo lineal con la topología del orden, entonces L es conexo, y también lo son los intervalos y los rayos de L.

Demostración.

Un subespacio Y de L será conexo si cada par de puntos a, b de Y con $a < b$, el intervalo $[a, b]$ de puntos de L está contenido en Y. Probaremos que si Y es un subespacio conexo de L, entonces Y es conexo.

Supongamos que Y es la unión disjunta de los abiertos U y V. Elijamos y , tales que a $<$ b. Como Y es conexo el intervalo $[a, b]$ de puntos de L está enteramente contenido en Y, de manera que, podemos escribir [*a*, *b*] como la unión de dos conjuntos disjuntos

y

donde y son abiertos en [*a*, *b*] con la topología del orden. Los conjuntos y no son vacíos porque y , por lo tanto y forman una separación de [*a*, *b*].

Por hipótesis L es continuo lineal, por definición 3.2.1 parte (1) tiene la propiedad del supremo.

Sea . Probaremos que *m* no pertenece a ni a lo cual contradeciría el hecho de que [*a*, *b*] es la unión de y .

Supongamos primero que .

Si , entonces , de manera que ó $a < m < b$. Como es abierto en [*a*, *b*] por lo tanto existe un intervalo de la forma contenido en . Si , entonces tendremos una contradicción porque *c* seria una cota superior de más pequeña que *m*.

Si $m < b$, entonces no intersecaría a , porque *m* es una cota superior de . De manera que no interseca a . Como *c* es una cota superior de más pequeña que *m*, lo que es una contradicción de nuestra hipótesis.

Supongamos ahora que .

Si , entonces de manera que ó $a < m < b$. Como es abierto en [*a*, *b*], debe existir algún intervalo de la forma contenido en . De la segunda propiedad de la definición 3.2.1, podemos asegurar que se verifica un continuo lineal L, ahora podemos elegir un punto tal que $m < z < d$. Por lo tanto , lo cual contradice nuestra hipótesis de que m es una cota superior de . ■

A continuación definiremos un criterio que nos será muy útil para demostrar que un espacio X es conexo; nos referimos, a la condición de que cualquier par de puntos de X pueda unirse mediante un camino en X.

Definición 3.2.2 Dados dos puntos x e y del espacio X, un ***camino*** en X que une x con y es una aplicación continua de algún intervalo cerrado de la recta real en X, de modo que y . Un espacio X se dice que es ***conexo por caminos*** si cada par de puntos de X se pueden unir mediante un camino en X.

Teorema 3.2.2 Todo espacio que es conexo por caminos también es un espacio conexo.

Demostración.

Realizaremos esta prueba por contradicción.

Sea X un espacio que no es conexo.

Si X no es conexo, entonces admite una separación.

Sea U y V una separación de X que, por definición 3.1.1 cumple: U y V son abiertos en X diferentes de vacio que y .

Sea un camino en X. Como es conexo y f continua, entonces es conexo. Además, como y además es conexo, entonces por lema 3.1.2 esta contenido en U o en V.

De manera que no existen caminos en X que unan puntos de U con puntos de V, lo cual contradice el hecho de que X sea conexo por caminos. ∎

3.3 Componentes y conexión local

Dado un espacio arbitrario X, existe una manera natural de dividirlo en varios trozos que son conexos (o conexos por caminos). Consideraremos este proceso a continuación:

Definición 3.3.1 Dado X, se dice que una relación es de equivalencia en X, si existe un subespacio conexo de X que contiene a ambos puntos. Las clases de equivalencia se denominan ***componentes*** o ***componentes conexas*** de X.

Probaremos las tres condiciones de una relación de equivalencia.

Sean U un subespacio conexo de X y .

Como y U es conexo de manera que todos los elementos de U están relacionados, entonces . Lo que prueba la reflexividad.

Sean U un subespacio conexo de X y , talque .

U es conexo, por lo tanto no admite separación alguna, además y ambos están en U, de manera que estos, como todos los demás elementos de U están relacionados, así . Lo que prueba la simetría.

Por último veremos la transitividad.

Sean U y V dos subespacios conexos de X y , , tales que en U y en V.

El punto y es común para U y para V, si unimos U con V, es decir , por teorema 3.1.2 es conexa; como y de manera que .

Teorema 3.3.1 Las componentes de X son subespacios disjuntos y conexos de X cuya unión es X de forma que cada subespacio conexo de X no trivial interseca sólo a una de ellas.

Demostración.

Como en las componentes está dada una relación de equivalencia, entonces cada par de puntos que están relacionados están contenidos es un subespacio conexo de X, por definición 3.2.1, de manera que si tomamos subespacios conexos que no tengan puntos relacionados, entonces dichos espacios serán disjuntos. Así, estas componentes forman clases disjuntas cuya unión será X.

Probemos que cada subespacio conexo U de X interseca solamente a una componente. Si U interseca a las componentes C_1 y C_2 en X, con y , se tiene que por definición 3.2.1 y esto solo es posible si $C_1 = C_2$.

Ahora veremos si cada componente C es conexa.

Sea .

Como en C está dada una relación de equivalencia, entonces para cada se tiene que y por lo tanto existe un subespacio conexo que contiene a ambos puntos. Como de manera que

Además, los subespacios son conexos y tienen al punto en común, por teorema 3.1.2 C es conexo y

Definición 3.3.2 Definamos otra relación de equivalencia en el espacio X dada por: si existe un camino en X uniendo x con y. Las clases de equivalencia se denominan ***componentes conexas por caminos*** de X.

Teorema 3.3.2 Las componentes conexas por caminos de X son subespacios disjuntos conexos por caminos de X cuya unión es X, tales que cada subespacio conexo por caminos de X no trivial interseca sólo a una de ellas.

Demostración.

Sean C_1 y C_2 las componentes conexas por caminos de x e y respectivamente.

Como C_1 y C_2 son conexas por caminos, entonces son conexas por teorema 3.1.5 y si son conexas por teorema 3.2.1 dichas componentes son disjuntas en X tales que su unión es igual a X entonces cada subespacio conexo de X no trivial interseca sólo a una de ellas.

Si y además, en cada componentes conexa por caminos hay una relación dada en definición 3.2.2 entonces es subespacio contiene a ambos puntos y será conexos por caminos, por teorema 3.2.1

Donde C es conexo por caminos. ■

Definición 3.3.3 Se dice que un espacio X es ***localmente conexo en*** x si para cada entorno , existe un entorno conexo talque . Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, se dice que X es ***localmente conexo***.

Definición 3.3.4 Se dice que un espacio X es ***localmente conexo por caminos en*** x si para cada entorno , existe un entorno conexo por caminos talque . Si X es localmente conexo por caminos en cada uno de sus puntos, se dice que X es ***localmente conexo por caminos***.

Teorema 3.3.3 Un espacio X es localmente conexo si, y sólo si, para cada conjunto abierto U de X, cada componente de U es abierta en X.

Demostración.

“ ”

Supongamos que X es localmente conexo, y sean U un abierto en de X y C una componente de U.

Si podemos elegir un entorno conexo V de x talque por definición 3.2.3

Como V es conexo, debe estar contenido enteramente en la componente C de U. De manera que C es abierta.

“ ”

Supongamos que las componentes de los abiertos de X son abiertas.

Sean , un entorno U de x y C una componente de U que contiene a x.

Por hipótesis C es conexo y abierto en X, entonces por definición 3.2.3 X es localmente conexo. ■

Teorema 3.3.4 Un espacio X es localmente conexo por caminos si, y sólo si, para cada conjunto abierto U de X, cada componente conexa por caminos de U es abierta en X.

<u>*Demostración*</u>.

“ ”

Supongamos que las componentes de los abiertos de X son abiertas.

Sea X un espacio localmente conexo por caminos, y sean U un abierto en de X y C una componente de U.

Si podemos elegir un entorno conexo por caminos V de x talque por definición 3.2.4

Como V es conexo por caminos, debe estar contenido enteramente en la componente C de U. De manera que C es abierta.

“ ”

Supongamos que las componentes de los abiertos de X son abiertas.

Sean , un entorno U de x y C una componente de U que contiene a x.

Por hipótesis C es conexo por caminos y abierto en X, entonces por definición 3.2.4 X es localmente convexo por caminos. ■

La relación entre componentes conexas y conexas por caminos está dada por el resultado siguiente:

Teorema 3.3.5 Si X es un espacio topológico, cada componente conexa por caminos de X está contenida en una componente de X. Si X es localmente conexa por caminos, entonces las componentes conexas por caminos de X coinciden.

Demostración.

Sean C una componente de X, x un punto de C y D la componente conexa por caminos de X que contiene a x.

Como D es conexa . Se demostrará que si X es localmente conexo por camino, entonces $D = C$.

Realizaremos esta prueba por contradicción, es decir, supongamos que D es un subconjunto propio de C.

Sea E la unión de todas las componentes conexas por caminos de X que son distintas de D y que intersecan a C. De manera que dichas componentes están contenidas en C, así

Como X es localmente conexo por caminos, cada componente conexa por caminos de X es un abierto de X por teorema 3.2.4, de manera que C es abierta y como entonces D y E son abiertas, lo que contradice la conexión de C. ■

3.4 Espacios compactos

La noción de compacidad no nos es tan cercana y natural como la de conexión. La compacidad es una propiedad que proporciona a los espacios topológicos que la satisfacen una estructura similar a la que poseen los conjuntos cerrados y acotados en espacios euclídeos. La dificultad radica en que, los conjuntos cerrados y acotados de un espacio euclídeo se pueden caracterizar a través del ***teorema de Bolzano – Weierstrass*** (establecido en términos de conjuntos o de sucesiones), así como el ***teorema de Heine – Borel*** o el ***teorema de Cantor*** sobre conjuntos cerrados encajados. Existen, por lo tanto, un gran número de caminos para introducir la noción de compacidad en espacios topológicos.

Estas distintas formulaciones tienen sentido en espacios generales, mientras que el concepto inicial de ***cerrado*** y ***acotado*** no lo posee. Sin embargo, estas diferentes nociones de compacidad no son equivalentes en espacios generales. Esto da lugar, en algunas ocasiones, a confusión o ambigüedad a la hora de hablar de compacidad.

Maurice Fréchet, en 1906, fue el primero en usar el término compacto: *"A es compacto, si, y sólo si, cada subconjunto infinito de A posee un punto límite (que está* *necesariamente en A)".* Esto se modificó posteriormente por la formulación: *"cada subconjunto infinito de A posee un punto límite en A".*

Riesz sugirió en 1908 el tratamiento de la compacidad en relación con el comportamiento de familias de cerrados poseyendo la *propiedad de intersección finita*.

