



# THE UNIVERSITY *of* EDINBURGH

## Edinburgh Research Explorer

### Un modello fisico per pianoforte preparato

**Citation for published version:**

Ducceschi, M 2018, Un modello fisico per pianoforte preparato. in F Fontana & A Gulli (eds), Machine Sounds, Sound Machines XXII Colloquio di Informatica Musicale. DADI - Dip. Arti e Design Industriale, Università di Venezia.

**Link:**

[Link to publication record in Edinburgh Research Explorer](#)

**Document Version:**

Publisher's PDF, also known as Version of record

**Published In:**

Machine Sounds, Sound Machines XXII Colloquio di Informatica Musicale

**General rights**

Copyright for the publications made accessible via the Edinburgh Research Explorer is retained by the author(s) and / or other copyright owners and it is a condition of accessing these publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

**Take down policy**

The University of Edinburgh has made every reasonable effort to ensure that Edinburgh Research Explorer content complies with UK legislation. If you believe that the public display of this file breaches copyright please contact [openaccess@ed.ac.uk](mailto:openaccess@ed.ac.uk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



# UN MODELLO FISICO PER PIANOFORTE PREPARATO

**Michele Ducceschi**

Acoustics and Audio Group

University of Edinburgh

Scotland, UK

michele.ducceschi@ed.ac.uk

## ABSTRACT

Questo lavoro presenta uno schema numerico per la simulazione di un pianoforte preparato. Tale strumento musicale si compone di un normale pianoforte, a cui possono essere applicati a piacere degli strumenti di preparazione. Tali elementi (sonagli, ammortizzatori, chiodi), supposti puntiformi, entrano in contatto per brevi istanti con la corda, arricchendone il contenuto armonico. Vista la natura estremamente non lineare del sistema, uno schema numerico implicito verrà proposto, la cui stabilità verrà inferita dalla conservazione di un'energia discreta non negativa, assimilabile all'hamiltoniano del sistema.

## 1. INTRODUZIONE

Il pianoforte preparato ha una storia affascinante e ricca. Uno dei primi esempi di tale strumento si deve a Delage, il quale collocò del cartone (un ammortizzatore) al di sotto di alcune corde per ottenere dei suoni da percussione indiana. Un altro famoso esempio si deve a Cowell, il quale era solito operare direttamente sulle corde e sulla tavola, con vari oggetti. Probabilmente, gli esempi più noti di preparazione sono dovuti a John Cage, autore di preparazioni eccellenti facenti uso degli strumenti più vari tra i quali figurano chiodi, monetine e posate [1].

In questo lavoro, un modello completo di pianoforte verrà presentato. Esso è composto dalle corde, dalla tavola armonica alla quale le corde trasmettono energia attraverso il ponticello, dai martelletti, e dagli strumenti di preparazione. Nella sezione 2 verranno presentate le equazioni continue per tutti gli elementi, e le loro interconnessioni. Nella sezione 3 le controparti discrete saranno elaborate. Lo schema numerico si compone di una parte a differenza finita (per la corda, i martelletti e gli strumenti di preparazione), e di una parte modale (per la tavola armonica). L'accoppiamento dei due sistemi numerici avviene attraverso il ponticello, in maniera esplicita. In modo da garantire stabilità, lo schema numerico sarà tale da conservare un hamiltoniano discreto non negativo. Infine, la sezione 4 conterrà degli esperimenti numerici. Esempi sonori

associati a questo lavoro possono essere ascoltati sul sito personale dell'autore <sup>1</sup>.

## 2. MODELLO CONTINUO

In questa sezione verranno presentati i modelli continui delle componenti del pianoforte preparato. Il pianoforte è composto da risonatori primari, le corde, ovvero sistemi unidimensionali descritti da un'opportuna equazione delle onde. Tali risonatori sono messi in vibrazione da oggetti puntiformi, i martelletti, attraverso una collisione che avviene in un breve arco di tempo. La vibrazione delle corde è trasmessa alla tavola armonica attraverso un ponticello. La tavola armonica agisce da risonatore secondario. Punti di ascolto virtuali sono collocati sulla tavola armonica, oltre che sulle corde nelle direzioni trasversale e longitudinale. Per la preparazione del pianoforte, oggetti tipo sonagli, chiodi e ammortizzatori possono essere collocati a piacere sulla tavola, in modo da entrare in contatto con le corde a seconda dell'ampiezza delle vibrazioni di queste ultime. Chiaramente, la natura non lineare delle collisioni e dei contatti darà luogo a vibrazioni dal ricco contenuto spettrale, che andranno a modificare il colore tipico del suono del pianoforte.

### 2.1 Le corde

Le corde del pianoforte agiscono come risonatori primari dello strumento. Esse infatti vengono messe in moto dal martelletto, e trasferiscono l'energia di vibrazione alla tavola armonica attraverso il ponticello. I modelli fisici di corda vibrante sono numerosi in letteratura, a partire dal più semplice modello descritto dalla equazione delle onde unidimensionale [2], fino a modelli di Timoshenko nonlineari geometricamente esatti [3]. I due esempi citati rappresentano dei casi limite: il primo è troppo semplice per rendere conto dei fenomeni fisici fondamentali per una sintesi realistica, l'altro è fin troppo complesso (si veda, a questo proposito, [4]). Per il pianoforte, è noto che il contributo alla forza al ponticello è dovuto sia alle vibrazioni trasversali delle corde, sia a quelle longitudinali [5]. L'inarmonicità delle vibrazioni trasversali è importante, perché dà origine al fenomeno delle "ottave allungate" (stretched octaves in inglese) tipico del piano, come è importante un certo livello di non linearità intrinseca per accoppiare le vibrazioni trasversali a quelle longitudinali. Un modello

<sup>1</sup> All'indirizzo [mdphys.org](http://mdphys.org), nella sezione Prepared Piano.

soddisfacente, in grado di descrivere tutti i fenomeni appena citati, è il modello non lineare di Morse e Ingard [6]. In assenza di dissipazione, esso è descritto dalla seguente coppia di equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{N}\mathcal{L}(w, \zeta) + \sum_i g_i \mathcal{F}_i \quad (1a)$$

$$\mathcal{G}(\zeta) = \mathcal{N}\mathcal{G}(w) \quad (1b)$$

Nelle equazioni,  $w(x, t)$  e  $\zeta(x, t)$  rappresentano, rispettivamente, le componenti trasversale e longitudinale del moto della corda. Gli operatori  $\mathcal{L}, \mathcal{G}$  sono lineari, e dati da

$$\mathcal{L}(w) = \rho_c A \partial_t^2 w - T_0 \partial_x^2 w + EI \partial_x^4 w \quad (2a)$$

$$\mathcal{G}(\zeta) = \rho_c A \partial_t^2 \zeta - EA \partial_x^2 \zeta \quad (2b)$$

