Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Um estudo sobre teorias de definições indutivas e admissibilidade

João Filipe Pereira da Silva Enes

Dissertação
Mestrado em Matemática

Orientador: Professor Doutor Fernando Ferreira

2013

Agradecimentos

Gostaria de deixar aqui um agradecimento ao meu orientador, Professor Doutor Fernando Ferreira, por todo o apoio, disponibilidade e paciência que me dispensou na elaboração desta dissertação.

À minha família e amigos um enorme obrigado, em especial aos meus pais que sempre acreditaram em mim e me apoiaram em tudo.

João Enes
Lisboa, 29 de Outubro de 2013

Abstract

This thesis concerns the study of inductive definitions and their theories from a proof-theoretical point of view. In the first chapter, we present the basic notions of inductive definitions. Next we define the theories ID_1 and $\mathsf{ID}_1(W)$ and present a novel interpretation of the former in the latter.

In the second part of the thesis, we study the admissible set theory $\mathsf{KP}\omega$. We start by presenting $\mathsf{KP}\omega$ and some results that will allow us to interpret ID_1 in $\mathsf{KP}\omega$. In the last chapter, we study a recent functional interpretation of $\mathsf{KP}\omega$ in a theory of Howard's primitive recursive tree functionals. This interpretation yields a simple characterization of the so-called Σ-ordinal of $\mathsf{KP}\omega$.

Resumo

Esta dissertação é um estudo das definições indutivas e suas teorias sob o ponto de vista da teoria da demonstração. No primeiro capítulo apresentamos as noções básicas das definições indutivas. De seguida definimos as teorias ID_1 e $\mathsf{ID}_1(W)$ e apresentamos uma nova interpretação da primeira na segunda.

Na segunda parte da dissertação estudamos a teoria de conjuntos admissíveis $\mathsf{KP}\omega$. Começamos por apresentar $\mathsf{KP}\omega$ e alguns resultados que nos permitirão interpretar ID_1 em $\mathsf{KP}\omega$. No último capítulo estudamos uma recente interpretação funcional de $\mathsf{KP}\omega$ numa teoria de funcionais de árvore recursivos primitivos de Howard. Esta interpretação permite caracterizar duma forma simples o denominado Σ-ordinal de $\mathsf{KP}\omega$.

Conteúdo

Agradecimentos **iii**

Abstract **v**

Resumo **vii**

Introdução **xi**

1 Definições Indutivas e Conjuntos Π^1_1 **1**
1.1 Definições Indutivas por Operadores Monótonos 1
1.2 Conjuntos Π^1_1 4
1.3 Operadores definíveis 8
1.3.1 Digressão 15

2 Teorias de definições indutivas **17**
2.1 As teorias ID_1 e $\mathsf{ID}_1(W)$ 17
2.2 Interpretar ID_1 em $\mathsf{ID}_1(W)$ 19

3 Teoria de Kripke-Platek com Infinito **25**
3.1 Axiomas e resultados básicos de $\mathsf{KP}\omega$ 25
3.2 Definições em $\mathsf{KP}\omega$ 29
3.3 $\mathsf{ID}_1 \subseteq \mathsf{KP}\omega$ 34
3.4 O Σ-ordinal de $\mathsf{KP}\omega$ 37

4 Interpretação funcional de $\mathsf{KP}\omega$ **41**
4.1 Funcionais de Howard 41
4.2 Interpretação Funcional 45

Bibliografia **55**

Nomenclatura **57**

Índice **61**

Introdução

A presente tese é uma introdução à teoria da demonstração em particular às áreas das definições indutivas e admissibilidade.

Os dois primeiros capítulos são dedicados às definições indutivas. Começamos por apresentar as noções básicas das definições indutivas e dos conjuntos Π^1_1 e damos alguns exemplos de definições indutivas. No primeiro capítulo apresentamos ainda dois resultados que relacionam as definições indutivas e os conjuntos Π^1_1: o teorema de Spector que diz que toda a definição indutiva é Π^1_1 e o teorema de Kleene que diz que existe uma definição indutiva que é Π^1_1-completa.

No segundo capítulo estudamos duas teorias de definições indutivas ID_1 e $\mathsf{ID}_1(W)$ e apresentamos uma interpretação de ID_1 e $\mathsf{ID}_1(W)$. Esta interpretação, tanto quando sabemos, é nova. O resultado da equivalência das teorias ID_1 e $\mathsf{ID}_1(W)$ é já conhecido tendo sido obtido por Kreisel em 1968, como é notado em Feferman and Sieg [1981, p. 48]. No entanto o resultado de Kreisel utiliza uma passagem pelas contrapartes intuicionistas $\mathsf{ID}^{\mathsf{i}}_1$ e $\mathsf{ID}^{\mathsf{i}}_1(W)$ o que obscurece a interpretação. A nossa interpretação tem a vantagem de ser directa entre as teorias clássicas ID_1 e $\mathsf{ID}_1(W)$.

Os dois últimos capítulos são sobre a teoria de conjuntos admissíveis $\mathsf{KP}\omega$. Começamos por apresentar $\mathsf{KP}\omega$ e alguns resultados que nos vão permitir interpretar ID_1 em $\mathsf{KP}\omega$. No final do terceiro capítulo definimos o Σ-ordinal de $\mathsf{KP}\omega$, $\|\mathsf{KP}\omega\|_\Sigma$.

No quarto capítulo apresentamos um interpretação funcional de $\mathsf{KP}\omega$ numa teoria de funcionais de árvore recursivos primitivos de Howard o que permite obter uma majoração de $\|\mathsf{KP}\omega\|_\Sigma$ pelo ordinal de Bachmann-Howard.

Capítulo 1

Definições Indutivas e Conjuntos Π_1^1

1.1 Definições Indutivas por Operadores Monótonos

Definição 1.1.1 (Operador Monótono)**.** Um operador $\Gamma\colon \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(\omega)$ diz-se monótono sse

$$\forall X \subseteq \omega \, \forall Y \subseteq \omega \, (X \subseteq Y \Rightarrow \Gamma(X) \subseteq \Gamma(Y)).$$

Um conjunto X diz-se fechado sobre Γ se $\Gamma(X) \subseteq X$.

Definição 1.1.2 (Conjunto definido indutivamente por um operador monótono)**.** Designamos por conjunto definido indutivamente por Γ o conjunto

$$I_\Gamma = \bigcap \{X \in \mathcal{P}(\omega) | X \text{ é fechado para } \Gamma\}.$$

Lema 1.1.3. *I_Γ é o menor ponto fixo de Γ.*

Demonstração. Comecemos por ver que I_Γ é fechado sobre Γ. Seja $X \in \mathcal{P}(\omega)$ fechado sobre Γ. Como Γ é monótono e $I_\Gamma \subseteq X$ tem-se $\Gamma(I_\Gamma) \subseteq \Gamma(X) \subseteq X$. Uma vez que X é arbitrário vem que $\Gamma(I_\Gamma) \subseteq I_\Gamma$. Pela monotonia de Γ temos $\Gamma(\Gamma(I_\Gamma)) \subseteq \Gamma(I_\Gamma)$. Logo $\Gamma(I_\Gamma)$ é fechado sobre Γ e portanto $I_\Gamma \subseteq \Gamma(I_\Gamma)$. Vem $I_\Gamma = \Gamma(I_\Gamma)$. Como os pontos fixos de Γ são, em particular, fechados sobre Γ vem que I_Γ é o menor ponto fixo de Γ. □

Esta definição de I_Γ é feita "de fora" ou seja, vemos I_Γ como sendo o menor conjunto fechado para Γ. Vamos agora definir I_Γ "por dentro" como o limite de um processo recursivo transfinito e mais tarde veremos que as duas definições coincidem.

Definição 1.1.4. Seja Γ um operador monótono. Definimos a aplicação $\alpha \mapsto I^\alpha_\Gamma$ de ω_1 para $\mathcal{P}(\omega)$ por

$$I^\alpha_\Gamma = \Gamma(\bigcup_{\beta<\alpha} I^\beta_\Gamma)$$

e definimos I_Γ como

$$I_\Gamma = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} I^\alpha_\Gamma.$$

Lema 1.1.5. *Seja Γ um operador monótono. Então*

(i) $I^0_\Gamma = \Gamma(\emptyset)$

(ii) $\alpha \leqslant \beta \to I^\alpha_\Gamma \subseteq I^\beta_\Gamma$

(iii) $I^{\alpha+1}_\Gamma = \Gamma(I^\alpha_\Gamma)$ *para todo o* α.

Demonstração. A alínea (i) sai de $\bigcup_{\beta<0} I^\beta_\Gamma = \emptyset$. Para ver (ii) sejam $\alpha \leqslant \beta$, então

$$\bigcup_{\gamma<\alpha} I^\gamma_\Gamma \subseteq \bigcup_{\gamma<\beta} I^\gamma_\Gamma$$

o que pela monotonia de Γ implica

$$I^\alpha_\Gamma = \Gamma(\bigcup_{\gamma<\alpha} I^\gamma_\Gamma) \subseteq \Gamma(\bigcup_{\gamma<\beta} I^\gamma_\Gamma) = I^\beta_\Gamma.$$

Da alínea (ii) sai $\bigcup_{\gamma\leqslant\alpha} I^\gamma_\Gamma = I^\alpha_\Gamma$ donde

$$I^{\alpha+1}_\Gamma = \Gamma(\bigcup_{\gamma\leqslant\alpha} I^\gamma_\Gamma) = \Gamma(I^\alpha_\Gamma). \qquad \square$$

Lema 1.1.6. *Seja Γ um operador monótono. Existe um ordinal $\alpha < \omega_1$ tal que $I^\alpha_\Gamma = \bigcup_{\beta<\alpha} I^\beta_\Gamma = I_\Gamma$.*

Demonstração. Suponhamos com vista a absurdo que não existe $\alpha < \omega_1$ tal que $I^\alpha_\Gamma = \bigcup_{\beta<\alpha} I^\beta_\Gamma$, então pelo lema 1.1.5 temos $\forall\alpha < \omega_1\ \bigcup_{\beta<\alpha} I^\beta_\Gamma \subsetneq I^\alpha_\Gamma$.
Seja $f\colon \omega_1 \to \omega$ definida por

$$f(\alpha) = \min\,(I^\alpha_\Gamma \setminus (\bigcup_{\beta<\alpha} I^\beta_\Gamma))$$

Dados $\alpha, \beta \in \omega_1$ com $\alpha < \beta$ temos $f(\alpha) \in I^\alpha_\Gamma$ e $f(\beta) \notin I^\alpha_\Gamma$ logo $f(\alpha) \neq f(\beta)$ portanto f é injetiva o que é absurdo porque $card(\omega) < card(\omega_1)$. Sejam α tal que $I^\alpha_\Gamma = \bigcup_{\beta<\alpha} I^\beta_\Gamma$ e $\gamma \geqslant \alpha$ e suponhamos que $\forall\beta < \gamma\ I^\beta_\Gamma \subseteq I^\alpha_\Gamma$. Pela monotonia de Γ temos $I^\gamma_\Gamma = \Gamma(\bigcup_{\beta<\gamma} I^\beta_\Gamma) \subseteq \Gamma(I^\alpha_\Gamma) = \Gamma(\bigcup_{\beta<\alpha} I^\beta_\Gamma) = I^\alpha_\Gamma$. Como temos $\forall\beta < \alpha\ I^\beta_\Gamma \subseteq I^\alpha_\Gamma$ sai por indução que $\forall\gamma \geqslant \alpha\ I^\gamma_\Gamma \subseteq I^\alpha_\Gamma$ e portanto, pelo lema 1.1.5, $\forall\gamma \geqslant \alpha\ I^\gamma_\Gamma = I^\alpha_\Gamma$.
Temos então $I_\Gamma = \bigcup_{\beta\in\omega_1} I^\beta_\Gamma = \bigcup_{\beta<\alpha} I^\beta_\Gamma = I^\alpha_\Gamma$. $\square$

Lema 1.1.7. $\forall\alpha \in \omega_1\, (I_\Gamma^\alpha = I_\Gamma \to \forall\beta \geqslant \alpha\; I_\Gamma^\beta = I_\Gamma)$.

Demonstração. É consequência imediata de $\forall\beta \geqslant \alpha\; I_\Gamma^\alpha \subseteq I_\Gamma^\beta \subseteq I_\Gamma$. □

Definição 1.1.8 (Norma de um operador monótono)**.** Seja Γ um operador monótono. Dado $n \in I_\Gamma$ definimos a norma-Γ de n como

$$|n|_\Gamma = \min\{\alpha \in \omega_1 \mid n \in I_\Gamma^\alpha\}$$

e definimos a norma de Γ ou o ordinal de fecho de Γ como

$$|\Gamma| = \sup\{|n|_\Gamma \mid n \in I_\Gamma\}.$$

É imediato da definição que $|\Gamma| = \min\{\alpha \in \omega_1 \mid I_\Gamma^\alpha = I_\Gamma\}$.

Teorema 1.1.9. *Seja Γ um operador monótono.*

(i) $\Gamma(I_\Gamma) = I_\Gamma$

(ii) $\forall X \in \mathcal{P}(\omega)\, (\Gamma(X) \subseteq X \to I_\Gamma \subseteq X)$.

Demonstração. (i) sai simplesmente de

$$\Gamma(I_\Gamma) = \Gamma(I_\Gamma^{|\Gamma|}) = I_\Gamma^{|\Gamma|+1} = I_\Gamma.$$

Vejamos (ii) por indução em ω_1. Seja $X \in \mathcal{P}(\omega)$ fechado para Γ. $\emptyset \subseteq X$ logo $I_\Gamma^0 = \Gamma(\emptyset) \subseteq \Gamma(X) \subseteq X$. Seja $\alpha \in \omega_1$ e suponhamos que $\forall\beta < \alpha\; I_\Gamma^\beta \subseteq X$. Então $\bigcup_{\beta<\alpha} I_\Gamma^\beta \subseteq X$ e portanto $I_\Gamma^\alpha = \Gamma(\bigcup_{\beta<\alpha} I_\Gamma^\beta) \subseteq \Gamma(X) \subseteq X$. Temos $\forall\alpha \in \omega_1\; I_\Gamma^\alpha \subseteq X$ logo $I_\Gamma = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} I_\Gamma^\alpha \subseteq X$. □

Este teorema diz-nos em particular que I_Γ é o menor (para a inclusão) dos conjuntos fechados para Γ, ou seja, que as definições 1.1.2 e 1.1.4 coincidem.

Observação. A alínea (ii) traduz um princípio de indução para I_Γ no sentido em que para se mostrar que uma dada propriedade $P(x)$ é verdade para todos os elementos de I_Γ é suficiente ver que o conjunto $\{x \in \omega | P(x)\}$ é fechado para Γ.

Nas exemplos de definições indutivas que vamos apresentar e na formalização destas noções que iremos fazer no segundo capítulo apenas vamos exigir que I_Γ seja fechado para Γ uma vez que o fecho de I_Γ juntamente com a monotonia de Γ e o princípio de indução é suficiente para garantir que I_Γ é ponto fixo.

$$\begin{aligned}\Gamma(I_\Gamma) \subseteq I_\Gamma &\to \Gamma(\Gamma(I_\Gamma)) \subseteq \Gamma(I_\Gamma)\\ &\to I_\Gamma \subseteq \Gamma(I_\Gamma).\end{aligned}$$

Os resultados anteriores são muito gerais no sentido em que qualquer subconjunto de ω pode ser obtido por um operador monótono, dado $X \subseteq \omega$ este é definido indutivamente pelo operador monótono $\Gamma \equiv X$.

1.2 Conjuntos Π^1_1

Definição 1.2.1 (Linguagem da aritmética de segunda ordem)**.** A linguagem da aritmética de segunda ordem tem três tipos de variáveis: as variáveis numéricas, $x, y, z, \ldots$, as variáveis funcionais, $f, g, h, \ldots$, e as variáveis de predicados, $X, Y, Z, \ldots$. A interpretação standard é a de que as variáveis numéricas variam em ω, as variáveis funcionais variam sobre as funções de ω em ω e as variáveis de predicados variam sobre os subconjuntos de ω.

Os termos numéricos são as variáveis numéricas, as constantes 0 e 1 e $f(t)$, $t + s$ e $t \cdot s$ em que f é uma variável funcional, t e s são termos numéricos. As fórmulas atómicas são $t = s$, $t < s$ e $X(t)$ em que t e s são termos numéricos e X é uma variável de predicado. A interpretação de $X(t)$ é $t \in X$. As fórmulas são construídas da mesma forma que na aritmética de primeira ordem sendo que para além das quantificações sobre variáveis numéricas temos também quantificações sobre as variáveis funcionais e de predicados.

Dados uma fórmula $A(X)$ e $M \subseteq \omega$ escrevemos

$$\mathbb{N}[M] \vDash A(X) \text{ ou simplesmente } A(M)$$

para "$A(X)$ é verdade no modelo standard quando X é interpretado como M".

Definição 1.2.2 (Números de sequências)**.** Definimos uma função de codificação $\langle \cdot \rangle \colon \omega^{<\omega} \to \omega$ que a uma sequência finita $(a_i)_{i<n}$ faz corresponder $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle = \prod_{i=0}^{n-1} p_i^{a_i+1}$ em que p_i é o i-ésimo primo. Dizemos que um número codifica uma sequência ou que é um número de sequência se está na imagem de $\langle \cdot \rangle$. Designamos o conjunto dos números de sequências por Seq. Daqui em diante identificaremos implicitamente as sequências com os seus códigos e quando nada for dito em contrário $s, t, \ldots$ são variáveis em Seq.

Dados $s, t \in Seq$ denotamos a sua concatenação por $s * t$. Dada $f \colon \omega \to \omega$ definimos $\bar{f}(n) = \langle f(0), f(1), \ldots, f(n-1) \rangle$. $\bar{f}(0) = \langle\rangle = 1$. Para todo $n > 0$ definimos

$$Seq^{\geqslant n} := \{k \in Seq \mid p_{n-1} \text{ divide } k\},$$

o conjunto das sequências de comprimento maior ou igual a n, e definimos a função projeção, $(\cdot)_n \colon Seq^{\geqslant n} \to \omega$ por

$$(s)_n := \text{ o n-ésimo elemento da sequência codificada por } s.$$

Definição 1.2.3 (Função recursiva num oráculo)**.** Dada uma função $f \in \omega^\omega$ qualquer, dizemos que uma função g é recursiva parcial com oráculo f ou recursiva parcial em f se é uma função computável por uma máquina que tem uma instrução que dado n devolve $f(n)$. Entenda-se que a máquina não computa f, simplesmente ela pode de alguma forma aceder ao valor de $f(n)$ (daí o termo "oráculo").

O teorema da forma normal de Kleene diz-nos existe um predicado recursivo T e uma função recursiva U tais que se g é uma função recursiva em f existe $e \in \omega$ tal que

$$g(x) = y \leftrightarrow \exists z \left[T(\bar{f}(z), e, x, z) \wedge U(z) = y\right].$$

T é a condição de paragem da máquina e U é a função output da máquina, ou seja, $g(x) = y$ sse existe $z \in \omega$ tal que a máquina que computa $g(x)$ para ao fim de z passos e quando pára tem no output y. Isto dá-nos uma enumeração standard para as funções recursivas parciais com oráculo, neste caso g é a e-ésima função recursiva parcial em f que denotamos por $\{e\}^f$. Note-se que o predicado T só recebe os primeiros z valores de f isto porque se a máquina para ao fim de um número finito de passos então só consulta um número finito de valores f e podemos sempre supor que o número de passos da computação é maior ou igual do que o maior n para o qual a máquina tem de consultar $f(n)$, por exemplo, podemos exigir que a máquina efectue n passos para consultar $f(n)$. Dado $X \subseteq \omega$ dizemos que g é recursiva em X sse g é recursiva em χ_X, a função característica de X. Notamos por $\{e\}^X$ em vez de $\{e\}^{\chi_X}$. Estas noções estendem-se a funções de aridade n recursivas em m funções para quaisquer $m, n \in \omega$.

Definição 1.2.4 (Predicado Recursivo)**.** Um predicado da forma $R(f, x)$ é recursivo se existe $e \in \omega$ tal que:

(i) $\forall f\, \forall x\, \{e\}^f(x) \downarrow$;

(ii) $\forall f\, \forall x\, (R(f, x) \leftrightarrow \{e\}^f(x) = 0)$.

Utilizando a noção estendida de função recursiva num oráculo estendemos a noção de predicado recursivo a fórmulas $R(f_0, \ldots, f_{m-1}, x_0, \ldots, x_{n-1})$ com $m, n \geqslant 0$. Daqui em diante um predicado da forma $R(f, x)$ deve ser entendido como tendo um número arbitrário de variáveis numéricas e funcionais.

Definição 1.2.5 (Predicado aritmético e analítico)**.** Um predicado diz-se analítico se é obtido a partir de predicados recursivos utilizando conectivos lógicos, quantificadores numéricos e funcionais. Um predicado aritmético é um predicado analítico onde não ocorrem quantificadores funcionais.

Teorema 1.2.6 (Kleene)**.** *Um predicado analítico $P(f, x)$ pode ser escrito numa das seguintes formas:*

(1) $A(f, x)$

(2.i) $\exists g \forall y\, R(f, x, g, y)$

(2.ii) $\exists g \forall h \exists y\, R(f, x, g, h, y)$

$\vdots$

(3.i) $\forall g \exists y\, R(f, x, g, y)$

(3.ii) $\forall g \exists h \forall y\, R(f, x, g, h, y)$

$\vdots$

com A aritmético e R recursivo. Um predicado analítico diz-se em forma normal se está numa das formas anteriores.

Demonstração. Dado $P(f, x)$ analítico começamos por prenexificá-lo ficando com uma fórmula com uma matriz recursiva e livre de quantificadores. Depois aplicamos as seguintes regras e as suas duais ao prefixo obtendo uma das formas listadas. Seja K uma fórmula arbitrária.

$$\forall x \exists f\, K(f, x) \leftrightarrow \exists h \forall x\, K((h)_x, x), \tag{1}$$

$$\exists x\, K(x) \leftrightarrow \exists f\, K(f(0)), \tag{2}$$

$$\exists f \exists g\, K(f, g) \leftrightarrow \exists h\, K((h)_0, (h)_1), \tag{3}$$

$$\exists x \exists y\, K(x, y) \leftrightarrow \exists z\, K((z)_0, (z)_1), \tag{4}$$

em que $(h)_x(y) = h(2^x 3^y)$. A ideia é que h codifica as funções que satisfazem o primeiro membro de (1) ou (3). $(z)_i$ é a função projeção. A demonstração destas equivalências é apenas uma questão de fazer as substituições evidentes, por exemplo para demonstrar o sentido direto de (3), se temos f e g tais que $K(f, g)$ basta tomar h tal que $(h)_0 \equiv f$ e $(h)_1 \equiv g$. É de notar que a regra (1) necessita, em geral, do axioma da escolha. Uma vez que K é arbitrário as regras duais, (1*) a (4*), resultam de negarmos ambos membros da regra correspondente. Uma vez que $(h)_x$ e $(z)_i$ são recursivas estas substituições não alteram o carácter recursivo da matriz de P.