En 1924, Aleksander Danilovich Alexandroff y Pável Samuílovich Urysohn definieron la ***bicompacidad***: *"A es bicompacto, si cada cubrimiento abierto del conjunto tiene un subrecubrimiento finito"*, y establecieron muchas de sus propiedades. Tras probar Andrey Nikolayevich Tychonoff, en 1936, que el producto arbitrario de espacios bicompactos es bicompacto, la bicompacidad apareció como la definición más apropiada de compacidad en espacios topológicos. Esto llevó a Bourbaki, en 1940, a eliminar el prefijo ***bi*** y a dar una definición de compacidad equivalente a la propiedad de Heine – Borel. Esta noción fue adoptada posteriormente por muchos autores. Además, y parece que sin ninguna razón suficiente, Bourbaki requirió también que la compacidad incluyera el axioma $T2$[1]; sin embargo, muchos autores no han seguido esta filosofía.

Cuando un espacio topológico posee una propiedad local, es natural considerar la familia de los entornos abiertos donde se satisface dicha propiedad. Esta familia

[1] Un espacio topológico X se dice que es T2 ó Hausdorff si para todo , con , existen entornos y , de *x* e *y* respectivamente, tal que y , es decir, .

constituye un recubrimiento del espacio, y en el estudio de la propiedad dada es, sin duda, de gran ayuda saber si este recubrimiento puede ser reducido a uno finito.

La compacidad de un espacio proporciona siempre un recubrimiento finito de cualquier
recubrimiento abierto del espacio, y ello permite, bajo ciertas hipótesis, poder pasar de lo local a lo global, es decir, poder obtener una propiedad del espacio como consecuencia de resultados locales en un número finito de puntos.

Definición 3.4.1 Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio X se dice que es un ***recubrimiento*** de X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con X. Se dice que $\mathcal{A}$ es un ***recubrimiento abierto*** de X si es un recubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X.

Definición 3.4.2 Un espacio topológico X se dice que es ***compacto*** si todo recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X admite un subrecubrimiento finito.

En general, resulta complicado decidir cuándo un espacio dado es compacto o no. De manera que primero probaremos algunos teoremas y lemas generales que nos muestran cómo construir espacios compactos a partir de otros compactos ya dados.

Lema 3.4.1 Sea Y un subespacio de X. Entonces Y es compacto si, y sólo si, cada recubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre a Y.

Demostración.

“ ”

“Si Y es compacto entonces, cada recubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre a Y”

Supongamos que Y es compacto y que es un recubrimiento de Y por abiertos de X, es decir

Por hipótesis Y es un subespacio compacto de X, entonces la colección es un recubrimiento de Y por conjuntos abiertos de Y.

Como Y es compacto, existe una subcolección finita cubriendo a Y, o sea:

Por tanto es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre a Y.

“ ”

“Si cada recubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre a Y entonces, Y es compacto”

Sea un recubrimiento de Y por abiertos de Y.

Para cada α, podemos elegir un conjunto abierto en X tal que

.

La colección es un recubrimiento de Y por abiertos en X. Por hipótesis, alguna subcolección finita cubre a Y. Por lo tanto es una subcolección finita de que cubre a Y. ■

Teorema 3.4.1 Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.

Demostración.

Sean Y un subespacio cerrado del espacio compacto X y $\mathcal{A}$ un recubrimiento de Y por abiertos de X.

Como Y es cerrado, entonces $X - Y$ es abierto, además $\mathcal{A}$ es un recubrimiento de Y por abiertos de X, de manera que podemos formar un recubrimiento abierto de X uniendo estos conjuntos, es decir, .

Por hipótesis X es compacto, de manera que cada recubrimiento abierto de X admite un recubrimiento finito. Sea un recubrimiento finito de .

Si contiene a $X - Y$ o no, nos será indiferente, ya que si contiene a $X - Y$, solamente descartamos esa parte y seguirá siendo un recubrimiento finito de Y ; si no contiene a $X - Y$ cubrirá siempre a Y y en cualquier caso tendremos un recubrimiento finito de Y. ■

Teorema 3.4.2 Cada subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

Demostración.

Sea Y un subespacio compacto de un espacio Hausdorff X.

Probaremos que $X - Y$ es abierto, y luego Y será cerrado.

Sean x un punto de $X - Y$ y y un punto de Y.

Se probara que existe un entorno de x que no interseca a Y.

Elijamos entornos disjuntos y , de x y y respectivamente, esto es posible ya que X es Hausdorff.

Sea un cubrimiento de Y por abiertos de X.

Como Y es compacto, sea un recubrimiento finito de que cubre a Y.

Si unimos los elementos del recubrimiento finito , es decir, . V contiene a Y. Además, si tomamos un entorno de x que sea disjunto a y del mismo modo tomamos entornos de x que sean disjuntos a , para todo i, podemos formar un conjunto que es abierto en X y disjunto a V.

Como V contiene a Y y U es un entorno de x disjunto con V, entonces U no interseca a Y. ■

El hecho demostrado en el teorema anterior se ilustra en la figura siguiente:

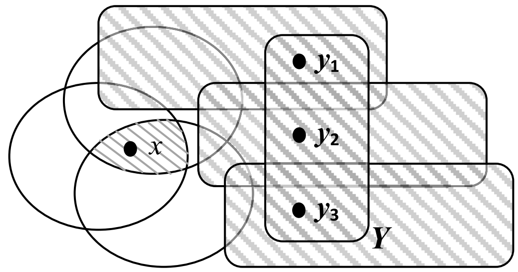


Figura 3.4.1

Teorema 3.4.3 La imagen de un espacio compacto bajo una aplicación continua es un espacio compacto.

<u>*Demostración*</u>.

Sean una aplicación continua, X un espacio compacto y $\mathcal{A}$ un recubrimiento del conjunto $f(X)$ por abiertos de Y.

Como f es continua, la colección es un recubrimiento abierto de X.

Por ser X compacto el recubrimiento admite una colección finita que cubre a X. Sea un recubrimiento finito de X.

Como es un recubrimiento finito de X, entonces es un recubrimiento finito de $f(X)$. ■

Teorema 3.4.4 Sea una aplicación continua y biyectiva. Si X es compacto e Y es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración.

Recordemos que una función es un homomorfismo si y son continuas, como en el teorema anterior ya se probo la continuidad de , entonces solo bastará con probar que las imágenes de conjuntos cerrados de X bajo f son cerrados en Y, con ello probaremos la continuidad de ; lo haremos de esta forma para poder basarnos en los teoremas ya demostrados y así hacer más fácil nuestra prueba.

Sea A un conjunto cerrado del espacio compacto X.

Si A es cerrado en X, entonces por teorema 3.4.1, A es compacto.

Por hipótesis f es continua y biyectiva, entonces $f(A)$ es compacta, por teorema 3.4.3. Además, como Y es Hausdorff, entonces por teorema 3.4.2 $f(A)$ es cerrado en Y. ■

Teorema 3.4.5 El producto de un número finito de espacios compactos es compacto.

Demostración.

Probaremos el teorema, primero para el producto de dos espacios compactos, pero cuando se pruebe para un número finito de compactos lo haremos por inducción, de manera que al seguir este tipo de prueba debemos iniciar con el producto de un compacto con otro que no lo sea.

Paso 1. Sean X un espacio cualquiera, Y un espacio compacto, x_0 un punto de X y N un abierto de que contiene la “rebanada” de . Se probara en este paso que, existe un entorno W de x_0 en X talque N contiene completamente al conjunto

.

Sea una cobertura de , donde es un básico de para tal que

.

El espacio es homeomorfo a Y de por lo tanto es compacto, así podemos cubrir a con un numero finito de estos elementos básicos, es decir elementos de la forma

.

Supongamos que cada elemento básico interseca realmente a , ya que, si algún elemento no interseca a no nos serviría y lo descartamos de la colección finita y seguiríamos teniendo un recubrimiento finito de .

Supongamos que .

W es abierto y además contiene a x_0 porque cada básico interseca a .

Los conjuntos elegidos para cubrir a , también cubren a .

Sea un punto de .

Consideremos ahora el punto de la rebanada que tiene la misma y – coordenada en ese punto. Así, pertenece a algún como se quería probar.

Como todos los conjuntos están contenidos en N y, además cubren a , se tiene que el tubo también está contenido en N.

El hecho anterior se ilustra en la figura 3.4.2.

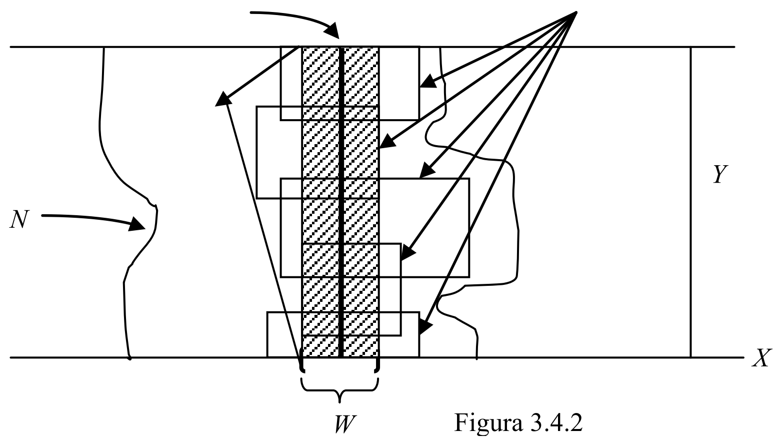


Figura 3.4.2

Paso 2.

Sean X e Y espacios compactos y $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de . Dado , la rebanada es compacta y estará cubierta por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$.

La unión es un abierto que contiene a donde W es un abierto de X.

Entonces está cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$.

Así que, para cada , se puede elegir un entorno talque el tubo puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. La colección de todos los entornos es un recubrimiento abierto de X; por la compacidad de X, existe una subcolección finita cubriendo a X.

La unión de los tubos es el espacio ya que cada uno de ellos puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$, y de este modo es compacto. ■

Lema 3.4.2 (**El lema del tubo**) Consideremos el espacio producto , donde Y es compacto. Si N es un conjunto abierto de conteniendo la rebanada de , entonces N contiene algún tubo sobre , donde W es un entorno de x_0 en X.

Demostración.

Sean X un espacio cualquiera, Y un espacio compacto, x_0 un punto de X y N un abierto de que contiene la "rebanada" de . Se probara que, existe un entorno W de x_0 en X talque .

Sea una cobertura de , donde es un básico de para tal que .

