UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

DESENVOLVER O CÁLCULO MENTAL NO CONTEXTO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 2.º ANO DE ESCOLARIDADE

Nuno Miguel Ferreira Oliveira

Dissertação

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Didática da Matemática

2013

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

DESENVOLVER O CÁLCULO MENTAL NO CONTEXTO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 2.º ANO DE ESCOLARIDADE

Nuno Miguel Ferreira Oliveira

Dissertação orientada
pela Professora Doutora Joana Maria Leitão Brocardo

MESTRADO EM EDUCAÇÃO
Didática da Matemática

2013

Resumo

Este estudo tem como principal objetivo compreender que estratégias de cálculo mental são usadas por alunos do 2.º ano de escolaridade na resolução de problemas de adição e subtração com números naturais. Especificamente caracteriza as estratégias utilizadas pelos alunos quando resolvem tarefas de adição e subtração, a sua evolução, as dificuldades evidenciadas e a influência do contexto na seleção das estratégias.

O quadro teórico está organizado em três áreas: (i) sentido de número; (ii) cálculo mental; (iii) resolução de problemas; e (iv) ambiente de aprendizagem.

O estudo segue o paradigma interpretativo e uma abordagem qualitativa, tendo como *design* o estudo de caso, assente no desenvolvimento de uma experiência de ensino. Os participantes são os cinco alunos do 2.º ano de escolaridade da turma que lecionei no ano letivo 2010/2011. A recolha de dados inclui os registos dos alunos na resolução de problemas, juntamente com gravações vídeo, áudio e notas de campo. A experiência de ensino teve a duração de oito semanas e envolveu a resolução semanal de um problema e duas cadeias de cálculo.

As conclusões do estudo revelam que: (i) os alunos utilizam uma grande diversidade de estratégias, e que estas estão relacionadas com os significados dos problemas; (ii) há alunos que usam estratégias mistas nos seus cálculos; (iii) os alunos adequam progressivamente as suas estratégias aos números envolvidos nos problemas, embora nem todos tenham evoluído ao mesmo ritmo; (iv) o ambiente de aprendizagem parece ter influenciado a utilização de estratégias de cálculo mais eficientes, concretamente no uso da compensação (N10C); (v) nas tarefas com contexto os alunos denotam um maior conhecimento acerca das relações entre as operações, recorrendo diversas vezes à operação inversa, o que não é evidenciado nas expressões numéricas, nas quais o sinal de operação influenciou as resoluções.

Palavras-chave: sentido de número, cálculo mental, estratégias de cálculo mental, resolução de problemas, ambiente de aprendizagem.

Abstract

The main aim of this study is to understand which mental computation strategies are used by students in the 2nd year of primary when resolving addition and subtraction exercises with natural numbers. This study specifically characterizes the strategies used by these students when they resolve addition and subtraction tasks, their progress, the difficulties evidenced and the influence of context in the selection of strategies.

The theoretical framework is organized into three areas: (i) number sense; (ii) mental computation; (iii) problem solving; and (iv) learning environment.

The study follows the interpretative paradigm and a qualitative approach, having the case study as *design*, based on the development of a learning experience. The participants are five students in the 2nd year of primary in the class I taught in the 2010/2011 school year. The collection of data includes the student records regarding problem solving, as well as video and audio recordings and field notes. The learning experience lasted eight weeks and involved a weekly problem solving task and two chain calculations.

The conclusions of this study reveal that: (i) students use a wide range of strategies and that these are related to the meanings of the problems; (ii) there are students who use mixed strategies in their calculations; (iii) students progressively adapt their strategies to the numbers involved in the problems, although not all of them progressed at the same rhythm; (iv) the learning environment seems to have influenced the use of more efficient mental computation strategies, concretely in the use of compensation (N10C); (v) in the tasks that had a context students showed more understanding about the relationships between operations, resorting to inverse operation several times. This does not happen, however, in numerical expressions, in which the signal operation influenced the resolution.

Key-words: number sense, mental computation, mental computation strategies, problem solving, learning environment.

Agradecimentos

À Professora Doutora Joana Brocardo, pela orientação deste estudo, pelas sugestões dadas e pelo apoio e disponibilidade constantes.

À Elvira Ferreira, por ter despertado em mim o gosto pela Matemática, pela sua amizade e pela disponibilidade que sempre encontrou para discutir aspetos deste trabalho e rever algumas das suas partes.

Aos alunos que participaram neste estudo, pelo empenho, interesse e amizade que demonstraram.

Aos professores do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, pela compreensão e humanismo que demonstraram ao longo deste percurso.

À minha família, pelo apoio incondicional.

À Teresa e à Sara, que nasceu durante este percurso, a quem dedico este trabalho.

Índice

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1. Motivações, problema e questões do estudo

O conhecimento que fui tendo do trabalho realizado pelo projeto *Desenvolvendo o sentido de número: Perspetivas e exigências curriculares*, em 2005, o acompanhamento de alguns estudos realizados por investigadores nacionais no âmbito do desenvolvimento do sentido de número e a aprovação, em 2007, do *Programa de Matemática para o Ensino Básico* (ME, 2007), motivaram-me para o desenvolvimento e aplicação de práticas de sala de aula que permitam a concretização das três ideias fundamentais do programa (ME, 2007) relativamente ao ensino dos números e operações: (i) promover a compreensão dos números e operações, (ii) desenvolver o sentido de número e (iii) desenvolver a fluência no cálculo. O meu interesse pelo cálculo mental surge, precisamente, por permitir, de acordo com o programa (ME, 2007), que se trabalhe com números e não com dígitos, que se use de forma flexível as propriedades das operações e as relações entre os números, promovendo um bom desenvolvimento do sentido de número, sempre com a resolução de problemas como suporte de toda a aprendizagem.

A nível internacional também se verifica esta tendência relativamente aos conteúdos e objetivos para a Matemática dos primeiros anos (Ferreira, 2012), com ênfase na promoção de práticas que privilegiem a diversidade de estratégias de cálculo mental e a sua aplicação na resolução de problemas (NCTM, 2007). Em estudos anteriores a 2000, verificava-se que, apesar de em alguns países os programas introduzirem precocemente os algoritmos na resolução de situações de cálculo de adição e subtração, alguns alunos utilizavam estratégias de cálculo mental na sua resolução de problemas de palavras (Blöte, Klein & Beishuizen, 2000).

Este estudo incide no trabalho desenvolvido com os meus alunos, no contexto de uma experiência de ensino, ao longo dos seus dois primeiros anos de escolaridade, onde procurei aplicar as ideias fundamentais anteriormente desenvolvidas. Assim, pretendo analisar de que forma os alunos do segundo ano de escolaridade utilizam o cálculo mental na resolução de problemas de adição e de subtração com números naturais.

Em particular, é meu objetivo compreender que tipo de estratégias de cálculo mental são usadas por alunos do 2.º ano de escolaridade na resolução de problemas de adição e subtração com números naturais. A partir do objetivo enunciado delineei as seguintes questões:

- Quais as estratégias a que os alunos recorrem?
- Que mudanças são evidenciadas nas estratégias utilizadas pelos alunos no final da experiência de ensino?
- Que dificuldades os alunos evidenciam?
- De que forma o contexto das tarefas influencia a seleção de estratégias por parte dos alunos?

1.2. Pertinência do Estudo

A pertinência deste estudo prende-se com dois aspetos principais: (i) incidir sobre um tema central na formação matemática dos alunos e (ii) seguir perspetivas curriculares recentes[1].

Relativamente ao primeiro aspeto, o cálculo mental é uma competência matemática básica, não sendo específica para um determinado tipo de números ou de operações (Buys, 2001). A utilização do cálculo mental é algo que faz parte do quotidiano, associado à estimativa, em situações que envolvem dinheiro, tempo, massa ou distâncias (Blöte et al., 2000); ME, 2007), sendo considerado o suporte do desenvolvimento da numeracia (Heirdsfield, A., Dole, S. & Beswick, K., 2007). Blöte et al. (2000) destacam a importância do cálculo mental na compreensão da matemática, uma vez que está associado ao desenvolvimento do sentido de número e à flexibilidade no uso das operações. O desenvolvimento do cálculo mental permite, igualmente, melhorar as competências na resolução de problemas (Thompson, 2009).

São vários os estudos nacionais e internacionais que referem que o cálculo mental está bastante ligado ao desenvolvimento do sentido de número (Thompson 2009;

[1] Em junho de 2013 foi homologado um novo programa para a disciplina de Matemática (MEC, 2013), em Portugal. Este Programa (MEC, 2013) apresenta uma abordagem bastante diferente do tópico *Números e Operações* comparativamente com o Programa de 2007. O estudo que desenvolvi foi baseado no Programa de 2007, tendo decorrido durante a sua vigência, pelo que as novas orientações curriculares não foram analisadas.

Ferreira, 2012), definido por (McIntosh, Reys & Reys, 1992) como um conhecimento geral dos números e das operações e que é operacionalizado de forma flexível. O desenvolvimento do sentido de número assume um papel central no ensino da Matemática nos primeiros anos de escolaridade. O NCTM (2007) (*Princípios e Normas para a Matemática Escolar)* estabelece como objetivos centrais a compreensão dos números e suas relações, associada à compreensão dos significados das operações, estabelecendo relações entre estas e a capacidade de calcular com destreza.

Em Portugal surgiu, em 2005, o projeto "Desenvolvendo o sentido de número: Perspetivas e exigências curriculares" (DSN) com o objetivo de compreender o conhecimento sobre o modo como as crianças desenvolvem o seu sentido de número, tendo sido construídas, experimentadas e avaliadas várias tarefas para crianças dos primeiros anos de escolaridade (Serrazina & Ferreira, 2005; Brocardo & Serrazina, 2008). Este projeto produziu diversos materiais de apoio ao professor com vista ao desenvolvimento da competência de cálculo e do sentido de número nos alunos.

O conhecimento flexível dos números e das suas relações é visível no desenvolvimento de estratégias de cálculo eficientes e úteis para o quotidiano dos cidadãos. Buys (2001) afirma que o cálculo mental "é uma forma de lidar com os números e com as suas relações de forma flexível" e implica: (i) trabalhar com números e não com dígitos, (ii) permite o uso de propriedades e as relações entre os números e (iii) embora se calcule mentalmente, é possível recorrer a registos em papel..

Quanto às perspetivas curriculares, este estudo segue a linha do que é recomendado no *Programa de Matemática do Ensino Básico* de 2007 (ME, 2007) e que rompe com várias orientações curriculares anteriores.

De facto, os anos 40 e 50, do século XX, são marcados pela memorização e mecanização (Ponte 2005) e só a partir dos anos 70 é que se começa a sentir a influência de Piaget e da *Matemática Moderna* nos programas oficiais (Brocardo, Serrazina & Rocha, 2008). Vinte anos mais tarde, o programa do primeiro ciclo do ensino básico de 1990 (DGEBS, 1990) colocava a resolução de problemas no centro de toda a atividade matemática de sala de aula. No entanto, o bloco *Números e Operações* continuava centrado no conhecimento de factos e na aquisição de técnicas rotineiras (Brocardo et al., 2008).

O Programa de Matemática (ME, 2007) refere que o cálculo mental tem de ser desenvolvido desde o início do primeiro ciclo, "existindo múltiplas situações do dia a dia da sala de aula que permitem trabalhá-lo" (p.10). No mesmo documento é explícito que "quanto maior for o desenvolvimento das estratégias de cálculo mental mais à-vontade se sentirá o aluno no uso de estratégias de cálculo mais convencionais" (p.10). No entanto, o documento não detalha quais as estratégias que devem ser trabalhadas ao longo dos dois primeiros anos de escolaridade, referindo que deverão ser desenvolvidas "diferentes estratégias de cálculo baseadas na composição e decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre os números e as operações" (p.14).

Nos dois primeiros anos de escolaridade, o desenvolvimento da compreensão dos números e das operações está diretamente relacionado com a resolução de problemas de adição e de subtração, já que é resolvendo problemas que se aprende Matemática (Ponte & Serrazina, 2000).

1.3. Organização do estudo

Este estudo está organizado em seis capítulos. O primeiro corresponde à introdução, onde expresso as minhas motivações para a sua realização, apresento o problema, o objetivo e as questões orientadoras. Neste capítulo também fundamento a pertinência do estudo.

No segundo capítulo, abordo os temas centrais deste estudo – sentido de número, cálculo mental e resolução de problemas, refletindo ainda acerca do ambiente de aprendizagem.

No terceiro capítulo, descrevo as opções metodológicas e os participantes do estudo, assim como os instrumentos utilizados na recolha de dados e a forma como foi realizada a sua análise.

O quarto capítulo corresponde à experiência de ensino, onde apresento os seus princípios gerais, a sua planificação e as tarefas que a compõem.

No quinto capítulo, realizo a análise dos resultados obtidos decorrentes da resolução das tarefas que compõem a experiência de ensino, o teste diagnóstico e o teste final, por parte dos alunos participantes no estudo.

No último capítulo, apresento as conclusões do estudo, tendo em conta as questões formuladas e reflito acerca das suas limitações e recomendações.

Capítulo 2

REVISÃO DA LITERATURA

É objetivo deste capítulo rever as perspetivas apresentadas por diversos autores e currículos escolares acerca dos temas centrais deste estudo. O que é o cálculo mental, como se desenvolve, que estratégias engloba e que ligação tem com o sentido de número, foram questões que justificaram uma reflexão.

A resolução de problemas como contexto privilegiado para o desenvolvimento do cálculo mental e para aplicação do conhecimento que os alunos possuem acerca dos números e das operações, componentes do sentido de número, também está incluída neste capítulo.

No final, reflito acerca dos aspetos essenciais que devem constituir um ambiente de aprendizagem que potencie o desenvolvimento da aprendizagem numérica dos alunos.

2.1. O sentido de número

O sentido de número e o cálculo mental são conceitos que parecem estar associados numa relação de influência mútua. A importância do cálculo mental para o desenvolvimento do sentido de número é referida por vários autores como Sowder (1992) e Buys (2001), o mesmo se passa em sentido inverso com o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), por exemplo, ao mencionar que o cálculo mental "implica um bom desenvolvimento do sentido de número" (p.10).

Atualmente, vivemos na idade da tecnologia, termo utilizado pelo NCTM (2007) para definir a generalização da utilização de novas ferramentas que implicam trabalhar com números nos mais variados contextos. O documento refere que o nível de sentido de número necessário para a sociedade, em geral, e para os alunos, em concreto, é superior do que há uma geração atrás.

Importa, por isso, caracterizar o que é o sentido de número e de que forma se manifesta na aprendizagem matemática nos primeiros anos.

2.1.1. Caracterização de sentido de número

A caracterização de sentido de número tem sido realizada por vários autores, sobretudo, a partir da década de noventa do século XX. Para McIntosh et al. (1992) o sentido de número está relacionado com uma "compreensão pessoal geral sobre o número e as operações, bem como à capacidade para usar esta compreensão de forma flexível" (p.3). Esta flexibilidade que o sentido de número implica manifesta-se no cálculo mental, na avaliação da grandeza dos números e no julgamento da razoabilidade dos resultados (Markovits & Sowder, 1994). Sowder (1992) apresenta o conceito de sentido de número como uma intuição quantitativa e define-o como uma rede conceptual que permite a relação entre números, operações e suas propriedades, permitindo também a resolução de problemas de modo flexível e criativo. Esta componente intuitiva também é mencionada por autores como Verschaffel, Greer e De Corte (2007).

Em Portugal, o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) refere que ter sentido de número é entendido como a

> "capacidade para decompor números, usar como referência números particulares, tais como 5,10,100 ou 1/2, usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas, estimar, compreender que os números podem assumir vários significados (designação, quantidade, localização, ordenação e medida) e reconhecer a grandeza relativa e absoluta de números" (p.13).

McIntosh et al. (1992) propõem um modelo para a análise das diferentes componentes que constituem o sentido de número considerando três blocos: (i) conhecimento e destreza com números; (ii) conhecimento e destreza com as operações e (iii) aplicação do conhecimento e destreza com os números e operações em situações de cálculo.

A figura 2.1. ilustra as relações entre as várias componentes do sentido de número propostas por McIntosh, et al. (1992). É notória a interdependência das várias componentes no modelo proposto pelos autores.

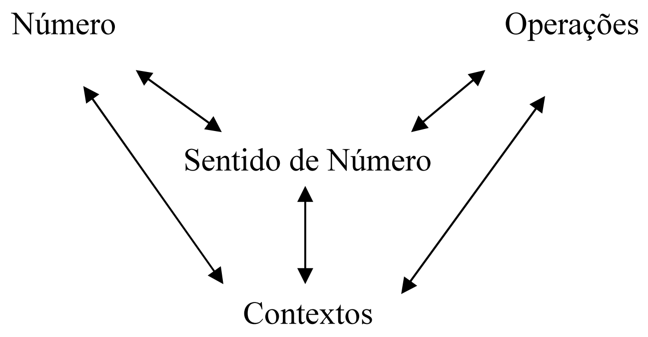


Figura 2.1 – Relações entre as principais componentes do sentido de número
(McIntosh, et al., 1992, p.5)

No bloco *conhecimento e destreza com números,* inclui-se:

a) O sentido de regularidade dos números, por exemplo, quando um aluno aprende a contar a partir de 20 começa a perceber, tanto oralmente como por escrito, os padrões inerentes ao sistema de numeração. Uma vez identificados, estes padrões proporcionam um suporte importante para que o processo e a sequência de contagem continuem e se generalizem.

b) As múltiplas representações dos números, que salienta que os alunos devem reconhecer que os números surgem em diferentes contextos e sob a forma de diferentes representações gráficas e simbólicas. Por exemplo, 2 + 2+ 2+ é o mesmo que ter 3 x 2, ou então que para pagarmos um despesa de 1€ podemos utilizar duas moedas de cinquenta cêntimos, ou cinco de vinte cêntimos, entre outras combinações.

c) O sentido de grandeza relativa e absoluta dos números permite que o aluno reconheça o valor relativo de um número em relação a outro número. Por exemplo, um aluno do primeiro ano de escolaridade pode comparar a sua idade com a dos pais, como os pais são mais velhos o número de anos de idade será de maior grandeza do que o do aluno, generalizando esta ordem de grandeza para outros contextos.

d) O sistema de referências permite usar referências mentais construídas pelos alunos. Por exemplo, a soma de dois números com um dígito é sempre inferior a vinte e que a soma de dois números com dois dígitos é inferior a 200, que 98 está muito perto de 100.