Gli operatori  $\mathcal{N}\mathcal{L}, \mathcal{N}\mathcal{G}$  sono invece non lineari, e dati da

$$\mathcal{N}\mathcal{L}(w, \zeta) = \frac{EA - T_0}{2} \partial_x [(\partial_x w)^3 + 2\partial_x w \partial_x \zeta] \quad (3a)$$

$$\mathcal{N}\mathcal{G}(w) = \frac{EA - T_0}{2} \partial_x [(\partial_x w)^2] \quad (3b)$$

Il simbolo  $\partial_s^n$  rappresenta una derivata parziale di ordine  $n$  secondo la variabile  $s$ . La tensione applicata alla corda è denominata  $T_0$  nelle equazioni; inoltre  $E$  è il modulo di Young e  $I$  il momento di inerzia della sezione di taglio (supposta circolare); infine,  $\rho_c$  è la densità volumetrica (ove il pedice  $c$  indica corda, per distinguerla dalla densità della tavola armonica), e  $A$  l'area della sezione di taglio. Infine,  $g_i$  rappresenta una distribuzione temperata che quantifica l'estensione spaziale della forza  $F_i$  agente sulla corda. I vari tipi di forze verranno specificati nelle sezioni seguenti, e si intendono provenienti dai contatti con il martelletto e con gli strumenti di preparazione.

Se si assume regolarità delle condizioni iniziali, in assenza dei termini di forza, è possibile dimostrare l'esistenza di una soluzione forte per il sistema (23). Perciò,  $w, \zeta$  sono sufficientemente regolari e per esse è possibile definire un prodotto scalare e norma associata del tipo

$$\langle a, b \rangle_{\mathcal{D}} \triangleq \int_0^L ab \, dx \quad (4a)$$

$$\|a\|_{\mathcal{D}}^2 \triangleq \int_0^L a^2 \, dx \quad (4b)$$

ove la corda è definita nell'intervallo chiuso  $\mathcal{D} \triangleq [0, L]$ .

Le espressioni delle forze trasversale ( $\mathcal{F}_t$ ) e longitudinale ( $\mathcal{F}_l$ ) che sono trasmesse alla tavola armonica attraverso il ponticello, hanno le seguenti espressioni

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{(l)} + \mathcal{F}_t^{(nl)} \quad (5a)$$

$$\mathcal{F}_l = \mathcal{F}_l^{(l)} + \mathcal{F}_l^{(nl)} \quad (5b)$$

$$\mathcal{F}_t^{(l)} = T_0 \partial_x w - EI \partial_x^3 w \quad (5c)$$

$$\mathcal{F}_t^{(nl)} = \frac{EA - T_0}{2} [(\partial_x w)^3 + 2\partial_x w \partial_x \zeta] \quad (5d)$$

$$\mathcal{F}_l^{(l)} = EA \partial_x \zeta \quad (5e)$$

$$\mathcal{F}_l^{(nl)} = \frac{EA - T_0}{2} (\partial_x w)^2 \quad (5f)$$

Le espressioni di queste forze discendono dalla conservazione dell'energia del sistema, come sarà dimostrato in 2.6. Come si può notare, le forze contengono termini non lineari. Essi sono importanti in quanto danno origine al fenomeno delle "armoniche fantasma" (phantom partials in inglese), ovvero di armoniche non presenti nello spettro della corda che vibra in regime lineare. In lavori precedenti, solo l'accoppiamento da trasversale a longitudinale è stato considerato, con risultati molto soddisfacenti dal punto di vista della sintesi [7]. Qui, il modello verrà mantenuto completo in modo da permettere di suonare lo strumento in regime fortemente non lineare, qualora lo si desidererà.

## 2.2 Il martelletto

Il martelletto del pianoforte gioca un ruolo fondamentale nella produzione del suono. Esso è costituito da una struttura in legno ricoperta da diversi strati di feltro di lana. La durezza dei martelletti cambia in funzione della corda su cui agiscono, ed in genere le corde più acute vengono messe in vibrazione da martelletti di maggiore durezza. A livello dinamico, è possibile modellare l'azione del martelletto come una molla non lineare, con una legge del tipo

$$\mathcal{F}_m = K_m [\eta_m]_+^{p_m}, \quad (6)$$

ove  $\eta_m$  rappresenta la compressione del martelletto in contatto con la corda,  $p_m \geq 1$ , e  $K_m$  è una costante elastica. Il simbolo  $[\cdot]_+$  indica la parte positiva, cioè

$$[x]_+ = \frac{x + |x|}{2} \quad (7)$$

Tale modello non rende conto del fenomeno di isteresi che si osserva nel contatto tra corda e martelletto [8], ma rimane nonostante un modello realistico per la sintesi sonora, utilizzato in molti lavori precedenti [3, 7, 9]. La variabile  $\eta_m$  può essere espressa in termini della posizione del martelletto, e della corda, come nella seguente

$$\eta_m = U_m - \langle g_m, w \rangle_{\mathcal{D}}, \quad (8)$$

ove  $U_m$  è la posizione del martelletto (supposto agente al di sotto della corda), e  $g_m$  è una distribuzione temperata tale che  $\langle g_m, 1 \rangle_{\mathcal{D}} = 1$  (ad esempio, una delta di Dirac). La forza è conservativa, e descritta dal potenziale

$$\phi(\eta_m) = \frac{K_m}{p_m + 1} [\eta_m]_+^{p_m + 1} \quad (9)$$

L'equazione del moto del martelletto è dunque

$$M_m \partial_t^2 U_m = -\mathcal{F}_m \quad (10)$$

## 2.3 La tavola armonica

La tavola armonica del pianoforte agisce come risonatore secondario. Nei pianoforti a coda, essa è di forma complessa, incastrata dentro ad una cornice rigida. Il materiale di cui è costituita è solitamente legno, che è un materiale ortotropico. Delle coste in legno vengono applicate alla tavola per cambiarne la rigidità locale, e per conferire una maggiore resistenza agli sforzi usuranti delle corde. Evidentemente la modellazione di una tavola armonica di tale