El espacio es homeomorfo a Y de por lo tanto es compacto, así podemos cubrir a con un numero finito de estos elementos básicos, es decir elementos de la forma

Supongamos que cada elemento básico interseca realmente a , ya que, si algún elemento no interseca a no nos serviría y lo descartamos de la colección finita y seguiríamos teniendo un recubrimiento finito de .

W es abierto por ser una intersección finita de abiertos, y además contiene a x_0 porque cada básico interseca a .

Los conjuntos elegidos para cubrir a , también cubren a .

Sea un punto de .

Consideremos ahora el punto de la rebanada que tiene la misma *y – coordenada* en ese punto. Así, pertenece a algún como se quería probar.

Como todos los conjuntos están contenidos en *N* y, además cubren a , se tiene que el tubo también está contenido en *N*. ■

Definición 3.4.3 Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X se dice que tiene la propiedad de la intersección finita si cada subcolección finita

de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía, es decir, es no vacía.

Teorema 3.4.6 Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si, y sólo si, para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección

es no vacía.

<u>*Demostración*</u>.

“ ”

Se probara que: “Si X es un espacio topológico compacto entonces, para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección

es no vacía”.

Sean X un espacio topológico compacto y una familia de subconjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de la intersección finita tal que

Si tomamos los complementos de la última expresión se tiene:

que es una colección de abiertos, por ser complementos de conjuntos cerrados, y como la intersección de los es vacía entonces la unión se sus complementos es el espacio topológico, es decir

Pero X es compacto, por hipótesis, entonces admite una subcobertura finita de abiertos, es decir, que la colección de abiertos

Si tomamos el complemento de esta última colección tenemos

Que es vacía por ser el complemento de un recubrimiento de X, lo que contradice el hecho de que tiene la propiedad de la intersección finita.

“ ”

Se probara que: “Si para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en un espacio topológico X con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección

es no vacía, entonces X es compacto”.

Sea un recubrimiento de abiertos de X.

Como es una cobertura de X, entonces

Si tomamos los complementos de estos conjuntos tenemos

Esta última igualdad se da porque se trata del complemento de una cobertura de *X*, además los son cerrados, por ser complementos de abiertos, por lo tanto su intersección también es cerrada y no tiene la propiedad de la propiedad de intersección finita. De manera que podemos tomar una intersección finita vacía de estos elementos que es, es decir,

Si tomamos ahora el complemento se esta última expresión, tenemos

que es un recubrimiento finito de abiertos de *X*, de manera que *X* es compacto. ■

Ahora se probara un lema singularmente importante para nuestro estudio, ya que a partir de él se probaran muchos más.

Lema 3.4.3 (Lema del número de Lebesgue) Sea (X, d) un espacio métrico en el que toda sucesión tenga una subsucesion convergente y sea un recubrimiento abierto, entonces existe (***numero de Lebesgue***) tal que para cualquier hay un abierto del recubrimiento conteniendo a .

<u>*Demostración.*</u>

Si no existe tal , para cada existe tal que − para cualquier del recubrimiento. Sea l el límite de una subsucesion que converge a , digamos . Sea tal que . Por ser abierto existe . Además de la convergencia de a l se deduce que existe suficientemente grande tal que − y —. De aquí

— −

(Se ha aplicado la desigualdad triangular[1] en la inclusión central). Pero esto contradice que − para todo n y cualquier . ■

[1] Se dice que un conjunto X es un espacio métrico, si existe una función llamada métrica, en X que satisface las condiciones siguientes : 1.- , si y sólo si ; 2.- si y sólo si y 3.- . La condición 3 se conoce como desigualdad triangular.

3.5 Compacidad por punto límite

Cuando se introdujo la noción de compacidad, se menciono que existían formulaciones equivalentes que son frecuentemente utilizadas sobre dicho término. En esta sección veremos una de ellas que en general, coincide cuando se trata de espacios metrizables, aunque cuando no sea este el caso esta noción es más débil.

Definición 3.5.1 Un espacio se dice que es compacto por punto límite si cada subconjunto infinito de X tiene un punto límite.

Teorema 3.5.1 Si un espacio X es compacto, entonces es compacto por punto límite.

Demostración.

Sean X un espacio compacto y A un subconjunto de X.

Se probará que si A infinito, entonces tiene un punto límite. Pero, en este caso será más sencillo probar el contra recíproco, es decir, probaremos que: "Si A no tiene un punto límite, entonces es finito".

Supongamos que A no tiene un punto límite.

Si A no tiene punto un punto límite, entonces A contiene todos sus puntos de acumulación.

Como A contiene todos sus puntos límite, por corolario 2.6.7 A es cerrado.

Para cada podemos elegir un entorno de tal manera que interseque a A solo en el punto a.

Así, forman una cobertura de X, $X - A$ es abierto porque A es cerrado y los entornos también son abiertos, de manera que es abierto.

Como X es compacto por hipótesis, la cobertura admite una subcobertura finita. Sabemos que y además cada contiene solamente un punto de A, por lo tanto A debe ser finito. ■

Definición 3.5.2 Sea X un espacio topológico. Si es una sucesión de puntos de X, y si

es una sucesión creciente de enteros positivos, entonces la sucesión definida por se denomina ***subsucesión*** de la sucesión . El espacio X se dice que es ***sucesionalmente compacto*** si cada sucesión de puntos de X contiene una subsucesión convergente.

Teorema 3.5.2 Sea X un espacio metrizable. Entonces son equivalentes:

(1) X es compacto.

(2) X es compacto por punto límite.

(3) X es sucesionalmente compacto.

Demostración.

(1)   (2)

"Si X es compacto, entonces es compacto por punto límite". Esto se probó en el teorema anterior.

(2)   (3)

"Si X es compacto por punto límite, entonces es sucesionalmente compacto".

Sean   una sucesión de puntos de X y   .

Si A es finito, entonces existe un punto x talque   para un número finito de valores de n. En este caso la sucesión   tiene una subsucesión que es constante de manera que es convergente.

Si A es infinito, entonces A tiene un punto límite x.

Sea   una subsucesión que converge en x de la manera siguiente: elijamos un talque   , es decir, para   determinamos una bola abierta de centro x y radio 1 que contenga a   . Supongamos que tenemos un entero positivo   dado. Si elegimos un entero , talque   la bola   interseca a A en un número infinito de puntos, de este modo la sucesión   converge a x.

(3) (1)

"Si X es sucesionalmente compacto, entonces es compacto"

Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X y supongamos que no existe un tal que cada conjunto de diámetro menor que esté contenido en un elemento de $\mathcal{A}$.

Si no existe un tal que, para cada conjunto de diámetro menor que esté contenido en un elemento de $\mathcal{A}$, entonces para cada , existe un conjunto con diámetro menor que – que no está contenido en ningún elemento de $\mathcal{A}$.

Elijamos un , para cada , por hipótesis existe una subsucesión de la sucesión que converge a un punto a, pero a pertenece a algún A de $\mathcal{A}$.

Como A es abierto, se puede elegir tal que . Si i es lo suficientemente grande para que – –, entonces el conjunto estaría contenido en un entorno – de ; al elegir un i lo suficientemente grande para que –, entonces estaría contenido en el entorno a de radio , lo que significaría que lo que contradice nuestra hipótesis.

Ahora probaremos que si X es sucesionalmente compacto, entonces para un dado, existe un cubrimiento finito de X por - bolas abiertas.

Supongamos que existe un tal que X no puede ser cubierto por un número finito de – bolas. Elijamos un cualquiera de X, como la bola no es todo X, porque no lo cubre, ya que eso estamos suponiendo, podemos elegir otro punto de X que no esté en y así sucesivamente, para , podemos elegir un en X que no esté en , como todas estas bolas no cubren a X, podemos obtener una , para $i = 1, \dots, n$. De esta manera, la sucesión no puede tener una subsucesion convergente, de manera que cualquier bola de radio – contiene a lo sumo un punto de la sucesión.

Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X.

Como X es sucesionalmente compacto, el cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ tiene un número de Lebesgue . Si tomamos –, además podemos encontrar un cubrimiento finito de X por – bolas. Cada una de las – bolas tiene como mucho diámetro —, por lo tanto están contenidas en algún elemento de $\mathcal{A}$, si elegimos ese elemento de $\mathcal{A}$ para cada una de estas – bolas, obtenemos una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre X. ■

Tercera Parte

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

Capítulo 4

El grupo fundamental

El objetivo principal de la topología algebraica es tener una manera de trasladar preguntas de la topología general o conjuntista al Algebra. La estructura algebraica que retomaremos con mayor énfasis es la de Grupo, sus características sus operaciones, como las sumas directas y los productos libres; aunque se hace la aclaración que: el estudio de Grupos que realizaremos será con el único propósito de aplicarlo en nuestro trabajo de Topología, así que, por este motivo el estudio sobre Grupo que haremos será muy superficial, mas que todo como una especie de repaso, se recomienda, en caso de querer estudiar mas a fondo dicha estructura algebraica, consultar un texto mas adecuado.

El proceso consistirá en hacer una construcción que le asigne un grupo a cualquier espacio topológico X que consideremos. Para lograr este fin haremos uso de las funciones continuas y los homomorfismos.

En álgebra abstracta, la **teoría de grupos** estudia dichas estructuras algebraicas, sus objetivos son, entre otros, la clasificación de los grupos, sus propiedades y sus aplicaciones tanto dentro como fuera de la matemática.

Los grupos sirven como pilar a otras estructuras algebraicas más elaboradas como los anillos, los cuerpos o los espacios vectoriales. La teoría de grupos tiene muchas aplicaciones en el campo de la física y la química, y es potencialmente aplicable en situaciones caracterizadas por la simetría.

Un conjunto , junto con una ley de composición interna que satisface los siguientes axiomas:

1. Cierre: , .
2. Asociatividad: .
3. Elemento identidad: .
4. Elemento inverso: .

Recibe el nombre de ***grupo***, y se representa .

Por lo tanto, un grupo está formado por un conjunto de elementos abstractos, y por una ley de composición interna que los relaciona. Dicha ley de composición interna indica cómo deben ser manipulados los elementos del grupo.

Si el grupo está formado solamente por el elemento neutro entonces le llamaremos ***grupo trivial***, es decir, si es un grupo talque , entonces es un grupo trivial.

Además, si en un grupo , no se cumple alguna de las condiciones, entonces el grupo recibe el nombre de ***magma*** o ***grupoide***.

Un grupo se dice que es ***abeliano*** si además de cumplir con las propiedades de grupo, se satisface la conmutatividad, es decir, .

Sea un grupo y , diremos que H es un **subgrupo** de si se cumple que:

1. El elemento identidad de G está en H.

2. .