No bloco *conhecimento e destreza com as operações,* inclui-se:

a) A compreensão dos efeitos de uma operação, por exemplo, um aluno do 2.º ano de escolaridade antevê que a soma de dois números naturais dará sempre um resultado superior a qualquer um deles, exceto quando uma das parcelas é o zero, o mesmo se verifica para a subtração, em que o resultado será inferior ao aditivo, exceto se o subtrativo for zero.

b) Na compreensão das propriedades das operações e as suas relações, a propriedade comutativa e associativa, pode tornar mais evidente o sentido de número e, muitas vezes, os alunos, intuitivamente, aplicam as propriedades aritméticas nas estratégias que criam para calcular. Por exemplo, 3 x 12 é o mesmo que 3 x 10 mais 3 x 2. A compreensão das relações entre as operações permite diversificar as opções na resolução de problemas, especialmente a relação inversa entre operações.

O bloco *aplicação do conhecimento e destreza com os números e as operações em situações de cálculo,* engloba:

a) A compreensão para relacionar o contexto do problema e os cálculos necessários, ou seja, é a partir do contexto que o aluno toma decisões relativamente à operação a utilizar, tendo também em conta os números envolvidos.

b) A consciencialização da existência de múltiplas estratégias e a apetência para usar representações eficientes implica o reconhecimento de que existem diferentes estratégias de resolução para um determinado problema e que umas serão mais eficientes do que outras.

c) A sensibilidade para rever os dados e o resultado possibilita que o aluno reflita acerca do resultado obtido e a razoabilidade da resposta tendo em conta o contexto e os dados do problema.

O modelo descrito por McIntosh et al. (1992) revela, por um lado, a complexidade de que se reveste a caracterização de sentido de número, por outro, a sua abrangência tendo em conta a diversidade de componentes que integra. Uma das principais evidências que podem ser retiradas deste modelo é que o processo de desenvolvimento do sentido de número não é imediato e requer experiência por parte dos alunos.

Algumas das componentes do sentido de número descritas por estes autores também podem ser encontradas num estudo desenvolvido por Markovits e Sowder (1994): (i) uso de múltiplas representações dos números; (ii) reconhecer a grandeza relativa e absoluta dos números; (iii) selecionar e usar números de referência; (iv) decompor e recompor números; (v) compreender o efeito das operações sobre os números; e (vi) desempenho apropriado e flexível do cálculo mental e estimação.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) consideram que os alunos com sentido de número denotam o desenvolvimento de significados para os números e para as relações numéricas, reconhecem a sua grandeza relativa e os efeitos das operações sobre os números, apresentando também referências para as quantidades e para as medidas, o que lhes permite interpretar e verificar a razoabilidade dos resultados.

Mais recentemente, Ferreira (2012), num estudo realizado com alunos do 2.º ano com o objetivo de compreender como é que os alunos desenvolvem o sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração com números inteiros positivos, identifica quatro componentes essenciais na análise do que é ter sentido de número: (i) compreender o significado dos números e operações; (ii) ser capaz de usar múltiplas formas de representação de números e operações; (iii) reconhecer a grandeza relativa dos números e (iv) reconhecer a razoabilidade dos resultados calculados.

2.1.2. O desenvolvimento do sentido de número

A aquisição do sentido número, até pelas inúmeras componentes que o caracterizam, é um processo evolutivo e gradual (McIntosh et al., 1992). Esta perspetiva de continuidade é partilhada por Sowder (1992) que defende que o sentido de número deve ser transversal a todo o currículo nos primeiros anos, em vez de ser desenvolvido em "aulas especiais planeadas para ensinar o sentido de número" (p.386).

Documentos orientadores como o NCTM (2007) colocam o desenvolvimento do sentido de número e a destreza no cálculo aritmético no centro da educação matemática para os primeiros anos do ensino básico, no bloco destinado aos *Números e Operações*. Assim, do pré-escolar até ao décimo segundo ano são definidos três objetivos: (i) compreender os números, formas de representação dos números e relações entre números e sistemas numéricos; (ii) compreender o significado das operações e o modo como se relacionam entre si e (iii) calcular com destreza e fazer estimativas plausíveis.

Em Portugal, *o Programa de Matemática para o Ensino Básico* (ME, 2007) partilha a visão do NCTM (2007) e coloca o sentido de número como um dos três princípios fundamentais a ser desenvolvido no tópico *Números e Operações* ao longo dos três ciclos do ensino básico, juntamente com a compreensão dos números e operações e o desenvolvimento da fluência do cálculo. *Nas Opções Metodológicas Gerais*, o documento menciona que o "desenvolvimento do cálculo mental está intimamente ligado ao desenvolvimento do sentido de número" (p.10) realçando que existem múltiplas situações no dia a dia da sala de aula em que permitem trabalhá-lo, partilhando a ideia de continuidade de autores como (McIntosh et al., 1992; Sowder, 1992). As situações que marcam o quotidiano dos alunos devem ser o ponto de partida, sendo-lhes proporcionadas experiências de contagem. A exploração de processos de contagem utilizados pelos alunos contribui para a compreensão das primeiras relações numéricas que são estruturantes na compreensão das operações e "pilares para o desenvolvimento do sentido de número nos seus múltiplos aspetos" (p.13).

Esta perspetiva do programa (ME, 2007) quebra uma rotura com o documento que o antecedeu (DGEBS, 1990). Brocardo e Serrazina (2008) afirmam que o programa de 1990 (DGEBS, 1990) continuava a ser um currículo muito centrado em conhecimento de factos e na aquisição de técnicas rotineiras, embora tivesse a resolução de problemas no centro da aprendizagem matemática.

O projeto *Desenvolvendo o sentido do número: Perspetivas e exigências curriculares* (Brocardo et al., 2008), desenvolvido de 2005 a 2008, articulou o desenvolvimento curricular com a investigação, tendo sido criadas, experimentadas, discutidas e avaliadas tarefas que promovessem o desenvolvimento do sentido de número.

2.2. O Cálculo Mental

Historicamente, o cálculo mental nem sempre foi valorizado, surgindo associado à memorização das tábuas de adição, subtração, multiplicação e divisão (Buys, 2001). Atualmente, a necessidade de analisar criticamente dados e de tomar decisões rápidas tem acentuado a sua importância (Brocardo et al., 2008).

As primeiras referências ao cálculo mental surgem através do matemático holandês Versluys no fim do século XIX, que acreditava ser possível trabalhar de uma forma mais flexível com as operações (Buys, 2001). Esta perspetiva acabou por não ter continuidade devido à importância dada aos algoritmos durante grande parte do século XX, até ao surgimento, na Holanda, da *Matemática Realista,* nos anos 80 e 90. A valorização do cálculo mental surge associada à ideia de que os alunos têm de ter liberdade para seguir as suas estratégias preferidas e utilizar as suas próprias referências.

Em Inglaterra, o relatório Cockcroft, de 1982, apontava a ausência do cálculo mental nos currículos como um dos motivos para os fracos resultados dos alunos ingleses em testes internacionais ao nível dos números e das operações (Murphy, 2004). O projeto *The National Numeracy Strategy* foi determinante para dar mais ênfase ao cálculo mental no currículo das escolas inglesas na década de 90.

No nosso país, o cálculo mental surgiu de uma forma explícita nos objetivos gerais do programa do 1.º ciclo de 1990 (DGEBS, 1990). Contudo, é no programa de Matemática de 2007 (ME, 2007) que se dá relevo ao cálculo mental logo a partir do 1.º ano de escolaridade.

2.2.1. O que é o cálculo mental

Cálculo mental será fazer contas de cabeça? Será que podemos usar um lápis? As duas questões são colocadas por Buys (2001) e sintetizam uma visão do cálculo mental que perdurou durante vários anos. Em resposta às duas questões, o autor refere que o cálculo mental é saber "movimentar-se de forma rápida e flexível pelo mundo dos números" (p.122), lidando com eles e com as suas relações de forma flexível. Para Sowder (1992) o cálculo mental "é um processo de efetuar cálculos aritméticos sem a ajuda de dispositivos externos" (p. 182). Para a autora, o cálculo mental é considerado como pensar *com a cabeça* em vez de pensar *dentro da cabeça*. Buys (2001) apresenta uma definição mais abrangente onde inclui a possibilidade de registos intermédios e refere que o cálculo mental (i) implica trabalhar com números e não com dígitos uma vez que os números são vistos como um todo; (ii) permite o uso de propriedades e das relações entre os números, como a propriedade comutativa, distributiva, relações inversas e os factos básicos e (iii) embora se calcule mentalmente, é possível recorrer a registos em papel. Neste estudo, seguirei a definição de cálculo mental apresentada por Buys (2001).

A pertinência do cálculo mental nos currículos de Matemática é realçada por Heirdsfield e Cooper (2002) já que (i) permite aos alunos aprender como os números se relacionam e tomar decisões acerca das estratégias que deve selecionar; (ii) o cálculo mental promove uma maior compreensão da estrutura dos números e das suas propriedades; (iii) o cálculo mental pode ser usado para desenvolver o pensamento, fazer conjeturas e generalizar com base na sua compreensão conceptual.

Estas perspetivas possibilitam que os alunos tenham liberdade para seguir as suas próprias estratégias e desenvolver as suas referências relativamente aos números, visão que é partilhada pelo programa de Matemática de 2007 (ME, 2007): (i) trabalhar com números e não com algarismos; (ii) usar as propriedades das operações e as relações entre os números; (iii) implicar um bom desenvolvimento do sentido de número e um saudável conhecimento dos factos numéricos elementares e (iv) permitir o uso de registos intermédios de acordo com a situação (p.10). De acordo com o documento, esta abordagem tem de começar no primeiro ciclo do ensino básico e está muito ligada ao desenvolvimento do sentido de número.

Buys (2001) considera que o cálculo mental evolui através de três formas básicas, analisadas do ponto de vista dos processos de aprendizagem em que a sua aquisição é acompanhada pelo aumento da compreensão dos números e das operações:

a) Cálculo mental através de uma estratégia do cálculo em reta, em que os números são vistos como objetos numa reta numérica e em que as operações são movimentos ao longo da reta;
b) Cálculo mental através de uma estratégia de decomposição em que os números são vistos como objetos de uma estrutura decimal e as operações são executadas a partir das decomposições decimais dos números;
c) Cálculo mental usando estratégias variadas, em que os números são vistos como objetos que podem ser estruturados de diferentes formas e em que as operações são efetuadas a partir da escolha de uma estrutura adequada e usando as propriedades aritméticas.

2.2.2. Os níveis de progressão no cálculo

Nos primeiros anos de escolaridade, uma boa parte do trabalho com os números tem com o objetivo ajudar os alunos a tornarem-se eficientes em situações de cálculo que envolvam a adição e a subtração (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001).

Este estudo insere-se numa perspetiva de desenvolvimento do cálculo nos dois primeiros anos de escolaridade sem recurso aos algoritmos, que tem sido defendida por autores como (Blöte et al., 2000; Murphy, 2004; Brocardo et al., 2008) e pelo programa de Matemática (ME, 2007), no qual os algoritmos são introduzidos apenas a partir do terceiro no de escolaridade.

Fosnot e Dolk (2001) referem que os alunos aprendem a calcular evoluindo ao longo de três níveis: (i) o cálculo por *contagem,* apoiado em materiais que permitem a contagem; (ii) o cálculo por *estruturação*, sem recorrer à contagem e com apoio de modelos adequados e (iii) o cálculo *formal*, com a utilização dos números como objetos mentais para atingir competências de cálculo inteligentes e flexíveis, sem a necessidade de recorrer a materiais estruturados.

Nas estratégias de cálculo com apenas um dígito (Fuson, 1992; Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter & Fennema, 1997) descrevem três níveis de desenvolvimento relacionados com os métodos que os alunos utilizam na adição e na subtração:

a) *Nível 1:* na adição, os alunos contam todos os objetos físicos de cada parcela a adicionar chegando ao total. Na subtração contam os objetos a retirar e depois de separados contam os objetos que ficaram para chegar ao resultado.
b) *Nível 2:* na adição os alunos abreviam o cálculo contando apenas a partir da primeira parcela. Na subtração já denotam uma maior flexibilidade já que tanto retiram a quantidade pretendida ao total (previamente conhecido) contando os objetos que sobram, como contam do total para uma parcela retirando os objetos que sobram ou contam de uma parcela para o total.
c) *Nível 3:* neste nível, os alunos já criaram estruturas que lhes permitem construir representações mentais dos números. As estratégias associadas ao terceiro nível são identificadas por factos conhecidos e factos derivados. A utilização de dobros ilustra este nível. Para calcular 6+8, os alunos poderão fazer 6+6+2. De acordo com os autores a utilização de factos conhecidos e factos derivados na subtração não é tão imediata como na adição.

Ao longo dos três níveis, os alunos vão memorizando vários factos, como os dobros, que depois vão aplicando.

Esta perspetiva de progressão na contagem também é partilhada por Kilpatrick et al. (2001). Para as adições, os autores identificam três níveis: (i) *contar todos*, em que são contados todos os elementos de cada parcela; (ii) *contar a partir de* em que a adição é feita por contagem a partir do número de maior valor e (iii) *estratégias de pensamento* nas quais o número 10 é uma referência, assim como os dobros. Na subtração também são descritos três níveis: *retirar* em que ao total se retira determinado número de elementos por contagem; (ii) *contar até*, em que para realizar a subtração 8-5, se inicia a contagem em 5 até chegar a 8 e *contar para trás* em que, para o mesmo exemplo, a contagem tem início no 8 e *conta-se* para trás retirando 5 e (iii) *estratégias de pensamento*, nas quais o número 10 continua a ser uma referência, tal como na adição, assim como os dobros. Os autores realçam ser bastante importante que o professor promova experiências em que a relação entre a adição e a subtração seja significativa para os alunos, recomendação que terei presente na planificação e no decurso da experiência de ensino no âmbito deste estudo.

Tabela 2.1. – Progressão dos níveis de cálculo com números com um dígito

Perspetivas da evolução do nível de cálculo dos alunos		
Fosnot e Dolk (2001)	**Fuson (1992); Fuson et al. (1997)**	**Kilpatrick et al. (2001).**
Cálculo por *contagem*	**Adição** Contar *todos* **Sutracção** *Retirar a*	**Adição** Contar *todos* ***Subtração*** *Retirar*
Cálculo por *estruturação*	**Adição** Contagem *a partir de* **Subtração** *Retirar a* Contar *para a frente* Contar *para trás para*	**Adição** Contar *a partir de* **Subtração** *Contar até* *Contar para trás*
Cálculo *formal*	**Adição e subtração** *Factos conhecidos e factos derivados*	***Adição e Subtração*** *Estratégias de pensamento*

Nas estratégias de cálculo com números com vários dígitos, autores como (Fuson, 1992; Fuson et al, 1997) referem que o trabalho realizado com os números com um só dígito é a base para se avançar para números com vários dígitos. Neste processo é natural que surjam dificuldades já que os números são mais complexos e de difícil compreensão para os alunos (Buys, 2001).

Estudos de autores como (Beishuizen, 1997b; Beishuizen et al., 1997; Fuson, 1992; Fuson et al., 1997; Buys, 2001; Heirdsfield & Cooper, 2004, Morais, 2011) revelam que os alunos aplicam maioritariamente duas estratégias para resolver problemas de adição e subtração com números com vários dígitos, estratégia dos saltos *(jump)* e decomposição (*split*) e estratégias mistas, construídas a partir das anteriores. Uma dessas adaptações é a compensação que se inclui na categoria dos saltos (Blöte et al. (2000; Murphy, 2004) embora seja considerada por Murphy (2004) uma estratégia "sofisticada" (p.5) por implicar a adição de um número múltiplo de dez a outro número e realizar a compensação necessária (25 + 19 = 25 + 20 = 45-1 = 44).

O modelo da linha numérica é valorizado por Buys (2001) já que permite auxiliar os alunos a posicionar números com vários dígitos. O autor refere que, numa fase inicial, os alunos utilizam os saltos porque englobam estratégias que são compatíveis com o uso da linha numérica. Quando os alunos se sentem confiantes para adicionar e subtrair sem recurso à linha numérica, o método dos saltos, em que se adiciona ou subtrai uma quantidade a partir de um determinado número, é complementado com a decomposição, na qual se decompõem os dois números. Buys (2001) refere que no 3.º ano de escolaridade (sete / oito anos de idade) os alunos estão aptos a realizar qualquer cálculo com números até 100 com notações intermédias, enquanto no quarto ano este processo será marcadamente mental. É natural que as crianças mesmo num nível mais elevado utilizem estratégias de saltos, por vezes, porque se sentem mais confiantes, sobretudo na subtração com transporte que causa dificuldades aos alunos no momento de subtrair as unidades (53-45= 50-40; 3-5).

