UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

LISBOA

UNIVERSIDADE
DE LISBOA

A aprendizagem da Matemática com recurso à História: Uma proposta pedagógica para o 5.º ano

Hugo Emanuel Mendonça Pedroso

Relatório

Mestrado em Educação

Área de especialização em Didática da Matemática

2013

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A aprendizagem da Matemática com recurso à História: Uma proposta pedagógica para o 5.º ano

Hugo Emanuel Mendonça Pedroso

Relatório orientado pela Profª Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques

Relatório apresentado para obtenção do grau de Mestre em Educação

Área de especialização em Didática da Matemática

2013

Resumo

Este estudo procura compreender em que medida o desenvolvimento e a implementação de uma proposta pedagógica suportada por tarefas baseadas na História da Matemática conduzem a uma aprendizagem significativa dos racionais não negativos (frações), do perímetro do círculo (e respetiva compreensão do significado do π) e da área do círculo em alunos do 5.º ano. Especificamente, o estudo visa analisar as estratégias utilizadas pelos alunos, as dificuldades que evidenciam e os conhecimentos anteriores que mobilizam na resolução dessas tarefas, bem como as aprendizagens por eles realizadas. Além disso, pretende promover uma reflexão sobre a própria prática, uma vez que a proposta pedagógica se desenvolve no quadro da prática letiva do investigador, numa escola pública pertencente ao concelho de Odivelas, zona que se situa na periferia norte de Lisboa. O estudo é fundamentado nas orientações curriculares e por uma revisão de literatura sobre História da Matemática e o seu papel no ensino e aprendizagem desta disciplina. Na recolha de dados utilizei a observação participante, com registo de notas de campo, a gravação áudio e vídeo das aulas onde se aplicaram as tarefas e a recolha documental dos trabalhos elaborados pelos alunos.

Os resultados do estudo evidenciam que os alunos utilizam estratégias diversificadas na exploração das tarefas, estabelecendo conexões com vários tópicos matemáticos. Identificam-se, porém, algumas dificuldades matemáticas que se salientaram, como é o caso da conceção da unidade relativa às frações, e outras que se vão dissipando com o decorrer da proposta pedagógica, nomeadamente a compreensão da natureza de pi que vai sendo enriquecida pela contextualização histórica. Os conhecimentos mobilizados são relativos a vários tópicos matemáticos estudados anteriormente à implementação desta proposta pedagógica e aos tópicos que foram sendo construídos ao longo da mesma, destacando-se a contribuição da construção do conceito de fração para o estudo do número pi e a utilização de alguns conhecimentos históricos que permitem aos alunos justificar as suas ideias e conjeturas sobre a irracionalidade deste número. Os resultados parecem evidenciar que a História da Matemática propicia aprendizagens significativas para os alunos.

Palavras – Chave: História da Matemática, frações, pi, área do círculo, dificuldades dos alunos.

Abstract

This study aims to understand how the development and the implementation of a pedagogical proposal, supported by tasks based on the History of Mathematics, contributes to 5th grade students' significant learning of non-negative rational numbers (fractions), circus perimeter (and the associated understanding of the π value) and its area. Specifically, this study seeks to analyze the strategies used by students, the difficulties they faced and the previous knowledge they mobilized when solving the proposed tasks, as well as their learning. Moreover, it intends to promote a reflection about my own practice as this pedagogical proposal develops itself in a class of a public school at Odivelas, surroundings of Lisbon, where I am also a teacher. The study stands on the curricular orientations and a literature review on History of Mathematics and its role in the teaching and learning process. Data collection methods include participant observation and the respective field notes, audio and video recordings of the classes where the tasks were applied as well as the students' written reports.

The results show that the students use diverse strategies in the exploration of the tasks, establishing connections with several mathematical topics. Some mathematical difficulties were identified as, for instance, the connection between fractions and their unities, while others were decreasing with the continuous work on this pedagogical proposal, namely the comprehension of pi which was enhanced by its historical meaning. The knowledge mobilized was both related to several previously studied mathematical topics and to new others built during the implementation of this proposal, with emphasis on the development of fractions for the study of pi and the use of some historical knowledge that allow students to justify their own ideas on the irrationality of this number. The results of this study also seem to confirm that the use of tasks based on the History of Mathematics has several potentialities in students' learning.

Key Words: History of Mathematics, fractions, pi, circus area, student's difficulties.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques, pelo apoio na construção, desenvolvimento, implementação e reflexão deste trabalho, bem como pelo incentivo e incessante disponibilidade.

Em especial aos meus pais por todo o apoio que sempre souberam dar-me.

A todos os colegas da minha escola que, de uma forma ou de outra, me incentivaram, em especial ao Paulo Ferreira.

A todos os meus amigos que, conhecendo a minha admiração pela História da Matemática, nunca deixaram de me estimular ou apoiar neste trajeto.

Às minhas professoras Fátima Paixão e Fátima Jorge que souberam revelar-me a utilidade da História das Ciências no processo ensino-aprendizagem.

A todos os alunos que fui tendo ao longo do meu crescimento profissional que, com as suas dúvidas e resoluções, me mostraram, inconscientemente, o caminho rumo a este trabalho. Agradeço, em especial, à turma onde fiz este estudo, pela sua participação e motivação para o desenvolvimento deste trabalho.

Por último, agradeço à História da Matemática.

Índice

Índice de Anexos

Índice de Quadros

Índice de Figuras

Capítulo 1

Introdução

1.1. Motivação e pertinência do estudo

A História da Ciências, mais concretamente a História da Matemática, surgiu no meu trajeto académico em três etapas bem distintas: primeiramente de forma inconsciente, depois de forma semi-consciente e, finalmente, de forma consciente e formal, enquanto temática que intencionalmente decidi aprofundar.

A primeira etapa apelido de inconsciente na medida em que só a entendi muito depois de ter ocorrido, quando as minhas lentes intelectuais se focaram no assunto em questão. Esta etapa iniciou-se enquanto estudante de Ciências da Natureza do 5.º ano de escolaridade e prolongou-se pelas sucessivas disciplinas desta área – Ciências Naturais e Biologia (3.º ciclo); Ciências da Terra da Vida e Biologia (secundário). Entre o 5.º e o 11.º ano desenvolvi, pois, alguma aversão a estas disciplinas, sentindo que tinha de memorizar muitas coisas sem realmente as perceber e sem sentir algum tipo de motivação para o seu estudo. Quando iniciei o 12.º ano, pensava que teria pela frente mais um ano impregnado dessa sensação mas fui surpreendido. Numa boa parte do primeiro período, a Biologia foi lecionada com recurso à História das Ciências e dei por mim a estudar, de forma motivada, o evolucionismo, o catastrofismo, a importância da religião e da sociedade na reprovação das ideias de Darwin, o sucesso das ideias de Lamarck, entre outros. E o mais curioso foi o facto de no 12.º ano poder, finalmente, responder a uma questão colocada à minha professora do 7.º ano de História sobre a evolução da girafa – acerca do desenvolvimento do comprimento do seu pescoço - e que tinha ficado pendente mas não esquecida. Nessa altura, a resposta foi "neste momento não te vou responder porque talvez não percebas a minha explicação". Claro que quando estudei o lamarckismo por justaposição ao darwinismo entendi o porquê daquela resposta. Assim, a importância que a História das Ciências teve na minha vida foi tão intensa que desde logo decidi que deveria ser professor de Ciências, como de facto veio a suceder, pois atualmente leciono Matemática e também Ciências da Natureza. Nesta primeira etapa pude, pois, enquanto aluno à procura do seu próprio rumo, sentir a importância da História como ferramenta pedagógica.

A segunda etapa apelido de semi-consciente porque foi quando comecei a ter interesse pela História da Matemática sem me aperceber disso. Enquanto analisava as respostas de alunos meus a problemas de proporcionalidade direta, deparei-me com algumas resoluções que tinham sido desenvolvidas de forma semelhante à regra do dobro dos egípcios e, nesse momento, reportava-me a uma disciplina que tivera na Escola Superior de Educação de Castelo Branco que estimulava os futuros professores a resolver problemas antigos, nomeadamente problemas do papiro de Rhind, da mesma forma que os egípcios o faziam. Assim, o meu *background* de História da Matemática começava, pois, a fazer sentido e, sobretudo, permitia-me refletir acerca das resoluções que os alunos apresentavam. E, nesse momento, pensei até que ponto é que os alunos passam por etapas cognitivas de resolução de problemas semelhantes à dos nossos antepassados e de que forma é que a História da Matemática poderia estimular o gosto pela disciplina e ser usada como ferramenta pedagógica na sala de aula. A partir desse instante surgiu, pois, a terceira etapa, a qual denomino de consciente. Tendo em conta a minha experiência profissional e as respostas que os alunos iam dando na resolução de problemas - que me faziam reportar ao que estudara sobre História da Matemática egípcia - comecei a pesquisar, de forma orientada, o modo como os vários conceitos matemáticos se foram desenvolvendo ao longo da sua história para que pudesse utilizá-los na sala de aula. Comecei, assim, a conjeturar acerca da possibilidade e da vantagem de poder desenvolver tarefas com os alunos em que eles poderiam fazer trabalhos semelhantes aos dos nossos antepassados.

Deste modo, iniciei a conceção e a implementação das minhas próprias tarefas com recurso à História da Matemática e comecei a sentir que tais tarefas motivavam imenso os alunos, ao ponto de passarem a ver a disciplina de Matemática como uma aula interessante e entre as suas favoritas, fazendo com que quisessem saber mais sobre os assuntos que eram retratados. Constatei, igualmente, que muitos dos encarregados de educação me diziam que os seus educandos falavam imenso sobre aqueles temas em casa. Por outro lado, os alunos apresentavam uma construção do seu próprio conhecimento mais argumentada e começavam a surgir muitas questões que permitiam sempre estabelecer conexões entre vários conteúdos e, sobretudo, permitiam conceber as aulas tendo por base essas mesmas questões, pelo que os alunos sentiam que contribuíam para o processo da construção do conhecimento e não se sentiam, pois, meros participantes nas aulas. Comecei, então, a partilhar essas ideias e estratégias com alguns colegas de escola e sentia que, de alguma forma, tal partilha era útil.

Quando foi elaborado o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) constatei que este documento continha algumas indicações sobre o uso da História da Matemática ainda que pouco explicitadas. Esse documento refere que se devem desenvolver no aluno atitudes positivas face ao estudo da Matemática e, para tal, os professores deverão incluir nas suas aulas aspetos da sua história, uma vez que "A História da Matemática pode evidenciar o desenvolvimento de determinadas ideias matemáticas, apresentando-a como uma ciência viva e em evolução" (ME, 2007, pág. 6). Alude-se, ainda, para a necessidade de se salientar a contribuição dos vários povos e civilizações para o crescimento da Matemática enquanto ciência em constante evolução. Como recursos, são apresentados também alguns sítios da internet que, como se verá mais adiante, aproveitei para utilizar na proposta pedagógica que serve de base a este estudo.

Desta forma, comecei a sentir que o meu trajeto fazia todo o sentido e considero ter chegado o momento de aprofundar o estudo da minha prática letiva, em particular no que diz respeito à seleção e elaboração de tarefas baseadas na História da Matemática que proporcionem aos alunos experiências de aprendizagem significativas, de forma mais consistente e fundamentada na investigação. A preocupação de investir no conhecimento pedagógico do ensino da Matemática deverá ser transversal a todo o professor de Matemática, independentemente do grau de ensino a que se reporta, pois à medida que vamos trabalhando os diversos conceitos matemáticos conseguimos identificar alguns padrões de dificuldade que se vão repetindo ano após ano, o que nos leva a indagar essas dificuldades, não só na sua génese mas, sobretudo, nas estratégias que permitam ultrapassá-las. O trabalho de investigação em questões que digam respeito à própria prática letiva é essencial para o desenvolvimento profissional dos professores (Ponte, 1998).

Do ponto de vista da investigação, existem alguns estudos que mostram as potencialidades da integração da História da Matemática na sala de aula (Jorge, 2008; Kool, 1993; Préve, 2012; Winicki, 1993) bem como um significativo número de autores que também apelam à sua utilização (Batarce, 2003; Estrada, 1993; Rogers, 1993; Stander, 1989; Vázquez, 2000; Veloso, 1993). No entanto, os resultados da investigação ainda são insuficientes para que possamos considerar a implementação eficiente de propostas pedagógicas integrando a História da Matemática, pelo que pretendo, assim, contribuir para o estudo da sua utilização no processo ensino-aprendizagem.

1.2. Objetivo e questões do estudo

Assumindo que as tarefas baseadas na História da Matemática constituem uma abordagem educativa com características particulares que tem implicações no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, é desejável aprofundar a análise da atividade dos alunos e compreender, de forma estruturada e com mais detalhe, o papel destas tarefas na sua aprendizagem.

Com a realização deste relatório pretendo compreender em que medida o desenvolvimento e a implementação de uma proposta pedagógica, suportada por tarefas com recurso à História da Matemática, conduz a uma aprendizagem significativa dos racionais não negativos (frações), do perímetro do círculo (e respetiva compreensão do significado do π) e da área do círculo em alunos do 5.º ano de escolaridade. Mais concretamente, este trabalho procura responder às seguintes questões:

i) Quais as estratégias que os alunos utilizam na realização das tarefas baseadas na História da Matemática?

ii) Quais as dificuldades demonstradas pelos alunos na realização das tarefas baseadas na História da Matemática?

iii) Quais os conhecimentos anteriores que os alunos mobilizam na realização das tarefas baseadas na História da Matemática?

iv) Quais as aprendizagens realizadas pelos alunos ao longo da proposta pedagógica?

1.3. Organização do estudo

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. No primeiro capítulo apresento a motivação e pertinência do estudo, defino o seu objetivo e as questões de investigação e explicito a organização do estudo. O segundo capítulo corresponde à fundamentação teórica do estudo, onde faço um enquadramento curricular e uma revisão de literatura sobre a História da Matemática no ensino e aprendizagem da Matemática. No capítulo três, descrevo a proposta pedagógica que sustenta o estudo no que respeita: à caraterização da escola/turma; às orientações metodológicas e aspetos gerais; à descrição das tarefas e à avaliação das aprendizagens. Este capítulo inclui, ainda, uma referência ao método de recolha de dados utilizado e uma breve descrição das aulas lecionadas. No capítulo quatro apresento a análise e interpretação dos dados recolhidos. No quinto e último capítulo faço uma síntese do estudo e termino com uma reflexão pessoal sobre o trabalho desenvolvido.

Capítulo 2

Enquadramento e Contexto

2.1. Enquadramento Curricular

Um currículo aglomera um conjunto de orientações acerca do ensino de um determinado ciclo de estudos ou de uma determinada unidade curricular e, de um modo geral, contempla objetivos, conteúdos, metodologias, recursos e avaliação. Estes aspetos nem sempre estão explícitos nos documentos curriculares podendo estar presentes de forma subentendida (Ponte, Matos & Abrantes, 1998). Apesar da gestão curricular praticada pelo professor envolver uma construção e reconstrução do currículo, tomando em consideração os alunos e as condições e trabalho à disposição de alunos e professor (Ponte, 2005) é importante ter-se em conta que o currículo de Matemática determina os conhecimentos que os alunos terão oportunidade de aprender e aquilo que aprendem nesta disciplina (NCTM, 2007). No entanto, ao fazermos uma análise das orientações curriculares, é importante termos em conta que as mesmas são o espelho dos valores e conceções que num dado momento são mais emergentes na sociedade resultando, pois, da harmonia entre interesses muitos distintos, dinamizados por variados intervenientes e parceiros sociais, que estão muito além dos professores: políticos, empresários, pais, cientistas, educadores, entre outros (Ponte, Matos & Abrantes, 1998).

A Proposta Pedagógica que serve de base a este estudo foi concebida tendo em conta as orientações curriculares para o ensino e aprendizagem da Matemática em vigência à data da sua implementação, quer as nacionais (ME, 2007), quer as internacionais (NCTM, 2007) e abrange três tópicos programáticos: Números racionais não negativos (particularmente as frações), Perímetros (particularmente os aspetos relacionados com o perímetro da circunferência e o número π) e Áreas (particularmente a área do círculo).

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) refere que o ensino da matemática deve ser guiado por duas finalidades fundamentais: "a) Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados (…); e b) Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência" (p. 3). As mesmas são concretizadas em nove objetivos gerais e em quatro grandes temas e capacidades transversais.

O NCTM (2007) está dividido em quatro grandes partes: princípios para a matemática escolar; descrição geral das normas para a educação matemática desde o pré-escolar até ao final do ensino secundário; normas subdivididas por quatro níveis de aprendizagem; discussão dos caminhos considerados imprescindíveis para o desenvolvimento da visão contida na supracitada publicação.

No que respeita às frações, inseridas no tema dos *Números e Operações* (ME, 2007; NCTM, 2007), começam a ser trabalhadas "nos dois primeiros anos com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais" (ME, 2007, p. 15). No 5.º ano de escolaridade é importante que os alunos continuem a desenvolver o sentido de número estudando os diversos significados das frações, pois compreender a estrutura numérica e a relação entre números permitirá aos alunos um melhor desempenho e torna-se mais acessível a compreensão da existência de outras formas de obterem equivalências entre representações distintas (NCTM, 2007). Os alunos deverão identificar e dar exemplos de frações equivalentes; utilizar números na forma de fração, na forma de decimais e também numerais mistos; utilizar percentagens com recurso ao respetivo símbolo e estabelecer a equivalência com as frações decimais (ME, 2007). O NCTM (2007) reforça, ainda, o facto de os alunos terem que "compreender os números, formas de representação dos números, relações entre números e sistemas numéricos" (p. 173) sendo muito importante recorrer à utilização de retas numéricas para desenvolver a compreensão das frações. Para que se possa estabelecer uma relação de equivalência entre os decimais e as frações, tendo em conta que os alunos "devem investigar a relação entre frações e decimais" (NCTM, 2007, p. 175), o recurso à calculadora afigura-se como um bom instrumento de trabalho (NCTM, 2007). A análise e discussão de diferentes tipos de problemas que envolvam a multiplicação e a divisão também devem ser tidos em conta pois "ao considerarem a relação inversa entre a multiplicação e a divisão, os alunos poderão ampliar a sua compreensão destas duas operações" (NCTM, 2007, p.176). Assim, "podem ainda aprender que algumas frações podem ser expressas como dízimas finitas mas outras não" (NCTM, 2007, p. 175). A exploração das percentagens deve surgir associado às frações e aos decimais pois o estudo simultâneo das três representações citadas permite que os alunos aprendam a alternar entre representações equivalentes (NCTM, 2007).

No que concerne ao número π, o mesmo surge no 2.º ciclo enquadrado no grande tema matemático *Geometria* e insere-se no tópico *Perímetros* (polígonos regulares e irregulares; círculo) cujos objetivos específicos são "Determinar o perímetro de polígonos regulares e irregulares; Determinar um valor aproximado de π; Resolver problemas envolvendo perímetros de polígonos e do círculo" (ME, 2007, p. 38). A Geometria tem como ideia fulcral o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos e espera-se que os mesmos relacionem propriedades geométricas, incidindo-se na visualização e na compreensão destas propriedades, sendo que "a Medida tem um peso importante no 1.º ciclo, que decresce nos ciclos seguintes, mas sendo um tema bastante rico do ponto de vista das conexões entre temas matemáticos e com situações não matemáticas" (ME, 2007, p. 7; NCTM, 2007) deve ser explorada na sala de aula ao longo dos vários ciclos. Deve-se, pois, desenvolver a compreensão de grandezas geométricas e respetivos processos de medida, dando-se a oportunidade aos alunos de utilizarem estes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas em contextos diversificados (ME, 2007). As grandezas e os respetivos processos de medição devem continuar a receber atenção no 2º ciclo, devendo ser associados à resolução de problemas do quotidiano e, deste modo, o perímetro passa a ser trabalho especificamente com o círculo e com polígonos irregulares (ME, 2007).

No que respeita às indicações metodológicas relativas ao 2º ciclo, as experiências de medição (neste caso do perímetro) deverão ser diversificadas apelando-se, pois, a unidades de medida diversas (ME, 2007). Do mesmo modo, é importante incentivar os alunos a fazer estimativas de medidas para que os mesmos desenvolvam um sentido crítico mais apurado e para que estes possam inferir acerca da razoabilidade dos resultados que vão alcançando. Ainda assim, não deve ser descorada a utilização de instrumentos de medida e de desenho – régua, esquadro, compasso – e materiais manipuláveis, os quais permitirão uma melhor exploração, análise e resolução de problemas de natureza geométrica e na elaboração de desenhos e construções com o rigor necessário. Para além destes, também será importante o recurso a programas de Geometria Dinâmica uma vez que propiciam a compreensão de conceitos e relações geométricas (ME, 2007) e "o raciocínio geométrico e a visualização espacial [que] são capacidades a aprofundar neste ciclo que, conjuntamente com o pensamento numérico, permitem desenvolver novas estratégias na resolução de problemas" (ME, 2007, p. 36).

A Geometria fornece, em qualquer ciclo, o contexto ideal para desenvolver as capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos e deve-se usar, associada à visualização, a modelação geométrica e o raciocínio espacial para se resolverem problemas (NCTM, 2007). Tendo em conta que "a tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática" (NCTM, 2007, p. 26) o recurso à mesma permite que os alunos experimentem vários exemplos, possibilita a formulação e exploração de conjeturas, embora se tenha que ter em conta que tal não é demonstrar mas apenas o levantamento de hipóteses. O mesmo documento também afirma que enquanto os alunos medem, traçam, constroem, desenham, entre outros, a sua capacidade de visualização de relações geométricas progride e a sua capacidade para raciocinar, formular, testar, explicar conjeturas também irá evoluir, pelo que o estudo da Geometria exige a relação íntima entre pensamento e execução. Durante a exploração de figuras, aos alunos é permitido o desenvolvimento da compreensão das noções de congruência e semelhança (NCTM, 2007), aspeto este que será imprescindível para a compreensão do número π enquanto um valor constante que resulta da razão entre o perímetro e o diâmetro de qualquer circunferência.

Em relação ao perímetro da circunferência para o 2º ciclo (ME, 2007), sugere-se a utilização de situações experimentais para que os alunos encontrem a fórmula do perímetro do mesmo. Não devemos deixar de ter em consideração que durante a sua experiência escolar "os alunos deverão tornar-se hábeis na utilização de ferramentas, técnicas e fórmulas para determinar medidas, numa diversidade de situações" (NCTM, 2007, p. 48) o que significa que nem sempre terá que se recorrer à medição direta (NCTM, 2007).

No que respeita ao conceito de área, o mesmo começa a ser desenvolvido no 1º ciclo surgindo incluído no estudo da Geometria e Medida (ME, 2007) sendo que aos alunos deve ser dada a oportunidade de experienciarem atividades distintas, nomeadamente com “a cobertura de objetos usando diferentes unidades de medida” (ME, 2007, p. 21). Os alunos também deverão fazer estimativas de áreas por enquadramento e utilizar as respetivas fórmulas de cálculo para o quadrado e para o retângulo utilizando as unidades de medida convencionais do Sistema Internacional (ME, 2007) uma vez que “é a partir da exploração de situações concretas que surgem as fórmulas e os procedimentos para determinar medidas.” (ME, 2007, p.21). No 2.º ciclo, o estudo da área vai ser aprofundado e também surge incluído na Geometria, sendo que agora se alarga este conceito ao “estudo das fórmulas das áreas do triângulo e do círculo” (ME, 2007, p. 36). Assim, como objetivo específico sugere-se a determinação de “valores aproximados da área de um círculo desenhado em papel quadriculado” (ME, 2007, p.39) propondo-se, simultaneamente, o recurso a situações experimentais para determinar a fórmula da área do mesmo (ME, 2007) e ainda “resolver problemas que envolvam áreas do triângulo e do círculo” (ME, 2007, p. 39). No NCTM (2007) podemos encontrar a noção de área incluída na Geometria e na Medida, sendo enfatizada a necessidade de se “desenvolver estratégias de estimação de perímetros, áreas e volumes de formas irregulares” (NCTM, 2007, p.198) uma vez que a medida permite que se estabeleçam conexões entre ideias de diferentes tópicos da matemática e, assim, os alunos devem “desenvolver e utilizar fórmulas para a medição de certos atributos, como a área” (NCTM, 2007, p.199). A utilização da fórmula da área do círculo ganha especial importância tendo em conta que os alunos devem começar a ter a “noção de que as medidas, no mundo real, são valores aproximados” (NCTM, 2007, p. 200).

No que respeita às indicações metodológicas, a abordagem deste conceito deve ser integrada em tarefas exploratórias, dado que se privilegia a utilização de recursos que promovam a experimentação e manipulação dos mesmos (ME, 2007). O NCTM (2007) realça o ato de medir um objeto como a atribuição de um determinado valor numérico a um atributo que seja mensurável podendo-se, assim, quantificar uma propriedade desse mesmo objeto. Ao longo do seu percurso escolar espera-se, pois, que esta capacidade possa ser desenvolvida, dando aos alunos a possibilidade de experimentarem processos de medição diversificados (NCTM, 2007).

No que respeita à integração da História da Matemática no ensino e aprendizagem, podemos constatar que o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) dá algum relevo à sua utilização. De acordo com Gil (2012), durante a década de 90, os documentos oficiais respeitantes ao programa de matemática do ensino básico (ME, 1991a, ME, 1991b) apontavam para a integração da História da Matemática no processo ensino-aprendizagem salientando, nomeadamente, que os alunos deveriam sentir interesse por factos da História da Matemática relacionados com as suas aprendizagens, bem como a relação entre as etapas da História desta disciplina com a evolução da própria humanidade.

Atualmente, o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) também aponta nessa direção.

Como objetivo geral, a História da Matemática surge associada ao ponto 9 que está relacionado com o apreço da Matemática pois o aluno deve "mostrar conhecimento da História da Matemática e ter apreço pelo seu contributo para a cultura e para o desenvolvimento da sociedade contemporânea" (ME, 2007, p. 6). O mesmo documento afirma que a História da Matemática permite que os alunos percecionem a Matemática como uma ciência viva em constante evolução, pois com o recurso à mesma é possível evidenciar-se o crescimento de muitas ideias matemáticas. Numa alusão ao Currículo Nacional, o programa de matemática do ensino básico (ME, 2007) não deixa de realçar a grande importância do contacto dos alunos com aspetos da História da Matemática, nomeadamente com o contributo de vários povos e civilizações que contribuíram para o crescimento da Matemática destacando-se "os grandes problemas científicos e técnicos de cada época, o seu contributo para o progresso da sociedade, e a sua própria evolução em termos de notações, representações e conceitos, proporcionando uma perspetiva dinâmica sobre a Matemática" (ME, 2007, p. 10). Sugere-se, ainda, a organização de pequenos grupos de trabalho que permitam aos alunos fazer um "estudo sobre História da Matemática" (ME, 2007, p. 10) e considera-se que "dado que a Geometria e a Medida estão directamente relacionadas com as atividades matemáticas mais antigas em que o ser humano se envolveu, o seu estudo possibilita a exploração de aspetos históricos" (ME, 2007, p. 36), possibilitando aos alunos a compreensão de que a Matemática se afigurou como uma atividade prática para resolver problemas em diversas civilizações.

2.2. Dificuldades dos alunos na aprendizagem de tópicos matemáticos

A literatura é rica em estudos focados nas dificuldades dos alunos na aprendizagem da Matemática. Neste ponto apresento uma breve revisão de literatura sobre as dificuldades que os alunos evidenciam na aprendizagem de cada um dos seguintes tópicos: racionais não negativos (frações), perímetro do círculo (e respetiva compreensão do significado do π) e área do círculo.

2.2.1. Dificuldades na aprendizagem das frações

Os alunos demonstram dificuldades na aprendizagem do conceito de fração e essas dificuldades estão, em grande parte, relacionadas com a complexidade do próprio conceito de fração. É importante começar por referir que os números racionais afiguram-se como o primeiro conjunto numérico que os alunos aprendem e que não tem por base o processo de contagem tal como se verifica nas aprendizagens anteriores (Godino et al, 2004). Empson, Levi e Carpenter (2011) afirmam que os alunos usam naturalmente i) as propriedades das operações e da igualdade dos números naturais, que formam os fundamentos da Álgebra, quando são confrontados perante situações problemáticas que envolvem operações com frações bem como ii) as estratégias na resolução de problemas com frações as quais são semelhantes às estratégias utilizadas em situações problemáticas que envolvem os números inteiros. Segundo Monteiro e Pinto (2005) existem estudos que evidenciam outros fatores que justificam dificuldades na aprendizagem das frações: i) o trabalho prematuro e descontextualizado dos símbolos e algoritmos; ii) a conceção da unidade; iii) o facto de na representação da fração se utilizarem dois números, o que poderá fazer com que os alunos não olhem para a fração como um só número mas sim como dois números distintos; iv) o facto de uma fração ter diversos significados. Esta última dificuldade tem merecido grande atenção por parte de vários investigadores. Magalhães (2006) fez uma análise da forma como os números racionais foram sendo apresentados nos manuais escolares do secundário do Brasil desde o início do século XX até a um período mais recente verificando, pois, que os mesmos iam recebendo tratamentos distintos o que pode evidenciar dificuldades acrescidas, não só para os alunos mas também para os professores. Godino et al. (2004) destacam a importância da utilização da reta numérica para o desenvolvimento do conceito de número racional, sendo que a medida pode assumir uma excelente oportunidade para trabalhar as frações (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999; Jorge, 2008; NCTM, 2007). Behr, Lesh, Post e Silver (1983) também apontam os múltiplos significados de fração como um fator a merecer destaque e, nesse sentido, Charalambous et al. (2007) afirmam que o trabalho de Kieren, em 1976, foi o primeiro a discutir o conceito de fração e propôs a conceptualização de frações como um conjunto de quatro significados inter-relacionados - razão, operador, quociente e medida - sendo que o entendimento de fração reivindicava o conhecimento dos diferentes significados e sua confluência. Mais tarde, Behr et al. (1983) alargaram as ideias de Kieren e identificaram a relação parte-todo como um quinto significado de fração. Por seu lado, Duval (2002) considera extremamente importante a capacidade de identificar um mesmo conceito em representações diferentes, bem como a capacidade para alternar entre as várias representações, permitindo aos alunos desenvolver uma compreensão mais profunda do conceito em causa.

2.2.2. Dificuldades na aprendizagem dos irracionais: Número π

O estudo dos números irracionais, mais particularmente do número π, suscita dificuldades de aprendizagem muito próprias que se podem analisar sob vários pontos de vista: i) organização curricular; ii) concretização letiva; iii) natureza do π associada à sua história.

O NCTM (2007) afirma que “Muitos alunos têm dificuldades na compreensão do perímetro” (pág. 51), o que se afigura como uma dificuldade prévia à compreensão do significado do número em causa, tendo em conta que o primeiro contato que os alunos têm com este irracional está intimamente ligada ao perímetro da circunferência.

Nakamura (2008) refere que nos documentos curriculares oficiais do Brasil, os números irracionais são estudados de forma linear em que a acumulação de sucessivos conjuntos numéricos é evidente, ou seja, primeiro os naturais, depois os inteiros, seguidamente os racionais e por fim os irracionais, o que, na opinião desta investigadora, não promove o processo ensino-aprendizagem, pelo que se sugere um outro tipo organização que poderia ser mais rentabilizado por alunos e professores. Santos (2004) também partilha da ideia de que fazer um tratamento formal dos irracionais torna a sua compreensão mais crítica e abstrata. Por outro lado, Silva e Penteado (2009) enfatizam que a noção de número real está presente na maior parte dos conteúdos matemáticos e apontam estudos a nível internacional que evidenciam que os alunos apresentam muitas dificuldades decorrentes da compreensão das propriedades deste conjunto. Estes investigadores citam nomeadamente os trabalhos desenvolvidos por Robinet (1993) e Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), os quais destacam as dificuldades que os alunos evidenciam sobretudo devido à falta de compreensão da caraterização dos números racionais e irracionais.

Do ponto de vista da concretização letiva, também existem alguns pontos a destacar e Santos (2004) realça os seguintes:

i) Inexistência de modelos que possam dar exemplos de irracionais. O NCTM (2007) sugere que "a representação dos números, através de diversos materiais concretos, deverá ser uma importante componente do ensino da matemática dos primeiros anos" (pág. 35), situação que no caso dos irracionais se torna mais complexa;

ii) Construção da reta numérica. O estudo dos racionais parece excluir a existência dos irracionais, pelo que a ideia de número irracional não poderá ser construída de forma intuitiva;

iii) Uma verificação puramente empírica ou uma tentativa de medição desta grandeza não demonstrará, por si só, que se está perante um número irracional.

Silva (2006) afirma que o estudo dos irracionais de forma não integrada e sem contexto construtivista em pequenos grupos de trabalho também não abona na compreensão da natureza destes números e Santos (2004) vai um pouco mais longe defendendo que apesar dos irracionais ocuparem o seu próprio espaço curricular, o ensino desenvolvido em seu torno pouco tem contribuído para que os alunos desenvolvam um bom conceito sobre os mesmos.

Por outro lado, não se pode descorar o facto de nalgumas situações, os irracionais não terem sido estudados em anos anteriores (Silva, 2006), pois muitas vezes a gestão programática relega estes números para último plano.

Uma outra questão prende-se com a definição do número π e com o trabalho desenvolvido para o estudo do mesmo. Bortoletto (2008) destaca o facto de a maior parte dos manuais escolares e professores definirem este número como sendo a razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro sem explicitarem que, durante muitos séculos, diversos matemáticos tentaram chegar ao valor exato dessa razão sem, no entanto, o conseguirem. Ora, tendo em conta que apenas em 1766 D´Alembert conseguiu demonstrar que π era um número irracional e que "em geral, esse esclarecimento não é enfatizado, nem pelos professores nem pelos autores dos livros didáticos” (Bortoletto, 2008, p. 119), a investigadora citada refere que uma tentativa experimental para obter o valor de π sem suporte histórico poderá, assim, confundir os alunos no que à definição de número irracional se concerne. Nesse sentido, esta investigadora defende que a utilização da História da Matemática poderá levar o aluno a compreender o trabalho realizado por muitos matemáticos em diferentes contextos e épocas, favorecendo a compreensão do significado de irracional. Ainda assim, não podemos descorar a conceção dos próprios professores em relação a este número e, por isso, Amaro (1993) evidencia um estudo que diz respeito à dimensão que os mesmos dão ao conceito do número π e às suas aplicações. O estudo foi desenvolvido com base num questionário aplicado a 29 professores numa formação sobre o referido número e as suas conclusões referem que as únicas associações do significado de π efetuadas com total sucesso surgiram num contexto de perímetro do círculo ou do cálculo de áreas e volumes. Quanto ao produto infinito de números racionais, funções trigonométricas e séries infinitas, a área da curva de Gauss, entre outras, a associação com π baixou significativamente, pelo que se pode constatar que, para o grupo ao qual se aplicou os referidos questionários, π apenas podia ser associado ao círculo e ao cálculo da sua área.

Por fim, mas não menos importante, surge a natureza do número π associada à sua história, pois a existência destes números e a sua caraterização foram sempre questões difíceis, o que se compreende se pensarmos que a sua sistematização é muito recente (Santos, 2004). Conjuntamente, os matemáticos não se preocuparam apenas com o cálculo deste número mas, sobretudo, com a sua natureza (Santos, 2003) pelo que penso que tal aspeto não poderá ser descorado no processo ensino-aprendizagem.

2.2.3. Dificuldades na aprendizagem da área: Círculo

De acordo com Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) existem inúmeras investigações que evidenciam que alguns alunos do 2.º e .3º ciclos não têm a noção de conservação de área, aspeto que também é focado pelo NCTM (2007) que destaca as dificuldades que muitos dos alunos apresentam na compreensão deste conceito.

Para Van de Walle (2004), os alunos dos 4.º e 8.º anos de escolaridade apresentam um conhecimento incompleto sobre a grandeza área e para ele, a noção de equivalência de figuras é um conceito que se pode considerar de difícil aprendizagem, sendo que alguns alunos com idades compreendidas entre os oito e os nove anos de idade não percebem que uma figura pode ser reorganizada noutra figura que possua uma forma diferente, mantendo a sua área constante. Para o mesmo autor, a introdução ao estudo da área deve ser trabalhado com recurso a estimativas seguido do processo de medição propriamente dito, embora fazer a estimativa de uma área seja mais difícil do que a estimativa de um comprimento.

De acordo com o NCTM (2007), existem estudos que evidenciam um grande leque de dificuldades que os alunos sentem no que respeita ao conceito de variável. Segundo este documento, nos primeiros anos de escolaridade os alunos desenvolvem uma noção de variável como sendo um substituto de um determinado número, como por exemplo ___ + 4 = 12, o que é bastante distinto da utilização de *r* na fórmula $A = \pi r^2$. Do mesmo modo, o entendimento do significado do símbolo '=' também pode levantar dificuldades por parte dos alunos, pois a compreensão do seu significado vai sendo desenvolvido ao longo do currículo (NCTM, 2007). Por outro lado, Mestrinho e Oliveira (2012), citando Freudenthal (1999), afirmam que "para estabelecer a noção de grandeza num conjunto de objetos é necessário construir uma relação de equivalência, definir uma relação de ordem e criar uma operação de composição" (p. 3) e, neste caso, a grandeza área é bastante mais complexa que outras. O NCTM (2007) alerta, também, para o facto de o comprimento poder ser medido com o recurso a objetos lineares, o que não sucede para a área. Sugere-se, pois, que os alunos utilizem para unidade de área um objeto com a forma do quadrado, o que no caso concreto do círculo levanta, necessariamente, dificuldades.

2.3. A História da Matemática no ensino e aprendizagem da Matemática

2.3.1. A História da Matemática em Portugal: do passado ao presente

O apelo à utilização da História da Matemática no ensino não é uma sugestão inovadora no nosso país. De acordo com Neves (2007), aquando da Reforma das Universidades promovida pelo Marquês de Pombal em 1772, tal sugestão já era tida em conta. Foi criada uma das primeiras faculdades vocacionada para o ensino propriamente dito de Matemática - a Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra – e é nesse momento que se indica, pela primeira vez em Portugal, o estudo de História da Matemática como obrigatório (Mota, Ralha & Estrada, 2011). Estes autores referem, ainda, que na segunda metade do século XX a História da Matemática foi introduzida nas faculdades do nosso país como disciplina, medida que se deve a Sebastião e Silva, Professor Catedrático da Faculdade de Ciências de Lisboa, que defendeu a implementação, pela primeira vez num curso superior em Portugal, da disciplina de História do Pensamento Matemático.

Para que possamos compreender a utilização da História pelos professores no ensino e aprendizagem da Matemática, no nosso país, será necessário ter em conta três aspetos a partir dos quais se poderão identificar avanços, por um lado, e lacunas e impedimentos, por outro (Veloso, 1993):

i) Intenções e projetos;

ii) Prática docente;

iii) O currículo.

No que respeita ao primeiro ponto, o autor citado refere que o interesse pelo tema por parte dos professores tem vindo a aumentar, existindo inúmeros congressos e oficinas de formação. Assim, segundo o mesmo, será importante dar ênfase ao trabalho já desenvolvido no nosso país, pois tem sido feito algum esforço nesse sentido. No que respeita às organizações existentes que têm procurado dinamizar e divulgar a importância da História da Matemática do ponto de vista educativo, podem citar-se as seguintes: Grupo de Trabalho sobre História e Ensino da Matemática (GTHEM) da Associação dos Professores de Matemática (APM) e a Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) que tem organizado o Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM).

Na formação de professores também há algum trabalho de base já desenvolvido. Mota et al. (2011) afirmam que em diversas Universidades do país existe pelo menos uma disciplina da temática em causa. Para estas autoras "A formação de professores de Matemática em Portugal parece caminhar na direção desejada, no que concerne à formação científica e pedagógica dos professores em História da Matemática, preparando-os para cumprir as referidas diretrizes programáticas" (p. 8).

No entanto, no que respeita à prática docente, Veloso (1993) afirma que na sala de aula a História da Matemática tem sido ignorada e as poucas aplicações referem-se a apenas algumas biografias ou anedotas questionáveis. Mais recentemente, Gil (2012) salienta que apesar de se dar mais atenção a esta temática, não só pelo aumento de artigos, reflexões, relatórios e apreciações sobre experiências de ensino, que apontam as vantagens e benefícios da utilização da História da Matemática na sala de aula, ainda continua a não ser claro o modo como esta ferramenta pode ser integrada o que, na minha opinião, pode fazer com que os professores se sintam desconfortáveis na sua utilização.

Finalmente, no que ao currículo diz respeito e tendo por base a descrição do que o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) refere acerca da utilização da História da Matemática no ponto anterior, constata-se que existem algumas referências sobre a utilização da mesma na sala de aula, apesar de muitas das suas indicações não serem explícitas.

2.3.2. Modos de integração da História da Matemática na sala de aula

A utilização da História da Matemática na sala de aula tem ganho um número significativo de defensores que convergem nas suas opiniões relativamente às suas potencialidades no ensino e aprendizagem da Matemática. A título de exemplo, Vázquez (2000) cita alguns trabalhos e publicações que apontam nesse sentido: os trabalhos precursores de Brandford, Smith, Rey Pastor e Puig Adam, bem como a publicação do NCTM (1969, 1989), *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, a obra coletiva dos Institutes de Recherche pour L`Enseignement des Mathématiques (IREM´s) (1987), *Mathématiques au fil des ages*, as conferências internacionais (Montpellier, 1993, Braga, 1996) do International Study Group on the Relations Beetwen History and Pedagogy of Mathematics (HPM), números monográficos da revista *For the Learning of mathematics* (1991, 1997) e as numerosas publicações nas revistas *Enseñanza de las Ciencias, Suma, Números & Epsilon*, entre outras.

No entanto, é importante definirmos o que se entende por utilização da História da Matemática no ensino e de que formas se pode entender a sua aplicação na sala de aula.

Em primeiro lugar é importante começar por referir que o recurso à História da Matemática não pressupõe ensinar História desta disciplina como objeto de estudo propriamente dito (Estrada, 1993; Jorge, 2008). A publicação do NCTM (1989), *Historical topics for the mathematics classroom*, começa por referir este aspeto, mencionando que a utilização daquela publicação não pressupõe conhecimentos prévios em História da Matemática, uma vez que o objetivo não é o ensino desse tema enquanto corpo de conhecimentos, ainda que o recurso a tópicos históricos deva revestir-se de valor matemático significativo.

Em segundo lugar, ao recorremos à utilização da História da Matemática, também é preciso ter em atenção que a sua integração terá que ser entendida sob dois pontos de vista bem distintos: por um lado, o do professor; por outro, o do aluno (Vázquez, 2000). Este autor distingue, de forma clara, o papel que pode ser desempenhado por cada uma das partes referindo o seguinte:

> Para o professor, a integração da história da matemática no ensino, deve constituir uma espécie de revulsivo contra o formalismo e o isolamento do conhecimento matemático e um conjunto de meios que permitem apropriar-se melhor do referido conhecimento. A exploração da história por parte do professor pode ajudar na apresentação de questões curriculares, ajudar a descobrir os obstáculos que surgiram, as dificuldades, os erros e falsas crenças dos próprios matemáticos, o que o irá ajudar a mudar o papel dos erros nos seus próprios alunos,
> bem como para dar a visão da atividade matemática como uma atividade humana no âmbito do contexto socio-cultural de cada época.
> Para os estudantes, a história da matemática deve preparar o terreno para uma mudança da sua visão sobre a matemática, em que a mesma possa abandonar a sua condição de torre de marfim, de edifício terminado, restabelecendo-se o seu estatuto de atividade humana e cultural, ajudando-os na sua motivação para a aprendizagem. (p. 96)

De qualquer forma, o professor deverá ter em atenção que a aproximação histórica nem sempre tem de passar por todas as dificuldades do passado e os respetivos erros que foram surgindo, pois "recapitular todos os erros do passado pode ser confuso e antieconómico" (Jones, 1989, p.3) pelo que me parece pertinente ter em conta que ao professor caberá o importantíssimo e fundamental papel de selecionar as situações da história que são essenciais num determinado momento da sua planificação e quais os conceitos que poderão ser construídos com este recurso pedagógico, tal como Paes (2012) afirma:

> O professor deve reconstruir o passado da humanidade, aproveitando os episódios sugestivos, os feitos heroicos, os aspetos mais interessantes, que serviram para um paralelo entre as eras priscas das sociedades passadas e a vida moderna, tirando uma lição e uma solução para as grandes questões do presente. Assim o estudo será eficiente, animando, atraente, educativo. O professor inteligente e dedicado saberá aproveitar as oportunidades para, por meio da história, promover formação intelectual dos seus discípulos e animar e intensificar as suas faculdades de raciocínio, ministrando-lhes sempre um novo ensinamento. (p. 329)

Stander (1989) também refere a dupla vantagem da integração da História da Matemática na sala de aula afirmando que esta pode ser utilizada pelo professor para enriquecer os conceitos e que permite aos alunos entender que a Matemática está associada ao desenvolvimento da nossa cultura e que os nossos antepassados, apesar de trabalharem muito para alcançar determinados resultados, foram evidenciando as suas fragilidades. Winicki (1993) também defende que o desempenho dos alunos pode ser influenciado positivamente com este modo de integração, o qual poderá enriquecer o contexto de aprendizagem.

Assim, Jones (1989) considera a História da Matemática como uma "ferramenta" muito importante e de relevância muito significativa para os professores que ensinam o "por quê?" da Matemática e, segundo o mesmo, existem três categorias de "por quês" no ensino da Matemática em que a História da Matemática pode ser útil:

i) "Por quês" Cronológicos – permitem dar uma compreensão integradora e sequencial dos conhecimentos, promovendo a interação entre os conhecimentos anteriores e os novos saberes, destacando o desenvolvimento total de um conceito e não apenas de forma parcial e isolada;

ii) "Por quês" Lógicos – possibilitam o desenvolvimento dos insights lógicos dos alunos, pois evidenciam a natureza dos sistemas axiomáticos que estão na base de teoremas mais complexos. Assim, os alunos podem compreender a estrutura mais complexa a partir da sua conceção base;

iii) "Por quês" Pedagógicos - a aproximação de situações do passado poderão ajudar o professor a selecionar uma boa sequência pedagógica que poderá contribuir para a compreensão de vários conceitos de que hoje só temos o produto final e que se poderá considerar de difícil compreensão.