Vejamos um exemplo deste processo de normalização de prefixos.

$$\begin{array}{ll}
\forall x \forall y \exists f \exists z\, K(f, x, y, z) & \\
\leftrightarrow \forall x \exists f \exists z\, K(f, (x)_0, (x)_1, z) & \text{por } (4*) \\
\leftrightarrow \forall x \exists f \exists g\, K(f, (x)_0, (x)_1, g(0)) & \text{por } (2) \\
\leftrightarrow \forall x \exists f\, K((f)_0, (x)_0, (x)_1, (f)_1(0)) & \text{por } (3) \\
\leftrightarrow \exists f \forall x\, K(((f)_x)_0, (x)_0, (x)_1, ((f)_x)_1(0)) & \text{por } (1)
\end{array}$$

Não nos preocupando com a forma concreta da matriz de $P(f, x)$ podemos normalizar o prefixo da seguinte forma: primeiro eliminamos os quantificadores numéricos, depois colapsamos todos os blocos de quantificadores funcionais do mesmo tipo e finalmente acrescentamos um quantificador numérico à direita de tipo contrário ao quantificador funcional adjacente. $\square$

Este teorema permite a classificação dos predicados analíticos não aritméticos em classes. Um predicado analítico diz-se Π^1_n (respetivamente Σ^1_n) se o prefixo da sua forma normal começa com um quantificador universal (respetivamente existencial) e tem n quantificadores funcionais. Além desta classificação pela sua forma normal um predicado está também numa dada classe se for equivalente a um outro predicado dessa classe. Um predicado diz-se Δ^1_n se for simultaneamente Π^1_n e Σ^1_n. Como podemos sempre acrescentar quantificações inertes a um predicado temos que se este é Π^1_n ou Σ^1_n então também é Π^1_m e Σ^1_m para qualquer $m > n$.

Vamos agora ver que tudo o que dissemos sobre predicados analíticos pode ser rescrito substituindo os quantificadores funcionais por quantificadores de predicados. Um predicado $R(X, y)$ é recursivo se for equivalente a uma predicado recursivo $P(\chi_X, y)$ em que χ_X é a função característica de X. Esta definição é natural uma vez que uma função é recursiva num conjunto sse é recursiva na função característica deste.

Um conjunto X codifica uma função se $\forall x \exists! y\, (2^x 3^y \in X)$ e denotamos esta função por f_X. Assim temos

$$f_X(x) = y \leftrightarrow 2^x 3^y \in X.$$

Seja $S(X, x, y) :\equiv [2^x 3^y \in X \wedge \forall z\, (2^x 3^z \in X \rightarrow z = y)]$. A seguinte fórmula e a sua dual permitem substituir quantificadores funcionais por quantificadores de predicados:

$$\exists f\, K(f) \leftrightarrow \exists X \forall x \exists y\, (S(X, x, y) \wedge K(f_X)).$$

O facto de que quando passamos de quantificadores funcionais para quantificadores de predicados ficamos com dois quantificadores numéricos não pode em geral ser melhorado, isto porque existem predicados recursivos $R(X, x, y, z)$ tais que $\exists X \forall x \exists y\, R(X, x, y, z) \not\leftrightarrow \exists X \forall x\, P(X, x, z)$ para qualquer $P(X, x, z)$ recursivo.

Assim sendo as definições de predicado analítico e aritmético mantêm-se substituindo os quantificadores funcionais por quantificadores de predicados e o teorema de Kleene pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 1.2.7 (Kleene). *Um predicado analítico $P(X, x)$ pode ser escrito numa das seguintes formas:*

(1) $A(X, x)$

(2.i) $\exists Y \forall y \exists z\, R(X, x, Y, y, z)$

(2.ii) $\exists Y \forall Z \exists y \forall z\, R(X, x, Y, Z, y, z)$

$\vdots$

(3.i) $\forall Y \exists y \forall z\, R(X, x, Y, y, z)$

(3.ii) $\forall Y \exists Z \forall y \exists z\, R(X, x, Y, Z, y, z)$

$\vdots$

com A aritmético e R recursivo.

Estes predicados são da mesma forma classificados como Π^1_n ou Σ^1_n. Mais ainda, podemos mesmo misturar quantificadores funcionais e de predicados na mesma fórmula. Notemos no entanto que, dada a definição de predicado recursivo, quando substituímos quantificadores de predicados por quantificadores funcionais podemos restringir estes últimos a funções características, isto é, para todo K(X) analítico existe P(f) analítico tal que

$$\exists X\, K(X) \leftrightarrow \exists f \in 2^\omega\, P(f).$$

Esta assimetria entre os dois tipos de quantificadores não é em geral muito relevante mas veremos mais à frente um caso onde é importante.

Vejamos agora como podemos refinar a forma normal no caso dos predicados Π^1_1.

Forma normal dos predicados Π^1_1. Seja $\forall f \exists x\, R(f,x,y)$ um predicado Π^1_1 com R recursivo. Então existe $e \in \omega$ tal que

$$\forall f \forall x \forall y\, (\{e\}^f(x,y)\downarrow \wedge\, (R(f,x,y) \leftrightarrow \{e\}^f(x,y) = 0)).$$

Pelo teorema da forma normal de Kleene existe um predicado T e uma função U ambos recursivos primitivos numéricos tais que

$$\begin{aligned} &\forall f \exists x\, R(f,x,y) \\ \leftrightarrow &\forall f \exists x\, \{e\}^f(x,y) = 0 \\ \leftrightarrow &\forall f \exists x \exists z\, (T(\bar{f}(z), e, x, y, z) \wedge U(z) = 0) \end{aligned}$$

donde sai que existe P recursivo primitivo numérico tal que

$$\forall f \exists x\, R(f,x,y) \leftrightarrow \forall f \exists x\, P(\bar{f}(x), y).$$

$\forall f \exists x\, P(\bar{f}(x), y)$ é a forma normal que vamos utilizar para os predicados Π^1_1.

1.3 Operadores definíveis

Definição 1.3.1 (Operador definível)**.** Um operador Γ^A diz-se definido por uma fórmula $A(P,x)$ sse para todo $x \in \omega$ e $X \subseteq \omega$

$$x \in \Gamma^A(X) \Leftrightarrow A(X,x).$$

Definição 1.3.2 (Fórmula aritmética positiva)**.** Um fórmula aritmética $A(P,x)$ diz-se positiva ou P-positiva se, quando escrita em forma prenexa com uma matriz em forma normal conjuntiva (ou disjuntiva), o predicado P não ocorre negado.

Observando a definição de operador monótono (Def. 1.1.1) vemos que Γ^A é monótono se para todos $X, X' \subseteq \omega$ se tem

$$\forall x(\forall y(X(y) \to X'(y)) \wedge A(X,x) \to A(X',x)).$$

Se $A(P,x)$ for aritmética é suficiente que $A(P,x)$ seja positiva para termos esta condição.

Definição 1.3.3 (Operador aritmético)**.** Dizemos que Γ é um aritmético se Γ é um operador definido por uma fórmula aritmética positiva.

Um primeiro resultado devido a Spector é a caracterização dos conjuntos definidos indutivamente por operadores aritméticos.

Teorema 1.3.4 (Spector)**.** *Se $A(P,x)$ é uma fórmula aritmética positiva então I_{Γ^A} é um conjunto Π^1_1*

Demonstração. Seja $A(P,x)$ uma fórmula aritmética positiva. Temos

$$I_{\Gamma^A} = \bigcap \{X \in \mathcal{P}(\omega) | \Gamma^A(X) \subseteq X\}.$$

Pela definição de operador definível vem

$$\Gamma^A(X) \subseteq X \leftrightarrow \forall y\,(A(X,y) \to X(y))$$

logo

$$\forall x\,(x \in I_{\Gamma^A} \leftrightarrow \forall X(\forall y\,(A(X,y) \to X(y)) \to X(x)))$$

em que $\forall X(\forall y\,(A(X,y) \to X(y)) \to X(x))$ é uma fórmula Π^1_1. $\square$

Vejamos agora alguns exemplos importantes de definições indutivas por operadores aritméticos.

Definição 1.3.5 (Ordinais contrutíveis de Kleene)**.** O conjunto O dos ordinais construtíveis é definido indutivamente pelo operador dado pela fórmula

$$\begin{gathered}\mathcal{O}(P,z) :\leftrightarrow z = 0 \;\vee\; \exists x(P(x) \;\wedge\; z = \langle 1, x\rangle) \vee \\ \exists x \forall n \exists y(\{x\}(n) = y \wedge P(y) \wedge z = \langle 2, x\rangle)\end{gathered}$$

Este operador é claramente monótono uma vez que $\mathcal{O}(P,z)$ é P-positiva. Da definição podemos explicitar a condição de fecho e o princípio de indução do teorema 1.1.9 no caso de O. Estes são, respetivamente

$$\begin{gathered}\forall z[z = 0 \vee \exists x(O(x) \wedge z = \langle 1, x\rangle) \vee \\ \exists x(\forall n\, O(\{x\}(n)) \wedge x = \langle 2, x\rangle) \to O(z)]\end{gathered} \tag{O.1}$$

$$\forall X[\forall z(z = 0 \vee \exists x(X(x) \wedge z = \langle 1, x\rangle)\vee$$
$$\exists x(\forall n\, X(\{x\}(n)) \wedge x = \langle 2, x\rangle) \rightarrow X(z)) \rightarrow \forall z(O(z) \rightarrow X(z))]. \tag{O.2}$$

Outro exemplo de uma definição indutiva é a parte acessível ou bem fundada de uma relação.

Definição 1.3.6 (Relação binária bem fundada)**.** Uma relação binária $\prec$ num conjunto X diz-se bem fundada se e só se

$$\forall Y \subseteq X\, [Y \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in Y \forall x \in Y \neg(x \prec y)].$$

Definição 1.3.7 (Parte acessível de uma relação)**.** Seja $\prec$ uma relação binária em ω aritmeticamente definível e considere-se $\Gamma^{\prec}$ o operador definido pela fórmula

$$Acc(P, x, \prec) :\leftrightarrow x \in field(\prec) \wedge \forall y(y \prec x \rightarrow P(y)).$$

Uma vez que P só ocorre positivamente em $Acc(P, x, \prec)$ o operador $\Gamma^{\prec}$ é monótono. A parte acessível de $\prec$, denotada $Acc_{\prec}$, é o conjunto definido indutivamente por $\Gamma^{\prec}$.

Lema 1.3.8. *Seja $\prec$ uma relação binária em ω aritmeticamente definível. A restrição de $\prec$ a $Acc_{\prec}$ é uma relação bem fundada.*

Demonstração. Seja $X \subseteq Acc_{\prec}$ não vazio. Seja $x \in X$ tal que

$$|x|_{\Gamma^{\prec}} = \min\{|y|_{\Gamma^{\prec}} \mid y \in X\}.$$

Da definição de $Acc(P, x, \prec)$ sai que

$$\forall x, y \in Acc_{\prec}\, (x \prec y \rightarrow |x|_{\Gamma^{\prec}} < |y|_{\Gamma^{\prec}})$$

e portanto $\forall y \in X\, \neg(y \prec x)$. Logo a restrição de $\prec$ a $Acc_{\prec}$ é bem fundada. □

Devido ao resultado anterior $Acc_{\prec}$ é também designada por parte bem fundada de $\prec$.

Definição 1.3.9 (Order Type)**.** Dada uma relação binária bem fundada $\prec$ definimos por recursão transfinita a operação $otyp_{\prec} \colon field(\prec) \rightsquigarrow Ord$ por

$$otyp_{\prec}(s) := \sup\{otyp_{\prec}(t) + 1 \mid t \prec s\}$$

e definimos

$$otyp(\prec) := \sup\{otyp_{\prec}(s) + 1 \mid s \in field(\prec)\}$$

Lema 1.3.10. *Seja $\prec$ uma relação binária em ω aritmeticamente definível e bem fundada. Então $Acc_{\prec} = field(\prec)$ e para todo $s \in field(\prec)$ temos $otyp_{\prec}(s) = |s|_{\Gamma^{\prec}}$.*

Demonstração. Da definição de $Acc(P, x, \prec)$ sai que $Acc_{\prec} \subseteq field(\prec)$. Vejamos agora por indução em α que

$$s \in field(\prec) \wedge otyp_{\prec}(s) = \alpha \to s \in Acc_{\prec}^{\alpha}. \tag{1}$$

Seja $s \in field(\prec)$ tal que $otyp_{\prec}(s) = \alpha$. Dado $t \prec s$ temos $otyp_{\prec}(t) < \alpha$ logo pela hipótese de indução $t \in Acc_{\prec}^{<\alpha}$ o que pela definição de $\Gamma^{\prec}$ implica $s \in Acc_{\prec}^{\alpha}$. De (1) temos $field(\prec) \subseteq Acc_{\prec}$ e $|s|_{\Gamma^{\prec}} \leqslant otyp_{\prec}(s)$.

Novamente por indução em α mostramos

$$s \in Acc_{\prec}^{\alpha} \to otyp_{\prec}(s) \leqslant \alpha. \tag{2}$$

Seja $s \in Acc_{\prec}^{\alpha}$, pela definição de $\Gamma^{\prec}$ temos $\forall t \prec s\,(t \in Acc_{\prec}^{<\alpha})$ donde pela hipótese de indução temos $\forall t \prec s\,(otyp_{\prec}(t) < \alpha)$ e portanto

$$otyp_{\prec}(s) = \sup\{otyp_{\prec}(t) + 1 \mid t \prec s\} \leqslant \alpha.$$

De (2) temos $otyp_{\prec}(s) \leqslant |s|_{\Gamma^{\prec}}$ o que conclui a demonstração. □

Este lema mostra-nos que o princípio de indução em $Acc_{\prec}$ é equivalente à indução no ordinal $otyp(\prec)$. Em geral sempre que temos uma definição indutiva I_{Γ} podemos definir a operação $otyp_{\Gamma}$ tal que temos esta equivalência.

Um último exemplo de uma definição indutiva é o conjunto dos códigos das árvores recursivas bem fundadas. Este exemplo terá especial importância para o resultado final deste capítulo. Antes de definirmos este conjunto temos de apresentar algumas definições e resultados sobre árvores.

Notação. Dado $s \in Seq$ denotamos por $lh(s)$ o comprimento de s.

Definição 1.3.11 (Ordem parcial de *Seq*)**.** Dados $s, t \in Seq$ dizemos que s é segmento inicial de t (denotamos $s \leqslant t$) se $lh(s) \leqslant lh(t)$ e para todo $i < lh(s)$ temos $(s)_i = (t)_i$. Esta relação é claramente uma ordem parcial em *Seq*.

Definição 1.3.12 (Árvore)**.** O conjunto $T \subseteq Seq$ é uma árvore sse

$$\forall s \in Seq(s \in T \to \forall s' \leqslant s \;\; s' \in T).$$

A um subconjunto de T totalmente ordenado chamamos *ramo*.

Definição 1.3.13 (Árvore bem fundada)**.** Uma árvore T diz-se bem fundada sse

$$\forall f \exists n \ \bar{f}(n) \notin T,$$

isto é, sse T não tem nenhum ramo infinito.

Definição 1.3.14. Dizemos que um predicado $R(s)$ determina uma árvore sse o conjunto $\{s \in Seq \mid \neg R(s)\}$ é uma árvore.

Lema 1.3.15. *Seja $R(s)$ um predicado recursivo. Então*

$$\forall f \exists y\, R(\bar{f}(y)) \leftrightarrow \forall f \exists y \exists z \leqslant y\, R(\bar{f}(z)).$$

Demonstração. Suponhamos $\forall f \exists y \ R(\bar{f}(y))$ então tomando $z = y$ concluimos $\forall f \exists y \exists z \leqslant y \ R(\bar{f}(z))$. Reciprocamente suponhamos $\forall f \exists y \exists z \leqslant y \ R(\bar{f}(z))$, tomando $y = z$ concluimos $\forall f \exists y \ R(\bar{f}(y))$. □

Da transitividade da relação $\leqslant$ em Seq vem

$$\forall s(\neg \exists s' \leqslant s R(s') \to \forall s' \leqslant s \ (\neg \exists s'' \leqslant s' R(s'')))$$

e portanto o conjunto $\{s \in Seq \mid \neg \exists s' \leqslant s R(s')\}$ é uma árvore. Assim o lema anterior diz que sem perda de generalidade podemos apenas considerar fórmulas Π^1_1 cuja matriz da forma normal determina uma árvore.

Definição 1.3.16 (Árvore recursiva)**.** Uma árvore T é recursiva sse existe um predicado recursivo $R(s)$ tal que

$$T = \{s \in Seq \mid R(s)\}$$

Definição 1.3.17 (Códigos de árvores)**.** Dizemos que $e \in \omega$ é um código de uma árvore T sse $\{e\} \colon Seq \to \omega$ é uma função recursiva total tal que

$$\forall s(\{e\}(s) = 0 \leftrightarrow s \in T).$$

Pelo teorema s-m-n de Kleene, existe uma função $f \colon \omega \times Seq \to \omega$ recursiva primitiva tal que

$$\forall e \in \omega\, \forall s, t \in Seq\ \{f(e, s)\}(t) = \{e\}(s * t).$$

Denotamos $f(e, s)$ por $e \restriction s$. É fácil ver que $e \restriction s$ é um código da subárvore de e cuja raiz é o nó s.

Podemos agora definir o conjunto dos códigos das árvores recursivas bem fundadas.

Definição 1.3.18 (Árvores recursivas bem fundadas)**.** O conjunto W dos códigos das árvores recursivas bem fundadas é definido indutivamente pelo operador dado pela fórmula

$$\mathcal{W}(P, e) :\leftrightarrow \forall s \in Seq\,\{e\}(s) \neq 0 \vee \forall x \in \omega\, P(e \restriction \langle x \rangle).$$

Como P só ocorre positivamente este operador é monótono. A condição de fecho e o princípio de indução para W são, respetivamente,

$$\text{(W.1)} \qquad \forall e\, [\forall s \in Seq\,\{e\}(s) \neq 0 \vee \forall x \in \omega\, W(e \restriction \langle x \rangle) \to W(e)]$$

$$\text{(W.2)} \qquad \begin{array}{c} \forall X\, [\forall e\, (\forall s \in Seq\,\{e\}\,(s) \neq 0 \vee \forall x \in \omega\, X\,(e \restriction \langle x \rangle) \to X(e)) \to \\ \forall e\, (W\,(e) \to X\,(e))] \end{array}$$

Definição 1.3.19. Dada $R(s)$ uma fórmula recursiva primitiva $e_R \in \omega$ é um número de Gödel da função característica de $R(s)$ ou seja

$$\{e_R\}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } \neg R(s), \\ 1 & \text{se } R(s). \end{cases}$$

Lema 1.3.20. *Para toda a fórmula recursiva primitiva $R(s)$ que determina uma árvore temos*

$$R(s) \to W(e_R \restriction s).$$

Demonstração. Suponhamos $R(s)$. Como R determina uma árvore vem que $\forall t \in Seq\; R(s * t)$ donde $\forall t \in Seq\,\{e_R\}(s * t) = 1$, ou seja, $\forall t \in Seq\,\{e_R \restriction s\}(t) = 1$ o que pela condição de fecho de W (W.1) implica $W(e_R \restriction s)$. □

Teorema 1.3.21 (Kleene)**.** *Para toda a fórmula recursiva primitiva $R(s)$ que determina uma árvore temos*

$$\forall f \exists x\, R(\bar{f}(x)) \leftrightarrow W(e_R).$$

Demonstração. Vamos ver que para todo o $s \in Seq$ temos $\forall f \exists x\, R(s * \bar{f}(x)) \leftrightarrow W(e_R \restriction s)$ donde o resultado é o caso $s = \langle \rangle$.

Seja $s \in Seq$. Suponhamos que $\neg W(e_R \restriction s)$. Então pela definição de W temos $\exists x \in \omega\, \neg W(e_R \restriction (s * \langle x \rangle))$. Podemos assim definir recursivamente a função $f\colon \omega \to \omega$ por

$$f(n) := \text{ o menor } x \text{ tal que } \neg W(e_R \restriction (s * \bar{f}(n) * \langle x \rangle))$$

Assim $\forall n \in \omega \, \neg W(e_R \restriction (s * \bar{f}(n)))$ o que pelo Lema 1.3.20 implica $\forall n \in \omega \, \neg R(s * \bar{f}(n))$ e portanto $\neg \forall f \exists x \, R(s * \bar{f}(x))$.

Suponhamos agora que $W(e_R \restriction s)$. Pela definição de $\{e_R\}$ temos

$$\forall f \exists y R(s * \bar{f}(y)) \leftrightarrow \forall f \exists y \{e_R\}(s * \bar{f}(y)) \neq 0 \leftrightarrow \forall f \exists y \{e_R \restriction s\}(\bar{f}(y)) \neq 0$$

Pelo princípio de indução em W (W.2) para ver $\forall f \exists y \, \{e_R \restriction s\}(\bar{f}(y)) \neq 0$ é suficiente mostrar que

$$\forall e \left[\left(\forall t \in Seq \ (\{e\}\,(t) \neq 0) \vee \forall x \in \omega \forall f \exists y \{e \restriction \langle x \rangle\} \left(\bar{f}\,(y) \right) \neq 0 \right) \rightarrow \right.$$
$$\left. \forall f \exists y \{e\} \left(\bar{f}\,(y) \right) \neq 0 \right]$$

Seja $e \in \omega$. Se $\forall t \in Seq \, \{e\}(t) \neq 0$ então trivialmente $\forall f \exists y \, \{e\}(\bar{f}(y)) \neq 0$.

Suponhamos que

$$\forall x \in \omega \, \forall f \exists y \{e \restriction \langle x \rangle\}(\bar{f}(y)) \neq 0.$$

Seja $f \colon \omega \to \omega$ arbitrário e seja $g \colon \omega \to \omega$ definido por $g(n) = f(n+1)$. Então

$$\forall x \in \omega \, \exists y \{e \restriction \langle x \rangle\}(\bar{g}(y)) \neq 0$$

logo

$$\exists y \{e \restriction \langle f(0) \rangle\}(\bar{g}(y)) \neq 0$$

ou seja $\exists y \{e\}(\bar{f}(y+1)) \neq 0$ uma vez que $\bar{f}(y+1) = \langle f(0) \rangle * \bar{g}(y)$. Portanto temos $\forall f \exists y \, \{e\}(\bar{f}(y)) \neq 0$. □

O teorema de Kleene diz-nos que todo o conjunto Π^1_1 é redutível a W ou seja, W é Π^1_1-completo. Vimos que todo o conjunto definível indutivamente é Π^1_1. Como W é definido indutivamente, temos que todo o conjunto Π^1_1 é, a menos de uma redução, definido indutivamente. Note-se que a redução não pode ser evitada pois existe um conjunto Δ^1_1 que não é definido indutivamente por nenhum operador monótono aritmeticamente definido (cf. [Hinman, 1978, p. 130]).