2.2.3. Estratégias de cálculo mental

A utilização dos termos *estratégia* e *procedimento* não tem sido consensual entre os diversos investigadores. Autores como Beishuizen et al. (1997); Blöte et al. (2000) e Ferreira (2012) diferenciam-nos associando as estratégias à escolha das opções relacionadas com a estrutura do problema e os procedimentos com a forma como os alunos como executam os cálculos. Nesta perspetiva, os procedimentos dependem dos números envolvidos no problema. Para outros autores os dois conceitos assumem o mesmo significado. (Fuson, 1992; Buys, 2001; Murphy 2004; Morais, 2011) utilizam o termo *estratégia* nos seus estudos para categorizar as opções seguidas pelos alunos na resolução de cálculos com e sem contexto. Neste estudo utilizo o termo *estratégia* com o mesmo significado destes quatro autores.

Centrando a análise nas investigações de autores como (Fuson, 1992, Beishuizen, 1997; Beishuizen et al., 1997; Fuson et al., 1997; Blöte et al., 2000; Buys, 2001; Heirdsfield & Cooper, 2004; Murphy, 2004; Morais, 2011) são descritas duas categorias de estratégias de cálculo mental na resolução de problemas de adição e de subtração com números com dois ou mais dígitos: (i) os saltos e (ii) a decomposição.

A tabela 2.2 apresenta as duas categorias de estratégias de cálculo mental identificadas a partir do quadro teórico de Beishuizen (1997). É com base nesta categorização que as resoluções dos alunos serão analisadas no âmbito deste estudo.

Tabela 2.2. Estratégias de cálculo mental para a adição e subtração
(Adaptado de Beishuizen, 1997, p.131).

<table>
<tr><th colspan="2">Adição: 45+39</th><th colspan="2">Subtração: 65-49</th></tr>
<tr><td>Saltos</td><td>N10: 45+30=75; 75+9=84

A10: 45+5=50; 50+34=84

N10C: 45+40=85; 85-1=84</td><td>Saltos</td><td>N10: 65-40=25; 25-9=16
A10: 65-5=60; 60-44=16
A10: 49+1=50; 50+10=60; 60+5=65 resposta 1+10+5=16 (através da adição)
N10C: 65-50=15;15+1=16

Short jump: 51-49=2, porque 49+2=51</td></tr>
<tr><td>Decomposição</td><td>1010: 40+30=70; 5+9=14; 70+14=84
10’s: 40+30=70; 70+5=75; 75+9=84</td><td>Decomposição</td><td>1010: 60-40=20; 5-9 (?)

10’s: 60-40=20; 20+5=25; 25-9=16</td></tr>
</table>

As estratégias com base nos saltos caracterizam-se por se manter o primeiro número do cálculo inalterado adicionando-lhe, ou subtraindo-lhe, um número múltiplo de dez, obtido a partir da decomposição do segundo número (Beishuizen, 1997; Blöte et al, 2000), por exemplo: 34 + 23 -> 34 + 20 -> 54 + 3 = 57. Esta estratégia é designada pelos autores com o acrónimo N10 (número+número de dezenas, na adição, ou número-número de dezenas, na subtração). Na categoria dos saltos surge uma estratégia alternativa, a A10 (*adding on*), na qual ao primeiro número é adicionada, ou subtraída, uma parte do segundo número de forma a atingir um número múltiplo de dez, sendo depois adicionada ou subtraída a outra parte, como no exemplo ilustrado na tabela 2.2 (45 + 39 -> 45 + 5 -> 50 + 34 = 84). Nesta categoria insere-se uma estratégia de um nível mais complexo (Blöte et al., 2000; Murphy, 2004), a compensação associada ao acrónimo N10C (número+número de dezenas com compensação ou número-número de dezenas com compensação). Ao primeiro número do cálculo é adicionado, ou subtraído, um número múltiplo de dez aproximado do segundo número do cálculo (45 + 39 -> 45 + 40 -> 85 – 1 = 84). De acordo com os dois autores esta estratégia é considerada de um nível mais complexo sobretudo na subtração devido à dificuldade que os alunos demonstram em saber se no último passo de cálculo têm de adicionar ou subtrair para compensar (65 – 49 -> 65 – 50 -> 15 + 1 = 16). O *short jump* surge associado à subtração quando aditivo e subtrativo estão muito próximos (51 – 49 = 2, porque 49 + 2 = 51).

Na categoria da decomposição os números são decompostos nas suas ordens, sendo estas adicionadas, ou subtraídas, separadamente, ou, em alternativa, os números depois de separados em ordens são adicionados sequencialmente (Beishuizen, 1997; Blöte et al, 2000). A primeira situação corresponde à estratégia 1010 (dezena+dezena ou dezena-dezena), descrita na tabela 2.2 (45 + 39 -> 40 + 30 = 70; 5 + 9 = 14; 70 + 14 = 84). A estratégia 10's (dezenas) é uma variante da 1010 (45 + 39 -> 40 + 30 -> 70 + 5 -> 75 -> 75 + 9 = 84).

Para Beishuizen (1997a; 1997b) a N10 e a 1010 poderão ser consideradas como as duas estratégias fundamentais no cálculo com números com vários dígitos. A autora refere que a N10 é uma estratégia eficiente na medida em que pode ser utilizada tanto na adição como na subtração, enquanto que para (Blöte et al., 2000), a 1010 poderá originar alguns erros na subtração (53 – 18 -> 50 – 10; 3-8). De acordo com os autores, a variante desta estratégia, 10's, pode minimizar os erros (53 – 18 -> 50 – 10 = 40; 40 + 3 = 43; 43-8 = 35).

A estratégia de cálculo 1010 é bastante valorizada nos Estados Unidos da América (Beishuizen 1997b; Fuson et al., 1997), talvez devido à valorização que o currículo dá ao uso de algoritmos (Beishuizen 1997b) já que a decomposição apresenta algumas semelhanças na medida em que considera as dezenas e as unidades separadamente (Blöte et al., 2000).

A estratégia N10 é valorizada pelos manuais escolares de países como a Holanda e a Alemanha (Beishuizen, 1997b), sendo considerada como "o verdadeiro método de cálculo mental" (p.20) por implicar menos passos de cálculo. Nesta perspetiva, Buys (2001) refere que o cálculo com os números até 100 deve ser iniciado com a estratégia N10.

Num estudo com base numa trajetória de aprendizagem com alunos do segundo ano de escolaridade Buys, (2001) refere que, inicialmente, os cálculos com números até 100 foram realizados tendo como referência o número 10 e os saltos de 10 em 10. Com base nestas estratégias foi introduzida a N10, tendo como suporte o modelo da linha numérica vazia. O autor considera que este modelo ajuda os alunos a posicionar os números e a dar os saltos necessários para realizar um determinado cálculo. Beishuizen (1997b) também considera que a linha numérica vazia favorece o desenvolvimento dos saltos de 10 em 10, a partir de um determinado número, o que nem sempre é fácil para os alunos, sobretudo quando esse número não é múltiplo de dez. No estudo descrito por Buys (2001) é referido que os alunos adquiriram conhecimento acerca da estrutura decimal dos números a partir do momento em que ganharam confiança na utilização dos saltos. Nesta fase, foi introduzida a estratégia 1010 que já não é compatível com a utilização da linha numérica. Na última fase da trajetória de aprendizagem são introduzidas estratégias diversas, a que o autor apelida de *varying.* A utilização da compensação, de estratégias mistas, com base também nos factos básicos, como os dobros, caracteriza esta fase. No final do estudo, Buys (2001) refere que os alunos se tornaram mais competentes e flexíveis nos cálculos até 100 tendo alargado, ainda que de forma desigual, o seu reportório de estratégias de cálculo mental.

Num estudo realizado por Beishuizen et al. (1997) com alunos do 3.º ano de escolaridade, estes autores referem que os alunos apresentaram uma distribuição equitativa no uso dos saltos e da decomposição, com cerca de metade dos alunos a utilizar a N10 e a outra metade a 1010, verificando-se que apenas uma minoria aplica, de modo flexível, as duas estratégias: a 1010 na adição e a N10 na subtração. Os autores referem que os alunos com mais dificuldades tendem a recorrer à estratégia 1010, enquanto os alunos mais competentes preferem a N10. Uma das causas apontadas é que os alunos mais fracos denotam dificuldades nos saltos de 10 em 10, o que se reflete na utilização da N10.

Tendo como base um estudo realizado na Holanda, com o objetivo de identificar a flexibilidade de estratégias utilizadas no cálculo mental de sessenta alunos do segundo ano de escolaridade, tendo como referência as estratégias de cálculo apresentadas na tabela 2.2 (Beishuizen, 1997). Blöte et al. (2000) evidenciaram que a estratégia N10 mereceu a preferência dos alunos, enquanto a A10, também da categoria dos saltos foi a menos usada. A N10 demonstrou ser eficiente para quase todos os tipos de problemas, daí ser sido bastante utilizada. O *short jump* também foi visível na resolução de expressões numéricas e em problemas com números específicos, como 71 – 69 ou 81 – 79. O uso da estratégia 1010 foi visível nos problemas de adição, já que os alunos parecem ter evitado a sua utilização na subtração. Os autores referem existir algumas evidências de que os resultados com o recurso à estratégia 1010 foram superiores.

Outra evidência do estudo foi que os alunos foram mais flexíveis na escolha de estratégias quando resolviam problemas de contexto do que quando resolviam cálculos sem contexto. A flexibilidade no uso de estratégias também se terá devido às características dos números envolvidos. Esta flexibilidade levou-os a inventar novas estratégias na resolução de diferentes tarefas. Esta evidência realça a importância de os alunos desenvolverem as suas próprias estratégias de cálculo, em vez de seguirem as que lhes foram explicitamente ensinadas.

Em Portugal, Morais (2011) realizou um estudo com o objetivo de compreender como é que os alunos do primeiro ano de escolaridade desenvolvem estratégias de cálculo mental. Neste estudo foram resolvidas três cadeias de problemas, ao longo do ano letivo, englobando os diferentes significados das operações de adição e subtração. A autora concluiu que as estratégias de cálculo mental usadas pelos alunos evoluíram de um nível de contagem e de utilização dos factos básicos para um nível mais complexo, com predominância das estratégias N10 e 1010, sem que estas lhes tenham sido formalmente ensinadas. A estratégia 1010 foi utilizada pelos alunos preferencialmente nos problemas de adição, enquanto na subtração as estratégias variaram de acordo com o significado presente em cada problema. Nos problemas de *retirar* foi utilizada a estratégia 1010 e nos de *comparar* e *completar* foram utilizadas estratégias aditivas do tipo A10, uma variedade da N10.

A tendência que os alunos evidenciaram para criar as suas próprias estratégias de cálculo nos estudos de Blöte et al. (2000) e de Morais (2011), também está presente numa investigação realizada por Murphy (2004) em Inglaterra com três alunos com idades compreendidas entre os oito e os nove anos de idade e que teve como objetivo verificar como é que estratégias explicitamente ensinadas na sala de aula eram posteriormente utilizadas.

A estratégia selecionada para este estudo foi a compensação (N10C), por ser pouco visível nas resoluções dos alunos quando não é ensinada explicitamente. A autora concluiu que, no final do estudo, os três alunos apresentaram resoluções com algumas características da compensação, embora combinada com outras estratégias. A utilização da compensação parece ter sido influenciada pelos conhecimentos prévios que os alunos tinham acerca de outras estratégias de cálculo, dos números e das suas relações. Murphy (2004) considera que as estratégias de cálculo são flexíveis e perecíveis até para quem as usa, sendo iminentemente um processo criativo na medida em que têm em conta os números envolvidos, "a experiencia diz-nos que os alunos são capazes de inventar as suas próprias estratégias de cálculo mental" (Murphy, 2004, p. 4). No entanto, neste estudo também é salientado que se as estratégias não forem ensinadas explicitamente existe o risco de alguns alunos não terem acesso a elas.

É ainda evidenciado que a utilização de estratégias de cálculo mental pelos alunos pode ser influenciada e moldada pelo discurso de sala de aula, no entanto também é influenciada pelo conhecimento prévio e experiencia do próprio aluno na utilização de factos básicos, relações dos números e das operações numéricas.

A importância do ambiente de sala de aula no desenvolvimento de estratégias inventadas ou informais também é salientada por autores como (Blöte et al., 2000; Fuson et al., 1997).

Fosnot e Dolk (2001) sugerem um espaço de aula curto, de dez a quinze minutos, a que chamam *minilessons,* para ajudar os alunos a desenvolverem o cálculo mental. As cadeias de cálculo são baseadas nos factos matemáticos básicos, nas relações entre os números, sendo bastante orientadas e explícitas. São desenvolvidas especificamente para realçar determinadas estratégias e para desenvolver o cálculo matemático mental eficiente. O efeito do treino de sala de aula é um dos fatores que segundo Blöte et al. (2000) influencia a escolha de uma estratégia.

Em Portugal, não existe uma sequência para a aprendizagem das diferentes estratégias de cálculo mental. No *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) é sublinhada a importância do trabalho de "diferentes estratégias de cálculo baseadas na composição e decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre números e entre as operações" (p. 14), contudo, não são explícitas quais as estratégias de cálculo mental a privilegiar nos primeiros anos. Ainda assim, o documento refere que o desenvolvimento de destrezas de cálculo numérico, mental e escrito, constitui um dos objetivos gerais de aprendizagem, que deverá ser promovido pela prática de rotinas de cálculo mental que podem ser apoiadas por registos escritos. Deste modo, os alunos deverão ser capazes de, progressivamente, "utilizar as suas estratégias de modo flexível, e de selecionar as mais eficazes para cada situação" (p. 14).

2.3. Resolução de problemas

A resolução de problemas é vista por diversos autores como o ponto de partida para a análise de novos conceitos e ideias matemáticas e o centro de toda a aprendizagem matemática (Schoenfeld, 1996; Ponte & Serrazina, 2000; Fosnot & Dolk, 2001). Ideia partilhada por documentos orientadores como NCTM (2007) e como o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007).

Numa perspetiva educacional, fazer Matemática está muito relacionado com a resolução de problemas, já que permite o contacto com ideias matemáticas significativas (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008). Para Schoenfeld (1996) é a partir da resolução de problemas que são observáveis comportamentos na sala de aula como: (i) modelar; (ii) comunicar; (iii) analisar; (iv) explorar; (v) conjeturar e (vi) provar, ou seja, atividades "com sentido matemático, que é aquilo que a Matemática realmente é" (p. 11). Para Boavida et al, (2008) a resolução de problemas proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação, fomenta o raciocínio e a justificação e permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos, apresentando a Matemática como uma disciplina "útil na vida quotidiana" (p.14).

Em Portugal, como já referi anteriormente, o Programa de 1990 (DGEBS, 1990) colocava a resolução de problemas no centro de toda a aprendizagem matemática sendo transversal a todos os blocos, contudo, não alterou significativamente a prática de sala de aula. O *Projeto Desenvolvendo o Sentido de Número* (Brocardo et al., 2008) que decorreu entre 2005 e 2008, e o *Programa de Matemática do Ensino Básico* de 2007 (ME, 2007) deram ênfase ao desenvolvimento de tarefas com contexto na sala de aula.

2.3.1. O que é um problema?

Os tipos de tarefas que os professores podem utilizar na sala de aula é diversificado. De acordo com os objetivos com que são planificadas, existem tarefas mais dirigidas è memória e ao treino, enquanto outras estão mais direcionadas para processos mais complexos de pensamento (Boavida et al., 2008). Ponte (2005) refere que as tarefas podem ser analisadas segundo duas dimensões principais: (i) o nível de estruturação e (ii) o desafio matemático que suscitam. A primeira dimensão está associada ao grau de explicitação das questões colocadas, o que conduz a tarefas fechadas e a tarefas abertas. A segunda dimensão está relacionada com conhecer-se, ou não, o processo de resolução. Articulando estas duas dimensões, o autor propõe quatro tipos essenciais de tarefas: (i) exercício, uma tarefa de caráter fechado e de desafio reduzido; (ii) o problema, também de caráter fechado mas de desafio elevado; a (iii) a exploração, que é aberta e de desafio reduzido; e (iv) a investigação que é uma tarefa aberta e de desafio elevado.

No âmbito deste estudo, a resolução de problemas assumiu um papel central, pelo que é neste tipo de tarefa que me irei centrar.

Para Boavida et al. (2008), um problema "é uma situação que não se pode resolver utilizando processos conhecidos e estandardizados; quando é necessário encontrar um caminho para chegar à solução e esta procura envolve a utilização de estratégias) (p. 15). Tal como as tarefas, os problemas também se dividem em vários tipos. Abrantes (1989) enumera vários tipos de problemas, de acordo com o objetivo que precede a sua resolução: (i) problemas de palavras; (ii) problemas para equacionar, (iii) problemas para demonstrar; (iv) problemas para descobrir; e (v) problemas da vida real. Já Boavida et al. (2008) consideram três categorias de problemas: problemas de cálculo, problemas de processo e problemas abertos.

Os problemas que foram utilizados neste estudo inserem-se naquilo que Abrantes (1989) define como problemas de palavras, já que "têm a vantagem de atribuir um significado concreto às operações matemáticas" (p.8), sendo por isso bastante utilizados no primeiro ciclo do ensino básico. Kilpatrick et al. (2001) mencionam que neste tipo de problemas "os alunos mais novos têm oportunidade para mostrar níveis mais avançados de contagem e construir um repertório de procedimentos mais eficientes para calcular" (p.183). Esta perspetiva também é partilhada por autores como Verschaffel et al. (2007) que consideram que os problemas de palavras foram pensados para tornar a aprendizagem em sala de aula mais agradável e motivante, "devendo ser utilizados nas fases iniciais de ensino e aprendizagem do cálculo com números inteiros de modo a promover uma compreensão mais abrangente destes conceitos" (p.582).