complessità richiede uno sforzo matematico non banale, oltre che avanzate tecniche di risoluzione numerica [10]. È tuttavia possibile creare un modello calibrato su risposte all'impulso provenienti da misure sperimentali [7]. Per lo scopo di questo lavoro, è conveniente cercare di modellare la tavola in maniera semplice, ma sufficientemente realistica, in modo da poter operare in libertà su alcuni parametri fisici di rilievo, ad esempio i tempi di decadimento. Un modello sufficiente allo scopo è il modello di Kirchhoff di piastra sottile ortotropica che, in assenza di dissipazione e di forze esterne, si scrive

$$\mathcal{T}(W) = -g_p^{(t)}\mathcal{F}_t - g_p^{(l)}\mathcal{F}_l \quad (11a)$$

$$\mathcal{T}(W) = \rho_p H \partial_t^2 W - T_p [\partial_x^2 + \partial_y^2] W + \partial \mathcal{D} W \quad (11b)$$

$$\partial \mathcal{D} = [D_x \partial_x^4 + D_y \partial_y^4 + 2D_{xy} \partial_x^2 \partial_y^2] \quad (11c)$$

dove  $\rho_p$  è la densità volumetrica della piastra,  $H$  è lo spessore,  $T_p$  la tensione applicata,  $D_x, D_y, D_{xy}$  sono le costanti di rigidità. Esse hanno le seguenti espressioni

$$D_x = \frac{E_x H^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \quad (12a)$$

$$D_y = \frac{E_y H^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \quad (12b)$$

$$D_{xy} = D_x \nu_y + \frac{GH^3}{6} \quad (12c)$$

dove  $E_x, E_y$  sono i moduli di Young secondo le direzioni ortogonali  $x, y$ .  $\nu_x, \nu_y$  sono le costanti di Poisson, e  $G$  è il modulo di rigidità. Anche per  $W$ , soluzione di (11a), è possibile definire un prodotto scalare e una norma associata, del tipo

$$\langle a, b \rangle_{\mathcal{A}} \triangleq \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} ab \, dx dy \quad (13a)$$

$$\|a\|_{\mathcal{A}}^2 \triangleq \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} a^2 \, dx dy \quad (13b)$$

dove  $\mathcal{A} \triangleq [0, L_x] \times [0, L_y]$ . In (11a),  $g_p^{(t)}, g_p^{(l)}$  sono delle distribuzioni temperate che, come nel caso del martelletto in (8), soddisfano  $\langle g_p^{(t)}, 1 \rangle_{\mathcal{A}} = \langle g_p^{(l)}, 1 \rangle_{\mathcal{A}} = 1$ . Le espressioni delle forze  $\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_l$  sono date da (5).

## 2.4 Il ponticello

Il ponticello ha lo scopo di trasmettere le vibrazioni della corda alla tavola armonica. Il ponticello può essere modellato come un sistema multimodale la cui risposta in frequenza può essere dedotta da misure sperimentali. Un modello estremamente semplificato verrà utilizzato in questo lavoro: la corda è connessa alla tavola attraverso due molle, per le componenti longitudinale e trasversale del moto. Riprendendo le espressioni delle forze agenti sul capo della corda, (5), si pone

$$\mathcal{F}_t = -K_t \left( w(L) - \langle g_p^{(t)}, W \rangle_{\mathcal{A}} \right) \quad (14a)$$

$$\mathcal{F}_l = -K_l \left( \zeta(L) - \langle g_p^{(l)}, W \rangle_{\mathcal{A}} \right) \quad (14b)$$

dove  $K_t, K_l$  sono le costanti elastiche.

## 2.5 Gli strumenti di preparazione

La preparazione del pianoforte avverrà posizionando elementi non lineari lungo la corda, con estensione spaziale descritta da opportune distribuzioni temperate  $g_i$  come in (23a). Tali elementi (che potranno essere assimilati a chiodi, sonagli, e ammortizzatori) imprimono alla corda una forza al momento del contatto. Per i chiodi (posti al di sotto della corda, e supposti immobili) vale la seguente

$$\mathcal{F}_c = K_c [\eta_c]_+^{p_c}, \quad \eta_c = U_c - \langle g_c, w \rangle_{\mathcal{D}} \quad (15)$$

Per gli ammortizzatori, essi soddisfano

$$\mathcal{F}_a = -\beta \partial_t \eta_a [\eta_a]_+^{p_a}, \quad \eta_a = U_a - \langle g_a, w \rangle_{\mathcal{D}} \quad (16)$$

dove  $\beta > 0$ . I sonagli sono elementi mobili, che agiscono sia sopra che sotto la corda, e descritti da

$$\mathcal{F}_s = \begin{cases} -K_s (\eta_s - b_s)_+^{p_s} & \text{if } \eta_s > b_s \\ 0 & \text{if } |\eta_s| \leq b_s \\ K_s (-\eta_s - b_s)_+^{p_s} & \text{if } \eta_s < -b_s \end{cases} \quad (17)$$

dove  $\eta_s = \langle g_s, w \rangle_{\mathcal{D}} - U_s$  e la cui equazione del moto soddisfa

$$M_s \partial_t^2 U_s = -\mathcal{F}_s. \quad (18)$$

## 2.6 Conservazione dell'energia del sistema continuo

Il sistema completo appena descritto è conservativo. Come esempio, per semplicità, verrà adesso considerato uno strumento composto da una sola corda e senza strumenti di preparazione. La generalizzazione a un sistema multicorda, e preparato, risulterà immediata. Si consideri dunque una corda, un martelletto, e la tavola armonica. Il sistema si scrive

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{N} \mathcal{L}(w, \zeta) + g_m \mathcal{F}_m \quad (19a)$$

$$\mathcal{G}(\zeta) = \mathcal{N} \mathcal{G}(w) \quad (19b)$$

$$\mathcal{T}(W) = -g_p^{(t)} \mathcal{F}_t - g_p^{(l)} \mathcal{F}_l \quad (19c)$$

$$M_m \partial_t^2 U_m = -\mathcal{F}_m \quad (19d)$$

Il sistema (19) è Hamiltoniano. Per il sistema, si considerino distribuzioni temperate tipo delta di Dirac per  $g_m, g_p^{(t)}, g_p^{(l)}$ . Si prendano i prodotti scalari, come definiti in (4), di (19a) con  $\partial_t w$ , e di (19b) con  $\partial_t \zeta$ . Si prenda un prodotto scalare, come definito in (13), di (19c) con  $\partial_t W$ . Infine si moltiplichino (19d) per  $\partial_t U_m$ . Dopo opportune integrazioni per parti, e dopo aver sommato i contributi delle equazioni, si ottiene il seguente bilancio energetico