Observação. A quantificação universal no teorema de Kleene pode ser limitada a um conjunto M que contenha as funções recursivas em W. A implicação

$$W(e_R) \rightarrow \forall f \in M \exists x R(\bar{f}(x))$$

é imediata uma vez que $\forall f \exists x R(\bar{f}(x)) \rightarrow \forall f \in M \exists x R(\bar{f}(x))$. A outra implicação resulta do contra-exemplo f construído na demonstração ser recursivo em W e, portanto, $\neg W(e_R \restriction s) \rightarrow \exists f \in M \forall x \, \neg R(\bar{f}(x))$.

Observação. Os resultados anteriores sobre árvores recursivas, em particular o teorema de Kleene, podem ser reformulados com parâmetros. Podemos reformular a definição 1.3.19 da seguinte forma: dada $R(s,z)$ recursiva primitiva, pelo teorema s-m-n de Kleene, existe uma função recursiva primitiva $e_R\colon \omega \to \omega$ tal que para todo s e z

$$\{e_R(z)\}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } \neg R(s,z), \\ 1 & \text{se } R(s,z). \end{cases}$$

Assim a reformulação do teorema de Kleene é: dada uma fórmula recursiva primitiva $R(s,z)$ tal que para todo z $\{s \in Seq | \neg R(s,z)\}$ é uma árvore tem-se

$$\forall z \left(\forall f \exists x\, R\left(\bar{f}\,(x)\,, z\right) \leftrightarrow W\left(e_R\,(z)\right)\right).$$

A demonstração do teorema é a mesma uma vez que os parâmetros não são utilizados em nenhum argumento.

1.3.1 Digressão

Nesta parte vamos fazer um pequeno aparte para mostrar que se $A(P,x)$ for uma fórmula Σ_1^0, isto é, equivalente a uma fórmula da forma $\exists x\, R(P,x)$ com $R(P,x)$ recursivo, então I_{Γ^A} é um conjunto Σ_1^0.

Definição 1.3.22 (Árvore binária completa)**.** A árvore binária completa é o conjunto de todas as sequências finitas de 0's e 1's.

Teorema 1.3.23 (Lema de König)**.** *Seja T uma subárvore da árvore binária completa. Então T é bem fundada sse T é finita.*

Demonstração. Um sentido é imediato, se T é finita então não tem nenhum ramo infinito logo é bem fundada. Vejamos o outro sentido por contra-recíproco. Suponhamos que T é infinita. Como em cada nó T ramifica no máximo duas vezes temos que $T \restriction \langle 0\rangle$ ou $T \restriction \langle 1\rangle$ é infinita, em geral, se $T \restriction s$ é infinita, $T \restriction (s * \langle 0\rangle)$ ou $T \restriction (s * \langle 1\rangle)$ é infinita. Podemos então definir recursivamente $f\colon \omega \to \omega$ por

$$f(n) := \text{o menor } x \text{ tal que } T \restriction (\bar{f}(n) * \langle x\rangle) \text{ é infinita.}$$

Então $T \restriction \bar{f}(n)$ é infinita para todo o $n \in \omega$. Como $s \notin T \to T \restriction s = \emptyset$ concluimos que $\forall n \in \omega\, \bar{f}(n) \in T$ e portanto T não é bem fundada. □

Definição 1.3.24 (Predicado Π_1^1 estrito)**.** Um predicado $S(x)$ diz-se Π_1^1 estrito ou s-Π_1^1 (de strict-Π_1^1) se existe um predicado recursivo R tal que

$$S(x) \leftrightarrow \forall X \exists y\, R(X,y,x).$$

Pelo que vimos sobre predicados Π_1^1, $S(x)$ pode ser posto na forma

$$\forall f \in 2^\omega\, \exists y\, R(\bar{f}(y), x)$$

com R recursivo que determina uma árvore.

O predicados s-Π^1_1 são um exemplo em que a diferença entre quantificadores funcionais e de predicados é importante, isto ficará patente na demonstração do teorema seguinte.

Teorema 1.3.25. *Um predicado $P(x)$ é s-Π^1_1 sse é Σ^0_1.*

Demonstração. Se $P(x)$ é Σ^0_1 então é s-Π^1_1 via uma quantificação inerte. Seja $P(x)$ um predicado s-Π^1_1, então existe R recursivo que determina uma árvore tal que

$$P(x) \leftrightarrow \forall f \in 2^\omega \, \exists y \, R(\bar{f}(y), x).$$

O conjunto $\{\bar{f}(y) \,|\, y \in \omega \wedge f \in 2^\omega\}$ é a árvore binária completa. Como R determina uma árvore, para cada x o conjunto

$$T_x = \{\bar{f}(y) \,|\, y \in \omega \wedge f \in 2^\omega \wedge \neg R(\bar{f}(y), x)\}$$

é uma subárvore da árvore binária completa e a equivalência anterior pode ser reformulada por

$$P(x) \leftrightarrow T_x \text{ é bem fundada.}$$

Pelo Lema de König vem

$$P(x) \leftrightarrow T_x \text{ é finita}$$

Uma vez que T_x tem apenas sequências de 0's e 1's, T_x é finita sse existe um limite para o comprimento das suas sequências. Temos então

$$\begin{aligned} P(x) &\leftrightarrow \exists n \forall s \in 2^n \; s \notin T_x \\ &\leftrightarrow \exists n \forall s \in 2^n R(s, x) \end{aligned}$$

em que $\forall s \in 2^n R(s, x)$ é recursivo porque 2^n é finito. Portanto $P(x)$ é Σ^0_1. □

Mostremos agora o resultado principal desta parte que é um refinamento do teorema de Spector para fórmulas Σ^0_1.

Teorema 1.3.26. *Se $A(P, x)$ é uma fórmula Σ^0_1 então I_{Γ^A} é um conjunto Σ^0_1.*

Demonstração. Seja $A(P, x)$ uma fórmula Σ^0_1. Existe $R(P, x, y)$ recursivo tal que

$$A(P, x) \leftrightarrow \exists y \, R(P, x, y)$$

Pela demonstração do teorema de Spector(Teorema 1.3.4) temos

$$\begin{aligned} x \in I_{\Gamma^A} &\leftrightarrow \models \forall X (\forall z \, (A(X, z) \to X(z)) \to X(x)) \\ &\leftrightarrow \models \forall X (\forall z \, (\exists y \, R(X, z, y) \to X(z)) \to X(x)) \\ &\leftrightarrow \models \forall X (\forall z \forall y \, (R(X, z, y) \to X(z)) \to X(x)) \\ &\leftrightarrow \models \forall X \exists z \exists y \, ((R(X, z, y) \to X(z)) \to X(x)). \end{aligned}$$

$\forall X \exists z \exists y ((R(X, z, y) \to X(z)) \to X(x))$ é um predicado s-Π^1_1 logo Σ^0_1 portanto I_{Γ^A} é um conjunto Σ^0_1. □

Capítulo 2

Teorias de definições indutivas

Neste capítulo vamos apresentar teorias que formalizam a noção de definição indutiva que demos no capítulo 1. Apresentaremos duas teorias de definições indutivas, a teoria ID_1 e uma sub-teoria desta, a teoria $\mathsf{ID}_1(W)$. Depois iremos comparar a força destas. Veremos que ID_1 pode ser interpretada em $\mathsf{ID}_1(W)$ mostrando assim que apesar de $\mathsf{ID}_1(W)$ parecer à partida mais fraca do que ID_1, as duas teorias têm a mesma força.

2.1 As teorias ID_1 e $\mathsf{ID}_1(W)$

As teorias ID_1 e $\mathsf{ID}_1(W)$ são extensões da teoria dos números de primeira ordem Z. Começemos por definir a linguagem de Z.

Definição 2.1.1 (Linguagem $\mathcal{L}$)**.** A linguagem $\mathcal{L}$ da teoria Z é uma linguagem de primeira ordem com identidade. As constantes não lógicas de $\mathcal{L}$ são 0 e um símbolo funcional para cada função recursiva primitiva. Podemos considerar que os símbolos para as funções recursivas primitivas são construídos a partir dos símbolos S para a função sucessor, C^n_k para as funções constantes e P^n_k para as projeções utilizando o operador de composição generalizada Sub e o operador de recursão Rec. Os termos de $\mathcal{L}$ são construídos da forma usual a partir das variáveis, das constantes e dos símbolos funcionais. Designamos por numerais os termos fechados da forma $0, S(0), S(S(0)), \ldots$ Estes termos representam os naturais dentro da teoria Z e para cada $n \in \omega$ designamos por $\underline{n}$ o numeral que representa n, $\underline{0} = 0, \underline{1} = S(0), \ldots$ As fórmulas atómicas são da forma $s = t$ com s e t termos e as restantes fórmulas são construídas a partir das atómicas pelo fecho para $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall$ e $\exists$.

Definição 2.1.2 (Teoria Z)**.** A teoria dos números Z é uma teoria na linguagem $\mathcal{L}$ constituída pelos seguintes axiomas:

(i) Os axiomas de identidade;

(ii) Os fechos universais das seguintes fórmulas:

(a) $\neg(0 = S(x))$,
(b) $S(x) = S(y) \to x = y$,
(c) $C^n_k(x_1, \ldots, x_n) = \underline{k}$,
(d) $P^n_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k$,
(e) $Sub(f, g_1, \ldots, g_m)(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$,
(f) $Rec(f, g)(0, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$,
(g) $Rec(f, g)(Sy, x_1, \ldots, x_n) = g(y, Rec(f, g)(y, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n)$;

(iii) O esquema de indução

$$\phi(0) \wedge \forall x\,[\phi(x) \to \phi(S(x))] \to \forall x\,\phi(x)$$

para toda a fórmula $\phi(x)$ de $\mathcal{L}$.

Observando os axiomas (ii) que definem os termos podemos concluir que para todo o termo fechado t de $\mathcal{L}$ existe um numeral $\underline{n}$ tal que $Z \vdash t = \underline{n}$.

A teoria Z é uma extensão por definições da aritmética de Peano de primeira ordem PA; isto é, Z é formulada numa linguagem mais rica do que PA mas se F é uma fórmula de Z então existe uma fórmula F' de PA tal que $\mathsf{Z} \vdash F \leftrightarrow F'$ e se G é uma fórmula de PA tal que $\mathsf{Z} \vdash G$ então $\mathsf{PA} \vdash G$. F' é tradução de F em PA substituindo os símbolos para as funções recursivas primitivas pelas suas definições em PA

Definição 2.1.3 (Linguagem $\mathcal{L}(P)$)**.** A linguagem $\mathcal{L}(P)$ é a linguagem $\mathcal{L}$ à qual se adiciona uma única variável de predicado P que serve para formar fórmulas atómicas do tipo $P(t)$ em que t é um termo.

Definimos agora as linguagens de ID_1 e $\mathsf{ID}_1(W)$ e de seguida apresentamos estas teorias.

Definição 2.1.4. (Linguagens $\mathcal{L}(\mathsf{ID})$ e $\mathcal{L}(\mathsf{ID}^W)$) A linguagem $\mathcal{L}(\mathsf{ID})$ contém a linguagem $\mathcal{L}$ e predicados adicionais I_ψ para cada fórmula aritmética positiva $\psi(P, x)$ de $\mathcal{L}(P)$. Assim, para além das fórmulas de $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}(\mathsf{ID})$ tem novas fórmulas atómicas da forma $I_\psi(x)$ e todas as fórmulas que se obtêm das anteriores pelo fecho para $\wedge, \vee, \to, \neg, \forall$ e $\exists$. Os I_ψ devem ser interpretados como I_{Γ^ψ}, o menor ponto fixo do operador monótono definido por $\psi(P, x)$. Note-se que $\mathcal{L}(\mathsf{ID})$ é ainda uma linguagem de primeira ordem.

$\mathcal{L}(\mathsf{ID}^W)$ é definida de forma análoga mas apenas adicionando a $\mathcal{L}$ o predicado W das árvores recursivas bem fundadas associado à fórmula $\mathcal{W}(P, x)$ (definição 1.3.18).

Definição 2.1.5 (Teoria ID_1)**.** A teoria ID_1 é uma teoria na linguagem $\mathcal{L}(\mathsf{ID})$ constituída pelos axiomas de Z com o axioma esquema de indução estendido a todas as fórmulas $\phi(x)$ de $\mathcal{L}(\mathsf{ID})$. Alem destes temos dois esquemas de axiomas que definem os predicados I_ψ:

$\mathbf{ID_1^1}$: $\forall x\,(\psi(I_\psi, x) \to I_\psi(x))$,

$\mathbf{ID_1^2}$: $\forall x\,(\psi(\theta, x) \to \theta(x)) \to \forall x\,(I_\psi(x) \to \theta(x))$

com $\psi(P, x)$ fórmula aritmética positiva de $\mathcal{L}(P)$ e $\theta(x)$ fórmula de $\mathcal{L}(\mathsf{ID})$. $\psi(I_\psi, x)$ é a fórmula que se obtém de $\psi(P, x)$ substituindo todas as ocorrências de $P(t)$ por $I_\psi(t)$ em que t é um termo de $\mathcal{L}(\mathsf{ID})$. Assim $\psi(I_\psi, x)$ é uma fórmula de $\mathcal{L}(\mathsf{ID})$. O mesmo ocorre com $\psi(\theta, x)$ e será sempre assim com todas as fórmulas de $\mathcal{L}(P)$ que utilizarmos. Estes axiomas traduzem a noção de que I_ψ é fechado para Γ^ψ (ID_1^1) e de que é o menor predicado nestas condições (ID_1^2).

Definição 2.1.6 (Teoria $\mathsf{ID}_1(W)$)**.** A teoria $\mathsf{ID}_1(W)$ é uma teoria na linguagem $\mathcal{L}(\mathsf{ID}^W)$ constituída pelos axiomas de Z com o axioma esquema de indução estendido a todas as fórmulas $\phi(x)$ de $\mathcal{L}(\mathsf{ID}^W)$ e pelos os axiomas que definem o predicado W:

$\mathbf{ID_1^1(W)}$: $\forall x\,(\mathcal{W}(W, x) \to W(x))$

e o esquema

$\mathbf{ID_1^2(W)}$: $\forall x\,(\mathcal{W}(\theta, x) \to \theta(x)) \to \forall x\,(W(x) \to \theta(x))$

com $\theta(x)$ fórmula de $\mathcal{L}(\mathsf{ID}^W)$.

2.2 Interpretar ID_1 em $\mathsf{ID}_1(W)$

Agora que temos as teorias definidas o nosso objetivo é compará-las. Para tal vamos ver que qualquer uma delas se pode interpretar na outra. Interpretar $\mathsf{ID}_1(W)$ em ID_1 é imediato como vemos de seguida.

Teorema 2.2.1. *$\mathsf{ID}_1(W)$ é uma subteoria de ID_1.*

Demonstração. O resultado sai de $\mathcal{W}(P, x)$ ser uma fórmula aritmética positiva de $\mathcal{L}(P)$. Assim, interpretando W como o predicado $I_\mathcal{W}$ de ID_1, vem que $\mathcal{L}(\mathsf{ID}^W) \subseteq \mathcal{L}(\mathsf{ID})$ e que todo axioma de $\mathsf{ID}_1(W)$ é um axioma de ID_1. Por exemplo $\mathrm{ID}_1^1(W)$ em ID_1 é a instância de ID_1^1, $\forall x\,(\mathcal{W}(I_\mathcal{W}, x) \to I_\mathcal{W}(x))$. Temos então que, para toda a sentença F de $\mathcal{L}(\mathsf{ID}^W)$, se $\mathsf{ID}_1(W) \vdash F$ então $\mathsf{ID}_1 \vdash F$.

Como o título desta secção sugere a parte difícil é interpretar ID_1 em $\mathsf{ID}_1(W)$. Para conseguimos isto necessitamos de alguns conceitos e resultados de teoria da recursão que enunciamos de seguida.

Definição 2.2.2 (Recursividade relativa)**.** Dados dois predicados A e B dizemos que A é recursivo (à Turing) em B sse existe $e \in \omega$ tal que $\chi_A = \{e\}^B$, isto é, sse a função caracteristica de A é recursiva em B e denotamos esta noção por $A \leqslant_T B$.

Tendo a noção relativizada de um predicado recursivo relativizamos as restantes definições habituais. Um predicado A diz-se recursivamente enumerável em B sse A é o domínio de uma função recursiva em B, A diz-se Σ_n em B, denotamos Σ_n^B, sse

$$A(x) \leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \dots \exists y_n R(x, y_1, \dots, y_n)$$

onde $\exists$ é o quantificador apropriado e R é recursivo em B. De forma análoga relativizamos toda a hierarquia aritmética. Também os resultados sobre funções parciais recursivas se relativizam a funções parciais recursivas em B com as mesmas demonstrações substituindo apenas cada noção pela sua versão relativizada. Não iremos aqui apresentar as demonstrações destes resultados nem do Teorema de Post Relativizado que iremos enunciar. Estes resultados podem ser encontrados na literatura de teoria da recursão, por exemplo, em Soare [1987].

Definição 2.2.3 (Salto de Turing)**.** Dado um predicado A definimos o seu salto de Turing por

$$A'(x) :\leftrightarrow \exists y \, \{x\}^A(x) = y.$$

Denotamos a n-ésima iteração do salto de Turing por $A^{(n)}$, isto é, $A^{(0)} = A$ e $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$ para $n \in \omega$.

O Salto de Turing é a versão relativizada do conjunto $K = \{e \mid \{e\}(e) \downarrow\}$ que é r.e. mas não recursivo e é Σ_1-completo. O Teorema de Post Relativizado dá-nos a generalização destes resultados para o salto de Turing.

Teorema 2.2.4 (Teorema de Post Relativizado)**.** *Dados X e Y predicados e $n \geqslant 0$ temos que:*

(i) *Se $n > 0$ então $(X \in \Sigma_n^Y \to X \leqslant_T Y^{(n)})$, isto é, $Y^{(n)}$ é Σ_n^Y-completo para $n > 0$;*

(ii) *$X \in \Sigma_{n+1}^Y$ sse X é r.e. em $Y^{(n)}$;*

(iii) *$X \in \Delta_{n+1}^Y$ sse $X \leqslant_T Y^{(n)}$.*

Passamos agora à interpretação de ID_1 em $\mathsf{ID}_1(W)$. Temos apenas de interpretar os predicados I_ψ em $\mathcal{L}(\mathsf{ID}^W)$ uma vez que as outras constantes, as variáveis e os símbolos funcionais de $\mathcal{L}(\mathsf{ID}^W)$ estão em $\mathcal{L}(\mathsf{ID})$ e os termos e as fórmulas são construídas da mesma forma. Tendo em vista isto vamos começar por definir alguns predicados em $\mathsf{ID}_1(W)$ e demonstrar alguns resultados preliminares.

Uma vez que W e as funções recursivas primitivas estão em $\mathsf{ID}_1(W)$, podemos também definir aqui as funções recursivas parciais em W. Podemos assim definir por recursão os saltos de Turing, $W^{(n)}$ em $\mathsf{ID}_1(W)$: $W^{(0)} = W$ e dado $n \in \omega$ se temos $W^{(n)}$ temos as funções recursivas parciais em $W^{(n)}$ e podemos definir

$$W^{(n+1)}(x) :\leftrightarrow \exists y\, \{x\}^{W^{(n)}}(x) = y.$$

Podemos também definir os predicados M_n das funções recursivas em $W^{(n)}$ como

$$M_n(x) :\leftrightarrow \forall y \exists z\, \{x\}^{W^{(n)}}(y) = z.$$

Utilizaremos a notação $x \in M_n$ para $M_n(x)$. Cometeremos também os seguintes abusos de linguagem: se f for uma função recursiva em $W^{(n)}$ e e tal que $f \equiv \{e\}^{W^{(n)}}$ escreveremos $f \in M_n$ significando $e \in M_n$; se X for um predicado recursivo em $W^{(n)}$ escreveremos também $X \in M_n$ em vez de $\chi_X \in M_n$.

Lema 2.2.5. *Sejam $m, n \in \omega$. Se $m \leqslant n$ então $W^{(m)} \leqslant_T W^{(n)}$.*

Demonstração. Um conjunto é sempre recursivo em si próprio porque computar a função característica é apenas consultar o oráculo. Portanto $W^{(m)} \leqslant_T W^{(m)}$ e pela alínea (iii) do teorema de Post relativizado temos que $W^{(m)} \in \Delta^W_{m+1}$. Então, como $m < n$ e a hierarquia aritmética é cumulativa, $W^{(m)} \in \Delta^W_{n+1}$ logo, novamente pelo teorema de Post relativizado, $W^{(m)} \leqslant_T W^{(n)}$. □

Corolário 2.2.6. *Se $m < n$ e f é uma função recursiva em $W^{(m)}$, então f é recursiva em $W^{(n)}$.*

Demonstração. Sejam n, m e f nas condições do enunciado. Então f é recursiva em $\chi_{W^{(m)}}$ que por sua vez é recursiva em $W^{(n)}$. Logo f é recursiva em $W^{(n)}$.

Uma vez que estamos a interpretar ID_1 em $\mathsf{ID}_1(W)$ temos que ter estes resultados da teoria da recursão dentro de $\mathsf{ID}_1(W)$ para os poder utilizar. Uma vez que temos Z em $\mathsf{ID}_1(W)$ e indução para todas as fórmulas de $\mathcal{L}(\mathsf{ID}^W)$ estes resultados da teoria de recursão, em especial o teorema de Post relativizado, podem ser formulados e demonstrados em $\mathsf{ID}_1(W)$. Não o iremos fazer aqui mas existem estudos de aritmetização de resultados da teoria de recursão, por exemplo, em Hájek and Pudlák [1998] e Simpson [1999].

Lema 2.2.7. *Sejam $n \in \omega$ e $\psi(g, z)$ uma fórmula aritmética Σ_{2n}. Então existe A recursivo tal que $\mathsf{ID}_1(W)$ demonstra*

$$\forall z \forall g \in M_k\, (\psi(g, z) \leftrightarrow \forall f \in M_{n^2-n+k} \exists x\, A(g, z, f, x))$$

para todo $k \in \omega$.