Relativamente à forma como podem ser resolvidos, Ponte e Serrazina (2000) referem que se deveu a Pólya, em 1975, a descrição das várias etapas deste processo. A primeira etapa passa por compreender o problema, ou seja, identificar o que é dado e o que é pedido, em seguida, na segunda etapa, é traçado um plano para a sua resolução, que pode implicar a recolha de dados. Na terceira etapa, executa-se o plano, que, em princípio levará à solução do problema e é nesta fase que surge a última etapa e que passa por refletir acerca do trabalho realizado e aferir a solução encontrada.

2.3.2. Problemas de adição e de subtração

Pelo que foi referido até este ponto, pode-se dizer que é consensual que os contextos assumem um papel relevante na aplicação do conhecimento com os números e as operações que os alunos vão desenvolvendo ao longo dos primeiros de escolaridade (Abrantes, 1989; McIntosh et al, 1992; NCTM, 2007; ME, 2007; Boavida et al., 2008). Nos dois primeiros anos de escolaridade, os problemas veiculam o desenvolvimento dos vários significados que as operações de adição de subtração podem assumir (Treffers & Buys, 2001).

A categorização dos significados das operações tem vindo a evoluir nos últimos anos. Fuson et al. (1992) distinguiam quatro situações diferentes: (i) *mudar juntando*; (ii) *mudar tirando de*; (iii) *comparar; e (iv) combinar*. Já Kilpatrick et al. (2001) também identificaram quatro significados: (i) *juntar*; (ii) *separar*; (iii) *relação parte-todo*; e (iv) *relações de comparação*.

Na Holanda, para Treffers e Buys (2001) a adição surge associada a situações de *juntar* e *acrescentar* e a subtração em situações de *retirar, diferença, comparar* e *completar*.

Em Portugal, Ponte e Serrazina (2000) identificaram cinco significados diferentes associados às operações de adição e de subtração. Na adição os autores identificaram duas situações distintas que designaram por *combinar* e *mudar juntando*. Na subtração categorizaram os significados *mudar retirando*, *comparação* e *tornar igual.* Esta classificação das situações em que surgem a adição e a subtração foi seguida pelo *Programa de Matemática para o Ensino Básico* (ME, 2007), embora as designações tenham algumas alterações. Para a adição o programa (ME, 2007) distingue duas situações: *combinar* e *acrescentar* e para a subtração *retirar*, *comparar* e *completar*.

Neste estudo é seguida a categorização indica pelo programa (ME, 2007), apresentada na tabela 2.3.

Tabela 2.3. Os significados das operações de adição e subtração
(ME, 2007)

Operação	**Significado**	**Exemplo**
Adição	*Combinar*	O João tem 15 berlindes e o Pedro 17. Quantos berlindes têm os dois juntos?
	Acrescentar	O João tem 15 berlindes, deram-lhe mais 7. Quantos berlindes tem ele agora?
Subtração	*Retirar*	O João tinha 12 berlindes, perdeu 5. Quantos berlindes tem o João?
	Comparar	O João tem 8 anos e o Pedro tem 5. Quantos anos tem o João a mais do que o Pedro?
	Completar	Os pais do Pedro já percorreram 180 km do percurso de 300 km de Lisboa até ao Porto. Quanto mais têm de percorrer?

A situação de *combinar* surge quando duas ou mais quantidades são transformadas numa quantidade simples. Na situação de *acrescentar*, uma quantidade é aumentada e a operação adição é utilizada para calcular o total. Na subtração, a situação *retirar* corresponde a retirar uma determinada quantidade a outra e a subtração é usada para calcular o resultado. Temos uma *comparação* quando pretendemos comparar duas quantidades. O que se pretende é encontrar a diferença, quanto maior ou quanto menor uma quantidade é que outra. A situação *completar* é usada para se determinar quanto se deve juntar a uma dada quantidade para obter um certo valor. Esta situação também é designada por inversa da adição (Ponte & Serrazina, 2000).

Durante os dois primeiros anos de escolaridade, os alunos devem resolver regularmente problemas envolvendo estes cinco significados para que possam compreender a relação existente entre a adição e a subtração (Fosnot & Dolk, 2001). Estes autores referem que o afeta os modelos e as estratégias usados pelos alunos. Esta ideia surge também evidenciada no estudo de Ferreira (2012), cujas conclusões mencionam que os alunos que optaram pela adição inversa nos problemas de subtração apresentaram estratégias mais eficientes.

É através da resolução de problemas que os alunos adquirem confiança na interpretação dos problemas e na sua consequente resolução, desenvolvendo estratégias de resolução inicialmente informais, mas que evoluem para estratégias cada vez mais flexíveis e formais, a par do desenvolvimento do seu conhecimento matemático (ME, 2007).

2.4. Ambiente de aprendizagem

O ambiente de sala de aula, assente em práticas que promovam a argumentação matemática, foi várias vezes referido nesta revisão de literatura como um dos fatores de sucesso para que os alunos se apropriem de uma forma ativa dos conceitos matemáticos. Stein (2001) considera que o ambiente de sala de aula deve permitir que os alunos construam e avaliem o seu próprio conhecimento, assim como os argumentos dos colegas. Ponte e Serrazina (2000) entendem que o ambiente de sala de aula é fortemente marcado por aquilo que é permitido e por aquilo que é esperado tanto do professor, como da parte do aluno, num equilíbrio entre a negociação de significados, do tipo de comunicação, do modo de trabalho dos alunos e do tipo de tarefas propostas.

Para Boavida (2005) a construção de uma cultura de sala de aula está relacionada com o "trabalho de ensinar como aprender a partir do tipo de ensino que vai acontecer" (p.21). A autora refere que a generalidade dos professores tem esta perceção, "embora o façam de modos muito diferentes e partindo de pressupostos muito diversos, o que conduz a múltiplas variações na cultura de sala de aula". (p.21).

Esta cultura de sala de aula onde a argumentação, através da apresentação e discussão de ideias, para posterior retirada de conclusões, ocupam um papel central, tem como base evidências que mostram que a discussão é importante no desenvolvimento de conceitos matemáticos (Wood, 1999).

Nesta perspetiva, Ponte e Serrazina (2000), descrevem, com base nas normas do NCTM de 1994, o que será um ambiente favorável à aprendizagem. A importância de um ambiente encorajador do desenvolvimento da aptidão e competência matemáticas associado ao encorajamento dos alunos para que estes aceitem correr riscos colocando questões e formulando conjeturas eram apontados como os dois eixos centrais deste ambiente de sala de aula. Ao professor, segundo os autores, cabia, igualmente, o papel de valorizar as ideias e as formas de pensar dos alunos.

A criação de uma atmosfera de respeito e de confiança mútua, na qual os alunos se sintam confortáveis para emitir juízos acerca do trabalho desenvolvido pelos colegas é o ponto de partida (Stein, 2001). Ponto de vista que também partilhado pelo *Programa de Matemática para o Ensino Básico* (ME, 2007) ao mencionar nas opções metodológicas que "o professor deve dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas", (p.9).

A comunicação, é por isso, um dos fatores mais sensíveis nesta perspetiva de cultura de sala de aula. Não surpreende que o Programa (ME, 2007) coloque a comunicação nos objetivos gerais do ensino da Matemática. No documento é referido que os alunos devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático, devendo ser capazes de: (i) interpretar enunciados matemáticos formulados oralmente e por escrito; (ii) usar a linguagem matemática para expressar as ideias matemáticas com precisão; (iii) descrever e explicar, oralmente e por escrito, as estratégias e procedimentos matemáticos que utilizam e os resultados a que chegam; e (iv) argumentar e discutir as ideias dos colegas.

Assim, a comunicação deve ter também um lugar destacado na prática letiva do professor, já que é através da discussão oral na aula que os alunos confrontam as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas. Estas capacidades, segundo este documento, desenvolvem-se "comunicando por uma variedade de formas e aperfeiçoando os seus processos de comunicação", (p.5).

A forma como cada professor organiza o trabalho em sala de aula parece assumir um fator preponderante no ambiente de sala de aula (Ponte & Serrazina, 2000; Stein, 2001; Yackel, 2002; ME, 2007). O trabalho coletivo, que envolva toda a turma ou pequenos grupos, deve ser complementado com o trabalho individual, de uma forma equilibrada familiarizando os alunos com o que se pretende em cada um destes momentos da aula.

A escolha de uma boa tarefa, que conduza a diferentes abordagens por parte dos alunos e a diferentes soluções para que promova a discussão de ideias, é o ponto de partida para a organização do trabalho de sala de aula (Stein, 2001). Uma ideia que também é evidenciada no estudo realizado por Ferreira (2012), com alunos do 2.º ano de escolaridade, no qual a autora destaca que os resultados confirmam que é essencial que o ensino se preocupe com o desenvolvimento de diferentes estratégias, em vez do uso de uma só estratégia para todos os tipos de problemas de adição e subtração, realçando os pontos fortes e fracos das diferentes estratégias perante as resoluções apresentadas.

No entanto, à escolha de uma tarefa devem preceder, na perspetiva de Yackel (2002), dois aspetos: (i) o conhecimento que o professor tem do desenvolvimento conceptual matemático dos seus alunos e das suas dificuldades; e (ii) a relevância da tarefa no desenvolvimento de conceitos matemáticos.

O *Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007* (ME, 2007) salienta que os professores devem proporcionar aos alunos a realização de diferentes tipos de tarefas, dando-lhes uma indicação clara das suas expectativas em relação ao que espera do seu trabalho. Neste âmbito, o documento refere que o processo de ensino-aprendizagem tem de prever momentos para o confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas. "Ouvir e praticar são atividades importantes na aprendizagem da Matemática mas, ao seu lado, o fazer, o argumentar e o discutir surgem com importância crescente nessa aprendizagem" (p.9).

Para Wood (1999), "numa cultura em que se exige aos alunos a compreensão de conceitos, ensinar é muito mais do que dizer ou demonstrar, os professores têm de ajudar os alunos a criar os significados através do seu próprio pensamento e julgamento de ideias" (p.171).

Neste estudo foi seguida uma abordagem centrada na resolução de problemas, complementada com as cadeias de cálculo. As aulas de resolução de problemas seguiram uma orientação comum e que se iniciava com a apresentação coletiva do problema a resolver, a sua resolução individual e terminava com uma apresentação e discussão de cada uma das estratégias seguidas pelos alunos.

Capítulo 3

METODOLOGIA

3.1. Opções Metodológicas

Este estudo tem como objetivo compreender que tipo de estratégias de cálculo mental são usadas por alunos do 2.º ano de escolaridade na resolução de problemas de adição e subtração com números naturais. Mais especificamente, pretendo dar resposta às seguintes questões:

a) Quais as estratégias a que os alunos recorrem?
b) Que mudanças são evidenciadas nas estratégias utilizadas pelos alunos no final da experiência de ensino?
c) Que dificuldades os alunos evidenciam?
d) De que forma o contexto das tarefas influencia a seleção de estratégias por parte dos alunos?

Tendo em conta os objetivos deste estudo, esta investigação enquadra-se no paradigma interpretativo e numa abordagem qualitativa, tendo como *design* de investigação o estudo de caso.

3.1.1. Paradigma interpretativo

O paradigma interpretativo visa, essencialmente, "a descoberta de esquemas específicos da identidade social de um dado grupo" (Erickson, 1986, p. 132). Transpondo esta ideia para a sala de aula, por exemplo, professores e alunos na sua interpretação conjunta são capazes de (i) fazer uso do significado da aprendizagem adquirida e partilhada através de processo de aculturação; (ii) ter em consideração as ações de outros que estão fora da cena imediata, percebendo-as como pontos de estrutura à volta do qual eles podem compreender ações locais; (iii) aprender novos significados partilhados através da interação *face-to-face*; e (iv) criar significados dadas as exigências únicas da ação prática no momento.

O interesse fulcral da perspetiva interpretativa é o *significado* conferido pelos *atores* nas ações nas quais se envolvem. Este significado é o produto de um processo de interpretação que desempenha um papel chave na delimitação do objeto de estudo.

Desta forma, podemos dizer que a perspetiva interpretativa privilegia o contexto da descoberta como contexto de partida de uma investigação (Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 1994). O objeto, de acordo com Eriksson (1986), é a ação e não o comportamento. De acordo com o autor embora possam existir previamente algumas linhas orientadoras, estas podem ser alteradas e reformuladas no decurso da investigação devido à compreensão dos acontecimentos que se vão observando.

3.1.2. Abordagem qualitativa

Tendo em conta os objetivos deste estudo, a abordagem qualitativa é a que melhor se enquadra neste tipo de investigação na perspetiva de Bogdan e Bliken (1994). A abordagem qualitativa centra-se no processo, na medida em que se pretende compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados, descrevendo em que consistem esses mesmos significados. Este tipo de abordagem, de acordo com os mesmos autores, possui cinco características, que nem sempre têm de estar presentes em simultâneo: (i) a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. Mesmo quando se utiliza equipamento, os dados são recolhidos e complementados pela informação que se obtém através do contacto direto. Existe uma preocupação com o contexto; (ii) a investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais; (iii) existe um maior interesse pelo processo do que pelos resultados ou produtos, (iv) os investigadores tendem a analisar os dados de forma indutiva. As abstrações são construídas à medida que os dados recolhidos se vão agrupando; (v) o significado tem grande importância. Os investigadores pretendem saber o que os sujeitos experimentam, o modo como interpretam as suas experiências e o modo como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem.

3.1.3. Estudo de caso

A opção pelo estudo de caso, como *design* de investigação, justifica-se na medida em que "o estudo de caso consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo" (Bogdan & Bliken, 1994). Para Ponte (1994) "em primeiro lugar, trata-se de um tipo de pesquisa que tem sempre um forte cunho descritivo. O investigador não pretende modificar a situação, mas compreendê-la tal como ela é. Para isso apoia-se numa “descrição densa” (*thick description*), isto é, factual, literal, sistemática e tanto quanto possível completa do seu objeto de estudo”. O estudo de caso é, por essa razão, adequado quando o investigador não tem muito controlo sobre os acontecimentos e se debruça sobre uma situação específica que se supõe ser única procurando descobrir o que há nela de mais característico e assim compreender um fenómeno de interesse (Ponte, 2006). Para Yin (2005), o estudo de caso é uma modalidade particularmente adequada à situação onde é impossível separar as variáveis do fenómeno do seu contexto e em que o investigador está interessado na descoberta e na interpretação, mais do que testar hipóteses e produzir resultados generalizáveis.

Num quadro de uma abordagem qualitativa marcadamente descritiva, a opção pelo estudo de caso parece ajustar-se aos objetivos que o estudo encerra e englobará os cinco alunos, em conjunto, do segundo ano de escolaridade da turma que leciono.

3.1.4. O professor - investigador

A opção de realizar o estudo na turma que leciono justifica-se pelo interesse que tenho na compreensão do desempenho dos meus alunos em aspetos relacionados com o cálculo mental, o desenvolvimento do sentido de número e a resolução de problemas. O conhecimento que detenho dos alunos, o facto de trabalhar com eles diariamente ao longo de dois anos letivos, levou-me a procurar aprofundar esse mesmo conhecimento e, simultaneamente, fazer uma reflexão acerca da minha prática letiva. Ponte (2002) define professor investigador como “um professor que realiza investigação, normalmente sobre a sua prática” (p. 9).

Ao optar por este duplo papel no âmbito deste estudo, cedo, denotei preocupações relacionadas com a validade do mesmo. Tal como Bogdan e Biklen (1994) referem, existe uma dificuldade de distanciamento, quer de preocupações pessoais, quer do conhecimento prévio que possuem das situações, o que poderá enviesar a análise e, consequentemente, os resultados obtidos. Desta forma, procurei seguir os critérios de qualidade de investigação sobre a prática definidos por Ponte (2002): (i) ter um vínculo com a prática, (ii) ser autêntica, (iii) ser uma abordagem inovadora, (iv) ter qualidade metodológica, (v) ter qualidade dialógica. Tendo presentes estes cinco princípios (i) selecionei um tema que faz parte do programa dos alunos, (ii) as produções dos alunos e os seus pontos de vista constituem o principal objeto de análise, (iii) o cálculo mental é algo de muito novo no programa de Matemática (ME, 2007), (iv) a recolha de dados realizou-se através de gravações em áudio e em vídeo, de produções dos alunos e de notas de campo e (v) sempre que possível troquei pontos de vista com a orientadora do estudo e com colegas ligadas à investigação em educação matemática.

A recolha de dados foi encarada por mim como um dos aspetos mais sensíveis desta dupla função, de forma a conferir uma maior objetividade à investigação. Ponte (2002) refere que "o plano de trabalho bem como os registos realizados, possibilitarão ao investigador um espaço autónomo de realidade, que lhe permitirá, quando necessário, o distanciamento relativamente aos acontecimento do dia a dia" (p.19).

3.2. Contexto e participantes

Este estudo tem como base uma experiência de ensino que ocorre no terceiro período do ano letivo 2010/2011, tem a duração de oito semanas e engloba a resolução de problemas de adição e de subtração, cujos significados e números envolvidos foram estudados de acordo com o objetivo deste estudo, e cadeias de cálculo sem contexto.

Em cada semana, é apresentado aos alunos um problema e duas cadeias de cálculo. A exploração das cadeias de cálculo tem uma duração de aproximadamente vinte minutos e serão apresentadas nos dois dias seguintes à aplicação do problema. Cada cadeia é composta por seis cálculos, cujos números estão ancorados ao problema resolvido no dia anterior, no caso da primeira cadeia de cálculo, e ao problema da semana seguinte, no caso da segunda cadeia de cálculo. A anteceder a experiência de ensino, é aplicado aos alunos um teste diagnóstico com cinco problemas e quatro situações de cálculo sem contexto e após a experiência de ensino um teste final, com seis problemas e quatro situações de cálculo sem contexto.