3. Para cualquier .

Consideremos el grupo y las potencias de un elemento fijo , es decir que representaremos , de manera que ; donde se definen las propiedades siguientes:

1.

2.

3.

El subgrupo lo llamaremos ***subgrupo cíclico*** de generado por uno de sus elementos x y diremos que x es un ***generador*** de .

Si diremos que es un ***grupo cíclico generado por*** x.

Supongamos que G y son dos grupos, un ***homomorfismo*** es una aplicación tal que , para todos , en consecuencia se satisfacen las ecuaciones y , donde y son los neutros de G y , respectivamente, y el exponente – 1 denota el inverso.

Veamos primero que .

Sean los grupos G y , y el homomorfismo tal que donde .

Como es un grupo, entonces posee elemento identidad tal que .

Tomemos , entonces aplicando f se tiene que .
De igual manera que en el razonamiento anterior; como al aplicar f obtenemos .

Como y satisface de manera que es elemento identidad de , para el cual utilizaremos la notación , es decir .

Verifiquemos ahora que .

Sea la identidad en .

Aplicando f a se tiene que , por lo tanto

Como , entonces , pero el único elemento en que cumple con esta condición es el inverso, entonces .

Si la imagen de un homomorfismo es , entonces el homomorfismo se llamará ***homomorfismo trivial***.

Si un homomorfismo es tal que , , entonces el homomorfismo f lo llamaremos ***homomorfismo identidad*** y se denotara i, es decir, el homomorfismo tal que , es el homomorfismo identidad.

El ***núcleo*** (***o kernel***) de un homomorfismo es el conjunto de los elementos de que tienen como imagen el elemento identidad de . Dicho conjunto lo representaremos , el cual es un subgrupo de . De la misma forma, la imagen de f es un subgrupo de . El homomorfismo f se dice que es un ***monomorfismo*** si es inyectivo (o, equivalentemente, el núcleo de f contiene solo al neutro). Se dice que es un ***epimorfismo*** si es sobreyectivo, y es un ***isomorfismo*** si es biyectivo.

De aquí en adelante cuando utilicemos la simbología I, nos estaremos refiriendo al intervalo cerrado de cero a uno, es decir, .

En este capítulo estudiaremos las estructuras algebraicas mencionadas en los párrafos anteriores, para tener la base teórica necesaria que utilizaremos en el análisis del Teorema de Seifert – Van Kampen.

4.1 Homotopía de caminos

Iniciaremos esta sección considerando una relación de equivalencia que nos permitirá estudiar caminos entre espacios topológicos, esta relación se conoce como ***homotopía de caminos*** y se define a continuación:

Definición 4.1.1. Sean los espacios X, Y y dos funciones continuas. Una ***homotopía*** de f a es una función continua tal que y , para cada .

Las funciones f y son llamadas ***homótopas*** u ***homotópicas*** y se denota .

Si y es una aplicación constante, diremos que f es ***homotópicamente nula***.

Consideremos el caso especial en el que f es un camino en X. Recordemos que si es una aplicación continua tal que y , se dice que f es un camino en X desde hasta . Se dice también que es el ***punto inicial*** y es el ***punto final*** del camino f.

Si f y , son dos caminos en X, existe una relación más fuerte entre ellos que la homotopía, la cual definimos como sigue:

Definición 4.1.2. Dos caminos f y , que aplican el intervalo I en X, se dice que son ***homotópicos por caminos*** si tienen el mismo punto inicial y el mismo punto final , y si existe una función continua tal que y , y , para cada .

La función recibe el nombre de homotopía de caminos entre *f* y . Si *f* es homotópico por caminos a , escribiremos .

En la primera condición se establece una homotopía *H* entre *f* y , es decir, una forma continua de deformar el camino *f* en el camino y la segunda condición dice que, para cada *t*, la aplicación , definida por la ecuación , es un camino desde hasta , dicho de otra manera, los puntos extremos del camino permanecen fijos durante la deformación.

Lema 4.1.1. Las relaciones y son relaciones de equivalencia.

Si *f* es un camino, denotaremos su clase de equivalencia de homotopía de caminos por [*f*].

<u>*Demostración*</u>.

a) Reflexividad. Probaremos que .

Sean la función continua y la aplicación , tal que , con .

Como y , entonces por definición 4.1.1, .

Probaremos ahora la reflexividad de .

Sean la función continua y la aplicación , tal que , con y .

Como y , entonces por definición 4.1.2, .

b) Simetría. Probaremos que si entonces, .

Sean las funciones continuas , , que además son homotópicas.

Como , entonces, existe una aplicación , tal que y .

Definamos una aplicación , tal que , para .

Como de manera que , y , entonces , por definición 4.1.1 .

Probaremos la simetría de , es decir, si , entonces .

Sean las funciones continuas , , que además son homotópicas.

Como , entonces, existe una aplicación , tal que y con .

Definamos una aplicación , talque , para .

Como de manera que , y , entonces , por definición 4.1.2 .

c) Transitividad. Probaremos que si y entonces .

Sean las funciones continuas , y .

Por hipótesis , entonces existe una aplicación , tal que y ; además, por hipótesis de manera que existe una aplicación , tal que y .

Definamos la aplicación continua , tal que

–

–

Veamos si está bien definida.

Para un valor de – , se tiene que: – – y – – , de manera que cuando –, por lo tanto está bien definida.

Como de manera que , y , entonces , por definición 4.1.1 .

Y finalmente probaremos que la transitividad de . Si y entonces .

Sean las funciones continuas , y .

Por hipótesis , entonces existe una aplicación , tal que y ; además, por hipótesis de manera que existe una aplicación , tal que y .

Definamos la aplicación continua , tal que

Veamos si está bien definida.

Probaremos para –, se tiene que: – – y – – , de manera que , cuando –, por lo tanto está bien definida.

Como de manera que , y , entonces , por definición 4.1.2 .

Por ***a***, ***b***, y ***c***, las relaciones y son relaciones de equivalencia ■

Definición 4.1.3. Si *f* es un camino en *X* de a , y es un camino en *X* de a , definimos el producto de *f* y como el camino *h* dado por las ecuaciones

Veamos si *h* esta bien definida.

Probaremos para el valor común de –, se tiene que – – y – – , por ser *f* y caminos en *X*, de manera que , por lo tanto está bien definida. Y como *f* y son continuas, que además cumplen con , entonces por teorema 2.7.5 *h* es continua y por tanto es un camino en *X* de a . Se piensa en *h* como el camino cuya primera mitad es el camino *f* y cuya segunda mitad es el camino .

La operación producto sobre caminos induce una operación bien definida sobre las clases de equivalencia de homotopía de caminos, dada por la ecuación

Probaremos dicha afirmación.

Sean una homotopía de caminos entre f y f', y una homotopía de caminos entre y .

Definamos

–

–

Para –, – – y

– – , por lo tanto esta bien definida, para toda t, además, como los caminos son funciones continuas, entonces por el lema del pegamiento (Teorema 2.7.5) es continua.

La operación sobre las clases de equivalencia de homotopía de caminos satisface propiedades muy parecidas a los axiomas de grupo. Estas propiedades se conocen como ***propiedades de grupoide de*** . Una diferencia respecto de las propiedades de grupo es que no está definida para cualquier par de clases, sino únicamente para aquellos pares para los que .

Teorema 4.1.1. La operación tiene las propiedades siguientes:

(1) (Asociatividad). Si está definida, también lo está

y .

(2) (Neutro a izquierda y derecha). Dado , denotaremos por el camino constante que lleva todo *I* al punto *x*. Si *f* es un camino en *X* desde hasta , entonces

y

(3) (Inverso). Dado el camino *f* en *X* desde hasta , sea el camino definido por , el cual se conoce como inverso de *f*. Entonces

y

<u>*Demostración*</u>.

Parte (1). Sean los caminos en *X*, *f* de a , de a y *h* de a .

Definamos como el camino *k* dado por

–

– –

–

Veamos si *k* esta bien definida.

Para –, – – y – – ,

para – , – – y

– – . Por lo tanto está bien definida, y como los caminos *f*, y *h* son funciones continuas, por teorema 2.7.5, es continua.

Definamos como el camino *k′* dado por

–

– –

–

Veamos ahora está bien definida.

Para:

–, – – y – – ,

para:

–, – – y – –

Por lo tanto está bien definida, y como los caminos *f*, y *h* son funciones continuas, por teorema 2.7.5, es continua.

Como las funciones continuas y tienen el mismo punto inicial para y entonces por definición 4.1.2 . ■

Teorema 4.1.2. Sea *f* un camino en *X* y sean números tales que . Sea el camino igual a la aplicación lineal positiva de *I* en compuesta con *f* . Entonces

<u>*Demostración*</u>.

Hagamos una partición del intervalo de la siguiente manera

Donde y , para cada podemos tomar una aplicación lineal del camino como sigue

, , … , .

Como el camino tiene el mismo punto inicial y final que el camino , es decir, 0 y 1 respectivamente, entonces .

Por definición 4.1.3 , por lo tanto

■

4.2 El grupo fundamental

En esta sección se estudiara el grupo fundamental y se deducirán algunas de sus propiedades, las cuales serán de mucha utilidad para la demostración del Teorema de Seifert – Van Kampen, que analizaremos más adelante.

Definición 4.2.1. Sea *X* un espacio topológico y un punto de *X*. Un camino en *X* que comienza y acaba en se llama ***lazo*** basado en *X*.

Definición 4.2.2. El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociadas a los lazos basados en , con la operación , se denomina grupo fundamental de *X* relativo al punto base . Se denota por .

Definición 4.2.3. Sea un camino en X de a . Se define la aplicación

por la ecuación

La aplicación , se denominará α – ***gorro***, que está bien definida porque la operación está bien definida. Si f es un lazo basado en , entonces es un lazo basado en . Por tanto aplica en .

Teorema 4.2.1. La aplicación es un isomorfismo de grupos.

<u>*Demostración*</u>.

Para probar que es un isomorfismo veremos primero que

Ahora probaremos que si representa un camino , que es el inverso de , entonces es el inverso para .

Sean .

.

■

Corolario 4.2.1. Si X es conexo por caminos, y y son dos puntos de X, entonces es isomorfo a .

Demostración.

Sea f un camino en X de a . Si f es un camino basado en , entonces es un camino basado en .

Definamos una por la ecuación

.

Esta aplicación es un homomorfismo ya que

Usando el camino podemos definir por la ecuación

.