Neste sentido, Vázquez (2000) destaca três aspetos que estão subjacentes à integração da História da Matemática no ensino:

i) Evolução dos conceitos e procedimentos – sendo a Matemática uma ciência em constante evolução, os conceitos e os seus procedimentos são o resultado desse mesmo progresso. Assim, através da sua história, é possível perceber como é que determinadas teorias surgiram, nomeadamente no contexto da resolução de problemas, aspeto que é descorado no produto final exposto nos manuais escolares. Tal situação verifica-se com a evolução dos procedimentos matemáticos que também vão evoluindo e o que hoje pode ser pouco rigoroso pode ter sido considerado adequado no passado. Rogers (1993) também partilha desta ideia, pois afirma que através da análise da História da Matemática é possível examinar os processos pelos quais a matemática se foi desenvolvendo;

ii) Contexto sociocultural – apesar dos conceitos matemáticos terem uma validade intrínseca, não se pode deixar de considerar que o seu desenvolvimento teve um contexto cultural e social relacionado com a faceta humana desta ciência. A análise histórica e epistemológica oferece informação muito útil acerca do desenvolvimento do conhecimento matemático integrado numa dada cultura, mostrando os caminhos que o saber foi tomando sempre em interação com as ideias e crenças de cada cultura;

iii) Laboratório para o desenvolvimento curricular – ao longo da história, as verdades matemáticas que num determinado momento eram aceites deixaram de o ser a partir do momento que um determinado conceito ganhava um novo significado ou era simplesmente aprofundado. Assim, um trabalho epistemológico com a História da Matemática permite percecionar este desenvolvimento que muitas das vezes foi altamente sinuoso.

Estrada (1993) apresenta e discute opções de integração da História da Matemática no ensino e enfatiza o papel deste instrumento como agente que facilita a aprendizagem de forma dinâmica e, assim, propõe três opções para tal:

i) Biografia dos matemáticos – o contexto sociocultural de cada matemático permite percecionar a Matemática enquanto ciência viva e interativa uma vez que o aluno poderá pesquisar o trabalho desenvolvido por um determinado matemático e qual a sua importância na Matemática atual. Assim, a aprendizagem dos alunos fica enriquecida pela inter-relação que se faz entre a produção social e histórica da Matemática e porque poderá analisar o dinamismo da evolução das ideias desde a sua origem até à fase atual;

ii) Desenvolvimentos temáticos - Os alunos terão a oportunidade de entender que determinados conceitos e ideias surgiram em vários lugares e que foram desenvolvidos por povos distintos, tendo a oportunidade de percecionar os sucessos de cada conceito mas, também, os insucessos que o seu desenvolvimento histórico foi evidenciando;

iii) Estudo dos textos do passado – a partir de documentos e textos originais o professor poderá fazer o enquadramento histórico dos conceitos a desenvolver. Kool (1993) também defende a utilização de livros antigos de aritmética para estimular a participação dos alunos, para aumentar a sua participação nas tarefas da aula e para melhorar o seu desempenho na aprendizagem, salientando que a partir do momento em que começou a utilizar problemas de livros antigos de aritmética do século XVI sentiu, desde logo, uma maior motivação por parte dos seus alunos.

Winicki (1993) destaca a importância da resolução de problemas na abordagem histórica da matemática argumentando que:

i) Grande parte da criação matemática resultou da tentativa de resolver problemas;

ii) Durante a resolução de problemas históricos, os alunos podem compreender que muitas das questões do presente já foram postas no passado, o que poderá levá-los a ter em conta a importância de uma boa pergunta;

iii) Um bom problema desperta a curiosidade e, sendo desafiador, motivará os alunos para a sua resolução;

iv) Durante a resolução de um problema, o aluno está envolvido ativamente na sua resolução;

v) A resolução de um problema histórico pode contribuir para que o aluno se posicione e localize temporalmente, permitindo-lhe aceder a um ponto de vista mais amplo que lhe possibilite compreender os esforços realizados para a resolução de um problema, dando-lhe uma melhor compreensão do problema em causa;

vi) A resolução de problemas é uma capacidade transversal da aprendizagem da Matemática pelo que, assim, esta abordagem está de acordo com o currículo.

2.3.3. A integração da História da Matemática no ensino/aprendizagem

De acordo com Gil (2012), toda a ciência deriva da atividade humana, a qual tem uma história longa e repleta de muitas fases que correspondem a momentos de tensão e crise, sendo que os contextos históricos, em determinados momentos, não permitiram entender essas mesmas crises e, assim, várias questões científicas foram sofrendo alterações ao longo dos tempos, tendo sempre por base o trabalho tomado a cargo por diversas pessoas, às quais se foram sucedendo outras tentativas e assim sucessivamente. Nesse sentido, para Grugnetti e Rogers (2000) a Matemática tem de se vista como uma atividade humana que está relacionada com outras áreas e essa visão é enriquecida pelo recurso à História da Matemática, quer seja do ponto de vista filosófico, interdisciplinar ou cultural.

Tendo em conta que a História da Matemática promove a Educação Matemática em si (Batarce, 2003), Silva (2012, p. 1) refere que o recurso à História da Matemática é importante porque:

> i - satisfaz o desejo de saber como é que os conceitos matemáticos apareceram e se desenvolveram;
> ii - o estudo dos autores clássicos pode oferecer grande satisfação em si, mas também pode servir de guia no trabalho matemático;
> iii - ajuda a compreender a nossa herança cultural, não só através das aplicações que a matemática teve e ainda tem à astronomia, física e outras ciências, mas também através da relação que teve e ainda tem com campos tão variados como a arte, a religião, a filosofia e os ofícios;
> iv - oferece um campo de discussão comum com estudantes e professores de outras áreas.
> v - fornece um pano de fundo para se compreenderem as tendências no Ensino da Matemática no passado e no presente.

Assim, e tendo em conta que hoje podemos assistir a um elevado número de alunos com dificuldades de aprendizagem em Matemática (Neves, 2007) é pertinente atendermos à História da Matemática como uma das possíveis formas para reduzir essas lacunas, uma vez que os alunos seriam levados a estudar situações reais e com um contexto autêntico, tal como Verschaffel, Greer, Dooren e Mukhopadhyay defendem (2009) pois muitas das vezes, há a sensação de que a Matemática que se trabalha na escola está distante do mundo real pelo que a História da Matemática permitirá estabelecer a ponte entre esses dois polos de uma forma mais rica e motivante, levando os alunos a vivenciar, partilhar e questionar o conhecimento, havendo o sentimento de construção do mesmo, o que tornaria a aprendizagem menos abstrata possibilitando, desta forma, uma maior motivação dos alunos e uma melhor compreensão dos conceitos. Neves (2007) realça a importância de se levar o aluno a construir, pouco a pouco, os conceitos e notações matemáticas, possibilitando a interpretação das dificuldades que surgiram e da forma como foram ultrapassadas, o que levará a uma progressiva aquisição de conceitos. Nesta visão, o erro passará a ter uma interpretação positiva e será o ponto de partida para novas construções.

Apesar de escassos, estudos realizados sobre a integração da História da Matemática na sala de aula mostram que este recurso tem grandes potencialidades.

Stander (1989) relata um estudo realizado em Inglaterra, com o intuito de se perceber qual a utilização da História da Matemática na sala de aula. Para isso, foram visitadas escolas do primeiro ciclo e enviados questionários a todos os matemáticos conselheiros das autoridades locais de educação (LEAs) e para os departamentos de Matemática de todas as universidades do Reino Unido. Os resultados obtidos revelam que o recurso à História da Matemática era pouco frequente em qualquer um dos níveis citados. Nas escolas do secundário não se verificou a utilização da História da Matemática como "ferramenta" mas apenas na transmissão de informação referente ao nome de alguns matemáticos e apenas por escassos professores. Quanto às universidades, apenas algumas ofereciam disciplinas de História da Matemática e as que o faziam acabavam por estudar Matemática enquanto um corpo de conhecimentos.

Num estudo de Winicki (1993), com três professores que utilizaram na sua prática pedagógica problemas históricos, os resultados mostram que todos consideraram essa experiência como positiva, uma vez que contribuiu para o interesse dos alunos na disciplina de Matemática. Um dos professores do estudo mencionou que sempre que começava a aula com problemas históricos, o entusiasmo da turma era de tal forma evidente que os alunos pediam para que o tema fosse mantido. Outro dos professores destacou o grande entusiasmo sentido pelos alunos pelo facto de se estabelecerem ligações entre os temas estudados nas aulas de Matemática e os temas desenvolvidos noutras disciplinas, nomeadamente em História. O mesmo professor acrescentou que os alunos que normalmente não participavam na aula tinham-se mostrado, neste caso, muito mais entusiasmados e participativos. Ao fim dos seis meses de estudo, foram aplicados questionários que, comparados com os inquéritos iniciais, evidenciaram um aumento significativo do interesse dos alunos em relação a problemas históricos: inicialmente, metade da turma afirmou não se interessar por problemas históricos; no final deste estudo, só 16% manteve a mesma opinião. Globalmente, cerca de 80% dos alunos considerou a utilização de problemas históricos interessantes e positivos. Winicki (1993) considera que "a conjetura de que a integração da história da matemática no ensino pode influenciar a aprendizagem dos alunos ainda não foi comprovada" (p. 284) mas, face aos resultados apresentados, tal assunto deve ser explorado.

Kool (1993) também dá conta de uma experiência levada a cabo por si com jovens entre os 12 e os 16 anos que manifestavam dificuldades de concentração e aprendizagem em Matemática e pouco interessados na escola em geral. Com intervalos regulares começou a propor-lhes problemas retirados de livros de aritmética do século XVI, relatando o entusiasmo dos alunos na resolução de problemas e, sobretudo, a sua surpresa quando descobriam as semelhanças entre os problemas resolvidos há mais de quatro séculos e os que ainda hoje são propostos. Utilizando a comparação das resoluções dos alunos com as resoluções originais, observa também a reação de admiração dos alunos ao perceberem que estes eram resolvidos sem recurso ao simbolismo e às notações matemáticas atuais.

Jorge (2008) apresentou e avaliou um percurso de formação de professores, em que a resolução e a exploração didática de problemas históricos foram consideradas na metodologia a privilegiar na formação inicial de professores para o ensino básico. As futuras professoras que participaram nesse estudo foram confrontadas com a face social e cultural da Matemática, através da exploração de problemas históricos, sendo, assim, incentivadas a introduzir a Matemática nas suas aulas sob o ponto de vista histórico. As professoras participantes e os respetivos professores cooperantes reconheceram, ainda, que foi possível delinear e ministrar estratégias de ensino e aprendizagem que tivessem como principal foco a resolução de problemas históricos favorecendo-se, pois, ligações com outras disciplinas do currículo – neste caso com História e Geografia de Portugal – realçando-se a importância e a aplicação da Matemática no passado. Os alunos, por seu turno, mostraram-se motivados e empenhados. Assim, de acordo com esta investigadora, é possível delinear e traçar estratégias de ensino recorrendo-se à História da Matemática favorecendo-se, pois, o estabelecimento de conexões entre diversos tópicos matemáticos, a interação da Matemática com outros áreas do saber e a conexão com o contexto socio-cultural do passado.

Mais recentemente, Préve (2012) dá-nos conta da aplicação da História da Matemática no estudo da área do círculo e do número π, aliada ao uso de material manipulável, relatando que foi mais fácil para os alunos a aprendizagem destes conteúdos bem como a capacidade de abstração em relação aos mesmos. Os alunos conseguiram destrinçar mais facilmente círculo de circunferência e o cálculo da área de um círculo foi mais acessível.

Também Gil (2012) desenvolveu um estudo em que a História da Matemática possibilitou o fomento de uma cultura de argumentação em sala de aula, sendo que esta ferramenta revelou-se potenciadora da aprendizagem matemática. Por um lado, facilitou a aprendizagem e a aplicação efetiva de alguns conceitos e, por outro, possibilitou o desenvolvimento da aptidão dos alunos para se expressarem matematicamente e para compreenderem, também, as ideias que lhes eram apresentadas. Desta forma, os alunos em causa puderam participar de forma construtiva nas várias discussões de um ponto de vista argumentativo, desenvolvendo conceções, processos e resultados.

Capítulo 3

Proposta Pedagógica

A preparação de unidades didáticas é um dos aspetos primordiais no processo ensino-aprendizagem tendo em conta que o professor planifica de forma a organizar os conteúdos em representações compreensíveis pelo aluno (Alcalá, 2011).No presente capítulo descrevo a proposta pedagógica que serve de base ao estudo, tomando em consideração as orientações curriculares relativas aos tópicos respeitantes aos Números Racionais Não Negativos, Perímetros (círculo - π) e Áreas (círculo), constantes no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), bem como a fundamentação teórica que sustenta a utilização da História da Matemática como ferramenta pedagógica. Começo por fazer uma caraterização da escola e da turma onde implementei a proposta pedagógica e, seguidamente, apresento uma visão geral da sua planificação, com destaque para as tarefas propostas em sala de aula. Termino com a descrição das aulas lecionadas.

3.1. Caraterização do contexto escolar

A proposta pedagógica que apresento neste trabalho foi realizada numa escola pertencente ao concelho de Odivelas, zona que se situa na periferia de Lisboa, na parte norte. De uma forma geral, esta zona é considerada como carenciada, tendo em conta o plano económico e social, pois uma grande parte dos alunos recebe apoio económico escolar, muitas das vezes insuficiente para suprir as suas reais necessidades. Os alunos que constituem a comunidade escolar não são exclusivamente de origem portuguesa, pois muitos deles são naturais de países africanos (cuja língua oficial é o português - PALOP) e do Brasil. Nos últimos anos, também se tem verificado um aumento significativo de alunos oriundos dos países de leste cujas famílias se têm fixado nesta zona para residir. Também se denota a presença de muitos alunos provenientes de famílias itinerantes que, tendo sido desalojados dos bairros onde outrora viviam, foram hospedados na zona em causa constituindo-se, assim, um núcleo de famílias com características e hábitos culturais específicos.

Muitos dos alunos desta escola têm um fraco acompanhamento familiar que se estende a vários níveis: económico, alimentar, realização das tarefas escolares, assiduidade, pontualidade, comportamento, interesse e participação na vida escolar, abandono escolar, entre outros. Os diretores de turma têm sempre grandes preocupações no acompanhamento dos seus alunos tendo em conta as características atrás mencionadas, uma vez que despendem grande parte do seu tempo burocrático na gestão da assiduidade dos alunos e de situações de absentismo e abandono escolar. Assim, neste Agrupamento de Escolas surgem naturalmente ofertas formativas que vão além do percurso escolar regular, como por exemplo, as turmas de Percursos Alternativos; CEF tipo 2 (neste caso, Serralharia Artística) e PIEF (Programa de Inclusão, Educação e Formação). Apesar da organização destes cursos ter em conta caraterísticas muito próprias de seleção, um dos traços comuns a todos eles é o elevado número de retenções que cada aluno destes percursos apresenta. O agrupamento em causa pretende, pois, gerir o absentismo escolar de forma a oferecer formações que possam ir ao encontro das necessidades e perspetivas futuras destes alunos e das respetivas famílias.

Quanto ao pessoal docente, atualmente estão colocados 165 professores com funções letivas, cargos de coordenação e de direção. De uma forma global, a sua distribuição por ciclos/níveis é a seguinte: 13 docentes na educação pré-escolar; 60 no 1º ciclo; 73 no 2º ciclo; 31 no 3º ciclo e 12 na Educação Especial. 36,9% dos docentes têm idade inferior a 40 anos e cerca de 29,1 % idade superior a 50. No que diz respeito ao tempo de serviço, é de referir que 15,3% dos docentes têm menos de 4 anos de lecionação; 38,6% dos docentes têm entre 10 e 19 anos e 16,6% dos docentes apresentam 30 ou mais anos de serviço. Dentro deste quadro podemos encontrar cerca de 23,4% docentes contratados o que reflete uma tendência de mobilidade de quadro que tem vindo a acentuar-se de ano para ano escolar. No que respeita ao pessoal não docente, neste momento existem 57 assistentes operacionais e 4 assistentes técnicos não existindo, atualmente, um chefe dos serviços de administração escolar tendo em conta que se atravessa um período de remodelação pela entrada em Mega-Agrupamento no início do ano letivo seguinte, ou seja, em 2013/2014. Cerca de 30,3% destes funcionários situam-se numa faixa etária entre os 50 e 60 anos de idade e 14,3% apresentam mais de 60 anos de idade. Quanto ao tempo de serviço, pode verificar-se que aproximadamente 23,2% têm até 4 anos de serviço; 41% têm entre 10 e 19 anos de serviço e 25% têm entre 20 e 29 anos de serviço. Integram o pessoal não docente do Agrupamento, 3 psicólogas, uma do Serviço de Psicologia e Orientação, uma do Gabinete de Apoio Psicológico, outra do Projeto para o Sucesso Educativo e Integração e um TIL – Técnico de Intervenção Local - a desempenhar funções no Programa para a Inclusão e Cidadania (PIEC).

A turma selecionada para a implementação da presente proposta pedagógica é do 5.º ano de escolaridade, da qual sou o professor de Matemática. É constituída por 19 alunos, dos quais 2 são alunos CEI (Currículo Específico Individual) inseridos no Decreto-Lei 3/2008 (adequa o processo educativo às necessidades especiais dos alunos), usufruindo de adaptações na avaliação, nos conteúdos a desenvolver e ao nível das disciplinas que frequentam. Estes alunos CEI não frequentam todas as disciplinas, tal como acontece na disciplina de Matemática. Assim, na realização deste trabalho participam, efetivamente, 17 alunos, dos quais 10 são raparigas e 7 são rapazes. A idade mais frequente, no início do ano letivo 2012/2013, é 10 anos, pois estão pela primeira vez no 5.º ano.

Selecionei esta turma porque os alunos, de um modo geral, gostam da disciplina de Matemática e já desenvolveram, durante o presente ano letivo, alguns trabalhos com recurso à História da Matemática, como por exemplo nos números naturais e inteiros. Os alunos apresentam um espírito matemático crítico desenvolvido e uma boa argumentação matemática que tem vindo a ser desenvolvida desde o início do ano letivo, tanto oralmente como de forma escrita, com especial incidência quando trabalharam o tópico dos ângulos e dos triângulos na Geometria.

Em termos de comunicação matemática, os alunos têm alguma facilidade em se expressar e, habitualmente, fazem-no de forma correta. Quando a turma foi confrontada com a possibilidade de realizar este trabalho que agora se apresenta, senti uma grande motivação da parte dos mesmos e a partir desse momento era frequente a pergunta acerca de quando tal trabalho iria iniciar-se. Os alunos têm vindo a trabalhar de forma individual e em grupo e, nesta última organização, denotam-se, por vezes, algumas situações de conflito, naturais em alunos desta idade. De qualquer modo, essas situações de altercação têm sido resolvidas sem quaisquer dificuldades através do diálogo e da autorreflexão.

Globalmente, o desempenho da turma é Bom, não só em Matemática mas também nas outras disciplinas.

3.2. Orientações metodológicas e aspetos gerais

Ensino exploratório. Tendo em conta que os alunos deverão desenvolver a compreensão da Matemática (ME, 2007) esta proposta pedagógica procura que sejam os alunos a explorar e a tirar as conclusões em cada situação, quer seja através da resolução de tarefas, quer seja no levantamento das próprias conjeturas. Desta forma, os alunos poderão ser os agentes da construção do conhecimento, cabendo ao professor a função de orientar os diversos trabalhos, questionamentos e conjeturas dos alunos, quer seja em pequeno ou em grande grupo, dado que "o saber é construído no decurso da própria atividade matemática, cabendo aos alunos um papel de participação ativa e ao professor um papel de organizador e dinamizador da aprendizagem" (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997, p. 1).

Braumann (2002) também assume que a aprendizagem da Matemática vai muito além da compreensão da própria Matemática já concebida, pois o aluno deverá ser levado a investigar a natureza da própria disciplina, tendo sempre em conta o respetivo grau de ensino. Assim, a aprendizagem da Matemática necessita de um direcionamento para a vertente investigativa, onde as explorações, as descobertas de estratégias e a reflexão sobre os próprios erros possam dar lugar a uma aprendizagem matemática.

Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002) também enfatizam a grande necessidade de dar aos alunos a oportunidade de fazer Matemática através do trabalho com tarefas de natureza investigativa e exploratória para que estes possam viver situações semelhantes à dos matemáticos profissionais (no caso desta proposta pedagógica, os alunos irão viver situações semelhantes às que foram vivenciadas pelos nossos antepassados matemáticos). Estes investigadores realçam, ainda, que através de tarefas desta natureza será mais fácil estimular os alunos para a formulação de questões, para a formulação de conjeturas, para a elaboração de testes de conjeturas, para a procura de argumentos que justifiquem as conjeturas formuladas, entre outros. Assim, os alunos poderão ter uma maior participação nas atividades o que favorecerá, pois, a aprendizagem.

Christiansen e Walther (1986) afirmam que as tarefas de exploração podem ser desenvolvidas através de casos individuais que possibilitam ao aluno a formulação de conjeturas e a consequente resolução do problema. Por outro lado, as tarefas de exploração motivam os alunos e estes são levados a realizar atividades que permitem o desenvolvimento de várias estratégias cognitivas. Assim, os alunos vão utilizar os seus conhecimentos e procedimentos adquiridos como ferramentas úteis na realização destas tarefas e os mesmos não se confinam à mera recordação dos conhecimentos pois terão de os adaptar, alterar e desenvolver, tendo em conta as necessidades que lhe são exigidas num determinado momento. Para estes autores, as explorações permitem, pois, a ativação dos alunos, levando-os a reatualizar o conhecimento e, posteriormente, à produção de novos conhecimentos, prontos a serem utilizados.

Skovsmose (2000) destaca a importância da existência de um contexto para a investigação uma vez que leva os alunos ao levantamento de questões e, assim, motiva-os para procurarem as respetivas explicações. Quando se possibilita que os alunos investiguem e façam explorações, estimula-se um ambiente de aprendizagem em que os mesmos são os responsáveis pelo processo de aprendizagem e não meros agentes passivos.

Goldenberg (1999) aponta razões de três tipos distintos que justificam a integração de investigações no currículo. Primeiro, porque a investigação reside na própria natureza da Matemática. Simultaneamente, porque as investigações motivam os alunos e, finalmente, porque as investigações permitem o desenvolvimento de capacidades que proporcionam um conhecimento mais vasto de conceitos o que vai facilitar a aprendizagem. Também Oliveira (2002) alerta para o facto de a aula de

Matemática ser um espaço epistemológico forte em que a vertente investigacional deve ser encadeada às dimensões pessoal, relacional e comunicacional, sendo que as atividades investigativas ganham, assim, validade epistemológica.

Assim sendo, as tarefas apresentadas nesta Proposta Pedagógica são dominantemente explorações uma vez que se pretende que todos os alunos se sintam motivados e envolvidos durante a sua realização. São desenvolvidas a partir de contextos históricos que terão contribuído para o desenvolvimento de novos conceitos possibilitando, assim, que os alunos possam experienciar cada conceito numa fase embrionária do seu desenvolvimento.

Dinâmica da aula. Usualmente, uma aula exploratória subdivide-se em três fases: Apresentação da tarefa; realização/exploração da tarefa; Discussão e sintetização da tarefa (Stein et al., 2008). Na primeira fase, a tarefa é apresentada à turma e deve ser interpretada pelos alunos, devendo o professor assegurar, de forma breve, que os mesmos possam sentir-se desafiados para explorar e trabalhar na tarefa. Na fase seguinte, cabe ao professor prestar apoio aos seus alunos na exploração que vão fazendo, independentemente de ser em pequenos grupos ou individualmente, com o objetivo de assegurar que cada aluno tenha uma participação ativa e produtiva. O professor deverá ter o cuidado de não uniformizar as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos para garantir que a discussão matemática possa ser interessante e enriquecedora para cada um dos seus intervenientes. Tendo em conta que os alunos vão apresentar os seus trabalhos à turma, o professor deverá selecionar as produções que julgar serem pertinentes, o que implica que o mesmo tenha a capacidade de avaliar quais os melhores trabalhos para o efeito, a partir da observação e análise dos mesmos, selecionando as respostas que considere serem adequadas e instigadoras da discussão no seio da turma podendo, ainda, delinear uma sequência que promova a discussão (Stein et al., 2008). Desta forma, é importante ter em conta que para além da conceção das tarefas, o ensino exploratório exige que o professor faça uma reflexão prévia acerca do modo como as poderá explorar no contexto de sala de aula, obrigando-o a preparar-se para ter em consideração a complexidade que essa exploração poderá dar origem no decurso de uma aula (Stein et al., 2008).

Assim, independentemente da dinâmica que possamos imprimir numa sala de aula, a forma de trabalho que pretendemos desenvolver dependerá de vários fatores que interagem num determinado momento, tendo em conta os objetivos traçados, as tarefas propostas, as competências a desenvolver, entre outros. Assim, a dinâmica dependerá, em primeiro lugar, das tarefas propostas pelo professor, as quais deverão estar relacionadas com o tipo de aula que se pretende dinamizar. No entanto, também é necessário ter em conta que existem outros fatores que devem ter tomados em consideração, como por exemplo o aluno em si, nomeadamente as suas conceções e postura em relação à Matemática, os seus conhecimentos anteriores, as suas experiências de trabalho matemático e, ainda, a sua conceção geral acerca da escola. Por outro lado, existem também os fatores que estão relacionados com o próprio contexto escolar e social, que vão desde a organização da escola até às expetativas da comunidade onde a mesma está inserida. Por fim, a dinâmica da aula dependerá, necessariamente, do professor em si, quer do seu conhecimento, quer da sua competência profissional, competência esta que está intimamente relacionada com a forma como introduz as tarefas e no modo como apoia os seus alunos no desenrolar das mesmas (Ponte et al., 1997).

Sendo a Matemática uma ciência que faz parte da cultura humana e cuja história mostra que a mesma se construiu da interação entre as pessoas, dá-se relevância ao trabalho em pares ou pequenos grupos, tendo em conta que “proporciona a possibilidade de uma interação significativa entre os alunos, que podem trocar impressões entre si, com vista à realização da tarefa proposta” (Ponte, et al, 1997, p. 23). Ainda assim, também existirão momentos de trabalho individual, pois partilho das ideias de Ponte et al. (1997) ao referirem que o aluno precisa de “assumir a sua independência e a sua responsabilidade pessoal” (p. 23). A conjugação entre o trabalho em grande grupo e o trabalho a pares pretende contribuir para a criação de diferentes momentos de aprendizagem, com o objetivo de estimular a discussão e reflexão entre todos os intervenientes, sendo que o diálogo, conjugado com a interação social, poderá impulsionar as conexões entre ideias e a nova organização do conhecimento (NCTM, 2007).

Os momentos de discussão em grande grupo assumirão um destaque relevante para que do debate em pares ou em pequeno grupo se passe à interação ao nível da turma, assegurando-se a “sistematização e institucionalização de conhecimentos e ideias matemáticas” (ME, 2007, p. 10), tal como acontece nas várias tarefas propostas pois após a realização das mesmas parte-se para a comparação de ideias no seio da turma, cabendo ao professor o papel de orientador dos vários discursos dos alunos. Conjuntamente, tendo em conta que “os alunos devem aprender a justificar as suas afirmações” (ME, 2007, p. 5), as tarefas propostas contemplam espaços destinados à justificação escrita, a qual será depois partilhada oralmente com a turma para que haja uma validação debatida por todos os membros da turma. Todas as descobertas resultantes das explorações serão sempre fundamentadas e debatidas em grande grupo. Para Yakel e Cobb (1996) o progresso do raciocínio dos alunos está intimamente ligado ao processo de construção do significado matemático partilhado, tendo em conta a participação dos mesmos nessa construção de forma interativa. Assim, a reflexão é um aspeto que deve ser enfatizado pois esta fase é "a ocasião mais apropriada para ajudar a que sejam expostas conexões e significados" (Bishop & Goffree, 1986, p. 27) e de acordo com Ponte et al. (1997) "a investigação sobre a aprendizagem tem mostrado que o aluno aprende em consequência da atividade que desenvolve e da reflexão que sobre ela faz" (p. 2).

A gestão das diversas discussões em sala de aula teve em conta o modelo que Smith, Hughes, Engle e Stein (2009) apresentam, no qual são enfatizadas cinco etapas: i) antecipar as resoluções dos alunos; ii) acompanhar o trabalho desenvolvido pelos alunos e o seu envolvimento nas tarefas; iii) selecionar os alunos que vão apresentar o seu trabalho; (4) sequenciar as resoluções dos alunos que serão apresentadas; (5) estabelecer conexões entre as várias resoluções e aos conceitos matemáticos subjacentes. Nesta situação, o papel do professor será extremamente importante pois os alunos nem sempre usam no seu discurso aspetos sobre Matemática e cabe ao professor fazer a orientação com essa finalidade (Cobb, Wood & Yackel, 1994, citado por NCTM, 2007).

As tarefas selecionadas fomentam, pois, a discussão entre os alunos, na medida em que permitem um certo grau de abertura no posicionamento de cada um dos intervenientes perante a tarefa em questão e algumas tarefas suportam-se da tecnologia – calculadora e computador – uma vez que esta é um bom meio para fomentar a comunicação. O recurso aos dois instrumentos citados permitirá gerir a discussão oral em torno de uma referência idêntica – os resultados obtidos – e, deste modo, os intervenientes nesta exploração podem interagir em termos de discussões de ideias matemáticas (NCTM, 2007).

Para que as reflexões possam ter uma dimensão alargada a todos os intervenientes, o professor promoverá, conjuntamente, a "discussão e análise crítica" (ME, 2007, p. 11) tendo por base a comunicação.

> A comunicação envolve as vertentes oral e escrita, incluindo o domínio progressivo da linguagem simbólica própria da Matemática. O aluno deve ser capaz de expressar as suas ideias, mas também de interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas e de participar de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos. A comunicação oral tem lugar tanto em situações de discussão na turma como no trabalho em pequenos grupos, e os registos escritos, nomeadamente no que diz respeito à elaboração de relatórios associados à realização de tarefas e de pequenos textos sobre assuntos matemáticos, promovem a comunicação escrita (ME, 2007, p. 8).

Assim, as tarefas de exploração terão sempre momentos que pretendem desenvolver a comunicação oral, uma vez que a mesma é considerada uma das três capacidades transversais do programa, pois o progresso da capacidade de comunicar é considerado um objetivo importante a alcançar, pelo que se devem criar oportunidades de comunicação apropriadas, sendo esta uma vertente essencial no trabalho a realizar pelo professor (ME, 2007). A resolução de problemas também contribuirá para o desenvolvimento da comunicação oral tendo em consideração que os mesmos são incentivadores de diálogos produtivos (NCTM, 2007) visando-se, deste modo, “a partilha de raciocínios, a colocação de questões, e a explicação e justificação de ideias” (NCTM, 2007, p. 226).

Assim, “o professor deve incentivar a formulação e teste de conjeturas que devem ser justificadas com base em argumentos matemáticos” (ME, 2007, p.46). Cross (2009) defende que a argumentação é extremamente importante, não só na construção de conhecimentos mas, ainda, na partilha dessas mesmas ideias com os outros.

Por outro lado, Ponte et al. (1997) defendem que “a comunicação escrita proporciona uma oportunidade também importante de expressão das ideias matemáticas” (p.14). Assim, os alunos irão ter a oportunidade de desenvolver a sua comunicação escrita ao longo da resolução das várias tarefas uma vez que as mesmas têm espaços destinados para o registo dessas ideias e conclusões dos alunos. Por outro lado, esta proposta contempla também a elaboração de um relatório escrito sobre o filme que irá ser visionado, o qual também será apresentado à turma oralmente. Desta forma, as ideias dos alunos tornam-se mais claras para os outros e sobretudo para eles mesmos ao terem que articular essas conceções, quer oralmente, quer por escrito (Boavida, Paiva, Cebola & Pimentel, 2008).

Tarefas. O que os alunos aprendem é consequência de dois fatores principais: a atividade que realizam e a reflexão que sobre ela efetuam (Ponte, 2005). Para este autor, envolver um aluno numa atividade é dar-lhe a oportunidade de realizar uma determinada tarefa, a qual pode surgir de diversas formas: pode ser proposta pelo professor, pode ser proposta pelo próprio aluno ou, numa terceira hipótese, pode ser negociada entre o professor e o aluno. Para além da seleção do que se possa considerar uma boa tarefa importa, ainda, ter em atenção à forma como se propõem e o modo como se conduzem na sala de aula (Ponte, 2005). Assim, o papel do professor na escolha das tarefas será sempre extremamente importante pois "quando desafiados com tarefas criteriosamente selecionadas, os alunos tornam-se confiantes na sua capacidade de lidar com problemas difíceis, ansiosos por chegar à resposta" (NCTM, 2007, p.22). Na conceção das mesmas tive em consideração as três fases através das quais uma tarefa vai evoluir, no entender de Stein e Smith (1998): inicialmente foi analisado o modo como as tarefas surgem quer no currículo, quer nos materiais de ensino para que as mesmas possam estar de acordo com o que os documentos oficiais esperam que seja alcançado. Seguidamente, foi ponderada a forma como as tarefas poderiam ser introduzidas, pelo que se teve em consideração a História da Matemática como ferramenta pedagógica e outros recursos, como se poderá constatar mais adiante. No final de cada tarefa, realizar-se-á a reflexão em grande grupo sobre a implementação das tarefas pelos alunos na aula resultando, assim, a aprendizagem do aluno, como se pode ver na figura 1:

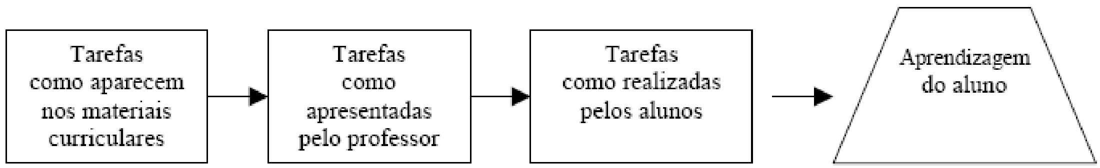


Figura 1 - O Quadro das Tarefas Matemáticas (Stein & Smith, 1998, p. 4)

Segundo Ponte (2005) teremos que ter em atenção duas dimensões fundamentais para as tarefas: grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O grau de desafio matemático prende-se com a perceção da dificuldade de uma determinada questão e serve para graduar as questões que se colocam aos alunos, podendo variar entre "grau reduzido" e "grau elevado". No que respeita ao grau de estrutura classificar-se-á como "aberto" ou "fechado", considerando que uma tarefa fechada será aquela onde é claramente enunciado o que é dado e o que se pretende saber e a tarefa aberta aquela em que existe um grau de indeterminação considerável quanto ao que é dado, quanto ao que é pedido ou, numa terceira hipótese, em ambos os campos. Em função das duas dimensões referidas, o citado investigador propõe um quadro concetual que tem em conta a interação entre ambas (Fig.2).

Figura 2 - Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005)

Analisando a figura 2, podemos constatar que existem quatro tipos de tarefas: Exercícios, problemas, investigações e explorações. Por *exercício* entende todas as tarefas que são fechadas e cujo desafio é reduzido; por *problemas* considera todas as tarefas que, sendo fechadas, apresentam um elevado grau de desafio; se o grau de desafio for elevado e a situação posta for aberta, então fala em *investigação*; como quarta possibilidade considera a *exploração* em que as tarefas são abertas e fáceis. Ponte (2005) faz ainda uma chamada de atenção com o propósito de diferenciar tarefas de exploração e tarefas de investigação, uma vez que a diferença entre elas reside no grau de desafio. Se o aluno puder iniciar desde logo o trabalho, sem muita delineação prévia, estaremos perante uma tarefa de exploração. Numa situação contrária, estaremos a falar de tarefa de investigação.

Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998), por outro lado, fazem uma clara distinção entre atividades de investigação e resolução de problemas. As novas perspetivas acerca de aprender Matemática gerando conhecimentos e não apenas vendo esta área como um mero corpo de saberes faz com que o professor tenha que estar elucidado para a importância das atividades investigativas na sala de aula. Assim, atividades investigativas - procurar regularidades, formular, testar, justificar, provar conjeturas, refletir e generalizar – têm um caráter muito aberto, sendo as questões iniciais vagas que o aluno deverá tornar mais concretas e precisas. Os alunos deverão formular problemas, o que irá promover um percurso de aprendizagem com possibilidade de divergência. As mesmas deverão ser motivadoras e desafiadoras, sendo o aluno que coloca as questões e os caminhos que pretende seguir. Parte-se de uma situação que é preciso compreender ou de dados que precisam de ser organizados e a partir desse ponto formulam-se questões para as quais se procura fazer conjeturas. O teste desta conjetura e a recolha de mais dados pode levar à formulação de novas conjeturas ou à confirmação das hipóteses iniciais podendo, pois, surgir novas questões a investigar. Neste sentido, ao escolhermos uma determinada tarefa é importante ter em conta o sentido das várias tipologias, para que possamos proporcionar aos alunos diferentes tipos de trabalhos em função do objetivo que pretendemos alcançar com as mesmas.

Também é indispensável compreender a conceção das tarefas à luz da sua duração (Fig. 3). Relativamente a este aspeto, a resolução de uma tarefa matemática pode ser curta ou longa, sendo que as tarefas de maior duração poderão ser mais ricas e, desta forma, permitirão aprendizagens mais profundas e interessantes e, nesse sentido, as tarefas exploratórias que são propostas têm uma duração média com o objetivo de dar aos alunos a oportunidade de fazer descobertas que possam estimular a aprendizagem (Ponte, 2005).

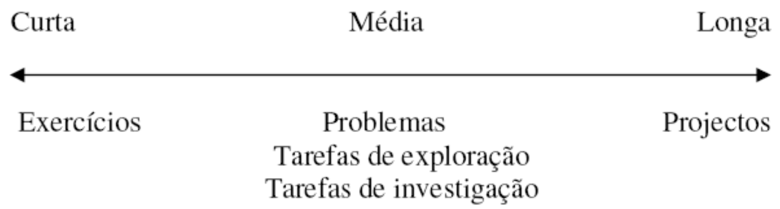


Figura 3 - Diversos tipos de tarefas, quanto à duração (Ponte, 2005, p. 10)

O desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas é, também, um aspeto largamente destacado no Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) e nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2007) e, como tal, os alunos irão ter a oportunidade de os resolver ao longo desta proposta pedagógica, pois cabe ao professor proporcionar tarefas em que os seus alunos tenham a possibilidade de resolver problemas, analisá-los e refletir sobre as suas resoluções e as dos outros colegas, permitindo construir novos conhecimentos matemáticos (ME, 2007; NCTM, 2007).

Para Pólya (1945) um problema deve desafiar a curiosidade de um aluno e pôr as suas faculdades de descoberta ao seu dispor, independentemente do seu grau de dificuldade. Desta forma, se o aluno for capaz de o resolver pelos seus meios poderá experimentar uma série de sensações que lhe permitirão ter o prazer dessa mesma descoberta, o que irá proporcionar o gosto pela resolução de problemas. Sistematizando, podemos dizer que para este autor, a resolução de problemas envolve quatro etapas: i) – compreensão do problema; ii) – elaboração de um plano; iii) – Execução do plano – iv) – Reflexão. A fase da reflexão é extremamente importante, pois se por um lado possibilita a consolidação do seu conhecimento, por outro permite o aperfeiçoamento da sua capacidade de resolução de problemas.

Para Schoenfeld (1996) os problemas devem servir como ponto de partida para o pensamento matemático, nomeadamente através da sua discussão. Este autor propõe que os problemas apresentem quatro propriedades: i) Os bons problemas deverão ser acessíveis, não tendo um enunciado muito longo nem deverão exigir muitos passos para serem resolvidos; ii) Deverão permitir resoluções por caminhos distintos, sendo muito importante que os alunos percebam que resolver um problema não é seguir um único caminho existente mas sim vários caminhos diferentes; iii); Os problemas devem permitir estabelecer a ponte com determinadas ideias matemáticas; iv) Os problemas devem permitir que os alunos façam explorações matemáticas significativas. Desta forma, aos alunos será permitido fazer matemática.

Sequência de aprendizagem. Gravemeijer (2005) afirma que “Os professores precisam de sequências de ensino, ou melhor ainda de justificações (*rationales*) ou teorias locais de ensino que sirvam de base para tais sequências, em conjunto com recursos que ofereçam potenciais actividades” (p. 21).

Para Simon (1995) planificar é decidir em função dos conteúdos e das tarefas a desenvolver e este autor propõe uma *trajetória hipotética de aprendizagem,* sendo hipotética na medida em que se levantam hipóteses sobre a forma como os alunos aprendem. Neste enquadramento, Simon (1995) propõe que esta trajetória hipotética de aprendizagem deve percorrer três etapas fundamentais e sequenciais: inicialmente o professor estabelece objetivos para os alunos; de seguida traça o plano de atividades para as atividades que visam fomentar a aprendizagem e, finalmente, da interação dos objetivos traçados em função da aprendizagem propriamente dita, avalia-se se a hipótese inicialmente conjeturada se verifica. Esta trajetória é hipotética porque o professor não poderá, numa fase inicial, prever qual a aprendizagem que efetivamente irá ocorrer.

Para Serrazina e Oliveira (2010), para que o professor programe “trajetórias de aprendizagem” é necessário que o mesmo tenha em conta o pensamento e a aprendizagem dos alunos na participação das atividades de ensino, tendo em consideração o objetivo de aprendizagem traçado. Nesse sentido, destacam-se três componentes: o objetivo, o percurso de aprendizagem e o agregado de tarefas.

Quanto ao primeiro componente – o objetivo – a sequência que é apresentada neste trabalho teve em conta os objetivos gerais do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) para seguintes os tópicos: números racionais negativos; perímetros (círculo) e áreas (círculo). Assim, selecionei os seguintes objetivos específicos:

Números racionais não negativos

-Fazer surgir a necessidade de criar representações para os números racionais fracionários;
- Introduzir o conceito de numeral misto;
- Compreender a notação de racional sob a forma de fração;
- Compreender e utilizar um número racional como quociente;
- Relacionar a representação racional fracionária com a representação decimal;
- Compreender e utilizar um número racional como quociente;
- Representar frações na forma decimal (distinguir dízimas finitas de infinitas);
- Comparar frações com a unidade;
- Identificar frações que são números inteiros;
- Compreender e utilizar um número racional como medida;
- Localizar e posicionar na reta numérica números fracionários e mistos;
- Compreender e utilizar um número racional como operador;
- Resolver problemas (históricos);
- Compreender a noção de percentagem e relacionar diferentes formas de representar uma percentagem;
- Traduzir uma fração por uma percentagem e interpretá-la como o número de partes em 100.

Perímetros (círculo)

- Determinar o perímetro do círculo;
- Determinar experimentalmente um valor aproximado de π;
- Determinar experimentalmente um valor aproximado de π por enquadramento;
- Compreender a natureza do valor de π;
- Compreender a irracionalidade do número π;
- Resolver problemas envolvendo o perímetro do círculo.

Área (círculo)

- Determinar a fórmula da área do círculo através de situações experimentais;
- Calcular valores aproximados da área de um círculo.

No que respeita ao segundo componente – percurso de aprendizagem – a sequência proposta visou promover a aprendizagem dos alunos recorrendo, sobretudo, à História da Matemática como ferramenta pedagógica. As tarefas são sequenciadas e articuladas de forma a garantir o cumprimento dos objetivos propostos, permitindo promover um "caminho" que possa levar os alunos a desenvolver a compreensão e as capacidades da proposta em causa.

Quanto ao terceiro componente, as tarefas surgem, naturalmente, como o foco da sequência de aprendizagem, estabelecendo a ponte entre os conhecimentos anteriores e os novos conhecimentos. As tarefas apresentadas nesta proposta pedagógica têm um cunho essencialmente exploratório e pretendem que os alunos possam estabelecer várias relações matemáticas durante a sua resolução permitindo-lhes, assim, mobilizar os seus conhecimentos intuitivos para cada situação.

Por outro lado, a proposta pedagógica que se apresenta tem caraterísticas especiais por recorrer à História da Matemática como ferramenta pedagógica. Assim, também tive em consideração os principais passos defendidos por Furinguetti (2007) para a delineação da mesma: 1) Consultar o programa de matemática do ensino básico (ME, 2007); 2) Estudar e analisar a História da Matemática do ponto de vista evolutivo; 3) Ter em atenção a origem cognitiva dos conceitos; 4) Confrontar o programa de matemática com a origem dos conceitos que se pretendem desenvolver; 5) Por fim, desenhar uma sequência de ensino de acordo com todos os aspetos já mencionados.

Assim, e de acordo com toda a revisão de literatura apresentada e as minhas experiências pessoais de ensino relacionadas com a utilização de História da Matemática em sala de aula, enuncio a seguinte hipótese geral de aprendizagem: Os alunos do 5.º ano desenvolvem uma melhor compreensão das frações, do perímetro da circunferência (em associação com o número π) e da área do círculo recorrendo-se, conjuntamente, a tarefas de natureza exploratória com recurso à História da Matemática.

A proposta pedagógica foca-se em três tópicos, de acordo com a hipótese geral de aprendizagem apresentada, o que significa que existem alguns intervalos temporais preenchidos com outras tarefas que neste estudo não são investigadas, cujo enfoque não é a História da Matemática. O estudo encadeado das frações, do número π e da área do círculo é desenvolvido assumindo que este trabalho sequencial constrói conhecimentos que na etapa seguinte serão necessários para o desenvolvimento de novos conceitos.