Os participantes do estudo são cinco alunos, dois rapazes e três raparigas, sendo os únicos alunos que frequentam o segundo ano de escolaridade na turma que leciono. Trata-se de alunos sem retenções e que não estão abrangidos por qualquer medida no âmbito dos apoios educativos e das necessidades educativas especiais. O seu desempenho escolar é heterogéneo, assim como o seu aproveitamento na área curricular disciplinar da Matemática. Francisco e Carlota são alunos com um aproveitamento inferior ao dos colegas denotando um menor conhecimento das múltiplas representações dos números e do sistema de referências. Jorge, Sara e Sónia são alunos com um bom aproveitamento em todas as áreas curriculares.

Estes alunos estão integrados numa turma mista, que tem também alunos do terceiro ano de escolaridade, num total de onze elementos. Esta escola integra, também, uma turma com alunos dos primeiro e quarto anos de escolaridade, num total de vinte e cinco elementos. A escola situa-se num ambiente rural, a vinte quilómetros de uma cidade do centro do país.

3.3. Recolha de dados

Dada a natureza do problema em estudo e o tipo de questões para as quais gostaria de obter alguma compreensão, optei por assumir o duplo papel de professor-investigador, desenvolvendo o estudo com a turma que leciono. As opções de recolha de dados foram condicionadas pela natureza do estudo e por assumir o papel de professor-investigador.

Neste sentido utilizo vários métodos de recolhas de dados num estudo que segue o paradigma interpretativo: observação participante, entrevista e análise de documentos (Bogdan & Biklen, 1994; Lessard-Hébert et al, 1994)

A observação participante tem por objetivo recolher os dados, na forma de ações, opiniões ou perspetivas, aos quais um observador exterior não teria acesso (Lessard-Héber et. al., 1994). A observação participante revestiu-se de uma forma de participação ativa devido ao meu duplo papel de professor-investigador e permitiu a recolha de notas de campo que foram realizadas durante a aula, nomeadamente, quando os alunos estavam a resolver as tarefas individualmente e após a aula.

A entrevista, como técnica de recolha de dados, pode ser utilizada de duas formas: pode constituir a principal fonte de informação ou pode ser utilizada em conjunto com outros instrumentos (Bogdan & Biklen, 1994). Neste estudo, a entrevista foi realizada após o teste final e ocupou o papel previsto na segunda perspetiva. Os autores afirmam que com a entrevista o objetivo do investigador é o de compreender o que é que os alunos pensam. A entrevista não obedecia a um guião estruturado, decorrendo à medida da explicação de cada tarefa por parte do aluno. Cada entrevista demorou cerca de trinta minutos e foi registada em áudio.

A análise de documentos englobou os registos das resoluções dos alunos e as notas de campo. Os registos dos alunos resultaram da resolução das tarefas que integram o teste diagnóstico, realizado antes da experiência de ensino, a experiência de ensino e o teste final.

As aulas da experiência de ensino iniciaram-se com (i) com a leitura silenciosa do problema, ao que se seguiu a leitura em voz alta por parte de um aluno e a explicação do mesmo por um ou dois alunos, (ii) seguia-se a resolução do problema individualmente. Neste momento, eu circulava pela sala fazendo registos acerca do que era observável relativamente ao desempenho dos alunos e do ambiente da sala de aula. Sempre que solicitado apoiava os alunos que requeriam a minha ajuda para um eventual esclarecimento adicional. Este momento da aula permitiu-me acompanhar o desenvolvimento das estratégias seguidas por cada um dos cinco alunos e fazer uma pré-seleção das resoluções mais significativas para a discussão em grande grupo. (iii) Após a resolução individual seguia-se a apresentação e a discussão das estratégias por mim selecionadas. Os alunos deslocavam-se ao quadro individualmente, copiavam o seu registo e apresentavam-no aos colegas, seguindo-se uma fase de questões, comentários e sugestões por parte do grande grupo. Esta fase da aula foi registada em vídeo. Na síntese (iv) professor e alunos discutiam as diversas estratégias de resolução registadas no quadro e identificavam as estratégias de cálculo mais eficientes, copiando-as para o seu caderno diário.

Nas cadeias de cálculo eu, enquanto professor-investigador, lia em voz alta cada cálculo, registava-o no quadro e aguardava algum tempo até que os cinco alunos dessem indicação de que tinham chegado ao resultado. Este tempo de espera era variável e dependia do desempenho dos alunos, contudo, raramente ultrapassou os trinta segundos. Em seguida, selecionava um aluno para explicitar a sua estratégia oralmente, questionando, posteriormente, os restantes se tinham seguido estratégias alternativas. As várias estratégias para cada cálculo eram alvo de discussão e o resultado registado no quadro, passando para o cálculo seguinte da cadeia. Todo este processo, que se prolongava aproximadamente por vinte minutos, era marcadamente oral, embora os alunos pudessem, se assim o desejassem, ter consigo uma folha de papel para realizar pequenos registos de apoio. As cadeias de cálculo foram registadas em vídeo.

3.4. Análise de dados

Autores como Bogdan e Biklen (1994) caracterizam a análise de dados como o processo de busca e de organização de todo o material recolhido com o objetivo de aumentar a sua compreensão e permitir apresentar aos outros aquilo que se encontrou. Na perspetiva dos autores a análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta de factos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros.

Os registos de vídeo reunidos durante a experiência de ensino foram transcritos e complementados com os registos dos alunos que recolhi no final de cada aula e com as notas de campo. O mesmo procedimento foi seguido com as gravações áudio realizadas nas entrevistas que se seguiram ao teste final.

Comecei por analisar as resoluções dos alunos nas tarefas que constavam do teste diagnóstico, da experiência de ensino e do teste final. Estes registos foram analisados separadamente, tendo sido elaborado um quadro resumo, para o teste diagnóstico, para a experiência de ensino e para o teste final.

A categorização das estratégias de cálculo mental seguiu o modelo adotado para este estudo, a partir dos estudos realizados por Beishuizen (1997), de acordo com a tabela 3.1.

Tabela 3.1. Estratégias de cálculo mental para a adição e subtração (Adaptado de Beishuizen, 1997, p.131), já referidas na página 16.

Adição: 45+39		**Subtração: 65-49**	
Saltos	**N10:** 45+30=75; 75+9=84 **A10:** 45+5=50; 50+34=84 **N10C:** 45+40=85; 85-1=84	Saltos	**N10:** 65-40=25; 25-9=16 **A10:** 65-5=60; 60-44=16 **A10:** 49+1=50; 50+10=60; 60+5=65 resposta 1+10+5=16 (através da adição) **N10C:** 65-50=15;15+1=16 ***Short jump:*** 51-49=2, porque 49+2=51

Decomposição	**1010:** 40+30=70; 5+9=14; 70+14=84 **10's**: 40+30=70; 70+5=75; 75+9=84	Decomposição	**1010:** 60-40=20; 5-9 (?) **10's:** 60-40=20; 20+5=25; 25-9=16

Na análise do teste diagnóstico foram tidos em conta os registos produzidos pelos alunos e as notas de campo, enquanto a análise da experiência englobou elementos constantes dos registos dos alunos, das transcrições de vídeo e das notas de campo. No teste final, a análise de dados teve em conta os registos dos alunos, a transcrição da gravação áudio e as notas que fui retirando ao longo da entrevista não estruturada.

A concluir cada um destes três momentos, realizei uma síntese dos aspetos mais significativos tendo em conta o objetivo deste estudo.

Em cada uma das sínteses, para além de, como referi, realçar os aspetos mais significativos, também procurei estabelecer uma relação entre as estratégias utilizadas e as operações envolvidas, tendo em especial atenção os vários significados da adição e da subtração. Esta análise comparativa foi também extensível às tarefas com contexto – problemas – e às tarefas sem contexto que compuseram o teste diagnóstico e o teste final.

Capítulo 4

A EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Neste capítulo apresento a experiência de ensino que serviu de base ao estudo que me proponho realizar e no qual analiso como é que os alunos do segundo ano de escolaridade utilizam o cálculo mental na resolução de problemas de adição e de subtração com números naturais.

Começo por apresentar os princípios gerais da experiência de ensino, de seguida, explicito o modo como foi planificada e, por fim, descrevo a intencionalidade dos problemas propostos aos alunos.

4.1. Princípios gerais

As tarefas selecionadas dividiram-se entre problemas de adição e subtração e cadeias de cálculo. Na seleção dos problemas foi tido em conta os vários significados das operações considerados no atual *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007). Assim, para a adição foram selecionados os significados de *acrescentar* e *combinar* e para a subtração *retirar*, *completar* e *comparar*. O enunciado dos problemas mereceu especial atenção, pretendendo-se que suscitasse curiosidade. Para isso, foram feitas opções que passaram por usar o nome dos alunos no enunciado dos problemas e focar realidades do seu quotidiano, como é recomendado pelo NCTM (2007). Os números envolvidos foram pensados para facilitar o uso de estratégias de cálculo mental, optando-se, por isso, números que possibilitassem, de acordo com a sua estrutura, múltiplas combinações, números distantes entre si ou mais próximos e números de referência. A progressiva evolução da grandeza dos números envolvidos nos problemas pretendeu acompanhar o programa do segundo ano de escolaridade. As cadeias de cálculo, exploradas oralmente, foram intercaladas com os problemas e incluíam números ancorados nos problemas, de modo a influenciar estratégias, procurando promover o cálculo mental flexível, adequado aos números envolvidos.

A forma como as tarefas foram exploradas na sala de aula pretendeu promover a progressão na aprendizagem. Tal como refere Yackel (2000) é a partir dos processos de resoluções dos alunos, colocando ênfase nas diferentes resoluções, nas suas explicações e argumentações, onde as resoluções são elas próprias objeto de reflexão, que se proporciona aos alunos a possibilidade da apropriação de uma maior variedade de estratégias e a seleção das mais eficientes. De acordo com o NCTM (2007) "os alunos nos primeiros anos devem ser encorajados a desenvolver, registar, explicar e criticar as estratégias de resolução de problemas dos seus colegas" (p. 37-38), contribuindo, deste modo, para a discussão da eficácia de diversas estratégias e procedimentos e a possibilidade de generalização. O professor integrou os debates e realizou a síntese final, após a apresentação e discussão das diferentes estratégias de cada aluno.

4.2. Planificação

A experiência de ensino foi precedida de um teste diagnóstico realizado, no final do segundo período, nos dias 29, 30 e 31 de março de 2011. O teste diagnóstico (Anexo 3) foi composto por nove tarefas - cinco problemas e quatro situações de cálculo sem contexto. Os problemas envolveram a adição e a subtração com os significados definidos pelo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007). Os quatro cálculos sem contexto envolveram duas adições e duas subtrações e os números selecionados ancoraram nos utilizados nos problemas, de forma a aferir se as resoluções dos alunos são influenciadas pelo contexto.

A experiência de ensino teve a duração de oito semanas, desenvolvendo-se ao longo do terceiro período, e envolveu dois tipos de tarefas distintas: problemas (Anexo 4) e cadeias de cálculo. Depois de resolver o problema, cada aluno apresentava as suas resoluções aos colegas, abrindo-se um espaço de debate. Para além da apresentação e comparação das estratégias adotadas pelos alunos na resolução de cada problema, esta discussão tinha como objetivo final evidenciar uma determinada estratégia que tornou mais eficiente a resolução do problema, sendo registada pelos alunos no seu caderno. O professor integrou os debates, cabendo-lhe realizar a síntese final, após a apresentação das diferentes estratégias seguidas por cada aluno. Nesse momento da aula, o professor evidenciava a(s) estratégia(s) mais eficiente(s), caso tivesse surgido, ou apresentava formas de resolução alternativas, de forma a tornar o cálculo mais flexível, tendo em conta as características do contexto e dos números envolvidos em cada problema.

As cadeias de cálculo tiveram como finalidade desenvolver um cálculo mental eficiente evidenciando estratégias relacionadas com a estrutura dos números e as propriedades das operações. A estrutura de cada cadeia, constituída por seis cálculos sequenciais e encadeados, teve a finalidade de influenciar as estratégias dos alunos, já que cada cálculo estava relacionado com o(s) anterior(es). As cadeias de cálculo integraram, separadamente, a adição e a subtração de acordo com o objetivo traçado para cada uma. Após a indicação do cálculo a realizar, os alunos levantavam o braço apresentando oralmente as suas estratégias de resolução. No final da cadeia, o professor fazia a síntese, comentando as estratégias seguidas pelos alunos e apresentando alternativas mais eficientes, quando necessário. As cadeias de cálculo foram, essencialmente, orais, podendo os alunos registar numa folha os passos intermédios para chegar a um resultado. O professor registava no quadro a indicação de cada cálculo e, depois de os alunos terem apresentado as suas estratégias, o respetivo resultado.

Ao longo da experiência de ensino, a resolução dos problemas foi intercalada com as cadeias de cálculo. Após a resolução de um problema, no primeiro dia, seguiu-se uma cadeia de cálculo nos dois dias seguintes. Este processo cíclico visou influenciar as estratégias utilizadas pelos alunos nos problemas propostos e nas cadeias de cálculo, de forma, a tornar o cálculo mental mais flexível e tendo como base os contextos apresentados e as características dos números envolvidos, aspetos associados à manifestação de ter um bom sentido de número (McIntosh et. al, 1992; Sowder, 1992). A primeira cadeia de cada semana estava encadeada com o problema do dia anterior, enquanto a segunda cadeia encadeava com o problema da semana seguinte, como está representado na figura 4.1 e descrito, abaixo, no ponto referente às cadeias de cálculo.

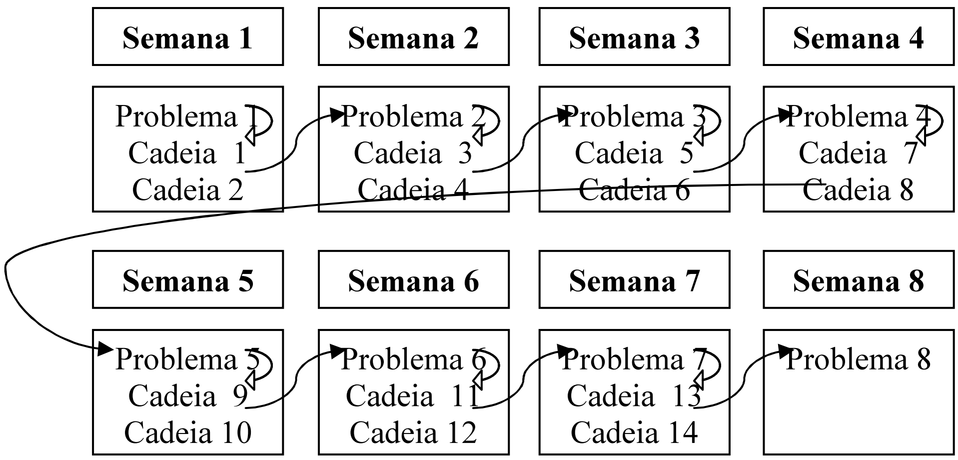


Figura 4.1- Encadeamento das cadeias de cálculo com os problemas

Uma semana após a conclusão da experiência de ensino foi aplicado um teste final (Anexo 5) composto por dez tarefas - seis problemas e quatro situações de cálculo sem contexto. A resolução do teste final foi repartida por dois dias consecutivos. No primeiro, os alunos resolveram os quatro primeiros problemas e no segundo os problemas restantes e as situações de cálculo sem contexto. Os problemas englobaram a adição e a subtração com os significados envolvidos no teste diagnóstico e na experiência de ensino. Nos dois dias seguintes à aplicação do teste final foram registadas em áudio, individualmente e fora do horário letivo, as explicações apresentadas por cada aluno sobre as estratégias seguidas na resolução dos problemas e dos cálculos sem contexto.

4.3. As tarefas

4.3.1. Teste diagnóstico

Tabela 4.1. Tarefas do teste diagnóstico

Tarefa	Operação	Significado	Cálculo	Estratégias possíveis
1 TD "A visita de estudo"	Adição	Acrescentar	29 + 25 =	N10 A10 1010 10's N10C
2 TD "O Dia do Pai"	Adição	Combinar	32 + 18 =	N10 A10 1010 10's
3 TD "Os animais de estimação"	Subtração	Completar	62 – 49 = 62 - ___ = 49 49 + ___ = 62	N10 A10 N10C
4 TD "Os berlindes"	Subtração	Retirar	60 – 35 = 35 + ___ = 60	N10 A10
5 TD "Vamos comprar um relógio"	Subtração	Comparar	82 – 40 = 82 - ___ =40 42 + __ = 80	N10 A10 N10C
6 TD 49 + 35 =	Adição	___	49 + 35=	N10 A10 1010 10's N10C

7 TD 25 + 28 =	Adição	___	25 + 28=	N10 A10 1010 10's
8 TD 63 – 19 =	Subtração	___	63 – 19= 63 - ___ =19 19 + ___ = 63	N10 A10 N10C
9 TD 82 – 40 =	Sutração	___	82 – 40= 42 + ___ = 80	N10 A10 N10C

As cinco primeiras tarefas do teste de diagnóstico envolveram a resolução de problemas. Os dois primeiros problemas foram apresentados no primeiro dia de aplicação do teste diagnóstico aos alunos e envolviam a adição com os significados *acrescentar* e *combinar.* Os números selecionados para o problema "*A Visita de Estudo"* foram pensados para permitirem a aplicação de várias estratégias. As estratégias N10 (29+20=49; 49+5=54) e 1010 (20+20=40; 9+5=14; 40+14=54) eram, à partida, as que mais poderiam facilitar o cálculo, sobretudo, a 1010 na medida em que possibilitava a aplicação de um dobro (20+20) normalmente reconhecido pelos alunos deste nível etário. Também a partir de uma relação de dobros (25+25=50, 50+4=54), poderia surgir outra estratégia possível. A opção por um dos números terminar em 9 (29) surgiu para possibilitar a aplicação da estratégia à N10C (30+25=55; 55-1=54). No problema "O Dia do Pai" a escolha de um número terminado em 2 (32) ao qual deveria ser adicionado outro terminado em 8 (18) pretendeu verificar até que ponto os alunos se apercebiam que estes dois algarismos combinados (2+8 ou 8+2) formam uma das decomposições possíveis do número 10, e de que forma este facto influenciaria as suas estratégias. A estratégia 1010 (30+10=40; 8+2=10; 40+10=50) era a que, possivelmente, mais se ajustava às características dos números envolvidos, assim como o A10 (32+8=40; 40+10=50). As estratégias N10 (32+10=42; 42+8=50) e 10's (30+10=40; 40+8=48; 48+2=50) constituíam mais duas possibilidades a ter em conta como facilitadoras do cálculo. Já a estratégia N10C, embora possível, seria menos previsível, dado que nenhum dos números termina em 9.