De manera que:

De la misma forma:

Por lo que es biyectiva y por lo tanto es un isomorfismo. ■

Definición 4.2.4. Un espacio *X* se dice que es ***simplemente conexo*** si es conexo por caminos y es el grupo trivial (un elemento) para algún .

Con frecuencia se expresa cuando representa el grupo trivial.

Lema 4.2.1. En un espacio simplemente conexo *X*, dos caminos cualesquiera con los mismos puntos inicial y final son homotópicos por caminos.

Demostración.

Sean y dos caminos con punto inicial y punto final .

Como es un camino que inicia en y termina en y es un camino que inicia es y termina en , por ser el inverso de , entonces es un camino que inicia y termina en por definición 4.2.1, es un lazo.

Dado que *X* es simplemente conexo, este lazo es homotópico al lazo constante en . Entonces

Definición 4.2.5. Sea una aplicación continua. Se define

Por la ecuación

La aplicación se denomina ***homomorfismo inducido por h***, relativo al punto base .

La aplicación está bien definida ya que si H es una homotopía de caminos entre los caminos f y , entonces es una homotopía de caminos entre los caminos y . El hecho de que sea un homomorfismo se deduce a continuación

El homomorfismo no solo depende de la aplicación sino también de la elección del punto base (cuando se ha fijado , está determinado por *h*).

De manera que, se puede tener dificultad en la notación cuando se quiera considerar diferentes puntos base en *X*. Si y son dos puntos diferentes en *X*, no se puede utilizar el mismo símbolo para representar los dos homomorfismos diferentes, uno que tiene como dominio y el otro, dominio . Incluso si *X* es conexo por caminos, estos grupos son isomorfos pero no son el mismo grupo. En tal caso, utilizaremos la notación

Para el primer homomorfismo y para el segundo. Si solo hay un punto base en consideración, se omitirá la referencia al punto base y se denotará el homomorfismo inducido simplemente por .

El homomorfismo tiene dos propiedades que son fundamentales para las aplicaciones, se conocen como ***propiedades funtoriales*** y se presentan en el teorema siguiente.

Teorema 4.2.2. Si y son continuas, entonces . Si es la aplicación identidad, entonces es el homomorfismo identidad.

<u>*Demostración*</u>.

Probaremos que

Por definición 4.2.5.

de la misma forma,

por lo tanto .

Ahora probaremos que es el homomorfismo identidad.

Por definición 4.2.5.

■

Corolario 4.2.1. Si es un homeomorfismo entre X e Y, entonces es un isomorfismo entre y .

Demostración.

Sea la inversa de h.

Como k es la inversa de h, entonces se cumple que , donde i es: , es decir i es la aplicación identidad de .

Además, , donde j es: , es decir j es la aplicación identidad de .

Dado que y son los homomorfismos identidad de los grupos y , respectivamente, es la inversa de , por lo tanto es un isomorfismo.

■

Teorema 4.2.3. Supongamos que , donde y son dos conjuntos abiertos de *X*. Supongamos que es conexo por caminos y que . Sean *i* y *j* las aplicaciones inclusión de y , respectivamente, en *X*. Entonces las imágenes de los homomorfismos inducidos

generan .

<u>*Demostración*</u>.

Paso 1. Probaremos que existe una subdivisión del intervalo tal que y está contenido en o en , para cada *i*.

Elijamos una subdivisión de tal que, para cada *i*, el conjunto esté contenido en o en (por el teorema del número de Lebesgue). Si , para cada *i*, entonces las imágenes de y de generarían a y el teorema estaría demostrado. Supongamos que , para algún índice *i*, entonces cada uno de los conjuntos y está contenido en o en . Si , entonces y estarían en , de la misma forma si los conjuntos y estarían en . En cualquier caso podemos quitar el , ya que si está en la imagen de estaría a y si está en la imagen de estaría a . Quitando de obtenemos una nueva subdivisión que satisface la condición de que esté contenida en o en , para cada *i*.

Al repetir un número finito de veces este proceso conseguiremos la subdivisión deseada.

Paso 2. Ahora probaremos el teorema. Sea y una subdivisión la subdivisión construida en el paso 1. Definamos como el camino en *X* igual a la aplicación lineal positiva de en compuesta con . Entonces es un camino que está contenido en o en , y por teorema 4.1.2, . Para cada *i*, elijamos un camino en de en , como es conexo por caminos y dado que , podemos escoger que y sean ambos el camino constante en . Ponemos ahora

para cada *i*. Entonces es un lazo en X basado en cuya imagen está contenida en o en .

En el teorema 4.1.1 se probó que la operación es asociativa.

Como , además, y son ambos el camino constante en , entonces

■

4.3 Sumas directa de grupos abelianos

En esta sección sólo se consideraran grupos abelianos, y los consideraremos abelianos aditivamente, es decir, serán grupos abelianos bajo la operación de suma. De manera que 0 representará el elemento neutro del grupo, representa el inverso de x y nx denota la suma de n copias de x, o sea:

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n \text{ veces}}$$

Supongamos que G es un grupo abeliano y sea una familia indexada de subgrupos de G. Diremos que los grupos generan G si cada elemento x de G puede escribirse como una suma finita de elementos de los grupos . Como G es abeliano, la suma puede ser reorganizada para agrupar los términos que pertenezcan al mismo , de manera que x puede escribirse de la forma:

donde los índices son distintos. Cuando sea este el caso, dicha suma será escrita de manera formal:

y se sobreentenderá que si α no es uno de los índices .

Si los grupos generan G, se dirá que G es la ***suma*** de los grupos , y se escribirá , en el caso del conjunto de índices , o de manera general

Supongamos que los grupos generan G y que, para cada , la expresión es única para x, esto significa que, para cada sólo existe una J – upla , con siempre, excepto para una cantidad finita de índices α, tal que . Entonces se dice que G es la suma directa de los grupos y se escribe

$$G = \bigoplus_{\alpha \in J} G_\alpha$$

o bien, en el caso finito, .

Una caracterización útil de las sumas directas, es la que se tratará en el siguiente lema, que llamaremos ***condición de extensión*** para las sumas directas.

Lema 4.3.1. Sea G un grupo abeliano y una familia de subgrupos de G. Si G es la suma directa de los grupos entonces G satisface la siguiente condición:

Dado cualquier grupo abeliano H y cualquier familia de homomorfismos

( ) , existe un homomorfismo cuya restricción a

coincide con para cada α .

Además, h es única.

<u>*Demostración*</u>.

Primero se probará que: "Si G tiene la propiedad de extensión entonces G es la suma directa de los grupos ".

Supongamos que . Probaremos que para cualquier índice β se satisface que .

Sean el grupo H = y el homomorfismo trivial si y el homomorfismo identidad si .

Si G tiene la propiedad de extensión entonces, sea la extensión de los homomorfismos . Entonces

Si , entonces ; y si , entonces , de manera que .

Ahora se probará que: “Si G es la suma directa de los grupos , entonces se satisface la condición de extensión”.

Dados los homomorfismos , definimos como sigue: si , sea . Como esta suma es finita y la expresión para x es única, es decir si , entonces . Además, y , por lo tanto , así que h está bien definida.

Veamos ahora la unicidad de h.

Supongamos que existe otra extensión de los homomorfismos , talque , es decir que cumple las mismas condiciones que h.

Como y entonces

Por lo tanto h es única. ∎

Corolario 4.3.1. Sea . Supongamos que es la suma directa de los subgrupos para y que es la suma directa de los subgrupos para , donde los conjuntos de índices J y K son disjuntos. Entonces G es la suma directa de los subgrupos para .

<u>*Demostración*</u>.

Si y son familias de homomorfismos, entonces se extienden a homomorfismos y , por el lema 4.2.1. Entonces y se extienden a un homomorfismo . ■

Corolario 4.3.2. Si , entonces G / G_2 es isomorfo a .

<u>*Demostración*</u>.

Sean $H =$, el homomorfismo identidad, el homomorfismo trivial y su extensión al grupo G. Entonces h es sobreyectiva y su núcleo es . ■

Definición 4.3.1. Sea una familia indexada de grupos abelianos. Supongamos que G es un grupo abeliano y que es una familia de monomorfismos tales que G es la suma directa de los subgrupos . Entonces se dice que G es la suma directa externa de los grupos , relativa a los monomorfismos .

Teorema 4.3.1. Dada una familia de grupos abelianos , existe un grupo abeliano G y una familia de monomorfismos tal que G es la suma directa de los grupos .

<u>*Demostración*</u>.

Consideremos el producto cartesiano:

y la operación suma componente a componente, es decir, si y es una palabra de , es una palabra de ,entonces es una palabra de talque

es un grupo abeliano, como lo veremos a continuación:

respectivamente.

De manera que

Lo que prueba la asociatividad.

Entonces

De manera que es el elemento identidad del producto cartesiano bajo la suma componente a componente.

.

Entonces

De manera que el producto cartesiano posee inverso.

.

Lo que prueba la conmutatividad.

Sea G el subgrupo del producto cartesiano que consiste en los elementos tales que , el elemento neutro de , para todos lon índices α excepto para una cantidad finita. Dado un índice β, definimos asignando a el único elemento que tiene x como coordenada β – ésima y el resto de coordenadas igual a , para .

Comprobaremos que es un homomorfismo.

Sean y las palabras , que representan a x e y respectivamente.

Como

por lo tanto e es un homomorfismo.

Dado , por como definimos , sabemos que le asigna el único elemento que tiene x como coordenada β – ésima y el resto de coordenadas igual a , para , por lo tanto esta representación es única para cada elemento de G, de manera que x puede escribirse como una suma finita de elementos de los grupos . ■

Lema 4.3.2. Sea una familia indexada de grupos abelianos, un grupo abeliano y sea una familia de homomorfismos. Si cada es un monomorfismo y es la suma directa de los grupos , entonces satisface la condición siguiente de extensión:

Dado cualquier grupo abeliano H y cualquier familia de homomorfismos

( ) , existe un homomorfismo tal que

para cada α .

Además, h es única.

<u>*Demostración*</u>.

Como en el teorema anterior, teorema 4.3.1, se probo que era un homomorfismo y que G era un grupo abeliano, por lo tanto lo que nos faltaría demostrar es la afirmación de que si se satisface la condición de extensión, entonces cada es un monomorfismo.

Dado un índice β, sea y sea el homomorfismo identidad si , es decir, , y el homomorfismo trivial si , es decir, que la imagen de es . Sea la hipotética extensión. Entonces, en particular, ; se sigue entonces que es inyectiva, y por lo tanto es un monomorfismo .