De acordo com Doyle (1988, citado por Stein & Smith, 1998) as tarefas selecionadas assumem uma importância fundamental na planificação pois são elas que organizam a aprendizagem dos alunos. Neste estudo, as tarefas foram concebidas com o intuito de proporcionar aprendizagens significativas aos alunos, levando-os a estabelecer várias conexões com outros tópicos da Matemática (ME, 2007; NCTM, 2007). As tarefas são maioritariamente explorações, à exceção da tarefa 3 que é exercício e das tarefas 5 e 11 que são problemas. No quadro 1 podemos encontrar as sequências de tarefas delineadas para esta proposta pedagógica, bem como os objetivos específicos e os recursos utilizados para cada uma das tarefas.

Quadro 1 – Tarefas da Proposta Pedagógica

Tarefas no tópico dos racionais

Aulas	Tarefa	Objetivos	Recursos
1 (11-04-2013)	Tarefa 1: Queres imitar os egípcios?	- Fazer surgir a necessidade de criar representações para os números racionais fracionários; - Introduzir o conceito de numeral misto.	- Tarefa 1; - Cordas para realizar as medições egípcias.
2 (15-04-2013)	Tarefa 2: Vamos estudar matemática de há 4000 anos!!!	- Compreender a notação de racional sob a forma de fração; - Compreender e utilizar um número racional como quociente; - Relacionar a representação racional fracionária com a representação decimal.	- Papel e lápis.
3 (16-04-2013)	Tarefa 3: Das frações às décimas	- Compreender e utilizar um número racional como quociente; - Utilizar o cálculo mental; - Representar frações na forma decimal (distinguir dízimas finitas de infinitas); - Comparar frações com a unidade; - Identificar frações que são números inteiros.	- Tarefa 3; - Calculadora.
4 (17-04-2013)	Tarefa 4: Vamos ajudar os agrimensores egípcios	- Compreender e utilizar um número racional como medida; - Localizar e posicionar na reta numérica números fracionários e mistos.	- Tarefa 4.
5 (23-04-2013)	Tarefa 5: Problemas antigos	- Compreender e utilizar um número racional como operador; - Resolver problemas históricos.	- Tarefa 5.
6 (30-04-2013)	Tarefa 6: A taxa do imperador romano Augusto	- Compreender a noção de percentagem e relacionar diferentes formas de representar uma percentagem; - Traduzir uma fração por uma percentagem e interpretá-la como o número de partes em 100.	- Tarefa 6.

Tarefas no tópico dos perímetros

Aulas	Tarefa	Objetivos	Recursos
7 (28-05-2013)	Tarefa 7: Medir o perímetro do círculo	- Determinar experimentalmente um valor aproximado de π.	– Tarefa 7; - Objetos cilíndricos; - Fitas métricas pequenas e fita métrica grande; - Calculadora; - Computador.
8 (28-05-2013)	Tarefa 8: Uma descoberta muito antiga	- Compreender a irracionalidade do número π.	- Tarefa 8.
9 (03-06-2013)	Tarefa 9: O método de Arquimedes	- Determinar experimentalmente um valor aproximado de π por enquadramento; - Compreender a natureza do valor obtido.	- Tarefa 9; - Computadores com ligação à internet.
10 (04-06-2013)	Tarefa 10: Vamos ver um filme!	- Indicar como se obtém um valor aproximado de π; - Explicar a irracionalidade de π; - Resolver um problema envolvendo o perímetro da circunferência.	- Tarefa 10; - Computador e vídeo-projetor.
11 (04-06-2013)	Tarefa 11: Problemas	- Resolver problemas envolvendo o perímetro da circunferência.	- Tarefa 11; - Calculadora.

Tarefa no tópico das áreas

Aula	Tarefa	Objetivos	Recursos
12 (06-06-2013)	Tarefa 12: Área do círculo – Quadratura do círculo	- Explorar a fórmula da área do círculo através de situações experimentais; - Calcular valores aproximados da área de um círculo;	- Tarefa 12.

3.3. As tarefas realizadas

De seguida passo a apresentar cada uma das tarefas, bem como as resoluções que podem ser esperadas.

Tarefa 1 - Queres imitar os egípcios? - Pretende que os alunos experienciem um trabalho semelhante ao que os agrimensores egípcios executavam na medição de terrenos. O contexto é suportado por um texto introdutório da autoria do historiador Heródoto (Boyer, 2002) que descreve a função destes agrimensores egípcios nessas medições e os alunos, para a realização dessas mensurações, irão manusear o instrumento de medida que numa fase ancestral era utilizado pelos egípcios – cordas em que as marcações apresentam apenas a unidade principal, ou seja, sem sub-unidades (cada unidade da corda tem 26,5 cm – medida escolhida intencionalmente por mim). Os alunos irão medir comprimentos de vários objetos da sala de aula com este utensílio e, deverá surgir a dificuldade de não se poderem realizar medições precisas uma vez que estas cordas apenas contemplam unidades que se socorrem dos números naturais. Assim, o objetivo desta tarefa é levar os alunos a questionar a necessidade de se reajustar o critério de medida utilizado na corta, fazendo surgir, de forma intuitiva, a necessidade da utilização de números racionais e de numerais mistos.

Tarefa 2 - Vamos estudar matemática de há 4000 anos!!! – Pretende dar seguimento ao trabalho desenvolvido pelos alunos na tarefa anterior. Assim, esta tarefa exploratória tem três objetivos específicos que neste contexto histórico rapidamente se cruzam e interrelacionam: Compreender a notação de racional sob a forma de fração; compreender e utilizar um número racional como quociente; relacionar a representação racional fracionária com a representação decimal. A tarefa é iniciada no contexto da exploração de um problema adaptado do Papiro de Rhind (Estrada, 2000) em que uma 'boroa' terá de ser distribuída por quatro homens. Espera-se que os alunos percebam que cada homem recebe uma parte da boroa, a qual deverá ser partida, necessariamente, em quatro pedaços iguais. Os alunos serão consciencializados que estão a fazer um tipo de trabalho prévio à invenção dos decimais não podendo, assim, utilizar respostas com representações decimais, pelo que se pode esperar que a resposta mais comum seja um quarto (nas suas representações 1/4 ou $\frac{1}{4}$). Além disso podem usar representações pictóricas, uma vez que a pergunta subjacente permite a utilização de números, esquemas ou desenhos.

Espera-se, igualmente, que os alunos identifiquem a operação da divisão que está em causa neste problema. Os alunos terão a possibilidade de realizar o algoritmo da divisão para chegarem à resposta 0,25 e para perceberem que sendo a representação fracionária, neste caso, uma divisão, ambas as representações são equivalentes pelo que a fração poderá ser vista, pois, como um quociente. A informação histórica que está registada nesta tarefa visa, sobretudo, que os alunos possam entender que os números racionais já eram conhecidos por outros povos (egípcios e romanos, por exemplo).

Recorrendo a um outro problema do Papiro de Rhind, semelhante ao anterior (Estrada, 2000), pretende-se reforçar a ideia da equivalência entre as duas representações (6:10 e $\frac{6}{10}$), levando os alunos a compreender o significado do traço de fração.

Para finalizar esta tarefa, os alunos serão confrontados com a resposta dada pelo escriba Ahmes ao problema em causa, registado no Papiro de Rhind:

Cada homem recebe $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$

Espera-se que os alunos partam da resposta dada anteriormente na forma decimal (0,6) e analisem cada uma das frações no seu valor decimal, interpretando a resposta como sendo 0,5 + 0,1. Além disso, se as suas respostas aludirem ao facto de cada homem receber metade de uma boroa mais um pedaço de outra que foi partida em dez bocados iguais, pretende-se levá-los a compararem estes números relacionando, intuitivamente, o numerador com o denominador.

Em termos gerais, pretende-se que os alunos aprofundem o seu conhecimento da representação racional sob a forma de fração, a compreensão da fração enquanto quociente e o paralelo entre a representação racional fracionária e a representação decimal.

Tarefa 3 – Da fração às décimas – Este exercício pretende estabelecer a relação entre a representação fracionária decimal e os numerais decimais. Para isso, espera-se que os alunos utilizem o cálculo mental, recorrendo às aprendizagens anteriores (divisão de um número por 10, 100, 1000) e que compararem as frações com a unidade identificando, também, as que são números inteiros. Uma das frações apresentadas - um terço - irá possibilitar que os alunos descubram que em algumas situações poderão deparar-se com frações em que a sua dízima é infinita e periódica (esta nomenclatura será explorada durante a realização desta tarefas e, sobretudo, na discussão final em grande grupo). Os alunos também irão utilizar a calculadora para poderem descobrir outras frações que sejam representadas por dízimas infinitas – neste caso, certamente irão aparecer dízimas infinitas periódicas e não periódicas e caberá aos alunos analisar e discutir estas descobertas. Tendo em conta que esta tarefa utiliza a notação que Simon Stevin (Boyer, 2002) apresentou como alternativa ao exclusivo uso de frações decimais, os alunos irão ser confrontados, na parte final, com duas questões abertas acerca da utilidade desta nova notação e com a dinâmica que a Matemática vai tendo ao longo do tempo, pois pretende-se que percebam que esta ciência está em constante devir.

Tarefa 4 – Vamos ajudar os agrimensores egípcios – É uma tarefa de natureza exploratória e pretende reportar os alunos às dificuldades dos agrimensores egípcios em realizar medições rigorosas abordadas na primeira tarefa. Nessa altura, a fração como medida não foi explorada. Assim, esta tarefa começa por recordar o conceito de medida (medir um comprimento é compará-lo com outro comprimento tomado como unidade e determinar quantas vezes ele é maior ou mais pequeno), colocando lado a lado a corda dos egípcios com um segmento de reta dividido em unidades principais que, por sua vez, se subdividem, facilitando a representação em numeral misto (do tipo $3\frac{1}{3}$). Na parte final, os alunos terão que marcar o comprimento $3\ \frac{3}{2}$ e serão questionados no sentido de compreenderem que naquele tempo, a preocupação dos egípcios prendia-se apenas com as frações unitárias.

Tarefa 5 – Problemas antigos – Pretende que os alunos possam resolver problemas em que a fração aparece, agora, com o significado de operador. O primeiro problema – Distribuindo dinheiro pelos pobres – é adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d`Arismética (1519), transcrito em Almeida (1994, p. 271) e os alunos são confrontados com uma divisão não equitativa de dinheiro. Tendo em conta o conhecimento prévio que os alunos têm, espera-se que dividam o dinheiro total pelo denominador de cada: 60 000 : 3 = 20 000 (um terço), 60 000 : 4 = 15 000 (um quarto), e assim sucessivamente. O segundo problema histórico é retirado de Marques de Almeida - A Matemática na época dos Descobrimentos - (1998, p. 118). Está em causa a divisão de uma herança familiar mas, desta vez, existe uma dificuldade adicional, pois a distribuição de 17 camelos não é prática, uma vez que este número é primo. Alguns alunos poderão, desde logo, identificar que o facto de serem 17 camelos pode dificultar esta divisão e, assim, poderão dizer que o primeiro filho (metade) recebe 8 camelos, sobrando 1, que o segundo filho (um terço) recebe 5, sobrando 2 e que o último (um nono) recebe 1, sobrando 8. Ou seja, no conjunto receberão 8 + 5 + 1 = 14 camelos, sobrando 3 camelos. Pode acontecer, eventualmente, que alguns alunos reparem que sobram 3 camelos e que, desta forma, se poderá distribuir um camelo por cada irmão e, assim, receberão 9, 6 e 2 camelos, respetivamente. Um outro tipo de solução poderá apelar ao facto de esta divisão não equitativa não ser possível, pelo simples facto de não ser possível fazer uma divisão exata de 17 camelos.

Na segunda parte desta pergunta, os alunos irão interpretar, possivelmente, o empréstimo como 1 + 17 = 18 e, deste modo, será fácil corresponder à distribuição pretendida:

Metade – 9

Um terço – 18 : 3 = 6 (ou 6 x 3 = 18)

Um nono – 18 : 9 = 2 (ou 9 x 2 = 18)

Possivelmente, alguns alunos apresentarão uma resposta semelhante à exposta mas certamente que outros irão reparar que 9 + 6 + 2 = 17, pelo que sobra um camelo que poderá ser devolvido ao homem mais velho da aldeia que inicialmente lhes tinha emprestado o seu animal.

Com a resolução destes problemas históricos pretende-se, pois, que os alunos apliquem os seus conhecimentos prévios sobre a multiplicação e a divisão utilizando os números racionais como operadores.

Tarefa 6 - A taxa do imperador romano Augusto – Os alunos terão a possibilidade de explorar o conceito de percentagem num momento histórico em que a sua aplicação recaía sobre a venda dos bens, sendo cobrado um centésimo de cada transação: "Centesima rerum" (NCTM, 1989, p. 147). Pretende-se que o aluno compreenda que existe uma relação entre o 100 no denominador de uma fração com a palavra per*centagem* – 100. Simultaneamente, também se questiona qual a parte que foi cobrada pelo imperador e qual a parte que sobrou. A resposta que se pretende é que os alunos percebam que se a parte cobrada é $\frac{1}{100}$ e que o vendedor ficou com $\frac{99}{100}$. Existe a possibilidade de alguns alunos responderem que o vendedor ficou 99 moedas e que o imperador recebeu 1 moeda pelo facto de os alunos confundirem parte com quantidade.

Posteriormente, os alunos irão ser confrontados com uma nova situação em que a base do cálculo não é 100 e, por isso, não tão evidente Espera-se que os alunos recorram ao cálculo mental, uma vez que fazendo 350:100 = 3,5. Ainda assim, os alunos terão que perceber que, neste caso, não existem 3,5 moedas, pelo que o imperador irá receber 4 moedas. Também poderão utilizar o mesmo raciocínio mas usando a linguagem natural. Outra possibilidade prende-se com o facto de os alunos interpretarem a fração em causa nesta taxa como sendo 0,01 e poderem fazer a multiplicação deste valor pelo total de moedas. Na continuação deste contexto, pretende-se que os alunos desenvolvam sentido crítico em relação à utilidade da unidade de pagamento em causa, justificando a necessidade de sub-unidades monetárias. De certa forma, esta situação vai ao encontro da tarefa 1 em que as medições dos agrimensores também expuseram a dificuldade da utilização exclusiva dos inteiros. Para finalizar, os alunos deverão escrever a taxa cobrada pelo imperador sob a forma de fração, de percentagem e de decimal para que compreendam a equivalência entre estas representações.

Tarefa 7 - Medir o perímetro do círculo como as civilizações mais antigas – Permitirá aos alunos desenvolver um trabalho semelhante àquele que terá sido utilizado pelos povos mais antigos na medição do perímetro do círculo, ou seja, colocando uma fita métrica em redor de alguns objetos cilíndricos para, depois, medirem o seu comprimento. Possibilitará, também, que os alunos entendam que o computador foi, pois, um instrumento importantíssimo na história deste número, favorecendo a sua compreensão enquanto irracional.

Nesta tarefa, existirão três grupos a realizar trabalhos distintos mas a decorrer em simultâneo:

(i) Um grupo de quatro alunos irá realizar as medições descritas para vários objetos cilíndricos presentes na sala utilizando uma fita métrica;

(ii) Um grupo de três alunos irá utilizar o computador, nomeadamente o programa Geogebra, para realizar as mesmas medições procedendo, da mesma forma, ao registo na tabela (a existência deste grupo de trabalho tem três fundamentos: a) dado que se utiliza o computador, as medições são mais rigorosas, quando comparadas com aquelas que são realizadas manualmente; b) na tarefa seguinte, pretende-se que os alunos compreendam que a utilização do computador permitiu compreender melhor a natureza do número em estudo, nomeadamente porque permitiu e continua a permitir o cálculo de um grande número de casas decimais, o que consolida a perceção da irracionalidade de π; c) a fundamentação teórica já descrita elucida as vantagens do recurso ao mesmo); (iii) Um grupo de dez alunos irá ao campo de futebol para medir o perímetro e o diâmetro do seu centro utilizando uma fita métrica grande que normalmente é usada nas aulas de Educação Física. Esta medição visa consolidar a noção da constância da razão entre o perímetro e o diâmetro, independentemente do tamanho de um círculo.

Os registos das medições efetuadas pelos vários grupos são disponibilizados a todos os alunos e podem usar a calculadora para auxiliar os cálculos da razão entre o valor do perímetro e o do diâmetro. Depois, os alunos deverão conjeturar sobre essa razão e fundamentar as suas conclusões. Atendendo aos conhecimentos prévios dos alunos esperam-se respostas que, de um modo geral, se poderão enquadrar nas seguintes tipologias: i) este valor é/parece ser constante para qualquer círculo; ii) este valor é aproximadamente 3; iii) este valor é aproximadamente 3 mas "parece" ter uma parte decimal infinita; iv) o perímetro de um círculo é aproximadamente o triplo do seu diâmetro.

No que diz respeito ao número π, poderão ser levantadas duas conjeturas relativas ao número de casas decimais, já que se espera que os alunos não tenham dificuldade em perceber que não é um número inteiro: i) a de que este número tem muitas casas decimais finitas; ii) a de que este número tem casas decimais infinitas. De seguida, orienta-se o questionamento no sentido de os alunos generalizarem a relação encontrada usando linguagem algébrica (P = 3 x d). Na discussão em grande grupo será debatido a adequabilidade do sinal de igual e introduz-se o símbolo $\cong$, cuja análise será retomada noutra tarefa.

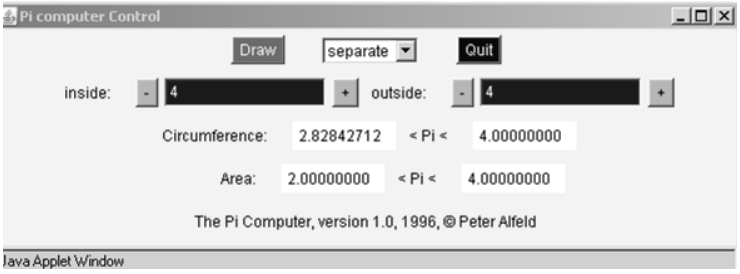
Tarefa 8 – Uma descoberta muito antiga - Pretende confrontar as descobertas dos alunos na tarefa anterior com as tentativas de outros povos e seus matemáticos, para que compreendam que a construção do conhecimento acerca do valor e do significado do número pi demorou muitos séculos a ser entendido. Nesse sentido, aos alunos será dada a possibilidade de analisar e explorar uma tabela cronológica que abarca um espectro histórico consideravelmente largo e qualitativamente rico do contributo de alguns povos e matemáticos para o cálculo de π, tendo como objetivo promover a compreensão da irracionalidade do número em estudo. As questões da tarefa começam por focar a atenção dos alunos para os primeiros povos que fizeram um tratamento deste número (começa-se, pois, no ano 2000 a.C.) e para o valor referido na Bíblia, neste caso por três razões: i) os alunos poderão analisar um excerto da Bíblia e retirar dele os dados necessários para descobrir que o valor que se pode deduzir é 3; ii) sendo a Bíblia um documento culturalmente relevante na sociedade portuguesa, os alunos poderão ver a Matemática num contexto que vai muito além da sala de aula e da própria Matemática; iii) os alunos serão confrontados com um valor de π inteiro e que, assim, poderá leva-los a tecer conjeturas acerca do mesmo (da primeira tarefa resultou que a razão entre o perímetro de um círculo e o seu diâmetro era aproximadamente 3, cujas dízimas se apresentaram infinitas e não periódicas). O conjunto de questões que se seguem pretendem realçar a irracionalidade do π e o papel do computador nessa descoberta, levando-os a conjeturar sobre o número de casas decimais deste número e, através de comparações com outros números fracionários, compreender que não existe periodicidade na sua parte decimal.

A irracionalidade deste número não é de fácil compreensão, como o comprova a sua própria história e, sendo este o primeiro contacto dos alunos com um número desta natureza, pretende-se que os alunos possam refletir acerca de dois aspetos importantes: (i) esta razão apresenta uma parte decimal infinita que simultaneamente não ostenta um padrão sequencial e (ii) na impossibilidade do cálculo da mesma com exatidão se tenha optado por utilizar uma letra.

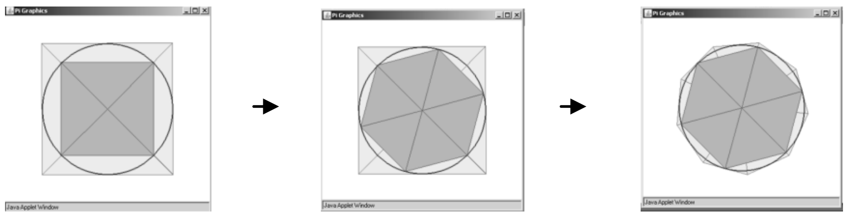
Na discussão em grande grupo, será discutida qual a melhor aproximação a utilizar para o valor desta constante. Os alunos deverão compreender que utilizar o valor 3 apenas será uma boa aproximação se tivermos em conta uma estimativa conseguida através do cálculo mental. Para finalizar, os alunos irão registar aquelas que considerem ser as principais ideias acerca de π, proporcionando-lhes mais um momento de reflexão.

Tarefa 9 – O método de Arquimedes – Pretende-se que os alunos experimentem o método utilizado por Arquimedes para o cálculo de π e que percebam qual a ideia subjacente a este procedimento. Agora que os alunos têm uma melhor compreensão deste número poderão, assim, proceder a um cálculo de π muito mais rigoroso devido ao processo que se utiliza. Para tal, recorre-se a uma aplicação disponível em http://www.math.utah.edu/~alfeld/Archimedes/Archimedes.html. Foi selecionada a partir do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007, p.72), "http://archives.math.utk.edu/topics/history.html", cujo sítio disponibiliza vários arquivos relacionados com História da Matemática e onde se pode encontrar um deles relativo ao número π – "Arquimedes e o cálculo de pi".

A aplicação em causa possui duas janelas que funcionam em simultâneo: numa delas os alunos poderão aumentar o número de lados do polígono inscrito e circunscrito ao círculo e ir comparando qual o valor de π (com oito casas decimais) por enquadramento:

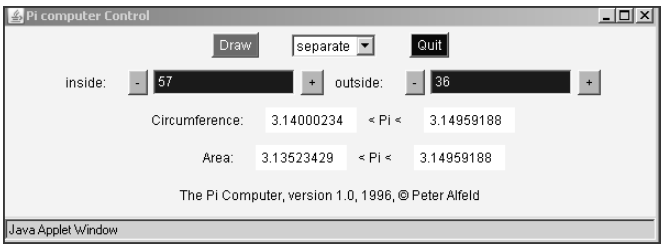


Sempre que se aumenta ou diminui o número de lados dos polígonos, os alunos poderão acompanhar visualmente o que vai acontecendo aos mesmos.



Deste modo, os alunos exploram a compreensão do significado de enquadramento de uma forma contextualizada e espera-se que possam ver esses mesmos quadrados a assemelharem-se a círculos, ainda que nunca coincidissem com ele, compreendendo a aproximação de Arquimedes.

Além disso, com o aumento do número de lados de ambos os polígonos, os alunos irão concluir que o valor de 3,14 para π se obtém quando o polígono inscrito tem 57 lados e o polígono circunscrito tem 36 lados.



Com base na informação de que Arquimedes chegou a um polígono com 96 lados, pretende-se que os alunos digam entre que valores se situa π e que percebam que o aumento sucessivo do número de casas decimais permite obter um valor cada vez mais rigoroso para este número.

Assim, no final da tarefa, pretende-se que os alunos compreendam que: (i) sendo este método difícil de executar manualmente, a utilização de 96 lados permitiu uma excelente aproximação para o valor de π; (ii) talvez não tenha sido possível continuar este trabalho pela dificuldade que apresenta, uma vez que os cálculos foram executados à mão; (iii) talvez Arquimedes se tenha apercebido que por mais que aumentasse o número de lados inscritos e circunscritos ao círculo, nunca obteria o valor real desta constante.

Tarefa 10 – Vamos ver um filme – Pretende-se que os alunos indiquem como se pode obter um valor aproximado de π, explicando a sua irracionalidade, e que resolvessem um problema envolvendo o perímetro da circunferência. Os alunos irão conceber, em grupo, um relatório sobre o filme disponível em *http://www.youtube.com/watch?v=IEucccdZ2P0*. Esta tarefa integra, assim, um conjunto de questões orientadoras que devem ser exploradas pelos alunos. O filme será visionado com algumas pausas para que, deste modo, os alunos possam tirar notas e interagir entre si, decidindo quais as ideias mais importantes a explorar. O relatório terá de ser entregue uma semana depois, por escrito, e o trabalho apresentado oralmente à turma, pelo que (i) os alunos terão o apoio do professor fora do horário da turma para acompanhar o trabalho que se vai desenvolvendo e dar feedbacks escritos e orais sobre o desenrolar do mesmo e (ii) os alunos poderão voltar a visionar o filme na internet, em casa e têm disponibilidade para se encontrarem de forma a dinamizarem o relatório e grupo. Para a apresentação dos trabalhos, cada grupo irá dispor de 10 minutos, sendo 5 minutos para a apresentação e os restantes 5 minutos para discussão do trabalho (perguntas e esclarecimentos). De um modo geral, os principais pontos que deverão constar em cada resposta são os seguintes:

De um modo geral, os vários grupos terão que definir o problema que está em causa e resolvê-lo na parte final do relatório. Terão, ainda, a oportunidade de criticar fundamentadamente a primeira sugestão apresentada no filme (utilização de uma fita métrica). Este filme contempla, ainda, a distinção entre círculo e circunferência e a constante que resulta da razão entre o perímetro e o diâmetro para qualquer circunferência e dá aos alunos a possibilidade de descreverem a forma como se chega à conclusão da existência dessa constante. Os alunos também terão que explicar por que razão pi é um número irracional.

Apresentação do trabalho – um dos aspetos que será questionado pelo professor aquando da apresentação de cada trabalho é a natureza do número em causa.

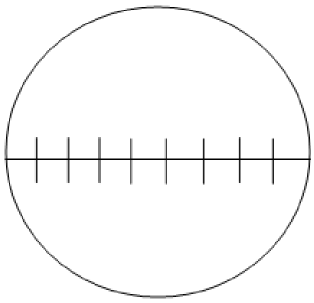
Questionar-se-á por que razão é que foi tão difícil ao longo da história perceber que para qualquer círculo a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro é sempre igual. As respostas que se esperam deverão apontar para o facto de (i), inicialmente, se utilizarem processos manuais de medição que, por serem pouco rigorosos, não permitiam chegar a um valor que fosse considerado sempre constante e porque (ii) sendo este número irracional, tal compreensão ainda se tornou mais difícil.

Tarefa 11 – Problemas - Esta tarefa pretende que os alunos resolvam problemas, individualmente, para aplicar e consolidar os conhecimentos construídos. Podem ser identificadas duas partes distintas. Na primeira parte os alunos terão a oportunidade de resolver três problemas, sendo dois deles retirados das provas de aferição (problema 1 – o frasco – prova de aferição de 2004; problema 2 – relógio da Liliana - prova de aferição de 2006) e o terceiro elaborado por mim. No problema 1 é dado o diâmetro de um frasco e aos alunos terão de descobrir qual a quantidade de fita que se utiliza na aplicação de duas faixas iguais em seu redor. No problema 2, os alunos terão que descobrir qual a distância que a joaninha percorrerá durante um dia e, para tal, terão de partir do valor do raio da circunferência em causa. No problema 3, será dado o valor do perímetro de uma piscina e os alunos terão de calcular o valor do diâmetro da mesma. Na segunda parte, os alunos serão confrontados com a natureza do número π e deverão descrever uma forma manual de obter um valor aproximado do mesmo sem recorrerem a nenhum programa informático.

Tarefa 12 – Área do círculo – Quadratura do círculo. Considera-se que esta tarefa é bastante ambiciosa tendo em conta a natureza do π, por um lado, e o significado da fórmula atual para o cálculo da área do círculo, por outro. Esta tarefa tinha como objetivos explorar o procedimento do cálculo da área do círculo através de situações experimentais e calcular valores aproximados da área de um círculo a partir do seu enquadramento

Esta tarefa pretende que os alunos compreendam que para se chegar à fórmula atual para o cálculo da área do círculo também foi necessário percorrer um longo trajeto ao longo da História da Matemática. Nesta ótica, os alunos serão desafiados a construir um quadrado e um círculo com a mesma área, missão que hoje se sabe ser impossível. No entanto, o objetivo principal é que os alunos registem as dificuldades que vão tendo, as dúvidas e as suas descobertas. É importante que haja um primeiro contacto com esta atividade para que os alunos percebam que para se chegar à área do círculo é necessário relacioná-lo com o quadrado, nomeadamente com a sua área. Pede-se aos alunos que desenvolvam este trabalho numa folha quadriculada utilizando régua, lápis e compasso. O facto de se pedir que utilizem uma folha quadriculada justifica-se por mais facilmente se poder contar os quadrados da mesma para se ter a noção do quão próximas ou afastadas são as áreas dos polígonos que possam desenhar. Pretende-se, pois, que os alunos possam explorar esta possibilidade através de enquadramentos utilizando, assim, os seus conhecimentos anteriores.

Com o objetivo de os alunos explorarem a possibilidade de se construir um quadrado e um círculo com a mesma área serão incentivados a construir um quadrado utilizando uma regra egípcia contida no problema número 50 do papiro de Rhind (Blatner, 2001). Esta regra está descrita e acompanhada de uma figura ilustrativa na qual o diâmetro já está dividido em nove partes iguais, para facilitar a construção.



Interpretar um texto da antiguidade nem sempre é fácil pelo que se espera algumas dificuldades na sua interpretação que serão ultrapassadas com o auxílio do professor.

Na divisão do círculo, os alunos também poderão ter alguma dificuldade em fazê-la tendo em conta o centro do mesmo. No entanto, o mais importante é que se perceba que tiveram o cuidado de procurar tal ponto para traçarem os segmentos de reta correspondentes.

A questão 3.2 pode ser considerada a mais importante desta tarefa, uma vez que a compreensão do significado de r^2 irá facilitar a compreensão da fórmula da área do círculo. Quando se trabalhou anteriormente a fórmula para o cálculo da área do quadrado estabelecemos a igualdade entre l x l e l^2 para uma melhor compreensão: i) da utilização da unidade m^2; ii) do aprofundamento do significado de potência no contexto específico do cálculo de áreas. De qualquer modo, prevê-se que surjam dificuldades na interpretação de r^2, dado a elevada abstração que a mesma encerra.

Existem expetativas quanto às respostas à questão 3.4, tendo em conta a dificuldade própria do conceito de π associada ao cálculo da área do círculo que se apresenta a dois níveis: i) Perceção de que no círculo cabem π vezes um dos quadrados mais pequenos (r^2); ii) Compreender o significado de π vezes.

Relativamente à fórmula atualmente utilizada para o cálculo da área do círculo, pretende-se que os alunos possam aplica-la para o cálculo da área do círculo contido no papiro de Rhind para que, depois, comparem o valor obtido com o dos egípcios. No entanto, poderão surgir algumas dificuldades em relação a r^2 uma vez que é dado o valor do diâmetro (9 jet) e, assim, os alunos terão de começar por calcular o valor do raio e depois calcular o seu quadrado.

3.4. Avaliação das aprendizagens

A avaliação encontra-se intimamente relacionada com a gestão curricular, sendo através daquela que o professor vai recolher as informações que lhe possam mostrar o progresso dos seus alunos na disciplina, fazer o diagnóstico de problemas e carências na aprendizagem e no trabalho desenvolvido pelos alunos (ME, 2007; NCTM, 2007).

Segundo Pinto e Santos (2006) a avaliação das aprendizagens evoluiu da avaliação como medida ou balanço dos saberes para a avaliação como um instrumento de regulação pedagógica.

Enquanto a primeira avalia o resultado final da aprendizagem do aluno, a avaliação reguladora das aprendizagens é uma avaliação interativa que procura intervir para melhorar, centrando-se nos processos cognitivos dos alunos, associada ao feedback (Black & William, 1998; Gipps, 1999). O principal destinatário da avaliação é o aluno e a sua própria aprendizagem. Tem como propósito apoiar e orientar a aprendizagem dos alunos, como também envolvê-los na autorregulação do seu próprio trabalho. O aluno é implicado na sua aprendizagem, num processo de consciencialização das suas dificuldades e dos seus sucessos, estando mais focalizada no processo de aprendizagem do que nos resultados dessa aprendizagem. As investigações levadas a cabo sobre esta temática evidenciaram que a concretização de uma avaliação desta natureza pode melhorar significativamente o desempenho escolar dos alunos (Black & Wiliam, 1998; Wiliam & Thompson, 2007). Na avaliação formativa, Pinto e Santos (2006) salientam que a interpretação do afastamento entre o produto esperado e o realizado, e as orientações que se dão posteriormente, são o núcleo duro da vertente formativa da avaliação. A regulação faz-se através de um processo de comunicação, que é muito importante para que se possa estabelecer um entendimento mútuo entre professor e aluno.

A utilização de um variado leque de técnicas e instrumentos durante a avaliação das aprendizagens dos alunos pode ser levada a cabo pela observação, por conversas com os alunos, pela resolução de problemas, entre outros, e da interação dos vários instrumentos resulta uma avaliação mais sólida da aprendizagem dos alunos uma vez que o professor recolheu mais informação sobre os mesmos (NCTM, 2007).

De acordo com Menino e Santos (2004) é a observação que permite completar a recolha de informação que se faz através de outras vias, pelo que será tido em conta a participação dos alunos nas tarefas de exploração, nomeadamente o empenho, a autonomia e o interesse. As discussões acerca das conclusões obtidas serão, também, momentos em que a observação será crucial, pois será considerado o grau de participação dos alunos nas mesmas.

O relatório escrito é definido por Varandas (2000, citado por Menino e Santos, 2004) como a produção sob a forma escrita que permite ao aluno descrever, analisar e criticar uma determinada situação ou atividade e que para além de instrumento de avaliação pode promover a aprendizagem, na medida em que o aluno tem que registar por escrito o seu pensamento, articular ideias e explicitar procedimentos. Este instrumento permite o desenvolvimento da comunicação escrita, levando o aluno reorganizar as suas aprendizagens anteriores numa nova situação (Pinto & Santos, 2006).

Segundo Sadler (1989), o feedback tem um papel decisivo na aprendizagem, sendo um elo fundamental entre a avaliação e a aprendizagem (Gipps, 1999). Segundo Gipps (1999), existem dois tipos de feedback: o feedback avaliativo, que se baseia principalmente na formação de juízos de valor e tem poucos efeitos de natureza reguladora, e o feedback descritivo, que se relaciona com o desempenho dos alunos face às tarefas propostas. O feedback descritivo divide-se em feedback especificando o progresso, em que o professor se limita a fazer apreciações dos trabalhos, identificando os conhecimentos e processos utilizados, indicando o que deve ser melhorado, sendo apenas da sua responsabilidade; e o feedback construindo o caminho seguinte. Neste último caso, é atribuído ao aluno maior controlo e responsabilidade, uma vez que este participa mais ativamente na sua aprendizagem (Gipps, 1999), existindo uma colaboração entre professor e aluno. Este feedback só será eficaz se questionar e apontar pistas de ação futura (Santos, 2002). Foca-se, também, nas indicações precisas para melhorar, acontecendo de uma forma continuada, promovendo uma postura de reflexão e autoavaliação nos alunos, sem incluir juízos de valor. Assim, durante o apoio prestado pelo professor aos vários grupos, serão efetuados feedbacks orais e escritos de natureza essencialmente descritiva e indicativa do passo seguinte, de forma a permitir que cada grupo de trabalho oriente da melhor forma a sua produção escrita conseguindo-se, assim, uma aprendizagem mais efetiva, sustentada e objetiva.

Na proposta pedagógica que serve de base ao estudo, as atividades realizadas pelos alunos são essencialmente de natureza exploratória mas, ainda assim, recorre-se também à resolução de exercícios e problemas para que se apliquem os conteúdos e conceitos construídos durante as aulas e também de fichas de avaliação sumativa. Irão ser aplicados diversos métodos e instrumentos de avaliação uma vez que também são distintos os objetivos curriculares a avaliar e as formas como os alunos podem demonstrar os seus conhecimentos (ME, 2007; NCTM, 2007). Por outo lado, também se recorre à observação direta, às intervenções orais, às produções escritas nas tarefas e ao relatório escrito. Quanto ao saber estar, o mesmo também foi tido em consideração, nomeadamente em relação à pontualidade, à assiduidade, cumprimento das regras predefinidas, realização dos trabalhos para casa e autonomia na realização das tarefas.

Para a avaliação final dos alunos foi tida em conta a ponderação geral de avaliação utilizada na escola: 60% para o saber e o saber fazer e 40% para as atitudes e valores. No final do ano letivo, as avaliações da turma onde se aplicou a proposta pedagógica foram as seguintes:

- nível 2 – dois alunos;
- nível 3 – um aluno;
- nível 4 – seis alunos;
- nível 5 – oito alunos.

3.5. Recolha de dados

Tendo em conta os objetivos e as questões que se pretendem responder com a elaboração deste relatório, foram definidos, previamente, os métodos de recolha de dados considerados mais adequados ao mesmo (Bell, 2002).

Nesta proposta pedagógica, o professor interage com os alunos recolhendo todos os dados produzidos durante a aula. Assim, será tido em conta a recolha documental, a observação participante associada às notas de campo, as gravações áudio e vídeo. Desta forma, o principal instrumento de recolha de dados será o próprio investigador pois estará presente em todos os momentos deste trabalho, podendo tirar as suas conclusões a partir das ações que irão decorrer no contexto natural de sala de aula. O objetivo da recolha deste tipo de dados é interpretar e analisar as respostas dos alunos de uma forma rigorosa.

A observação participante foi considerada adequada uma vez que é uma forma específica de observação e é preciso ter em conta que o professor está inserido no contexto do estudo e poderá, desta forma, participar nos acontecimentos a estudar (Yin, 2003). Quanto à recolha documental, Yin (2003) considera que estes documentos são uma fonte de dados muito importante para que se possam validar as conclusões que possam surgir através de outras fontes de dados.

3.6. As aulas lecionadas

A proposta pedagógica apresentada foi planificada tendo em conta os objetivos que se pretendem alcançar com vista à promoção da aprendizagem dos alunos (Stein & Smith, 2010). Para o efeito, selecionaram-se ponderadamente os diversos materiais didáticos e o modo de os utilizar tendo em conta os objetivos definidos para cada tarefa (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008).

A primeira aula desta proposta ocorreu no dia 11 de abril de 2013 e a última no dia 06 de junho de 2013 perfazendo um total de 12 aulas. Para a realização das tarefas os alunos trabalharam de vários modos, nomeadamente em trabalho de grupo (a pares e nalguns casos em grupos maiores) uma vez que se pretendia que os alunos pudessem construir ativamente os saberes a partir da discussão de ideias, da partilha de saberes, da cooperação, da confrontação de conjeturas, do teste de dúvidas, entre outros. Pretendeu-se, pois, que a construção do conhecimento se edificasse a partir do respeito pelas ideias do outro tendo sempre em conta a individualidade e as caraterísticas únicas de cada aluno, pois ambicionava-se que a interação entre os membros de cada grupo se pudesse direcionar para o respeito na construção do conhecimento. As aulas finalizavam sempre com uma discussão em grande grupo em que toda a turma poderia validar as descobertas experienciadas pelos diversos grupos envolvidos no trabalho. De qualquer forma, existiram, também, momentos de trabalho de responsabilidade individual, nomeadamente na resolução de problemas relacionados com o perímetro do círculo. A metodologia de trabalho de grupo é utilizada desde o início do ano letivo, ainda que nem sempre tenha tido a mesma constituição. De uma forma global, os vários elementos de cada grupo articularam-se bem entre si havendo uma ou outra situação normal de conflito que facilmente foi ultrapassada pelos alunos, ora com a intervenção do professor, ora com a resolução autónoma do grupo. Considero, assim, que a organização do trabalho em grupo decorreu de forma harmoniosa tendo em conta que este tem sido sempre um aspeto desenvolvido desde o início do ano letivo, não só por mim como também por todos os docentes que com esta turma trabalham. No que respeita à formação dos grupos procurou-se que os mesmos pudessem assentar na heterogeneidade, não só ao nível das capacidades intelectuais mas também ao nível comportamental que se foi verificando ao longo de todo o ano letivo. Assim, pretendeu-se organizar os vários grupos no sentido de todos os elementos terem um sentimento de identidade e de partilha com o mesmo para que se criasse uma boa dinâmica de grupo e, consequentemente, uma boa progressão da aprendizagem. Os grupos que foram definidos inicialmente mantiveram-se, excetuando-se uma ou outra aula em que um aluno estaria a faltar, o que aconteceu muito raramente. Procurou-se que dentro de cada grupo todos os elementos pudessem intervir para que o sentimento de coesão de grupo se pudesse ampliar de tarefa para tarefa e os alunos demonstraram muita cordialidade nas suas intervenções e no respeito pelas intervenções dos outros. No entanto, tento em conta que a turma se encontrava muito motivada para este estudo bem como na resolução das respetivas tarefas, alguns alunos nem sempre esperavam pela sua vez para falar o que foi facilmente gerido pois todos os alunos perceberam que teriam sempre um espaço para intervirem e que, dessa forma, não teriam a necessidade de interromper o discurso dos seus colegas.

Desta forma, os alunos conseguiram apresentar as suas ideias, as suas descobertas e as suas conjeturas dentro de um ambiente de respeito e as várias opiniões foram vistas como uma mais-valia para a construção do conhecimento. A grande motivação e empenho de todos os alunos fez com que alguns alunos tivessem, por vezes, dificuldade em participar com o dedo no ar sem interromper o colega mas simplesmente porque a vontade em contribuir era evidente. A partir do momento em que as tarefas eram apresentadas e explicitadas os vários grupos começavam a trabalhar autonomamente com grande entusiasmo e o professor era solicitado para esclarecer um ou outro aspeto que não tinha sido entendido na plenitude, sempre numa perspetiva de orientador.

Capítulo 4

O trabalho realizado pelos alunos

Neste capítulo apresento a análise, por tarefa, do trabalho realizado pelos alunos da turma, tendo em vista a resposta às questões do estudo. Assim, procurei identificar as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos, as principais dificuldades reveladas pelos mesmos, os conhecimentos anteriores que foram mobilizados e as aprendizagens realizadas pelos alunos.

4.1. Tarefas

Tarefa 1

O objetivo desta tarefa era fazer surgir a necessidade da existência de representações para os números racionais fracionários, introduzindo o conceito de numeral misto.

Como introdução à tarefa indaguei os alunos sobre os números que já conheciam, levando-os a recordar sobretudo os números naturais e os inteiros. De seguida, contextualizei a tarefa, informando os alunos que iriam, a pares, realizar um trabalho semelhante ao que os egípcios executaram há cerca de 4000 anos atrás. Os alunos da turma reagiram a esta proposta mostrando-se bastante motivados por este suporte histórico.

A exploração da tarefa iniciou-se com a leitura do seu texto introdutório, por parte de um aluno, para toda a turma e, no sentido de esclarecer os aspetos mais relevantes para uma correta contextualização do problema, lancei no seio da turma algumas questões acerca do conteúdo do texto. Os aspetos discutidos relacionaram-se com: i) a repartição de terrenos do faraó Sesóstris por alguns egípcios; ii) a subida das águas do Rio Nilo que conduzia à destruição das marcações desses terrenos; iii) a origem da palavra agrimensor (através da sua decomposição: *agri (agricultura)* + *mensores (medição)*) e a função/necessidade da sua existência (funcionários do faraó que eram responsáveis pelas medições de terrenos); iv) a utilização de cordas por parte destes funcionários para executarem medições, sendo a unidade de medida cada um dos espaços entre dois nós consecutivos. Esta discussão inicial facilitou a interpretação do enunciado da tarefa e os alunos iniciaram a sua exploração sem dificuldades. Apenas um aluno considerou a utilização da régua para efetuar a medição dos vários objetos, solicitada na questão 1.1, mesmo estando indicado no enunciado e após se ter discutido a utilização da corda para essa função. Esta situação pode evidenciar que, para alguns alunos, as medições estão exclusivamente relacionadas com o sistema métrico. Um outro aluno foi capaz de antecipar uma das dificuldades esperadas na resolução desta primeira questão quando diz: "E se não chegar a ter uma [unidade] exata?" (A8). Remeti tal reflexão para os grupos, uma vez que a questão era o foco da exploração da tarefa. De facto, vários pares depararam-se com essa mesma situação, como espontaneamente refere um dos alunos, em jeito de questionamento, a propósito da medida borracha: "Isto nem chega a um traço!?" (A5).

A tendência inicial dos alunos para responderem à questão 1.1., utilizando a representação decimal para registar a medida dos objetos, foi desincentivada por mim alertando-os para o facto dos números decimais só terem sido inventados muito mais tarde. Sugeri que começassem por registar a parte inteira e depois, caso existisse, a parte não inteira dos valores das medições.