Demonstração. Sejam $k \in \omega$ e $g \in M_k$. Provamos por indução em n. O caso $n = 0$ é imediato, como ψ é recursivo basta tomar $A(g, z, f, x) :\leftrightarrow \psi(g, z)$ e quantificações inertes e temos

$$\psi(g, z) \leftrightarrow \forall f \in M_k \exists x\, A(g, z, f, x))$$

para todo $k \in \omega$ e todo $g \in M_k$. Seja $n \in \omega$ e suponhamos a hipótese para n. Seja $\psi(f, z) \in \Sigma_{2(n+1)}$ aritmética. Então

$$\begin{aligned}\psi(g, z) &\leftrightarrow \exists x_1 \forall y_1 \ldots \forall y_{n+1}\, R(g, z, x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_{n+1})\\ &\leftrightarrow \neg \forall x_1 \exists y_1 [\forall x_2 \ldots \exists y_{n+1} \neg R(g, z, x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_{n+1})]\end{aligned}$$

para todo $k \in \omega$ e todo $g \in M_k$. Portanto, se $g \in M_k$, como R é recursivo, $R(g, z, x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_{n+1})$ é recursivo em $W^{(k)}$ e portanto a fórmula entre parêntesis retos é $\Pi_{2n}^{W^{(k)}}$, logo é $\Delta_{2n+1}^{W^{(k)}}$ e portanto, pelo teorema de Post relativizado, é recursiva em $W^{(2n+k)}$. Logo a função

$$x_1 \rightsquigarrow \mu y_1 [\forall x_2 \ldots \exists y_{n+1} \neg R(g, z, x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_{n+1})]$$

é recursiva em $W^{(2n+k)}$ e temos

$$\begin{aligned}\psi(g, z) &\leftrightarrow \neg \exists f_1 \in M_{2n+k} \forall x_1 [\forall x_2 \ldots \exists y_{n+1} \neg R(g, z, x_1, \ldots, x_{n+1}, f_1(x_1), \ldots, y_{n+1})]\\ &\leftrightarrow \neg \exists f_1' \in M_{2n+k} [\forall x_2 \ldots \exists y_{n+1} \neg R'(g, z, x_2, \ldots, x_{n+1}, f_1'(x_2), \ldots, y_{n+1})]\\ &\leftrightarrow \forall f_1' \in M_{2n+k} [\exists x_2 \ldots \forall y_{n+1} R'(g, z, x_2, \ldots, x_{n+1}, f_1'(x_2), \ldots, y_{n+1})]\end{aligned}$$

em que f_1' e R' são definidas a partir de f_1 e R para lidar com a contração das variáveis x_1 e x_2 que ocorre na passagem da primeira para a segunda linha, ou seja, definimos $f_1'(x) := f_1((x)_1)$ e $R'(g, z, x_2, \ldots)$ é $R(g, z, (x_2)_1, (x_2)_2, \ldots)$. Como g e f_1 são recursivas em $W^{(2n+k)}$ a fórmula entre parêntesis retos é $\Sigma_{2n}^{W^{(2n+k)}}$ logo pela hipótese de indução temos

$$\begin{aligned}\psi(g, z) &\leftrightarrow \forall f_1' \in M_{2n+k} [\forall f_2 \in M_{n^2-n+(2n+k)} \exists x A'(g, z, f_1', f_2, x)]\\ &\leftrightarrow \forall f \in M_{(n+1)^2-(n+1)+k} \exists x A(g, z, f, x).\end{aligned}$$

Na última equivalência colapsamos os dois quantificadores uma vez que

$$\forall n \in \omega\, [n^2 - n + 2n = (n + 1)^2 - (n + 1) \geqslant 2n].$$

Note-se que $A(g, z, f, x)$ é apenas a matriz da skolemização e normalização de $\psi(g, z)$ e portanto não depende de k. A complexidade de g apenas se reflete na complexidade da função de Skolem f. □

Lema 2.2.8. *Dado $A(g, z, f, x)$ recursivo existe $R(s, z)$ recursivo tal que, para todo $i, j \in \omega$, $\mathsf{ID}_1(W)$ demonstra*

$$\forall z\, [\forall g \in M_i \forall f \in M_j \exists x\, A(g, z, f, x) \leftrightarrow W(e_R(z))]$$

Demonstração. Esta demonstração utiliza de forma essencial o teorema de Kleene (teorema 1.3.21) e as observações que se lhe seguem. Note-se que a demonstração do teorema de Kleene pode ser feita em $\mathsf{ID}_1(W)$ porque temos as funções recursivas em W e o princípio de indução em W que é o axioma $\mathrm{ID}_1^2(W)$. Seja $A(g,z,f,x)$ um predicado recursivo. Como sabemos existem $A'(h,z,x)$ e $R(s,z)$ recursivos tais que

$$\begin{aligned}\forall g,f \in M_k \exists x\, A(g,z,f,x) &\leftrightarrow \forall h \in M_k \exists x\, A'(h,z,x)\\ &\leftrightarrow \forall h \in M_k \exists x\, R(\bar{h}(x),z).\end{aligned}$$

para todo o $k \in \omega$. Uma vez que $M_0 \subseteq M_k$ sai, pelo teorema de Kleene com parâmetros, que existe uma função recursiva primitiva $e_R\colon \omega \to \omega$ tal que

$$\forall h \in M_k \exists x\, R(\bar{h}(x),z) \leftrightarrow W(e_R(z))$$

para todo o $k \in \omega$. Suponhamos sem perda de generalidade que $i \geqslant j$. Como $M_j \subseteq M_i$ temos então

$$\begin{aligned}W(e_R(z)) &\to \forall h \in M_i\, \exists x\, R(\bar{h}(x),z)\\ &\to \forall g,f \in M_i\, \exists x\, A(g,z,f,x)\\ &\to \forall g \in M_i\, \forall f \in M_j\, \exists x\, A(g,z,f,x)\\ &\to \forall g,f \in M_j\, \exists x\, A(g,z,f,x)\\ &\to \forall h \in M_j\, \exists x\, R(\bar{h}(x),z)\\ &\to W(e_R(z))\end{aligned}$$

□

São estes dois lemas que nos vão permitir interpretar os I_ϕ em $\mathsf{ID}_1(W)$. Sejam $n \in \omega$ e $\phi(P,x) \in \Sigma_{2n}$. Motivados pelo teorema de Spector (teorema 1.3.4) gostaríamos de interpretar $I_\phi(x)$ por

$$\forall X(\forall y(\phi(X,y) \to X(y)) \to X(x))$$

mas esta fórmula não faz sentido em $\mathsf{ID}_1(W)$ porque não temos quantificações de segunda ordem. No entanto se limitarmos o quantificador de segunda ordem a um M_k com $k \in \omega$, que é definível em $\mathsf{ID}_1(W)$, temos o seguinte:

$\phi(P,x) \in \Sigma_{2n}$ logo $\phi(P,x) \to P(x) \in \Pi_{2n}$ o que implica $\forall y(\phi(P,y) \to P(y)) \in \Pi_{2n}$ e portanto $\forall y(\phi(P,y) \to P(y)) \to P(x) \in \Sigma_{2n}$. Seja

$$S_\phi(P,x) \coloneqq \forall y(\phi(P,y) \to P(y)) \to P(x) \in \Sigma_{2n}.$$

Pelos lemas anteriores existem $A_\phi(X,z,f,x)$ e $R_\phi(s,z)$ recursivos tais que

$$\begin{aligned}\forall X \in M_k\, S_\phi(X,z) &\leftrightarrow \forall X \in M_k\, \forall f \in M_{n^2-n+k}\, \exists x\, A_\phi(X,z,f,x)\\ &\leftrightarrow W(e_{R_\phi}(z))\end{aligned} \tag{1}$$

para todo $k \in \omega$. Motivados por este resultado iremos interpretar $I_\phi(z)$ em $\mathsf{ID}_1(W)$ por $W(e_{R_\phi}(z))$.

Resta-nos então verificar que a interpretação satisfaz os axiomas ID_1^1 e ID_1^2 Consideremos uma das instâncias de ID_1^1

$$\forall x(\phi(I_\phi, x) \to I_\phi(x)).$$

Queremos ver que $\mathsf{ID}_1(W)$ demonstra

$$\forall x(\phi(W(e_{R_\phi}), x) \to W(e_{R_\phi}(x)).$$

Seja x e suponhamos $\phi(W(e_{R_\phi}), x)$. Queremos mostrar $W(e_{R_\phi}(x))$. Temos

$$W(e_{R_\phi}(x)) \leftrightarrow \forall X \in M_0(\forall y(\phi(X, y) \to X(y)) \to X(x)).$$

Seja $X \in M_0$ e suponhamos $\forall y(\phi(X, y) \to X(y))$. Então pela equivalência anterior temos $\forall x(W(e_{R_\phi}(x)) \to X(x))$ e como ϕ é positiva vem que

$$\forall x(\phi(W(e_{R_\phi}), x) \to \phi(X, x)).$$

Então da hipótese $\phi(W(e_{R_\phi}), x)$ concluímos $\phi(X, x)$ donde, pela hipótese, sai que $X(x)$ e portanto temos $W(e_{R_\phi}(x))$.

Vejamos agora o caso de ID_1^2. Consideremos uma instância de ID_1^2

$$\forall x\,(\phi(\theta, x) \to \theta(x)) \to \forall x\,(I_\phi(x) \to \theta(x)).$$

Seja θ^* a interpretação de θ em $\mathsf{ID}_1(W)$. θ é aritmético nos predicados de tipo I_ϕ que nele ocorrem. Como estes são em número finito existe $k \in \omega$ que é o máximo das complexidades aritméticas de θ em cada um dos I_ϕ, i.e. θ é $\Sigma_k^{I_\phi}$ para todos os I_ϕ que nele ocorrem. Como a interpretação de qualquer I_ϕ, $W(e_{R_\phi})$, é recursiva em W vem que θ^* é Σ_k^W e portanto, pelo teorema de Post relativizado, θ^* é recursivo em $W^{(k)}$, ou seja, $\theta^* \in M_k$. Queremos ver

$$\forall x\,(\phi(\theta^*, x) \to \theta^*(x)) \to \forall x\,(W(e_{R_\phi}(x)) \to \theta^*(x)).$$

Suponhamos que $\forall x\,(\phi(\theta^*, x) \to \theta^*(x))$ e seja y tal que se tem $W(e_{R_\phi}(y))$. Queremos ver que se tem $\theta^*(y)$. Por (1)

$$W(e_{R_\phi}(y)) \leftrightarrow \forall X \in M_k(\forall x(\phi(X, x) \to X(x)) \to X(y)).$$

Como $\theta^* \in M_k$ e $\forall x\,(\phi(\theta^*, x) \to \theta^*(x))$ concluímos $\theta^*(y)$.

Vimos assim que ID_1 é interpretável em $\mathsf{ID}_1(W)$.

Capítulo 3

Teoria de Kripke-Platek com Infinito

3.1 Axiomas e resultados básicos de $\mathsf{KP}\omega$

A teoria de Kripke-Platek com Infinito ($\mathsf{KP}\omega$) é formulada na linguagem da teoria de conjuntos $L(\in)$, uma linguagem de primeira ordem com identidade e um símbolo relacional $\in$.

Antes de apresentarmos a teoria $\mathsf{KP}\omega$ temos de definir o que são fórmulas Δ_0 e dar alguns exemplos de noções definidas por fórmulas Δ_0.

Definição 3.1.1 (Fórmulas Δ_0)**.** A classe das fórmulas Δ_0 é a menor classe de fórmulas de $L(\in)$ que contém todas as fórmulas atómicas $u = v$ e $u \in v$ e é fechada para $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e para os quantificadores limitados $\exists u \in v$ e $\forall u \in v$.

Tabela 3.1: Algumas noções Δ_0

Noção	Abreviatura	Fórmula Δ_0
$a \subseteq b$		$\forall x \in a\,(x \in b)$
$a = \{u, v\}$		$\forall x \in a\,(x = u \vee x = v) \wedge u \in a \wedge v \in a$
$a = (u, v)$		$\exists x \in a\,\exists y \in a\,(x = \{u\} \wedge y = \{u, v\} \wedge a = \{x, y\})$
$a = (u, v)$ para algum v	$u = P_1(a)$	$\exists x \in a\,\exists v \in x\;[a = (u, v)]$
$a = (u, v)$ para algum u	$v = P_2(a)$	$\exists x \in a\,\exists u \in x\;[a = (u, v)]$
a é um par ordenado	$Par(a)$	$\exists x \in a\,\exists u \in x\,\exists v \in x\;[a = (u, v)]$
a é uma relação	$Rel(a)$	$\forall x \in a\;[Par(x)]$
a é uma função	$Fun(a)$	$Rel(a) \wedge \forall x \in a\,\forall y \in a\,[P_1(x) = P_1(y) \rightarrow P_2(x) = P_2(y)]$
domínio de uma relação	$a = dom(f)$	$Rel(f) \wedge \forall x \in f\;[P_1(x) \in a] \wedge \forall x \in a\,\exists y \in f\;[P_1(y) = x]$
imagem de uma relação	$a = im(f)$	$Rel(f) \wedge \forall x \in f\;[P_2(x) \in a] \wedge \forall x \in a\,\exists y \in f\;[P_2(y) = x]$
$a = \bigcup b$		$\forall x \in a\,\exists y \in b(x \in y) \wedge \forall y \in b\,\forall x \in y(y \in a)$
$a \neq \emptyset$		$\exists x \in a\,(x \in a)$
a é transitivo	$Tran(a)$	$\forall x \in a\,\forall y \in x\,(y \in a)$
a é um ordinal	$a \in Ord$	$Tran(a) \wedge \forall x \in a\;[Tran(x)]$
a é ordinal limite	$a \in Lim$	$a \in Ord \wedge a \neq \emptyset \wedge \forall x \in a\,\exists y \in a(x \in y)$

Definição 3.1.2 (Teoria Kripke-Platek com Infinito)**.** A teoria $\mathsf{KP}\omega$ é formada pelos seguinte axiomas:

Extensionalidade: $\forall u \forall v\, [\forall x \in u\, (x \in v) \wedge \forall y \in v\, (y \in u) \rightarrow u = v]$;

Δ_0-Separação: $\forall u \forall \vec{v}\, \exists w \forall x\ [x \in w \leftrightarrow x \in u \wedge F(x, \vec{v})]$
em que $F(x, \vec{v})$ é uma fórmula Δ_0 em que w não ocorre livre;

Par: $\forall u \forall v \exists w\, (u \in w \wedge v \in w)$;

União: $\forall u \exists w \forall x \in u\, (x \subseteq w)$;

Fundação: $\forall \vec{v}\big[\exists x\, F(x, \vec{v}) \rightarrow \exists x\ [F(x, \vec{v}) \wedge \forall y \in x\, (\neg F(y, \vec{v}))]\big]$
em que $F(x, \vec{v})$ é uma fórmula em que y não ocorre livre;

Δ_0-Coleção: $\forall \vec{v}\, \forall u\, [\forall x \in u\, \exists y F(x, y, \vec{v}) \rightarrow \exists z \forall x \in u\, \exists y \in z F(x, y, \vec{v})]$
em que $F(x, y, \vec{v})$ é uma fórmula Δ_0 onde z não ocorre livre;

Infinito: $\exists x (x \in Lim)$.

Teorema 3.1.3. *Todo o modelo de* $\mathsf{KP}\omega$ *é fechado para pares, pares ordenados, uniões, intersecções e produtos cartesianos.*

Demonstração. Sejam $\mathbb{A}$ um modelo de $\mathsf{KP}\omega$ e $u, v \in \mathbb{A}$. Pelo axioma do Par existe $w \in \mathbb{A}$ tal que $u, v \in w$. Logo por Δ_0-Separação vem

$$\{u, v\} = \{x \in w \,|\, x = u \vee x = v\} \in \mathbb{A}.$$

Aplicando o par sucessivamente temos

$$(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\} \in \mathbb{A}.$$

Pelo axioma da União existe $z \in \mathbb{A}$ tal que $\forall x \in u (x \subseteq z)$. Por Δ_0-Separação temos

$$\bigcup u = \{x \in z \,|\, \exists y \in u (x \in y)\} \in \mathbb{A}.$$

Se $u \neq \emptyset$ vem por Δ_0-Separação

$$\bigcap u = \{x \in \bigcup u \,|\, \forall y \in u (x \in y)\} \in \mathbb{A}.$$

Uma vez que a noção de par ordenado é Δ_0 basta existir $c \in \mathbb{A}$ tal que $u \times v \subseteq c$ para termos $u \times v = \{w \in c \,|\, w = (x, y) \wedge x \in u \wedge y \in v\} \in \mathbb{A}$ por Δ_0-Separação. Como $\mathbb{A}$ é fechado para pares ordenados temos

$$\forall x \in u\, \forall y \in v\, \exists z\, (z = (x, y))$$

logo por Δ_0-Coleção vem

$$\forall x \in u\, \exists w\, \forall y \in v\, \exists z \in w\, (z = (x, y))$$

e novamente por Δ_0-Coleção

$$\exists a \, \forall x \in u \, \exists w \in a \, \forall y \in v \, \exists z \in w \, (z = (x, y))$$

fazendo $c = \bigcup a \in \mathbb{A}$ temos $\forall x \in u \, \forall y \in v((x, y) \in c)$ □

Vamos agora ver alguns resultados importantes que nos permitem aplicar os princípios de Separação, Coleção e Substituição a uma classe mais alargada de fórmulas.

Definição 3.1.4 (Fórmulas Σ e Π)**.** A classe das fórmulas Σ é a menor classe que contém as fórmulas Δ_0 e é fechada para $\wedge$, $\vee$, quantificadores limitados e quantificadores existenciais ilimitados.

A classe das fórmulas Π é a menor classe que contém as fórmulas Δ_0 e é fechada para $\wedge$, $\vee$, quantificadores limitados e quantificadores universais ilimitados.

Definição 3.1.5 (Fórmulas Δ em KPω)**.** Dizemos que uma fórmula $F(\vec{v})$ é Δ em KPω se existe uma fórmula Σ, $F_\Sigma(\vec{v})$, e uma fórmula Π, $F_\Pi(\vec{v})$, tais que

$$\mathsf{KP}\omega \vdash \forall \vec{v} \, (F(\vec{v}) \leftrightarrow F_\Sigma(\vec{v}))$$

e

$$\mathsf{KP}\omega \vdash \forall \vec{v} \, (F(\vec{v}) \leftrightarrow F_\Pi(\vec{v})).$$

Definição 3.1.6. Dadas um fórmula F e uma variável a que não ocorra em F escrevemos F^a para a fórmula que resulta de F substituindo todos os quantificadores ilimitados por quantificadores limitados a a do mesmo tipo. F^a é uma fórmula Δ_0. Se F é Δ_0 então $F^a = F$.

Lema 3.1.7. *Dadas F uma fórmula Σ e G uma fórmula Π os seguintes são logicamente válidos:*

(i) $F^a \wedge a \subseteq b \to F^b$,

(ii) $F^a \to F$,

(iii) $G^b \wedge a \subseteq b \to G^a$,

(iv) $G \to G^a$.

Demonstração. A demonstração é por indução na complexidade das fórmulas Σ e Π. Vamos fazer a demonstração da alínea i) sendo que ii) é análoga e as alíneas iii) e iv) são as duais das duas primeiras.

Sejam a, b tais que $a \subseteq b$. Se F é Δ_0 temos $F = F^a = F^b$ e o resultado é trivial. Suponhamos que $F = (F_0 \wedge F_1)$ e que temos F^a. Logo temos F_0^a e F_1^a e por hipótese de indução F_0^b e F_1^b portanto F^b. Os casos da disjunção e dos quantificadores limitados são análogos.

Suponhamos que temos $F^a = (\exists x \, F_0(x))^a = \exists x \in a(F_0(x)^a)$. Por hipótese de indução vem $\exists x \in a(F_0(x)^b)$ e como $a \subseteq b$ temos $\exists x \in b(F_0(x)^b)$, ou seja, F^b □

Teorema 3.1.8 (Σ-Reflexão)**.** *Seja $F(\vec{v})$ uma fórmula Σ com apenas as variáveis $\vec{v}$ livres. Então*

$$\mathsf{KP}\omega \vdash \forall \vec{v}\ [F(\vec{v}) \leftrightarrow \exists a\, F(\vec{v})^a]\,.$$

Demonstração. Pelo lema anterior temos $\exists a\, F(\vec{v})^a \to F(\vec{v})$. Mostramos o outro sentido por indução na complexidade das fórmulas Σ argumentando num modelo arbitrário $\mathbb{A}$ de $\mathsf{KP}\omega$.

Seja $\vec{v} \in \mathbb{A}$ tal que $\mathbb{A} \vDash F(\vec{v})$. Se $F(\vec{v})$ é uma fórmula Δ_0 temos $F(\vec{v}) = F(\vec{v})^a$ e não há nada a mostrar. Seja $F(\vec{v}) = F_0(\vec{v}) \wedge F_1(\vec{v})$. Por hipótese de indução existem a_0 e a_1 em $\mathbb{A}$ tais que $F_0(\vec{v})^{a_0}$ e $F_1(\vec{v})^{a_1}$. Tomando $a = a_0 \cup a_1$ temos, pelo lema anterior, $F_0(\vec{v})^a$ e $F_1(\vec{v})^a$ e portanto $F(\vec{v})^a$. O caso $F(\vec{v}) = F_0(\vec{v}) \wedge F_1(\vec{v})$ é análogo.

Suponhamos que $F(\vec{v}) = \forall x \in w\, F_0(x, \vec{v})$. Por hipótese de indução temos $\forall x \in w\, \exists a_0\, F_0(x, \vec{v})^{a_0}$. Por Δ_0-Coleção temos $\exists z\, \forall x \in w\, \exists a_0 \in z\, F_0(x, \vec{v})^{a_0}$. Então tomando $a = \bigcup z$ temos $\forall a_0 \in z (a_0 \subseteq a)$ e pelo lema vem $\exists a\, \forall x \in w\, F_0(x, \vec{v})^a$.