■

Una consecuencia inmediata es el teorema de unicidad para las sumas directas:

Teorema 4.3.2. (Unicidad de sumas directas). Sea una familia de grupos abelianos. Supongamos que G y son grupos abelianos y sean e familias de homomorfismos tales que es la suma directa de los grupos y es la suma directa de los grupos . Entonces existe un único isomorfismo tal que para todo α .

<u>*Demostración*</u>.

Como G es la suma directa externa de los grupos e es una familia de homomorfismos, por lema 4.3.2 existe un único homomorfismo tal que para todo α . De la misma forma, como es la suma directa externa de los grupos e es una familia de homomorfismos, existe un único homomorfismo tal que para cada α . Entonces satisface que para todo α ; como el elemento neutro de G tiene la misma propiedad, por lema 4.2.2 ésta es única y nos permite asegurar que debe coincidir con el elemento neutro de . ■

Si G es la suma directa externa de los grupos , relativa a los monomorfismos , en ocasiones se utilizará la notación para indicarla, incluso aunque los grupos no sean subgrupos de G.

Definición 4.3.2. Sea G un grupo abeliano y sea una familia indexada de elementos de G ; sea el subgrupo de G generado por . Si los grupos generan G diremos que los elementos generan G. Si cada subgrupo es cíclico infinito, y si G es la suma directa de los grupos , entonces se dice que G es un ***grupo abeliano libre*** con ***base*** .

La condición de extensión en las sumas directas implica la siguiente condición de extensión para grupos abelianos libres:

Lema 4.3.3. Sean G un grupo abeliano y una familia de elementos de G que generan G. Entonces G es un grupo abeliano libre con base si, y sólo si, para cada grupo abeliano H y cualquier familia de elementos de H existe un homomorfismo h de G en H tal que para todo α . En este caso, h es única.

Demostración.

“ ”

Sea el subgrupo de G generado por Supongamos que la propiedad de extensión se satisface. Se probará que cada grupo es cíclico infinito.

Supongamos para algún índice β el elemento genera un subgrupo cíclico finito de G. Entonces si hacemos $H = \mathbb{Z}$ no puede existir un homomorfismo que haga corresponder cada elemento con el número 1, ya que el elemento tiene orden finito y el 1 no. Por lema 4.2.1 G es la suma directa de los grupos .

“ ”

Supongamos que G es el grupo abeliano libre con base .

Como G es un grupo abeliano libre con base , entonces dados los elementos de H existen homomorfismos tales que , ya que es cíclico infinito, entonces por lema 4.3.1 h es única. ■

4.4 Productos libres de grupos

En esta sección consideraremos grupos G que no deben ser necesariamente abelianos. En este caso, se escribirá G de forma multiplicativa.

Denotaremos el elemento identidad de G por 1, y el inverso del elemento x será representado por . El símbolo representará el producto de n copias de x, el producto de n copias de y el elemento identidad de . Si el conjunto de todos los elementos de la forma , con , coincide con , entonces se dice que es un ***grupo cíclico*** y x se dice que es un ***generador*** de .

El cardinal de un grupo se llama también ***orden*** del grupo. Un grupo es cíclico de orden infinito si, y solamente si, es isomorfo al grupo aditivo de los enteros; es cíclico de orden n si, y solo si, es isomorfo al grupo de los enteros modulo n.

Se estudiará un concepto que desempeña un papel, en el caso de grupos arbitrarios, similar al de suma directa en grupos abelianos, se denomina ***producto libre*** de grupos.

Sea G un grupo. Si es una familia de subgrupos de G, diremos que estos grupos generan G si todo elemento de G puede escribirse como un producto finito de elementos de los grupos . Esto significa que existe una sucesión finita de elementos de los grupos tal que . Dicha sucesión se denomina ***palabra de longitud n*** de los grupos ; se dice que ***representa*** el elemento x de G.

Si el grupo G no es abeliano, sin la conmutatividad, no se pueden reorganizar los factores en la expresión de x para agrupar los que pertenecen al mismo grupo . Sin embargo, si y pertenecen al mismo grupo podemos agruparlos para obtener la palabra:

de longitud $n - 1$ y que también representa a x.

Además, si cualquier es igual a 1, entonces se puede omitir de la sucesión obteniendo nuevamente una palabra, pero más corta, que representa a x, es decir, de , si , entonces .

Si se aplica esta operación de reducción en varias ocasiones, se puede obtener en general una palabra de la forma que represente a x, donde no existe ningún grupo que contenga a dos elementos consecutivos e y donde para todo índice i. Dicha palabra se denomina ***palabra reducida***. Lo anterior no aplica si x es el elemento identidad de G, ya que en este caso se podría x por una palabra de la forma que se reduciría a la palabra de longitud uno y entonces tendría que desaparecer. Además, se utilizará, por conveniencia, el conjunto vacío como una palabra de longitud cero, que representa el elemento identidad de G. Con lo anterior, si los grupos generan G entonces todo elemento de G puede representarse por una palabra reducida formada por los elementos de los grupos .

Nótese que si y son palabras que representan a x e y respectivamente, entonces es una palabra que representa a xy. Si las palabras y son reducidas, no implica que tenga que serlo, a menos que ningún grupo contenga a los elementos e .

Definición 4.4.1. Sean *G* un grupo y una familia de subgrupos de *G* que generan a *G*. Supongamos que está formado sólo por elemento identidad cuando . Diremos que *G* es el producto libre de los grupos si para existe una única palabra reducida en los grupos que representa a *x*. En este caso se escribirá

o, en el caso finito, .

Sea *G* el producto de los grupos y sea una palabra en los grupos que satisface la condición para todo *i*. Entonces, para cada *i*, existe un único índice tal que ; es decir que es una palabra reducida, significa simplemente que para todo *i*.

Supongamos que los grupos generan G, donde siempre que . Para que G sea el producto libre de estos grupos, es suficiente con saber que la representación de 1 por la palabra vacía es única. En efecto, si se satisface esta última condición y suponemos que y son dos palabras reducidas que representan al mismo elemento x de , podemos elegir los índices y tales que y . Como

la palabra

representa el 1. Por tanto debe ser posible reducir esta palabra, de modo que tenemos ; la palabra se reduce entonces a

De nuevo podemos afirmar que es posible reducir esta palabra, por lo que y así de modo que 1 está representado por la palabra

Continuando con este argumento se concluye que $m = n$ y que para todo i.

El producto libre verifica una ***condición de extensión*** análoga a la que satisface la suma directa:

Lema 4.4.1. Sea G un grupo abeliano y una familia de subgrupos de G. Si G es el producto libre de los grupos entonces G satisface la siguiente condición:

Dado cualquier grupo H y cualquier familia de homomorfismos ,

( ) existe un homomorfismo cuya restricción a coincide con para cada α . Además, h es única.

Demostración.

Primero probaremos la unicidad de h.

Dado , con , sea la palabra reducida que lo representa. Si h existe, entonces satisface la ecuación

donde , es el índice tal que .

Supongamos que existe un diferente a h que satisface las mismas condiciones, es decir que, dado , con y sea la palabra reducida que lo representa, satisface la ecuación.

.

Como

y

por lo tanto y h es única.

Probaremos ahora la existencia de h.

Sea h definida por la ecuación si y asignamos . Como la representación de x por una palabra reducida es única, como se probó en la parte anterior, h está bien definida. Probaremos que h es un homomorfismo.

Sea una palabra de longitud positiva en los elementos de los grupos , definimos como el elemento de H dado por la ecuación

donde , es el índice tal que . Pero es único excepto si ; por tanto, está bien definida. Si es la palabra vacía, hacemos igual al elemento neutro de H.

Probaremos que si es una palabra obtenida de aplicando una de nuestras operaciones de reducción, entonces .

Supongamos que se obtiene eliminando el factor de la palabra y que cumple las mismas condiciones.

Entonces y , de manera que .

Supongamos ahora que , y que .

Entonces .

Como , entonces

Donde . De manera que

Por lo tanto

Con un procedimiento similar para y concluimos que .

Supongamos ahora que h es un homomorfismo y que y son palabras que representan a *x* e *y*, respectivamente. Sea la palabra que representa a *xy*.

Entonces

Además

De ahí que y por lo tanto . ■

Ahora consideraremos el problema de tomar una familia arbitraria de grupos y encontrar un grupo que contenga subgrupos isomorfos a los grupos y tal que sea el producto libre de los grupos . Esta cuestión, tiene de hecho, una solución y nos lleva a la noción de ***producto libre externo***.

Definición 4.4.2 Sea una familia indexada de grupos. Supongamos que es un grupo y que es una familia de monomorfismos, tales que es el producto libre de los grupos . Entonces se dice que es el ***producto libre externo*** de los grupos , relativo a los monomorfismos .

El grupo no es único, desde luego; se probará que lo es, cuando los sean isomorfismos.

Teorema 4.4.1 Dada una familia de grupos, existe un grupo y una familia de monomorfismos tal que G es el producto libre de los grupos .

Demostración.

Supongamos que los grupos son disjuntos.

Sea una palabra en los elementos de los grupos , definida como una n – upla de elementos de .

Recordemos que una palabra es reducida si para todo i, donde es el índice talque para todo i, y no es el elemento neutro de .

Definamos el conjunto vacío como la única palabra de longitud cero. Nótese que no se está construyendo un grupo que contiene todos los grupos como subgrupos, por lo que una palabra no representa un elemento de .

Sea W el conjunto de todas las palabras reducidas en los elementos de los grupos . Sea el conjunto de todas las aplicaciones biyectivas . Entonces será también un grupo, considerando la composición de funciones como la operación de grupo. Se obtendrá el grupo como un subgrupo de .

Paso 1. Para cada índice y cada , sea la aplicación definida como sigue:

(1) Si , es el elemento neutro de , entonces es la aplicación identidad de W.

(2) Si y entonces .

Sean , un elemento genérico y no vacío de W y el índice talque . Si , definimos como sigue:

(**i**) ,

(**ii**) , si ,

(**iii**) , si y ,

(**iv**) , si y .

Si , definimos como la aplicación identidad de W.

Se puede ver que los valores de son en cada caso una palabra reducida, es decir, un elemento de W. En los casos (**i**) y (**ii**), la acción de incrementa la longitud de la palabra, en el caso (**iii**) la longitud no se modifica, mientras que en el caso (**iv**) se reduce la longitud de la palabra . Cuando se aplica el caso (**iv**) a una palabra *w* de longitud uno, entonces *w* se aplica en la palabra vacía.

Paso 2. Se probará que si y entonces .

Supongamos que entonces de manera que , de forma semejante , si entonces, de manera que .