Nos objetos com medida superior à unidade, muitos alunos seguiram a sugestão de registar primeiro o número de unidades correspondentes à parte inteira, que não suscitou dificuldades e, de seguida, registar a parte não inteira, tarefa que já se revelou mais difícil para os alunos e que fez com que estes discutissem tal questão entre si. A estratégia mais comumente utilizada para encontrar o valor da parte não inteira da medida destes objetos foi ver quantas vezes exatas é que essa parte cabia na unidade. Por exemplo, no que respeita ao comprimento da mesa, vários grupos afirmaram, corretamente, que media 4 unidades e meia: "Nós dobrámos e chegava assim e fazia assim" (A9) e, enquanto falava, explicou através de gestos (usando a corda dobrada ao meio) que a parte não inteira cabia exatamente duas vezes na unidade, logo era metade. Outro aluno afirmou o seguinte:

> Nós temos a certeza que é 4 e meio. Como a corda chegava a um certo ponto eu dividi a corda porque já tinha passado da mesa e tentei juntar a próxima unidade à outra e deu-me certo, o que significa que é uma metade. (A8)

Nestes casos, os alunos recorrem aos termos meio, meia e metade (o aluno A2 escreve "metade de uma unidade" no objeto à escolha), termos habitualmente trabalhados no 1.º ciclo. Recorrem, assim, aos conhecimentos anteriores relacionados com os números racionais, no seu significado de parte-todo, ainda que não tenha sido explícito o uso da fração para a metade - alguns alunos usaram, inicialmente, a representação decimal 0,5. Outro conhecimento anterior que também foi mobilizado diz respeito à distinção entre comprimento e largura: "O comprimento é assim ou assim? [gesticulando o comprimento e a largura] (A1)", ao que o colega de trabalho deste aluno respondeu apontando para o comprimento da mesa.

Para a altura da mesa, destaca-se a resposta do aluno A9 pela forma como é intuitivamente registada a medição: "Aqui dobramos a corda em quatro partes"; "Exatamente iguais"; "Dobramos em 4 e deu-nos 2 [unidades inteiras] e três partes de quatro"; "Podemos escrever três partes de quatro?" (A9). A questão que este aluno me colocou evidencia que procurou registar aquela medição de uma forma intuitiva, pois a parte não inteira era o resultado de uma unidade que fora dividida em 4 partes e das quais se contabilizavam 3, embora não tivesse a certeza se estava a sugerir uma representação correta. A interpretação deste número racional no significado parte-todo é visível pois este aluno procedeu à divisão da unidade em quatro bocados iguais tomando para si três. Outros alunos conseguiram, igualmente, realizar a medição com sucesso apesar de utilizarem uma representação distinta da anterior: "2 unidades e 3 quartos" (A3 e A5). Esta forma de contabilizar a parte não inteira evidencia, também, uma interpretação da fração como parte-todo.

De uma forma geral, as dificuldades evidenciadas pelos alunos nesta questão prendem-se com a representação do valor da parte não inteira da medição, à qual atribuíram diferentes designações:

> 2 mais um bocado. (A11, altura da mesa)
>
> Mas na altura da mesa devia ser duas unidades mais um bocadinho porque a diferença entre o meio da largura é inferior à altura. (A13)
>
> 4 + mais do que meia. (A12, comprimento da mesa)

Estes alunos apercebem-se que a parte não inteira do objeto tem uma medida inferior à unidade mas mostram dificuldade em medi-la e registá-la. A resposta do aluno A12 mostra que ele recorre ao seu conhecimento da propriedade da densidade dos racionais pois compreende que aquela porção do objeto, tendo uma medida inferior à unidade, vale mais do que a sua metade. Assim, evidencia compreender que existem outros números entre a metade e a unidade seguinte.

Quando a turma finalizou esta primeira questão fez-se a discussão da mesma em grande grupo, sendo que os alunos perceberam que estas designações atribuídas à parte não inteira não representavam sempre o mesmo e, por isso, surgiu a necessidade de contrapor *bocadinho* à palavra *bocado*. Também concordaram que esta distinção era muito limitada por não ser nem rigorosa nem útil, no que diz respeito ao valor concreto para a medição.

Em relação ao comprimento da borracha, que é inferior à unidade, a estratégia usada por dois alunos para efetuar a medição é semelhante à utilizada para encontrar o valor da parte não inteira da medida dos objetos de dimensão superior à unidade: "Medimos assim [colocou a borracha sobre a corda] e fomos dobrando para ver se dava [se aquele pedaço cabia um número exato de vezes na unidade]" (A13). Estes alunos escreveram que a borracha media "1/6 de uma unidade" (A1 e A13) e mostraram-me, por dobragem, que a mesma cabia exatamente seis vezes dentro da unidade da corda. A representação utilizada foi conseguida intuitivamente, pois este tipo de representação não é utilizado habitualmente no primeiro ciclo e apenas dois alunos a utilizaram. Neste caso, o grupo deste aluno utilizou o significado de medida para a fração em causa, uma vez que a utilização de frações inferiores à metade é uma capacidade necessária para o desenvolvimento deste significado. Simultaneamente, também se pode considerar que atribuíram o significado parte-todo a esta fração, uma vez que há a perceção de que a borracha coube exatamente 6 vezes dentro da unidade, pelo que a mesma valerá 1 de seis bocados idênticos. No entanto, uma grande parte dos alunos registou apenas que o comprimento da borracha não chegava a uma unidade, evidenciando dificuldades na conceção da corda como unidade ou que apenas se reportaram à utilização de números inteiros, uma vez que tinha sido solicitado que não empregassem os decimais, o que está de acordo com a habitual tendência dos alunos em utilizar para os racionais as regras que conhecem dos inteiros. Os alunos A1 e A13 voltaram a destacar-se na medição de um objeto à escolha. Curiosamente, o aluno A1 escreve "1 uni + 1 décimo" – utiliza intuitivamente esta designação, talvez porque estabeleça o paralelo com a designação "uma décima" relativa aos decimais - enquanto que o seu colega, o aluno A13, apenas regista "1 unidade e mais um pedacinho pequeno" o que pode evidenciar que este aluno, apesar de não fazer o registo correto, sentiu a necessidade de escrever "bocadinho" para evidenciar que a parte não inteira é uma porção pequena, o que está de acordo com o seu colega de trabalho: "um décimo". Os restantes alunos mantêm as estratégias já descritas. Apesar de alguns alunos conseguirem realizar corretamente as medições e os seus registos, a maior parte da turma começou a questionar-se: Como registar medições cujos resultados não se podem representar através de um número inteiro?

As restantes questões da tarefa pretendiam levar os alunos a refletir sobre o trabalho realizado e permitiram, simultaneamente, obter informações sobre as suas dificuldades e a compreensão que desenvolveram dos numerais mistos. A maior parte dos alunos assumiu que tinha sentido dificuldades semelhantes às dos egípcios: "Eles [egípcios] também tinham [dificuldades]… às vezes sobrava algumas coisas… não sabiam como demonstrar aquilo…" (A1). O diálogo seguinte, que ocorreu durante a discussão final da tarefa, é elucidativo da perceção dos alunos relativamente às dificuldades sentidas pelos egípcios e por eles próprios, não só para quantificar a parte não inteira de uma medição (e a consequente insuficiência da exclusiva utilização dos números inteiros) como também para representar matematicamente esse valor.

> A10: Nunca chegavam a uma coisa inteira mesmo, mesmo, mesmo.
> Prof.: E quando sobrava um bocadinho? O que é que acontecia? Eles sabiam quanto é que valia?
> A10: Não. E não sabiam dizê-lo…
> Prof.: Não sabiam dizer e provavelmente também não sabiam o quê?
> A: Escrevê-lo.

Para ultrapassar este problema, os alunos conjeturaram que os egípcios terão recorrido a unidades mais pequenas, dentro da unidade já usada, através de um processo de dobragem:

> Tinham que fazer uma mais pequena [sub-unidade] que aumentava as probabilidades de dar exata [medição]. (A4, n.c.)
>
> Os egípcios tinham que inventar uma medida mais pequena que a unidade. Dobravam a corda até chegar a uma conclusão. (A1 e A13)
>
> Eles tinham de dobrar a corda para obterem unidades menores. Eles tinham que criar unidades mais pequenas. Para isso tinham de dobrar. (A2 e A7)

Estas respostas evidenciam o desconhecimento do conceito de irracional pois os alunos admitem que, concebendo sub-unidades será, então, possível proceder à medição, pelo que só estão a admitir números inteiros e racionais. Desta forma, os alunos compreenderam que este utensílio de medição deixou de ser utilizado porque deixara de ser útil para a realização das medições, como explicam: "Porque quase nada chegava à unidade certa" (A1); "Porque a corda só dava para medir unidades inteiras" (A2 e A7); "Porque só dava para medir medidas exatas" (A6); "Porque às vezes sobravam espaços e eles não sabiam explicar ao faraó" (A3); "Os egípcios tinham que inventar uma medida menor que os números inteiros" (A1 e A13).

Na discussão final da tarefa, os alunos concluíram que "os egípcios não tinham uma boa técnica para a medição" (A3) porque "os inteiros não servem para tudo" (A4 e A6).

Fazendo uma síntese dos resultados da análise desta tarefa, podemos dizer que se evidencia:

i) A mobilização de conhecimentos relativos à terminologia própria para frações simples trabalhada no 1º ciclo (metade, meio, meia) e a terminologia própria para as dimensões do retângulo (comprimento e largura), bem como conhecimentos relativos à representação decimal (0,5);

ii) A utilização intuitiva de estratégias de dobragem para descobrirem quanto vale a parte não inteira em relação à unidade;

iii) A existência de dificuldades: a) dificuldades de conceção de unidade - o utensílio de medição só contempla unidades inteiras, o que fez com que muitas respostas para a parte não inteira se reportassem à expressão "um bocado"; b) dificuldades de medição; c) dificuldades de representação – para além da utilização da expressão "um bocado", grande parte dos alunos não conseguiu representar a metade sem c1) recorrer à linguagem natural ou c2) à representação decimal;

iv) Um conjunto de aprendizagens: a) na realização de medições, a utilização exclusiva de inteiros é insuficiente pelo que b) se teve a necessidade de apresentar uma parte inteira e uma parte não inteira; c) para a parte não inteira obtiveram-se dois tipos de representações: c1) com recurso a palavras (“2 unidades e 3 quartos”; “2 unidades e 3 de 4 partes de uma unidade”; “1 uni + 1 décimo”); c2) com recurso às frações: “1/6”.

Tendo em conta o objetivo geral desta tarefa - fazer surgir a necessidade de representações para os números racionais fracionários, introduzindo-se o conceito de numeral misto – posso dizer que ele foi atingido parcialmente porque na fase inicial da tarefa, quando a turma teve tendência para realizar as medições com recurso aos decimais, dei o incentivo para que primeiro se começasse pela parte inteira e depois pela parte não inteira. No entanto, a turma utilizou esta representação sem problemas, no que à estrutura diz respeito, pois os alunos evidenciaram compreender a necessidade da parte inteira e da parte não inteira.

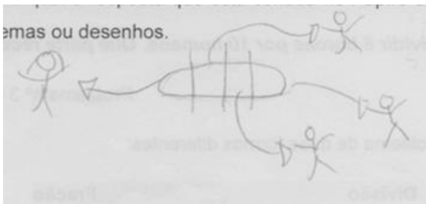
A utilização do contexto histórico revelou-se motivador e enriquecedor para a exploração, discussão e reflexão da tarefa pois os alunos demonstraram ter percebido as dificuldades sentidas pelos egípcios, uma vez que também as experienciaram, lançando a conjetura de que os egípcios teriam a necessidade de inventar uma representação que pudesse ser mais objetiva e clara que o mero recurso à expressão “um bocado”. Assim, os alunos compreenderam que os números inteiros tinham limitações, nomeadamente na sua utilização a propósito das medições, obrigando os egípcios a criar números que pudessem quantificar e representar a parte não inteira. Intuitivamente, os alunos compreenderam a representação de numeral misto, ainda que a mesma tenha surgido a um nível muito inicial e, necessariamente, rudimentar.

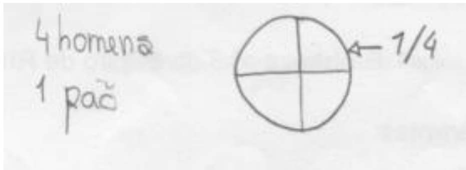
Tarefa 2.

Pretendia, com esta tarefa, levar os alunos a compreender e utilizar a fração para representar um número racional, interpretando-o como quociente, bem como a relacionar a representação racional fracionária com a representação decimal.

Distribuí o enunciado da tarefa pela turma e um aluno leu a introdução em voz alta. Seguidamente, questionei os alunos acerca de como é que se poderia saber a forma como os egípcios tinham estudado Matemática há tanto tempo atrás, pelo que alguns alunos justificaram dizendo que certamente existiam “Vestígios, documentos que provem” isso (A2, n.c.). Para estimular e motivar os alunos, informei-os que nesta tarefa iriam resolver problemas que faziam parte de um papiro egípcio muito antigo, o Papiro de Rhind, o que desde logo criou um grande entusiasmo no seio da turma. Pedi, novamente, que não utilizassem os números decimais na resolução da tarefa, à exceção das questões onde tal fosse explicitado.

Na primeira questão, os alunos não apresentaram dificuldades, tendo todos os alunos recorrido a representações pictóricas. Evidencia-se, pois, a interpretação da fração no seu significado de parte-todo e, assim, a turma evidenciou ter entendido que cada homem recebeu um dos quatro pedaços em que dividiram a boroa:





Dos doze alunos que utilizaram a representação da boroa em forma de círculo, dois tiveram a necessidade de escrever como se deveria proceder a essa partição de modo a que todas as fatias fossem do mesmo tamanho, o que pode evidenciar que estes alunos compreendem que a unidade terá de ser partida em partes iguais : “Se fosse redonda [a boroa] partia de cima a baixo e da esquerda para a direita” (A8 e A17) o que pode justificar que intuitivamente perceberam que esta divisão teria de passar sempre pelo centro do círculo que tinham utilizado para representar a unidade para que os pedaços fossem iguais. O aluno A1, ao explicar oralmente, também demonstra ter tido em atenção esse aspeto: “Isto era a boroa e ele dividia por quatro igualmente. Isto [a sua representação] não está muito bem dividido” – apesar de apresentar a boroa bem dividida, tendo em conta que o fez sem recurso a nenhum instrumento específico de desenho. Estes alunos revelaram entender a fração num significado parte-todo pois demonstram ter a noção de que as partes têm que ter a mesma dimensão.

Assim, nesta questão obtiveram-se quatro tipos diferentes de resposta: i) quatro alunos responderam um quarto sob a forma de fração (parte-todo); ii) quatro alunos responderam um quarto com recurso à linguagem natural (parte-todo); iii) quatro alunos responderam “Um bocado de quatro” (A6) (parte-todo); iv) três alunos responderam com mais do que uma representação: “Cada homem comia metade da metade (0,25, um quarto)” (A15). Esta última resposta escrita evidencia que o aluno compreende que as representações que utiliza – fracionária e decimal - designam a mesma quantidade, evidenciando que compreende a fração não só no significado de parte-todo – “um quarto” – mas também no significado de quociente, uma vez que transforma a fração numa divisão (1:4) e a partir do respetivo algoritmo consegue estabelecer uma equivalência com o decimal que apresenta (0,25).

As minhas intervenções indagadoras revelaram-se importantes. Quando passei junto do aluno A3, ele tinha apenas a representação pictórica da boroa e decidi questioná-lo acerca da mesma:

> Prof.: O que é que começaste por fazer?
> A3: Comecei por fazer uma boroa. Depois, uma vez que há 4 homens divide-se ao meio. Um, dois. Depois divide-se ao meio outra vez.
> Prof.: Quantos bocados passaste a ter?
> A3: Quatro.
> Prof.: E agora, quanto é que cada homem recebe?
> A3: Recebe um quarto.
> Prof.: E por que é que se chama um quarto?
> A3: Porque é uma parte de quatro.
> Prof.: E como é que podemos escrever isso em linguagem matemática?

Motivado pela última questão, o aluno escreveu na resposta $\frac{1}{4}$.

Nesta tarefa, a conceção de unidade pareceu estar mais definida em relação à tarefa anterior, pois assumindo o significado de parte-todo a turma entende que cada homem recebe um quarto da boroa. Os alunos utilizaram o conhecimento construído na tarefa anterior relativo à representação na forma de fração, pois na resolução da primeira tarefa apenas dois alunos tinham utilizado essa representação (1/6 – comprimento da borracha) e agora já surgiam quatro alunos a utilizá-la.

Na questão 1.2 perguntei à turma se no papiro de Rhind poderiam aparecer soluções exatamente iguais às que eles tinham na sua folha de respostas e quais os números que os alunos tinham usado, tendo a turma respondido que eram os algarismos árabes (n.c.). Informei, então, que naquela altura os egípcios tinham os seus próprios números e numa tabela que desenhei no quadro, semelhante à da tarefa, coloquei a representação egípcia que deveria ser copiada pelos alunos e interpretada:

A resposta não foi difícil para os alunos pois estabeleceram o paralelo com a resposta anterior, de uma boroa a ser dividida pelos quatro homens: “É o pão [bola] e aqui estão as quatro pessoas [traços]” (A2, n.c). No entanto, inicialmente a turma teve alguma dificuldade em compreender o que se pretendia na coluna em que tinham que refletir sobre o significado da fração egípcia, pois uma grande parte da turma só tinha feito uma representação pictórica. Alertei os alunos no sentido de terem que escrever o que aquela representação quereria dizer, sendo que a mesma, por si só, não explicava o significado. A partir desse momento, foi mais fácil escreverem o que significava, como a resposta acima do aluno A2 ilustra, possivelmente devido à minha intervenção. A partir da análise da representação egípcia e do seu significado, todos os alunos utilizaram uma fração para a representação atual: nove alunos escreveram $\frac{1}{4}$; cinco escreveram 1/4 e três alunos escreveram ambas a representações, o que nos pode indicar que a partir da análise da representação egípcia tornou-se mais fácil escrever uma resposta sob a forma de fração na representação atual. A maior parte dos alunos interpretou que a parte elíptica se tratava da boroa e que os quatro traços representavam os quatro homens –" A bola é um pão e o pão foi partido em 4 partes iguais, os quatro tracinhos" (A2) – significado parte-todo. Dois alunos, mantendo o mesmo significado da fração, responderam o seguinte: "Cada homem recebeu uma 4ª parte do pão" (A8 e A17) o que pode evidenciar que compreendem e utilizam o valor exato da fração correspondente a cada homem, apesar de utilizarem a linguagem natural. Um aluno responde tendo por base o significado de quociente pois para ele, aquela representação "Significa que um pão foi dividido em 4 partes iguais" (A7).

Os alunos conseguiram olhar para a fração no seu todo, como um só número, relacionando o numerador em função do denominador e não como muitas vezes acontece, em que para os alunos são dois números distintos, não estabelecendo nenhuma relação entre eles. Os alunos A9 e A14, escreveram ao lado da representação "Parece uma divisão" mas o aluno A9 riscou essa informação e o aluno A14 apagou, embora seja legível, o que nos pode levar a pensar que estes dois alunos estabeleceram de imediato o significado de quociente para a fração.

Na questão 1.2.2, todos os alunos referiram que este problema fazia lembrar a divisão e todos encontraram o valor 0,25 quando resolveram o algoritmo. Tal pode evidenciar que esta questão contextualizou a fração no seu significado de quociente, tendo em conta que os alunos escrevem 1:4 de forma a estabelecer a respetiva equivalência. Finalizado este primeiro bloco da tarefa, fez-se a discussão e a reflexão das questões e na parte final desta primeira discussão, questionei a turma sobre qual destas duas representações (fracionária e decimal) permitia compreender melhor a resposta do problema e todos os alunos afirmaram que a fracionária era mais percetível (n.c.). Depois, um dos alunos leu a informação disponibilizada no enunciado da tarefa sobre a origem da designação de fração que deriva do latim *frangere* (partir) para que os alunos compreendessem que os nossos antepassados também tinham usado outras designações: números partidos ou quebrados, por exemplo.

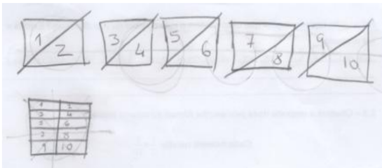
Na questão 2, todos os alunos resolveram corretamente o problema chegando à representação decimal 0,6. Na representação em fração apenas dois alunos apresentaram o resultado incorreto indicando 6/1 o que poderá evidenciar: i) uma má interpretação do enunciado; ii) dificuldade em contextualizar a fração no significado de quociente ou iii) simplesmente que se esqueceram do algarismo zero no denominador. A turma assume que ambas as representações têm o mesmo valor, como se pode observar em algumas respostas escritas: "A representação é diferente mas as duas têm o mesmo valor" (A9 e A14); "Sim, têm o mesmo valor. A única diferença é a forma como estão escritas" (A3 e A5).

A questão seguinte levantou necessariamente dúvidas e dificuldades pois a resposta do escriba surge na forma de adição de duas frações unitárias o que exigia que os alunos olhassem para aquela soma como um só número, como um só resposta. Como senti que estava a ser mais difícil, solicitei aos vários alunos, durante a exploração, que passassem da representação fracionária para a decimal para retirarem conclusões:

> Prof.: O que é que isto quer dizer?
> A7: Um meio.
> A2: Metade.
> Prof.: Cada homem recebe metade mais o quê?
> A2: Um décimo.
> Prof.: E quanto é que é um décimo em número decimal?
> A2 e A7: Silêncio.
> Prof.: Um a dividir por 10?
> A7: 0,10.
> Prof.: E um meio, em decimal?
> A7: 0,5.
> Prof.: E quanto é 0,5 mais 0,10?
> A2: 0,15.
> Prof.: 0,50 mais 0,10?
> A2 e A7: 0,60.

Com esta discussão pretendi, assim, que os alunos passassem da representação fracionária para a decimal e que entendessem que a soma de ambos os decimais iria dar o mesmo resultado que antes já tinham obtido, ou seja, 0,6, levando-os a estabelecer uma relação de equivalência para ambas as representações. Assim, esta discussão permitiu, ainda, recorrer ao cálculo mental (1:10 e 0,5+0,10 – nesta última operação o aluno A2 cometeu, inicialmente, o erro de interpretar 5 + 10 dando inicialmente a resposta 0,15 que corrigiu para 0,60). O significado de quociente para a fração possibilitou que os alunos pudessem constatar que a resposta do escriba tinha o mesmo valor que aquela a que tinham chegado (0,6 ou $\frac{6}{10}$), ainda que não fosse numa fração unitária, caraterística das frações egípcias. Depois, todos os alunos utilizaram esta estratégia e não tiveram dificuldade em assumir que a resposta contida no Papiro de Rhind tem o mesmo valor que a resposta dada por eles. O aluno A2, depois de chegar a esta resposta, tenta descobrir uma regra para aquela adição de frações e aplica de imediato a regra que conhece para os inteiros, somando os numeradores entre si, procedendo de igual forma para os denominadores. Elogiei a tentativa deste aluno mas pedi-lhe que terminasse a tarefa e informei-o que noutras aulas iríamos aprender a fazer a adição de frações.

Na discussão em grande grupo, pedi aos alunos que tentassem fazer uma representação pictórica elucidativa da resposta dada pelo escriba egípcio e os mesmos mostraram-se capazes de o fazer:



Como se pode constatar, cinco boroas foram divididas em metades e uma delas partida em dez pedaços iguais – significado parte-todo.

No que respeita às conclusões registadas pelos alunos, podemos agrupá-las do seguinte modo:

i) Catorze alunos escreveram que uma fração também pode representar uma divisão;

ii) Dois alunos consideraram que "O Ahmes usava uma forma muito diferente e mais difícil" (A10 e A12) referindo-se ao facto de ser necessário usar uma soma de frações. De certa forma, estes dois alunos evidenciam ter compreendido que houve evolução na representação das frações pois consideram as dos egípcios mais difíceis em comparação com as atuais;

iii) Dois alunos consideram que "Frações com números diferentes podem ter o mesmo significado" (A4 e A6) – equivalência de representações;

iv) Dois alunos pensam que "Os números fracionários são bons para muitos problemas" (A3 e A5) o que pode evidenciar que consideram que as frações conseguiram responder a situações em que os inteiros não poderiam ser suficientes;

v) Seis alunos consideram que "Os egípcios conseguiram inventar uma unidade mais pequena, as frações" (A14). Esta afirmação evidencia que o aluno considera que os egípcios conseguiram criar uma forma para quantificar a parte não inteira, o que pode ser interpretado como uma representação de números racionais, neste caso traduzidos por frações.

Fazendo uma síntese dos resultados da análise desta tarefa, podemos dizer que se evidencia:

i) A mobilização de conhecimentos anteriores: representação na forma de fração; divisão (resolução através do algoritmo e cálculo mental); conhecimentos de História da Matemática (identificação dos algarismos árabes);

ii) A utilização intuitiva de representações pictóricas para facilitar a escrita em forma de fração;

iii) A existência de dificuldades na explicação do significado de uma fração e na compreensão da adição de duas frações unitárias como resposta a um problema;

iv) Um conjunto de aprendizagens: a) utilização de uma fração para representar uma parte de uma unidade, favorecendo, assim, a conceção de unidade; b) interpretação da fração como um só número, relacionando o numerador com o denominador; c) compreensão que para se obterem frações iguais a partir de figuras circulares, a divisão deve passar pelo centro das mesmas; d) interpretação de uma fração como uma divisão; e) constatação de que existem decimais e fracionários equivalentes, apesar de terem representações distintas.

O contexto histórico de partilha, para além de ter gerado motivação para a exploração das tarefas, revelou-se propício para a aprendizagem das frações e possibilitou que os alunos compreendessem que a representação fracionária atual é mais simples e evoluída que a dos egípcios, permitindo-lhes percecionar a Matemática como uma ciência viva e dinâmica.

Tarefa 3.

Os objetivos delineados para a presente tarefa foram: i) Compreender e utilizar um número racional como quociente; ii) Utilizar o cálculo mental; iii) Representar frações na forma decimal (distinguir dízimas finitas de infinitas); iv) Comparar frações com a unidade; v) Identificar frações que são números inteiros.

Inicialmente, fiz uma pequena revisão acerca do que a turma estava a estudar. O aluno A9 referiu de imediato “As frações” (n.c.) e, de seguida, orientei a revisão para a sequência da invenção dos números, pelo que a turma afirmou ser a seguinte: naturais, inteiros e quebrados – o aluno A8 utilizou esta última nomenclatura e o aluno A12 utiliza a expressão “partidos” (n.c.). Questionei a turma no sentido de perceber o que tinha posto em causa a exclusiva utilização dos inteiros, obrigando as pessoas a inventar as frações, pelo que o aluno A9 indicou que tinham sido as “medições” (n.c.) com recurso aos inteiros. Indaguei também qual era o problema que surgia nessas medições e o aluno A2 disse que as medições se apresentavam na forma “Um número inteiro mais um bocado” (n.c.), sendo um bocado algo pouco objetivo, pelo que se tinham inventado os “Quebrados ou partidos” (A8, n.c.) e agora estudávamos os “Fracionários” (A8, n.c.).

De seguida, entreguei as tarefas aos alunos e um deles leu em voz alta a primeira parte na qual a turma tinha que recordar que as frações representam a operação divisão e todos os alunos conseguiram escrever essa resposta na lacuna correspondente. Antes de se avançar para a leitura introdutória da questão 1 perguntei à turma há quanto tempo se tinham inventado as frações e o aluno A13 respondeu de imediato “Há 4000 anos” (n.c.) e registei essa data no quadro. Com a leitura do ponto 1, os alunos evidenciaram entender que os decimais, tendo sido inventados há apenas “500 anos” (A2, n.c.), eram uma representação muito mais recente que a fracionária - o aluno A11 identificou notação como “maneira” de escrever um número (n.c.). Incentivei os alunos a utilizarem sempre o cálculo mental recorrendo apenas ao algoritmo em último caso e verifiquei que a grande parte da turma o fez.

A primeira questão não levantou dúvidas. Os alunos utilizaram as frações no significado de quociente e no registo escrito na tarefa apenas os alunos A8 e A17 cometeram um erro relativo à fração $\frac{2}{1000}$ que consideraram ser igual a 0,02, possivelmente por lapso pois as restantes respostas estão corretas e nas restantes perguntas desta tarefa também respondem com sucesso a questões semelhantes. A estratégia utilizada pela turma, para proceder à divisão, foi a de identificar o número de zeros do denominador e deslocar no número presente no numerador, e para a esquerda, a vírgula ainda que, por vezes, existissem lapsos que os alunos foram corrigindo durante a exploração – o aluno A8, por exemplo, ao dividir 237 por 10 apresentou 2,37 no resultado mas corrigiu o erro tendo admitido que tinha deslocado por engano “Duas casas decimais” (n.c.) apesar de o número dez ter apenas “Um zero” (n.c.). Esta regra de cálculo mental já tinha sido trabalhada aquando do estudo da divisão pelo que, agora, os alunos estavam a utilizá-la e a revê-la.

Na segunda questão, no que respeita às frações decimais, a regra utilizada continuou a ser a mesma. Nas frações iguais à unidade sobressaíram três estratégias. Alguns alunos perceberam de imediato que a fração seria igual à unidade pelo facto de o numerador ser igual ao denominador e da fração ser uma “Divisão” (A6, n.c.) – significado de quociente. A utilização do mesmo significado é visível na seguinte afirmação: “Se tiver 5 euros a dividir por 5 pessoas cada uma recebe 1” (A13, n.c.). Outros alunos utilizaram o conhecimento da divisão como operação inversa da multiplicação, conforme os seguintes exemplos: “Então fiz 5:5. Depois acrescento… 5x1 dá 5” (A7; n.c.); “44 x 1 = 44 logo [o resultado de 44:44] é 1” (A17, n.c.). Outro aluno interpreta a fração no significado parte-todo: “Tenho 5 e vou tirar 5 de 5” ficando com “1” (A9, n.c.). Os alunos não se lembravam da expressão “inversa” apesar de utilizarem palavras que mostram claramente que se referiam a este termo: o aluno A8, colega de trabalho do aluno A17, inicialmente disse “oposto” e “contrária” e, finalmente, o aluno A17 referiu “inversa” (n.c.).

Nas frações cujo denominador era 2, os alunos, compreendendo o significado de metade, apresentavam a resposta prontamente: “24 a dividir por 2 é 12” (A10, n.c.) uma vez que “É metade de 24” (A10, n.c). Na fração trinta décimos, há um aluno que apresenta o algoritmo para chegar ao resultado e sete alunos registam 3,0 pelo que podemos pensar que aplicaram o cálculo mental, tal como nas respostas anteriores. Para as frações doze quintos e um terço, muitos alunos apresentaram o algoritmo para chegar ao resultado, embora haja sete alunos que apresentaram o resultado com as vírgulas mal posicionadas (quatro alunos escrevem 24 e três escrevem 0,24 em vez de escreveram corretamente 2,4, o que pode evidenciar que na resolução do algoritmo cometem esse lapso).

Na fração um terço, doze alunos apresentam o resultado corretamente – 0,(3) (aquando do estudo da divisão, tal notação tinha sido abordada). Um aluno escreve 0,3 enquanto que outros dois alunos escrevem “0,(3)3” (A6) e “0,(3333) …” (A10). Alguns alunos não tinham, inicialmente, utilizado parêntesis, pelo que a minha intervenção se revelou importante para que a notação a utilizar fosse corretamente aplicada, pois permitiu-lhes recordar a mesma:

> Prof.: Metem-se os dois 3 dentro de parêntesis?
> A 4: Não.
> Prof.: É só aquele que quê?
> A4: Que se repete.

Para que os alunos mais adiantados na realização da tarefa pudessem passar para a pergunta 2.1 com segurança, pois alguns já me tinham pedido para explicar melhor o objetivo desta questão, explicitei que teriam que colocar todas as frações alusivas a cada situação no respetivo sítio, explicitando o significado do que estava escrito na coluna da esquerda, nomeadamente informando que as frações que representam a unidade seriam aquelas cujo valor fosse exatamente 1 e que as frações inteiras seriam aquelas cujo valor era um número inteiro qualquer. Durante a resolução desta questão, a interpretação que gerou mais dificuldades foi a correspondente às dízimas infinitas periódicas, pelo que perguntei à turma o que significava infinita periódica e um aluno disse: “Que se repete” (A2, n.c). Ao perguntar-lhe qual seria a dimensão dessa repetição, o mesmo aluno respondeu: “Até ao infinito” (n.c.). Até este momento, permiti que os alunos utilizassem livremente as expressões “número que está em cima” e “número que está em baixo”. No entanto, com a resolução da pergunta 2.1 negociei com a turma a nova terminologia a adotar - numerador e denominador - para facilitar a comunicação entre todos.

Tendo em conta as estratégias já descritas para a obtenção do resultado de cada fração, obtiveram-se os seguintes registos:

i) Para as frações iguais à unidade, todos os alunos registaram corretamente a descoberta como por exemplo: “Quando o numerador e o denominador são iguais dá sempre 1” (A5);

ii) Para as frações menores que a unidade, podem encontrar-se três tipos de respostas escritas. Assim, alguns alunos teceram uma comparação entre numerador e denominador: “Sempre que o numerador é menor que o denominador a fração será menor que um” (A17) ou “O denominador é sempre maior” (A5) – visão associada à compreensão da fração no significado parte-todo. Outros alunos, atribuindo o significado de quociente, pensam na relação entre ambos os termos a partir dos conhecimentos que já possuíam para a operação divisão, como se pode ver nos seguintes exemplos: “É que os números que estão a ser divididos são menores do que os que dividem” (A11); “Se tenho 1 euro e divido por duas pessoas dá menos que um euro” (A2, n.c.).

iii) Para as frações superiores à unidade a situação é semelhante à anterior mas desta vez, o aluno A11 não evidencia o significado de quociente: “O numerador é superior ao denominador”. Para as frações que são números inteiros, seis alunos não escrevem nenhuma descoberta e, dos restantes, cinco referem que o numerador deverá ser múltiplo do denominador – fração com o significado de quociente em que se recorre à multiplicação como operação inversa da divisão: “É quando o numerador é múltiplo do denominador” (A13). Quatro alunos escrevem descobertas pouco explícitas como por exemplo o seguinte caso: “São aquelas que nunca dão um número decimal” (A2). Nesta situação, o aluno evidencia recorrer ao significado de quociente pois parece considerar que as frações que são números inteiros são aquelas cuja divisão terá de ser exata.

Como se pode constatar, os alunos interpretaram as frações como quociente em dois níveis (Behr et al, 1983): a divisão pode estabelecer uma equivalência ao número inteiro ou decimal resultante desse quociente ou os números racionais são usados para definir uma equivalência entre frações e decimais ou entre frações e inteiros, revelando uma perspetiva puramente dedutiva e algebricamente mais abstrata. Em relação a este segundo caso, alguns alunos chamaram-me ao lugar por terem feito intuitivamente algumas descobertas, como por exemplo: "4 a dividir por 6 é igual a 0,66666… e depois 2 a dividir por 3 também dá o resultado igual" (A16, n.c.). Quando lhe perguntei o que pensava desta descoberta referiu que era "Um bocado estranho" (n.c.) o que pode levar-nos a ter em conta que esta situação poderá estar relacionada com o facto de os alunos terem em mente os números inteiros, onde só existe uma forma para escrever cada número e, agora, tal situação já não se verificava. Explorei esta questão com a turma a partir dos exemplos já descritos, alertando-os para essa possibilidade e um aluno explicou da seguinte forma a equivalência encontrada pelo aluno A16: "Ali está 4 e 6 (quatro sextos) e em baixo [a outra fração] está dois terços e 2+2 dá 4 e 3+3 dá 6" (A2, n.c.) – intuitivamente, este aluno descobre a equivalência de frações e talvez por essa razão tenha referido o seguinte: "A fração é o dobro" (n.c.) - apesar de não estar correto, a ideia subjacente é a de que se pode multiplicar tanto o numerador como o denominador da fração dois terços por dois obtendo-se, assim, a fração quatro sextos. Quando perguntei à turma qual o nome que se poderia dar a estas frações, o aluno A1 referiu que seriam frações "Iguais" (n.c.) mas outro aluno refutou tal alegação dizendo o seguinte: "Iguais mas diferentes" (A13, n.c); outro aluno sentiu a necessidade de acrescentar a seguinte observação: iguais "Por causa do resultado" (A10, n.c.) mas diferentes por se escrevem "De maneira diferente" (A2, n.c). Desta forma, a turma tinha descoberto intuitivamente as frações equivalentes apesar de não ter usado essa terminologia, reconhecendo o conceito de equivalência: apresentam o mesmo valor mas implicam a utilização de algarismos diferentes. Evidenciando compreender a noção de equivalência, outro aluno informou-me do seguinte, ainda a propósito das mesmas frações: "Se eu dividir o 4 ao meio dá 2. 4+2=6"; "Se eu dividir o 2 ao meio da 1. 2+1=3" (A13, n.c.). O aluno enfatizava, pois, uma forma para se descobrir o denominador a partir do numerador. Naquele momento, eu deveria ter-lhe perguntado se esta regra funcionava para todas as frações desafiando, assim, este aluno a testar a sua própria conjetura. Apenas refleti sobre este aspeto posteriormente, durante a análise desta tarefa, porque naquele momento da aula tive em consideração a gestão do tempo para a exploração da tarefa.

Todos os alunos identificaram a fração um terço como sendo aquela que era traduzida por uma dízima infinita periódica e obtiveram-se dois tipos de registos. Sete alunos referem-se ao facto de haver uma repetição da parte não inteira infinitamente: "É que o resultado é infinito de forma igual" (A4); "O resultado vai-se repetir sempre. Como por exemplo: 343343343…" (A10). Este último aluno assume que não tem de existir apenas um algarismo a repetir-se como a fração presente no enunciado. As reticências a seguir ao algarismo 3 evidenciam que essa repetição ocorre infinitamente. Três alunos destacam o facto dessa fração não se poder traduzir por um número inteiro e um deles aponta para a repetição infinita da parte não decimal, apesar de nada afirmar quanto à natureza da mesma: "Nunca dão uma unidade e não acabam" (A3). Estes três alunos parecem utilizar, também, a fração no significado parte-todo pois parecem assumir apenas a obtenção da unidade e não de um número inteiro, situação caraterística do significado citado. Cinco alunos não fizeram nenhum registo alusivo a esta descoberta.

Na questão 2.2, a calculadora revelou ser um bom instrumento de descoberta, pois também permitiu explorar o facto de existirem algumas calculadoras que procedem ao arredondamento, situação que surgiu espontaneamente durante a tentativa de se encontrarem frações que são dízimas infinitas periódicas. Assim, um aluno percebeu que tinha descoberto algo e propôs à turma, em voz alta, o seguinte: "Se dividirem na calculadora 98 barra 9" (A8, n.c.) – perguntei-lhe como se lia essa fração sugerindo que, nestes casos, pensassem nos ordinais - e o mesmo leu a fração como sendo "Noventa e oito nonos" (A8, n.c.). Alguns alunos obtiveram 10,(8) e outros obtiveram 10,8888889 e perguntei à turma o motivo desta diferença no resultado apresentado. Um aluno afirmou que no segundo caso se estava na presença de um arredondamento e outro aluno explicou da seguinte forma: "Para não ficar sempre 88888 ela faz… Por exemplo: se fosse para arredondar para 0 o último algarismo tinha que ser abaixo do 5. Agora, como é para arredondar para um número acima tem de ser maior que o 5" (A4, n.c.). Apesar de usar uma explicação pouco articulada, a ideia principal de arredondamento está presente na sua explicação. Aproveitei este momento para incentivar os alunos a explorarem em casa as suas calculadoras para poderem perceber como funcionam, pois os alunos evidenciavam compreender que as mesmas não arredondam da mesma forma e, assim sendo, seria importante conhecerem bem as suas.

Todos os alunos encontraram frações com dízimas infinitas periódicas e todos utilizaram a respetiva notação no preenchimento da tarefa, como se pode constatar nos seguintes exemplos: "$\frac{12}{9} = 1,(3)$" (A1); "$\frac{26}{22} = 1,(18)$" (A13). Um par de alunos conjeturou que as frações por si utilizadas eram traduzidas por dízimas infinitas periódicas pois apresentaram quatro exemplos em que tal situação não seria, à partida, totalmente percetível, como por exemplo: "$\frac{6}{13} = 0,(461538)$" (A10 e A12). Questionando-os acerca daquela repetição, dado que no visor da calculadora só aparecia 0,46153846, o aluno A10 disse que não tinha a certeza por causa do número limitado de dígitos e não sabia se a seguir ao 46 se voltavam a repetir os mesmos algarismos (n.c.). No entanto, mantiveram a notação, pelo que pode evidenciar que conseguiram fazer esta conjetura, e de forma acertada, tal como para as restantes frações, como por exemplo: "$\frac{12}{42} = 0,(285714)$" (A10 e A12).

Quanto à pergunta 2.3, dez alunos destacam a simplicidade da representação decimal: "Muito inteligente [Simon Stevin] porque é uma forma mais simples e compreensível de representar números partidos" (A13). Quatro alunos destacam a evolução da própria Matemática: "A nova notação inventada pelo Simon Stevin ajudou as pessoas a verem a matemática como se fosse mais fácil do que pensavam" (A12). Um aluno reportou-se ao significado de quociente das frações: "Acho que é interessante, porque ajuda-nos a dividir entre as outras pessoas [possivelmente referindo-se a situações do dia-a-dia" (A7).

Na última questão, todos os alunos indicaram que a Matemática vai evoluindo. Cinco alunos baseiam-se na evolução dos números racionais: "Porque à 4000 anos só havia números em frações e agora há também em decimais" (A8), ou seja, surgiram "Mais racionais" (A2). Sete alunos referem-se à Matemática como uma ferramenta da compreensão humana: "Porque há sempre muitos segredos na matemática. Para ajudar as pessoas de uma forma mais fácil" (A10). Três alunos referem a importância de se aprender com o passado, possivelmente acerca da História da Matemática: "Porque todos os dias há uma pessoa a descobrir a matemática cada vez mais, aprendendo com o passado" (A5).

Fazendo uma síntese dos resultados da análise desta tarefa, podemos dizer que se evidencia:

i) A mobilização de vários conhecimentos anteriores – cálculo mental; algoritmo da divisão; notação correta para as frações traduzidas por dízimas infinitas periódicas; múltiplos de um número; arredondamentos; divisão como operação inversa da multiplicação; fração no seu significado de quociente e no significado de parte-todo; conhecimentos da evolução histórica dos racionais;

ii) A utilização de distintas estratégias: recurso à divisão (cálculo mental ou algoritmo) para descobrir o valor de uma fração (significado de quociente); o recurso aos múltiplos para descobrir frações que se traduzem por um inteiro;

iii) Algumas dificuldades nomeadamente: ao relembrarem as regras da divisão por 10, 100, 1000 bem como o termo "operação inversa"; utilização dos termos corretos para numerador e denominador e respetiva leitura das frações;

iv) Aprendizagem intuitiva da leitura das frações; descobertas intuitivas relativamente à noção de frações equivalentes; arredondamento da calculadora; levantamento de conjeturas em relação às dizimas infinitas periódicas com mais do que um algarismo.

O contexto histórico, para além de se revelar motivador e potenciador da exploração da tarefa, bem como das aprendizagens realizadas, dá aos alunos uma visão evolutiva da Matemática e faz com que entendam esta ferramenta como útil para poderem compreender a Matemática atual: "Podemos compreender as coisas do passado que é para compreender agora o presente" (A9, n.c.).

Tarefa 4.

Esta tarefa tinha como objetivos: i) compreender e utilizar um número racional como medida levando os alunos a ii) localizar e posicionar na reta numérica números fracionários e mistos.

Antes de se iniciar a tarefa, fiz uma breve revisão do que tinha sido abordado nas aulas anteriores, tendo em conta que se pretendia aprofundar o trabalho já desenvolvido sobre a utilização das frações para representar números não inteiros. Assim, os alunos identificaram os partidos como os primeiros números a ser inventados posteriormente aos inteiros há 4000 anos atrás porque "As medidas, quando não eram exatas eles não conseguiam dizer exatamente a medida" (A11,n.c.). Como "Havia sempre um bocado que nós não sabíamos qual era" (A16, n.c.) esse *um bocado* justificava que as frações egípcias tivessem sempre numerador "um" (Turma, n.c.) à exceção da fração "Dois terços” (turma, n.c.). As respostas obtidas evidenciaram bem as aprendizagens realizadas e a importância do contexto histórico nesse processo. A turma mostrou-se muito motivada após ter sido informada que na presente aula iria ajudar, finalmente, os agrimensores egípcios com as suas medições com as cordas: “Boa, mais uma [tarefa]!” (A2) – o que pode evidenciar que a História da Matemática motiva o estudo da Matemática.

Após a entrega do enunciado aos alunos, fez-se a leitura da introdução e um aluno associou a régua ao significado de medição embora outro aluno considerasse que medir o comprimento do quadro com recurso a, por exemplo, uma caneta, seria “Ver quantas vezes é que a caneta cabe no quadro” (A2, n.c). Seguidamente, a turma iniciou a exploração da tarefa.

Na primeira questão, a qual estava facilitada pelo facto de ter a escala em baixo com a unidade dividida em três bocados iguais, todos os alunos identificaram corretamente que o bocado não inteiro cabia três vezes na unidade, com exceção de um par de alunos que registou $\frac{1}{3}$ identificando, assim, o seu comprimento, enquanto que outro par de alunos evidencia ter identificado o comprimento total a medir pois registou “$3+\frac{1}{3}$” (A11 e A16) . Os alunos justificaram as suas respostas oralmente afirmando: “Porque como uma unidade está dividida em três e só chega a fazer uma metade…” (A8, n.c.) - mas emenda logo para “Um terço” - então “Cabe aqui três vezes” (A11), explicação igualmente dada por outro par de alunos. Alguns alunos utilizavam a linguagem natural para quantificarem a medição mas outros utilizavam representações matemáticas, pelo que fui estimulando a turma para a utilização das segundas. Também foram identificadas dificuldades na identificação e representação das medidas do comprimento da corda e do bocado não inteiro, como no seguinte exemplo em que um aluno regista o seguinte: “São três bocados inteiros mais um bocado” (A2). Quando questionado sobre a medida do bocado este aluno afirma “1 cm” (A2, n.c.) com base na medição que realizou com a régua. Esta dificuldade foi ultrapassada quando recordei que o sistema métrico ainda não tinha sido inventado naquela altura. Outros pares tiveram dúvidas sobre se o valor do bocado era um terço ou um quarto porque não perceberam se contavam os traços da figura ou os espaços entre eles, pelo que pedi que contabilizassem os espaços entre os traços e um aluno desse par retorquiu: “É um terço porque é três vezes” (A15). Tal situação verificou-se noutros pares e um aluno ajudou o seu par por processo de contagem: “Olha aqui, um, dois, três” (A5, n.c.). Reforcei esta ideia para toda a turma e a mesma parece ter facilitado o trabalho desenvolvido pelos alunos pois evidenciaram compreender que os traços delimitavam os espaços que se pretendiam contabilizar. Esta situação pode evidenciar dificuldade, por parte dos alunos, na conceção da unidade e, sobretudo, na quantificação das respetivas partes. É importante ter em conta que a divisão da unidade em partes menores que metade é uma capacidade fundamental para desenvolver o significado de medida, permitindo aos alunos compreender que entre dois números racionais existem infinitos números do mesmo conjunto. Esta tarefa fazia, pois, com que se evidenciassem dificuldades associadas a esta propriedade.