Seja $F(\vec{v}) = \exists x\, F_0(x, \vec{v})$. Seja $x \in \mathbb{A}$ tal que $F_0(x, \vec{v})$. Por hipótese de indução temos $\exists a_0\, F_0(x, \vec{v})^{a_0}$. Seja $a = a_0 \cup \{x\}$. Temos $x \in a$ e como $a_0 \subseteq a$ pelo lema temos $F_0(x, \vec{v})^a$ logo $\exists x \in a\, F_0(x, \vec{v})^a$, ou seja, $F(\vec{v})^a$. □

Teorema 3.1.9 (Σ-Coleção)**.** *Para todo $F(x, y, \vec{v})$ fórmula Σ tem-se*

$$\begin{gathered}\mathsf{KP}\omega \vdash \forall \vec{v}\, \big[\forall x \in u\, \exists y\, F(x, y, \vec{v}) \to \\ \exists z\, [\forall x \in u\, \exists y \in z\, F(x, y, \vec{v}) \wedge \forall y \in z\, \exists x \in u\, F(x, y, \vec{v})]\big].\end{gathered}$$

Demonstração. Argumentamos em $\mathsf{KP}\omega$. Seja $\vec{v}$ tal que $\forall x \in u\, \exists y\, F(x, y, \vec{v})$. Por Σ-Reflexão vem $\exists a\, \forall x \in u\, \exists y \in a\, F(x, y, \vec{v})^a$. Por Δ_0-Separação seja

$$z = \{y \in a \mid \exists x \in u\, F(x, y, \vec{v})^a\}.$$

Pelo Lema 3.1.7 temos $F(x, y, \vec{v})^a \to F(x, y, \vec{v})$ logo $\forall x \in u\, \exists y \in z\, F(x, y, \vec{v})$ e $\forall y \in z\, \exists x \in u\, F(x, y, \vec{v})$. □

Teorema 3.1.10 (Δ-Separação)**.** *Sejam $F(x)$ uma fórmula Σ e $G(x)$ uma fórmula Π, então*

$$\mathsf{KP}\omega \vdash \forall x \in u\, (F(x) \leftrightarrow G(x)) \to \exists z\, (z = \{x \in u \mid F(x)\}).$$

Demonstração. Suponhamos que $\forall x \in u\, (F(x) \leftrightarrow G(x))$. Então

$$\forall x \in u\, (F(x) \vee \neg G(x))$$

é equivalente a uma fórmula Σ e portanto existe a tal que

$$\forall x \in u\, (F(x)^a \vee \neg G(x)^a).$$

Por Δ_0-Separação seja $z = \{x \in u \mid F(x)^a\}$. Como $F(x)$ é Σ temos $F(x)^a \to F(x)$ logo $\forall x \in z\, F(x)$. Seja $x \in u$ tal que $F(x)$. Então $G(x)$ e como $G(x)$ é Π temos $G(x)^a$; logo $F(x)^a$ e portanto $x \in z$. Logo $z = \{x \in u \mid F(x)\}$. □

Teorema 3.1.11 (Σ-Substituição)**.** *Seja $F(x, y)$ uma fórmula Σ, então*

$$\mathsf{KP}\omega \vdash \forall x \in u \, \exists! y \, F(x, y) \rightarrow \exists f \, [Fun(f) \wedge dom(f) = u \wedge \\ \forall x \in u \, F(x, f(x))].$$

Demonstração. Suponhamos que $\forall x \in u \, \exists! y \, F(x, y)$. Por Σ-Coleção existe v tal que $\forall x \in u \, \exists y \in v \, F(x, y)$. Então por Δ-Separação existe

$$\begin{aligned} f &= \{(x, y) \in u \times v \mid F(x, y)\} \\ &= \{(x, y) \in u \times v \mid \forall z \; [F(x, z) \rightarrow z = y]\} \end{aligned}$$

e f satisfaz o consequente. □

O seguinte teorema permite-nos ultrapassar a restrição imposta pela condição de unicidade da Σ-Substituição.

Teorema 3.1.12 (Σ-Substituição Forte)**.** *Seja $F(x, y)$ uma fórmula Σ, então*

$$\mathsf{KP}\omega \vdash \forall x \in u \, \exists y \, F(x, y) \rightarrow \exists f \big[Fun(f) \wedge dom(f) = u \wedge \\ \forall x \in u \, (f(x) \neq \emptyset) \wedge \forall x \in u \, \forall y \in f(x) \; [F(x, y)]\big].$$

Demonstração. Suponhamos que $\forall x \in u \, \exists y \, F(x, y)$. Por Σ-Coleção existe v tal que $\forall x \in u \, \exists y \in v \, F(x, y) \wedge \forall y \in v \, \exists x \in u \, F(x, y)$ e por Σ-Reflexão existe a tal que

$$\forall x \in u \, \exists y \in v \, F(x, y)^a \wedge \forall y \in v \, \exists x \in u \, F(x, y)^a.$$

Assim, por Δ_0-Separação e Extensionalidade, para qualquer $x \in u$ existe um único b_x tal que

$$b_x = \{y \in v \mid F(x, y)^a\}.$$

Logo por Σ-Substituição existe uma função f com domínio u tal que

$$\forall x \in u \; [f(x) = b_x]$$

e claramente este f satisfaz o consequente. □

3.2 Definições em $\mathsf{KP}\omega$

O seguinte lema permite-nos definir novos símbolos relacionais e funcionais em $\mathsf{KP}\omega$. Omitimos a demonstração que pode ser encontrada em Barwise [1975].

Lema 3.2.1. *Sejam $\phi(\vec{v})$ uma fórmula Δ em $\mathsf{KP}\omega$ e $\psi(\vec{v}, y)$ uma fórmula Σ tal que $\mathsf{KP}\omega$ demonstra $\forall \vec{v} \, \exists! y \, \psi(\vec{v}, y)$. Seja $L(\in)^*$ a extensão de $L(\in)$ com o novo símbolo relacional R_ϕ e o novo símbolo funcional F_ψ e seja $\mathsf{KP}\omega^*$ a teoria na linguagem $L(\in)^*$ constituída por $\mathsf{KP}\omega$ e os axiomas*

$$\forall \vec{v}\ [\mathsf{R}_\phi(\vec{v}) \leftrightarrow \phi(\vec{v})],$$
$$\forall \vec{v}\ \psi(\vec{v}, \mathsf{F}_\psi(\vec{v})).$$

Dizemos que R_ϕ *é um símbolo relacional* Δ *e* F_ψ *é um símbolo funcional* Σ.

(i) $\mathsf{KP}\omega^*$ *é uma extensão conservativa de* $\mathsf{KP}\omega$, *isto é, para toda a sentença* θ *de* $L(\in)$ *temos*

$$\mathsf{KP}\omega^* \vdash \theta \quad \textit{sse} \quad \mathsf{KP}\omega \vdash \theta.$$

(ii) *Para toda a fórmula* σ *de* $L(\in)^*$ *existe uma fórmula* σ_0 *de* $L(\in)$ *tal que*

$$\mathsf{KP}\omega^* \vdash \sigma \leftrightarrow \sigma_0$$

alem disso se σ *é uma fórmula* Σ *(resp.* Π, Δ*) então* σ_0 *também é* Σ *(resp.* Π, Δ*). Note-se que se* σ *é* Δ_0 *apenas temos que* σ_0 *é* Δ.

Daqui em diante sempre que introduzirmos um novo símbolo relacional Δ ou um símbolo funcional Σ cometermos o abuso de linguagem de manter a designação $\mathsf{KP}\omega$ para a nova teoria $\mathsf{KP}\omega^*$. O lema anterior garante-nos que não surgirão problemas.

De seguida mostramos resultados que nos vão permitir definir funções por recursão em $\mathsf{KP}\omega$.

Teorema 3.2.2 ($\in$-Indução)**.** *Dada uma fórmula* $F(x, \vec{v})$ *qualquer* $\mathsf{KP}\omega$ *demonstra*

$$\forall \vec{v}\, [\forall x\, (\forall y \in x\, F(y, \vec{v}) \to F(x, \vec{v})) \to \forall x\, F(x, \vec{v})]$$

Demonstração. Este esquema é o contra-recíproco do axioma da Fundação. □

Definição 3.2.3 (ω)**.** Defina-se

$$\alpha = \omega :\equiv \alpha \in \mathit{Lim} \wedge \forall \beta \in \alpha\, (\beta \notin \mathit{Lim}).$$

Uma vez que os ordinais são totalmente ordenados por $\in$ e temos os axiomas do Infinito e Fundação demonstra-se em $\mathsf{KP}\omega$ que $\exists! \alpha\, (\alpha = \omega)$. Alem disso o esquema de $\in$-Indução restrito a ω é simplesmente a indução nos naturais.

Teorema 3.2.4 (Existência de Fecho Transitivo)**.** *Podemos definir um símbolo funcional* Σ TC *em* $\mathsf{KP}\omega$ *tal que para todo* x, $TC(x)$ *é um conjunto transitivo tal que* $x \subseteq TC(x)$ *e para todo conjunto transitivo* u *se* $x \subseteq u$ *então* $TC(x) \subseteq u$.

Demonstração. Seja x um conjunto e defina-se

$$\begin{aligned} P(f, n, x) :\equiv\ & Fun(f) \wedge n \in \omega \wedge dom(f) = n + 1 \wedge \\ & f(0) = x \wedge \forall m \in n \left[f(m+1) = \bigcup f(m) \right]. \end{aligned}$$

Por indução em n tem-se

(i) $P(f,n,x) \wedge P(g,n,x) \to f = g$

(ii) $\forall n \in \omega\, \exists f\, P(f,n,x)$

Em qualquer um dos casos o passo de indução é obtido estendendo a função f de domínio $n+1$ a $f \cup \{(n+1, \bigcup f(n))\}$. De (i) e (ii) sai que

$$\forall n \in \omega\, \exists! f\, P(f,n,x)$$

e por Σ-Subtituição tem-se uma função F de domínio ω tal que:

$$\forall n \in \omega\, P(F(n),n,x), \quad \text{e}$$
$$m < n \to F(m) = F(n) \restriction (m+1).$$

Defina-se $TC(x) := \bigcup_{n\in\omega} F(n)(n)$. Temos $x = F(0)(0) \subseteq TC(x)$. Seja $y \in z \in TC(x)$. Então existe $n \in \omega$ tal que $z \in F(n)(n)$ e temos $y \in \bigcup F(n)(n) = F(n+1)(n+1)$ logo $y \in TC(x)$. Portanto $TC(x)$ é transitivo. Seja u tal que $x \subseteq u$ e $Tran(u)$. Mostramos por indução que $\forall n \in \omega\, F(n)(n) \subseteq u$. Temos $F(0)(0) = x \subseteq u$. Suponhamos por hipótese de indução que $F(n)(n) \subseteq u$. Pela transitividade de u vem

$$F(n+1)(n+1) = \bigcup F(n)(n) \subseteq \bigcup u \subseteq u$$

logo $TC(x) \subseteq u$. □

Teorema 3.2.5 (Indução sobre o Fecho Transitivo)**.** *Dada uma fórmula* $F(x,\vec{v})$ *qualquer* KPω *demonstra*

$$\forall \vec{v}\, \big[\forall x \big(\forall y \in TC(x)\, F(y,\vec{v}) \to F(x,\vec{v})\big) \to \forall x\, F(x,\vec{v})\big].$$

Demonstração. Suponhamos que

$$(1) \qquad \forall x \big(\forall y \in TC(x)\, F(y,\vec{v}) \to F(x,\vec{v})\big).$$

Vamos ver que

$$(2) \qquad \forall x\, [\forall z \in x\, \forall y \in TC(z)\, F(y,\vec{v}) \to \forall y \in TC(x)\, F(y,\vec{v})]$$

Se $\forall z \in x\, \forall y \in TC(z)\, F(y,\vec{v})$ então por (1) temos $\forall z \in x\, F(z,\vec{v})$, logo temos $F(y,\vec{v})$ para todo y em $x \cup \bigcup\{TC(z) \mid z \in x\} = TC(x)$ e portanto temos (2). Por $\in$-Indução sai de (2) que

$$\forall x\, \forall y \in TC(x)\, F(y,\vec{v}).$$

Como para todo x se tem $x \in TC(\{x\})$ concluímos que $\forall x\, F(x,\vec{v})$. □

Teorema 3.2.6 (Σ-Recursão)**.** *Dado G um símbolo funcional Σ $(n+2)$-ário* $\mathsf{KP}\omega$ *mostra que existe um símbolo funcional Σ $(n+1)$-ário F tal que*

$$F(\vec{v}, x) = G(\vec{v}, x, F \upharpoonright TC(x))$$

com $F \upharpoonright TC(x) = \{(z, F(\vec{v}, z)) \,|\, z \in TC(x)\}$.

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} P(f, y, \vec{v}, z) :\equiv\, & Fun(f) \wedge dom(f) = TC(y) \wedge \\ & \forall u \in dom(f)\ [f(u) = G(\vec{v}, u, F \upharpoonright TC(u))] \wedge z = G(\vec{v}, y, f). \end{aligned}$$

Mostramos por indução em $TC(y)$ que

(1) $$P(f, y, \vec{v}, z) \wedge P(f', y, \vec{v}, z') \to f = f' \wedge z = z'.$$

Suponhamos $P(f, y, \vec{v}, z) \wedge P(f', y, \vec{v}, z')$ e a hipótese de indução

$$\forall u \in TC(y)\, \forall f\, \forall f'\, \forall z\, \forall z'\, [P(f, u, \vec{v}, z) \wedge P(f', u, \vec{v}, z') \to f = f' \wedge z = z'].$$

Como $u \in TC(y)$ e $P(f, y, \vec{v}, z) \wedge P(f', y, \vec{v}, z')$ pela definição de P vem que $P(f \upharpoonright TC(u), u, \vec{v}, f(u)) \wedge P(f' \upharpoonright TC(u), u, \vec{v}, f'(u))$ logo pela hipótese de indução temos

$$\forall u \in TC(y)\ [f \upharpoonright TC(u) = f' \upharpoonright TC(u) \wedge f(u) = f'(u)]$$

e portanto $f = f'$ e $z = G(\vec{v}, y, f) = G(\vec{v}, y, f') = z'$ o que demonstra (1). Novamente por indução em $TC(y)$ mostramos

(2) $$\forall y\, \exists f\, \exists z\, P(f, y, \vec{v}, z).$$

Suponhamos a hipótese de indução

$$\forall u \in TC(y)\, \exists f_u\, \exists z_u\, P(f_u, u, \vec{v}, z_u).$$

Por (1) temos

(3) $$\forall u \in TC(y)\, \exists! f_u\, \exists! z_u\, P(f_u, u, \vec{v}, z_u).$$

logo por Σ-Substituição existe $f := \{(u, z_u) \,|\, u \in TC(y)\}$. Sejam $u \in TC(y)$ e $w \in TC(u) \subseteq TC(y)$. Suponhamos por hipótese de indução que

$$\forall x \in TC(w)\, f_w \upharpoonright TC(x) = f_u \upharpoonright TC(x).$$

Então para todo $x \in TC(w)$ temos

$$f_w(x) = G(\vec{v}, x, f_w \upharpoonright TC(x)) = G(\vec{v}, x, f_u \upharpoonright TC(x)) = f_u(x)$$

logo $f_w = f_u \upharpoonright TC(w)$. Assim por indução em $TC(w)$ temos

$$\forall w \in TC(u)\, f_w = f_u \upharpoonright TC(w).$$

Como $P(f_w, w, \vec{v}, z_w)$ por (3) temos $P(f_u \restriction TC(w), w, \vec{v}, z_w)$ logo $f_u(w) = z_w = f(w)$ e portanto $f \restriction TC(u) = f_u$. Por (3) vem $P(f \restriction TC(u), u, \vec{v}, z_u)$ o que implica que $f(u) = z_u = G(\vec{v}, x, f \restriction TC(u))$. Assim para todo $u \in TC(y)$ temos $f(u) = z_u = G(\vec{v}, x, f \restriction TC(u))$ e portanto temos $P(f, y, \vec{v}, G(\vec{v}, y, f))$ logo temos (2).

De (1) e (2) temos

$$\forall y\, \exists! z\, \exists f\, P(f, y, \vec{v}, z)$$

e podemos introduzir o símbolo funcional Σ F definido por

$$F(\vec{v}, y) = z :\leftrightarrow \exists f\, P(f, y, \vec{v}, z).$$

donde

$$F(\vec{v}, y) = G(\vec{v}, y, f) \text{ se } P(f, y, \vec{v}, G(\vec{v}, y, f)).$$

Olhando à definição de P temos que $P(f, y, \vec{v}, G(\vec{v}, y, f))$ implica

$$\forall u \in TC(y)\, P(f \restriction TC(u), u, \vec{v}, f(u))$$

e portanto $\forall u \in TC(y)\, f(u) = G(\vec{v}, u, f \restriction TC(u)) = F(\vec{v}, u)$, ou seja, $f = F \restriction TC(y)$ e portanto

$$F(\vec{v}, y) = G(\vec{v}, y, F \restriction TC(y)).$$

□

Corolário 3.2.7. *Dado G um símbolo funcional Σ $(n+2)$-ário KPω mostra que existe um símbolo funcional Σ $(n+1)$-ário F tal que*

$$F(\vec{v}, x) = G(\vec{v}, x, F[x])$$

com $F[x] = \{F(\vec{v}, y) \mid y \in x\}$.

Demonstração. Basta definir $G'(\vec{v}, x, f) := G(\vec{v}, x, im(f \restriction x))$ e aplicando Σ-Recursão a G' temos

$$\begin{gathered} F(\vec{v}, x) = G'(\vec{v}, x, F \restriction TC(x)) = G(\vec{v}, x, im((F \restriction TC(x)) \restriction x)) = \\ G(\vec{v}, x, im(F \restriction x)) = G(\vec{v}, x, F[x]). \end{gathered}$$

□

Corolário 3.2.8. *Dados G_0,G_S e G_L símbolos funcionais Σ de aridades adequadas* KPω *mostra que existe um símbolo funcional Σ F tal que $dom(F) = Ord$ e*

(i) $F(\vec{v}, 0) = G_0(\vec{v})$

(ii) $F(\vec{v}, \alpha + 1) = G_S(\vec{v}, \alpha + 1, F(\vec{v}, \alpha))$

(iii) $F(\vec{v}, \gamma) = G_L(\vec{v}, \gamma, F \restriction \gamma)$ *se $\gamma \in Lim$.*

Demonstração. Definimos o símbolo funcional G' por

$$G'(\vec{v},\alpha,f) := \begin{cases} G_0(\vec{v}) & \text{se } \alpha = 0 \\ G_S(\vec{v},\alpha,f(\beta)) & \text{se } \alpha = \beta+1 \\ G_L(\vec{v},\alpha,f) & \text{se } \alpha \in Lim \end{cases}$$

Um vez que as noções de ordinal sucessor e limite são Δ_0 e G_0,G_S e G_L são símbolos funcionais Σ é claro que G' também é um símbolo funcional Σ. Aplicando o teorema da Σ-recursão a G' obtemos o símbolo funcional F pretendido. □

3.3 $\mathsf{ID}_1 \subseteq \mathsf{KP}\omega$

Nesta secção mostraremos que ID_1 pode ser interpretada em $\mathsf{KP}\omega$.

Os números naturais são representados pelos ordinais finitos de $\mathsf{KP}\omega$. Uma vez que ω é um conjunto em $\mathsf{KP}\omega$ as quantificações sobre os números naturais interpretam-se como quantificações limitadas em $KP\omega$.

Os n-úplos são definidos da forma usual utilizando a noção de par ordenado:

$$(x_1,\ldots,x_{n+1}) := ((x_1,\ldots,x_n),x_{n+1}).$$

Por indução em n a partir das noções Δ_0 de par ordenado e de projeção vemos que as noções de n-úplo e de projeção em n-úplos são ainda Δ_0. De forma análoga definimos o produto cartesiano de n conjuntos como

$$u_1 \times \cdots \times u_{n+1} := (u_1 \times \cdots \times u_n) \times u_{n+1}$$

e por indução em n utilizando o teorema 3.1.3 temos que todos os modelos de $\mathsf{KP}\omega$ são fechados para estes produtos cartesianos.

Vejamos agora que as funções recursivas primitivas são conjuntos em $\mathsf{KP}\omega$. A função sucessor

$$S := \{z \in \omega \times \omega \mid \exists x \in \omega\, [z = (x, x \cup \{x\})]\}$$

é um conjunto por Δ_0-Separação. As funções constantes e projeções

$$C_k^n := \{z \in \omega^{n+1} \mid \exists x_1 \in \omega, \ldots, \exists x_n \in \omega\, [z = (x_1,\ldots,x_n,k)]\}$$

e

$$P_k^n := \{z \in \omega^{n+1} \mid \exists x_1 \in \omega, \ldots, \exists x_n \in \omega\, [z = (x_1,\ldots,x_n,x_k)]\}$$

são também conjuntos por Δ_0-Separação. Sejam g uma função m-ária e $h_1,\ldots,h_m$ funções n-árias nos naturais em $\mathsf{KP}\omega$. Então por Δ_0-Separação temos o conjunto

$$\begin{aligned} Sub(g,h_1,\ldots,h_m) := \{z \in \omega^{n+1} \mid\ & \exists x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,z_m,y \in \omega \\ & [\bigwedge_{i=1}^{m} h_i(x_1,\ldots,x_n) = z_i \wedge g(z_1,\ldots,z_m) = y \wedge \\ & z = (x_1,\ldots,x_n,y)]\} \end{aligned}$$

e portanto temos composição generalizada em $\mathsf{KP}\omega$. Sejam g uma função n-ária e h uma função (n+2)-ária nos naturais em $\mathsf{KP}\omega$. Seja

$$\begin{aligned} Rec(g,h) := \{z \in \omega^{n+2} \mid \exists u, x_1, \ldots, x_n \in \omega\, \exists f\, [Fun(f) \wedge dom(f) = \omega \wedge \\ f(0) = g(x_1, \ldots, x_n) \wedge \forall n \in \omega\, (f(n+1) = h(n, f(n), x_1, \ldots, x_n)) \wedge \\ z = (u, x_1, \ldots, x_n, f(u))]\}. \end{aligned}$$

Uma vez que também temos

$$\begin{aligned} Rec(g,h) = \{z \in \omega^{n+2} \mid \exists u, x_1, \ldots, x_n \in \omega\, \forall f\, [Fun(f) \wedge dom(f) = \omega \wedge \\ f(0) = g(x_1, \ldots, x_n) \wedge \forall n \in \omega\, (f(n+1) = h(n, f(n), x_1, \ldots, x_n)) \\ \to z = (u, x_1, \ldots, x_n, f(u))]\} \end{aligned}$$

vem que $Rec(g,h)$ é um conjunto por Δ-Separação e temos recursão primitiva em $\mathsf{KP}\omega$. Temos assim a funções recursivas primitivas em $\mathsf{KP}\omega$.

Teorema 3.3.1. *Se F é uma fórmula na linguagem de Z tal que $\mathsf{Z} \vdash F$ então $\mathsf{KP}\omega \vdash F^\omega$.*

Demonstração. Basta verificar o teorema para os axiomas Z. Os axiomas de identidade são satisfeitos uma vez que também são axiomas de $\mathsf{KP}\omega$. Observando as definições dos conjuntos que construímos para representar as funções recursivas primitivas em $\mathsf{KP}\omega$ é claro que se F é um axioma que define uma função recursiva primitiva em Z então $\mathsf{KP}\omega \vdash F^\omega$.