Supongamos que e . Ahora calcularemos los valores de y de sobre una palabra reducida *w*, para la cual consideraremos cuatro casos:

(1) Supongamos que *w* es la palabra vacía.

De (**i**) se tiene que . Tomemos una palabra *v* y si , la expresión se transforma entonces .

Si es la aplicación identidad, entonces . Si entonces

En los casos restantes supondremos que .

Supongamos ahora que . Entonces .

Si entonces y por (iv), mientras que

Tiene el mismo valor por ser la aplicación identidad.

Si entonces,

(iii) Supongamos que y que .

Entonces .

Si entonces , mientras que tiene el mismo valor ya que .

Si entonces

(iv) Por último, supongamos que y . Entonces ,

que sería vacio si $n = 1$. Por lo tanto

Paso 3. Como la aplicación es un elemento de $P(W)$ y además, la aplicación definida por es un monomorfismo.

Probaremos que es biyectiva.

Si entonces por las condiciones (1) y (2) se tiene que:

De (2) por lo que . Y de (1) por lo tanto de manera que y de esta forma concluimos que que coinciden con la aplicación identidad de W. por tanto pertenece a $P(W)$.

El hecho de que sea un homomorfismo es por la condición (2) ya que si entonces , de manera que no es la aplicación identidad de W.

Paso 4. Sea G el grupo de $P(W)$ generado por los grupos . Probaremos que G es el producto libre de los grupos .

Probaremos primero que consiste únicamente en el elemento neutro cuando .

Sean y . Supongamos que ni ni son la aplicación identidad de W y probaremos que .

Como ni son la aplicación identidad de W entonces y que son palabras diferentes por lo tanto .

Ahora probaremos, que no existe una palabra reducida no vacía , en los grupos que representa el elemento neutro de G. Sea el índice tal que ; entonces y para todo i. De manera

De manera que el elemento de G representado por no es el elemento neutro de $P(W)$ ■

4.5 Grupos libres

Sea *G* un grupo y una familia de elementos de *G*, con . Diremos que los elementos ***generan*** *G* si todo elemento de *G* puede describirse como un producto de potencias de los elementos . Si la familia es finita, diremos que *G* está ***finitamente generado***.

Definición 4.5.1. Sea una familia de elementos de un grupo *G*. Supongamos que cada genera un subgrupo cíclico infinito de *G*. Si *G* es el producto libre de los grupos entonces diremos que *G* es un ***grupo libre***, y la familia se dice que es un ***sistema de generadores libres*** para *G*.

En este caso, para cada elemento , existe una única palabra reducida en los elementos de los grupos que representa *x*. Esto significa que si entonces *x* se puede escribir de la forma única como

donde y para todo i (puede ser negativo).

Los grupos libres están caracterizados por la siguiente propiedad de extensión:

Lema 4.5.1. Sea un grupo y una familia de elementos de . Si es un grupo libre con sistema de generadores libres , entonces satisface la siguiente condición:

Dado cualquier grupo H y cualquier familia de elementos de H,

existe un homomorfismo tal que para todo .

Además, h es único. Recíprocamente, si la condición de extensión se satisface, entonces es un grupo libre con sistema de generadores libres.

Demostración.

Supongamos que es un grupo libre.

Si es un grupo libre, entonces para cada , el grupo generado por es cíclico infinito, por definición 4.4.1, de manera que por lema 4.3.1 existe un homomorfismo que verifica que y entonces por lema 4.3.1 se puede aplicar.

Recíprocamente, sea un índice fijo. Por hipótesis, existe un homomorfismo talque y para . Se deduce el grupo es cíclico infinito por lema 4.3.3. ■

Del corolario 4.3.1 de la sección anterior se desprende el teorema siguiente:

Teorema 4.5.1. Sea , donde y son grupos libres con y como sistemas de generadores libres, respectivamente. Si entonces es un grupo libre con sistema de generadores libres .

Demostración.

Si es un grupo libre, con como sistema de generador libre, existe un homomorfismo que verifica que , con ; del mismo modo, como es un grupo libre con como sistema de generador libre existe un homomorfismo que verifica que , con . Por lema

4.4.1 y se extienden a un homomorfismo .
■

Definición 4.5.2. Sea una familia arbitraria indexada. Sea el conjunto de todos los símbolos de la forma con . Convirtamos en grupo con la aplicación

Entonces es el elemento neutro de y es el inverso de . Denotaremos simplemente por . El producto libre externo de los grupos se denomina ***grupo libre generado por los elementos*** .

Si es un grupo libre por los elementos , se hará un abuso de la notación al identificar los elementos del grupo con sus imágenes bajo el monomorfismo que aparece en la construcción del producto libre externo. Entonces cada se tratará como un elemento de y la familia forma un sistema de generadores libres de .

A continuación se verá la conexión que existe entre los grupos libres y los grupos libres abelianos; pero antes recordaremos la noción algebraica de subgrupo conmutador.

Definición 4.5.3. Sea un grupo. Si , denotaremos por el elemento

de que se denomina conmutador de *x* e *y*. El subgrupo de generado por el conjunto de todos los conmutadores en se denomina subgrupo conmutador de y se representa .

Lema 4.5.2. Dado , el subgrupo es un subgrupo normal de y el grupo cociente es abeliano. Si es un homomorfismo de en un grupo abeliano *H*, entonces el núcleo de *h* contiene a , de modo que *h* induce un homomorfismo .

<u>*Demostración*</u>.

Paso 1. Primero se probará que cualquier conjugado de un conmutador está en .

Sean un elemento de , entonces

Como y , entonces ; agregando en ambos lados de la igualdad se obtiene: por lo tanto .

Pero , entonces

que pertenece a como se quería.

Paso 2. Se probará que es un subgrupo normal de .

Sea z un elemento arbitrario de , se probará que cualquier conjugado de z está también en . El elemento z es un producto de conmutadores y de sus inversos. Como

z es en realidad el producto de conmutadores . Sea , donde cada es un conmutador. Entonces

es un producto de elementos de por el Paso 1 y, por tanto, pertenece a .

Paso 3. Se probará que es un grupo abeliano. Si se probará que

Sea un elemento de .

Como , entonces .

Además, de manera que está en . Como entonces .

que es un elemento de .

Paso 4. Probaremos por último que el núcleo de *h* contiene a .

Por hipótesis *H* es abeliano, y el núcleo de *h* aplica cada conmutador en el elemento neutro de *H*.

Sea un elemento de .

Con como la identidad en *H*, la cual denotaremos , es decir .

Por lo tanto pertenece al núcleo de *h*. ■

Teorema 4.5.2. Si es un grupo libre con generadores libres , entonces es un grupo abeliano libre con base , donde denota la clase de en .

Demostración.

Sea una familia cualquiera de elementos que generan un grupo abeliano H.

Como *H* es abeliano, entonces por lema 4.3.3 existe un homomorfismo tal que para cada .

Además, como es un homomorfismo de en un grupo abeliano *H*, entonces por lema 4.4.2 el núcleo de *h* contiene a , por lo que *h* induce un homomorfismo que aplica a . ■

4.6 El Teorema de Seifert Van – Kampen

El teorema que se discutirá y analizara en esta sección da un método bastante general para calcular grupos fundamentales.

Teorema 4.6.1 *Sea donde U y V son abiertos en X*; *supongamos que U, V y U V son conexos por caminos; sea* x_0 *U V . Sea H un grupo y sean*

homomorfismos. Sean i_1, i_2, j_1, j_2 *los homomorfismos indicados en el siguiente diagrama, cada uno de ellos inducido por la inclusión*.

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d, "j_1"] \arrow[dr] & \\
{} \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r] \arrow[dr, "i_2"'] & {} \arrow[r, dotted] & {} \\
& {} \arrow[u, "j_2"'] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Si , *entonces existe un único homomorfismo tal que* .

El teorema afirma que si y son homomorfismos arbitrarios que son compatibles sobre , entonces inducen un homomorfismo en *H*.

<u>*Demostración*</u>.

Probaremos primero la unicidad.

El teorema 4.2.3 afirma que está generado por las imágenes de y .

Como las imágenes de y generan , es decir, si entonces y si entonces .

Además, como entonces . Por lo tanto al aplicar sobre el generador , es decir , debe ser igual a . De igual forma, como , entonces , así que al aplicarle a este elemento, es decir, , debe coincidir con , por lo tanto está determinado completamente por y .

Introduciremos una notación que nos hará más fácil la escritura de algunas operaciones. Dado un camino *f* en *X*, escribiremos para representar su clase de homotopía de caminos en *X*. Si *f* está en , entonces representará su clase de homotopía de caminos en . De manera que las representaciones y serán las clases de homotopía de caminos de *V* y respectivamente.

Paso 1. Definiremos una aplicación que, asigna a cada lazo *f* basado en , contenido en o en *V*, un elemento de *H*. Y definimos

si *f* está en ,

si *f* está en .

Si , entonces y , por lo tanto está bien definida y estos dos elementos de *H*, por hipótesis son iguales. Y la aplicación satisface las condiciones:

(1) Si , o si , entonces .

(2) Si y están en , o si ambas están en V, entonces .

Probaremos (1). Supongamos que .

Como al aplicar en ambos lados de la igualdad obtenemos:

Supongamos que .

Como al aplicar en ambos lados de la igualdad obtenemos:

Ahora probaremos (2).

Supongamos que y están en .

Como , entonces . Por hipótesis es un homomorfismo de manera que por lo tanto:

Supongamos que y están en .

Como , entonces . Y por hipótesis es un homomorfismo de modo que , por lo tanto:

Paso 2. Ahora extenderemos a una aplicación que asigna a cada camino *f* definido en o en *V*, un elemento de *H*, tal que la aplicación satisface las condiciones:

($1a$) Si , o si , entonces .

($2a$) Si y están en , o si ambas están en *V*, entonces ,

siempre que esté bien definido.

Para cada *x* en *X*, elijamos un camino desde hasta *x* como sigue:

Si , sea el camino constante en .

Si , sea un camino en .

Y, si *x* está en o en *V* pero no en , sea un camino en o en *V*, respectivamente.

Entonces para cualquier camino *f* en o en *V*, definamos un lazo en o en *V*, respectivamente, basado en por la ecuación

donde x e y son, el punto inicial y el punto final de *f* respectivamente.

Y, definimos

Ahora, se probara que es una extensión de : Si *f* es un lazo basado en que está en o en *V*, entonces

ya que es el camino constante en , de manera que tiene el mismo punto inicial y final, es decir , entonces es homotópica por caminos a *f* en o en *V*.

De manera que, si *f* está en , por condición (1) y como , entonces .

Si *f* está en , por condición (1) y como , entonces .