Os alunos resolveram os terceiro e quarto problemas no segundo dia de aplicação do teste inicial, que envolviam a subtração com o significado *completar* e *retirar*. O problema "Os animais de estimação" foi pensado para ajudar os alunos a recorrer à operação inversa (49 +___ = 62), empregando as estratégias A10 (49+1=50; 50+10=60; 60+2=62) ou N10 (49+10=59; 59+3=62). A proximidade entre os números foi propositada para, em alternativa, os alunos recorrerem à subtração indireta (62 - ___ = 49), podendo utilizar as estratégias dos saltos. A subtração direta (62 – 49 = ___) era a que, à partida, poderia originar mais erros, sobretudo na decomposição, embora também permitisse a resolução através do método dos saltos ou da compensação (62-50=12; 12+1=13). A decomposição com base na estratégia 1010 poderá induzir em erro no momento de subtração das unidades (60-40=20; 2-9 (?)). Recorrendo aos saltos teríamos o N10 (62-40=22; 22-9=13) e a A10 (62-2=60; 60-40=20; 20-7=13). No problema "Os berlindes" os alunos poderiam recorrer à subtração direta (60 – 35 = ___) o que facilitaria os cálculos, já que 60 é o dobro de 30, podendo este número ser obtido pela decomposição do 35 em 30 mais 5. Com a subtração direta a estratégia N10 (60–30=30; 30-5=25) seria a mais eficiente, por implicar menos passos de cálculo. Se optassem pela adição indireta (35 + ___ = 60), a estratégia A10 poderia ser facilitadora, já que 35 mais 5 são 40 e 40 mais 20 são 60. O método da compensação também seria outra alternativa, embora menos expectável, já que 35 mais 30 são 65, porque 30 mais 30 são 60, depois teriam que subtrair 5 para atingir o 60 (65-5=60) e retirar este valor ao salto de 30 efetuado (30-5=25), atingindo-se o resultado final.

No terceiro dia, os alunos resolveram o quinto problema "Vamos comprar um relógio", que envolvia uma subtração com o significado *comparar*. Compreendendo o significado da operação, os alunos poderiam recorrer tanto à adição indireta (40 + ___ = 82) como à subtração indireta (82 - ___ = 40), embora a adição indireta pudesse ser mais facilitadora já que os números envolvidos propiciavam a aplicação de um dobro no recurso à estratégia N10 (40+40=80; 80+2=82). A mesma estratégia poderia ser aplicada na subtração direta (se 80-40=40 então 82-40=42). A estratégia A10 (82-2=80; 80-40=40) seria outra possibilidade. A decomposição 1010 (80-40=40; 2-0=2; 40+2=42) poderá trazer dificuldades no último passo de cálculo, já que os alunos, como se trata de uma subtração poderão ser influenciados a retirar 2 ao 40 (40-2=38), em vez de adicionar.

Após a resolução do quinto problema, os alunos passaram à resolução das tarefas compostas pelos cálculos sem contexto. A tarefa 6 era uma adição (49+35=) e os números envolvidos relacionavam-se com os do primeiro problema (29+25=). As estratégias N10 (49+30=79; 79+5=84) e 1010 (40+30=70; 9+5=14; 70+14=84) poderiam ser as mais facilitadoras. A estratégia N10C (50+35=85; 85-1=84) era outra das possibilidades por um dos números (49) terminar em 9, facilitando o seu arredondamento à dezena mais próxima. A tarefa 7 (25+28=) poderia ser resolvida através dos dobros (25+25=50; 50+3=53) ou das estratégias N10 (25+20=45; 45+8=53) e 1010 (20+20=40; 5+8=13; 40+13=53). As últimas duas tarefas eram compostas por subtrações. Os números da tarefa 8 (63–19=) estavam relacionados com os do problema 3 (62–49=), pela proximidade do aditivo e por o subtrativo terminar em 9. A subtração direta, através das estratégias N10 (63-10=53, 53-9=44) ou N10C (63-20=43; 43+1=44) poderia ser facilitadora dada a distância entre os dois números. No entanto, a estratégia N10C poderá originar dificuldades no último passo de cálculo, já que por se tratar de uma subtração os alunos poderão ser induzidos em erro retirando 1 a 43, em vez de adicionar. O uso da subtração indireta (63-___=19) ou da adição indireta (19+___=63) constituíam outras possibilidades, embora pouco eficientes dada a distância entre 19 e 63. O método dos saltos, nas duas situações, poderá ser o mais facilitador. A tarefa 8 continha os mesmos números do problema 5 (82-40), de forma a poder-se verificar até que ponto o contexto influenciará o uso da adição e da subtração e de que forma essa opção poderá alterar as estratégias de resolução. A subtração direta (82-40=) e a adição indireta (40+___=82), através da utilização do método dos saltos são duas possibilidades para a resolução, abrindo-se as mesmas hipóteses de estratégias a utilizar elencadas acima para o problema 5.

4.3.2. Os problemas da experiência de ensino

Ao longo da experiência de ensino foi aplicada uma sequência de oito problemas de adição e subtração. Por sequência entendo o conjunto de problemas que foram por mim apresentados e resolvidos pelos alunos. Utilizo o termo sequência de problemas por terem sido pensados e adaptados de modo a abranger os diferentes significados da adição e da subtração, de modo a poder compreender como as estratégias de cálculo mental utilizadas eram ou não influenciadas pelo significado da operação presente no problema. Os números envolvidos nos problemas foram selecionados de forma a permitir a aplicação de estratégias diversificadas, para além de acompanharem, na ordem de grandeza, o programa do segundo ano de escolaridade. “É preciso que as tarefas, no seu conjunto, proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos, o domínio das notações e formas de representação relevantes" (Ponte, 2005, p. 27). Na construção dos problemas tive em atenção o seu contexto de modo que este permita aos alunos mobilizar os seus conhecimentos para matematizar a situação.

A cadeia de problemas é apresentada seguindo a ordem com que foram resolvidos pelos alunos.

Tabela 4.2. – Problemas da experiência de ensino

Tarefa	Operação	Significado	Cálculo	Estratégias possíveis
1 EE "Os rolos de fotografia"	Adição	Combinar	31 + 29=	N10 A10 1010 10's N10C
2 EE "A camisola do Fernando"	Subtração	Retirar	50 - 32 = 50 - ___ = 32 32 + ___ = 50	N10 A10 N10C
3 EE "Vamos comprar bicicletas"	Subtração	Comparar	185 – 79= 79 + __ = 185	N10 A10 N10C
4 EE "O mealheiro da Sofia"	Adição	Acrescentar	99 + 125 =	N10 A10 1010 10's N10C
5 EE "O parque de estacionamento"	Subtração	Completar	400 – 150= 150 +__ = 400	N10 A10 N10C
6 EE "A bateria do Gonçalo"	Subtração	Retirar	600 – 495 = 495 +__ = 600	N10 A10 N10C
7 EE "As garrafas de água"	Multiplicação	Aditivo	12+12+12+12+12	N10 A10 1010 10's Dobros
8 EE "Vamos arrumar as folhas"	Divisão	Medida	30+30+30+30+8 128 – 30 = ___	N10 Dobros

O primeiro problema da experiência de ensino "os rolos de fotografia", envolvia uma adição com o significado *combinar*. Os números (31 e 29) foram pensados de forma a poderem ser adicionados através do dobro de 30, utilizando, para tal, o método da compensação (31= 30+1 e 29= 30-1; 30+30=60 e 1-1=0). O arredondamento à dezena mais próxima (A10) era outra das estratégias que poderiam ser aplicadas com facilidade (31+9=40; 40+20=60), assim como o N10 (31+20=51; 51+9=60), embora o método da decomposição, através do 1010 (30+20=50; 9+1=10; 50+10=60) ou dos 10's (30+20=50; 50+1=51; 51+9=60) também não representasse dificuldades. Atendendo aos números, o método da compensação e dos saltos seriam, à partida, as estratégias mais eficientes.

O problema "A camisola do Fernando" foi pensado para poder ser resolvido com recurso a múltiplas estratégias, fomentando a sua discussão na sala de aula, de forma a alargar as possibilidades equacionadas por cada aluno. Na subtração com o significado *retirar*, o recurso à subtração direta (50-32=__) é, normalmente, privilegiado pelos alunos. Neste âmbito, o método dos saltos poderia ser a estratégia que mais facilmente poderia ser aplicada (50-30=20; 20-2=18), já que a decomposição poderia apresentar algumas dificuldades (50-30=20; 0-2=?). Dada a proximidade dos números, os alunos também poderiam recorrer à subtração indireta (50-10=40; 40-8=32), recorrendo ao método dos saltos, ou da compensação (50-20=30; 30+2=32), embora esta última estratégia fosse menos expectável. A adição indireta (32 + ___ =50) era outro dos caminhos a seguir e facilmente resolúvel através dos saltos (32+8=50; 50+10=60) ou (32+10=42; 42+8=50) ou da compensação (32+20=52; 52-2=50).

No problema "Vamos comprar bicicletas" a escolha do número 79, como sendo o preço de uma das bicicletas, teve como objetivo verificar se os alunos utilizavam a compensação, podendo desenvolver os cálculos através da subtração direta (185-80) ou da adição indireta (80+___ = 185). O preço da outra bicicleta, 185€, foi escolhido para tornar o recurso à compensação ainda mais facilitador, já que 79 é igual a 80-1 e subtrair 80 a 185 facilita os cálculos, o mesmo sucedendo caso se opte pela adição, podendo calcular (80+20=100; 100+85=185) ou, em alternativa, (80+100=180; 180+5=185). A compensação poderia ainda ser complementada com o recurso ao A10, no caso da adição indireta (80+20=100; 100+85=185). Se os alunos não optarem pela compensação, a estratégia N10 é a que mais pode facilitar os cálculos na subtração indireta (185-70=115; 115-5=110; 110-4=106), enquanto o A10 facilita caso optem pela adição (79+1=80, 80+20=100; 100+85=185).

Os números envolvidos no problema “O mealheiro da Sofia” foram pensados para que os alunos pudessem recorrer a múltiplas estratégias. Uma das estratégias possíveis e facilitadora do cálculo, era a utilização da compensação, já que 99 é igual a 100-1, (100+125=225; 225-1=224). A inversão dos fatores, aplicando a propriedade comutativa da adição, poderia facilitar o cálculo colocando em primeiro lugar o fator de maior de grandeza (125+100=225; 225-1=224). A utilização da compensação também poderia ser completada com a estratégia N10 (100+100= 200; 200+25=225; 225-1=224). A possibilidade de identificar um dobro (100+100), tratando-se de um facto básico, obtido a partir da decomposição do segundo número (125= 100+25) poderá ser eficaz na realização do cálculo.

O problema “O parque de estacionamento” envolvia uma subtração com o significado *completar*. Os números selecionados representam uma grandeza superior à dos problemas anteriores, acompanhando o Programa (Ponte et. al., 2007) dos alunos do segundo ano de escolaridade. A adição indireta (150 + ___ = 400) era uma das opções para a sua resolução. Os alunos poderiam recorrer ao arredondamento à centena seguinte, podendo depois aplicar o dobro (150+50=200, 200+200=400). Caso optassem pela subtração direta (400 – 150 = ___), a decomposição do segundo fator (150=100+50) também seria facilitadora (400-100=300, 300-50=250). Outra resolução possível, mas menos expectável, de utilizar seria a compensação (400-200=200; 200+50=250), já que 200 é metade de 400.

O problema “A bateria do Gonçalo” envolvia uma subtração com o significado *retirar*. Atendendo à grandeza dos números envolvidos, verifica-se que o 495 é relativamente próximo do 600, pelo que o recurso à subtração indireta (600 - ___ = 495) talvez pudesse facilitar o cálculo, utilizando estratégias de saltos (600-100=500; 500-5=495). A adição indireta (495 + ___ = 600) seria outra das possibilidades, recorrendo, novamente, aos saltos (495+5=500; 500+100=600). A subtração direta poderia ser mais complexa (600 – 495 = ___) devido ao número de cálculos necessários (600-400=200; 200-90=110; 110-5=105), embora pudesse facilitada se os alunos recorressem à compensação (600-500=100; 100+5=105).

Para os últimos dois problemas da experiência de ensino foram selecionados contextos que remetessem para adições sucessivas e formação de grupos, associados a operações como a multiplicação e a divisão, mas que os alunos do segundo ano de escolaridade resolvem com recurso à adição e à subtração, por não terem sido ainda introduzidas até ao momento da realização deste estudo. Esta opção deveu-se à possibilidade de utilização de estratégias de cálculo mental diversificadas, para além dos factos básicos, como é o caso dos dobros e das contagens de *10 em 10*.

A resolução do problema "As garrafas de água" remetia para a repetição do número 12 cinco vezes (12+12+12+12+12 = ___). A decomposição, através do 1010, poderia ser facilitadora decompondo-se o 12 em 10+2 (10+10+10+10+10=50; 2+2+2+2+2=10; 50+10=60). Outra forma de resolução, seria recorrer aos dobros e formar grupos (12+12=24; 12+12=24; 24+24=48; 48+12=60), já que o dobro de 12 é um facto básico que os alunos deste ano de escolaridade utilizam facilmente e se tivessem dúvidas para adicionar 24+24 poderiam recorrer ao 1010 (20+20=40; 4+4=8; 40+8=48). A adição do resultado obtido (48) ao 12, que sobrou da formação de grupos, poderia ser resolvida através dos saltos N10 (48+10=58; 58+2=60) ou A10 (48+2=50; 50+10=60).

O problema "Vamos arrumar as folhas" poderia ser resolvido através da adição repetindo sucessivamente o número 30 até se aproximar do 128 (30+30+30+30=120; 120+8=128), ou formando grupos recorrendo aos dobros (30+30=60; 30+30=60; 60+60=120; 120+8=128). A subtração sucessiva seria outra forma de resolução (128-30=98, 98-30=68, 68-30=38; 38-30=8), embora menos provável devido ao seu grau de dificuldade para alunos do 2º ano de escolaridade.

4.3.3. Teste final

Tabela 4.3. – Tarefas do teste final

Tarefa	Operação	Significado	Cálculo	Estratégias possíveis
1 TF "Vamos comprar um televisor"	Adição	Acrescentar	142 + 138 =	N10 A10 1010 10's N10c
2 TF "O parque de estacionamento"	Adição	Combinar	299 + 325 =	N10 A10 1010 10's N10C

3 TF “As casas em construção”	Subtração	Retirar	240 – 119 = 119 + __ =240	N10 A10 1010 10’s N10C
4 TF “O túnel rodoviário”	Subtração	Comparar	579 – 380 = 579 - ___ = 380 380 + ___ = 579	N10 A10 1010 10’s N10C
5 TF “Vamos ao cinema”	Subtração	Completar	400 – 248 = 248 + ___ =400	N10 A10 N10C
6 TF “Os berlindes”	Multiplicação	Aditivo	15+15+15+15+15=	N10 A10 1010 10’s Dobros
7 TF 132 + 128 =	Adição	___	132 + 128 =	N10 A10 1010 10’s N10C
8 TF 399 + 425 =	Adição	___	399 + 425 =	N10 A10 1010 10’s N10C
9 TF 579 – 380 =	Subtração	___	579 – 380 = 579 - ___ = 380 380 + ___ = 579	N10 A10 1010 10’s N10C
10 TF 500 – 348 =	Subtração	___	500 – 348 = 348 + ___ =500	N10 A10 N10C

O problema “Vamos comprar um televisor” foi pensado para permitir que os alunos utilizassem várias estratégias. De acordo com os números envolvidos os alunos poderiam utilizar o método dos saltos N10 (142+100=242; 242+30=272; 272+8=280) ou o A10 (142+8=150; 150+100=250; 250+30=280). O método da decomposição era outra das possibilidades (100+100=200; 40+30=70; 8+2=10; 200+70+10=280) ou a variante 10’s (100+100=200; 200+40=240; 240+30=270; 270+2=272; 272+8=280). O método da compensação poderia conduzir os alunos à resolução através do dobro (142=140+2 e 138=140-2, então 140+140=280 e 2-2=0, logo o resultado seria 280).

Caso não constatassem esta possibilidade, ainda recorrendo à compensação, poderiam fazer (142+140=282; 282-2=280).