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = 0 \quad (20)$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \mathcal{H}^{(c)} + \mathcal{H}^{(p)} + \mathcal{H}^{(m)} + \mathcal{H}^{(b)} \\
\mathcal{H}^{(c)} &= \mathcal{E}_k^{(c)} + \mathcal{E}_{pl}^{(c)} + \mathcal{E}_{pnl}^{(c)} \\
\mathcal{H}^{(p)} &= \mathcal{E}_k^{(p)} + \mathcal{E}_{pl}^{(p)} \\
\mathcal{H}^{(m)} &= \mathcal{E}_k^{(m)} + \mathcal{E}_{coll}^{(m)} \\
\mathcal{H}^{(b)} &= \mathcal{E}_{pl}^{(b)} \\
\mathcal{E}_k^{(c)} &= \frac{\rho_c A}{2} \|\partial_t w\|_{\mathcal{D}}^2 + \frac{\rho_c A}{2} \|\partial_t \zeta\|_{\mathcal{D}}^2 \\
\mathcal{E}_{pl}^{(c)} &= \frac{T_0}{2} \|\partial_x w\|_{\mathcal{D}}^2 + \frac{EI}{2} \|\partial_x^2 w\|_{\mathcal{D}}^2 + \frac{T_0}{2} \|\partial_x \zeta\|_{\mathcal{D}}^2 \\
\mathcal{E}_{pnl}^{(c)} &= \frac{EA - T_0}{2} \left\| \frac{(\partial_x w)^2}{2} + \partial_x \zeta \right\|_{\mathcal{D}}^2 \\
\mathcal{E}_k^{(p)} &= \frac{\rho_p H}{2} \|\partial_t W\|_{\mathcal{A}}^2 \\
\mathcal{E}_{pl}^{(p)} &= \frac{D_x}{2} \|\partial_x^2 W\|_{\mathcal{A}}^2 + \frac{D_y}{2} \|\partial_y^2 W\|_{\mathcal{A}}^2 + D_{xy} \|\partial_y \partial_x W\|_{\mathcal{A}}^2 \\
\mathcal{E}_k^{(m)} &= \frac{M_m}{2} (\partial_t U_m)^2 \\
\mathcal{E}_{coll}^{(m)} &= \phi(\eta_m) \\
\mathcal{E}_{pl}^{(b)} &= \frac{K_t}{2} (w(L) - W(\mathbf{x}_b))^2 + \frac{K_l}{2} (\zeta(L) - W(\mathbf{x}_b))^2
\end{aligned}$$

Per la validità di (20), le condizioni al contorno per la corda e per la tavola devono essere passive. Anche la connessione tra la tavola armonica e il capo della corda deve essere effettuata in modo conservativo. In questo lavoro, le seguenti condizioni al contorno saranno utilizzate

$$w(0) = \zeta(0) = \partial_x^2 w(0) = \partial_x^2(L) = 0 \quad (21a)$$

$$W = \partial_n^2 W = 0 \quad \text{lungo il bordo della tavola} \quad (21b)$$

dove  $n$  indica la direzione normale al bordo della tavola. Queste condizioni al contorno sono completate da (14) (ovvero, la condizione al contorno per la corda, a  $x = L$ ), che garantiscono la passività del sistema. L'energia totale è non negativa (se  $EA \geq T_0$ ). La conservazione di un'energia non negativa, come noto, pone dei limiti superiori alla crescita delle norme delle soluzioni, e delle loro derivate [11].

### 3. IL MODELLO DISCRETO

In questa sezione, lo schema numerico utilizzato per la soluzione del sistema continuo verrà presentato. Lo schema si compone di una parte a differenze finite per la corda, i martelletti e gli strumenti di preparazione. La tavola armonica verrà risolta attraverso uno schema modale. Data la natura estremamente non lineare del sistema, sarà fondamentale il rispetto della passività del sistema discreto, ovvero di una legge di conservazione dell'energia del sistema discreto. Le condizioni per la non negatività dell'energia potranno essere interpretate come le condizioni di stabilità per lo schema numerico.

#### 3.1 Schema per le corde

Prima di procedere, è opportuno introdurre la notazione degli operatori a differenza finita usati per la corda, i mar-

telletti e gli strumenti di preparazione. La corda è definita su una griglia di punti. Le funzioni continue  $w(t, x)$ ,  $\zeta(t, x)$  sono rimpiazzate da funzioni definite sulla griglia, e denominate  $w_s^n$ ,  $\zeta_s^n$ , dove  $t = nk$ ,  $x = sh$ ;  $(n, s) \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq s \leq S$ ;  $k$  è il passo temporale (cioè l'inverso moltiplicativo della frequenza di campionamento), e  $h$  è la spaziatura della griglia. L'operatore di identità è definito come

$$1w_s^n = w_s^n$$

Gli operatori temporali sono definiti come

$$\begin{aligned}
e_{t+} w^n &= w^{n+1}, & e_{t-} w^n &= w^{n-1} \\
\delta_{t+} &\triangleq \frac{e_{t+} - 1}{k}, & \delta_{t-} &\triangleq \frac{1 - e_{t-}}{k} \\
\delta_t &\triangleq \frac{e_{t+} - e_{t-}}{2k}, & \delta_{tt} &\triangleq \delta_{t+} \delta_{t-}
\end{aligned}$$

Operatori di media temporale sono definiti come

$$\begin{aligned}
\mu_{t+} \mu_{t-} &\triangleq \frac{1 + e_{t+}}{2}, & \mu_{t-} &\triangleq \frac{1 + e_{t-}}{2} \\
\mu_t &\triangleq \frac{e_{t+} + e_{t-}}{2}, & \mu_{tt} &\triangleq \mu_{t+} \mu_{t-}
\end{aligned}$$

Gli operatori spaziali sono definiti come

$$\begin{aligned}
e_{x+} w_s &= w_{s+1}, & e_{x-} w_s &= w_{s-1} \\
\delta_{x+} &\triangleq \frac{e_{x+} - 1}{h}, & \delta_{x-} &\triangleq \frac{1 - e_{x-}}{h}, & \delta_x &\triangleq \frac{e_{x+} - e_{x-}}{2h}
\end{aligned}$$

Operatori temporali di secondo e quarto ordine sono definiti come

$$\delta_{xx} \triangleq \delta_{x+} \delta_{x-}, \quad \delta_{xxxx} \triangleq \delta_{xx} \delta_{xx}$$

Prodotto scalare e norma sono introdotti come

$$\langle a, b \rangle_{\mathbb{S}} \triangleq \sum_{s=0}^S h a_s b_s \quad (22a)$$

$$\|a\|_{\mathbb{S}}^2 \triangleq \sum_{s=0}^S h a_s^2 \quad (22b)$$

Infine, le distribuzioni temperate  $g_i$  in (23a) verranno sostituite da delta di Kroneker normalizzate, cioè

$$g_i = \frac{\delta_{i,s}}{h}$$

dove  $\delta_{i,s} = 1$  se e solo se  $i = s$ .