Ahora se comprobará la condición (1).

Sean *f* y caminos homotópicos en o en *V*. Entonces los lazos y también son homotópicos por caminos en o en *V*, de manera que la condición: Si , o si , entonces , aplica para .

Probemos la condición (2).

Sean *f* y caminos arbitrarios en o en *V*, tales que , entonces

para puntos adecuados *x*, *y*, *z*. Como es asociativa

Por lo tanto el lazo es homotópico por caminos en o en V, a ,
por lo que:

y como , que se probó en ***paso* 1**, entonces

Por las condiciones (1) y (2) para . Pero , de manera que

y

Por lo que .

Paso 3. Ahora extenderemos la aplicación a una aplicación que lleva un camino arbitrario f a un elemento de H. Esta aplicación satisface las condiciones siguientes:

($1b$) Si entonces .

($2b$) , si está bien definido.

Dado f , escogemos una partición de tal que f aplica cada uno de los subintervalos en o en V, es decir, ó . Denotemos por la aplicación lineal positiva del intervalo en el intervalo compuesta con f, es decir que, si es la aplicación lineal positiva, entonces . De manera que es un camino en o en V, y

Si debe ser una extensión de satisface ($1b$) y ($2b$), y se debe verificar

Se sabe que y , entonces y por ($1b$) se tiene que: .

Por ($2b$), .

Y como es una extensión de , entonces por lo tanto:

De manera que utilizaremos esta ecuación como definición de .

Se probará que esta definición es independiente de la elección del subintervalo. Para ello es suficiente con probar que el valor de no cambia si añadimos un único punto p a la partición.

Sea i el índice tal que .

Definamos , como los caminos en X iguales a las aplicaciones lineales positivas de en y compuestas con , es decir, si y son aplicaciones lineales positivas tales que y , entonces y , recordemos que f aplica cada uno de los subintervalos en o en *V*, es decir, . Por lo tanto , son caminos que están contenidos en o en .

Como

Al calcular utilizando la nueva partición obtenemos:

Pero es homotópica por caminos a en o en , por lo tanto y por las condiciones (1*a*) y (2*a*), de manera que está bien definida.

Si *f* está en o en , podemos utilizar la partición de para definir , entonces por definición y por tanto es una extensión de .

Paso 4. Se probará la condición (1*b*).

Probaremos esta condición, primero para un caso especial.

Sean *f* , caminos en *X* desde *x* hasta *y*, y *F* una homotopía de caminos entre ellos, es decir es una aplicación continua tal que y , y , para cada .

Supongamos la hipótesis adicional que existe una partición de tal que *p* aplica cada rectángulo dentro de o de , es decir, ó .

Probaremos bajo estas condiciones que .

Dado *i*, consideremos la aplicación lineal positiva de en compuesta con *f* ó con y denominemos a estos dos caminos y , respectivamente, es decir y . La restricción de *p* a cada rectángulo nos proporciona una homotopía entre y que toma valores en o en , pero por tener diferentes punto inicial "*x*" y final "*y*" , no es una homotopía de caminos.

Consideremos los caminos trazados por los extremos durante la homotopía. Definamos como el camino , de manera que es un camino en *X* desde hasta . Como es un camino en *X* desde hasta significa que lleva todo punto a *x*, por lo tanto es un camino constante; de la misma forma es un camino en *X* desde hasta significa que lleva todo punto a *y*, así que es un camino constante.

Ahora probaremos que, para cada *i*,

con la homotopía de caminos en o en .

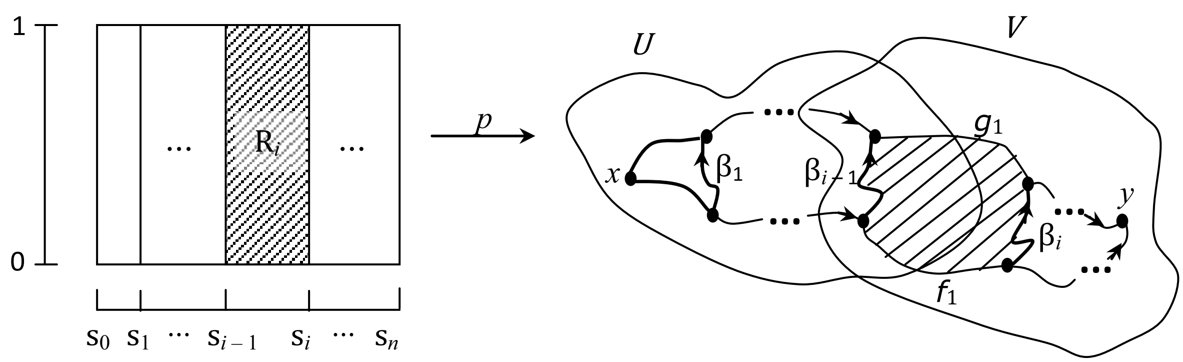


Figura 4.6.1.

En el rectángulo , consideremos el camino que recorre los lados inferior y derecho de desde hasta y hasta ; si componemos este camino con la aplicación *p* obtenemos . De la misma forma, si consideramos el camino que recorre los lados superior e izquierdo de al componerlo con *F* obtenemos el camino . Como el rectángulo , además está en y es ordenado, entonces por definición 2.5.3 es convexo. Como es convexo, existe una homotopía de caminos en entre estos dos caminos, si componemos con *p* obtenemos una homotopía de caminos entre y que tiene lugar en o en , como se quería probar.

Como , entonces

Al aplicar la condición ($1b$) para tenemos que:

Por la condición ($2b$) para se tiene

Operando por la derecha

Como y son caminos constantes en x e y respectivamente, entonces

y

Al aplicar la condición (1b) para tenemos

y

Por condición (2b)

y

Lo cual solo será posible si y .

Ahora calculamos de la siguiente manera:

Sustituyendo en esta ecuación:

Por condición ($2b$) entonces

Como , donde es la identidad, por lo tanto

Como , del hecho que se tiene que por tanto

y como entonces

.

Con lo que se ha probado la condición ($1b$) en un caso especial.

Ahora se probará la condición ($1b$) en el caso general.

Dados f , y una homotopía de caminos F entre ellos, consideremos subdivisiones y de tales que F aplica cada rectángulo en o en . Sea el camino por lo que

y

entonces y .

La pareja de caminos y satisfacen las condiciones del caso especial que se acaba de probar, es decir: Si entonces para todo j.

Por el caso especial ($1b$), se tiene

y

De manera que , y así hasta .

Pero como se probó también en caso espacial ($1b$)

Por lo tanto

Como entonces:

Retomando la afirmación Si entonces para todo j.

Se tiene que para todo j, haciendo se tiene , por lo que

Del mismo modo, para ,

Y repitiendo este proceso hasta obtenemos:

Pero como , entonces

De manera que , como se deseaba.

Paso 5. Ahora se probara la condición ($2b$) para la aplicación .

Dado un camino en *X*, escojamos una subdivisión de que contenga al punto − como un punto de la subdivisión, tal que aplica cada subintervalo en o en . Sea el índice tal que − .

Para , la aplicación lineal positiva de en compuesta con la aplicación coincide con la aplicación lineal positiva de en compuesta con ; denotemos esta aplicación por . De la misma forma, para cada , la aplicación lineal positiva de en , compuesta también con coincide con la aplicación lineal positiva de en compuesta con ; denotemos esta aplicación por . Utilizando la subdivisión para el dominio del camino obtenemos

Usando la subdivisión para el camino se tiene

Y utilizando la subdivisión para el camino obtenemos

Como , entonces

Asociando se tiene

Pero y por tanto

De lo que se concluye que , lo que prueba la condición ($2b$)

Paso 6. El teorema se obtiene ahora aplicando los pasos anteriores. Para cada lazo en X basado en , definimos

Las condiciones (1) y (2) prueban que es un homomorfismo bien definido.

Probaremos que .

Si f es un lazo en , entonces

Como

Además, por lo tanto

De la misma forma, .

Si f es un lazo en , entonces

Como

Además, por lo tanto

■

Referencias y bibliografía.

1.- James R. Munkres: Topología, 2ª Edición, Editorial Pearson Education S. A, Madrid España, 2002.

2.- Czes Kosniowski: Topología Algebraica, Edición en Español, Editorial Reverté S.A. Barcelona España, 1986.

3.- Juán Horváth: Introducción a la Topología General, [Documento electrónico], Estados Unidos, Maryland College, (Citada: 21 de mayo de 2010).

< www.scribd.com/.../Introduccion-a-La-Topologia-General >

4.- ESMOK , Psicología topológica vectorial, [Documento electrónico], (Citada: 21 de mayo de 2010).

<http://esmok.blogspot.com/2010/06/psicologia-topologica-vectorial.html>

5.- Web del profesor: Introducción a la teoría de grafos, [Documento electrónico], (Citada: 24 de mayo de 2010).

< http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/jlchacon/materias/discreta/grafos.pdf>

6.- ma.uva: Grafos Eulerianos, [Documento electrónico], (Citada: 24 de mayo de

2010).

<http://www.ma.uva.es/~antonio/Industriales/Apuntes_06-07/LabM/Grafos_2007-2.pdf>

7.- Wikipedia, Historia de la topología, [Documento electrónico], (Citada: 30 de mayo de 2010).

<http://es.wikipedia.org/wiki/Topolog%C3%ADa>

8.- David Garro Moreno, Historia de la topología, [Documento electrónico], España , Universidad Autónoma de Madrid (Citada: 03 de junio de 2010).
<http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ezuazua/informweb/trabajosdehistoria/HISTORIADELATOPOLOGIA.pdf>

9.- iescomercio, Topología, [Documento electrónico], (Citada: 05 de junio de 2010).
http://www.iescomercio.edurioja.org/file.php/1/Proyectos/Russell_en_%20Atenas/SolucionKonigsberg2.htm

10.- Wikipedia, Poliedros, [Documento electrónico], (Citada: 11 de junio de 2010).

<http://translate.google.com.mx/translate?hl=es&langpair=en%7Ces&u=http://en.wikipedia.org/wiki/Topological_property>

11.- Marta Macho Stadler, ¿Qué es la Topología?, [Documento electrónico], (Citada: 15 de junio de 2010).

12.- Marta Macho Stadler, Topología General, [Documento electrónico], España, Universidad del País Vasco, (Citada: 20 de junio de 2010).

<www.ehu.es/~mtwmastm/TopoGralMana.pdf>

13.- Carlos Ivorra Castillo, Topología algebraica, Documento electrónico], (Citada: 15 de julio de 2011).

< www.uv.es/ivorra/Libros/Topalg.pdf>