Em relação ao comprimento total da corda, os alunos registaram da seguinte forma:

i) "Três e um quarto (3 unidades e $\frac{1}{3}$) porque temos três unidades e um terço da corda" (A9 e A14) – estes alunos cometem um lapso ao lerem inicialmente a parte não inteira porque de seguida reforçam, corretamente, a leitura da mesma – significado de medida;

ii) Seis alunos não explicam verdadeiramente: "3 unidades inteiras e mais $\frac{1}{3}$" (A15) – significado de medida;

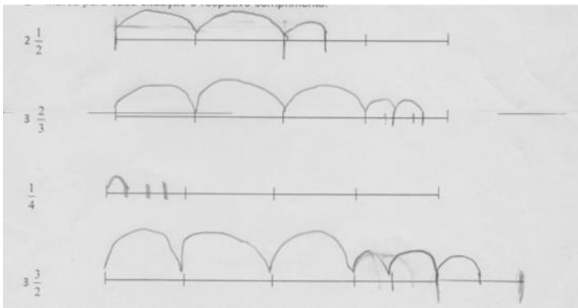
iii) Seis alunos explicam corretamente: "Tem três unidades certas divididas em três [terços]. A última unidade não chega a ser inteira e está dividida em três e chega a $\frac{1}{3}$" (A8) – significado de medida;

iv) O aluno A12 foi o único a atribuir o significado de operador porque registou que o comprimento total era "12x $\frac{1}{3}$" embora se estivesse a referir às quatro unidades representadas da reta numérica presente na primeira pergunta e não ao comprimento que realmente se pretendia. Neste acaso, este aluno interpreta a fração no conceito de multiplicador porque consegue perceber que em vez de 4 unidades se pode dizer que o um terço se repete 12 vezes.

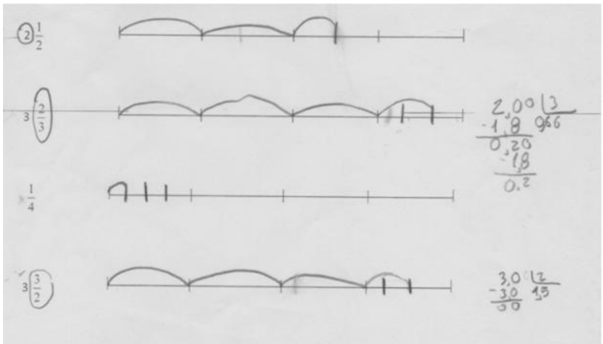
Na segunda questão, os alunos revelaram algumas dificuldades na marcação dos numerais mistos, tendo a tendência para considerar apenas a parte inteira não marcando a parte fracionária. Por exemplo, os alunos A6 e A9 só tinham marcado as duas unidades inteiras de $2\frac{1}{2}$ mas um deles reconheceu que só marcara "metade" (A6, n.c.).

Quando pedi ao aluno A9 para ler o número afirmou "Dois e meio" (n.c.) e explicou por que razão só tinha marcado duas unidades: "Metade de quatro é dois" (n.c.). Neste caso, o aluno evidencia dificuldades na conceção de unidade porque quando marca a parte inteira utiliza corretamente duas unidades mas na marcação da parte não inteira considera as quatro unidades representadas no enunciado como a unidade principal.

Sentindo que existiam dificuldades generalizadas na resolução desta questão interrompi o trabalho dos alunos e discutimos em grande grupo o significado da representação de numeral misto e da unidade representada na reta que figurava no enunciado. Após esta intervenção, os alunos corrigiram as suas respostas e responderam acertadamente:

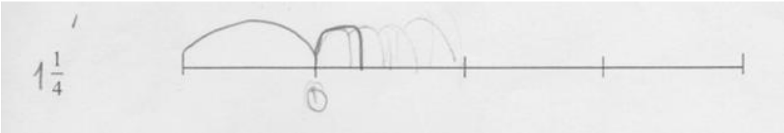


O aluno A3, antes de marcar na reta os números em causa, sentiu a necessidade de traduzir as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$ (parte não inteira dos numerais mistos) em números decimais, como se pode ver a seguir:



Tal opção pode evidenciar que o aluno está a atribuir o significado de quociente à fração em vez do significado de medida e que os decimais, associados ao sistema métrico, aparecem mais uma vez como forte significado de medida. Além disso, este aluno considera dois terços e três meios como frações equivalentes pois apresenta medições iguais para ambas, o que pode evidenciar que na interpretação desta fração, no seu significado parte-todo, recorre à visão de que o numerador deverá ser inferior ou igual ao denominador e não admite frações maiores que a unidade, o que também foi verificado no registo de oito alunos.

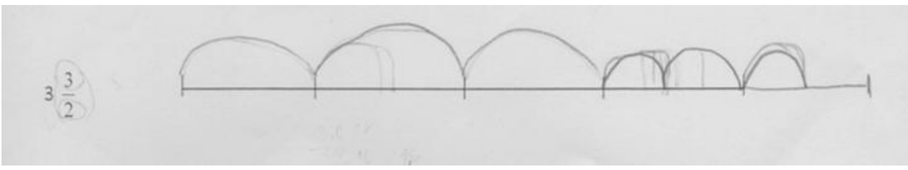
Na marcação da fração um quarto, apenas quatro alunos não o fazem corretamente porque consideram o numeral misto 1 $\frac{1}{4}$ talvez porque todos os outros números eram dessa natureza. O aluno A10 chega mesmo a acrescentar no enunciado o 1 antes da fração:



Na marcação de três unidades e três meios, alguns alunos conseguiram entender a fração como sendo maior que a unidade, pois o aluno A4 comentou com o colega A6 que tinham que acrescentar mais unidades para além das quatro existentes (n.c.). O excerto seguinte mostra como os alunos A4 e A6 entenderam a situação:

> Prof: Quantas cordas inteiras pede?
> A6: Três.
> Prof: E agora o que é que se tem que fazer à próxima corda?
> A6: Dividi-la em dois.
> Prof: E desses dois contamos quantos?
> A6: Três.
> A3: Só que não tem mais nenhuma coisa [unidade].
> Prof: Então o que é que isso quer dizer?
> A3: Que não dá.
> Prof: Será que não dá?
> A3: Temos que acrescentar!
> Prof: O que é que temos que acrescentar?
> A3: Pede mais metade…

No total, oito alunos fizeram esta medição corretamente acrescentando, pois, a parte pretendida, como por exemplo o caso do aluno A10:



No que respeita à questão 3, alguns alunos justificaram a sua resposta tendo por base o conhecimento histórico que foram adquirindo ao longo das tarefas: "Achamos que não usariam a fração $\frac{3}{2}$ porque eles só usavam o numerador 1 e a exceção era o $\frac{2}{3}$"

(A9 e A14). O grupo dos alunos A11 e A12 afirmam que " $\frac{3}{2}$ são 3 meios ou uma unidade inteira". A resposta não é suficientemente esclarecedora. Talvez estes alunos estivessem a pensar que pelo facto da fração ser traduzível por um número inteiro e outro na forma de fração os egípcios não precisassem da fração supracitada. Dos restantes alunos, três não responderam e três deram uma resposta que não está correta. Assim, na marcação deste numeral misto, os principais erros que se verificaram têm a ver com o facto de os alunos confundirem $\frac{3}{2}$ com $\frac{2}{3}$ ou então interpretarem 3 $\frac{3}{2}$ como sendo 3 $\frac{1}{2}$, evidenciando, pois, que apenas concebem a existência de frações menores que a unidade.

Por uma questão de gestão de tempo, apenas cinco alunos conseguiram responder à última questão acerca da utilidade das frações. Estes alunos percebem que as mesmas permitem representar uma medida que inicialmente apenas apelidavam de "um bocado" (aquando da resolução da tarefa 1) pois consideram "Que as frações nem sempre são apenas bocados" (A12 e A13) ou que "Para a medição egípcia se não usassem as frações não conseguiam medir quando a medida não dava certa" (A8 e A17).

Sintetizando a análise dos resultados da presente tarefa, podemos dizer que se evidencia:

i) A mobilização de conhecimentos anteriores relativos a: evolução da nomenclatura dos fracionários – números partidos; natureza unitária das frações egípcias; medição como operação de comparação em relação à unidade; identificação do denominador como aquele que determina o número de partes nas quais se deve partir a unidade; numerais mistos;

ii) Utilização de estratégias de divisão da unidade no número de partes que o denominador indica com o objetivo de marcar um numeral misto na reta numérica;

iii) A existência de dificuldades: a) conceção da unidade; b) associação de medição ao sistema métrico; c) dificuldade em olhar para o numeral misto no seu todo sendo descorada, por vezes, a parte não inteira; d) confusão entre numerador e denominador; e) compreensão da fração como um número menor, maior ou igual à unidade (dificuldade mais evidente na marcação do numeral três três meios);

iv) Um conjunto de aprendizagens: a) marcação de um numeral misto na reta numérica, procedendo às divisões da unidade de acordo com a parte não inteira; b) aprofundamento da compreensão de uma fração como um número que pode ser maior que a unidade; c) compreensão da fração como uma invenção que permitiu quantificar a parte não inteira muito antes dos decimais; d) compreensão da fração em diferentes significados.

Esta tarefa permitiu que a fração fosse enquadrada pela grande parte dos alunos no seu significado de medida. No entanto, alguns alunos também utilizaram o significado de quociente e operador, sendo que este último surgiu por dificuldade associada à primeira questão. Constata-se, assim, que o trabalho das frações no seu significado de medida é extremamente importante para que os alunos construam uma boa interpretação da fração. A motivação evidenciada pelos alunos da turma parece estar associada à utilização de tarefas com recurso à História da Matemática que forneceu o contexto propício para o desenrolar da exploração das mesmas, o que fez com que os alunos dessem sinais de empenho e agrado na aprendizagem da Matemática.

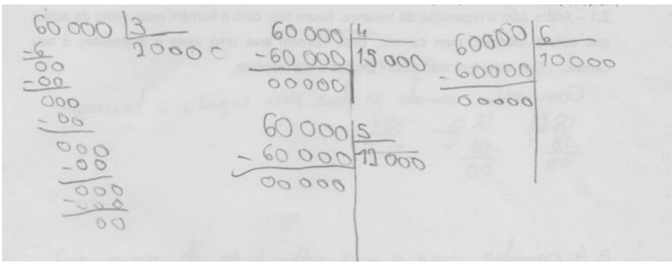
Tarefa 5.

Esta tarefa pretendia levar os alunos a: i) Compreender e utilizar um número racional como operador; ii) Resolver problemas históricos.

Antes de se iniciar a resolução da tarefa fez-se uma breve revisão sobre o aparecimento dos números, bem como da evolução da sua nomenclatura. Quando introduzi a tarefa informando que se iriam resolver problemas antigos, o aluno A11 antecipou logo que estariam relacionados com a história e o aluno A16 disse que "Assim vamos dando matéria" (n.c.). Os alunos já reconheciam que a utilização da História da Matemática na sala de aula, para além de ser divertida, poderia ajudar a construir conhecimento. São, aliás, aspetos bem evidentes quando durante a resolução dos problemas o aluno com maiores dificuldades de aprendizagem e de concentração me chamou para dizer o seguinte: "Nestas aulas de investigação está-me a saber bem estar a escrever, a pensar. Estou a gostar. Estou a aprender coisas" (A5, n.c.). Quando questionei qual a razão que o poderia fazer sentir assim ele respondeu ser por causa "Das coisas dos egípcios" (n.c.).

Pedi aos alunos que iniciassem a resolução da tarefa e desta vez optei por não proceder à leitura do enunciado em voz alta. O aluno A8 perguntou/afirmou "60 000 reais é a moeda…" (n.c.) ao que chamei à atenção da turma para repararem no ano daquele problema – 1519 – pelo que naquela altura não se usaria, obviamente, a mesma moeda da atualidade. O aluno A5 referiu que os reais se usam, presentemente, no Brasil (n.c.). Asseverei, pois, que poderiam resolver este problema da mesma forma que o fariam se a moeda em causa fosse o euro.

No que respeita ao primeiro problema, todos os alunos utilizaram corretamente a estratégia de descobrir a quanto dinheiro corresponderiam as frações indicadas em relação ao dinheiro total, pelo que para descobrirem um terço dividiram por três e assim sucessivamente, apresentando os respetivos algoritmos, como se ilustra no seguinte exemplo:



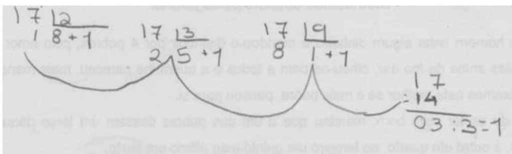
Assim, os alunos conseguem recorrer ao conhecimento prévio de que a divisão é a operação inversa da multiplicação, como se ilustra no comentário do aluno A17 quando o questiono em relação è utilização da divisão por três para saber quanto vale um terço: “A terça parte é 3 [dividir por 3]” (n.c.). O aluno A6 conseguiu descobrir o resultado do dinheiro correspondente a um terço utilizando o cálculo mental. No entanto, disse serem “dois milhões” (n.c.) mas emendou de imediato para “vinte mil” (n.c.). Assim, podemos afirmar que as frações foram interpretadas no seu significado de operador na sua dimensão de multiplicador/divisor, pois os alunos recorrem à divisão para obterem o valor correspondente do dinheiro.

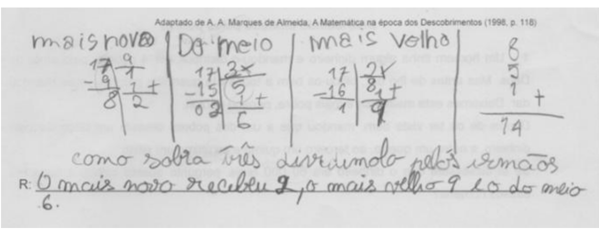
Uma dúvida que surgiu foi se o cálculo do valor correspondente a cada fração tinha por base a totalidade do dinheiro (60 000) ou se se tinha que ter em conta o que restava das subtrações sucessivas dos valores calculados: “O que eu não percebo é: aqui dividimos por 3 e depois do que sobrar dividimos em quatro?” (A13, n.c.). Retribuí a questão: “A que dinheiro se vai retirando as respetivas partes?” (professor), tendo os alunos percebido que as partes que se referem são sempre calculadas em relação ao dinheiro total. O aluno A10 compreendeu a situação: “Vamos ter que somar todos para ver se dá isto [apontando para 60 000]” (n.c.) - significado de parte-todo pois o aluno percebe que a soma das partes tem que ser igual ao todo e por essa razão faz a proposta de somar todo o dinheiro para obter 60 000; “Mas se der mais já não dá” (A10, n.c.) – a soma das partes não pode ser maior que o todo; “Mas se der menos já pode ser” (A10, n.c.) – este aluno admite que o total possa dar menos do que os 60 000 reais, dando a entender que poderia sobrar dinheiro.

Na questão seguinte, todos os alunos seguiram a estratégia de somar todo o dinheiro correspondente às partes calculadas – 57 000 – e de seguida subtraíram esse dinheiro do total obtendo 3000 reais. O aluno A6 foi o único que não realizou a subtração com recurso ao algoritmo, apresentando o resultado corretamente, o que pode evidenciar que recorreu ao cálculo mental.

No que diz respeito à questão dois, oito alunos referiram por escrito que era impossível proceder à distribuição dos camelos pelo facto de 17 ser um número primo: “Só pode ser dividido por 1 ou por 17” (A4 e A6); durante a exploração da tarefa, outros alunos também evidenciavam essa visão: “O número 17 não entra em nenhuma tabuada… porque nenhum dos números entra na tabuada nem do 3, nem do 2 nem do 9”(A11 e A16, n.c.) e por fim afirmou ser um número primo (A11, n.c.). Destes alunos, quatro ainda tentam resolver o problema através da resolução do algoritmo da divisão e os restantes, guiados possivelmente pelo pressuposto de o 17 ser um número primo, não sentem essa necessidade. Alguns alunos, após realizarem os algoritmos, escreveram que “É impossível porque não podemos dividir um camelo ao meio” (A2 e A7). O aluno A3 referiu, a este propósito, que para ser possível “Precisávamos de mais um” (n.c.), reconhecendo que o número 18 era divisível pelos três valores: 2, 3 e 9. Assim, as várias estratégias anteriormente apresentadas pelos alunos consideram a fração no seu significado de operador mas os mesmos não reconhecem a possibilidade de resolução, pois limitam-se a considerar que, não se tratando de uma divisão exata, tal tarefa será impossível.

No entanto, na resolução escrita, existem dois grupos (alunos A1 e A13; alunos A5 e A9) que, após realizarem os respetivos algoritmos reparam que no total das três divisões sobravam três camelos o que lhes permite fazer uma nova distribuição dos três camelos pelos três irmãos: “Como sobraram 3 camelos, dividi por 3 filhos e deu 1 a cada um” (A13, n.c.). Apresentam-se, pois, as resoluções destes pares (A1/A13 e A9/A14, respetivamente):





Mas o aluno A13 mostrou-se um pouco confuso com esta dupla possibilidade pois quando comparou a sua resolução com a da questão seguinte, resolvida a partir da divisão de 18 camelo, questionou: “Como é que tendo 17 e 18 camelos pode dar o mesmo para os dois?”. Nesse mesmo instante, o seu colega de trabalho, o aluno A1 afirmou o seguinte: “Aqui [na resolução da pergunta 2] arredondaste mais ou menos para 18” (n.c.). Perguntei ao aluno A13 quanto era 17 a dividir por 2 ao que respondeu 8,5 compreendendo, pois, que aquele valor arredondado à unidade é 9 (n.c.).

Na discussão desta questão, estes alunos explicaram o seu raciocínio no quadro e o aluno A5 reconheceu que “Foi bem pensado” (n.c.). O aluno A10, no entanto, mostrou não ter percebido esta explicação porque questionou: “Por que é que somaste os números [8 + 5 + 1]?” (n.c.). Mesmo após a explicação, este aluno não evidenciou ter entendido, talvez porque também tenha sentido o mesmo que o aluno A13 quando se mostrou intrigado pelo facto de a divisão de 17 camelos se apresentar semelhante à divisão dos 18 camelos. No entanto, com a questão 2.1, o aluno A10 entendeu a razão de se ter emprestado 1 camelo pois no lugar afirmou: “Ele [o homem mais velho da aldeia] já sabia e por isso [o facto de 18 ser múltiplo de 2, 3 e 9] é que emprestou”. (n.c.). O aluno A9, quando percebeu que no total eram distribuídos 14 camelos e havia 17 afirmou: “Podíamos dar um a cada um” (n.c.) numa clara alusão à distribuição dos três camelos que sobravam pelos três filhos. Estes alunos também consideram a fração no contexto parte-todo pois ao somarem o valor das partes, 14, percebem que o número de camelos que sobra é divisível pelos três irmãos possibilitando, assim, proceder-se a uma divisão que consideram correta.

Na alínea seguinte desta questão, os alunos entenderam o significado do empréstimo do camelo, passando a ter dezoito no total, e todos os alunos seguiram a estratégia de realizar as respetivas divisões – fração no contexto de operador na modalidade de multiplicador/divisor – utilizando o 18 para o dividendo e no final todos devolveram o camelo que sobrou ao dono (“A ideia foi que ele emprestou mais 1 camelo e ao todo os filhos receberam 17 camelos mas os camelos eram 18 e como sobrou um deram o que sobrou ao homem” (A7).

Durante a resolução destes problemas, alguns alunos também tiveram em conta os critérios de divisibilidade pois o aluno A4 chama à atenção para o facto de que “Os números pares dão para dividir por 2” (n.c.) e acrescentou, recorrendo aos múltiplos, que “O 18 aparece na tabuada do 3 e do 9” (n.c.).

Sintetizando, podemos afirmar que com a realização desta tarefa:

i) São mobilizados diversos conhecimentos anteriores – divisão (algoritmo e cálculo mental); critérios de divisibilidade; divisores; múltiplos; números primos; divisão como operação inversa da multiplicação; leitura de números; arredondamento;
ii) Os alunos entendem a fração no significado de operador, na dimensão multiplicador/divisor, pelo que usam como estratégia a divisão para calcular a quantidade correspondente a uma determinada parte;
iii) São identificadas dificuldades: na compreensão inicial de que no cálculo de várias frações em relação ao todo são processos independentes; proceder à resolução de uma partição de números primos;
iv) Os alunos realizam aprendizagens: num problema que implica repartir um número primo pode haver uma solução que vai além do conceito de divisão exata.

O recurso à História para trabalhar conceitos matemáticos mostrou-se, novamente, uma ferramenta motivadora e potenciadora do desejo de aprender, levando os alunos a empenharem-se na atividade matemática com agrado e ao reconhecimento das suas aprendizagens.

Tarefa 6.

Esta tarefa tinha como objetivos: i) Compreender o conceito de percentagem e relacionar diferentes formas de representar uma percentagem; ii) Traduzir uma fração numa percentagem e interpretá-la como o número de partes em 100.

Como habitualmente, iniciámos a aula com a revisão sobre a evolução dos números. Um dos alunos referiu que se tinham inventado primeiro os naturais, os inteiros e os partidos ou quebrados, acrescentando que atualmente os partidos são designados por decimais. Outro aluno contestou de imediato a última afirmação defendendo que existem dois grupos de partidos: os fracionários e os decimais (n.c.). Tal confronto de ideias pode evidenciar que alguns alunos conseguiam, pouco a pouco, classificar os racionais, distinguindo decimais de fracionários, talvez porque o contexto histórico das várias tarefas lhes permitia ter essa perceção.

De seguida, informei a turma que iríamos estudar a origem das percentagens e discutimos exemplos de situações do seu dia-a-dia que se relacionavam com as percentagens, como por exemplo a percentagem de cereais grátis que algumas marcas ofereciam e também a classificação das fichas sumativas (A17, n.c.).

Após ter distribuído o enunciado, um aluno leu a introdução histórica em voz alta para a turma e quando encontrou a fração $\frac{1}{100}$ leu "Um cem avos" (A2, n.c.). Um aluno afirmou de imediato que achava que era uma centésima e a turma retorquiu, em coro, que seria um centésimo (n.c.). Esta discussão teve como objetivo ajudar os alunos a destrinçar entre leitura de um número decimal e leitura de um número fracionário. O aluno A8 acrescenta que "Uma centésima é 0,01" (n.c.) o que evidencia que este aluno compreende a equivalência entre ambas as representações. No seguimento desta discussão, perguntei à turma o que poderia significar a taxa constante na introdução histórica e o aluno A15 referiu apenas a expressão "Um por cento" (n.c.) em linguagem natural. Depois de esclarecidos relativamente à dúvida acima referida, os alunos iniciaram a exploração da tarefa.

Na primeira questão, todos os alunos escreveram que o imperador recebia uma moeda porque "O vendedor tinha 100 moedas de ouro e a fração era $\frac{1}{100}$, uma moeda de cem" (A7). Outros alunos justificaram oralmente de forma semelhante: "Tinha 100 moedas o imperador ficava com uma" (A2, n.c.); "Por 100 moedas ele tirava uma" (A15, n.c.). Todos os alunos interpretaram a fração no significado de parte-todo, em que a fração representa uma comparação entre o número de moedas existentes no total, presentes no denominador, e as moedas que seriam retiradas por aplicação da taxa, presentes no numerador.

No que respeita à parte cobrada, apenas um par de alunos escreve, de forma errada: "1 moeda" (A11 e A16). Os restantes alunos escrevem $\frac{1}{100}$. No entanto, durante a resolução desta questão, verifiquei que inicialmente muitos alunos tinham a resposta 1 moeda, pelo que fui dando ênfase ao facto da pergunta ser *que parte* e não quantas moedas, o que possivelmente os levou a repensar e a alterar as suas respostas. Porém, esta ideia estava bastante clara para o aluno A6 que afirmou que neste caso teria que se responder com os "Fracionários" (n.c.) o que nos pode levar a pensar que este aluno compreende o significado da resposta sob a forma de fração, evidenciando o significado de parte-todo.

Quanto à parte com que o vendedor iria ficar, todos os alunos responderam $\frac{99}{100}$, subtraindo uma moeda às 100 ficando, assim, com 99. De certa forma, utilizam intuitivamente a regra da subtração de frações com o mesmo denominador apesar de não sentirem a necessidade de utilizar o denominador 100 no aditivo ou no subtrativo pois apenas escrevem "100 – 1 = 99" (A1). O aluno A4 escreve inicialmente "100 – 1 =

$\frac{99}{100}$" mas opta por riscar o denominador e na tarefa escrita surge "100 – 1 = 99 de 100". O aluno A2 faz a subtração "100 – 1% = 99" porque indica corretamente uma equivalência de representações: " $\frac{1}{100}$ = 1%" e entende que o resultado, 99, será o numerador de uma fração cujo denominador é 100, o que pode evidenciar que compreende que a pergunta se refere à parte com que fica e não à percentagem ou ao número de moedas. Pode-se, pois, considerar que nesta questão os alunos entenderam intuitivamente a fração no contexto de quociente percebendo que 1% é equivalente 1:100, situação fundamental para se considerar este contexto, tal como no caso de outro aluno que consegue dar outro exemplo criado por si: "Se tivéssemos 75 centésimos era 75%" (A17, n.c.).

Quando questionados sobre a percentagem cobrada, sobressaem essencialmente três explicações distintas. Nove alunos recorrem à interpretação parte-todo registando na folha de respostas o seguinte: "É que em cada 100 moedas, retirava-lhe 1 moeda" (A11). Esta interpretação parte-todo evidencia que estes alunos conseguem estabelecer, intuitivamente, pensamento proporcional ao admitirem que cada vez que há 100 moedas se retirará uma. Outros dois alunos partem da percentagem para justificar a resposta: "A nossa base é 100% e ele retirava 1%" (A1 e A13). Nesta visão, os alunos evidenciam compreender que se pode estabelecer uma equivalência direta entre as 100 moedas e o total, ou seja, 100%, e nessa ótica acabam por operacionalizar como se de uma subtração com números naturais se tratasse. Finalmente, quatro alunos recorrem à equivalência entre percentagem e fração para, depois, darem uma explicação no significado de parte-todo e, intuitivamente, no significado de quociente, apesar de não apresentarem o decimal 0,01: "1% equivale a $\frac{1}{100}$ que significa 1 moeda de 100" (A4). Assim, esta última resposta evidencia que os alunos conseguem estabelecer a equivalência entre duas representações distintas – percentagem e fração - a partir do significado parte-todo.

A questão 1.4 levantou dois tipos de dúvidas. A primeira estava relacionada com o pensamento proporcional pois verifiquei que, inicialmente, alguns alunos tinham escrito 350 – 1 = 349 e nesse sentido, a minha intervenção pautou-se pelo recurso ao significado da percentagem levando os alunos a estabelecer pensamento proporcional:

> Prof.: Por 100 moedas tiras quantas?
> A2: Uma.
> Prof.: E por 200?
> A2: 100?
> A12(colega): Duas.

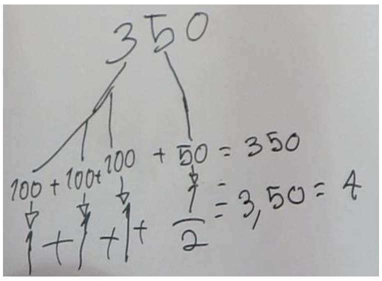
A2: Ah…
A12: Se fosse 300 tirava 3.

Utilizei esta intervenção com os vários alunos que tinham demonstrado esta dificuldade, a qual se revelou adequada porque treze alunos resolveram corretamente o problema. Talvez o facto de no enunciado se referir à utilização da mesma taxa do imperador tenha levado os alunos a subtrair 1 moeda às 350 e, por essa razão, alguns alunos começaram por fazer esse cálculo. Simultaneamente, uma outra dúvida surgiu, apesar de estar previamente prevista, e que estava relacionada com o resultado obtido, ou seja, 3,5 moedas. Tendo em conta a unidade monetária utilizada não era possível dar exatamente esta resposta: "Não há meias moedas" (A15, n.c.); "Nós quando é 50 podemos tirar 0,5? Naquela altura já se podia tirar 0,5?" (A1, n.c.). Nesta última intervenção, o aluno evidencia ter utilizado o pensamento proporcional pois entende que, neste caso, teria de ser retirada meia moeda e a sua dúvida prende-se com a evolução histórica dos números ao questionar se naquela altura já existiriam os decimais, tal como também se pode verificar noutra resposta deste aluno: "Recebe 3 moedas mais metade de uma moeda só que não há metade de moeda!" (A1, n.c.). Outros alunos, tendo a mesma perceção desta situação, inventam uma forma de satisfazer a pretensão do imperador: "Recebe três moedas de ouro e uma de prata" (A3, n.c.). Estas respostas podem evidenciar que o contexto histórico deste problema estimula os alunos a pensar em termos de evolução dos números, fazendo com que não se limitem a dar a resposta encontrada - que neste caso seria 3,5 ou 4 por arredondamento – levando-os a refletir de forma contextualizada. Neste caso, a minha intervenção perante esta dúvida pautou-se apenas por pedir aos alunos que refletissem e que pensassem qual seria a melhor solução. Na discussão final, a turma compreendeu que o imperador iria receber 4 moedas, valor obtido a partir do arredondamento. No entanto, um aluno alertou para o facto de o imperador "Receber mais e o vendedor ficar a perder" (A10, n.c.) pelo que deu uma sugestão interessante: "Para mim ele fazia assim: se ele recebesse mais 50 retirava-lhe depois uma" (A10, n.c.), ou seja, por 350 moedas apenas retiraria 3 e só quando perfizesse 400 é que se retirava mais uma. A turma evidenciou entender as limitações deste sistema e o aluno A11 perspetivou outra situação: "Mas e se o imperador tivesse que tirar 30 cêntimos ou 40? Íamos ficar na mesma" (n.c.). Percebeu-se, pois, que a utilização exclusiva de números inteiros também não era abonatória nesta situação alusiva ao dinheiro. No que respeita à apresentação final da resposta, dez alunos respondem três moedas e meia e cinco alunos respondem 4 moedas porque, como explica um aluno, foi feito um arredondamento (o qual também é patente no esquema que o aluno A9 faz no quadro, como se verá a seguir): "Ficaram para o imperador 4 moedas porque arredondamos" (A12).

De uma forma geral, todos os alunos responderam a esta questão e surgem três estratégias de resolução diferentes: i) três alunos utilizam uma correspondência proporcional, como por exemplo o aluno A5 que escreve em coluna "100 = 1; 200 = 2; 300 = 3; 350 = 3,5"; ii) Seis alunos fazem uma interpretação da fração no significado de quociente, apesar de não chegarem a escrever uma fração, fazendo apenas o algoritmo de 350:100, obtendo 3,5 no quociente; iii) seis alunos optam por decompor o 350 obtendo 100 + 100 + 100 + 50 tornando-se mais fácil aplicar a taxa do imperador. O aluno A9 assume claramente esta estratégia quando me explica o seguinte:

> Nós fizemos um esquema. Tinha 350 moedas e então 100 tirámos uma moeda. Decompusemos o número e deu-nos 100 + 100 + 100 + 50. E então 100 tirámos uma moeda, dos outros 100 tirámos outra moeda. Dos 100 tirámos uma moeda mas 50 não dá para tirar uma moeda porque é metade. (n.c.)

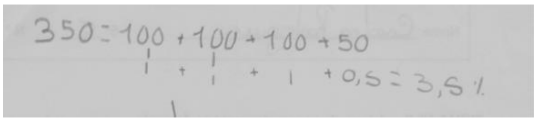
Nesta explicação evidencia-se o significado de fração parte-todo pois por cada 100 moedas vai retirando 1. Na discussão geral desta tarefa, o aluno A9 vai ao quadro fazer o esquema que também utilizou na sua resolução escrita e apenas comete o lapso de considerar 3,5 = 4:



Na pergunta 1.5 todos criticam a unidade utilizada – moeda de ouro – afirmando que o grande entrave é recorrerem apenas a unidades inteiras: "Não havia moedas de ouro que representem metade" (A13); "Não se parte moedas ao meio por isso tinha de haver algo como moedas de prata ou de bronze" (A3).

Na última questão, os alunos apresentam as representações corretas à exceção do aluno A7 que na representação decimal escreve "0,1" o que talvez possa indiciar falta de tempo para responder de forma ponderada a esta questão. Enquanto circulava pela sala, reparei que um par de alunos tinha escrito $\frac{3}{300}$ e a sua justificação para tal foi a seguinte: "$\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}$" (A1, n.c.) o que pode evidenciar que estes alunos tentam utilizam intuitivamente a regra da adição de frações a partir do pensamento proporcional, ou seja, por cada 100 moedas é retirada uma e, tendo em conta que era complicado escrever aquela soma para três moedas e meia, estes alunos optam por utilizar o pensamento proporcional para 300 moedas.

Quanto à percentagem cobrada, um par de alunos tinha escrito inicialmente "3,5%" (A1) possivelmente motivados pela resposta que deram na pergunta 1.4, evidenciando confundir o número de moedas com a percentagem, pois calculam corretamente o valor indicado, indiciando terem utilizado o pensamento proporcional:



No entanto, pedi para dizerem qual era a percentagem que o imperador cobrava e imediatamente perceberam que era "1%" (n.c.), o que talvez os tenha levado, pois, a substituir a resposta inicialmente registada.

Na conclusão final sobre a tarefa, existem três tipos de observações feitas pelos alunos. Um refere a necessidade de as pessoas terem que "Inventar outras numerações para se conseguir distribuir em condições [o número de moedas]" (A12). Outros quatro alunos referem-se à correspondência entre representações, como se pode constatar pelas seguintes respostas escritas: "Que as centésimas equivalem a 1%" (A8 e A17); "Que as percentagens são iguais às frações" (A4 e A6). Dois alunos também atribuem à percentagem o significado de divisão: "Que tinham que inventar uma moeda pequena para poderem fazer divisões" (A1 e A13).

Fazendo a síntese dos resultados da análise desta tarefa, podemos dizer que se evidencia:

i) A mobilização de conhecimentos anteriores relativos: a) a distinção entre a representação fracionária e a decimal; b) à leitura das várias representações (distinguindo-se a leitura dos numerais decimais e das frações decimais; c) aos arredondamentos; d) à decomposição de um número; e) à utilização do algoritmo da divisão; f) à utilização da fração em dois significados: parte-todo e quociente;

ii) A utilização de estratégias: a) intuitivas de pensamento proporcional; b) de divisão (associada ao significado da fração de quociente); c) de decomposição de um número numa soma cujas parcelas eram o 100;

iii) A existência de dificuldades: confusão entre parte e número de moedas e ao nível do pensamento proporcional;

iv) Um conjunto de aprendizagens: a) aprofundamento da distinção entre fracionários e decimais; b) compreensão do significado de percentagem a partir de uma fração cujo denominador é 100; c) utilização de representações distintas para o mesmo número: fração, percentagem e decimal; d) arredondamento como uma necessidade natural que deriva das limitações de um determinado sistema.

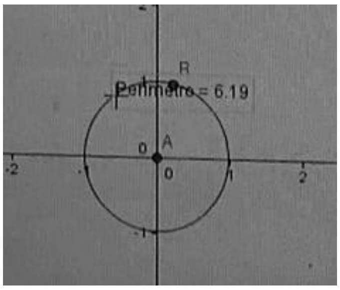
O contexto histórico desta tarefa permitiu que os alunos continuassem a perspetivar a Matemática como uma ciência que vai evoluindo no sentido de se ultrapassarem as suas próprias limitações que, numa determinada altura, se podiam sentir. Os alunos, ao reconhecerem algumas dessas limitações, tentam apresentar soluções válidas.

Tarefa 7

Com esta tarefa pretendia-se determinar experimentalmente um valor aproximado para π.

Os alunos abordaram, previamente, o perímetro e a área de polígonos regulares e irregulares e, numa outra aula de resolução de exercícios e problemas, um aluno tomou a iniciativa de me questionar se também seria possível calcular o perímetro e a área de um círculo. Na presente aula aproveitei tal situação e, alargando a questão à turma, informei os alunos que a mesma tinha mais de 4000 anos e que iriam ter a oportunidade de a explorar nesta tarefa, pelo que o seu entusiasmo não se fez esperar. Ainda num momento introdutório, questionei os alunos sobre a primeira estratégia que os nossos antepassados poderiam ter utilizado para medir o perímetro de um círculo e um deles sugeriu que "Pegavam numa fita e mediam" (A13, n.c.), enquanto gesticulava fazendo um círculo com o seu indicador esquerdo. Dei indicações à turma para seguir esta estratégia e na primeira questão confirmei que todos os alunos entendiam o significado do traço presente em $\frac{P}{d}$ ao qual associaram a divisão (n.c.).

Os alunos que se dirigiram ao campo de futebol para realizar as respetivas medições no círculo central apresentaram o valor 3,12 para a razão pretendida (P = 18,72 m; d = 6 m). Os alunos que utilizaram o computador obtiveram valores entre 3,10 e 3,16 com recurso ao programa geogebra. Os alunos marcavam circunferências com o centro no ponto (0,0) de forma a obterem diâmetros que fossem fáceis de medir, pois o valor do perímetro era dado pelo programa informático, como se pode ver neste exemplo em que facilmente se percebe que o diâmetro é 2:

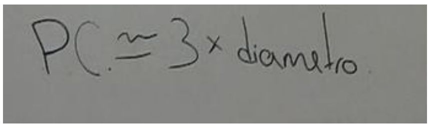


O grupo que fez as medições manuais dentro da sala obteve valores entre 2,88 e 2,92. Tais valores foram consequência da dificuldade demonstrada pelos alunos para manusear a fita métrica na realização das medições, pois pude aperceber-me dessa situação em relação à medição do perímetro de um cilindro em que dois alunos apresentavam medidas diferentes: “Tinta vírgula cinco” (A15, n.c.); “Trinta vírgula sete ou seis” (A10, n.c.). Os alunos voltaram a medir aquele perímetro, de uma forma mais rigorosa e desta vez todos chegaram a acordo sobre o valor: “30,3” (A7). Quanto ao valor de $\frac{P}{d}$ para aquele círculo, arredondado à unidade, todos os alunos deste grupo responderam 3 mas o aluno A10 retorquiu evidenciando compreender que o número não era exato: “Isto pode ser infinito…” (n.c.) justificando que não se sabia se “Acabava aqui [último dígito da calculadora]” (n.c). Começavam, pois, a surgir dúvidas muito pertinentes acerca da natureza daquela razão, originadas pelos diferentes resultados obtidos para cada objeto. Comecei a questionar os alunos que trabalhavam com o computador acerca dos valores a que tinham chegado: “São parecidos” (A1 e A15, n.c.). Este grupo começava, pois, a considerar que as razões que tinham obtido poderiam ser semelhantes mas consideravam que este valor seria maior no caso do grupo que tinha ido ao campo de futebol para fazer as respetivas medições ao círculo central: “Deve dar um bocadinho diferente porque também são maiores [as circunferências] ” (A1, n.c.), ou seja, este aluno não evidenciava ter a noção de que a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro era sempre um valor constante e talvez considerasse que o mesmo aumentaria à medida que o tamanho da circunferência em causa aumentasse. No entanto, outro aluno não partilhou da mesma opinião: “Se calhar até pode dar [igual/parecido] porque o diâmetro [do círculo do campo] também é maior, também tem mais por onde dividir” (A13, n.c.) e “Sendo o perímetro maior o diâmetro também é!” (A13, n.c.). Este aluno utilizou uma explicação atribuindo à fração $\frac{P}{d}$ o significado de razão e, de certa forma, conseguiu relacionar o numerador com o denominador e conjeturar acerca da possibilidade daquela razão ser constante. De seguida, o seu grupo de trabalho começou a centrar-se na natureza daquele valor e alguns alunos até especulavam entre si sobre a possibilidade de ser a área daquele círculo (n.c.).

Os alunos, após terem comparado os seus valores da citada razão com os valores obtidos pelos outros grupos, concluíram era “aproximadamente 3” (A1) e três alunos ainda acrescentaram que “O Diâmetro é $\frac{1}{3}$ do perímetro e o perímetro é o triplo do diâmetro” (A11). Nesta situação, os alunos recorrem ao significado da fração no contexto de operador na dimensão de multiplicador para compararem o diâmetro com o perímetro, pois para além de compararem o numerador com o denominador também conseguiram estabelecer a relação inversa. Um aluno evidenciou entender o arredondamento para três como uma estimativa, dando a seguinte justificação: “O que o aluno A11 está a tentar explicar é que é uma estimativa porque não é certo. 6, por estimativa, é um terço de 18,72 (…) [o perímetro] é o triplo do diâmetro” (A8, n.c.). Este aluno utiliza a fração com recurso ao significado de razão porque consegue estabelecer uma comparação entre o diâmetro e o perímetro. Curiosamente, outro aluno apenas afirmou inicialmente que o perímetro era “Mais do que o dobro [em relação ao diâmetro]” (A3) o que pode evidenciar que não conseguiu, numa primeira etapa, pensar numa razão mais rigorosa. Só mais tarde reconheceu que era “Três vezes maior” (n.c.) após a minha intervenção indagadora junto do grupo de trabalho a que este aluno pertencia:

> A3: É mais do dobro [perímetro em relação ao diâmetro]
> Prof.: E não conseguimos dizer?
> (…)
> Prof.: O 35 é quantas vezes maior que o 12?
> A9: 12 e 12 vinte e quatro mais doze 36…
> Prof.: E quanto é que é o perímetro?
> A12: 35.
> Prof.: Então quantas vezes é maior, aproximadamente?
> A9: Três.

O aluno A9 usou uma estratégia aditiva para relacionar o diâmetro com o perímetro pois vai somando o 12 sucessivamente até chegar a um valor próximo de 35, que neste caso é 36, percebendo, pois, que o perímetro é aproximadamente o triplo do diâmetro. Assim, quatro alunos escreveram em linguagem natural que o perímetro era aproximadamente o triplo do diâmetro; quatro alunos afirmam que o perímetro é sempre maior que o diâmetro e cinco alunos não dão nenhuma resposta. Nalguns casos, os alunos utilizaram a notação simbólica (ou um misto desta com a linguagem natural) nas suas respostas escritas, como por exemplo: “x 3 diâmetro” (A11) ou “P > d” (A7). Durante a discussão evidenciaram-se dificuldades no uso da mesma. Um aluno escreve no quadro “P é o 3x do D” (A8, n.c.) e, quando solicitado a melhorar esta resposta, um outro aluno começa por escrever “P – 3x” (A1, n.c.), alterando para “P : 3x” (A1, n.c.) depois de questionado sobre o significado do traço usado. Só escreve a expressão algébrica correta “P = 3 x diâmetro” (A1, n.c.) quando é novamente questionado sobre o significado do sinal de divisão que anteriormente tinha utilizado. Quando se discutiu na turma se o perímetro era exatamente três vezes o tamanho do diâmetro o aluno A10 foi, por iniciativa própria, ao quadro e modificou o sinal de igual para o sinal de aproximadamente igual, o que pode evidenciar que o mesmo compreendia que aquele seria um valor aproximado do perímetro do círculo:



A utilização deste símbolo já era conhecida pela turma pois já tinha sido utilizado em diversos contextos em outras aulas, pelo que agora os alunos o utilizavam de forma apropriada. Outros dois alunos também evidenciaram compreender este valor como uma aproximação pois escreveram o seguinte: “Aproximadamente” (A4) e “Mais ou menos” (A6).

No que respeita ao número de casas decimais desta razão, apenas quatro alunos escrevem que são finitas limitando-se a justificar dizendo que “Passado algum tempo, elas terminam” (A6) o que pode evidenciar que não conjeturam sobre a possibilidade deste valor poder ser infinito, isto é, limitam-se a aceitar o valor apresentado pela calculadora como correto e finito. No entanto, os restantes alunos tiveram em conta essa possibilidade. Durante a resolução da tarefa, um aluno foi perentório em dizer que só existiam duas possibilidades para o número de casas decimais do número em causa: “Podem ser finitas ou infinitas” (A6, n.c.). Outro aluno mostrava incerteza:“Nunca fizemos todas [casas decimais]” (A1, n.c.) o que pode evidenciar que para este aluno seriam necessárias mais casas decimais para poder fazer uma conjetura que possa considerar esta razão como possuindo infinitas casas decimais. O aluno A13 não considera a possibilidade da calculadora ter limite de dígitos pois para este aluno “São finitas porque acabam” (n.c.). No entanto, num outro grupo, essa questão é tida em conta. Apesenta-se um excerto elucidativo de tal questão e de como fui conduzindo o questionamento aos alunos:

> Prof.: Casas decimais finitas ou infinitas?
> A9: As casas decimais acabam.
> Prof.: E como é que tens a certeza que acabam?
> A9: Não se sabe, a calculadora podia parar aqui a certa altura.
> Prof.: Diz outra vez porque não sei se percebi.
> A9: Esta aqui [um dos valores] termina mas a de cima não sabemos se termina porque isto chegou até ao fim dos algarismos e podia continuar ou não.
> Prof.: E como é que se podia investigar isso?
> A9: Tentando fazer… à mão acho que não dava.
> Prof.: À mão também dá para dividir. Podíamos era arranjar uma calculadora como?
> A9: Maior, com mais algarismos.
> Prof.: Imaginem que tínhamos uma calculadora com 50 algarismos. Será que parava?
> A5: Se calhar parava mas não sabemos.