Con queste definizioni, il sistema (23) diventa

$$\mathfrak{L}(w) = \mathfrak{N}\mathfrak{L}(p, v) + \sum_i g_i \mathfrak{F}_i \quad (23a)$$

$$\mathfrak{G}(\zeta) = \mathfrak{N}\mathfrak{G}(v) \quad (23b)$$

$$v = \delta_{x-} w \quad (23c)$$

$$p = \delta_{x-} \zeta \quad (23d)$$

Gli operatori lineari sono definiti nella seguente maniera

$$\mathfrak{L}(w) = \rho_c A \delta_{tt} w - T_0 \delta_{xx} w + EI \delta_{xxxx} w \quad (24a)$$

$$\mathfrak{G}(\zeta) = \rho_c A \delta_{tt} \zeta - EA \delta_{xx} \mu_{tt} \zeta \quad (24b)$$

Gli operatori non lineari sono

$$\mathfrak{N}\mathfrak{L}(p, v) = \frac{EA - T_0}{2} \delta_{x+} [v^2 \mu_t v + 2v \mu_{tt} p] \quad (25a)$$

$$\mathfrak{N}\mathfrak{G}(v) = \frac{EA - T_0}{2} \delta_{x+} [v \mu_t v] \quad (25b)$$

Le forze al contorno  $s = S$  diventano

$$\tilde{\mathfrak{F}}_t = \tilde{\mathfrak{F}}_t^{(l)} + \tilde{\mathfrak{F}}_t^{(nl)} \quad (26a)$$

$$\tilde{\mathfrak{F}}_l = \tilde{\mathfrak{F}}_l^{(l)} + \tilde{\mathfrak{F}}_l^{(nl)} \quad (26b)$$

$$\tilde{\mathfrak{F}}_t^{(l)} = T_0 \delta_{x+} w - EI \delta_{x+} \delta_{xx} w$$

$$\tilde{\mathfrak{F}}_t^{(nl)} = \frac{EA - T_0}{2} [(\delta_{x+} w)^2 \mu_t (\delta_{x+} w) + 2(\delta_{x+} w) \mu_{tt} (\delta_{x+} \zeta)]$$

$$\tilde{\mathfrak{F}}_l^{(l)} = EA \left[ \frac{k^2}{4} \delta_{tt} + 1 \right] \delta_{x+} \zeta$$

$$\tilde{\mathfrak{F}}_l^{(nl)} = \frac{EA - T_0}{2} [(\delta_{x+} w) \mu_t (\delta_{x+} w)]$$

### 3.2 Schema per il martelletto e per gli strumenti di preparazione

Le collisioni del martelletto verranno simulate con l'ausilio di uno schema implicito, che dà origine a un'equazione algebrica non lineare. Questa dovrà essere risolta tramite un processo iterativo, qui Newton-Raphson. Lo schema è [9, 12]

$$\tilde{\mathfrak{F}}_m = \frac{\delta_{t+} (\mu_t - \phi(\eta_m))}{\delta_t \eta_m} \quad (27)$$

dove  $\phi(\eta_m)$  è definito in (9). Per gli strumenti di preparazione, espressioni simili sono utilizzate. Come detto, l'utilizzo di una tale forma per le forze di contatto permette di conservare un'energia discreta, e dunque di garantire la stabilità del sistema, anche in condizioni di forte non linearità. Per il martelletto, e per gli elementi mobili, l'equazione discreta del moto si scrive

$$M_m \delta_{tt} U_m = -\tilde{\mathfrak{F}}_m \quad (28)$$

### 3.3 Schema per la tavola armonica

Le equazioni per la tavola armonica saranno risolte con un approccio modale. Grazie a tale approccio, è possibile avere accesso ai tempi di decadimento in funzione della frequenza senza dover richiedere un ulteriore sforzo di calcolo. Inoltre, è possibile effettuare una riduzione del sistema, in maniera tale da mantenere un numero limitato di risonatori senza perdere eccessiva qualità sonora [13].

Pertanto, la soluzione  $W(\mathbf{x}, t)$  di (11a) è supposta tale che

$$W(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^R q_r(t) s_{r_x}(x) s_{r_y}(y) \quad (29a)$$

$$s_{r_x}(x) s_{r_y}(y) \triangleq \sin \frac{r_x \pi x}{L_x} \sin \frac{r_y \pi y}{L_y}, \quad (r_x, r_y) \in \mathbb{N} \quad (29b)$$

Utilizzando questa espressione, che soddisfa (21b), in (11), e proiettando sul modo  $r$  attraverso il prodotto scalare (13), si arriva all'equazione modale

$$\partial_t^2 q_r + \Omega_r^2 q_r = -\frac{4s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b)}{L_x L_y \rho_p H} (\mathcal{F}_t + \mathcal{F}_l) \quad (30)$$

dove si è assunto una forma tipo delta di Dirac per le distribuzioni temperate  $g_p^{(t)}, g_p^{(l)}$ . Le frequenze modali valgono

$$\Omega_r^2 = \frac{T_p}{\rho_p H} \left[ \frac{r_x^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{r_y^2 \pi^2}{L_y^2} \right] + \frac{D_x r_x^4 \pi^4}{\rho_p H L_x^4} + \frac{D_y r_y^4 \pi^4}{\rho_p H L_y^4} + \frac{2D_{xr} r_x^2 r_y^2 \pi^4}{\rho_p H L_x^2 L_y^2}$$

Uno schema risolutivo per (31) può essere dato in termini di operatori temporali a differenza finita, insieme all'espressione per le forze del ponticello (26). Perciò

$$\delta_{tt} q_r^n + \Omega_r^2 q_r^n = -\frac{4s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b)}{L_x L_y \rho_p H} (\tilde{\mathfrak{F}}_t + \tilde{\mathfrak{F}}_l) \quad (31)$$

### 3.4 Schema per il ponticello

Per il ponticello, lo schema numerico è

$$\tilde{\mathfrak{F}}_t = -K_t \left( w_S^n - \sum_r q_r^n s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b) \right) \quad (32a)$$

$$\tilde{\mathfrak{F}}_l = -K_l \left( \zeta_S^n - \sum_r q_r^n s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b) \right) \quad (32b)$$

dove sono stati esplicitati gli indici spazio-temporali delle funzioni di griglia, e delle coordinate modali. Si noti che le forze così definite sono esplicite nelle coordinate modali  $q_r$  (cioè, dipendono dal passo temporale  $n$ , e non da  $n+1$ ).