Resta-nos verificar os axiomas do sucessor e o esquema de indução. Uma vez que $\forall x \in \omega\, (x \in S(x) = x \cup \{x\})$ temos $\forall x \in \omega\, (S(x) \neq \emptyset = 0)$. Sejam $x, y \in \omega$ tais que $S(x) = x \cup \{x\} = y \cup \{y\} = S(y)$. Se $x \neq y$ então $x \in y \in x$ o que contradiz a Fundação logo $x = y$. Portanto $\mathsf{KP}\omega$ demonstra os axiomas do sucessor. Vejamos o esquema de indução. Seja $F(x)$ uma fórmula e suponhamos $F(0)^\omega$ e $\forall x \in \omega\, (F(x)^\omega \to F(S(x))^\omega)$. Suponhamos com vista a absurdo que $\exists x \in \omega\, (\neg F(x)^\omega)$. Pela Fundação existe o menor $k \in \omega$ tal que se tem $\neg F(k)^\omega$. Por hipótese $k \neq 0$ logo existe $l \in \omega$ tal que $k = S(l)$ e pela minimalidade de k temos $F(l)^\omega$ o que pela hipótese implica $F(k)^\omega$ o que é absurdo. Logo $\forall x \in \omega\, (F(x)^\omega)$ e temos o esquema de indução. □

Vimos então que Z é uma subteoria de $\mathsf{KP}\omega$. Para vermos que $\mathsf{ID}_1 \subseteq \mathsf{KP}\omega$ falta-nos arranjar uma representação dos pontos fixos das definições indutivas a-ritmeticamente definidas em $\mathsf{KP}\omega$ de forma a que os axiomas ID_1^1 e ID_1^2 sejam verificados.

Neste ponto vamos introduzir uma variável X de segunda ordem em $\mathsf{KP}\omega$. Isto é apenas um artifício para indicar posições na fórmula que surgem positivamente e assim introduzir as fórmulas positivas em $\mathsf{KP}\omega$. Invariavelmente, sempre que temos uma fórmula $F(X)$ na linguagem aumentada esta é utilizada na forma $F(\theta)$

em que θ é um predicado em $\mathcal{L}(\in)$ e $F(\theta)$ é a fórmula que resulta de substituir em $F(X)$ todas as ocorrências de $X(t)$ por $\theta(t)$ em que t é um termo de $\mathcal{L}(\in)$. Assim $F(\theta)$ é uma fórmula na linguagem original $\mathcal{L}(\in)$. Escrevemos $F(w)$ para $F(\theta)$ quando $\theta(x) :\equiv x \in w$.

Começamos por mostrar um lema que nos permite definir operadores a partir de fórmulas Δ.

Lema 3.3.2. *Dada $B(X, x, \vec{a})$ uma fórmula Δ de $\mathsf{KP}\omega$ podemos introduzir o símbolo funcional Σ I_B tal que*

$$I_B(\alpha, \vec{a}) = \{x \in a_1 \mid B(I_B[\alpha], x, \vec{a})\}$$

com $I_B[\alpha] := \{x \in a_1 \mid \exists \beta \in \alpha\, (x \in I_B(\beta, \vec{a}))\} = \bigcup_{\beta\in\alpha} I_B(\beta, \vec{a})$.

Demonstração. Seja $\Gamma_B(X, \vec{a}) := \{x \in a_1 \mid B(X, x, \vec{a})\}$. Temos

$$\Gamma_B(X, \vec{a}) = y \quad \equiv \quad \forall z \in y\, [z \in a_1 \wedge B(X, z, \vec{a})] \wedge \forall z \in a_1\, [B(X, z, \vec{a}) \to z \in y]$$

logo Γ_B é uma função Σ e pelo corolário da Σ-Recursão (3.2.7) temos a função Σ I_B tal que

$$I_B(\alpha, \vec{a}) = \Gamma_B(I_B[\alpha], \vec{a}) = \{x \in a_1 \mid B(I_B[\alpha], x, \vec{a})\}.$$

$\square$

Intuitivamente e de forma semelhante à do capítulo 1 sabemos que se $B(X, x, \vec{a})$ é X-positiva então o operador $\Gamma_{B,\vec{a}}(X) = \{x \in a_1 \mid B(X, x, \vec{a})\}$ é monótono. Sabemos também que o menor ponto fixo de $\Gamma_{B,\vec{a}}(X)$ é a união dos $I_B(\alpha, \vec{a})$ com α nos ordinais mas claro esta união não é possível em $\mathsf{KP}\omega$ e em geral esta classe não é um conjunto em $\mathsf{KP}\omega$. No entanto, como I_B é Σ, o menor ponto fixo de $\Gamma_{B,\vec{a}}(X)$ é pelo menos uma classe Σ-definível da seguinte forma

$$\mathbf{I}_{B,\vec{a}}(x) :\leftrightarrow x \in a_1 \wedge \exists \alpha\, [x \in I_B(\alpha, \vec{a})].$$

Escreveremos $x \in \mathbf{I}_{B,\vec{a}}$ mas esta fórmula deve se entendida como uma abreviatura para $x \in a_1 \wedge \exists \alpha\, [x \in I_B(\alpha, \vec{a})]$. Desta forma se $B(X, x, \vec{a})$ é X-positiva então $B(\mathbf{I}_{B,\vec{a}}, x, \vec{a})$ é um fórmula Σ.

Vejamos agora que $\mathbf{I}_{B,\vec{a}}$ satisfaz os axiomas de ID_1.

Teorema 3.3.3. *Seja $B(X, x, \vec{a})$ uma fórmula Δ e X-positiva de $\mathsf{KP}\omega$. Então $\mathsf{KP}\omega$ demonstra*

$\mathbf{ID}_1^1$: $\Gamma_{B,\vec{a}}(\mathbf{I}_{B,\vec{a}}) \subseteq \mathbf{I}_{B,\vec{a}}$

$\mathbf{ID}_1^2$: $\Gamma_{B,\vec{a}}(\theta) \subseteq \theta \to \mathbf{I}_{B,\vec{a}} \subseteq \theta$ *para toda a fórmula $\theta(x)$ de $\mathcal{L}(\in)$.*

Demonstração. Seja $x \in \Gamma_{B,\vec{a}}(\mathbf{I}_{B,\vec{a}})$, isto é, $x \in a_1 \wedge B(\mathbf{I}_{B,\vec{a}}, x, \vec{a})$. Por Σ-Reflexão existe c tal que

$$B(\mathbf{I}_{B,\vec{a}}, x, \vec{a})^c = B(\{x \in a_1 \,|\, \exists \alpha \in c\,[x \in I_B(\alpha, \vec{a})]\}, x, \vec{a}).$$

Sejam $\beta = \bigcup\{\xi \in c \,|\, \xi \in Ord\}$ e $\gamma = S(\beta) = \beta \cup \{\beta\}$. Por Δ_0-Separação, Par e União γ é um conjunto tal que $c \cap Ord \subseteq \gamma$. Pela persistência ascendente das fórmulas Σ (lema 3.1.7) e pela monotonia de $\Gamma_{B,\vec{a}}$ temos

$$B(\{x \in a_1 \,|\, \exists \alpha \in \gamma\,[x \in I_B(\alpha, \vec{a})]\}, x, \vec{a})$$

e pela definição de I_B temos $x \in I_B(\gamma, \vec{a})$ logo $x \in \mathbf{I}_{B,\vec{a}}$ e portanto $\Gamma_{B,\vec{a}}(\mathbf{I}_{B,\vec{a}}) \subseteq \mathbf{I}_{B,\vec{a}}$.

Vejamos agora ID_1^2. Sejam agora θ tal que $\Gamma_{B,\vec{a}}(\theta) \subseteq \theta$ e α um conjunto tal que $\forall \beta \in \alpha(I_B(\beta, \vec{a}) \subseteq \theta)$, ou seja, $I_B[\alpha] \subseteq \theta$. Então pela monotonia de $\Gamma_{B,\vec{a}}$ temos

$$I_B(\alpha, \vec{a}) = \Gamma_{B,\vec{a}}(I_B[\alpha]) \subseteq \Gamma_{B,\vec{a}}(\theta) \subseteq \theta.$$

Portanto por $\in$-indução temos $\forall \alpha\, I_B(\alpha, \vec{a}) \subseteq \theta$, ou seja, $\mathbf{I}_{B,\vec{a}} \subseteq \theta$. □

Se $B(X, x, \vec{a})$ é uma fórmula aritmética positiva em ID_1 então $B(X, x, \vec{a})^\omega$ é uma fórmula Δ positiva em $\mathsf{KP}\omega$. Podemos assim interpretar as definições indutivas $I_{B,\vec{a}}$ de ID_1 como $\mathbf{I}_{B^\omega,\vec{a}}$ e o teorema anterior diz-nos que $\mathsf{KP}\omega$ satisfaz os axiomas de ID_1. Logo ID_1 é uma subteoria de $\mathsf{KP}\omega$.

3.4 O Σ-ordinal de KPω

Nesta secção iremos definir o Σ-ordinal de $\mathsf{KP}\omega$ e apresentar um majorante para este ordinal. Começamos por introduzir a noção de definibilidade e a hierarquia construtível.

Definição 3.4.1 (Definibilidade)**.** Dado um conjunto M transitivo dizemos que X é definível em M se existe uma fórmula $F(x, v_1, \ldots, v_n)$ de $L(\in)$ e conjuntos $a_1, \ldots, a_n \in M$ tais que $X = \{x \in M \,|\, (M, \in) \vDash F(x, a_1, \ldots, a_n)\}$.

Denotamos por $Def(M)$ a classe dos conjuntos definíveis em M.

Definição 3.4.2 (Hierarquia Construtível)**.** Definimos a hierarquia contrutível L recursivamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} L_0 &:= \emptyset, \\ L_{\alpha+1} &:= Def(L_\alpha), \\ L_\gamma &:= \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha \quad \text{se } \gamma \in Lim, \\ L &:= \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha. \end{aligned}$$

Definição 3.4.3 (Σ-ordinal de $\mathsf{KP}\omega$)**.** O Σ-ordinal de $\mathsf{KP}\omega$ é definido como

$$\|\mathsf{KP}\omega\|_\Sigma := \min\{\alpha \in Ord \,|\, (F \text{ é } \Sigma\text{-sentença} \wedge \mathsf{KP}\omega \vdash F) \to L_\alpha \vDash F\}$$

Definição 3.4.4 (Ordinal de Church-Kleene)**.** O ordinal de Church-Kleene (ω_1^{CK}) é o menor ordinal admissível acima de ω, ou seja, é o menor ordinal α tal que $L_\alpha \vDash \mathsf{KP}\omega$.

É bem conhecido que ω_1^{CK} é o menor ordinal recursivo (e, portanto, $\omega_1^{CK} < \omega_1$). Este resultado, devido a Spector, pode ser encontrado em Barwise [1975].

Uma vez que $L_{\omega_1^{CK}} \vDash \mathsf{KP}\omega$ é imediato da definição de Σ-ordinal que $\|\mathsf{KP}\omega\|_\Sigma \leqslant \omega_1^{CK}$. Vamos ver que temos mesmo $\|\mathsf{KP}\omega\|_\Sigma < \omega_1^{CK}$. Para mostrarmos este resultado temos de ter que a relação de satisfazibilidade é Δ em $\mathsf{KP}\omega$ e depois que a função $\alpha \mapsto L_\alpha$ é definível em $\mathsf{KP}\omega$ por Σ-recursão.

Intuitivamente, a noção de satisfazibilidade ($(M,\in) \vDash F$) é formalizada por indução na complexidade das fórmulas utilizando duas funções f e g. f é uma função que a cada n faz corresponder o conjunto dos códigos de fórmulas com parâmetros em M que podem ser formadas a partir das fórmulas atómicas com n ou menos aplicações dos conectivos lógicos e quantificadores e g é a função que a cada n faz corresponder o conjunto dos elementos de $f(n)$ que são códigos de sentenças verdadeiras em $(M,\in)$. Estas funções são únicas. A função f é necessária para lidarmos com a negação ($\neg\phi \in g(n+1)$ sse ϕ é uma sentença e $\phi \in f(n) \setminus g(n)$). Suponhamos que temos o predicado $S(M,f,g)$ que define estas funções f e g relativas a $(M,\in)$ e que este é Δ em $\mathsf{KP}\omega$, então o predicado de satisfazibilidade vem

$$\begin{aligned}(M,\in) \vDash F \quad & \text{sse} \quad \forall f,g\,\exists n \in \omega\,(S(M,f,g) \to F \in g(n)) \\ & \text{sse} \quad \exists f,g\,\exists n \in \omega\,(S(M,f,g) \wedge F \in g(n)).\end{aligned}$$

que portanto é Δ em $\mathsf{KP}\omega$. A formalização do predicado de satisfazibilidade e a análise da sua complexidade podem ser encontradas em Barwise [1975] ou em Devlin [1984] (ver também Mathias [2006] que corrige erros na formalização de Devlin).

Vejamos agora que $\alpha \mapsto L_\alpha$ é definível em $\mathsf{KP}\omega$ por Σ-recursão. Atendendo à definição de L e ao corolário 3.2.8 do teorema da Σ-recursão apenas temos que ver que $Def(u)$ é uma função Σ. Temos

$$\begin{aligned} v = Def(u) :\leftrightarrow\ & \forall x \in v\,\exists\phi \in \omega\,\exists\vec{b} \in u^{<\omega}\,(\text{“}\phi \text{ é uma fórmula de } \mathcal{L}(\in) \text{ com variáveis} \\ & \text{livres } y \text{ e } \vec{w}\text{”} \wedge \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in u \wedge (u,\in) \vDash \phi(z,\vec{b})))\wedge \\ & \forall\phi \in \omega\,\forall\vec{b} \in u^{<\omega}\,(\text{“}\phi \text{ é uma fórmula de } \mathcal{L}(\in) \text{ com variáveis} \\ & \text{livres } y \text{ e } \vec{w}\text{”} \to \exists x \in v\,\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in u \wedge (u,\in) \vDash \phi(z,\vec{b}))) \end{aligned}$$

e uma vez que “ϕ é uma fórmula com variáveis livres y e $\vec{w}$” é uma noção recursiva primitiva, o gráfico de $Def(u)$ é Δ em $\mathsf{KP}\omega$ e portanto $Def(u)$ é uma função Σ.

Teorema 3.4.5. $\|\mathsf{KP}\omega\|_\Sigma < \omega_1^{CK}$.

Demonstração. Seja F uma Σ-sentença tal que $\mathsf{KP}\omega \vdash F$. Por Σ-reflexão existe uma fórmula Δ_0 $B(x)$ tal que $F \leftrightarrow \exists x\, B(x)$. Temos $\mathsf{KP}\omega \vdash \exists x\, B(x)$ logo $L_{\omega_1^{CK}} \models \exists x\, B(x)$ e portanto existe $c \in L_{\omega_1^{CK}}$ tal que $L_{\omega_1^{CK}} \models B(c)$. Como ω_1^{CK} é ordinal limite, existe $\alpha < \omega_1^{CK}$ tal que $c \in L_\alpha$ e, como $B(c)$ é Δ_0, temos que $L_\alpha \models B(c)$; portanto $L_\alpha \models F$.

Seja $\mathcal{F}_\Sigma \coloneqq \{F \in \omega \,|\, F \text{ é uma } \Sigma\text{-sentença e } \mathsf{KP}\omega \vdash F\}$. Note-se que $\mathcal{F}_\Sigma$ é um conjunto recursivamente enumerável e, portanto, é Δ_0 em $\mathsf{KP}\omega$. Temos então

$$L_{\omega_1^{CK}} \models \forall F \in \mathcal{F}_\Sigma\, \exists \alpha\, (L_\alpha \models F).$$

Como $\alpha \mapsto L_\alpha$ é uma função Σ e $L_\alpha \models F$ é uma fórmula Δ sai por Σ-Coleção que

$$L_{\omega_1^{CK}} \models \exists \beta \forall F \in \mathcal{F}_\Sigma\, \exists \alpha \leqslant \beta\, (L_\alpha \models F).$$

Uma vez que F é Σ vem então que

$$L_{\omega_1^{CK}} \models \exists \beta \forall F \in \mathcal{F}_\Sigma\, (L_\beta \models F).$$

Logo existe $\beta < \omega_1^{CK}$ tal que, para toda a Σ-sentença F tal que $\mathsf{KP}\omega \vdash F$, $L_\beta \models F$ e temos

$$\|\mathsf{KP}\omega\|_\Sigma \leqslant \beta < \omega_1^{CK}.$$

$\square$

Capítulo 4

Interpretação funcional de $\mathsf{KP}\omega$

Neste capítulo iremos começar por definir os funcionais de árvores recursivos primitivos de Howard que iremos utilizar de seguida para fazer a interpretação funcional de $\mathsf{KP}\omega$. Como consequência desta interpretação iremos obter uma melhor majoração para o Σ-ordinal de $\mathsf{KP}\omega$.

4.1 Funcionais de Howard

Descrevemos agora a linguagem L_Ω dos funcionais de árvores recursivos primitivos de tipo finito e depois iremos dar uma interpretação destes na teoria de conjuntos.

L_Ω é uma extensão da parte dos termos da teoria T de Gödel. É uma linguagem tipada e livre de quantificadores onde não existem fórmulas apenas termos. A cada termo é associado um tipo. Os tipos são gerados indutivamente da seguinte forma:

(i) N é o tipo base dos números naturais,

(ii) Ω é o tipo base dos ordinais de árvores contrutíveis contáveis,

(iii) Se σ e τ são tipos então $\sigma \to \tau$ é um tipo.

Utilizamos letras gregas $\rho, \sigma, \tau, \ldots$ para denotar os tipos. Por convenção a omissão de parêntesis é interpretada como associação à direita, isto é, o tipo

$$\rho_1 \to \rho_2 \to \cdots \to \rho_n$$

é uma abreviatura para

$$\rho_1 \to (\rho_2 \to (\cdots \to \rho_n) \cdots)$$

Definição 4.1.1 (Tipos Ω puros)**.** Designamos por tipos Ω puros os tipos onde não aparece o tipo N, ou seja, os tipos que são obtidos utilizando a seta ($\to$) apenas a partir do tipo base Ω.

Facilmente se verifica que os tipos Ω puros são precisamente os tipos da forma

$$\rho_1 \to \ldots \to \rho_n \to \Omega$$

com $\rho_1, \ldots, \rho_n$ tipos Ω puros.

Descrevemos agora os termos de L_Ω e a forma como associamos um tipo a cada termo. Em primeiro lugar a linguagem L_Ω tem um conjunto numerável de variáveis $a, b, c, \ldots$ de cada tipo. Quando for útil explicitar o tipo das variáveis escrevemos $a^\rho, b^\sigma, \ldots$. Alem das variáveis a linguagem L_Ω tem as seguintes constantes:

(i) **Constantes lógicas ou combinadores:**

(a) Para cada par de tipos ρ, σ temos o combinador $\Pi_{\rho,\sigma}$ de tipo $\rho \to \sigma \to \rho$.

(b) Para cada triplo de tipos ρ, σ, τ temos o combinador $\Sigma_{\rho,\sigma,\tau}$ de tipo $(\rho \to \sigma \to \tau) \to (\rho \to \sigma) \to \rho \to \tau$.

(ii) **Constantes aritméticas:**

(a) A constante 0_N de tipo N.

(b) A constante *sucessor* S de tipo $N \to N$.

(c) Para cada tipo ρ temos o recursor numérico R^N_ρ de tipo $N \to \rho \to (N \to \rho \to \rho) \to \rho$.

(iii) **Constantes de árvores:**

(a) A constante 0_Ω de tipo Ω.

(b) A constante *supremo Sup* de tipo $(N \to \Omega) \to \Omega$.

(c) Para cada tipo ρ temos o recursor de árvores R^Ω_ρ de tipo $\Omega \to \rho \to ((N \to \Omega) \to (N \to \rho) \to \rho) \to \rho$.

Os restantes termos de L_Ω são obtidos indutivamente a partir das variáveis e das constantes por utilização da operação aplicação: Dado um termo t de tipo $\sigma \to \tau$ e um termo s de tipo σ obtemos pela operação aplicação o termo $t(s)$ de tipo τ. Como é usual utilizaremos "uncurrying" para escrevermos termos mais complicados, por exemplo, dados termos t de tipo $\rho \to \sigma \to \tau$, r de tipo ρ e s de tipo σ escrevemos $t(r, s)$ em vez de $(t(r))(s)$.

A presença dos combinadores e o facto de que todos os termos são gerados a partir das variáveis e constantes apenas pela operação aplicação garante-nos *completude combinatorial*, ou seja, garante-nos a possibilidade de definir termos λ da seguinte forma: Dados um termo t e uma variável x existe um termo q cujas variáveis livres são todas as de t excepto x e que satisfaz a equação

$$q(s) = t[s/x]$$

para todo o termo s do mesmo tipo que x. Designamos q por $\lambda x.t$. Este resultado generaliza-se para várias variáveis, se t é um termo com variáveis livres $x_1, \ldots, x_n$ então $\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.t$ é um termo fechado que satisfaz

$$(\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.t)(s_1, \ldots, s_n) = t[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n]$$

para todo s_i do tipo de x_i para $i = 1, \ldots, n$.

Damos agora a interpretação pretendida em termos da teoria de conjuntos (esta interpretação pode ser feita na teoria de Zermelo-Fraenkel embora não seja importante para o que se segue especificar onde é feita a interpretação). As variáveis de tipo ρ variam no conjunto S_ρ definido da seguinte forma:

(i) $S_N = \mathbb{N}$,

(ii) S_Ω é o menor conjunto que contem 0 e se f é uma função total de ω para S_Ω então $\langle 1, f\rangle \in S_\Omega$.

(iii) $S_{\rho\to\sigma} = \{f \mid f$ é uma função total de S_ρ para $S_\sigma\}$.

Os combinadores são interpretados da forma usual pelas funções dadas pelas equações

$$\Pi_{\rho,\sigma}(r, s) = r \quad \text{para todo } r \in S_\rho \text{ e } s \in S_\sigma$$

e

$$\Sigma_{\rho,\sigma,\tau}(r, s, t) = r(t)(s(t)) \quad \text{para todo } r \in S_{\rho\to\sigma\to\tau},\ s \in S_{\rho\to\sigma} \text{ e } t \in S_\sigma.$$

Como é patente nas equações anteriores, vamos utilizar o mesmo símbolo para as constantes de L_Ω e para a sua interpretação na teoria de conjuntos. Este abuso de linguagem será sistemático e apesar de introduzir uma ambiguidade no discurso esta é inconsequente.