O aluno A9 evidencia entender o resultado apresentado como podendo ser infinito e considera que o número limitado de casas decimais pode estar relacionado com a restrição dos dígitos da calculadora que é utilizada. O aluno A5 também partilha da mesma opinião pois quando é confrontado com a possibilidade de se recorrer a uma calculadora com cinquenta dígitos não tem a certeza que tal extensão permita obter um número com casas decimais finitas.

Na parte final da tarefa, os alunos assumiram que possivelmente teriam existido mais povos a estudar a razão em causa: “Porque também tinham a necessidade de saber medir objetos circulares” (A2); “Tinham a necessidade de ter mais maneiras para medir” (A6). A segunda resposta parece evidenciar que as pessoas sentiram a necessidade de arranjar uma forma alternativa para medir o perímetro de circunferências, talvez pela dificuldade sentida nos processos manuais de medição. Três alunos parecem antecipar a utilidade desta constante no cálculo da área, pois apresentam a seguinte explicação: “Porque as pessoas precisavam. Imaginem uma pessoa que tinha um terreno circular e queria saber a sua área, tinham que utilizar isto” (A7, A10 e A15). No entanto, também é possível que ao redigirem esta ideia possam ter confundido perímetro e área e, assim, esta frase terá surgido no contexto da necessidade da medição do perímetro.

Fazendo uma síntese dos resultados da análise desta tarefa, podemos dizer que se evidencia:

i) A mobilização de conhecimentos anteriores relativos à terminologia própria da circunferência (centro, raio e diâmetro); reconhecimento do traço de fração como uma divisão; utilização de arredondamentos; utilização da linguagem matemática (metade, triplo, um terço); utilização de frações; utilização da notação simbólica matemática;

ii) A utilização de estratégias intuitivas de proporcionalidade e de estratégias aditivas para relacionar o diâmetro de uma circunferência com o seu perímetro;

iii) A existência de dificuldades: a) pensamento proporcional para circunferências de tamanhos diferentes; b) medição manual do diâmetro e sobretudo do perímetro com recurso a uma fita, pois os alunos consideravam que os valores inicialmente obtidos eram o resultado de erros de medição; c) dificuldade em conjeturar acerca da possibilidade da razão $\frac{P}{d}$ ser infinita; d) passagem da linguagem natural para a notação simbólica.

iv) A realização de aprendizagens: a) o perímetro de uma circunferência é aproximadamente o triplo do seu diâmetro e este a terça parte do perímetro; b) a razão $\frac{P}{d}$ não é um valor exato - arredondado às unidades apresenta o valor 3; c) a razão referida pode ser um valor infinito (conjetura); d) para qualquer circunferência, $P \cong 3 \times d$.

Com esta tarefa, os alunos evidenciaram compreender que a Matemática visa dar mais ferramentas de medição às pessoas, nomeadamente quando as técnicas conhecidas parecem ser pouco rigorosas ou fiáveis. Assim, o contexto histórico desta tarefa permitiu que os alunos também se deparassem com dificuldades de medição, nomeadamente na utilização da fita métrica, levando-os a perceber que os nossos antepassados terão procurado estratégias alternativas para medir o perímetro das circunferências.

Tarefa 8

Com a realização desta tarefa pretendia-se levar os alunos a compreender a irracionalidade do número π.

Após ter distribuído os enunciados, um aluno chamou-me perguntando de forma entusiasmada e simultaneamente incrédula: "Como é que isto [casas decimais de π] ainda continua a aumentar?" (A17, n.c.) o que pode evidenciar que este aluno não tinha, inicialmente, a noção de que aquela razão seria uma dízima infinita, tal como sucedeu para o aluno A11 que prontamente afirmou que a tabela se referia ao número “3” (n.c.). Desta forma, este aluno utilizou um conhecimento anterior e relacionava esta tabela com a razão estudada na tarefa 7. Num outro grupo, o aluno A3 ficou estupefacto pelo facto de atualmente se conhecerem “51 biliões de casas” (n.c.), o que mostra que esta tarefa promove a leitura de números, neste caso por classes.

Uma primeira dificuldade evidenciada inicialmente por alguns alunos foi entender o significado da palavra pi, presente no título da cronologia. Limitei-me a pedir-lhes que fossem explorando a tarefa, pois o objetivo seria que, ao responderem às questões, pudessem tecer as suas próprias conclusões. Por outro lado, muitos alunos descoravam que as respostas implicariam analisar cuidadosamente a tabela, mesmo após reiteradas chamadas de atenção sobre esse aspeto. Umo aluno chamou-me e leu em voz alta a questão respondendo de seguida: “A Bíblia também refere este número? Sei lá!” (A8,n.c.). Pedi-lhe apenas que consultasse a tabela onde poderia encontrar a resposta e foi o que este aluno fez, escrevendo desde logo a resposta correta no seu enunciado, exclamando: “Já vi!” (A8, n.c.). O mesmo aluno descreveu, primitivamente, pi como sendo “Aquele desenho [símbolo π]” (n.c.) e num outro grupo, quando perguntei se aquele valor não estava relacionado com algo que já tínhamos estudado, o aluno A13 exclamou: “É o perímetro a dividir pelo diâmetro” (n.c.);“É o símbolo para isso” (A13, n.c.), o que “Representa o pi” (A1, n.c.). Os alunos começavam a atribuir corretamente significado ao símbolo π, relacionando-o com a razão anteriormente estudada. Desta forma, podemos pensar que para o aluno A13 o número em causa é visto como uma razão ou eventualmente como quociente, uma vez que apenas refere a divisão do perímetro pelo diâmetro. O aluno A17 entende aquela relação como uma razão e quando lhe pedi uma justificação responde: “É uma divisão” (n.c.), ou seja, não faz a distinção entre razão e quociente, o que pode significar que utilizou intuitivamente essa expressão como sinónimo de divisão. Tal associação poderá estar eventualmente relacionada com as tarefas exploratórias para as frações em que o significado de quociente foi identificado pelos alunos. Quanto ao número em causa, todos os alunos registaram que a tabela cronológica tratava do número pi (oito alunos acrescentaram o respetivo símbolo na resposta) identificando corretamente os primeiros povos a apresentar um valor para o mesmo.

Na questão relacionada com o valor deste número presente na Bíblia, uma grande parte dos alunos revelou, inicialmente, dificuldades para compreender os dados a partir do trecho copiado do citado documento, pois muitos alunos não fizeram, ao princípio, uma análise cuidada do que estava escrito e alguns alunos retiraram, por lapso, dados da nota adicional relativa ao côvado, o que me leva a considera-la como excesso de informação. No entanto, todos os alunos conseguiram chegar ao valor 3 utilizando um conhecimento anterior, isto é, a estratégia utilizada foi a de apresentarem o algoritmo da divisão. Cinco alunos escreveram $\frac{P}{d}$ para além de realizarem a divisão e um deles utilizou intuitivamente uma notação muito completa para realizar esse quociente escrevendo "$\frac{P}{d} = \frac{30}{10} = 3$" (A10) o que pode eventualmente significar que utilizou intuitivamente a fração como o significado de razão. Para os alunos, na Bíblia surge 3 como o valor de pi porque provavelmente "Quiseram arredondar" (A2, n.c.) – conjetura. Todos os alunos escreveram que o número de casas decimais foi aumentando "Com os anos" (A16) e consideraram que não é possível calcular o valor exato deste número pelo facto de apresentar "casas decimais até ao infinito" (A11). Esta resposta permite-nos pensar que os alunos encararam a razão em causa como impossível de determinar apenas porque a mesma evidenciava ter um número infinito de casas decimais, ou seja, ainda continuavam a considerar este número como racional. Quatro alunos explicaram a sua hipótese usando um argumento de cariz histórica: "Exemplo: 2000 a.c. só havia 3 casas decimais e atualmente existem mais de 51 000 000 000 000" (A11) o que pode evidenciar que a tabela cronológica permitiu aos alunos conjeturar acerca do número infinito de casas decimais de pi a partir da evolução do cálculo deste número ao longo dos tempos, pois inicialmente um processo manual de cálculo era muito limitado. Na questão seguinte, que incide sobre a possibilidade de existir ou não um padrão nas primeiras vinte casas decimais, todos os alunos escreveram que não existe por não se poder identificar uma sequência (3 repostas) ou por não existirem algarismos que se repetem – os alunos já tinham trabalhado o conceito de dízima infinita periódica na tarefa 3 relativa às frações: "Isto não apresenta nenhum padrão" (A6, n.c.). Este aluno evidencia ter estado atento à possibilidade de identificar um padrão nas primeiras vinte casas decimais de pi. Com o evoluir da exploração da tarefa, os alunos começaram a evidenciar, de uma forma mais segura, a possibilidade do número em causa ser irracional: "Porque não encontrámos nenhuma sequência igual, ou seja, é irracional" (A11); "Faz parte dos números irracionais" (A17, n.c.); "Irracional" (A10, A12, A13, n.c.). No entanto, para justificarem tal nomenclatura, os alunos utilizam justificações de três dimensões distintas: i) auto-exclusividade - "Porque se não é racional é irracional" (A11, n.c.); ii) Dízima infinita - "Porque nós não sabemos quantos números vêm a seguir" (A2, n.c.); Não periodicidade da dízima infinita -

“Porque não há uma sequência” (A8, n.c.). O ambiente de conjetura começa a ganhar mais relevo e os alunos A5 e A7 enfatizam explicitamente a capacidade matemática de previsão nas suas respostas escritas: “Porque nunca prevemos os números que vêm a seguir” (A5), o que pode evidenciar, de alguma forma, que aceitam a possibilidade de se tratar de uma dízima infinita não periódica.

Na pergunta seguinte, em que se reforça a questão de ser ou não possível calcular com rigor a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro, existem quatro alunos que apresentam um argumento que incide no método da medição manual: “Porque podemos enganar-nos, por mais um centímetro, menos um centímetro” (A12). Esta resposta revela uma compreensão da razão como um número racional dado que a limitação apresentada por este aluno se resume a um possível lapso de medição, ou seja, não admite a possibilidade de, fazendo-se uma medição correta do perímetro e do diâmetro, se poder continuar a ter uma razão cujo valor exato não se pode obter, o que pode ser interpretado como a ausência do conceito de irracional. Globalmente, dez alunos apenas escrevem que não se obtém um valor exato, o que obriga a um arredondamento e o aluno A15 afirma que se pode dever ao “Cálculo mental” (n.c.), o que pode evidenciar que compreende que, por uma questão prática, alguns povos se limitam a apresentar 3 para essa razão. No entanto, o aluno A13 propõe de forma intuitiva a utilização de “Duas” casas decimais (n.c.) quando lhe fiz essa questão diretamente. De certa forma, a justificação encontrada pelos alunos para a escolha de um símbolo que represente esta razão aponta no sentido de este ter casas decimais infinitas: treze alunos escrevem esta justificação e os restantes, três, apenas consideraram ser a primeira letra da palavra perímetro em grego – informação constante na tabela cronológica. Assim, surgiu a necessidade de se proceder a um arredondamento, sendo que a maior parte dos alunos aponta intuitivamente para o valor 3,14 e apenas um aluno utiliza o valor 3, talvez por ter sido o primeiro valor que a turma descobriu ou simplesmente porque desprezou a parte não inteira e procedeu ao arredondamento deste valor às unidades considerando, talvez, que tal estimativa não terá grande influência no cálculo do perímetro da circunferência. Tendo em conta que esta foi a segunda tarefa para este tópico, é preciso ter em atenção que os alunos ainda não tinham resolvido problemas, pelo que, neste momento, definir-se 3 ou 3,14 para esta razão ainda não era, para eles, muito importante ou significativo. De qualquer modo, a maior parte da turma apresentou um bom arredondamento, o que pode evidenciar que atribuíram significado à parte não inteira.

Toda a turma considerou, pois, que a nova fórmula a utilizar deve ser "$P = \pi \times d$" (A10) embora quatro alunos tenham escrito "$P \cong \pi \times d$" (A1) o que evidenciar que não compreenderam a verdadeira razão de se substituir o valor de pi por um símbolo, dado que não utilizam o sinal de igual. No entanto, destes quatro alunos que utilizam a fórmula acima citada, três apresentam um conjunto de ideias principais (pergunta 5) que revelam uma boa compreensão da natureza deste número: "π não tem valor exato e se repararmos pi vem da palavra perímetro [em grego]. Começou a ser explorado há 4000 anos e só em 1706 é que decidiram chamar-lhe "pi" porque não acaba" (A1, A6, A13). Nesta explicação continua a denotar-se uma grande importância para o facto de ter uma dízima infinita não se explicitando se é ou não periódica, o que não enfatiza a irracionalidade deste número. O aluno A2, por seu lado, evidencia percecionar π como irracional embora a sua justificação não seja completa, nomeadamente no que à periodicidade diz respeito: "O número π tem casas decimais infinitas. É mais fácil de representar. Foi difícil descobrir o número exato e ainda não descobrimos o valor exato de π". Apesar de não ser totalmente explícito que este aluno entenda π como um número irracional, a verdade é que admite essa possibilidade pois ao afirmar que ainda não se descobriu o valor exato pode significar que aceita a conjetura de não se encontrar um padrão nas suas casas decimais. Na discussão com a turma, para além dos aspetos já mencionados, surgiram outras questões que foram debatidas e que considero terem sido importantes, tendo em conta o objetivo da tarefa. Assim, a discussão final evidenciou:

i) Perceção indireta da Matemática como uma ciência em constante evolução pois o aluno A2 afirmou que cronologia significava evolução "Ao longo dos tempos" (n.c.) e numa outra situação, o mesmo aluno explicou que o côvado "Era uma unidade de medida antiga" dada pelo "Antebraço" e que valia "50 cm" (n.c.). Simultaneamente, o aluno A17 afirmou que há 4000 anos ainda não existiam os decimais pois só tinham sido inventados "Há 500 anos" (A4, n.c.) por "Simon Stevin" (A8, n.c.), Quanto ao valor de pi constante na Bíblia, o mesmo só se obtém indiretamente pois "Nós é que temos que o descobrir" (A6, n.c.);

ii) A importância do computador no decorrer da exploração da tarefa: considerou-se que a sua utilização visava obter "Cálculos mais exatos" (A4, A17, n.c.) e obter "Mais casas decimais" (A7, n.c.), situação que não aconteceu com os primeiros povos "Porque não havia muita tecnologia" (A10, n.c.). Esta última intervenção evidencia que este aluno conjetura que a compreensão da natureza deste número era condicionada, inicialmente, pela falta de meios de cálculo que permitissem às pessoas ter uma ideia mais concreta da infinidade de casas decimais e, eventualmente, da ausência de um padrão;

iii) A compreensão de que o símbolo π foi necessário pois assim podíamos representar "O número todo" (A7, n.c.); o aluno A2 estabeleceu uma mnemónica entre o símbolo e o seu valor arredondado pois "Se nós pensarmos, ele tem três pernas" (n.c.), situação igualmente identificada nas respostas escritas de quatro alunos;

iv) A compreensão intuitiva do enquadramento apresentado a respeito de Arquimedes pois o aluno A1 interpreta corretamente a notação: "Maior que 3,1410 e menor que 3,1428" (n.c.) o que iria, talvez, auxiliar na exploração da tarefa seguinte.

Fazendo uma síntese dos resultados da análise desta tarefa, podemos dizer que se evidencia:

i) A mobilização de conhecimentos anteriores: a) leitura de números por classes; b) compreensão de que $\frac{P}{d}$ é traduzido por um valor arredondado a 3; c) o perímetro é aproximadamente o triplo do diâmetro ou o diâmetro é aproximadamente um terço do perímetro; d) reconhecimento do sinal de fração como divisão;

ii) A utilização de estratégias: a) levantamento de conjeturas para explicar e compreender a natureza de pi; b) utilização do significado de quociente para obter o valor de pi;

iii) A existência de dificuldades: a) linguagem bíblica como obstáculo para levantamento de dados para a obtenção do valor 3 para pi, dificuldade esta associada ao excesso de informação relativa ao côvado; b) apesar de se obterem algumas caraterísticas deste novo número, os alunos apresentaram uma visão parcialmente racional do mesmo;

iv) A realização de aprendizagens: a) a fórmula a utilizar no cálculo do perímetro de uma circunferência é dada por $P_o = \pi \times d$; b) utilizar o valor 3 para pi é uma boa aproximação quando se recorre ao cálculo mental; c) π resulta da razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro; d) π é um número irracional porque apresenta uma dízima infinita não periódica; e) o cálculo de π foi-se tornando mais rigoroso, ao longo dos tempos, sendo o computador um instrumento que permitiu compreender melhor a natureza do número em causa; f) a utilização do símbolo π permite representar um número cuja parte decimal é constituída por uma dízima infinita não periódica.

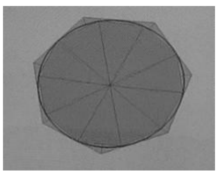
Nesta tarefa, a tabela cronológica teve um papel fundamental, pois os alunos puderam explorar vários aspetos históricos deste irracional conseguindo tecer explicações com base na mesma. O mero cálculo empírico deste número não demonstrará, por si só, a sua natureza irracional, pelo que o contexto histórico pode ser considerado como essencial na exploração desta tarefa, permitindo aos alunos conjeturar acerca das suas ideias matemáticas.

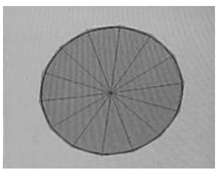
Tarefa 9

Com a presente tarefa pretendia que os alunos determinassem experimentalmente um valor aproximado de π por enquadramento, levando-os a compreender a natureza do valor obtido.

Após um aluno ter referido que William Jones fora o responsável pela escolha de um símbolo para representar o número pi (n.c.) informei a turma que na presente aula iríamos explorar o método utilizado por Arquimedes cujo valor por si calculado para pi também estava referido na tabela cronológica da tarefa anterior. Após a leitura do texto introdutório expliquei as normas básicas de funcionamento do *applet* que os alunos iriam utilizar e procurei certificar-me que todos entendiam tal explicação.

A turma evidenciou compreender o primeiro passo do método de Arquimedes, o qual tinha construído dois quadrados: "Um quadrado dentro e um fora [em relação ao círculo]" (A3). Um aluno identificou corretamente a primeira transformação do quadrado num "Pentágono" (A2, n.c.) e no final todos os alunos compreendiam que os quadrados iniciais começavam a parecer-se com uma figura já conhecida: "Ficam os dois parecidos com um círculo" (A17, n.c.) como ilustra o trabalho desenvolvido no computador pelos alunos A10 e A15:





Com base nestas respostas, os alunos conjeturaram que Arquimedes pretendia "diminuir o tamanho das retas até se parecer com um círculo" (A13) o que permitia "ficar só com segmentos de reta para ser mais fácil [de medir]" (A7). Os alunos A10 e A15 registaram que com este método seria "Mais fácil de chegar ao número π (pi)", embora não justifiquem porquê, enquanto que o aluno A8 admitia que com este programa só se utilizavam "Oito" casas decimais (n.c.), o que pode evidenciar que este aluno assume que estava perante um arredondamento de apenas algumas casas decimais de pi.

Na questão seguinte, oito alunos registaram que para se obter um valor de pi de pelo menos 3,14 são necessários “57 [lados] dentro do círculo e 36 [lados] fora” (A17), o que pode evidenciar que estes alunos compreenderam a forma como este enquadramento de pi foi conseguido. No entanto, os restantes seis alunos apresentam respostas incorretas. Por exemplo, dois alunos respondem: “Fora – 114, dentro 37” (A2 e A7), o que pode significar que registaram inicialmente na *applet* um valor muito elevado para o número de lados do polígono exterior e ao diminuir unitariamente esse valor, pi mantinha-se em 3,14, situação semelhantemente experienciada por outro grupo que tinha introduzido também um número muito elevado de lados para o polígono exterior – 15012.

No que respeita ao valor de pi obtido por Arquimedes, todos os alunos compreenderam que o mesmo não era exato e as suas explicações podem ser agrupadas de cinco formas:

i) Arquimedes procedeu a um enquadramento: “Ele disse que estava entre um número e outro” (A9 e A12); um destes alunos assumia, a meio do processo de digitação de valores, que pi se situava entre 3,12 e 3,20 (A12, n.c.) utilizando corretamente o conhecimento anterior para os arredondamentos pois o intervalo no *applet* era “3,11529307 $< \pi <$ 3,19540864” (A12, n.c.). Por outro lado recorreu, também, ao conhecimento de que se utilizam as duas primeiras casas decimais deste número nesse arredondamento;

ii) Infinito: “Porque ele à mão não conseguia fazer ∞ lados” (A13). No total, três alunos dão uma justificação semelhante. Com esta resposta podemos admitir que estes alunos percebiam que Arquimedes se estava a aproximar do valor pi, sem nunca chegar ao seu valor exato pois tal só seria possível com um polígono com infinitos lados, que neste caso seria o círculo (utilização correta do conhecimento anterior de que um círculo tem infinitos diâmetros e, necessariamente, infinitos lados);

iii) Arredondamento: “Ele disse que era mais ou menos” (A12, n.c.). Este aluno, apesar de utilizar a linguagem natural, admite que os valores apresentados são consequência de um arredondamento;

iv) Conhecimento histórico da Matemática: “Nem hoje em dia se sabe o valor exato de pi (π)” (A3); “hoje conhecem-se “51 biliões [de casas decimais]” (A2, n.c.). Estes alunos suportaram-se de conhecimentos históricos anteriormente construídos, nomeadamente na análise da tabela cronológica de pi, o que lhes permitia compreender o valor apresentado por Arquimedes como desatualizado;

v) Conhecimento anterior do valor de pi: "Porque o nº pi não é exato" (A2). Alguns alunos utilizaram corretamente um conhecimento anterior, pois se o valor deste número não é exato, o que Arquimedes apresentava também não poderia sê-lo.

Todos os alunos admitem que o valor de pi se vai tornando mais rigoroso à medida que se aumentam o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos e surgem novamente oito explicações baseadas no infinito: "Porque os lados do círculo são infinitos " (A4 e A6); "Vai ficando cada vez mais um círculo perfeito" (A2); "Porque quantos mais lados acrescentarmos mais perto de π estamos" (A15). Os alunos evidenciavam compreender a ideia central deste método e na discussão desta questão, o aluno A4 conjeturou que Arquimedes "Começou a aperceber-se disso" (n.c.), isto é, do facto de estar mais próximo do valor de pi ao aumentar o número de lados, sem que pudesse, claro, chegar a infinitos lados e, consequentemente, ao seu valor exato.

Nesse sentido, todos os alunos consideraram o método em estudo como sendo mais rigoroso do que a utilização da fita métrica porque reconhecem que no segundo caso há pouca exatidão: "Neste [Arquimedes] seria mais difícil enganarmo-nos" (A9); "Podemos não segurar bem nela [fita] e medir mal" (A2). Dois alunos evidenciam compreender que os dois métodos nada têm a ver um com o outro e, indiretamente, parecem alertar para o facto de Arquimedes ser ter aplicado para obter uma boa aproximação de pi: "Porque a fita foi a olho e o Arquimedes demorou mais mas ficou mais perto do pi (π)" (A10 e A15).

Com a questão 2, os alunos consolidavam o seu entendimento do método utilizado nesta tarefa e surgiam duas explicações que justificavam o facto de Arquimedes não ter prosseguido para além do indicado no enunciado:

i) Dificuldade processual - oito alunos consideraram que " Era cada vez mais difícil de descobrir o número e o tamanho dos lados" (A1) uma vez que "Começou a surgir mais lados e chegaria a uma parte onde ele não conseguiria medir tudo" (A4);

ii) Valores obtidos considerados com uma boa aproximação - oito alunos justificam que "Estava a fazer à mão e era muito difícil e estava contente com aqueles resultados" (A5), ou seja, a dificuldade de utilizar este método está presente mas os alunos consideram que quando este matemático parou também foi o resultado de sentir que naquele momento tinha conseguido uma excelente aproximação, não só do ponto de vista matemático como também do ponto de vista histórico: "Nunca ninguém naquela altura conseguiu ter descoberto aquilo" (A16, n.c.). Ou seja, este aluno considerava que aquela aproximação era muitíssimo boa tendo em conta, eventualmente, os valores que tinham sido explorados na tabela cronológica da tarefa anterior.

Tendo em conta o grau de abertura da última questão, as conclusões finais escritas, podem ser categorizadas de cinco formas diferentes:

i) Dois alunos referem diretamente a necessidade do infinito para se descobrir o valor de pi: "Arquimedes chegou à conclusão que ficaria muito grande e para saber o valor exato tinha de ir até ao infinito" (A16);

ii) Seis alunos referem o infinito indiretamente: "Porque quanto mais lados as figuras tiverem mais se assemelha a um círculo" (A6), ou seja, "Se aumentarmos o valor de lados o valor de pi fica mais perto do número exato" (A7);

iii) Quatro alunos referem o trabalho realizado por este matemático: "Arquimedes trabalhou muito para tentar achar o número pi (π)" (A6). Estes alunos evidenciam entender que a Matemática é uma ciência que resulta do trabalho árduo de algumas pessoas;

iv) Dois alunos referem a criação de um novo método: "Arquimedes, ao inventar um novo método, ajudou-nos a descobrir uma maneira melhor de descobrir a circunferência" (A12) - Matemática como uma ciência que evolui de acordo com os métodos que vão sendo criados;

v) Dois alunos contextualizam Arquimedes na história evolutiva do número pi: "Arquimedes fez 96 lados e ainda não conseguiu (nem atualmente) descobrir o número π. No computador é mais fácil descobrir" (A15). Nesta visão, o aluno em causa evidencia que o método utilizado apenas dá uma boa aproximação de pi – evolução histórica da obtenção do seu valor.

Fazendo uma síntese dos resultados da análise desta tarefa, podemos dizer que se evidencia:

i) A mobilização de conhecimentos anteriores relativos à: a) História da Matemática; b) nomenclatura dos polígonos regulares; c) utilização do símbolo correto para pi; d) arredondamento de pi utilizando duas casas decimais; e) utilização do conceito de infinito e do respetivo símbolo;

ii) A utilização de justificações tendo por base: a) os enquadramentos; b) a História da Matemática; c) o infinito;

iii) A existência de dificuldades: a) na utilização do *applet* nas situações em que os alunos digitavam um número muito elevado de lados, pois ao aumentarem ou

diminuírem esse valor unitariamente não visualizavam qualquer alteração nos oito algarismos das casas decimais a que este enquadramento se reportava;
iv) Um conjunto de aprendizagens: a) aprofundamento da compreensão de pi como um número com infinitas casas decimais; b) Arquimedes utilizou um método bastante rigoroso que indicava um intervalo ao qual pi pertencia, ou seja, apresentou um valor aproximado; c) talvez este matemático tenha percebido que com infinitos lados estaríamos perante um círculo e, dessa forma, obter-se-ia o valor de pi, ou seja, com infinitas casas decimais.

Com esta tarefa, os alunos conseguiram tecer conjeturas recorrendo a acontecimentos históricos para a obtenção do valor de pi. O método utilizado por Arquimedes é considerado pelos alunos como muito avançado para a época e permitiu aos mesmos compreender que, por vezes, tiveram que se utilizar métodos que exigiram um trabalho exaustivo e, de certa forma, complexo. Realça-se, ainda, a utilização do conceito de infinito para a compreensão de pi.

Tarefa 10

Com esta tarefa pretendia que os alunos: i) indicassem como se pode obter um valor aproximado de π; ii) explicassem a irracionalidade de π; iii) resolvessem um problema envolvendo o perímetro da circunferência.

Os alunos fizeram um relatório escrito, em grupo, a partir do visionamento de um filme de aproximadamente 6 minutos. Neste filme surge uma situação problemática, uma vez que uma pessoa costuma correr em redor de uma praça circular de 100 metros de diâmetro, dando vinte voltas seguidas. Pergunta-se, pois, qual a distância percorrida por essa pessoa. O filme vai abordando as questões que estão registadas no enunciado e durante a projeção do mesmo, cada grupo teria de tirar as notas que considerasse mais importantes. O trabalho realizado por cada grupo foi apresentado uma semana depois da sua visualização e durante esse tempo, o professor reuniu uma vez com cada um dos grupos para se inteirar do trabalho realizado por cada um deles, dando feedbacks orais e escritos. Este relatório escrito, para além de ser um instrumento de avaliação, pretendia ser um fator de aprendizagem.

Ao visionarem o filme, todos os alunos da turma foram capazes de identificar o problema que o mesmo retratava, bem como os seus dados, explicitando-os nos seus relatórios: “O problema inicial que se pretende responder é quantos metros é que ele percorre todos os dias à volta da praça circular sabendo que dá vinte voltas por dia e a praça tem 100 m de diâmetro” (A1, A9, A12 e A13).

Quanto à forma de medir o perímetro da praça, apenas um dos grupos não comentou a dificuldade de se utilizar a fita métrica, como é proposto inicialmente no filme. Os restantes grupos puseram em causa este método porque “É muito difícil de medir e demoraria muito tempo” (A3, A5, A10 e A15) ou porque “A fita pode não ter o tamanho [da praça]” (A4, A6, A8 e A17). Além disso, todos os grupos reconhecem que na antiguidade também se sentiu a necessidade de medir o perímetro das circunferências e que a razão entre o seu comprimento e diâmetro é constante:

i) “A razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é sempre constante originando o aparecimento do número π” (A2, A7, A11 e A16). Nesta resposta, os alunos evidenciam compreender que o valor de pi, que representam pelo seu símbolo, é obtido a partir da razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência, atribuindo a esta fração o significado de razão;

ii) “Foi descoberto que a razão entre a circunferência e o seu diâmetro é sempre a mesma para todas as circunferências e também que mesmo que tenha resultados diferentes o resultado de diâmetro vezes π é igual a 3” (A3, A5, A10 e A15). A primeira parte da resposta indicia, tal como no grupo anterior, a compreensão de uma razão constante entre o perímetro e o seu diâmetro mas, depois, há uma contradição, uma vez que este grupo considera que pode obter resultados diferentes.

iii) “Todas as circunferências têm valor aproximado de 3” (A1, A9, A12 e A13). Este grupo também parece compreender a existência de uma razão constante, preferindo enfatizar o próprio valor de pi (aproximado às unidades) mas revelam dificuldades em expressá-la, aspeto que só fica claro na questão seguinte, quando explicitam como é que obtêm o seu valor;

iv) “Eles perceberam que todas as circunferências são semelhantes” (A4, A6, A8 e A17). Este grupo destaca a existência de semelhanças entre todas as circunferências sem, no entanto, explicitar a que é que essa semelhança diz respeito.

Na questão 5, os alunos explicam como foi obtido o valor de pi, surgindo dois significados de fração distintos em várias representações:

i) Significado de razão e de quociente representados em forma de fração. Três grupos apresentam os cálculos efetuados recorrendo à representação sob a forma de fração: “$\frac{86,8}{28}$ = 3,1 cm. E para a moeda: $\frac{7,6}{2,4}$ = 3,16” (A1, A9, A12 e A13). O facto da primeira razão apresentar a unidade pode evidenciar que este grupo não perceciona aquele valor verdadeiramente como uma razão mas sim com uma medida que surgiu da divisão do perímetro pelo diâmetro, embora tal situação não se verifique no resultado apresentado para a moeda, o que não nos permite ter a certeza desta conjetura;

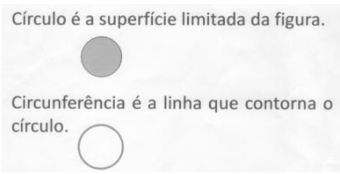
ii) Significado de razão representado sob a forma de divisão. Um grupo apresenta os mesmos cálculos que o anterior mas recorre à divisão: "Comprimento do disco – 86,8 cm : 28 cm = 3,1. Uma moeda de um real – 7,6 cm : 2,4 cm = 3,16" (A2, A7, A11 e A16).

iii) Significado de razão com recurso à linguagem natural. Um dos grupos prefere fazer a sua explicação com recurso à linguagem natural onde é evidenciada a noção de razão uma vez que se obtém um número que resulta da comparação do perímetro de uma circunferência com o seu diâmetro: "Chegaram à conclusão de que para qualquer superfície circular a razão entre o comprimento e o diâmetro dava sempre um número muito parecido que era aproximadamente 3,1" (A4, A6, A8 e A17). Este grupo recorre ao arredondamento de pi com uma casa decimal porque é esse o valor apresentado no filme.

Os alunos reconhecem, no entanto, que essa razão, apesar de constante, pode apresentar-se com valores diferentes devido a aproximações efetuadas no próprio número ou nas medições para o obter. Por exemplo, um dos grupos utiliza, a simbologia correta para indicar o valor de pi: "O valor aproximado corresponde a: ≅ 3,14" (A2, A7, A11 e A16). Tendo em conta que este trabalho foi redigido no computador, podemos pensar que estes alunos tiveram o cuidado de procurar o símbolo específico para aproximadamente igual por compreenderem o seu significado. Outro grupo começou por afirmar que os diferentes valores de pi estavam relacionados com o tamanho da moeda e do círculo de madeira: "Porque o disco era maior que a moeda" (A10, n.c.). No sentido de clarificar a razão por trás desta afirmação, questionei-os: "Será que é por ser maior?" (Prof., n.c.). Obtive uma resposta que dava ênfase à falta de rigor das medições, não se evidenciando, assim, se este grupo tinha a noção da constância da razão entre o perímetro de qualquer circunferência e o seu diâmetro.

No seguimento desta questão surgiu a abordagem da irracionalidade de pi, reconhecida por todos os grupos. Três grupos justificam-na com base nas infinitas casas decimais (um dos grupos chega mesmo a utilizar o símbolo ∞) e um deles refere também o facto de pi ser uma dízima infinita não periódica, mobilizando conhecimentos anteriores: "Tem infinitas casas decimais e ninguém sabe se o número se repete" (A3, A5, A10 e A15). A este propósito, um dos elementos deste grupo acrescenta que "O número pi é irracional porque não sabemos se tem números infinitos mas provavelmente tem porque já se fizeram cinquenta biliões de casas e continua a aumentar e não se descobriu que havia um padrão" (A10, n.c.). Nesta resposta evidencia-se a importância da história para a justificação apresentada, nomeadamente em relação ao conhecimento anterior relativo à tabela cronológica que referia que atualmente conheciam-se 50 biliões de casas decimais, continuando este valor a aumentar. Este aluno consegue fazer uma conjetura com base num dado de natureza histórica permitindo-lhe, assim, defender a irracionalidade de pi.

Nesta tarefa, também foi possível recordar os conceitos de circunferência e de círculo. Nenhum grupo mostrou dificuldades em distingui-los, apresentando as seguintes definições: "A circunferência é a linha que contorna o círculo" (A2, A7, A11 e A16) e "O círculo é a parte interior da circunferência" (A3, A5, A10 e A15). Um dos grupos associou à definição que apresenta em linguagem natural, uma representação pictórica para distinguir círculo de circunferência talvez porque tenha considerado que estes conceitos facilmente podem ser confundidos. Por outro lado, a representação em causa permite evidenciar o perímetro e a área do círculo:



Durante as reuniões que tive com os vários grupos em que cada um deles apresentou o trabalho já desenvolvido, os alunos conseguiram associar o círculo à área e a circunferência ao perímetro devido à discussão que foi promovida e ao feedback interrogativo que eu dei, pois quando um aluno afirmou que "o círculo é o que está por dentro" (A10, n.c.) eu questionei: "E como é que se pode chamar ao que está por dentro em Matemática?" (Professor, n.c.). A resposta apontava, pois, nesse sentido: "Área" (A10, n.c.). Tal situação também se verificou para o perímetro.

Por fim, os alunos resolveram o problema inicialmente posto, utilizando duas estratégias distintas:

i) Três grupos começam por calcular a distância percorrida numa volta, efetuando corretamente o cálculo do perímetro "100 x 3,14 = 314 m" (A2, A7, A11 e A16) e, de seguida, ao perceberem que se dão vinte voltas em torno da praça "Multiplicaram [os atores do filme] 314 (π) por 20 (o número de voltas) que deu 6280 metros" (A3, A5, A10 e A15). Neste grupo, os alunos sentiram a necessidade de explicitar o significado de cada um dos fatores da multiplicação mas fizeram-no de forma incorreta, indicando que o primeiro se tratava de pi, quando era a distância percorrida numa volta;

ii) O outro grupo apresenta a seguinte resolução, provavelmente induzidos pelo que visionaram no filme:

$C = 2\pi r$

$C = 2.r.\ \pi$

$C = 2x50.\ \pi$

$C = 100.\ \pi$

$C = 100x3{,}14$

$C = 314$ m

314x20(voltas)=6280m

No entanto, na apresentação do trabalho, o aluno representante do grupo utilizou uma estratégia semelhante à dos outros grupos, começando por calcular 3,14 x 100 e de seguida multiplica o valor obtido pelas 20 voltas (n.c.).

Fazendo uma síntese da análise da tarefa podemos dizer que a mesma permitiu que os alunos pudessem resolver um problema que envolvia a utilização da fórmula do perímetro da circunferência, levando-os a explicar uma forma de se obter um valor aproximado de π e a sua irracionalidade. Simultaneamente, a distinção entre círculo e circunferência também ficou clara, levando os alunos a associar o círculo à área e a circunferência ao perímetro.

Esta tarefa permitiu, ainda, mobilizar vários aspetos históricos da evolução e descoberta do número pi, levando os alunos a apresentar justificações pertinentes, nomeadamente acerca da irracionalidade deste número.

Tarefa 11

O objetivo traçado para esta tarefa era levar os alunos a aplicar conhecimentos na resolução de problemas envolvendo o perímetro do círculo.

No que respeita à fase da compreensão dos problemas foram identificadas duas dificuldades:

i) Compreensão de que as duas fitas ou as duas voltas dadas pela joaninha implicavam calcular o dobro do valor obtido para o perímetro das respetivas circunferências. No primeiro problema, apenas um aluno não o resolveu de forma completa pois não terá entendido o significado da utilização de duas fitas uma vez que apresenta o cálculo “10 cm x 2 = 20 diâmetro” (A16) o que pode evidenciar que talvez tenha entendido a

necessidade de calcular o dobro escolhendo, no entanto, o diâmetro em vez do perímetro que previamente tinha calculado e de forma correta: “3,14 x 10 = 31,4” (A16). Não apresenta, porém, a resposta final, pelo que não se pode dizer se considera 20 ou 31,4 como o comprimento total da fita a utilizar, embora ambos os valores não sejam a resposta que se pretende. No segundo problema, a dificuldade foi idêntica pois três alunos calculam corretamente o perímetro da circunferência que a joaninha percorre mas não apresentam o cálculo que indique a distância percorrida nas duas voltas;
ii) Compreensão de que ambos os círculos do problema 2 eram concêntricos. Um aluno não conseguia, inicialmente, perceber qual era o valor do diâmetro pela razão já indicada mas quando essa dificuldade foi ultrapassada conseguiu descobri-lo:

> Prof.: Pois. (…) Qual é o diâmetro deste círculo?
> A2: 0,6.
> Prof.: Ai é?
> A2: Oh professor, é por isso que não estou a perceber. Do centro é deste centro aqui? [aponta para o centro do relógio]
> Prof.: Só lá está um centro. Como é que se chama isto? É o diâmetro?
> A2: Não.
> Prof.: É o quê?
> A2: Ah, o raio!
> Prof.: Mas nós na fórmula queremos o raio ou o diâmetro?
> A2: O diâmetro.
> Prof.: Então o que é que fazemos para descobrir o diâmetro?
> A2: Então daqui aqui é 0,6… vezes 2!

Dos conhecimentos anteriores que eram necessários utilizar, um deles destacou-se como obstáculo para que os alunos conseguissem elaborar um plano de resolução do problema 2: a leitura das horas no relógio circular. O aluno A13, por exemplo, considera inicialmente que num dia a joaninha dá “45” voltas (n.c.) ao relógio e de seguida emenda para “24” voltas evidenciando confundir as 24 horas de um dia com o número de voltas que deverá dar ao relógio. Durante a resolução desta tarefa, perguntei em voz alta se toda a turma se sentia confortável com a leitura das horas neste mostrador e senti que uma grande parte da mesma respondia negativamente o que me levou a questionar a turma sobre quantas voltas terá de dar o ponteiro das horas para perfazer um dia, ao que alguns alunos responderam novamente vinte e quatro mas o aluno A8 disse serem “Duas voltas” (n.c.). Preferi não insistir mais neste aspeto pois a minha intervenção já estaria, necessariamente, a contribuir para a resolução do problema e não quis, pois, adiantar mais pormenores. O aluno A2, por exemplo, começou por calcular “12 x 2 = 24” mas quando o questionei acerca da utilidade deste cálculo referiu que, efetivamente, não era necessário. Ainda assim, existiam vários conhecimentos anteriores que os alunos utilizavam corretamente na resolução dos problemas:

i) Utilização correta da fórmula para o cálculo do perímetro da circunferência. Todos os alunos demonstravam conhecer a mesma e alguns deles indicavam-na explicitamente: "$P_o = \pi \times d$" (A15). Outros alunos evidenciavam conhecê-la pelos cálculos que apresentavam:"3,14 x 10 = 31,4" (A6);

ii) Valor de pi. Apenas um aluno utilizou o valor 3 nos seus cálculos mas apenas no primeiro problema, pois seguidamente utiliza sempre o valor 3,14 tal como a restante turma. Tal opção pode eventualmente significar que este aluno terá refletido acerca da sua escolha para o valor de pi o que o terá levado a utilizar, nos problemas seguintes, o valor 3,14;

iii) O diâmetro é o dobro do raio. Os alunos chegavam com facilidade ao valor do diâmetro multiplicando o raio por 2: "D = 0,6 x 2 = 1,2 cm" (A9). Um aluno utilizou a adição fazendo o algoritmo para "0,6 + 0,6 = 1,2 diâmetro" (A8);

iv) Utilização correta do cálculo mental. Alguns alunos recorreram ao cálculo mental para efetuarem cálculos intermédios. A utilização do mesmo foi mais evidente no primeiro problema uma vez que sendo o diâmetro 10 cm o cálculo do perímetro não levantaria dificuldades: "3,14 x 10 = 31,4" (A16). O mesmo aluno, na discussão final, verbalizou para todos como tinha feito: "Uma casa para a direita" (n.c.). No segundo problema, há um aluno que mentalmente reduz o valor do raio para milímetros, percebendo que tal redução lhe facilitaria a obtenção do valor do diâmetro em centímetros porque obtém uma multiplicação que bem conhece: "6 x 2 = 12 mm = 1,2 cm" (A10). Este conhecimento anterior surge, pois, associado à utilização das unidades de medida e à correta redução de centímetros para milímetros (o valor 6 surge em milímetros) e depois em sentido inverso (12 mm = 1,2 cm);

v) Divisão como operação inversa da multiplicação. Treze alunos conseguem, no problema 3, chegar ao valor correto do diâmetro, 6 metros, utilizando este conhecimento de diversos modos:

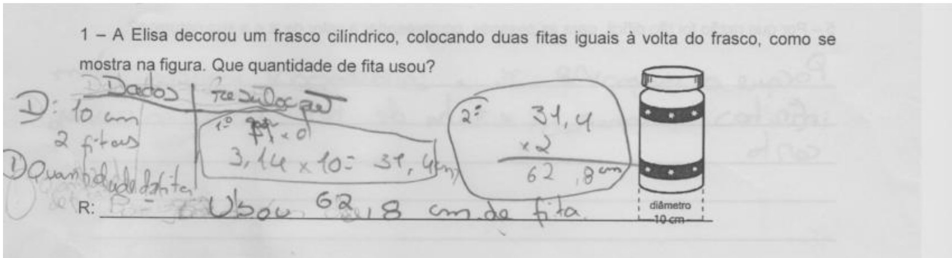
a) Aplicação direta do cálculo - "18,84 : 3,14" (A11);

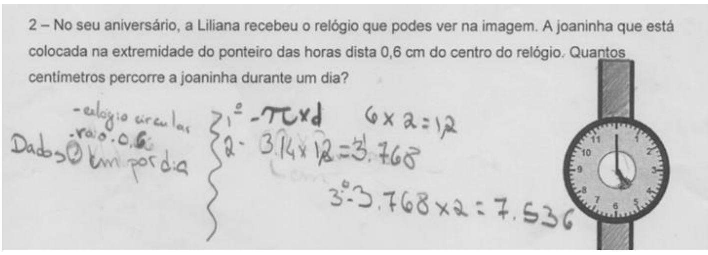
b) Explicitação da fórmula- "$F = \frac{P}{\pi}$" (A1); "$D_o = P : \pi$" (A15). No primeiro exemplo, o aluno utiliza a fração com o significado de quociente para obter o valor do diâmetro (F provavelmente significa fração) e no segundo exemplo o aluno utiliza diretamente a divisão, subentendendo-se que divide o perímetro pelo valor de pi;

c) Verbalização desse conhecimento - “O inverso da multiplicação é a divisão” (A7, n.c.). Nesta situação, o aluno aplica diretamente um conhecimento anterior;

d) Razão entre perímetro e diâmetro e vice-versa -“Porque 18 é o perímetro e como nós normalmente usamos o 3,14 como número de pi, aproximadamente, o diâmetro é a dividir por 3, que é o triplo. Dividi. Depois fiz as contas” (n.c.). Nesta última explicação, apesar de ser um pouco desarticulada e de utilizar a palavra diâmetro em vez de perímetro, o aluno evidencia compreender que se o perímetro é aproximadamente o triplo (3,14) do diâmetro, então o diâmetro terá de ser a terça parte do perímetro e por essa razão divide o valor do perímetro por pi.