### 3.5 Conservazione dell'energia del sistema discreto

La controparte discreta di (19) si scrive dunque

$$\mathfrak{L}(w) = \mathfrak{N}\mathfrak{L}(p, v) + g_m \tilde{\mathfrak{F}}_m \quad (33a)$$

$$\mathfrak{G}(\zeta) = \mathfrak{N}\mathfrak{G}(v) \quad (33b)$$

$$v = \delta_{x-} w \quad (33c)$$

$$p = \delta_{x-} \zeta \quad (33d)$$

$$\delta_{tt} q_r^n + \Omega_r^2 q_r^n = -\frac{4s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b)}{L_x L_y \rho_p H} (\tilde{\mathfrak{F}}_t + \tilde{\mathfrak{F}}_l) \quad (33e)$$

$$M_m \delta_{tt} M_m = -\tilde{\mathfrak{F}}_m \quad (33f)$$

dove l'indice  $r$  in (33e) è intero e tale che  $r \in [1, R]$ . Per dimostrare l'esistenza di un hamiltoniano discreto, è sufficiente prendere un prodotto scalare tipo (22) di (33a) con  $\delta_t w$ , di (33b) con  $\delta_t \zeta$ . Si moltiplichino inoltre (33e) per  $\delta_t q_r$ , e (33f) per  $\delta_t U_m$ . Si sommino infine tutte le equazioni. Dopo somme per parti (non banali), e dopo l'utilizzo di non difficili, ma laboriose identità, è possibile arrivare al seguente bilancio energetico [14, 11]

$$\delta_{t+} \delta^n = 0 \quad (34)$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H} &= \mathfrak{H}^{(c)} + \mathfrak{H}^{(p)} + \mathfrak{H}^{(m)} + \mathfrak{H}^{(b)} \\
\mathfrak{H}^{(c)} &= \mathfrak{E}_k^{(c)} + \mathfrak{E}_{pl}^{(c)} + \mathfrak{E}_{pnl}^{(c)} \\
\mathfrak{H}^{(p)} &= \mathfrak{E}_k^{(p)} + \mathfrak{E}_{pl}^{(p)} \\
\mathfrak{H}^{(m)} &= \mathfrak{E}_k^{(m)} + \mathfrak{E}_{coll}^{(m)} \\
\mathfrak{H}^{(b)} &= \mathfrak{E}_{pl,t}^{(b)} + \mathfrak{E}_{pl,l}^{(b)} \\
\mathfrak{E}_k^{(c)} &= \frac{\rho_c A}{2} \|\delta_{t-} w^n\|_S^2 + \frac{\rho_c A}{2} \|\delta_{t-} \zeta^n\|_S^2 \\
\mathfrak{E}_{pl}^{(c)} &= \frac{T_0}{2} \langle v^n, v^{n-1} \rangle_S^2 + \frac{EI}{2} \langle \delta_{xx} w^n, \delta_{xx} w^{n-1} \rangle_S^2 \\
&\quad + \frac{T_0}{2} \|\mu_{t-} p^n\|_S^2 \\
\mathfrak{E}_{pnl}^{(c)} &= \frac{EA - T_0}{2} \left\| \frac{(q^n)(q^{n-1})}{2} + \mu_{t-} p^n \right\|_S^2 \\
\mathfrak{E}_k^{(p)} &= \frac{\rho_p H L_x L_y}{8} \sum_{r=1}^R (\delta_{t-} q_r^n)^2 \\
\mathfrak{E}_{pl}^{(p)} &= \frac{\rho_p H L_x L_y}{8} \sum_{r=1}^R \Omega_r^2 (q_r^n)(q_r^{n-1}) \\
\mathfrak{E}_k^{(m)} &= \frac{M_m}{2} (\delta_{t-} U_m^n)^2 \\
\mathfrak{E}_{coll}^{(m)} &= \mu_{t-} \phi(\eta_m^n) \\
\mathfrak{E}_{pl,t}^{(b)} &= \frac{K_t}{2} \left( w_S^n - \sum_r q_r^n s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b) \right) \times \\
&\quad \left( w_S^{n-1} - \sum_r q_r^{n-1} s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b) \right) \\
\mathfrak{E}_{pl,l}^{(b)} &= \frac{K_l}{2} \left( \zeta_S^n - \sum_r q_r^n s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b) \right) \times \\
&\quad \left( \zeta_S^{n-1} - \sum_r q_r^{n-1} s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b) \right)
\end{aligned}$$

L'energia cosí definita è una forma quadratica in  $(w, \zeta, q)^n$ ,  $(w, \zeta, q)^{n-1}$ . Sebbene (34) sia una controparte discreta di (20), la non negatività di  $\mathfrak{H}^{n-1/2}$  deve essere dimostrata. La situazione è resa complessa dai termini di accoppiamento tra sistema modale della tavola, e il sistema a differenze finite della corda, nelle espressioni di  $\mathfrak{E}_{pl,t}^{(b)}$ ,  $\mathfrak{E}_{pl,l}^{(b)}$ . Tuttavia, si noti che

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_{pl,t}^{(b)} &= \frac{K_t}{2} \left[ (\mu_{t-}) \left( w_S^n - \sum_r q_r^n s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b) \right) \right]^2 \\
&\quad - \frac{K_t k^2}{8} \left[ (\delta_{t-}) \left( w_S^n - \sum_r q_r^n s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b) \right) \right]^2
\end{aligned}$$

e che pertanto

$$\mathfrak{E}_{pl,t}^{(b)} \geq -\frac{K_t k^2}{8} \left[ (\delta_{t-}) \left( w_S^n - \sum_r q_r^n s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b) \right) \right]^2$$

Da questo, è possibile trovare un limite inferiore, tale che

$$\mathfrak{E}_{pl,t}^{(b)} \geq \begin{cases} -\frac{K_t k^2}{2} (\delta_{t-} w_S^n)^2 \\ -\frac{K_t k^2}{2} (\sum_r q_r^n s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b))^2 \end{cases}$$

Il primo caso è valido quando  $|\delta_{t-} w_S^n| \geq |\sum_r q_r^n s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b)|$ , il secondo caso quando  $|\delta_{t-} w_S^n| < |\sum_r q_r^n s_{r_x}(x_b) s_{r_y}(y_b)|$ .