No problema "O parque de estacionamento", os números envolvidos foram pensados para os alunos utilizarem a compensação, já que 299 está muito próximo de 300, o que poderia facilitaria os cálculos, já que o segundo número é 325 (300+300=600; 600+25=625; 625-1=624). O método dos saltos, concretamente, a estratégia A10 era outra das possibilidades atendendo às características dos números do problema (299+1=300; 300+300=600; 600+24=624). Outras estratégias possíveis, ambas recorrendo ao método da decomposição, seriam o 1010 (300+200=500; 90+20=110; 9+5=14; 500+110+14=624) ou o 10's (300+200=500; 500+99=599; 599+25=624).

Depois de dois problemas que envolviam a adição, o terceiro "As casas em construção" tratava-se de uma subtração com o significado *retirar*. A utilização da compensação, através da subtração direta (240-120=120; 120+1=121), e do método dos saltos A10, através adição indireta (119+1=120; 120+120=240), parecem ser as estratégias mais eficientes por implicarem um número reduzido de cálculo e utilizarem o dobro de 120, que poderá ser facilmente utilizado pelos alunos se associado ao dobro de 12. O N10 (240-100=140; 140-10=130; 130-9=121), embora envolva mais passos de cálculo também poderá constituir uma estratégia eficaz. A decomposição, através do 1010, poderá conduzir a alguma dificuldade nos cálculos (200-100=100; 40-10=30; 0-9=?), pelo que a sua utilização será pouco provável.

No problema "O túnel rodoviário", tratando-se de uma subtração com significado *comparar*, o enunciado remetia para a utilização da adição indireta (380 + ___ = 579), até porque a subtração direta (579 – 380 = ___), provavelmente, traria alguns problemas aos alunos devido aos números selecionados. Recorrendo à adição, as estratégias A10 (380+20=400; 400+179=579) e compensação (380+200=580; 580-1=579), eram as mais eficientes, por reduzirem a quantidade de passos de cálculo e o seu grau de dificuldade. Caso os alunos optassem por subtrair, a subtração indireta (579 - ___ = 380) poderia facilitar os cálculos se a compensação fosse a estratégia selecionada (579-200=379; 379+1=380). A estratégia N10 poderia ser a mais eficaz na subtração direta (579-300=279; 279-79=200; 200-1=199), embora envolvesse, como foi acima referido, mais passos de cálculo.

No quinto problema "Vamos ao cinema", o recurso ao método dos saltos ou da compensação envolvia as estratégias que pareciam mais eficientes. O facto de um dos números ser 400 não tornava o método da decomposição a solução mais eficiente. Ao invés, recorrendo aos saltos, partindo do primeiro número, os alunos poderiam recorrer à estratégia A10 (248+2=250; 250+50=300; 300+100=400), caso utilizassem a adição indireta, ou à estratégia N10 (400-200=200; 200-40=160; 160-8=152), se optassem pela subtração direta.

O contexto do último problema do teste final "Os berlindes" remetia os alunos para a adição sucessiva do número 15, ou à formação de grupos, que facilitassem os cálculos, visto que a multiplicação ainda não tinha sido abordada na sala de aula. O problema foi pensado para que os alunos aplicassem e combinassem estratégias diversificadas, para além da aplicação dos dobros. A decomposição, através do 1010, poderia ser facilitadora decompondo-se o 15 em 10+5 (10+10+10+10+10=50; 5+5+5+5+5=25; 50+25=75). Outra forma de resolução, seria recorrer aos dobros e formar grupos (15+15=30; 15+15=30; 30+30=60; 60+15=75), já que o dobro de 15 é um facto básico que os alunos deste ano de escolaridade utilizam facilmente e se tivessem dúvidas para adicionar 15+15 poderiam recorrer ao 1010 (10+10=20; 5+5=10; 20+10=50). A adição do resultado obtido (60) ao 15, que sobrou da formação de grupos, poderia ser resolvida através da estratégia N10 (60+10=70; 70+5=75).

Após a resolução dos problemas, seguiram-se os cálculos sem contexto. Os números selecionados estão relacionados com os dos problemas que fazem parte do teste final. O objetivo passou por verificar se o contexto condicionou as resoluções dos alunos e se estes as mantiveram nos cálculos sem contexto, sobretudo nas tarefas que envolveram a subtração. Assim, cada tarefa de cálculo sem contexto estava relacionada com um problema. A grande proximidade entre os números utilizados levou a que as possibilidades de resolução elencadas para um problema se repetissem no cálculo sem contexto que lhe estava ancorado.

Assim, os números envolvidos na tarefa 7 (132+ 128) relacionavam-se com os do primeiro problema (142+138). A tarefa 8 (399+425) com o problema número dois (299+325). Os cálculos sem contexto que envolviam as subtrações (579-380) e (500-348), tarefas 9 e 10, tinham como referência os problemas 4 (579-380) e 5 (400-248), respetivamente.

4.3.4. As cadeias de cálculo

Ao longo da experiência de ensino foram realizadas catorze cadeias de cálculo, duas por semana, nos dias seguintes à realização do problema dessa semana, de acordo com a figura 4.1. Tal como referi anteriormente, tratou-se de um processo cíclico que teve como objetivo influenciar reciprocamente as estratégias utilizadas pelos alunos nos problemas propostos e nas cadeias de cálculo, de forma, a tornar o cálculo mental mais flexível e tendo como base os contextos apresentados e as características dos números envolvidos. Cada cadeia englobava seis cálculos, encadeados em torno de números previamente selecionados, e tinha a duração de cerca de quinze minutos, tratando-se de um processo essencialmente oral.

Tabela 4.4. – As cadeias de cálculo

Cadeia de cálculo 1	31 + 10 31 + 30 31 + 29 30 + 29 33 + 29 32 + 29	Cadeia de cálculo 8	400 – 50 400 – 100 400 – 150 400 – 200 400 – 250 400 - 300
Cadeia de cálculo 2	50 – 10 50 – 20 50 – 30 50 – 31 50 – 32 50 – 29	Cadeia de cálculo 9	400 – 100 400 – 150 400 – 200 200 + __ = 400 150 + __ = 400 140 + __ = 400
Cadeia de cálculo 3	50 – 10 50 – 20 50 – 30 50 – 32 30 + __ = 50 32 + __ = 50	Cadeia de cálculo 10	600 – 300 600 – 400 600 – 500 600 – 495 600 – 490 600 - 510
Cadeia de cálculo 4	185 – 40 185 – 45 185 – 70 185 – 75 185 – 80 185 – 79	Cadeia de cálculo 11	600 – 400 600 – 500 600 – 495 500 + __ = 600 495 + __ = 600 490 + __ = 600
Cadeia de cálculo 5	185 – 70 185 – 75 185 – 79 185 – 80 185 – 89 185 – 90	Cadeia de cálculo 12	12 + __ = 24 12 + __ + __ = 36 24 + __ = 48 12+__+12+__= 48 48 + __ = 60 12+__+12+__+__=60

Cadeia de cálculo 6	100 + 100 99 + 100 99 + 120 100 + 125 99 + 125 110 + 125	Cadeia de cálculo 13	12 + __ = 24 24 + __ = 36 24 + __ 48 12+__+12+__=48 48 + __ = 60 12+__+12+__+__=60
Cadeia de cálculo 7	100 + 100 99 + 100 99 + 120 99 + 125 89 + 125 90 + 125	Cadeia de cálculo 14	30 + 30 60 + 30 30 + __ + 30 = 90 90 + 30 = 120 + 30 = 60 + __ + 30 = 150

A primeira cadeia de cálculo surge após o problema "Os rolos de fotografia", cuja resolução apontava para uma adição (31 + 29 = ___). Os números da cadeia ancoraram nos cálculos (31 + 30), (31 + 29) e (30 + 29). As estratégias de resolução mais eficientes, que tinham sido discutidas, após a realização do problema no dia anterior, tinham como base estas situações de cálculo.

A segunda e a terceira cadeias de cálculo encadeavam no problema "A camisola do Fernando", cuja resolução poderia ser desenvolvida a partir da subtração direta (50 – 32 = ___), da subtração indireta (50 - ___ = 32) ou da adição indireta (32 + ___ = 50). Assim, na cadeia número dois, que antecedeu este problema, os cálculos foram encadeados no (50-30), para depois se avançar para o (50-31) e o (50-32). Na terceira cadeia de cálculo, que foi realizada no dia seguinte à resolução do problema, repetiram-se quatro cálculos da cadeia anterior, sempre ancorados em torno do (50-30), aos quais se acrescentaram mais dois cálculos com lacunas (30+__=50) e (32+__=50), que pretendiam reforçar a utilização de estratégias de cálculo com base na adição indireta.

As cadeias de cálculo quatro e cinco estavam ligadas ao problema "Vamos comprar bicicletas", que poderia ser resolvido através da subtração direta (185 – 79 = ___) ou da adição indireta (79 + ___ = 185). As duas cadeias ancoraram no cálculo (185-80), calculando a partir daí (185-79), de acordo com os números envolvidos no problema.

A sexta e a sétima cadeias de cálculo estavam relacionadas com o problema "O mealheiro da Sofia", que seria resolvido a partir da adição (99 + 125 = ___). As duas cadeias ancoraram nas adições de (100+100), (99+100), (100+125) e (99+125), de forma flexibilizar o cálculo que o problema requeria e possibilitando a utilização de múltiplas estratégias.

As duas cadeias que se seguiram encadeavam no problema "O parque de estacionamento", que poderia ser resolvido através da subtração direta (400 – 150 = ___) ou da adição indireta (150 + ___ = 400), envolvendo estratégias de cálculo mental relacionadas com o método dos saltos e da compensação. Assim a cadeia de cálculo que antecedeu a resolução do problema centrou-se na subtração (400-150), encadeando cálculos que envolviam a decomposição do subtrativo (400-50) e (400-100), mas também (400-200), que poderia ser uma estratégia de compensação a utilizar. Na cadeia que se seguiu ao problema, para além das situações de cálculo anteriores, foram adicionadas outras com base na adição (150+___=400) e (200+___=400).

As cadeias de cálculo dez e onze estavam ligadas ao problema "A bateria do Gonçalo". Tratando-se de uma subtração com o significado *retirar*, uma das possibilidades para a sua resolução era o cálculo 600 – 495 = ___. Assim, a cadeia número 10 ancorou no cálculo (600-500), a partir do qual poderia ser facilmente resolvido o 600-495. A cadeia que se seguiu à resolução do problema manteve situações de cálculo com base na subtração direta, tendo sido acrescentadas três situações de adição indireta, tendo o cálculo (500+___=600) como ponto de partida.

As duas cadeias que se seguiram encadeavam no problema "As garrafas de água". As adições sucessivas, a utilização dos dobros e a formação de grupos estiveram na base das duas cadeias, já que o contexto do problema poderia ser traduzido na adição sucessiva do número 12, tendo sido este um dos cálculos selecionados, aos quais se juntaram outros que poderiam auxiliar os alunos a tornar o seu raciocínio mais flexível e eficiente.

A última cadeia de cálculo desta experiência de ensino antecedeu a resolução do problema "Vamos arrumar as folhas", tendo sido trabalhadas situações de adições sucessivas e formação de grupos, com recurso aos dobros, encadeando com os números do problema.

Capítulo 5

ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo apresento a análise da resolução das tarefas propostas tendo como referência o quadro teórico proposto por Beishuizen (1997) relativamente às estratégias utilizadas pelos alunos. A análise das tarefas é apresentada nos três momentos que compõem este estudo. Primeiro surgem as resoluções do teste diagnóstico, em seguida as da experiência de ensino e, por fim, as do teste final.

As resoluções das tarefas foram analisadas seguindo a sua ordem de aplicação, de forma a facilitar a compreensão da evolução das estratégias utilizadas pela turma.

Na análise da resolução das tarefas começo por apresentar uma tabela com a síntese das estratégias utilizadas pelos cinco alunos que integram o estudo. Em seguida, centro a análise em cada tarefa individualmente e apresento as diversas estratégias utilizadas, as resoluções dos alunos, assim como os diálogos ocorridos durante a experiência de ensino e da entrevista que se seguiu ao teste final.

Após a análise das resoluções dos problemas que compõem cada momento deste estudo, apresento uma síntese das estratégias utilizadas e do desempenho dos alunos.

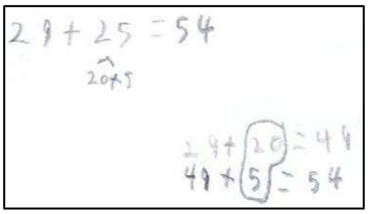
5.1. Teste diagnóstico

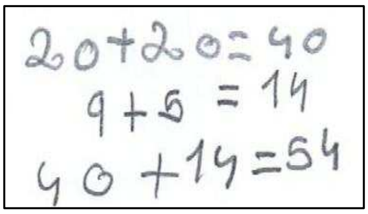
Tabela 5.1. Estratégias utilizadas pelos alunos no teste diagnóstico

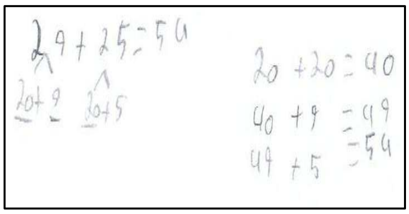
Tarefa	**Estratégias**				
	N10	**A10**	**1010**	**10's**	**N10C**
1 TD "A visita de estudo" (Adiç./Acresc.)	2	-	2	1	-
2 TD "O Dia do Pai" (Adiç./Comb.)	2	-	2	1	-
3 TD "Os animais de estimação" (Sub./Complt.)	4	1	-	-	-

4 TD “Os berlindes” (Sub./Ret.)	5	-	-	-	-
5 TD “Vamos comprar um relógio (Sub./Comp.)	5	-	-	-	-
6 TD 49 + 35 =	2	-	2	-	1
7 TD 25 + 28 =	3	-	1	-	1
8 TD 63 – 19 =	4	-	1	-	-
9 TD 82 – 40 =	2	-	-	-	3

O problema 1, “*A visita de estudo*”. As resoluções dos alunos revelam o uso de três estratégias diferentes. Carlota e Jorge recorrem ao método dos saltos (N10) e adicionam a partir do primeiro número, decompondo o segundo em 20 mais 5. Já Sónia e Sara decompõem os dois números em unidades e dezenas e adicionam posteriormente dezenas com dezenas e unidades com unidades (1010). Francisco também usa a decomposição, utilizando a estratégia (10’s), que varia do 1010 no momento de adicionar as unidades.



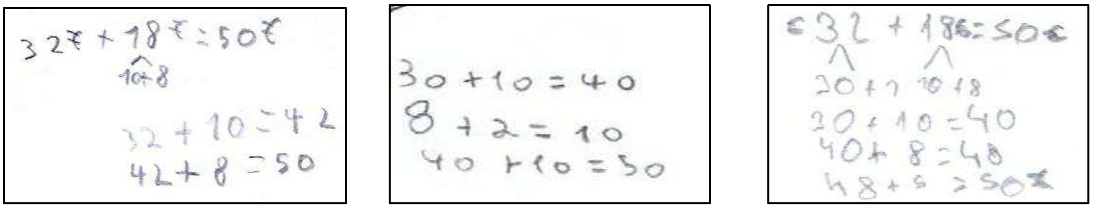




Carlota *Sónia* *Francisco*

Figura 5.1. – Resolução de Carlota, Sónia e Francisco da tarefa 1 TD

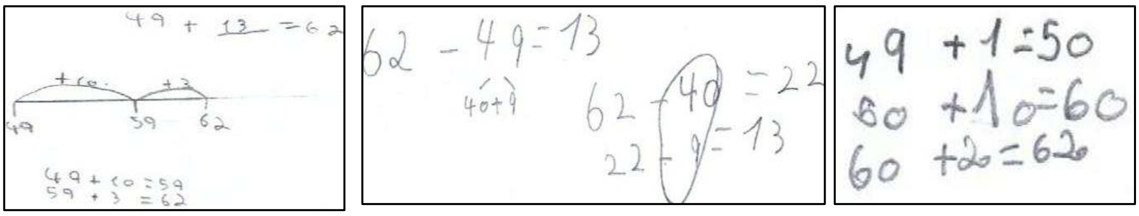
O problema 2, *“O Dia do Pai”*. Neste problema foram utilizadas as três estratégias do problema anterior. Carlota (N10), Sónia e Sara (1010) repetiram as estratégias de resolução do problema anterior. Francisco utiliza o método dos saltos, através da estratégia N10 e Jorge usa a decomposição (10's).



Carlota Sara Jorge

Figura 5.2. – Resolução de Carlota, Sara e Jorge da tarefa 2 TD

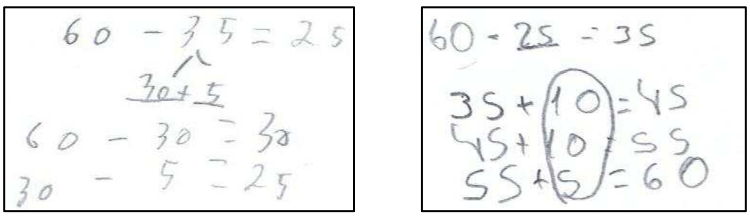
O problema 3, *"Os animais de estimação"*. Este problema é uma situação de subtração com o significado *completar*. As resoluções dos alunos evidenciam o uso de duas estratégias diferentes, ambas com recurso ao método dos saltos. Sara, Francisco, Jorge e Carlota utilizam a estratégia N10, embora os três primeiros alunos com recurso à adição indireta, dando saltos a partir do número 49 até chegar a 62. Carlota utiliza a subtração direta e retira 49 a 62. Sónia usa à adição indireta e faz o arredondamento à dezena seguinte (A10).