A partir do momento que os alunos compreendem o problema e têm todos os dados (incluindo o valor do diâmetro) utilizam maioritariamente a estratégia de calcular em primeiro lugar o valor do perímetro da circunferência recorrendo à fórmula já conhecida e de seguida multiplicam esse valor por 2 em ambos os problemas:



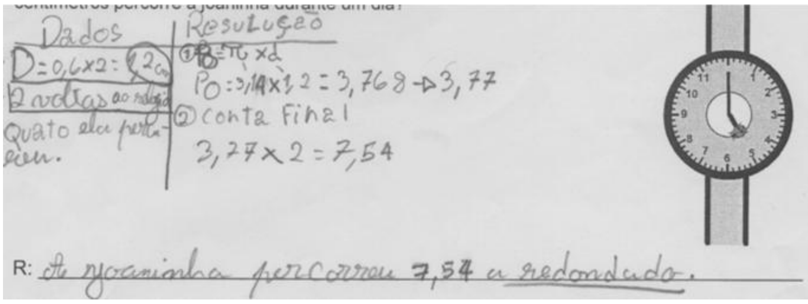


Nestas resoluções conseguimos perceber que os alunos têm noção da sequência destes dois procedimentos e cada um deles tem a preocupação de discriminar a ordem pela qual executam estes dois cálculos: primeiro a descoberta do valor do perímetro e de seguida o cálculo do dobro desse valor evidenciando-se, pois, a compreensão de todos os dados destes problemas. Na segunda resolução, o aluno também parece recorrer a uma estratégia semelhante à anteriormente descrita ao fazer 6 x 2 = 1,2 (utiliza o cálculo mental e faz, em simultâneo, a redução de milímetros para centímetros).

No processo de resolução dos problemas foi possível identificar alguns erros cometidos pelos alunos que, nalguns casos, como se verá de seguida, não prejudicaram a resposta final.

No que respeita ao primeiro problema, três alunos resolvem-no corretamente mas registam o seu raciocínio de uma forma errada: “3,14 x 10 = 31,4 x 2 = 62,8” (A3) o que pode evidenciar que os mesmos ainda não compreendem totalmente o significado do sinal de igual, bem como da sua correta utilização. Na discussão desta questão, escolhi intencionalmente o aluno A10 para ir ao quadro partilhar a sua resolução com a turma, evidenciando esse lapso. Senti a necessidade de escrever no quadro a expressão “15 = 3 x 5 = 15 x 2” questionando a turma se o valor 15 era igual a 15 x 2, pelo que a grande parte da turma respondeu que não seria (n.c.). Pedi aos alunos que numa situação futura fizessem como nas expressões numéricas, escrevendo uma linha por baixo da anterior e não da forma já citada.

Um outro aluno sentiu a necessidade de arredondar um valor intermédio do problema 2 pois ao calcular o perímetro da circunferência obtém o valor 3,768 que corretamente arredonda para 3,77:



De qualquer forma, na sua resposta final apercebe-se que é um valor arredondado e talvez por essa razão tenha escrito essa indicação, o que pode indiciar que este aluno refletiu acerca da sua própria resolução.

Um outro erro que também pude detetar diz respeito ao problema 3. Dois alunos começaram por dividir o perímetro por dois mas reconheceram que o diâmetro era “A terça parte” (A3, n.c.) do perímetro e que, deste modo, teria que se dividir pelo valor de pi e não por dois, resolução esta que foi a evidenciada na sua folha de respostas. Este erro pode evidenciar que alguns alunos quando sabem o perímetro e pretendem calcular o seu diâmetro imaginam o círculo a ser partido em dois obtendo visualmente o diâmetro descorando, muitas vezes, a relação que existe entre o perímetro e o diâmetro, mesmo que dela tenham consciência. Estes alunos puderam experimentar a reflexão sobre as estratégias que tinham delineado a partir do momento que o professor os questionou acerca da relação entre estas duas grandezas.

No que respeita à pergunta 4, a maior parte dos alunos utiliza o seu conhecimento anterior relativo à tarefa 7: "Para calcularmos o valor de π é medir com uma fita métrica o objeto circular, como fizemos na 1ª aula da investigação, em que medimos o valor do círculo e de alguns objetos" (A1). Faltou, pois, referir quais as dimensões que teriam que ser medidas e como estabelecer uma razão entre elas, situação bem descrita por outros alunos: "Fizemos medições à circunferência como $\frac{P}{d}$ e vimos que dava sempre perto de 3 a qual descobrimos que se chamava pi (π)" (A9). Este aluno utiliza a fração com o significado de razão, a qual tem o valor pi. No total, oito alunos respondem de forma correta e completa a esta questão; um aluno responde de forma incompleta; quatro alunos não respondem e quatro deles responde de forma incorreta.

Na última questão, as respostas podem ser agrupadas da seguinte forma:

i) Quatro alunos referem-se à irracionalidade de pi: "Porque propriamente π é um número irracional pois é infinito e ainda não se descobriu um padrão" (A9);

ii) Seis alunos atendem apenas ao facto de apresentar uma dízima infinita: "Porque não era um número exato e tem casas infinitas" (A13, por exemplo);

iii) O aluno A15 dá uma explicação em que se suporta do contexto histórico:

> Porque antigamente as pessoas não sabiam o que era o π nem como o descobrir. Mais tarde houve o problema das medidas, como não havia medidas certas os matemáticos tinham dificuldade em descobrir o valor de π. Só mais tarde graças aos computadores conseguimos descobrir o valor (uma parte) de π.

Nesta explicação sente-se a contextualização e a problematização histórica, pois refere-se que o conhecimento de pi como número é algo recente e que a dificuldade das medidas – eventualmente do perímetro e do diâmetro – também foi um obstáculo para a compreensão da natureza deste número, sendo que o computador é distinguido como um instrumento importante para a compreensão de pi;

iv) Dois alunos referem que é um número arredondado: "Foi difícil porque dava valores diferentes e com muitas casas decimais; mas o valor que hoje em dia se diz é arredondado" (A6);

A partir da análise dos resultados desta tarefa podemos dizer que evidencia:

i) A utilização correta de conhecimentos anteriores: a) Fórmula $P_o = \pi \times d$; b) o diâmetro é o dobro do raio; c) pi é aproximadamente 3,14; d) divisão como operação inversa da multiplicação; e) utilização do símbolo π; f) razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro; g) utilização de conhecimentos de História da Matemática para explicar a natureza do número pi; h) utilização do cálculo mental em cálculos intermédios; i) arredondamentos; j) redução de centímetros para milímetros e vice-versa;

ii) A utilização incorreta do conhecimento anterior relativo à leitura das horas num relógio circular;

iii) A utilização de duas estratégias para obtenção do valor do diâmetro (2 x raio ou raio + raio); a organização da resolução de um problema em duas partes distintas: 1º o cálculo do perímetro de uma circunferência; 2º o cálculo do dobro desse valor para obter o comprimento de duas circunferências; a utilização da divisão como operação inversa da multiplicação para descobrir o valor do diâmetro sabendo-se o perímetro de uma circunferência e o valor de pi;

iv) A dificuldade, por parte de alguns alunos, em compreender o significado de se utilizarem duas fitas circulares ou de se dar duas voltas completas a um relógio;

v) A identificação de alguns erros na resolução dos problemas: utilização de arredondamentos nos cálculos intermédios; utilização desadequada da noção de igualdade; cálculo do diâmetro dividindo o perímetro por 2.

Com a resolução dos problemas constantes nesta tarefa, os alunos mobilizaram diversos conhecimentos anteriores e, mais uma vez, os conhecimentos de História da Matemática revelaram-se determinantes para a compreensão da natureza de pi.

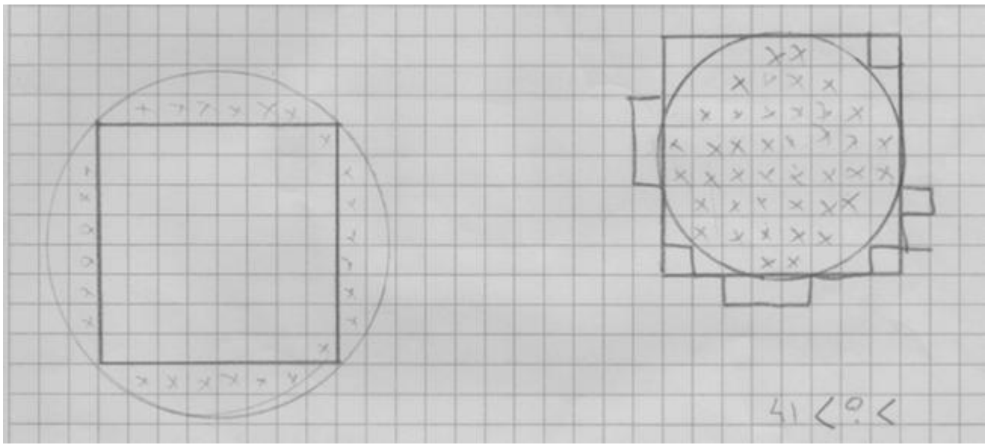
Tarefa 12

Esta tarefa tinha como objetivos explorar o procedimento do cálculo da área do círculo através de situações experimentais e calcular valores aproximados da área de um círculo a partir do seu enquadramento.

A introdução da tarefa foi feita oralmente e, quando questionados acerca do significado de quadratura, um dos alunos associou-a intuitivamente à palavra "Enquadrar [a sua área]" (A4, n.c.).

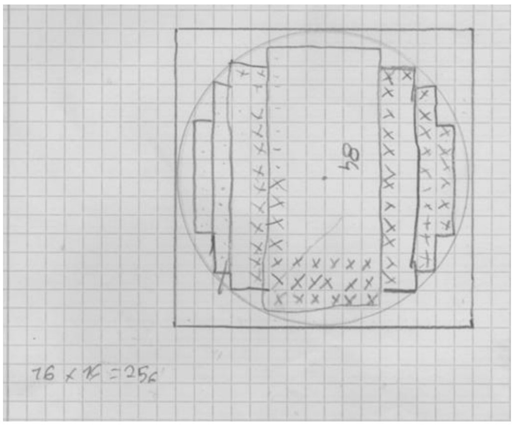
Possivelmente induzidos por esta resposta, os alunos sugerem estratégias de enquadramento para responder ao problema histórico que é proposto: "Tentar fazer um quadrado dentro do círculo… Acho que era uma possível hipótese" (A1, n.c.). Na abordagem deste aluno, apenas se apela a uma construção interior ao círculo mas verifiquei que os alunos conseguiram apresentar outras propostas, estabelecendo enquadramentos que lhes possibilitassem apresentar uma estimativa fundamentada para a área pretendida.

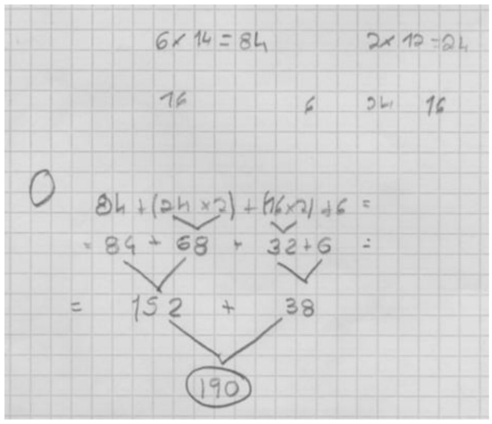
Assim, todos os alunos apresentaram um enquadramento desenhando círculos e quadrados inscritos e circunscritos, salientando-se, no entanto, algumas diferenças nas estratégias de resolução utilizadas, como se irá ver de seguida, e na forma como esse enquadramento é salientado. Vejamos o primeiro exemplo:



Um par de alunos tentou descobrir a área do círculo, representado por "?", enquadrando-o entre um valor por excesso e um valor por defeito, utilizando a contagem de quadrículas. Apesar de se terem esquecido de registar no espaço apropriado a área por excesso, fazem-no no enunciado registando o seguinte: "A área do quadrado é 64 quadrados. Depois, fizemos um círculo à volta do quadrado, e outro dentro, que deu: dentro, 41. O de fora: 88" (A11 e A16). O valor 41 surge porque os alunos contabilizaram unitariamente as quadrículas inteiras interiores ao círculo, apesar de se esquecerem de três delas, como se pode ver na figura - estes alunos não tiveram em consideração as não inteiras. O valor 88 parece ter surgido da soma da área do quadrado (64) com as restantes unidades de área sinalizadas contiguamente aos lados do quadrado – mais uma vez, apenas são tidas em conta as quadrículas inteiras.

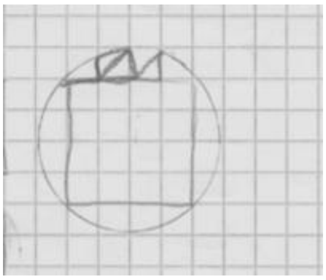
No segundo caso, outro par de alunos tenta calcular a área do círculo, calculando a sua área por excesso e por defeito sem, no entanto, estabelecerem um intervalo para a mesma:

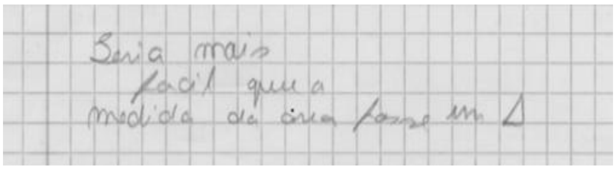




Estes alunos começam por calcular a área do quadrado que representa a área por excesso do círculo obtendo o valor 256. De seguida, inscrevem nele um círculo e, a partir do centro, recorrem a retângulos, sucessivamente mais pequenos, para preencher a sua área. Durante os cálculos das áreas, que apresentam, explicam a utilização das multiplicações em detrimento da contagem unitária por “Ser mais fácil para contar. Por exemplo: seis vezes isto que é para ser mais fácil para não perdermos tempo” (A4. n.c.) mas cometem algumas incorreções. No cálculo da área dos dois retângulos de comprimento 12 e largura 2 (24 x 2) obtêm o valor 68 em vez de 48, possivelmente por desatenção. Na expressão 16 x 2 o dezasseis é o valor da área dos dois últimos retângulos, ou seja, 16 x 2 = 32 mas depois acrescentam 6 unidades possivelmente porque não repararam que esse valor já estava incluído no 16. Embora não o tenham feito de modo explícito, estes alunos também tentaram enquadrar o valor da área do círculo entre 190 (valor obtido pela resolução da expressão numérica, embora incorreto pois deveria ser 164) e 256 (valor da área do quadrado). Na resolução da expressão numérica, a utilização correta das prioridades é evidente excedendo-se, até, na utilização dos parêntesis para destacar a prioridade da multiplicação em relação à adição. Globalmente, os alunos evidenciam a utilização da noção de área (quadrado e retângulo), do enquadramento, do cálculo mental e da utilização de uma expressão numérica cuja resolução se traduz na obtenção do valor da área por defeito.

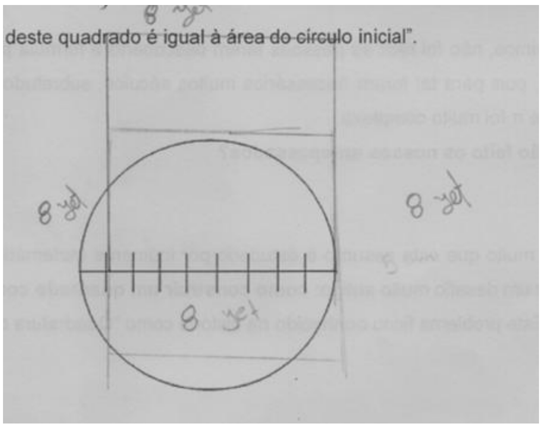
Outro par de alunos tentou preencher a área que existe entre o exterior do quadrado e o interior da circunferência, com recurso a triângulos, para obterem uma estimativa mais exata para o valor da área pretendida. Como afirmam, “Seria mais fácil que a medida da área fosse em ▲” (A10 e A15):



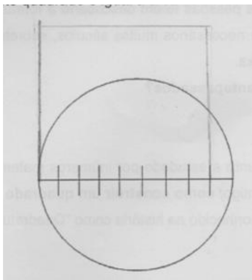


No entanto, não apresentam valores para nenhuma área, nem mesmo para a do quadrado. Estes alunos ainda registaram a dificuldade que sentiram para resolver este problema: "É difícil fazer um círculo com a mesma área por causa dos cantos" (A10 e A15).

Quanto à questão 2, os alunos revelaram algumas dificuldades na compreensão do procedimento proposto no Papiro de Rhind. Inicialmente, muitos alunos não compreenderam o significado de retirar $\frac{1}{9}$ ao diâmetro, apesar da figura representada no enunciado já apresentar o diâmetro do círculo dividido em nove partes iguais. Os alunos não perceberam que a parte que sobrava seria um dos lados do quadrado a construir, pois construíam um quadrado à volta dessa medida e não a partir da mesma, como se poderá ver no exemplo seguinte que é do único aluno que, após esclarecermos estas questões, em grande grupo, não construiu corretamente o que se pretendia, pois todos os restantes o conseguiram:

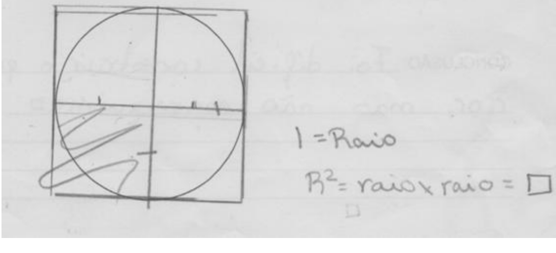


Como se pode constatar, este aluno faz um quadrado sobreposto ao círculo e não a partir dos oito nonos do diâmetro que deveria ter considerado como um dos lados do quadrado. Os restantes alunos, não tiveram problemas para aplicar a regra egípcia, como se pode ver no exemplo que se segue:



O facto de no enunciado do problema se utilizar uma medida (jet), desconhecida para os alunos, não causou dificuldades aos mesmos, uma vez que se foram familiarizando com a utilização de medidas antigas nos contextos históricos propostos, como afirmam: "É tipo o côvado" (A4). O cálculo da área do quadrado foi facilmente obtido através da utilização do conhecimento anterior relativo à área do quadrado: "8 x 8 = 64" (A2). Dois alunos preferiram apresentar o resultado na forma de potência, recorrendo ao seu conhecimento anterior relativo às mesmas: "A área deste quadrado é de 8^2" (A5 e A9).

Na questão seguinte, também não se identificaram dificuldades na divisão do círculo em quatro partes iguais, tendo os alunos revelado compreender que essa divisão teria que passar pelo centro. Já em relação ao polígono cuja área é dada por r^2, apenas os alunos A4 e A6 o conseguiram identificar como sendo um quadrado com lado "Dois e meio" (A6) pois tinham utilizado a régua para medir o valor do raio. Os restantes alunos limitam-se a explicar o significado da notação, referindo o seguinte: "Deve ser o raio ao quadrado" (A17) ou "É raio vezes raio" (A9). Após discussão coletiva, todos os alunos registaram que r^2 se referia à área de um quadrado de lado r, realçando-o na figura:



Além disso, a partir da divisão do círculo, feita na questão anterior, os alunos perceberam que poderiam desenhar quadrados idênticos, embora se tenham questionado sobre a possibilidade destes quadrados excederem os limites da circunferência. É o caso de um aluno que pergunta "Pode-se passar por cima [para fora do círculo]?" (A10, n.c.), depois de, inicialmente, ter desenhado um quadrado ao centro (mantendo a mesma medida do raio). Durante a análise desta tarefa pude aperceber-me que a questão 3.3.

não estava bem estruturada, como atesta a seguinte resposta de uma aluno durante a exploração da aula dizendo que dentro daquele círculo cabiam "Infinitos quadrados" (A12, n.c.). Este aluno tinha respondido corretamente à questão mas o que realmente pretendia saber era *Quantos polígonos desses são necessários para cobrir a área do círculo* uma vez que o objetivo seria levar os alunos a compreender o significado de $\pi \times r^2$ no sentido de perceberem que π quadrados iriam cobrir a área daquele círculo.

Estas incertezas dificultaram a atribuição de significado à expressão da área do círculo, dado que era a primeira vez que contactavam com uma multiplicação em que um dos fatores era representado por um número irracional e substituído pelo respetivo símbolo. A discussão coletiva que antecipei para este momento, atendendo às dificuldades evidenciadas na interpretação da questão (por ter uma formulação desadequada aos objetivos com que a propus), permitiu que os alunos compreendessem o significado da expressão quando explicam o seguinte: "$\pi \times r^2$ quer dizer que dentro do círculo, cabem lá tantos quadrados quanto o número π" (A11); "Cabem lá dentro 3,14 quadrados por estimativa" (A17); "Significa que cabem naquele círculo pi (π) quadrados (aproximadamente 3 □)" (A7). Os dois últimos exemplos revelam, também, que os alunos compreendem que o valor 3,14 é apenas uma estimativa. Só dois alunos parecem não perceber o que se pede e limitam-se a descrever a expressão: "Significa: 3,14 x (raio x raio). 3,14 – valor aproximado de π" (A1). Esta resposta evidencia, contudo, que este aluno compreende a prioridade do cálculo da potência, tendo em conta que utiliza os parêntesis para enfatizar esse produto.

Por fim, apenas dois alunos não conseguiram resolver corretamente esta questão, talvez por falta de tempo pois um deles ainda registou "π x 20,25" (A12), não apresentando nenhum registo na conclusão. Os restantes alunos começaram por calcular o valor do raio, a partir do diâmetro que era dado, calculando a sua metade: "9:2 = 4,5jet" (A13). De seguida, aplicaram corretamente a expressão para obter o valor da área do círculo "3,14 x 20,25 = 63,585" (A9). Um par de alunos ainda registou "Arredondado a 64" o que influenciou a sua resposta à questão 3.5.1: "O nosso valor não foi tão diferente do dos egípcios" (A11). Deste modo, todos os alunos consideraram que o resultado obtido para a área do círculo através do método dos egípcios era muito próximo do valor obtido utilizando a expressão atual, chegando mesmo a argumentar com base na evolução histórica dos números: "Penso que [a aproximação] é boa, sim, porque antigamente não sabiam o número π e não sabiam calcular algumas coisas, daí chegando a 64 jet [que] já era um valor excelente para aquela altura" (A10). Esta ênfase na História da Matemática está presente, igualmente, nas várias conclusões dos alunos, onde evidenciam compreender o seu papel na dinâmica evolutiva desta ciência através dos seguintes comentários:

- "A existência do número π é uma grande revolução matemática" (A1 e A13);
- "Podemos concluir que os egípcios descobriram um valor aproximado, para calcular a A_o" (A2 e A7);
- "Já sabemos calcular mais ou menos a área dos círculos. Por jet. Graças aos egípcios" (A8 e A17). Esta resposta parece evidenciar que os alunos compreendem que o valor que obtêm é apenas uma aproximação.

Em relação ao problema da quadratura do círculo não é claro se os alunos percebem que tal construção não é possível, uma vez que o comentário "Nessa altura ainda tinham conseguido construir um círculo com a área do quadrado" (A4 e A6) pode ser interpretado de duas formas: Ou consideram incorretamente que tal objetivo foi alcançado ou querem referir-se ao facto de naquela altura pensarem que tinham conseguido resolver o problema.

Fazendo uma síntese da análise dos resultados obtidos podemos concluir que os alunos:

i) Mobilizaram conhecimentos anteriores relativos: à utilização de enquadramentos na tentativa de resolver o problema da quadratura do círculo; ao cálculo da área do quadrado e do retângulo; à utilização de expressões numéricas; ao recurso de potências;

ii) Utilizaram estratégias baseadas no enquadramento do círculo para calcular a sua área;

iii) Revelaram dificuldades: na interpretação e utilização da expressão antiga contida no papiro de Rhind para o cálculo da área do círculo e na compreensão do significado de r^2;

iv) Realizaram aprendizagens: compreensão e utilização da fórmula atual para o cálculo da área do círculo.

A questão 3.3, por estar mal formulada, levou, inicialmente, os alunos a darem respostas distintas daquelas que se pretendia obter. No entanto, tendo em conta que discuti tal situação durante a exploração da tarefa, os alunos revelaram-se capazes de responder corretamente e evidenciaram, assim, atribuir significado à fórmula atualmente utilizada para o cálculo da área do círculo.

A História da Matemática permitiu que os alunos compreendessem melhor a importância do número pi, o qual foi considerado como um número capaz de provocar uma "grande revolução matemática" (A1 e A13).

Capítulo 5

Reflexões finais

Neste capítulo faz-se uma breve síntese do trabalho desenvolvido e os seus principais resultados de acordo com as questões do estudo. No final apresenta-se uma reflexão que contempla o significado pessoal deste trabalho e algumas recomendações e eventuais implicações.

5.1. Síntese do estudo

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) reconhece que os aspetos históricos da Matemática devem ser explorados, tendo em conta que esta ciência se desenvolveu por ser uma atividade prática que pretendia resolver problemas em várias civilizações, o que fez com que esta área do saber tenha vindo a sofrer evolução nos métodos que utiliza, nos seus processos e técnicas e até na sua relação com as outras áreas. O recurso à História da Matemática, pondo em evidência o desenvolvimento de determinados conceitos matemáticos, pode levar os alunos a apreciar esta ciência, pelo que devem ser proporcionadas oportunidades para conhecer aspetos da história e a desenvolver um sentimento de apreço pela mesma, quer seja do ponto de vista cultural, quer seja do ponto de vista do desenvolvimento da sociedade atual (ME, 2007). Em termos metodológicos, o Programa de Matemática do Ensino Básico apenas refere a elaboração de trabalhos de grupo sobre "um estudo sobre História da Matemática" (ME, 2007, p. 10). No entanto, existem diversos investigadores (Gil, 2012; Grugnetti & Rogers 2000; Jorge, 2008; Kool, 1993; Mota, Ralha & Estrada, 2011; Neves, 2007; Silva, 2012; Stander, 1989; Veloso, 1993; Winicki, 1993, entre outros) que apontam as vantagens da utilização da História da Matemática no ensino e aprendizagem. No nosso país tal indicação já tem mais de dois séculos (Neves, 2007; Mota, Ralha & Estrada, 2011).

Neste trabalho apresenta-se uma proposta pedagógica que abordou os racionais não negativos (frações), o perímetro do círculo (e respetiva compreensão do significado do π) e a área do círculo, tendo-se recorrido à elaboração de sequências de ensino que contemplam tarefas maioritariamente exploratórias e ainda exercícios e problemas. A planificação e as respetivas tarefas foram concebidas tendo em conta as orientações curriculares nacionais (ME, 2007), as orientações curriculares internacionais (NCTM, 2007) e a fundamentação teórica que sustenta o recurso à História da Matemática. A proposta pedagógica foi aplicada aos alunos de uma escola que pertence ao concelho de Odivelas, zona que se situa nos arredores de Lisboa, nomeadamente na parte norte. Foi desenvolvida no ano letivo de 2012/2013 numa turma do 5º ano da qual era o professor e a principal fonte de recolha de dados foram as produções escritas pelos alunos, a observação participante e as respetivas notas de campo, tendo-se utilizado, também, gravações áudio e vídeo das aulas.

A fundamentação teórica do presente trabalho aborda, pois, duas grandes dimensões: o Enquadramento curricular, por um lado, e a História da Matemática no ensino e aprendizagem da Matemática, por outro.

Com o desenvolvimento deste trabalho, quis compreender em que medida o desenvolvimento e a implementação de tarefas com recurso à História da Matemática conduzem a uma aprendizagem significativa nos tópicos já referidos em alunos do 5.º ano e, mais especificamente, procurei responder às seguintes questões: i) Quais as estratégias que os alunos utilizam na realização das tarefas baseadas na História da Matemática?; ii) Quais as dificuldades demonstradas pelos alunos na realização das tarefas baseadas na História da Matemática?; iii) Quais os conhecimentos anteriores que os alunos mobilizam na realização das tarefas baseadas na História da Matemática?; iv) Quais as aprendizagens realizadas pelos alunos ao longo da proposta pedagógica?

5.2. Conclusões

Tendo em conta as questões do estudo citadas, passo a apresentar as respetivas conclusões para cada uma delas.

i) Quais as estratégias que os alunos utilizam na realização das tarefas baseadas na História da Matemática?

De acordo Jorge (2008) é possível delinear e traçar estratégias de ensino recorrendo-se à História da Matemática no sentido de se favorecer o estabelecimento de conexões entre diversos tópicos matemáticos. Assim, pode constatar-se que durante a exploração das tarefas desta proposta pedagógica os alunos utilizaram distintas estratégias para a resolução dos problemas e para as explorações de uma determinada situação, sendo que a conexão com diversos tópicos da Matemática é um aspeto que se evidencia.

No que respeita ao tópico dos racionais não negativos, pude verificar que a opção por introduzir as frações através de tarefas baseadas nas medições egípcias revelou-se uma seleção adequada uma vez que a medida parece ter-se assumido como uma excelente oportunidade para trabalhar e desenvolver este conceito (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999; Jorge, 2008; NCTM, 2007) pelo se conclui que a mesma revelou ser "um tema bastante rico do ponto de vista das conexões entre temas matemáticos e com situações não matemáticas" (ME, 2007, p. 7). Os alunos utilizaram estratégias de dobragem, representações pictóricas, assinalaram numerais mistos na reta numérica (corda egípcia), utilizaram o pensamento proporcional, atribuíram o significado de parte-todo, medida, operador e quociente às frações e conseguiram alternar entre a representação fracionária, decimal e sob a forma de percentagem, o que está de acordo com as ideias de Charalambous et al. (2007) que afirmam que Kieren, em 1976, destacou a grande importância dos alunos conhecerem os diferentes significados de fração e da sua confluência. Por outro lado, as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas históricos não puseram em evidência as dificuldades que Empson, Levi e Carpenter (2011) enfatizam, uma vez que os alunos utilizaram estratégias adequadas aos vários significados de fração e não aquelas que normalmente utilizam para situações problemáticas que envolvem os números inteiros.

Quanto ao estudo do perímetro da circunferência, nomeadamente ao estudo do número pi, é necessário ter em conta que ao longo dos tempos os matemáticos, para além do seu cálculo propriamente dito, tiveram a preocupação central de compreender a natureza deste número (Santos, 2003), uma vez que a tentativa do seu cálculo sempre denotou uma grande dificuldade associada à compreensão da sua natureza e tal facto “não é enfatizado, nem pelos professores nem pelos autores dos livros didáticos” (Bortoletto, 2008, p. 119). Esta situação não se verificou nesta proposta pedagógica pois os alunos conseguiram recorrer a várias estratégias para compreender que este número era o resultado da razão entre o perímetro e o diâmetro de qualquer circunferência, utilizando, assim, estratégias de pensamento proporcional, o levantamento de conjeturas (realçando-se, também, conjeturas com recurso ao conhecimento histórico deste número), enquadramentos e até a noção de infinito, aspeto este que foi extremamente importante para a compreensão do método utlizado por Arquimedes e que, consequentemente, proporcionou uma compreensão mais sustentada da natureza de pi. A exploração de tarefas com recurso a aspetos históricos da Matemática vem contrapor a falta de compreensão e de caraterização dos irracionais destacada tanto por Robinet (1993) como por Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), citados por Silva e Penteado (2009), pois os alunos conseguiram compreender que para além de pi ter infinitas casas decimais, as mesmas não apresentam um padrão que permita prever a sucessão de algarismos que se vai delineando ao aproximarem-se do infinito. Simultaneamente, o desenvolvimento deste trabalho permitiu que os alunos resolvessem de uma forma confiante e com compreensão os problemas que lhes foram apresentados relativamente ao cálculo do perímetro da circunferência com recurso à fórmula descoberta revelando, assim, uma maior compreensão do significado de perímetro, dificuldade que o NCTM (2007) enfatiza.

Relativamente ao conceito de área, o NCTM (2007) afirma que muitos alunos revelam ter dificuldades na compreensão deste conceito pois muitos deles parecem não ter a noção de conservação de área quando se constroem figuras equivalentes (Walle, 2004). Por outro lado, este autor defende que o cálculo da área deve ser precedido por uma estimativa, processo que é mais difícil relativamente ao cálculo propriamente dito. A tarefa proposta para a compreensão da fórmula da área do círculo evidenciou ser relevante para alcançar os objetivos a que se propunha, pois ao levar os alunos inicialmente a tentar resolver o problema histórico da quadratura do círculo permitiu-lhes fazer estimativas fundamentadas para os resultados que iam apresentando. Para tal, os alunos recorreram a estratégias diversificadas que foram desde os arredondamentos à utilização de expressões numéricas, passando pela inscrição de quadrados e retângulos no círculo, cujo cálculo das respetivas áreas evidenciou a compreensão do problema em causa e, consequentemente, a compreensão do conceito de área. Por outro lado, quando as quadrículas se revelaram insuficientes para uma boa estimativa da área do círculo, alguns alunos utilizaram triângulos por terem compreendido que os mesmos poderiam cobrir algumas partes que estavam contíguas à circunferência e nas quais as quadrículas não cabiam, melhorando, assim, a sua estimativa e a sua compreensão da noção de área. Estes alunos recorreram aos triângulos por compreenderem que os mesmos tinham metade da área das quadrículas.

ii) Quais as dificuldades demonstradas pelos alunos na realização das tarefas baseadas na História da Matemática?

No que respeita às frações, uma das dificuldades que foi evidenciada no decurso da exploração das tarefas diz respeito à conceção da unidade, tal como Monteiro e Pinto (2005) apontam. Na marcação dos numerais mistos na reta numérica (corda egípcia) alguns alunos marcavam apenas parte inteira descorando a não inteira ou, ao fazerem essa marcação, confundiam a unidade com o comprimento total da corda. Por outro lado, na marcação da fração $3\ \frac{3}{2}$ alguns alunos confundiam o numerador com o denominador marcando o numeral $3\ \frac{2}{3}$ possivelmente por considerarem que esta representação só admitia frações menores que a unidade ou tendo em conta os restantes exemplos em que tal situação se verificava. Alguns alunos evidenciaram um conceito de medição fortemente associado ao sistema métrico o que lhes dificultava a utilização das frações porque evidenciavam a necessidade de medir com recurso à régua em detrimento da utilização das frações. Na resolução dos problemas históricos, alguns alunos tiveram dificuldade em compreender o cálculo das várias partes em relação ao todo como um processo independente, não tomando em conta cada fração em relação ao total de objetos.

No que respeita ao perímetro da circunferência, os alunos tiveram, inicialmente, dificuldade em compreender a natureza do valor obtido a partir de $\frac{P}{d}$ pois consideravam que a parte não inteira era o produto dos erros das medições, dificuldade essa que foi sendo atenuada com a concretização das restantes tarefas alusivas ao tópico em causa. Outra dificuldade que foi evidenciada diz respeito à forma como os documentos antigos estavam redigidos, pois tal obstáculo dificultou a análise e recolha de dados para entender o trecho bíblico ou a regra contida no Papiro de Rhind para resolver o problema da quadratura do círculo à maneira egípcia. Na obtenção da fórmula do perímetro da circunferência, os alunos também revelaram dificuldades na passagem da linguagem natural para a linguagem simbólica. Na utilização do applet, que simulava o método de Arquimedes, alguns alunos tiveram dificuldade na sua utilização pois ao digitarem um número muito elevado de lados dos polígonos inscritos ou circunscritos ao círculo não verificavam nenhuma alteração do enquadramento de pi por não terem a perceção de que tal modificação apenas ocorria em casas decimais mais distantes da unidade, uma vez que aquela aplicação apenas utilizava oito casas decimais, tal como Arquimedes o fez. Na resolução do problema alusivo à distância percorrida por uma joaninha ao dar duas voltas a um relógio circular, os alunos evidenciaram ter dificuldade na leitura das horas em mostradores circulares o que, necessariamente, dificultou a análise e interpretação dos dados alusivos ao problema em causa, bem como na interpretação de círculos concêntricos, o que dificultava a obtenção do valor do raio e, consequentemente, do diâmetro. Por outro lado, alguns alunos não conseguiram interpretar as duas voltas dadas pela joaninha como o dobro do perímetro da circunferência, situação que também se estendeu ao problema das duas fitas que enfeitavam um frasco circular.

Em relação à área do círculo, muitos alunos também tiveram dificuldade em entender o significado de r^2 na fórmula $\pi \times r^2$, nomeadamente porque uma das questões estava mal formulada mas a discussão desenvolvida em torno desta situação promoveu a sua compreensão.

iii) Quais os conhecimentos anteriores que os alunos mobilizam na realização das tarefas baseadas na História da Matemática?

A mobilização de conhecimentos anteriores pode ser constatada a dois grandes níveis: mobilização ao nível extrínseco e intrínseco dos conteúdos desta sequência. Em relação ao primeiro nível, os alunos evidenciaram recorrer a vários conhecimentos que já possuíam para explorar cada uma das várias tarefas: terminologia própria para frações simples, a utilização dos decimais, a utilização de algoritmos, o cálculo mental, múltiplos de um número, arredondamentos, divisão como operação inversa da multiplicação, critérios de divisibilidade, números primos, leitura de números, decomposição de números, terminologia própria para a circunferência, notação simbólica matemática, classificação de polígonos, conceito de infinito, reduções do sistema métrico, enquadramentos, área do quadrado e retângulo, expressões numéricas e potências.

No que respeita ao nível intrínseco, os conhecimentos que foram sendo construídos ao longo desta sequência foram sendo mobilizados na exploração das tarefas seguintes, realçando-se a contribuição da construção do significado de fração, nomeadamente no estudo do número pi em que a fração com o significado de razão se destacou, auxiliando os alunos na caraterização do irracional pi. Da mesma forma, esta caraterização evidenciou ser útil na compreensão da fórmula atual para o cálculo da área do círculo, levando os alunos a percecionar $\pi \times r^2$ como a área ocupada por π quadrados de área r^2. Simultaneamente, os alunos começaram intuitivamente a apropriar-se de aspetos históricos para fundamentar as suas explicações e conjeturas, nomeadamente na caraterização de pi enquanto irracional.

iv) Quais as aprendizagens realizadas pelos alunos ao longo da proposta pedagógica?

No que respeita às frações, Monteiro e Pinto (2005) referem que o facto de na representação sob a forma de fração se utilizarem dois números poderá contribuir para que os alunos não considerem a fração como um só número, mas como dois números distintos e, por outro lado, o facto de esta representação ter diversos significados também pode ser um aspeto a ter em conta. Com a exploração das tarefas relativas ao tópico dos racionais não negativos, nomeadamente no estudo das frações, os alunos revelaram-se capazes de interpretar as frações como um só número, revelando compreender o numerador em função do denominador e, desta forma, foram recorrendo aos diversos significados das frações, destacando-se nesta proposta os significados de parte-todo, quociente, medida e operador. Por outro lado, os alunos nem sempre atribuíam o mesmo significado às frações, o que tornou a aprendizagem deste conceito mais rica e consistente. Nas tarefas relativas às medições egípcias e à notação de Simon Stevin destacaram-se os significados parte-todo, operador e quociente, o que facilitou a compreensão das frações como números que podem ser menores, iguais ou superiores à unidade. O significado de operador surgiu fortemente associado aos problemas históricos de repartição, o que permitiu aos alunos compreender que o recurso às frações vai muito além da sua mera utilização enquanto número propriamente dito. Tendo em conta que Duval (2002) considera extremamente importante que os alunos desenvolvam a capacidade de identificar um mesmo conceito em representações diferentes, levando-os a alternar entre as várias representações, o que lhes permitirá desenvolver uma compreensão mais profunda do conceito de fração, a tarefa relativa ao surgimento do conceito de percentagem revelou-se determinante para a alternância que o citado investigador refere. Os alunos conseguiram reconhecer a equivalência entre as representações fracionárias, decimais e sob a forma de percentagem, afirmando que o valor era sempre idêntico mudando, apenas, a representação utilizada. Assim, no seguimento desta última evidência, a sequência de tarefas históricas utilizadas também permitiu aos alunos distinguir a representação fracionária da representação decimal a partir das nomenclaturas antigamente utilizadas, tornando-se mais simples identificar e distinguir os fracionários dos decimais.

Relativamente ao número pi, o recurso a tarefas exploratórias com base na história deste número evidencia contrariar as dificuldades enfatizadas por Robinet (1993) e Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) pois os alunos mostraram-se capazes de caraterizar pi além da mera justificação com base no seu número infinito de casas decimais, uma vez que evidenciaram compreender que as mesmas estavam desprovidas de um padrão que pudesse ser previamente conjeturado e previsto, apelidando este número de irracional por oposição aos racionais. Por outro lado, também foram capazes de reconhecer que a natureza deste número dificultou a sua compreensão, nomeadamente citando argumentos históricos. Com a tarefa alusiva ao método de Arquimedes os alunos conseguiram entender o importância do infinito para a compreensão da natureza deste número e utilizaram este argumento para justificar as opções deste matemático, interrelacionando o seu método com o número de lados infinitos de uma circunferência e este último aspeto com o número infinito de casas decimais de pi. À medida que as tarefas iam sendo sucessivamente exploradas a ideia apresentada por Santos (2004) parece ser contraposta, pois o mesmo refere que o estudo dos irracionais não parece contribuir para desenvolver um bom conceito acerca dos mesmos, o que neste trabalho não se verifica. No entanto, concordo com Santos (2004) quando refere que a mera verificação empírica da irracionalidade deste número não contribui para a sua compreensão, pois após a exploração da tarefa introdutória para este tópico, em que tal verificação foi consumada, os alunos ainda revelavam uma compreensão limitada das cateterísticas deste número pois muitos alunos atribuíam os resultados obtidos para pi como a consequência dos erros de medição com recurso a fitas métricas e não conjeturavam acerca da possibilidade daquela razão poder ter uma parte não inteira com infinitos algarismos. Com a exploração das restantes tarefas, tal visão foi sendo alterada e os alunos conseguiram fazer uma caraterização de pi mais rica e fundamentada. Assim, partilho das ideias de Silva (2006) pois pude constatar que o estudo deste irracional foi favorecido pelo seu contexto construtivista em que os grupos de trabalho se revelaram essenciais para uma melhor compreensão da sua natureza.

No que respeita à aprendizagem e compreensão da fórmula atualmente utilizada para o cálculo da área do círculo, os alunos evidenciaram ser capazes de olhar para esta expressão e interpretá-la como sendo a área ocupada por π quadrados cuja área é dada por r^2, uma vez que a tarefa desenvolvida promoveu, inicialmente, o recurso à estimativa da área de um círculo cuja área fosse igual à de um quadrado passando-se, depois, para o seu cálculo propriamente dito. Os alunos não tiveram dificuldade em aplicar a nova fórmula e evidenciaram contrariar os estudos que apontam para as dificuldades causadas pela incompreensão do conceito de variável respeitante a r nesta fórmula (NCTM, 2007) pois os alunos conseguiram interpretar o seu significado utilizando corretamente o cálculo desta potência.

Simultaneamente, os alunos aprenderam a utilizar os aspetos históricos para defenderem as suas conjeturas, uma vez que muitas das vezes os utilizavam para realçar determinadas ideias ou conjeturar acerca das suas descobertas.

5.3. Reflexão final

Reflexão pessoal. A possibilidade de desenvolver este trabalho representa, para mim, a oportunidade de ter aprofundado os meus conhecimentos pessoais acerca do contributo da História da Matemática enquanto ferramenta pedagógica que facilita o ensino/aprendizagem de conceitos matemáticos. Há muito tempo de defendo que a utilização deste recurso oferece um grande leque de garantias pedagógicas mas nunca tinha tido a possibilidade de investigar tais asserções, pois todos os dados que fui recolhendo ao longo da minha experiência profissional e experiências de ensino que ia desenvolvendo eram de cariz não científica o que, portanto, não me permitia fundamentar tais conjeturas. Por outro lado, a concretização deste trabalho também revelou ser um grande desafio profissional pois desenvolver um estudo desta dimensão requer, necessariamente, muitas construções e reconstruções de tarefas, de planificações, da procura de fontes, entre outros, sempre num processo de constante readaptação aos dados que iam sendo recolhidos, analisados e aperfeiçoados.

O meu interesse pela História da Matemática foi já caraterizado na motivação e pertinência deste estudo mas penso que existe um dos fatores que mais se destaca em todo o meu percurso: o contacto que tive na minha formação superior com esta ferramenta. Os aspetos que foram sendo desenvolvidos pelo meu senso comum só puderam ganhar importância quando foram reorganizados intelectualmente pela minha formação em História da Matemática, uma vez que foi esta que deu significado e relevo a tudo o que pude experienciar, quer como estudante à procura da motivação pela descoberta, quer como professor preocupado em ajudar os alunos a ultrapassar as suas dificuldades de aprendizagem.

Este trabalho ocorreu sob condições específicas, o que não permite fazer generalizações que possam ser consideradas como válidas. No entanto, com o seu desenvolvimento, mais do que indicar tarefas concretas que se suportam da História da Matemática, teve-se como objetivo compreender em que medida o desenvolvimento e a implementação de tarefas com recurso à História da Matemática conduz a uma aprendizagem significativa por parte dos alunos.