Procedendo in modo analogo per  $\mathfrak{E}_{pl,l}^{(b)}$ , è dunque possibile trovare condizioni per la non negatività dell'energia totale imponendo le condizioni separatamente su

1. la componente trasversale del moto della corda
2. la componente longitudinale del moto della corda
3. la tavola armonica

Senza entrare nei dettagli di calcolo per mancanza di spazio, tali condizioni verranno ora elencate.

1. Per la componente trasversale del moto, (cioè per le componenti dell'energia che includono solo la funzione di griglia  $w$ ), la condizione *necessaria e sufficiente* per la non negatività è

$$\rho_c A h^4 - K_t k^2 h^3 - T_0 k^2 h^2 - 4EI k^2 \geq 0 \quad (35)$$

Tale equazione va risolta numericamente, ad esempio tramite un processo iterativo tipo Newton-Raphson. È possibile dimostrare che una e una sola soluzione per  $h > 0$  esiste per tutti i valori di  $K_t > 0$ , ma tale dimostrazione verrà omessa.

2. Per la componente longitudinale del moto (cioè per le componenti dell'energia che includono solo la funzione di griglia  $w$ ), la condizione *necessaria e sufficiente* per la non negatività è

$$K_l < \frac{\rho_c A h}{k^2} \quad (36)$$

Si noti in particolare che, rispetto a schemi precedenti (ad esempio in [14]) per la corda non lineare, sia  $w$  che  $\zeta$  sono definite sulla stessa griglia, senza dover interpolare tra due griglie con spaziature diverse. Ciò ha un effetto benefico duplice: riduce il tempo di calcolo, e non pone problemi da sottocampionamento spaziale.

3. Per la tavola armonica, una condizione *sufficiente* per la non negatività dell'energia associata è

$$\frac{\Omega_R^2}{4} + \frac{4R \max(K_t, K_l)}{L_x L_y \rho_p H} \leq \frac{1}{k^2} \quad (37)$$

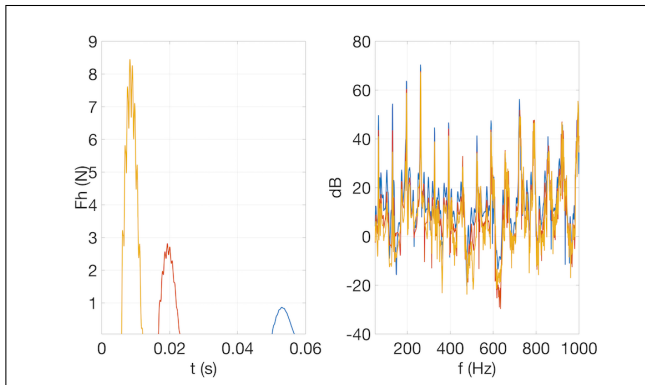
Si noti che, nel caso in cui  $K_t = K_l = 0$ , tale condizione si riduce alla condizione necessaria e sufficiente per l'oscillatore armonico [11].

Grazie a queste tre condizioni, è possibile trovare un limite inferiore per  $h$ , e un limite superiore per  $K_l$  e per il numero di modi  $R$ , una volta fissati  $k$  e  $K_t$ .

#### 4. ESEMPI NUMERICI

Ora che le condizioni di stabilità sono state enunciate, è possibile procedere alla descrizione di alcuni semplici esempi<sup>2</sup>. Gli esempi riportati hanno carattere esplicativo: lo

<sup>2</sup>Questi ed altri esempi possono essere ascoltati nella sezione *Prepared Piano* al seguente indirizzo: [mdphys.org](http://mdphys.org)

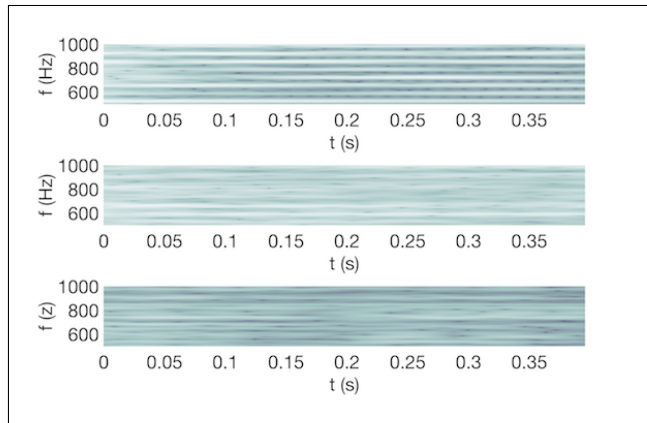


**Figure 1.** Simulazione di un D02 realistico. Lo strumento è composto da una sola corda di acciaio, di lunghezza  $L = 1.602$  m, raggio  $r_0 = 0.426$  mm, e di tensione uniforme  $T_0 = 200$  N. La tavola armonica è in legno, di lati  $L_x = 1.7$  m e  $L_y = 1.3$  m, e spessore  $H = 10$  mm. Una tensione uniforme di 200 N è applicata ai lati della tavola. Le rigidità del ponticello sono  $K_t = 5$  N/m,  $K_l = 10^4$  N/m. Il martelletto agisce a  $l_m = 0.05L$ , ha una massa di 10 grammi, un esponente  $p_m = 2.2$  e un coefficiente di rigidità  $K_m = 3.2 \cdot 10^8$ . In figura, vengono comparati i casi di velocità iniziale del martelletto pari a 0.2 m/s, 0.6 m/s, 1.7 m/s. La figura a sinistra rappresenta le forze di contatto nel corso del tempo per i tre casi, la figura di destra gli spettri. I segnali temporali sono stati registrati su un punto della tavola armonica.

strumento può (e deve) essere progettato in maniera complessa per essere sfruttato al meglio. Si noti inoltre che, sebbene la discussione fino ad ora sia stata svolta nel caso conservativo, gli esempi seguenti sono stati realizzati necessariamente con perdite, sia nelle corde, che negli strumenti di preparazione.

Il primo esempio è fornito in Figura 1. In tale esempio, uno strumento monocorda viene percosso a velocità crescenti. Si noti come, al crescere della velocità, il martelletto e la corda entrino in contatto con maggiore frequenza. Questo contribuisce ad arricchire lo spettro nelle alte frequenze.