A constante 0_N é interpretada por 0 e a constante S é interpretada pela função sucessor nos naturais. A interpretação do recursor R^N_ρ é uma forma de recursão primitiva definida pelas equações

$$\begin{aligned} &R^N_\rho(0, a, F) = a \\ &R^N_\rho(n + 1, a, F) = F(n, R^N_\rho(n, a, F)) \end{aligned}$$

para todo $a \in S_\rho$ e $F \in S_{N\to\rho\to\rho}$. A constante 0_Ω é interpretada por 0. Sup é interpretado pela função dada pela equação

$$Sup(f) = \langle 1, f\rangle \quad \text{para todo } f \in S_{N\to\Omega}.$$

Antes de definirmos a interpretação dos recursores de árvores R^Ω_ρ precisamos de definir o que entendemos por altura das árvores.

Definição 4.1.2 (Altura das árvores)**.** A cada $a \in S_\Omega$ associamos um ordinal contável $|a|$ a que chamamos altura da árvore a da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &|0| = 0, \\ &|Sup(f)| = \sup\{|f(n)| + 1 \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{para todo } f \in S_{N\to\Omega}. \end{aligned}$$

Note-se que para todo $f\colon \mathbb{N} \to S_\Omega$ e todo $n \in \mathbb{N}$ se tem $|f(n)| < |Sup(f)|$. A interpretação do recursor R^Ω_ρ é uma forma de recursão na altura das árvores dada pela equações

$$\begin{aligned}
&R^\Omega_\rho(0_\Omega, a, F) = a\\
&R^\Omega_\rho(Sup(f), a, F) = F(f, \lambda x^N.R^\Omega_\rho(f(x), a, F))
\end{aligned}$$

para todo $a \in S_\rho$ e $F \in S_{(N\to\Omega)\to(N\to\rho)\to\rho}$.

Resta-nos definir a interpretação da operação aplicação que é feita pela função aplicação.

Resulta da interpretação que fizemos que todo o termo fechado t de L_Ω de tipo ρ é interpretado por um elemento de S_ρ que designamos também por t. Em particular, se ρ é o tipo $\sigma \to \tau$ então t é uma função total de S_σ para S_τ e podemos escrever $t(s)$ para todo $s \in S_\sigma$; se ρ é o tipo Ω então $t \in S_\Omega$ e, portanto, tem uma altura associada $|t|$.

Conforme é mostrado em Howard [1972] o supremo dos ordinais associados aos termos fechados de L_Ω é o *ordinal de Bachmann-Howard*. Tomamos esta como sendo a definição do *ordinal de Bachmann-Howard* embora não seja a definição original.

Definimos agora alguns termos importantes. Dado a de tipo Ω definimos $a+1 :\equiv Sup(\lambda n^N.a)$ e temos $|a+1| = |a|+1$. Utilizando o recursor numérico definimos um termo fechado $t^{N\to\Omega\to\Omega\to\Omega}$ tal que para todo n^N, a^Ω e b^Ω, $t(0,a,b) = a$ e $t(S(n),a,b) = b$ e utilizamos este para definir o termo $Sup(\lambda n^N.t(n,a,b))$ que denotamos por $max(a,b)+1$. Esta notação deve ser entendida sincategorematicamente e foi escolhida porque assim temos $|max(a,b)+1| = max(|a|,|b|)+1$. Esta definição pode ser estendida a $max(a_0,\ldots,a_n)+1$ para qualquer numero finito de termos de tipo Ω utilizando o termo

$$t(i, a_0, \ldots, a_n) = \begin{cases} a_i & \text{se } i < n\\ a_n & \text{se } i \geqslant n\end{cases}$$

que é definido iterando n vezes o recursor numérico. Utilizando ainda o recursor numérico definimos também um termo fechado $q^{N\to\Omega}$ tal que $q(0) = 0_\Omega$ e $q(S(n)) = Sup(\lambda x^N.q(n))$. Denotamos $q(n)$ por n_Ω e obviamente temos $|n_\Omega| = n$. Definimos também $\omega_\Omega :\equiv Sup(\lambda n^N.n_\Omega)$ e claro $|\omega_\Omega| = \omega$. Definimos, utilizando o recursor de árvores, o termo Sup^{-1} de tipo $\Omega \to (N \to \Omega)$ tal que $Sup^{-1}(0_\Omega) = \lambda x^N.0_\Omega$ e para todo f de tipo $N \to \Omega$, $Sup^{-1}(Sup(f)) = f$. Abreviamos $Sup^{-1}(a)(n)$ por $a\langle n\rangle$. Temos assim $(Sup(f))\langle n\rangle = f(n)$ e, portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a \in S_\Omega \setminus \{0_\Omega\}$, $|a\langle n\rangle| < |a|$. É claro também que para todo n de tipo N e a, b de tipo Ω se tem $(a+1)\langle n\rangle = a$, $(max(a,b)+1)\langle 0\rangle = a$ e $(max(a,b)+1)\langle S(n)\rangle = b$.

4.2 Interpretação Funcional

A interpretação funcional de $\mathsf{KP}\omega$ será feita numa linguagem mista constituída pela linguagem de termos L_Ω e pela linguagem de primeira-ordem da teoria de conjuntos juntamente com um símbolo funcional unário $L(a)$, que denotamos por L_a, que a cada termo do tipo Ω faz corresponder um termo da linguagem da teoria de conjuntos. Na interpretação pretendida em termos da teoria de conjuntos L_a é entendido como o conjunto $L_{|a|}$ da hierarquia construtível de Gödel. As fórmulas atómicas da linguagem mista são as fórmulas da forma $x = y$, $x \in y$ ou $x \in L_a$ com x, y variáveis da teoria de conjuntos e a um termo de L_Ω de tipo Ω. A linguagem tem também quantificações do tipo $\exists x^N \phi$ que são interpretadas como sendo sobre os naturais e são consideradas limitadas (intuitivamente, no nosso contexto as quantificações sobre naturais são limitadas porque estas correspondem a uma quantificação sobre ω em KP_ω). A interpretação funcional irá associar a cada fórmula da linguagem da teoria de conjuntos um predicado que será descrito por uma fórmula da linguagem mista. Começamos por definir as fórmulas limitadas da linguagem mista.

Definição 4.2.1 (Fórmula limitada mista)**.** A classe das fórmulas limitadas da linguagem mista é a menor classe de fórmulas que contem as fórmulas atómicas e é fechada para quantificações limitadas e conectivos lógicos.

Vamos associar a cada fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ da linguagem da teoria de conjuntos com variáveis livres $x_1, \ldots, x_n$ uma fórmula limitada mista

$$\phi_S(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m, x_1, \ldots, x_n)$$

com variáveis livres $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m, x_1, \ldots, x_n$ com os a's e b's variáveis de tipo Ω puro. Pode acontecer que não ocorram variáveis a's ou b's ou ambas. Para não sobrecarregar a notação iremos normalmente omitir os n-uplos e escrevemos apenas $\phi(x)$ e $\phi_S(a, b, x)$.

Para o que se segue necessitamos de estender o funcional Sup^{-1} a todos os tipos Ω puros. Isto é feito ponto a ponto. Dado um termo t de tipo Ω puro $\rho_1 \to \ldots \to \rho_n \to \Omega$ definimos $t\langle n\rangle :\equiv \lambda\vec{x}.(t(\vec{x})\langle n\rangle)$ em que $\vec{x}$ é o n-uplo de tipos $\rho_1, \ldots, \rho_n$.

A nossa interpretação funcional é feita directamente para a lógica clássica e baseia-se na interpretação de Shoenfield para a aritmética de Peano apresentada em Shoenfield [2001]. Os símbolos lógicos primitivos da linguagem são $\neg$, $\vee$ e $\forall$ e os restantes são definidos da forma usual por $\phi \wedge \psi :\equiv \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$, $\phi \to \psi :\equiv \neg\phi \vee \psi$ e $\exists x\, \phi :\equiv \neg\forall x\, \neg\phi$.

É útil também ter como símbolo primitivo da linguagem da teoria de conjuntos o quantificador limitado $\forall x \in y$ em vez de ser uma abreviatura para $\forall x(x \in y \to \ldots)$. Definimos também $\exists x \in y\, \phi :\equiv \neg\forall x \in y\, \neg\phi$. Ao introduzir o símbolo para o quantificador limitado temos também de acrescentar à teoria de conjuntos um axioma esquema que rege estes novos símbolos. Este é

$$\forall y(\forall x \in y\, \phi(x,y) \leftrightarrow \forall x\, (x \in y \rightarrow \phi(x,y))).$$

Podemos agora definir a interpretação funcional de KPω.

Definição 4.2.2 (Interpretação Funcional)**.** A cada formula ϕ da linguagem da teoria de conjuntos associamos duas fórmulas ϕ^S e ϕ_S da linguagem mista tal que ϕ^S tem a forma $\forall a \exists b\, \phi_S(a,b)$ e ϕ_S é uma fórmula limitada mista. A associação é feita por recursão na complexidade das fórmulas da seguinte forma:

(i) Se ϕ é uma fórmula limitada da teoria de conjuntos então ϕ^S e ϕ_S são simplesmente ϕ.

Suponhamos agora por hipótese de indução que já temos as interpretações de ϕ e ψ dadas por $\forall a \exists b\, \phi_S(a,b)$ e $\forall c \exists d\, \psi_S(c,d)$. Definimos:

(ii) $(\phi \vee \psi)^S$ é $\forall a, c \exists b, d\, [\phi_S(a,b) \vee \psi_S(c,d)]$,

(iii) $(\forall x\, \phi(x))^S$ é $\forall a, e^{\Omega} \exists b\, [\forall x \in L_e\, \phi_S(a,b,x)]$,

(iv) $(\forall x \in z\, \phi(x,z))^S$ é $\forall a \exists b\, [\forall x \in z\, \phi_S(a,b,x,z)]$,

(v) $(\neg\phi)^S$ é $\forall B \exists a\, [\exists n^N\, \neg\phi_S(a\langle n\rangle, B(a\langle n\rangle))]$.

Nas alíneas anteriores as fórmulas entre parêntesis retos são as respetivas fórmulas com índice S, por exemplo, $(\phi \vee \psi)_S$ é a fórmula limitada mista $\phi_S(a,b) \vee \psi_S(c,d)$. Na definição da interpretação funcional utilizamos quantificações sobre as variáveis a e b de tipo Ω puro mas na definição da linguagem não introduzimos quantificadores deste tipo. Esta situação é comum nas interpretações funcionais e estas quantificações devem ser vistas como meros auxiliares para definirmos as fórmulas ϕ_S, alternativamente podíamos estender a linguagem com estes quantificadores. É necessário um esclarecimento em relação aos n-úplos na alínea (v) da definição. Se ϕ^S é $\forall a_1, \ldots, a_k \exists b\, \phi(a_1, \ldots, a_k, b)$ então $(\neg\phi)^S$ é

$$\forall B \exists a_1, \ldots, a_k [\exists n_1^N, \ldots, n_k^N\, \neg\phi(a_1\langle n_1\rangle, \ldots, a_k\langle n_k\rangle, B(a_1\langle n_1\rangle, \ldots, a_k\langle n_k\rangle))].$$

Lema 4.2.3. *Seja ϕ uma fórmula Δ_0 da teoria de conjuntos. Então*

(i) $(\exists x\, \phi(x))^S$ *é* $\exists b^{\Omega}[\exists n^N \exists x \in L_{b\langle n\rangle}\, \phi(x)]$,

(ii) $(\forall x \exists y\, \phi(x,y))^S$ *é* $\forall a^{\Omega} \exists b^{\Omega}[\forall x \in L_a \exists n^N \exists y \in L_{b\langle n\rangle}\, \phi(x,y)]$.

Demonstração. A demonstração é apenas aplicar as regras da definição da interpretação funcional. Vejamos a alínea (i). $\exists x\, \phi(x)$ é $\neg\forall x\, \neg\phi(x)$. ϕ é Δ_0 logo $(\neg\phi(x))^S$ é $\neg\phi(x)$ e, portanto, $(\forall x\, \neg\phi(x))^S$ é $\forall b^\Omega\, [\forall x \in L_b\, \neg\phi(x)]$. Então $(\exists x\, \phi(x))^S$ é $(\neg\forall x\, \neg\phi(x))^S$ que, pela regra da negação, é $\exists b^\Omega\, [\exists n^N\, \neg\forall x \in L_{b\langle n\rangle}\, \neg\phi(x)]$ que, pela definição do quantificador existencial limitado, é $\exists b^\Omega\, [\exists n^N\, \exists x \in L_{b\langle n\rangle}\, \phi(x)]$. A alínea (ii) resulta imediatamente da aplicação da alínea (i) seguida da regra para o quantificador universal.

A definição de $(\neg\phi)^S$ é um pouco estranha, seria mais natural defini-la como na interpretação de Shoenfield por $\forall B \exists a\, [\neg\phi_S(a, B(a))]$. As duas versões de $(\neg\phi)^S$ são claro equivalentes, para mostrarmos

$$\exists a\, [\neg\phi_S(a, B(a))] \Leftrightarrow \exists a'\, [\exists n^N\, \neg\phi_S(a'\langle n\rangle, B(a'\langle n\rangle))]$$

basta na condição suficiente tomar $a' = a + 1$ e na condição suficiente tomar $a = a'\langle n\rangle$. No entanto as duas versões de $(\neg\phi)_S$ não são equivalentes. Fazemos a tradução desta forma para termos uma propriedade de monotonia na quantificação existencial que será necessária para mostrarmos o teorema da correção. Definimos agora uma relação em cada tipo Ω puro. Dados b e c do mesmo tipo Ω puro definimos

$$b \sqsubseteq c :\equiv \forall n^N \exists m^N\, (b\langle n\rangle = c\langle m\rangle).$$

Estendemos esta definição a n-uplos $b = (b_1, \ldots, b_n)$ e $c = (c_1, \ldots, c_n)$ de tipos Ω puros com o mesmo comprimento e com os mesmos tipos nas entradas correspondentes. Neste caso escrevemos $b \sqsubseteq c$ para $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\, b_i \sqsubseteq c_i$. Podemos agora definir a propriedade de monotonia.

Lema 4.2.4 (Propriedade de Monotonia)**.** *Seja $\phi(x)$ uma fórmula da linguagem da teoria de conjuntos. Se $b \sqsubseteq c$ e $\phi_S(a, b, x)$, então $\phi_S(a, c, x)$.*

Demonstração. A demonstração é feita por indução na complexidade das fórmulas. Seja $b \sqsubseteq c$. Se ϕ é uma fórmula limitada então $\phi_S(a, b, x)$ e $\phi_S(a, c, x)$ são ambas $\phi(x)$ e temos o resultado. Os casos (ii), (iii) e (iv) da interpretação funcional são claros, por exemplo, se ϕ é $\psi \vee \theta$ então $\phi_S(a, b)$ é $\psi_S(a_1, b_1) \vee \theta_S(a_2, b_2)$; por hipótese de indução se $\psi_S(a_1, b_1)$ então $\psi_S(a_1, c_1)$ e se $\theta_S(a_2, b_2)$ então $\theta_S(a_2, c_2)$ e portanto se $\psi_S(a_1, b_1) \vee \theta_S(a_2, b_2)$ então $\psi_S(a_1, c_1) \vee \theta_S(a_2, c_2)$ ou seja, $\phi_S(a, c)$. A clausula (v) é desenhada para satisfazer a propriedade de monotonia pois se $\exists n^N\, \neg\phi_S(b\langle n\rangle, a(b\langle n\rangle))$ então $\exists m^N\, \neg\phi_S(c\langle m\rangle, a(c\langle m\rangle))$ pela definição de $b \sqsubseteq c$.

Fixemos um termo p de tipo $N \to N \to N$ que é uma função de codificação bijectiva e as respetivas funções inversas l e r de tipo $N \to N$. Temos,portanto, para todos os naturais n e m, $p(l(n), r(n)) = n$, $l(p(n, m)) = n$ e $r(p(n, m)) = m$. Dado t um termo de tipo $N \to \Omega$ definimos $\tilde{t} :\equiv \lambda x^N.t(l(x))\langle r(x)\rangle$ e $\bigsqcup t :\equiv Sup(\tilde{t})$. É claro das definições de $\sqsubseteq$ e de $\bigsqcup t$ que para todo k de tipo N, $t(k) \sqsubseteq \bigsqcup t$. Podemos também estender ponto a ponto $\bigsqcup t$ para t de tipo $N \to \rho$ com ρ um tipo Ω puro. Se t é do tipo $N \to \rho_1 \to \ldots \to \rho_n \to \Omega$ definimos

$$\bigsqcup t :\equiv \lambda\vec{x}.Sup(\lambda \widetilde{z^N.t(z,\vec{x})}).$$

Com esta definição temos também $t(k) \sqsubseteq \bigsqcup t$ para todo o k do tipo N. De forma análoga à definição de $max(a,b)+1$, definimos $t \sqcup s$, para termos t e s de tipo Ω puro, tal que $t \sqsubseteq t \sqcup s$ e $s \sqsubseteq t \sqcup s$.

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema da correção para a interpretação funcional.

Teorema 4.2.5 (Correção). *Seja ϕ uma sentença da linguagem da teoria de conjuntos. Se $\mathsf{KP}\omega \vdash \phi$ então existem termos fechados t de L_Ω tais que, para os tipos ρ apropriados, se tem $\forall a \in S_\rho\, \phi_S(a, t(a))$.*

Demonstração. A demonstração é feita por indução no comprimento da dedução de ϕ. Mostramos que se $\mathsf{KP}\omega \vdash \phi(x)$ então existem termos fechados t de L_Ω tais que, para os tipos ρ apropriados, se tem

$$\forall c \in S_\Omega \forall a \in S_\rho \forall x \in L_c\, \phi_S(a, t(a,c), x).$$

Temos, portanto, de verificar o resultado para os axiomas e regras da lógica clássica, para o axioma que rege os quantificadores limitados e para os axiomas de $\mathsf{KP}\omega$. Para simplificar a notação vamos escrever as fórmulas só com as variáveis que entram na interpretação ficando subentendido que as fórmulas podem ter outros parâmetros. A axiomatização da lógica clássica que utilizamos é a descrita em Shoenfield [2001]. Esta consiste nos seguintes axiomas e regras:

(i) **Axiomas:**

  (a) *Terceiro excluído:* $\neg\phi \vee \phi$.
  (b) *Subtituição:* $\forall x\, \phi(x) \to \phi(y)$.
  (c) *Axiomas de igualdade:* $x = x$ e $x = y \to (w = z \to (x \in w \to y \in z))$.

(ii) **Regras:**

  (a) *Expansão:* de ϕ infere-se $\phi \vee \psi$.
  (b) *Contração:* de $\phi \vee \phi$ infere-se ϕ.
  (c) *Associatividade:* de $\phi \vee (\psi \vee \theta)$ infere-se $(\phi \vee \psi) \vee \theta$.
  (d) *Corte:* de $\phi \vee \psi$ e $\neg\phi \vee \theta$ infere-se $\psi \vee \theta$.
  (e) $\forall$-*Introdução:* de $\phi(x) \vee \psi$ infere-se $\forall x\, \phi(x) \vee \psi$ se x não ocorre livre em ψ.

No resto da demonstração vamos considerar sempre que ϕ^S é $\forall a^\rho \exists b\, \phi_S(a,b)$, ψ^S é $\forall c^\eta \exists d\, \psi_S(c,d)$ e que θ^S é $\forall u \exists v\, \theta(u,v)$.

Começamos por verificar os axiomas e regras lógicos. A tradução do terceiro excluído $(\neg\phi \vee \phi)^S$ é

$$\forall B, a' \,\exists a, b' \,[\forall n^N\, \phi_S(a\langle n\rangle, B(a\langle n\rangle)) \to \phi_S(a', b')].$$

Basta tomarmos os termos $a := a' + 1$ e $b' := B(a')$. Como $\forall n^N\, (a'+1)\langle n\rangle = a'$ temos

$$\forall B, a' \,[\forall n^N\, \phi_S((a'+1)\langle n\rangle, B((a'+1)\langle n\rangle)) \to \phi_S(a', B(a'))].$$

A interpretação do axioma da substituição $(\forall x\, \phi(x) \to \phi(w))^S$ é

$$\forall B, a', d\, \exists a, b', c\, [\forall n^N, m^N\, \forall x \in L_{c\langle m\rangle}\, \phi_S(a\langle n\rangle, B(a\langle n\rangle), x) \to \forall w \in L_d\, \phi_S(a', b', w)].$$

À semelhança do caso anterior é fácil ver que os termos $a := a' + 1$, $b' := B(a')$ e $c := d + 1$ funcionam.

Nos axiomas de igualdade não há nada a fazer porque são fórmulas universais e portanto não há termos a encontrar.

Passamos agora às regras. Para vermos a expansão suponhamos que temos um termo t tal que $\forall a \in S_\rho\, \phi_S(a, t(a))$. A tradução da conclusão $(\phi \vee \psi)^S$ é

$$\forall a, c \exists b, d^\sigma\, [\phi_S(a,b) \vee \psi_S(c,d)].$$

Temos então de arranjar testemunhas para b e d. Basta tomarmos $b := t(a)$ e para d podemos tomar qualquer termo fechado, por exemplo $d := 0^\sigma_\Omega$ em que 0^σ_Ω é 0_Ω se σ é Ω ou, se σ é um outro tipo Ω puro, 0^σ_Ω é $\lambda\vec{x}.0_\Omega$ com $\vec{x}$ dos tipos apropriados.

Passemos à contração. Normalmente nas interpretações funcionais arranjar os termos para a contração é algo complicado mas no nosso caso (e em geral nas interpretações limitadas) a situação é bastante simples. Por hipótese de indução existem termos r e s tais que

$$\forall a, a' \,[\phi_S(a, r(a,a')) \vee \phi_S(a', s(a,a'))].$$

Queremos arranjar um termo t tal que $\forall a\, \phi_S(a, t(a))$. $t(a) := r(a,a) \sqcup s(a,a)$ satisfaz a condição pois pela propriedade da monotonia se $\phi_S(a, r(a,a)) \vee \phi_S(a', s(a,a))$ então $\phi_S(a, t(a))$.

A associatividade é trivial pois os termos que satisfazem a hipótese também satisfazem a conclusão.