Com esta proposta pedagógica A História da Matemática revelou-se determinante para a compreensão contextualizada do desenvolvimento de vários conceitos numa fase primitiva da sua génese e as dificuldades dos nossos antepassados foram vistas como algo inerente à construção da própria Matemática, dando aos alunos uma perspetiva mais humana desta ciência, permitindo-lhes compreender os conceitos atuais a partir do seu desenvolvimento no passado: "Podemos compreender as coisas do passado que é para compreender agora o presente" (A9, n.c.). A utilização de conceitos numa fase mais embrionária revela-se, assim, um aspeto duplamente vantajoso: o professor, ao conceber tarefas com base na História da Matemática, compreende melhor as dificuldades inerentes a cada conceito que explora e que pretende construir com os seus alunos, o que lhe permite prever essas dificuldades na exploração das tarefas. Os alunos, analisando essas dificuldades em outros povos, compreendem que tais obstáculos fazem parte da construção matemática e ganham uma nova perspetiva sobre o que pode significar aprender Matemática e cometer erros ou imprecisões. Simultaneamente, ao compreenderem os diversos contextos históricos em que foram integrados, os alunos evidenciaram ganhar uma maior competência no estabelecimento de conjeturas com recurso a dados históricos, quer tenham sido de ordem cronológica, de ordem da terminologia utilizada como também de ordem metodológica, pois puderam experienciar distintos métodos que estão na génese do nascimento ou da ampliação de determinados conceitos matemáticos.

Enquanto experiência, será importante destacar os aspetos mais positivos e menos positivos que se realçaram, não só para os alunos mas também para mim. A principal dificuldade que senti diz respeito à gestão do tempo previsto para a exploração de cada tarefa. Quando planificamos temos que ter em conta o tempo que cada tarefa necessita para a sua apresentação, exploração e reflexão final. Destes três momentos, o que se revelou ser mais difícil de prever e de gerir diz respeito ao tempo necessário para a exploração das tarefas, pois deparei-me com muitas situações em que os alunos estavam a tecer conclusões muito pertinentes e interessantes mas pedia aos mesmos que tivessem alguma dinâmica nessa exploração para que conseguissem responder e refletir em todas as questões, o que muitas vezes fez com que os alunos não tivessem o tempo suficiente para completar os seus raciocínios, não permitindo uma exploração mais profícua dos vários conceitos. A História da Matemática mostra que os conceitos foram-se desenvolvendo lentamente e tal fator também deveria estar subjacente à exploração de cada tarefa.

Relativamente aos alunos, a motivação que se fez sentir na sala de aula foi um aspeto claramente evidente, pois sentiam-se fascinados pelos aspetos históricos a que iam sendo expostos e pela oportunidade que tinham para recriar tais situações. Por outro lado, a utilização de fontes e problemas antigos fez com que as explorações se tornassem muito mais significativas ao ponto do aluno com maiores dificuldades de aprendizagem e de concentração me ter manifestado esse interesse de forma objetiva, nomeadamente pelo apreço que nutria pela cultura egípcia e pela forma como esse povo desenvolvera a Matemática. Quanto à utilização de documentos e textos antigos, os alunos revelaram, por vezes, alguma dificuldade em decifrar o seu conteúdo, pois a língua, e necessariamente a escrita, também vão evoluindo, e o trabalho de análise de tais documentos nem sempre é um aspeto de fácil concretização.

Recomendações e implicações. A realização deste trabalho implica a concretização de outros estudos, não só ao nível dos tópicos estudados mas, sobretudo, em relação à utilização da História da Matemática como ferramenta pedagógica na sala de aula. Assim, dever-se-ão ter em conta dois aspetos que considero importantes. Por um lado, seria relevante que se organizassem estudos respeitantes a outros ciclos, com especial ênfase no 1.º ciclo, uma vez que nele se desenvolvem conceitos numa fase muito embrionária da sua evolução, o que possibilitaria a utilização dos conhecimentos históricos para organizar tarefas que permitissem a sua exploração numa etapa mais ancestral. Ainda assim, seria importante que se delineassem sequências de ensino para outros tópicos de Matemática, quer seja no 2.º ciclo ou em outros ciclos, pois esta ciência tem uma história muito rica que permitiria a planificação de sequências de ensino bastante interessantes e, possivelmente, promotoras da aprendizagem.

Nakamura (2008) refere que os conjuntos numéricos são estudados como a acumulação de sucessivos conjuntos, isto é, primeiro os naturais, depois os inteiros, os racionais e finalmente os irracionais. No que respeita à sequência de ensino que delineei, seria importante organizar uma sequência em que tanto os racionais como os irracionais (neste caso o pi) pudessem ser explorados em simultâneo, pois podemos conjeturar que tal exploração promoveria uma melhor caraterização de ambos os conjuntos.

Finalmente, e no que à utilização da História da Matemática diz respeito, considero que, apesar de atualmente muitas universidades terem pelo menos uma disciplina desta temática (Mota et al., 2011), seria importante conceber um estudo com professores de Matemática (nos vários ciclos) que visasse alterar a conceção dos mesmos acerca da utilização desta ferramenta, levando-os a delinear as suas sequências de ensino e promovendo a reflexão por parte dos mesmos acerca dos resultados obtidos. Considero este aspeto muito importante porque nem todos os professores puderam ter formação superior nesta temática e também porque cada vez que promovo discussões sobre a mesma sinto que a História da Matemática apenas é vista como um corpo de conhecimentos que se limita a narrar algo que ocorreu no passado e não no seu verdadeiro significado pedagógico. Só utilizamos algo que primeiro conhecemos e, de seguida, compreendemos.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Departamento da Educação Básica. Ministério da Educação.

Alcalá, M. (2011). Diseño práctico de una unidad didáctica en el área de las ciencias experimentales enmarcado en un proceso de enseñanza-aprendizaje activo y constructivista. *Campo Abierto, 30* (2), 141-164.

Almeida, A. A. (1994). *Aritmética como descrição do real (1519-1679),*volume II. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.

Almeida, A. A. (1998), *A matemática no tempo dos descobrimentos*. Lisboa: Grupo de Trabalho do Ministério da Educação para a Comemoração dos Descobrimentos Portugueses.

Alsina, C. (2009). *O clube da hipotenusa*. Lisboa: Planeta Manuscrito.

Amaro, G. (1993). The use of mathematics history and epistemology in mathematics education of teachers In *Proceedings of the First European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp.453-459) Montpellier: IREM de Montpellier.

Batarce, M. S (2003). *Um contexto histórico para análise matemática para uma educação matemática*. (Tese de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro). Retirado de http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2003/batarce_ms_me_rcla.pdf

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). New York, NY: Academic Press.

Bell, J. (2002). *Como realizar um projecto de investigação: Um guia para a pesquisa em Ciências Sociais e da Educação*. Lisboa: Gradiva.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel (Tradução de José Manuel Varandas, Hélia Oliveira e João Pedro da Ponte)

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education, 5*(1), 7–71.

Blatner, D. (2001). *O encanto do pi*. Lisboa: Replicação.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico - Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

Bortoletto, A. (2008). *Reflexões relativas às definições do número π (pi) e à presença da sua história em livros didáticos de Matemática do ensino fundamental* (Dissertação de Mestrado, Universidade Metodista de Piracicaba, Brasil). Retirado de https://www.unimep.br/phpg/bibdig/pdfs/2006/RYXMQMJTVEXB.pdf

Boyer, C. B. (2002). *História da Matemática*. Elza F. Gomide (trad.). São Paulo: Edgard Blücher.

Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-24). Lisboa: SEMSPCE.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 293-316.
Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.
Cross D. I. (2009). Creating optimal mathematics learning environments: combining argumentation and writing to enhance achievement. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(5), 905-930.
Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization* (pp. 311–336). Mexico: PMENA, Cinvestav-IPN.
Empson, S. B., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Heidelberg: Springer.
Estrada, M. F. (1993). A História da Matemática no Ensino da Matemática. *Educação e Matemática*, 27, 17-20.
Estrada, M. F. A. (2000). A Matemática no Antigo Egipto. In Estrada, M., Sá, C., Queiró, Silva, M., Costa, M. *História da Matemática* (pp. 19-60). Lisboa: Universidade Aberta.
Freudenthal, H. (1999). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York, NY: Kluwer Academic Publishers
Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 131-143.
Gil, P. (2012). *A história da matemática no fomento de uma cultura de argumentação em sala de aula* (Tese de Doutoramento, Universidade do Minho, Portugal).
Gipps, C. (1999). Socio-cultural aspects of assessment. *Review of Research in Education, 24*, 355-392.
Godino, J. D., Ruiz, F., Roa, R., Cid, E., Batanero, C., & Font, V. (2004). *Didáctica de la matemática para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada. Retirado em 10 de Novembro de 2013 de http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm
Goldenberg, E. P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.
Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.
Grugnetti, L., & Rogers, L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: An ICMI study* (pp. 39–62). Dordrecht: Kluwer.
Jones, P. (1989) *The history of mathematics as a teaching tool*. *Historical topics for the mathematics classroom* (2ª ed.). Virginia, VA: NCTM.

Jorge, F. (2008). *Formação inicial de professores do ensino básico: um percurso centrado na história da matemática* (Dissertação de Doutoramento, Universidade de Aveiro, Portugal)

Kool, M. (1993). Using historical aritmetic books in teaching mathematics to low-attainers, In *Proceedings of the First European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 215-216) Montpellier: IREM de Montpellier.

Magalhães Gomes, M. L. (2006). Os Números Racionais em Três Momentos da História da Matemática Escolar Brasileira. *Boletim de Educação Matemática, 19*(25). Retirado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221859003

Menino, H., & Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em Matemática. O uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2.º ciclo do ensino básico. In *atas do XV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 271-291). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Mestrinho, C., & Oliveira, C. (2012). A integração do tangram na aula de geometria – Uma primeira abordagem ao conceito de área na formação inicial de professores dos primeiros anos. In P. Canavarro, , L. Santos, , A. Boavida, H. Oliveira, , L. Menezes, & S. Carreira, (Orgs), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática*. Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Ministério da Educação (1991a). *Programa de Matemática do 2.º ciclo do ensino básico*. Lisboa.

Ministério da Educação (1991b). *Programa de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico*. Lisboa.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa:DGIDC.http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14* (1), 89-108.

Mota, C., Ralha, M., & Estrada M. (2011). Matemática em Portugal: Marcos da história do ensino e do ensino da história. In J. Matos & M. Saraiva (Eds.), *Actas do I Congresso Ibero-Americano de História da Educação Matemática*, (pp. 388-400). Lisboa: UIED.

Nakamura, K. (2008). Conjunto dos números irracionais: A trajetória de um conteúdo não incorporado às práticas Escolares. (Tese de Mestrado , Pontifícia Universidade Católica, São Paulo). Retirado em 5 de março de http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/keiji_nakamura.pdf.

NCTM (1989). *Historical topics for the mathematics classroom (*2ª ed.). Reston, VA: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. (Tradução portuguesa do original de 2000). Lisboa: APM.

Neves, E. (2007). *Episódios da História da Matemática para o Ensino*. Lisboa: Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Oliveira, P. (2002). A aula de matemática como espaço epistemológico forte. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 25-40). Lisboa: SEM-SPCE.

Paes, W. T. (2012). Porque se ensina história da civilização no curso normal. *Cadernos de História da Educação, 1*(1), 327-338.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: DES-ME.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, M. H., & Segurado, M. I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P. (1998). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In actas do *IV Congresso da SPCE* (pp.59-72), Aveiro.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação Matemática: implicações curriculares.* Lisboa: IIE

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Préve, C. (2012). *Área do círculo e o número pi: Uma abordagem diferente nas turmas de 8ª*. Retirado em 3 de maio de 2013 de http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/RE/RE_Preve_Cintia_Teixeira.pdf.

Rogers, L. (1993). The historical construction of mathematical knowledge. In *Proceedings of the First European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp.105-110) Montpellier: IREM de Montpellier.

Sadler, D. R. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science, 18*, 119-144.

Santos, L. (2002). Autoavaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Orgs.), *Avaliação das aprendizagens. Das conceções às práticas* (pp. 75-84). Lisboa: ME-DEB.

Santos, J. (2003). Uma breve história de π. *Gazeta de Matemática*, *145*, 43-48. Disponível em http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=80.

Santos, G. (2004). Número π: Histórico, sua irracionalidade e Transcendência. (Trabalho final de licenciatura, Universidade Católica de Brasília, Brasil). Disponível em http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12005/GilvaneideLucenadosSantos.pdf

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M., & Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2.º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 83-106). Lisboa: SEM-SPCE.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2010). Trajectórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão. In GTI (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básic* (pp.43-59). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Grupo de Trabalho de Investigação.

Silva, G. (2006). *Um estudo sobre a aprendizagem dos números irracionais no ensino médio* (Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte). Retirado de http://ftp.ufrn.br/pub/biblioteca/ext/bdtd/GratulianoEAS.pdf.

Silva, B. A., & Penteado, C. B. (2009). Fundamentos dos Números Reais: Concepções de Professores e Viabilidade de Início do Estudo da Densidade no Ensino Médio. *Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *11*(2). Retirado de http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/1860/1808.

Silva, J. C. (2012). *A História da Matemática e o ensino da Matemática*. Disponível em http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/histmatprogr1.html.
Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 114-145.
Smith, M., Hughes, E., Engle, R., & Stein, M. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School , 14*(9), 548-556.
Stander, D. (1989). The use of the History of Mathematics in Teaching. In P.Ernest (Ed.), *Mathematics Teaching: the state of the art* (pp. 241-246). New York: The Falmer Press.
Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3,* 268–275.
Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (2010). The influence of curriculum on student learning. In B. Reyes, R. Reyes, & R. Rubenstein (Eds.), *Mathematics curriculum: Issues, trends and future directions* (pp. 351-362). Reston, VA: NCTM.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, *14*, 66-91.
Toledo, M. (1997) Didática de Matemática: como dois e dois: a construção da Matemática, São Paulo: FTD in Ensino Fundamental, livro do estudante, retirado dehttp://download.inep.gov.br/educacao_basica/encceja/material_estudo/livro_estudante/matematica_ens_fund.pdf
Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. New York, NY: Pearson Education.
Vázquez, M. (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. In A. Martinón (Ed.), *Las matemáticas del siglo XX* (pp. 93-96). Madrid: Nivola.
Veloso, E. (1993). Introduction of an historical perspective in the teaching of mathematics: the situation in Portugal. In *Proceedings of the First European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp.299-300) Montpellier: IREM de Montpellier.
Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W., & Mukhopadhyay, S. (Eds.) (2009). *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations*. Rotterdam: Sense Publishers.
Wiliam, D., & Thompson, M. (2007). Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work? In C. A. Dwyer (Ed.), *The future of assessment: Shaping teaching and learning*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
Winicki, G. (1993). The impact of using mathematics problems with historical backgrounds in the teaching of mathematics on students attitudes to the subject. In *Proceedings of the First European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp.283-285) Montpellier: IREM de Montpellier.
Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458–477.
Yin, R. (2003). *Case study research: Design and methods* (3ª ed.). London: Sage.

Anexos

Anexo 1 – Pedidos de autorização para realização do trabalho

Ex.mo Senhor Francisco Cardoso
Diretor do Agrupamento de Escolas da Pontinha

Eu, Hugo Pedroso, venho por este meio solicitar a autorização para realizar, no ano letivo 2012/2013, na turma do 5.º ___ deste Agrupamento da qual sou professor de Matemática, um trabalho de investigação no âmbito do meu relatório de Mestrado em Educação, especialidade de Didática da Matemática, que me encontro a concluir no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

O principal objetivo deste trabalho é compreender como os alunos desenvolvem as suas aprendizagens com base numa proposta pedagógica que recorre à História da Matemática. Neste sentido, é necessário proceder à recolha de dados junto da turma em causa, através de gravação em vídeo das aulas onde a proposta será implementada e de entrevistas a alunos.

O desenvolvimento da investigação não interfere com o normal funcionamento das atividades letivas e não traz qualquer prejuízo para os participantes, estando garantida a confidencialidade dos dados recolhidos e o anonimato da escola/Agrupamento e dos alunos em posteriores divulgações da investigação realizadas no âmbito do mestrado. Irei, ainda, proceder ao pedido de autorização dos Encarregados de Educação dos alunos para a referida recolha de dados.

Agradeço a colaboração,
Cumprimentos.

___________, ____ de Janeiro de 2013

____

(Hugo Pedroso)

Ex.mo(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Hugo Pedroso, professor de Matemática da turma do 5.º ___, no ano letivo 2012/2013, estou a desenvolver um trabalho de investigação no âmbito do Mestrado em Educação, especialidade de Didática da Matemática, que me encontro a concluir no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

O principal objetivo deste trabalho é compreender como os alunos desenvolvem as suas aprendizagens com base numa proposta pedagógica que recorre à História da Matemática. Neste sentido, é necessário proceder à recolha de dados junto da turma em causa, através de gravação em vídeo das aulas onde a proposta será implementada e de entrevistas a alunos.

O desenvolvimento da investigação não interfere com o normal funcionamento das atividades letivas e não traz qualquer prejuízo para os alunos, estando garantida a confidencialidade dos dados recolhidos e o anonimato da escola/Agrupamento e dos alunos em posteriores divulgações da investigação realizadas no âmbito do mestrado.

Face ao exposto, solicito autorização para implementar o trabalho de investigação anteriormente descrito através do preenchimento da declaração em anexo.

Agradeço antecipadamente a colaboração e a atenção dispensada,

Cumprimentos.

___________, ____ de Janeiro de 2013

O professor de Matemática

____

(Hugo Pedroso)

Autorizo/ Não Autorizo que o meu (inha) educando(a)___________________________ nº ___ da turma 5º ___ participe na recolha de dados da investigação realizada pelo professor Hugo Pedroso no âmbito do Mestrado em Didática da Matemática.

___/___/ 2013 Assinatura: _____________________________________

Anexo 2 – Tarefa 1

TAREFA Nº 1 – *Queres imitar os egípcios?*

Lê atentamente o seguinte texto da antiguidade:

"Sesostris dividiu a terra entre todos os egípcios, de modo a dar a cada um deles um quadrado de tamanho igual e cobrava anualmente um imposto a cada terreno. Mas cada um de cuja parte o rio arrancou qualquer coisa, tinha que ir com ele e avisar o que tinha acontecido. Então, ele mandou os agrimensores, que tinham de medir quanto se perdeu de terra, a fim de que o proprietário pudesse pagar o que restava, em proporção ao montante total do imposto. Por esse costume, eu creio, é que a Geometria veio a ser conhecida no Egipto de onde passou para a Grécia"

Adaptado de Boyer, (2002, p. 6)

1 – Hoje vais experimentar o trabalho dos agrimensores (as pessoas que, naquele tempo, iam medir as terras). No entanto, em vez de medirmos terrenos vamos medir objetos usando o utensílio de medida que os agrimensores egípcios utilizavam (fig. 1 e 2).

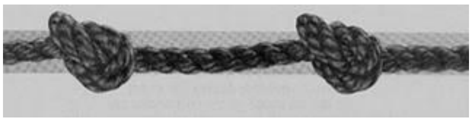


Fig. 1 - Unidade entre os dois nós.

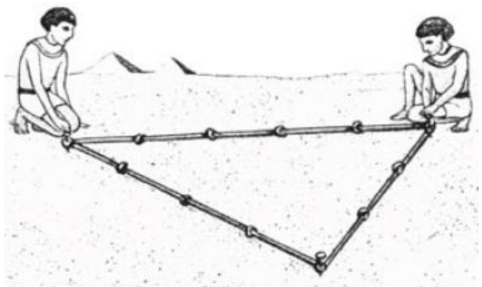


Fig. 2 - Agrimensores fazendo marcações (Toledo, 1997, p. 22)

1.1 – Utilizando uma corda semelhante à dos agrimensores mede os seguintes objetos e regista o valor da sua **medida exata** na tabela seguinte:

Objetos	Borracha	Comprimento da mesa	Altura da mesa	Objeto à tua escolha
Valor da medida				

1.2 – **Vamos refletir acerca deste trabalho**:

1.2.1 – Sentiste alguma dificuldade ao realizar as medições? _______. Se respondeste sim, explica qual foi essa dificuldade.
____
____
____

1.2.2 – O que aconteceu na medição da borracha?
____
____
____

1.2.3 – Achas que os egípcios agrimensores sentiram o mesmo que tu durante as suas medições? ________ Por quê?

____
____
____

1.2.4 – Como pensas que se pode resolver este problema? Como terão resolvido este problema os agrimensores?

____
____
____

1.2.5 – Por que é que as pessoas, ao longo dos tempo, deixaram de usar o utensílio de medida dos egípcios agrimensores?

____
____
____

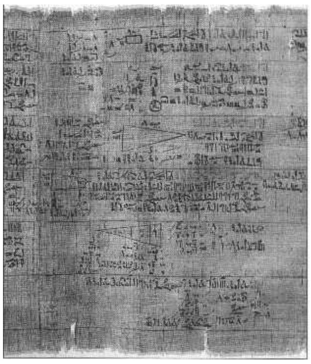
CONCLUSÃO DESTE TRABALHO:

____
____
____

Anexo 3 – Tarefa 2

TAREFA Nº 2 – *Vamos estudar matemática de há 4000 anos!!!*

☺ O que sabemos hoje acerca da matemática dos egípcios resulta, sobretudo, de documentos escritos que foram encontrados: Papiro de Moscovo; Papiro de Kahun; Papiro de Berlim; Rolo de Couro das Matemáticas Egípcias e Papiro de Rhind - este último escrito por Ahmes (Estrada, 2000).



Fotografia de um pedaço do Papiro de Rhind que se encontra, atualmente, no Museu Britânico

1– Lê com atenção o seguinte texto retirado do papiro de Rhind:

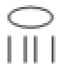
> ***O faraó quer distribuir igualmente 1 boroa* por 4 homens. Que parte recebe cada um deles?***
>
> Adaptado do Papiro de Rhind (Estrada, 2000)

** boroa = pão*

1.1 – Tenta descobrir qual a resposta que está contida no Papiro de Rhind. Podes utilizar números, esquemas ou desenhos.

R: ____

1.2 – Em baixo vais registar a resposta contida no papiro de Rhind para este problema.

Resposta registada no Papiro de Rhind	**Significado da representação contida no Papiro de Rhind**	**Representação atual**
		

1.2.1 – Analisa a resposta dos egípcios e escreve o que poderá significar.

R: ____

____

____

1.2.2 – Escreve na terceira coluna qual a representação atual para a resposta dada pelos egípcios.

1.2.2.1 – Que operação te faz lembrar este problema? ________ Resolve o mesmo problema de acordo com essa operação.

R: ____

INFORMAÇÃO – Os números não inteiros começaram por chamar-se *números partidos ou quebrados.* Estes números, por exemplo, chegaram a Roma como sendo conhecidos por ***fracionados,*** *quebrados, minúcias.* A designação *fracionados* vem do latim *frangere* que significa *partir*. Hoje dizemos **frações**. (Alsina, 2009)

2 – O faraó quer dividir 6 boroas por 10 homens. Que parte recebe cada um?

Problema nº 3 do Papiro de Rhind (Estrada, 2000)

2.1 – Representa o problema de duas formas diferentes:

Divisão	**Fração**

R: ____

2.2 – As representações que utilizaste têm o mesmo valor ou são diferentes? Explica a tua resposta.

____

____

____

2.3 – Observa a resposta dada pelo escriba Ahmes ao mesmo problema (Estrada, 2000):

Cada homem recebe $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$.

2.3.1 - Esta resposta têm o mesmo valor daquela que deste? ______ Explica qual o significado da resposta dada pelo escriba Ahmes.

R:____

____

____

Nota: os egípcios usavam **sempre** frações unitárias nas respostas, isto é, com numerador um ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc) à exceção da fração $\frac{2}{3}$ (Boyer, 2002; Estrada, 2000)

CONCLUSÕES DESTE TRABALHO:

1- ____

____

____

2- ____

____

____

Anexo 4 – Tarefa 3

TAREFA Nº 3 – *Da fração às décimas*

☺ Como já vimos anteriormente, as frações também representam a operação da _________. Atualmente, os números decimais são muito usados por todo o mundo. Mas como surgiram eles?

1 - Na Europa, supõe-se que a primeira pessoa a entender o significado de fração decimal tenha sido Simon Stevin (1548 – 1620), o qual publicou em 1585 a obra *"La disme"* (A dízima). Criticou o governo no sentido de optar por uma nova forma de escrita dos números fracionários decimais. Sugeriu uma notação que terá originado a notação decimal com vírgulas (Boyer, 2002). Por exemplo:

$$\frac{12}{10} = 1{,}2$$

1.1 – Transforma as seguintes frações em decimais calculando mentalmente e regista o seu valor.

$\frac{1}{10}$ = $\quad\frac{237}{10}$ = $\quad\frac{14}{100}$ = $\quad\frac{2}{1000}$ = $\quad\frac{4755}{10}$ =

2 – Transforma as seguintes frações em decimais. Sempre que puderes, utiliza o cálculo mental. Caso contrário, faz o algoritmo da divisão.

$\frac{1}{2}$ = $\quad\frac{1}{3}$ = $\quad\frac{5}{5}$ = $\quad\frac{12}{5}$ = $\quad\frac{47}{10}$ =

$\frac{13}{13}$ = $\quad\frac{30}{10}$ = $\quad\frac{24}{2}$ = $\quad\frac{31}{100}$ = $\quad\frac{44}{44}$ =

2.1 – Com base na questão anterior, escreve cada fração no sítio correspondente:

	Exemplos	Descoberta
Frações que representam a unidade		
Frações menores que 1		
Frações maiores que 1		
Frações que são números inteiros		
Frações que são dízimas infinitas periódicas* *(*periódicas = que se repete)*		

2.2 – Com a tua calculadora, tenta descobrir outras frações periódicas. Escreve a fração e, à frente, o seu resultado.

2.3 – O que pensas desta nova notação inventada pelo matemático Simon Stevin?____

____

____

2.4 – Achas que a Matemática é uma ciência que está sempre igual ou que vai evoluindo? ______________ Explica a tua resposta. _____________________

____

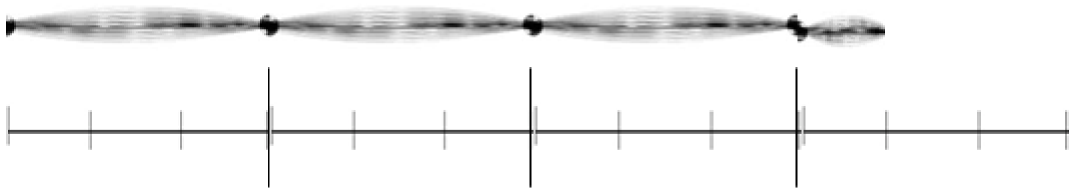
____

Anexo 5 – Tarefa 4

TAREFA Nº 4 – *Vamos ajudar os agrimensores egípcios*

MEDIÇÃO – *medir um comprimento é compará-lo com outro comprimento tomado como unidade e determinar quantas vezes ele é maior ou mais pequeno.*

1 – Ainda te lembras dos egípcios agrimensores? Observa a seguinte medição realizada por um deles:



1.1– Quantas vezes cabe o bocado não inteiro entre dois nós da corda? _____

1.2– Qual é o comprimento total da corda? Explica como pensaste. _________

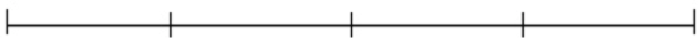
____

____

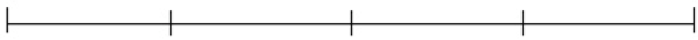
____

2 – Marca para cada situação o respetivo comprimento:

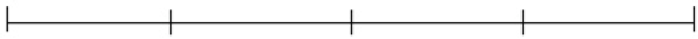
$2\frac{1}{2}$



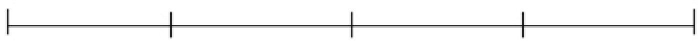
$3\frac{2}{3}$



$\frac{1}{4}$



$3\frac{3}{2}$



3 – De todas as medições realizadas na pergunta anterior, qual não seria utilizada pelos egípcios? Explica a tua resposta.

4 – Que podes concluir sobre a utilidade das frações, tendo em conta esta ficha de trabalho?

Anexo 6 – Tarefa 5

TAREFA Nº 5 – Problemas antigos

Distribuindo dinheiro pelos pobres

1 – Um homem tinha algum dinheiro e mandou-o distribuir por 4 pobres, pelo amor de Deus. Mas antes de lho dar, olhou-os bem a todos e a quem lhe pareceu, mais mandou dar. Deixemos este melhor se é mais pobre, pensou para si.

Depois de os ter visto bem, mandou que a um dos pobres dessem um terço daquele dinheiro, a outro um quarto, ao terceiro um quinto e ao último um sexto.

Se te dissessem que o dinheiro era 60 000 reais, pergunto quanto calhou a cada um desses homens?

Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d`Arismética, 1519, transcrito em Almeida (1994, p. 271)

R: ____

1.1 - Sobrou algum dinheiro?

R: ____

O testamento

2 - Os problemas de heranças familiares são de origem árabe, onde estas questões sempre assumiram grande importância. Lê com atenção a seguinte situação:

Um velho pai morreu e legou 17 camelos aos seus três filhos. No testamento, deixou metade ao filho mais velho, um terço ao filho do meio e um nono ao mais novo. Quantos camelos recebeu cada um dos filhos?

Adaptado de A. A. Marques de Almeida, A Matemática na época dos Descobrimentos (1998, p. 118)

R: ____

2.1 – Aflitos com a repartição da herança, foram falar com o homem mais velho da aldeia que estava montado num camelo. Esse homem teve uma ideia e emprestou o seu camelo… Que ideia terá sido essa? Explica a tua resposta.

R: ____

Anexo 7 – Tarefa 6

TAREFA Nº 6 – *A taxa do imperador romano Augusto*

☺Hoje em dia vemos, frequentemente nas lojas, descontos de 20%, de 50%, etc. No entanto, esta ideia já foi utilizada em épocas longínquas como a do antigo Império Romano. O imperador Augusto (viveu entre 63 a.c. e 14 d.c.) cobrava um imposto de $\frac{1}{100}$ sobre o preço da venda de todos os bens. Chamava-se ***centésima rerum venalium*** (NCTM, 1989)

1 – Num mercado romano, um vendedor tinha tecidos para vender no valor de 100 moedas de ouro.

– Quantas moedas de ouro foram entregues ao imperador Augusto? _________Explica como pensaste.

___

___

___

1.2 – Que parte foi cobrada por este imperador? ________ Com que parte ficou o vendedor de tecidos?

R: ___

1.3 – Se os cobradores romanos usassem as percentagens como hoje o fazemos, que percentagem seria cobrada?______. Explica o significado dessa percentagem.

___

___

___

___

1.4 – Imagina que nesse mesmo mercado, um outro vendedor tinha ganho 350 moedas. Aplicando a mesma taxa, quantas moedas ficariam para o imperador? Explica como pensaste.

R: ____

1.5 – A partir da situação anterior, diz se a unidade utilizada para fazer pagamentos (moedas de ouro) é útil para todas as situações e explica a tua resposta.

____

____

____

____

1.6– Escreve a taxa cobrada pelo imperador nas seguintes representações:

Fração - ________ Percentagem - __________ Decimal - _________

2 – Que podemos concluir com esta ficha de trabalho?

____

____

____

____

____

Anexo 8 – Tarefa 7

TAREFA Nº 7 – *Medir o perímetro do círculo*

Os círculos estão por toda a parte e, para as civilizações antigas, o sol e a lua sempre foram uma fonte de poder e mistério. Os locais e as casas mais antigas que se conhecem têm cerca de 10 000 anos e já eram circulares, possivelmente porque as pessoas adoravam a deusa Terra e, desta forma, veneravam-na. (Blatner, 2001)

1 – Hoje vamos medir o **perímetro** e o **diâmetro** de vários círculos tal como os povos mais antigos o terão feito e também de uma forma mais recente. A turma vai fazer medições **dentro da sala**, **fora da sala** e vamos usar, também, o **computador**. O teu grupo vai ___________________________.
As medições mais antigas eram feitas com recurso a cordas que eram postas por cima das circunferências, depois eram esticadas e finalmente medidas.

1.1 – Faz o mesmo com o teu grupo e regista os valores encontrados na tabela seguinte.

REGISTOS DO NOSSO GRUPO

Nome da figura ou objeto	**Perímetro**	**Diâmetro**	$\frac{P}{d}$ **= ?** **(utiliza a calculadora)**

1.2 – Agora que já efetuaste os registos, dirige-te aos outros grupos que também fizeram medições e copia os seus resultados na tabela em baixo:

Nome da figura ou objeto	**Perímetro**	**Diâmetro**	$\frac{P}{d}$ **= ?**

1.3 - O que podes concluir sobre $\frac{P}{d}$?

____

____

____

1.3.1 – O que podemos afirmar em relação ao comprimento do perímetro do círculo em relação ao comprimento do seu diâmetro?

____

1.4 – O resultado de $\frac{P}{d}$ é um valor exato? ________ O que tens a dizer acerca do número de casas decimais? ______________________________________

1.5 – Achas que $\frac{P}{d}$ tem dízimas infinitas (não terminam) ou finitas (terminam a determinada altura)? _____________ Explica a tua resposta.

____

____

____

1.6 – Se quisermos arredondar o valor em causa às **unidades**, qual é o valor aproximado?____

____

1.7 – O que se pode dizer, então, acerca do comprimento do perímetro de qualquer círculo em relação ao seu diâmetro? ____

____

____

1.7.1 – Escreve a tua resposta anterior usando simbologia matemática. ____

1.8 – Achas que existem outros povos e matemáticos que também investigaram esta relação? ______________ Explica a tua resposta. ____

____

____

Anexo 9 – Tarefa 8

TAREFA Nº 8 – *Uma descoberta muito antiga*

Ao longo dos tempos, muitos foram os povos e seus matemáticos que repararam que para qualquer círculo, o seu perímetro a dividir pelo seu diâmetro era sempre um valor aproximado de _____. Na tabela 1,em baixo, poderás fazer uma análise histórica dessas tentativas:

Tabela 1 - Cronologia dos valores do número pi ao longo da história (representado pela letra π)

2000 a.C	**Babilónios usavam π = 3.125**
2000 a.C.	**Egípcios usavam π = 3.1605**
Século XII a.C	**Chineses usavam π = 3**
550 a.C.	**Bíblia - I Reis 7,23 – também se refere, indiretamente, o valor de pi. Vais ser tu a descobrir esse valor…**
Século III a.C.	**Arquimedes estabeleceu 3.1410 $< \pi <$ 3.1428**
século V	**Tsu Chung-Chi estabelece 3.1415926 $< \pi <$ 3.141592**
Século VI	**Brahmagupta usa π = $\sqrt{10}$ = 3.16…**
1220	**Leonardo de Pisa (Fibonacci) descobre π = 3.141818**
Antes de 1436	**Al-Kashi de Samarkand calcula π com 14 casas decimais**
1665-1666	**Newton descobre o cálculo e calcula π até pelo menos 16 casas decimais; que só foi publicado em1737**
1706	**A letra π terá sido adotada a partir da palavra grega para perímetro "περίμετρος" por William Jones.**
1794	**Vega calcula π com 140 casas decimais**
1959	**IBM (*Empresa que comercializa computadores*) calcula π com 16167casas decimais**
1966	**IBM 7030 (Paris) calcula π com 250000 casas decimais**
Atualmente	**51 000 000 000 000 de casas decimais. E continua a aumentar…**

Adaptado de http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm11/tab%20cron.htm

1 – A partir da análise da tabela 1, responde às seguintes questões:

1.1 – De que número trata esta tabela? ________________________________

1.2 – Quais os dois primeiros povos que, de acordo com a tabela, apresentaram um valor para o número π? _____________________________

1.3 - Que valor utilizava cada um desses povos?

____

____

2 – A Bíblia também refere este número? ________

2.1- Lê o seguinte parágrafo retirado da Bíblia:

I Reis 7:23 – "Fez também o mar de fundição, redondo, de dez côvados* de uma borda até à outra borda (…) e um fio de trinta côvados era a medida de sua circunferência."

* **côvado** – **unidade de medida antiga. Da mesma forma que hoje se usa, por exemplo, o metro, algumas civilizações mais antigas utilizavam o côvado. O valor do côvado pode variar de povo para povo. O côvado utilizado pelos egípcios, por exemplo, media 50 cm.**

2.2 – Qual é o perímetro da circunferência referida no texto? __________ E o seu diâmetro? _____________ Qual é, então, o valor de π, segundo a Bíblia?

R:____

3 – Analisa novamente a tabela e repara no número de casas decimais dos vários valores de pi que vão sendo apresentados desde a data mais antiga até à mais atual.

3.1 – O que vai acontecendo ao número de casas decimais que vão sendo calculadas para o valor de pi ao longo da história deste número? ____

3.2 – O que é que permitiu que em 1959 se calculasse o valor de π com mais de 16 000 casas decimais? ____________________________________

3.3 – Achas que é possível calcular o valor exato deste número? ______ Por quê?

____

____

____

3.4 – Analisando esta tabela, quantas casas decimais te parece que tem, realmente, o número pi? Explica a tua hipótese.

____

____

____

____

3.5 – Observa as primeiras vinte casas decimais do número π:

3,14159265358979323846 (…)

3.5.1 - Estas casas decimais apresentam algum padrão que se repete?_____ Explica a tua resposta.____

____

____

3.6 – Será que o número π faz parte do grupo dos números racionais - por exemplo: 0,5 ou $\frac{1}{3}$=0,(3) ? _______ Por quê?

3.7 – Pensas que é possível calcular, com rigor, a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro? _______ Explica a tua resposta.

3.8 – Em 1706, o matemático William Jones sugeriu que este número fosse designado pela letra π. Por que razão é que se utiliza uma letra para representar este número?

3.9 – Repara novamente no número que é apresentado na pergunta 3.5. Se tivesses que utilizar um valor aproximado deste número qual seria esse valor? ______ Explica a tua resposta.

4 – Assim, em vez de escrevermos **P ≅ 3 x d** qual a fórmula que devemos utilizar? ____

5 – Regista, em baixo, as principais ideias que se podem concluir acerca do número π:

Anexo 10 – Tarefa 9

TAREFA Nº 9 – *O método de Arquimedes para calcular o valor de pi*

☺ – Hoje vamos utilizar o método que Arquimedes desenvolveu no séc. III a.c. para calcular o valor de pi. Nessa altura era fácil calcular o perímetro de, por exemplo, um quadrado ou um pentágono por ser delimitado por segmentos de reta. Mas para o círculo não era assim tão fácil…

Vamos utilizar um link da internet* que simula o trabalho de Arquimedes, embora ele tenha feito tudo à mão. Este matemático já tinha percebido que o perímetro do círculo era ligeiramente maior que 3 e queria determinar esse valor com maior exatidão.

***http://www.math.utah.edu/~alfeld/Archimedes/Archimedes.html**

1 – Observa com atenção o **círculo vermelho.**

1.1 – O que é que Arquimedes começou por fazer dentro e fora do círculo?
____

1.2 – Experimenta aumentar, alternadamente, 10 vezes o número de lados dos polígonos que estão dentro e fora do círculo.

12.1 – Quando se aumenta muito o número de lados, os quadrados iniciais começam a parecer-se com que figura?
____

1.2.2 – Tendo em conta que estes novos polígonos continuam a ser limitados por segmentos de reta, qual terá sido a ideia de Arquimedes?

____
____
____

1.3 – A partir de quantos lados do polígono interior e exterior ao círculo se chega a um valor de pi de pelo menos 3,14?
____

1.4 – Arquimedes, que utilizou este processo manualmente, chegou ao máximo de um polígono com 96 lados. Introduz esse número para cada polígono (dentro e fora) e diz entre que valores está compreendido o número π (copia todos os algarismos).

$$\boxed{} < \pi < \boxed{}$$

1.5 – Arquimedes calculou o valor exato de π? _______ Explica a tua resposta.

____

____

1.6 – Se fores aumentando o número de lados de ambos os quadrados (mais de 96 lados) obténs um valor mais rigoroso ou menos rigoroso que o anterior? __________ Explica a tua resposta.

____

____

____

____

1.7 – Compara este método para o cálculo do número pi com aquele que realizámos manualmente (com as fitas métricas) na primeira aula. Qual te parece ser mais rigoroso e mais exato? _____________ Explica a tua resposta.

____

____

____

2 – Arquimedes parou ao chegar a um polígono interior e exterior com 96 lados. Por que pensas que não continuou a aumentar o número de lados? Explica a tua hipótese.

____

____

____

CONCLUSÃO

Anexo 11 – Tarefa 10

TAREFA Nº 10 – *Vamos ver um filme!*

Hoje vamos visionar um filme relacionado com o número que temos estado a estudar, o número π.

O filme está disponível em *http://www.youtube.com/watch?v=IEucccdZ2P0*

O objetivo desta atividade é que o teu grupo apresente à turma um relatório sobre o mesmo na próxima semana, nomeadamente esclarecendo os vários colegas sobre os seguintes aspetos:

1 - Qual é o problema que se pretende responder?

2 – Inicialmente, qual é a solução apresentada para responder ao problema em causa? A solução apresentada parece-te adequada? Por quê?

3 - Círculo e circunferência significam o mesmo?

4 - Segundo o filme, na antiguidade também se sentiu a necessidade de medir o perímetro da circunferência? O que é que foi descoberto para todas as circunferências?

5 - Como é que os atores descobriram a razão entre o perímetro e o seu diâmetro? Fizeram algum tipo de trabalho parecido com o que realizámos nas nossas aulas?

6 – Os atores obtêm alguns valores de pi diferentes para a moeda e para o grande círculo de madeira. Por quê? Esses valores são exatos ou aproximados?

7 – O π é um número racional ou irracional? Por quê? Que valor aproximado se utiliza? Por que se utiliza um valor aproximado?

8 - Explica como se obteve, então, a resposta ao problema inicial.

Anexo 12 – Tarefa 11

1 – A Elisa decorou um frasco cilíndrico, colocando duas fitas iguais à volta do frasco, como se mostra na figura. Que quantidade de fita usou?

Retirado da prova de aferição
de Matemática do 2º ciclo de 2004

R: ____

2 – No seu aniversário, a Liliana recebeu o relógio que podes ver na imagem. A joaninha que está colocada na extremidade do ponteiro das horas dista 0,6 cm do centro do relógio. Quantos centímetros percorre a joaninha durante um dia?

Retirado da prova de aferição
de Matemática do 2º ciclo de 2006

R: ____

3 – A piscina da Teresa é circular e mede 18,84 metros de perímetro. Se a Teresa quiser nadar de uma ponta à outra, passando pelo centro da piscina, quantos metros irá nadar?

R: ____

4 – Explica como se pode obter um valor aproximado de π sem se recorrer a nenhum programa informático.

____
____
____
____
____
____

5 – Por que razão foi tão difícil, para as pessoas, compreender o valor de π e a sua natureza?

____
____
____
____
____
____

Anexo 13 – Tarefa 12

TAREFA Nº 12 – Área do círculo – Quadratura do círculo

Como já vimos, não foi fácil as pessoas terem descoberto a fórmula para calcular o perímetro do círculo, pois para tal foram necessários muitos séculos, sobretudo porque a compreensão do valor de π foi muito complexa.

O que terão feito os nossos antepassados?

Desde há muito que este assunto é estudado por inúmeros matemáticos e povos que tentam desvendar um desafio muito antigo: **como construir um quadrado com a mesma área de um círculo?** Este problema ficou conhecido na história como "Quadratura do círculo" (Boyer, 2002)

1 – Tenta resolver este enigma: constrói numa folha quadriculada um quadrado e um círculo com a mesma área usando apenas régua e compasso. Vai registando os aspetos que aches mais importantes (dificuldades, descobertas, dúvidas, etc.).

No final, escreve aqui as conclusões a que chegaste.

CONCLUSÃO:

____

____

____

____

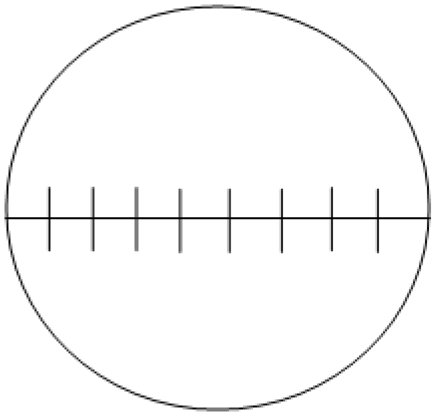
____

2 – Agora vais poder estudar a regra que está contida no Papiro de Rhind (1650 a.c.) presente no problema número 50.

"Calcula a área de um campo circular cujo diâmetro é 9 jet"*

**jet – medida antiga para comprimentos.*

Regra escrita no papiro: "Retira $\frac{1}{9}$ ao diâmetro. Sobra 8. Agora constrói um quadrado sobre esse lado (8 jet). A área deste quadrado é igual à área do círculo inicial".



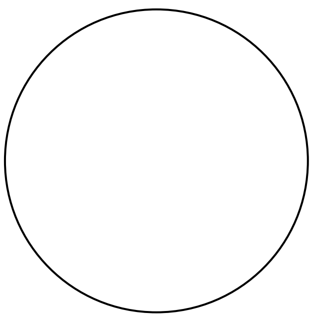
2.1 – Constrói o quadrado de que se fala nesta figura (utiliza a figura em cima).

2.2 – Calcula a área deste quadrado, sabendo que o seu lado mede, então, 8 jet.

R: ____

3 – Atualmente sabemos que a área do círculo é **$\pi \times r^2$**

3.1 – Divide o seguinte círculo em quatro partes iguais:



3.2 – Consegues desenhar na figura um polígono que corresponda a $\mathbf{r^2}$? _______ Desenha-o.

Como se chama este polígono? ______________________________________

3.3 – Quantos polígonos destes é possível desenhar na figura? ___________ Desenha-os.

3.4 – O que significa **π x r^2 para** o cálculo da área de qualquer círculo?

____

____

____

3.5 – Aplica a fórmula atual e calcula a área do círculo da pergunta 2 e compara o valor obtido pelos egípcios.

R: ____

3.5.1 – O que pensas sobre a regra que os egípcios utilizavam? É uma boa estimativa? Por quê?

____

____

____

NOTA: os historiadores não têm a certeza como é que os egípcios chegaram àquela regra. No entanto, o problema 48 desse papiro parece dar algumas pistas. Se queres saber mais sobre esse problema consulta o link http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

CONCLUSÃO

____

____

____

____