Il secondo esempio è descritto nelle Figure 2 e 3. In queste figure, lo stesso strumento monocorda viene preparato con due preparazioni differenti: un sonaglio in un caso, e un sonaglio con ammortizzatore nel secondo caso, quest'ultimo lanciato ad una velocità iniziale estremamente elevata. Gli spettrogrammi della Figura 2 mostrano che, con una preparazione leggera, lo spettro viene leggermente modulato, lasciando le frequenze del DO2 distinguibili nello spettro. In Figura 3 vengono proposti i segnali temporali dei tre casi, scalati in modo da poter essere rappresentati sulla stessa figura. A destra, gli spettri mostrano chiaramente la transizione da un caso dove i picchi di frequenza sono dettati dalla corda, a un caso dove essi rispondono alla dinamica degli strumenti di preparazione. Il moto caotico del sistema nel caso della preparazione con sonaglio e ammortizzatore rende la resa sonora imprevedibile ed efficace. Si tratta di un esempio di grande impatto, oltre che irrealizzabile in un vero pianoforte: la sua con-



**Figure 2.** Dall'alto verso il basso sono messi in evidenza gli spettrogrammi del pianoforte non preparato (in alto), del pianoforte con sonaglio (al centro), e del pianoforte con sonaglio e ammortizzatore (in basso). I parametri della tavola, della corda e del martelletto sono gli stessi della Figura 1. Il sonaglio per la figura al centro pesa 10 grammi, ha un esponente  $p_s = 2.5$  e un coefficiente di rigidità  $K_s = 10^7$ . Per la figura in basso, il sonaglio con ammortizzatore ha lo stesso peso e lo stesso esponente del precedente, ma un coefficiente di rigidità  $K_s = 10^3$ . Il coefficiente di perdita è  $\beta_a = 8 \cdot 10^{-4} K_s$  ed esponente  $p_a = p_s$ . L'ammortizzatore viene lanciato verso la corda alla velocità  $v_a = 100$  m/s.

troparte digitale descritta in questo articolo risulta pertanto assai appetibile.

## 5. CONCLUSIONI

In questo lavoro, è stato presentato un modello per pianoforte preparato. Per le corde, è stato utilizzato il modello non lineare di Morse e Ingard, ed un nuovo schema a differenze finite è stato fornito per la soluzione delle equazioni. Differenze finite sono state usate per risolvere i contatti con i martelletti e gli strumenti di preparazione. Un approccio modale è stato invece utilizzato per la tavola armonica. Visto l'alto grado di non linearità del sistema completo, una dettagliata discussione sulla stabilità del sistema è stata fornita. La stabilità è stata fatta discendere dalla conservazione di un hamiltoniano discreto. In particolare, condizioni sufficienti per la stabilità sono state fornite indipendentemente per i moti trasversale e longitudinale della corda, e per il moto della tavola armonica. Infine, degli esempi numerici sono stati offerti per dimostrare alcune delle caratteristiche dello strumento digitale.

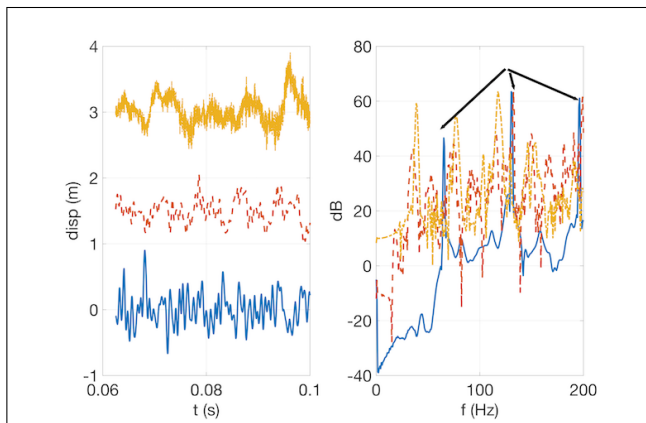
## 6. ACKNOWLEDGEMENTS

The author wishes to thank the Leverhulme Trust, who kindly supported this work with an Early Career Fellowship.

## 7. REFERENCES

- [1] R. Bunker, *The Well-Prepared Piano*. San Pedro, CA, USA: Litoral Art Press, 1981.





**Figure 3.** Segnali temporali e spettri di frequenza per gli stessi tre casi della Figura 2. Le frecce nel diagramma a destra indicano le armoniche del DO2.

- thesis,” in *Proc. ICA 2016*, (Buenos Aires, Argentina), September 2016.
- [13] M. Ducceschi and C. Webb, “Plate reverberation: Towards the development of a physical model for the working musician,” in *Proc. ICA 2016*, (Buenos Aires, Argentina), September 2016.
- [14] S. Bilbao, “Conservative numerical methods for nonlinear strings,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 118, p. 3316, 2005.
- [2] J. Smith, “Physical modeling using digital waveguides,” *Comput. Music J.*, vol. 16, no. 4, pp. 74–91, 1992.
- [3] J. Chabassier, A. Chaigne, and P. Joly, “Modeling and simulation of a grand piano,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 134, no. 1, pp. 648–665, 2013.
- [4] M. Ducceschi and S. Bilbao, “Linear stiff string vibrations in musical acoustics: Assessment and comparison of models,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 140, no. 4, pp. 2445–2454, 2016.
- [5] B. Bank and L. Sujbert, “Generation of longitudinal vibrations in piano strings: From physics to sound synthesis,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 117, no. 4, pp. 2268–2278, 2005.
- [6] P. Morse and U. Ingard, *Theoretical Acoustics*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1968.
- [7] B. Bank, S. Zambon, and F. Fontana, “A modal-based real-time piano synthesizer,” *IEEE/ACM Trans. Audio, Speech, Language Process.*, vol. 18, no. 4, pp. 809–821, 2010.
- [8] A. Stulov, “Experimental and computational studies of piano hammers,” *Acta Acust. Acust.*, vol. 91, pp. 1086–1097, 2005.
- [9] S. Bilbao, A. Torin, and V. Chatziioannou, “Numerical modeling of collisions in musical instrument,” *Acta Acust. Acust.*, vol. 101, no. 1, pp. 155–173, 2015.
- [10] A. Chaigne, B. Cotte, and R. Viggiano, “Dynamical properties of piano soundboards,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 133, no. 4, pp. 2456–2466, 2013.
- [11] S. Bilbao, *Numerical Sound Synthesis: Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics*. Chichester, UK: Wiley, 2009.
- [12] M. Ducceschi and S. Bilbao, “Modelling collisions of nonlinear strings against rigid barriers: Conservative finite difference schemes with application to sound syn-