Mostremos agora o resultado para a regra do corte. Por hipótese de indução existem termos t, q, r e s tais que

$$\forall a^\rho, c\, [\phi_S(a, t(a,c)) \vee \psi_s(c, q(a,c))] \tag{1}$$

e

$$\forall B, u[\exists n^N \neg\phi_S(r(B,u)\langle n\rangle, B(r(B,u)\langle n\rangle)) \vee \theta_S(u, s(B,u))]. \tag{2}$$

Temos agora de definir termos k e l tais que se tenha

$$\forall c, u\, [\psi_S(c, k(c,u)) \vee \theta_S(u, l(c,u))].$$

Sejam c e u termos arbitrários de tipo apropriado. Começamos por definir alguns termos auxiliares, $B_c := \lambda x^\rho.t(x,c)$, $a'(c,u) := \lambda n^N.r(B_c,u)\langle n\rangle$ e denotamos por a_n o termo $a'(c,u)(n)$, ou seja, $r(B_c,u)\langle n\rangle$. Seja ainda $q'(c,u) := \lambda n^N.q(a_n,c)$. Definimos então k e l por $k(c,u) := \bigsqcup q'(c,u)$ e $l(c,u) := s(B_c,u)$. Por (1) temos $\forall n^N\, [\phi_S(a_n, t(a_n,c)) \vee \psi_s(c, q(a_n,c))]$ e uma vez que $\forall n^N\, q(a_n,c) \sqsubseteq k(c,u)$ pela monotonia vem

$$\forall n^N\, \phi_S(a_n, t(a_n,c)) \vee \psi_S(c, k(c,u)). \tag{3}$$

Por outro lado, tomando $B = B_c$ em (2), temos

$$\exists n^N\, \neg\phi_S(a_n, t(a_n,c)) \vee \theta_S(u, l(c,u)). \tag{4}$$

Finalmente, de (3) e (4) concluímos $\psi_S(c, k(c,u)) \vee \theta_S(u, l(c,u))$.

Finalmente a regra de $\forall$-introdução sai facilmente. Por hipótese de indução existem termos t e q tais que

$$\forall e^\Omega, a, c\, [\forall x \in L_e\, (\phi_S(a, t(e,a,c), x) \vee \psi_S(c, q(e,a,c)))].$$

Então os mesmos termos satisfazem a tradução da conclusão, isto é, temos

$$\forall e^\Omega, a, c\, [\forall x \in L_e\, \phi_S(a, t(e,a,c), x) \vee \psi_S(c, q(e,a,c))].$$

Concluímos assim a verificação do teorema para a lógica clássica.

Vejamos agora o caso do axioma que rege os quantificadores limitados

$$\forall y (\forall x \in y\, \phi(x,y) \leftrightarrow \forall x\, (x \in y \to \phi(x,y))).$$

Vejamos a condição suficiente. A interpretação desta implicação é

$$\begin{aligned}\forall B, a', c^\Omega, d^\Omega\, \exists a, b'\, [\forall y \in L_c (\forall n^N \forall x \in y\, \phi_S(a\langle n\rangle, B(a\langle n\rangle), x, y) \to \\ \forall x \in L_d\, (x \in y \to \phi_S(a', b', x, y)))].\end{aligned}$$

Basta tomarmos $a := a' + 1$ e $b' := B(a')$ para termos o resultado. Mostremos agora a condição necessária cuja interpretação é

$$\begin{aligned}\forall B, a', d^\Omega\, \exists a, b', c^\Omega \big[\forall y \in L_d\, [\forall n^N, m^N\, \forall x \in L_{c\langle m\rangle}\, (x \in y \to \\ \phi_S(a\langle n\rangle, B(a\langle n\rangle, c\langle m\rangle), x, y)) \to \forall x \in y\, \phi_S(a', b', x, y)]\big].\end{aligned}$$

Facilmente se vê que $a := a' + 1$, $c := d + 1$ e $b' := B(a', d)$ funcionam.

Finalmente, vamos verificar os axiomas de $\mathsf{KP}\omega$.

O axioma da extensionalidade é a fórmula universal

$$\forall u \forall v \left[\forall x \in u\, (x \in v) \wedge \forall y \in v\, (y \in u) \rightarrow u = v\right],$$

portanto, não há nada a fazer.

A interpretação do axioma do par é

$$\forall c^\Omega, d^\Omega \exists e^\Omega \left[\forall u \in L_c \forall v \in L_d \exists n^N \exists w \in L_{e\langle n\rangle}\, (u \in w \wedge v \in w)\right].$$

Claramente $e := (max(c, d)+1)+1$ satisfaz o teorema (escreveremos $max(c, d)+2$ daqui em diante).

A tradução do axioma da união é

$$\forall c^\Omega \exists d^\Omega \left[\forall u \in L_c \exists n^N \exists w \in L_{d\{n\}}\, \forall x \in u\, (x \subseteq w)\right].$$

É claro que $d := c + 2$ é uma testemunha do quantificador existencial.

Vejamos agora o axioma do infinito. A tradução deste axioma é

$$\exists c^\Omega, n^N\, \exists x \in L_{c\langle n\rangle}\, x \in Lim.$$

O resultado sai tomando $c := \omega_\Omega + 2$.

O axioma da Δ_0-Separação é

$$\forall u \forall \vec{v}\, \exists w \forall x\, \left[x \in w \leftrightarrow x \in u \wedge F(x, \vec{v})\right]$$

em que $F(x, \vec{v})$ é uma fórmula Δ_0 em que w não ocorre livre. Note-se que

$$\forall x\, \left[x \in w \leftrightarrow x \in u \wedge F(x, \vec{v})\right]$$

é equivalente à fórmula limitada

$$\forall x \in w\, (x \in u \wedge F(x, \vec{v})) \wedge \forall x \in u\, (F(x, \vec{v}) \rightarrow x \in w)$$

Assim sendo a interpretação da Δ_0-Separação é

$$\forall c^\Omega, \vec{d}^\Omega \exists e^\Omega \left[\forall u \in L_c \forall \vec{v} \in L_{\vec{d}} \exists n^N \exists w \in L_{e\langle n\rangle}\, \forall x\, (x \in w \leftrightarrow x \in u \wedge F(x, \vec{v}))\right]$$

em que $\forall \vec{v} \in L_{\vec{d}}$ abrevia $\forall v_1 \in L_{d_1}, \forall v_2 \in L_{d_2}, \ldots$. Obviamente, $e := max(c, \vec{d}) + 2$ é uma testemunha para o quantificador existencial.

Vejamos o esquema da fundação. Vamos utilizar a fundação na forma da regra: de $\forall x\, (\forall y \in x\, F(y) \rightarrow F(x))$ infere-se $\forall x\, F(x)$. Uma vez que não há restrições na fórmula F está regra é equivalente ao esquema da $\in$-indução que é o contra-recíproco do esquema da fundação (Teorema 3.2.2). Suponhamos o resultado para a tradução do antecedente da regra, ou seja, que existem termos t e q tais que

$$\begin{aligned}(1)\qquad \forall B, a', c^{\Omega}\,[\forall x \in L_c\,(\forall n^N \forall y \in x\, F_S(t(B,a',c)\langle n\rangle, B(t(B,a',c)\langle n\rangle), y) \to \\ F_S(a', q(B,a',c), x))].\end{aligned}$$

é verdade quando interpretada na teoria de conjuntos. Queremos agora encontrar um termo r tal que $\forall d \in S_{\Omega}, \forall a \in S_{\rho}\,[\forall x \in L_d\, F_S(a, r(a,d), x)]$. Utilizando o recursor de árvores definimos o termo

$$r(a,d) := \begin{cases} 0^{\sigma}_{\Omega} & \text{se } d = 0_{\Omega} \\ q(\lambda e^{\rho}. \bigsqcup(\lambda i^N. r(e, d\langle i\rangle)), a, d) & \text{c.c.} \end{cases}$$

em que σ é o tipo de q. Mostremos que o termo r satisfaz o teorema por indução transfinita em $|d|$. Fixemos $d \in S_{\Omega}$. Se $d = 0_{\Omega}$ vem $L_d = \emptyset$ e não há nada a mostrar. Suponhamos que $d \neq 0_{\Omega}$. Por hipótese de indução temos

$$(2)\qquad \forall n \in \mathbb{N} \forall a \in S_{\rho}\,[\forall y \in L_{d\langle n\rangle}\, F_S(a, r(a, d\langle n\rangle), y)].$$

Queremos ver que $\forall a \in S_{\rho}\,[\forall x \in L_d\, F_S(a, r(a,d), x)]$ Sejam $a \in S_{\rho}$ e $x \in L_d$. Tomemos

$$B_d :\equiv \lambda e^{\rho}. \bigsqcup(\lambda i^N. r(e, d\langle i\rangle)).$$

Como $r(a,d)$ é $q(B_d, a, d)$, por (1) é suficiente mostrar que

$$\forall n^N \forall y \in x\, F_S(t(B_d,a,d)\langle n\rangle, B_d(t(B_d,a,d)\langle n\rangle), y).$$

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $y \in x$. $x \in L_d$ logo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y \in L_{d\langle m\rangle}$. Por (2) vem

$$\forall a \in S_{\rho}\, F_S(a, r(a, d\langle m\rangle), y)$$

e em particular $F_S(t(B_d,a,d)\langle n\rangle, r(t(B_d,a,d)\langle n\rangle, d\langle m\rangle), y)$. Mas temos

$$r(t(B_d,a,d)\langle n\rangle, d\langle m\rangle) \sqsubseteq \bigsqcup(\lambda i^N. r(t(B_d,a,d)\langle n\rangle, d\langle i\rangle)) = B_d(t(B_d,a,d)\langle n\rangle)$$

donde, por monotonia, vem $F_S(t(B_d,a,d)\langle n\rangle, B_d(t(B_d,a,d)\langle n\rangle), y)$ e o resultado sai.

Vejamos então o último axioma, a Δ_0-coleção. A tradução de uma instância deste axioma com F uma fórmula Δ_0 é

$$\begin{aligned}\forall a^{\Omega}, b^{\Omega}\, \exists c^{\Omega}\, \forall u \in L_a\,[\forall x \in u \exists n^N \exists y \in L_{b\langle n\rangle} F(x,y) \to \\ \exists m^N \exists z \in L_{c\langle m\rangle} \forall x \in u \exists y \in z F(x,y)].\end{aligned}$$

É claro que $c = b+2$ funciona pois se para qualquer $x \in u$ existe uma testemunha y num $L_{b\langle n\rangle}$ para um certo $n \in \mathbb{N}$ então todas estas testemunhas estão em L_b e podemos tomar $z = L_b$.

Verificamos então o teorema para todos os axiomas de KPω o que concluí a demonstração. $\square$

Temos dois corolários a este teorema, o segundo dos quais diz-nos precisamente que o Σ-ordinal de $\mathsf{KP}\omega$ é majorado pelo supremo dos ordinais associados aos termos fechados de L_Ω, ou seja, pelo ordinal de Bachmann-Howard.

Corolário 4.2.6. *Seja $\phi(x,y)$ uma fórmula Δ_0 com apenas as variáveis x e y livres. Se $\mathsf{KP}\omega \vdash \forall x \exists y\, \phi(x,y)$ então existe um termo fechado t de tipo $\Omega \to \Omega$ tal que*

$$\forall a \in S_\Omega \forall x \in L_a \exists y \in L_{t(a)}\, \phi(x,y).$$

Demonstração. Pela alínea (ii) do lema 4.2.3 $(\forall x \exists y\, \phi(x,y))^S$ é

$$\forall a^\Omega \exists b^\Omega [\forall x \in L_a \exists n^N \exists y \in L_{b\langle n\rangle}\, \phi(x,y)]$$

logo pelo teorema da correção existe um termo fechado t tal que

$$\forall a \in S_\Omega \forall x \in L_a \exists n^N \exists y \in L_{t(a)\langle n\rangle}\, \phi(x,y).$$

Como para todo o $a \in S_\Omega$ e $n \in \mathbb{N}$ temos $L_{t(a)\langle n\rangle} \subseteq L_{t(a)}$ o mesmo termo t verifica o resultado. $\square$

Corolário 4.2.7. *Seja $\phi(x)$ uma fórmula Δ_0 com a única variável livre x. Se $\mathsf{KP}\omega \vdash \exists x\, \phi(x)$ então existe um ordinal α menor do que o ordinal de Bachmann-Howard tal que $L_\alpha \vDash \exists x\, \phi(x)$.*

Demonstração. Pelo teorema da correção existe um termo fechado a^Ω tal que $\exists x \in L_a\, \phi(x)$ logo $L_{|a|} \vDash \exists x\, \phi(x)$. Como a é fechado, $|a|$ é menor do que o ordinal de Bachmann-Howard. $\square$

Olhando a definição do Σ-ordinal de $\mathsf{KP}\omega$,

$$\|\mathsf{KP}\omega\|_\Sigma := \min\{\alpha \in \mathit{Ord} \,|\, (F \text{ é } \Sigma\text{-sentença} \wedge \mathsf{KP}\omega \vdash F) \to L_\alpha \vDash F\}$$

é imediato do corolário anterior que $\|\mathsf{KP}\omega\|_\Sigma$ é menor ou igual do que o ordinal de Bachmann-Howard.

Bibliografia

Jeremy Avigad and Solomon Feferman. Gödel's functional ("Dialectica") interpretation. In *Handbook of proof theory*, volume 137 of *Stud. Logic Found. Math.*, pages 337–405. North-Holland, Amsterdam, 1998.

Jeremy Avigad and Henry Towsner. Functional interpretation and inductive definitions. *J. Symbolic Logic*, 74(4):1100–1120, 2009.

Jon Barwise. *Admissible sets and structures.* Springer-Verlag, Berlin, 1975. An approach to definability theory, Perspectives in Mathematical Logic.

Keith J. Devlin. *Constructibility.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

Solomon Feferman and Wilfried Sieg. Inductive definitions and subsystems of analysis. In *Iterated inductive definitions and subsystems of analysis: recent proof-theoretical studies*, volume 897 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 16–77. Springer-Verlag, Berlin, 1981.

Fernando Ferreira. A new computation of the Σ-ordinal of $\mathsf{KP}\omega$. To appear in The Journal of Symbolic Logic.

Petr Hájek and Pavel Pudlák. *Metamathematics of first-order arithmetic.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Second printing.

Peter G. Hinman. *Recursion-theoretic hierarchies.* Springer-Verlag, Berlin, 1978. Perspectives in Mathematical Logic.

W. A. Howard. A system of abstract constructive ordinals. *J. Symbolic Logic*, 37: 355–374, 1972.

Richard Mansfield and Galen Weitkamp. *Recursive aspects of descriptive set theory*, volume 11 of *Oxford Logic Guides.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1985. With a chapter by Stephen Simpson.

A. R. D. Mathias. Weak systems of Gandy, Jensen and Devlin. In *Set theory*, Trends Math., pages 149–224. Birkhäuser, Basel, 2006.

Wolfram Pohlers. *Proof theory.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2009. The first step into impredicativity.

Gerald E. Sacks. *Higher recursion theory.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

Joseph R. Shoenfield. *Mathematical logic.* Association for Symbolic Logic, Urbana, IL, 2001. Reprint of the 1973 second printing.

Stephen G. Simpson. *Subsystems of second order arithmetic.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

Robert I. Soare. *Recursively enumerable sets and degrees.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1987. A study of computable functions and computably generated sets.

Nomenclatura

$(s)_n$ n-ésima projecção de s, 4

0_Ω constante de tipo Ω, 42

0_N constante de tipo N, 42

2^ω conjunto das sequências infinitas de 0s e 1s ou das funções características, 8

$\bar{f}(n)$ sequência dos primeiros n valores de f, 4

$\bigsqcup t$ termo de L_Ω, 47

χ_X função caracteristica de X, 5

Δ_0 classe das fórmulas limitadas, 25

$\Gamma \vdash F$ Γ demonstra F, 19

Γ operador, 1

Γ^A operador definido por A, 8

$\lambda x.t$ termo λ, 42

$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ código da sequência $a_1, \ldots, a_n$, 4

$\{e\}$ função codificada por e, 5

$\{e\}^f$ função recursiva no oráculo f, 5

$\mathcal{W}(P, e)$ fórmula aritmética positiva que define W, 13

ID_1^1 axioma de ID_1, 19

$\mathrm{ID}_1^1(W)$ axioma de $\mathsf{ID}_1(W)$, 19

ID_1^2 axioma de ID_1, 19

$\mathrm{ID}_1^2(W)$ axioma de $\mathsf{ID}_1(W)$, 19

ID_1 teoria das definições indutivas não iteradas, 19

$\mathsf{KP}\omega$ teoria de conjuntos $\mathsf{KP}\omega$, 26

PA teoria da aritmética de Peano, 18

Z teoria dos números, 17

Ω tipo base dos ordinais de árvores contrutíveis contáveis, 41

ω_1^{CK} ordinal de Church-Kleene, 38

ω_Ω termo de L_Ω, 44

ϕ^S fórmula da forma $\forall a \exists b\, \phi_S(a,b)$, 46

ϕ_S fórmula limitada mista, 46

$\Pi_{\rho,\sigma}$ combinador de tipo $\rho \to \sigma \to \rho$, 42

Σ, Π, Δ classes de fórmulas de $\mathsf{KP}\omega$, 27

$\Sigma_n^1, \Pi_n^1, \Delta_n^1$ hierarquia analítca, 6

$\Sigma_n^B, \Pi_n^B, \Delta_n^B$ hierarquia aritmética relativizada, 20

$\Sigma_{\rho,\sigma,\tau}$ combinador de tipo $(\rho \to \sigma \to \tau) \to (\rho \to \sigma) \to \rho \to \tau$, 42

$\sqsubseteq$ relação num tipo Ω puro, 47

$\underline{n}$ numeral que representa n, 17

$\vec{a}$ túplo, 26

$|\Gamma|$ norma do operador Γ, 3

$\|\mathsf{KP}\omega\|_\Sigma$ Σ-ordinal de $\mathsf{KP}\omega$, 38

$|n|_\Gamma$ norma-Γ de n, 3

$A \leqslant_T B$ A é recursivo (à Turing) em B, 20

A' salto de Turing de A, 20

a^ρ variável de L_Ω de tipo ρ, 42

$A^{(n)}$ n-ésima iteração do salto de Turing, 20

C_k^n símbolo para a função n-ária constante igual a k, 17

$Def(M)$ classe dos conjuntos definíveis em M, 37

$dom(f)$ domínio de f, 25

$e \restriction s$ código da subárvore de e cuja raiz é o nó s, 12

$f(x) \downarrow$ $f(x)$ converge, 5

F^a fórmula que se obtém de F limitando a a todos os quantificadores ilimitados, 27

f_X função codificada pelo conjunto X, 7

$Fun(a)$ a é uma função, 25

I_Γ conjunto definido indutivamente por Γ, 1,2

I_Γ^α nível α da definição indutiva de I_Γ, 2

$im(f)$ imagem de f, 25

L hierarquia construtível, 37

L_α nível α da hierarquia contrutível

L_Ω linguagem dos funcionais de Howard, 41

$lh(s)$ comprimento de s, 11

Lim classe dos ordinais limite, 25

$M \vDash \phi$ predicado de satisfazibilidade, 38

M_n conjunto das funções recursivas em $W^{(n)}$, 21

$max(a,b)+1$ termo de L_Ω, 44

N tipo base dos números naturais, 41

n_Ω termo de L_Ω, 44

Ord classe dos ordinais, 25

$otyp_\prec(s)$ order type de s em $\prec$, 10

P_k^n símbolo para a k-esima projecção n-ária, 17

$Par(a)$ a é um par ordenado, 25

R_ρ^Ω recursor de árvores de tipo $\Omega \to \rho \to ((N \to \Omega) \to (N \to \rho) \to \rho) \to \rho$, 42

R_ρ^N recursor numérico de tipo $N \to \rho \to (N \to \rho \to \rho) \to \rho$, 42

Rec símbolo para o operador de recursão, 17

$Rel(a)$ a é uma relação, 25

S constante sucessor de tipo $N \to N$, 42

S símbolo para a função sucessor, 17

$s * t$ concatenação das sequências s e t, 4

S_ρ domínio do tipo ρ, 43

Seq conjunto dos códigos de sequências, 4

Sub símbolo para o operador de composição generalizada, 17

Sup constante supremo de tipo $(N \to \Omega) \to \Omega$, 42

Sup^{-1} termo de tipo $\Omega \to (N \to \Omega)$, 44

$t\langle n \rangle$ extensão de Sup^{-1} aos tipos Ω puros, 45

$TC(x)$ fecho transitivo de x, 30

$Tran(a)$ a é um conjunto transitivo, 25

W conjunto dos códigos das árvores recursivas bem fundadas, 13

$W^{(n)}$ n-ésima iteração do salto de Turing de W, 21

(W.1) condição de fecho para W, 13

(W.2) princípio de indução para W, 13

s-Π^1_1 predicados Π^1_1 estritos, 15

Índice

Δ-Separação, 28
Σ-Coleção, 28
Σ-Recursão, 32
Σ-Reflexão, 28
Σ-Substituição, 29
Σ-Substituição Forte, 29
Σ-ordinal de $\mathsf{KP}\omega$, 38
$\in$-Indução, 30
árvore, 11
  bem fundada, 11
  binária completa, 15
  recursiva, 12
  recursiva bem fundada, 13

altura de árvore, 43
axioma
  da Δ_0-colecção, 26
  da Δ_0-separação, 26
  da Extensionalidade, 26
  da Fundação, 26
  da União, 26
  do Infinito, 26
  do Par, 26

código
  de árvore, 12
  de sequência, 4
conjunto definido indutivamente, 1, 2

definibilidade, 37

fórmula
  Δ, 27
  Δ_0, 25
  Π, 27
  Σ, 27
  aritmética positiva, 8
  limitada mista, 45
fecho transitivo, 30
forma normal, 5, 7
  de predicados Π^1_1, 8
função recursiva num oráculo, 4
funcionais de Howard, 41

hierarquia construtível, 37

indução no fecho transitivo, 31
interpretação funcional, 46

Lema de König, 15
linguagem
  $L(\in)$, 25
  $\mathcal{L}$, 17
  $\mathcal{L}(P)$, 18
  $\mathcal{L}(\mathsf{ID})$, 18
  $\mathcal{L}(\mathsf{ID}^W)$, 18
  de segunda ordem, 4

norma de um operador, 3
norma-Γ, 3
normalização de prefixos, 5

operador
  aritmético, 9
  definível, 8
  monótono, 1
ordem parcial de Seq, 11
order type, 10
ordinais construtíveis de Kleene, 9
ordinal
  de Bachmann-Howard, 44

de Church-Kleene, 38

parte acessível de uma relação, 10
persistência, 27
predicado
Δ^1_n, 7
Π^1_n, 6
Π^1_1 estrito, 15
Σ^1_n, 6
analítico, 5
aritmético, 5
que determina árvore, 12
recursivo, 5, 7
projecção, 4
propriedade da monotonia, 47

quantificador
de predicado, 4
funcional, 4
numérico, 4

ramo, 11
recursivamente enumerável, 20
recursividade relativa, 20
relação binária bem fundada, 10

símbolo
funcional Σ, 29
relacional Δ, 29
salto de Turing, 20

teorema
da correção, 48
de Kleene, 13
de Post relativizado, 20
de Spector, 9
teoria
ID_1, 19
$\mathsf{ID}_1(W)$, 19
Z, 17
de Kripke-Platek com infinito, 26
tipo Ω puro, 41