Sara Carlota Sónia

Figura 5.3. – Resolução de Sara, Carlota e Sónia da tarefa 3 TD

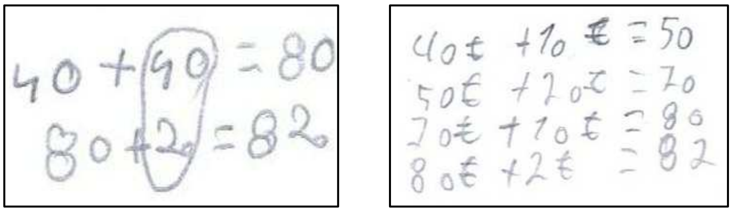
O problema 4, *"Os berlindes"*. As resoluções dos alunos evidenciam a utilização da estratégia N10. Sónia, Francisco, Sara e Carlota utilizam a subtração direta e retiram 35 a 60, decompondo 35 em 30 mais 5. Jorge, embora também tenha utilizado a mesma estratégia, usou a adição indireta para a resolução do problema.



Francisco Jorge

Figura 5.4. – Resolução de Francisco e Jorge da tarefa 4 TD

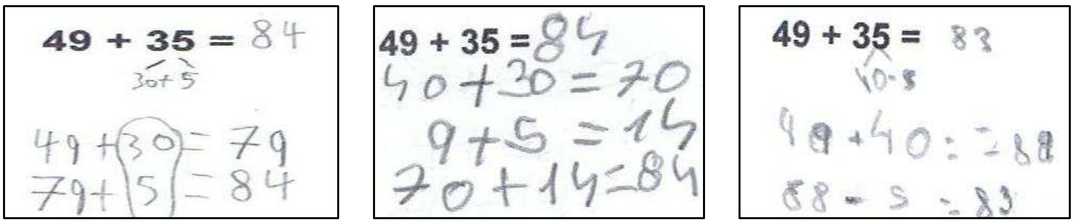
O problema 5, *"Vamos comprar um relógio".* Neste problema os cinco alunos utilizam o método dos saltos (N10), adicionando números a partir de 40. Sónia, Sara, Carlota e Jorge dão um salto de 40, adicionando 40 com 40 e, no segundo passo de cálculo, adicionam 2 a 80 para obter 82. Francisco usa um primeiro salto de 10, fazendo 40 mais 10, e, em seguida, um salto de 20, obtendo 70, ao qual adiciona 10 e, no último salto, 2, atingindo o número 82.



Sónia *Francisco*

Figura 5.5. – Resolução de Sónia e Francisco da tarefa 5 TD

A tarefa 6. Esta tarefa (49+35) é a primeira de quatro situações numéricas sem contexto. A resolução dos alunos é diversificada. Carlota e Francisco utilizam a estratégia N10. Os dois alunos adicionam a partir do primeiro número e decompõem o segundo em 30 mais 5. Sónia e Sara optam pela estratégia 1010. Primeiro, decompõem os dois números em unidades e dezenas e, posteriormente, adicionam-nas separadamente



Carlota *Sónia* *Jorge*

Figura 5.6. – Resolução de Carlota, Sónia e Jorge da tarefa 6 TD

A tarefa 7. Na tarefa seguinte (25+28), Francisco, Carlota e Sara mantêm as estratégias de resolução da tarefa anterior. Jorge opta pelo método dos saltos (N10) e Sónia pela compensação (N10).

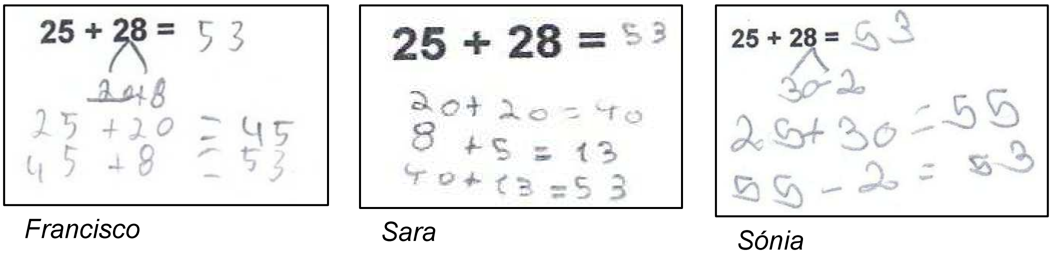


Figura 5.7. – Resolução de Francisco, Sara e Sónia da tarefa 7 TD

A tarefa 8. Nesta tarefa (63-19) Francisco e Carlota mantêm a opção pela estratégia N10, decompondo 19 em 10 mais 9. Os restantes alunos utilizam a decomposição. Jorge, Sara e Sónia recorrem à estratégia 10's e decompõem 63 em 60 mais 3 e 19 em 10 mais 9. No primeiro passo de cálculo retiram 10 a 60 e ao resultado obtido subtraem 9. No último passo de cálculo adicionam 3. Jorge é o único aluno que apresenta um resultado diferente dos colegas. O primeiro passo de cálculo é igual ao de Sara e Sónia, no entanto, em seguida adiciona 9 ao resultado obtido, o que o conduz a um resultado incorreto.

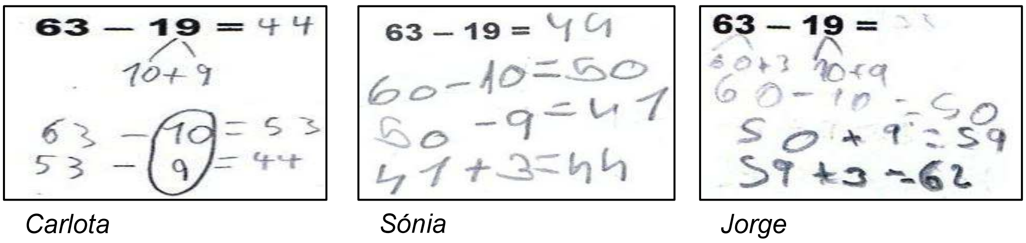


Figura 5.8. – Resolução de Carlota, Sónia e Jorge da tarefa 8 TD

A tarefa 9. Na última tarefa do teste diagnóstico (82-40) Francisco e Carlota mantêm a opção pela estratégia N10, decompondo o número 40, embora o façam de uma forma diferente. Francisco decompõe 40 em 20 mais 20, enquanto Carlota parte em 30 mais 10. Jorge, Sara e Sónia evidenciam a utilização da compensação. Os três alunos retiram 40 a 80 e, em seguida, adicionam 2, obtendo o resultado final.

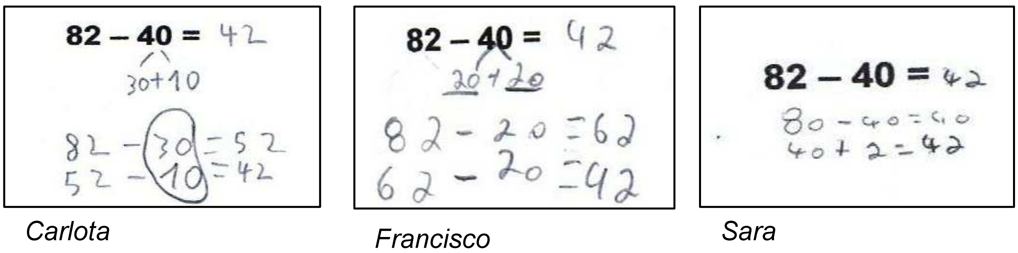


Figura 5.9. – Resolução de Carlota, Francisco e Sara da tarefa 9 TD

5.1.1. Síntese

A estratégia N10 foi a mais utilizada pelos alunos na resolução dos cinco problemas que compõem o teste diagnóstico. A opção por esta estratégia é mais evidente nos problemas cujo contexto aponta para a subtração. Nos problemas 4 e 5, todos os alunos optam pela estratégia N10 e no problema três, só a Sónia usa a estratégia A10, que se insere, igualmente, no método dos saltos. Nos dois primeiros problemas, que envolvem adições, os alunos usam estratégias mais diversificadas, já que recorrem também à decomposição, através das estratégias 1010 e 10's.

Os registos escritos evidenciam, ainda, que nos problemas de subtração os alunos utilizam a adição indireta, exceto no problema 4, subtração com significado *retirar*, no qual só Jorge usa a adição indireta. No problema 3, subtração com significado *completar*, só Carlota recorre à subtração direta, enquanto no problema 5, subtração com significado *comparar*, todos utilizaram a adição indireta.

Nas tarefas de cálculo sem contexto, a estratégia N10 também foi a mais utilizada. Os alunos Carlota e Francisco recorreram a esta estratégia nas quatro tarefas. A compensação (N10C) surgiu em três tarefas. Sónia foi a aluna que mais usou esta estratégia. O recurso à decomposição (1010 e 10's) também é evidenciado nas resoluções dos alunos. A estratégia 1010 foi utilizada na adição, enquanto a estratégia 10's surgiu na subtração. As estratégias de cálculo foram mais diversificadas nas tarefas de adição.

5.2. Experiência de Ensino

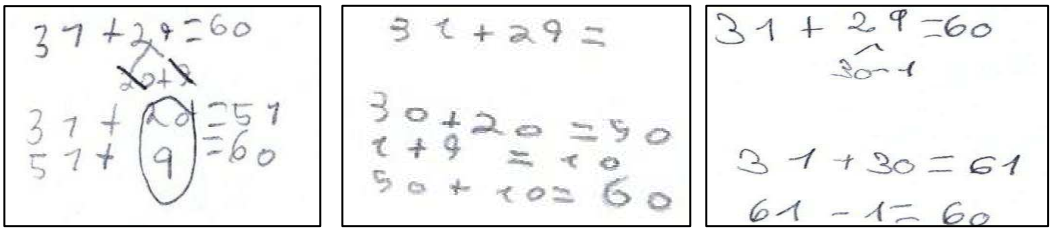
Na tabela 5.2. resumem-se as estratégias usadas pelos alunos ao longo da experiência de ensino, cuja análise detalhada é feita em seguida.

Tabela 5.2. Estratégias utilizadas pelos alunos na experiência de ensino

Tarefa	**Estratégias**					
	N10	**A10**	**1010**	**10's**	**N10C**	**Dobros**
1 EE "Os rolos de fotografia" (Adiç./Comb.)	2	-	1	-	2	-

2 EE "A camisola do Fernando" (Sub./Ret.)	3	-	-	-	2	-
3 EE "Vamos comprar bicicletas" (Sub./Comp.)	4	1	-	-	-	-
4 EE "O mealheiro da Sofia" (Adiç./Acresc.)	2	-	1	-	2	-
5 EE "O parque de estacionamento" (Sub./Complt.)	5	-	-	-	-	-
6 EE "A bateria do Gonçalo" (Sub./Ret.)	4	-	-	-	1	-
7 EE "As garrafas de água" (Mult./Aditivo)	-	-	2	-	-	3
8 EE "Vamos arrumar as folhas" (Div./Medida)	5	-	-	-	-	-

O problema 1, *"Os rolos de fotografia".* As resoluções dos alunos neste problema revelam o uso de três estratégias diferentes. Carlota e Francisco utilizam a estratégia N10, enquanto Jorge e Sara usam a estratégia 1010. Sónia recorre à compensação (N10C) e adiciona 1 a 29 para obter 30. Em seguida, soma 31 mais 30 e retira 1 ao resultado, fazendo a compensação.



Francisco *Sara* *Sónia*

Figura 5.10. – Resolução de Francisco, Sara e Sónia da tarefa 1 EE

No momento da aula destinado à apresentação das várias estratégias, Sónia explica à turma o seu raciocínio:

Sónia – A conta que nós tínhamos de fazer era 31 mais 29 para saber quantas fotografias tinha, ao todo, tirado. Eu vi que o 29 estava perto do 30, porque 29 é 30 menos 1. Depois fiz 31 mais 30 igual a 61 e depois 61 menos 1 igual a 60.
Professor – Alguém quer fazer uma pergunta?
Jorge - Porque decidiste fazer o 29 em 30 menos 1?
Sónia – Porque eu vi que o 29 estava perto e lembrei-me de fazer assim a conta, porque é mais fácil de fazer do que por exemplo 31 mais 20 igual a 51.
Professor – Como é que tu sabes que 31 mais 30 são 61?
Sónia - Eu sei que 30 mais 30 são 60 e 60 mais 1 é 61.
Professor – (…) então e o 61 menos 1?
Sónia – [aponta para o número 29 na indicação] – Nós só tínhamos 29 e não 30, então tínhamos de tirar 1 e deu-me 60.

Durante a resolução do problema, os alunos não evidenciam dificuldades na seleção da estratégia que querem seguir, assim como nos passos de cálculo. Após a apresentação no quadro das três estratégias e da sua discussão, os alunos concluem que a resolução seguida por Sónia é a mais eficiente:

Professor – Todos chegaram ao mesmo resultado. Então podemos dizer que todos foram eficazes porque conseguiram chegar ao resultado certo. O João tirou 60 fotografias. O que quer dizer eficaz?
Alunos – Boas.
Professor – Boas, porque conseguiram realizar a tarefa. Se tivessem de escolher uma entre estas três, qual acham que e a melhor?
Alunos – A da Sónia.
Professor - Porquê a da Sónia?
Carlota – Porque ela foi a 30 e 30 era muito parecido com 31, que era o primeiro número.

Jorge – E também porque a maneira que ela fez foi mais fácil chegar ao resultado.

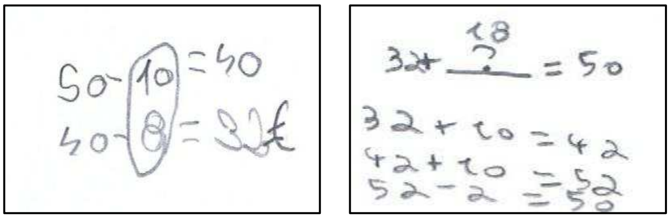
Para além de ser uma resolução diferente das dos colegas, a estratégia de Sónia possibilita um diálogo acerca das vantagens da utilização dos dobros, um facto básico, que os alunos deste ano de escolaridade utilizam sem grande dificuldade:

Professor – (…) Então e aqui a Sónia usou os…
Jorge – [interrompe] Os dobros.
Professor – Sim, os dobros e nós sabemos que trabalhar com os dobros é fácil. Nós sabemos que 20 mais 20 são?
Alunos – 40.
Professor – e 30 mais 30, são?
Alunos – 60.
Professor – Estão a ver todos conseguem calcular com os dobros. Foi o que a Sónia fez. Reparem que ela não tinha nenhum dobro, mas ao colocar o 30 em vez de 29 ficou com um número muito parecido com o 31. Então 30 mais 30 são 60, mais 1 são 61. No fim, como só tinha 29 teve de tirar 1 e ficou com 60.
Carlota – Nós só precisamos de saber os dobros até 10, depois é só acrescentarmos um 0.
Jorge – Sim, porque os números são repetidos.
Carlota – Pois, só acrescentamos zeros, por exemplo 10 mais 10 é como 1 mais 1, só acrescentámos um 0 e no resultado também vamos ter de acrescentar.

A cadeia de cálculo 1. Esta cadeia foi aplicada no dia seguinte à exploração da tarefa 1 e centra-se na resolução do cálculo (31+29), que usa os números envolvidos no problema "os rolos de fotografia". Antes de chegar a este cálculo, os alunos resolvem (31+30) através da decomposição de 31 em 30 mais 1. A presença do dobro é explorada por alunos e professor, por se tratar de uma referência que eventualmente possa ser facilitadora nas restantes operações envolvidas na cadeia. No cálculo seguinte (31+29) Jorge é o único aluno que constata que se utilizar a compensação (29=30-1) fica com os mesmos números do cálculo anterior. Os alunos não associam, no imediato, este cálculo ao problema do dia anterior, o que leva o professor a reforçar essa ligação. No cálculo seguinte (30+29) Carlota é a única que utiliza a compensação (30+30-1) para obter um dobro, os restantes decompõem 29 em 29 mais 9 para adicionar a 30.

Ao longo da cadeia os alunos efetuam cada cálculo sem considerar os anteriores que estão registados no quadro. O professor no final da cadeia evidencia a ligação que os seis cálculos tinham entre si e realça que a partir de (31+30) e de (30+29) poderiam ter facilmente chegado ao resultado dos restantes.

O problema 2 *"A camisola do Fernando".* Esta tarefa envolve uma subtração com o significado *retirar*. As resoluções dos alunos evidenciam a utilização de duas estratégias diferentes. Francisco e Sónia utilizam a estratégia N10, recorrendo à subtração indireta. Sara também inicia a resolução do problema através da estratégia N10, mas com recurso à adição indireta (32+10=42). A aluna no último passo de cálculo usa a compensação (N10C), utilizando as duas estratégias na mesma resolução (42+10=52; 52-2=50).



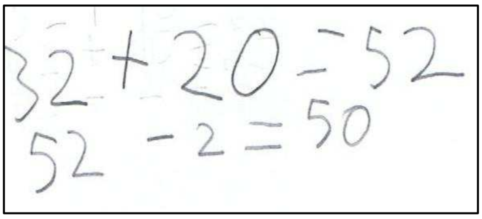
Sónia *Sara*

Figura 5.11. – Resolução de Sónia e Sara da tarefa 2 EE

Depois de ter apresentado a sua estratégia aos colegas, Sara é questionada pelo professor acerca da opção de ter adicionado 42+10 quando o objetivo era chegar a 50:

> **Professor –** Depois de teres somado 32 mais 10, voltaste a somar 10. Porquê?
> **Sara –** Porque 10 é muito fácil de somar. 42 mais 10 são 52.
> **Professor –** E o que fizeste a seguir
> **Sara –** Vi que tinha de tirar 2 para dar 5
> **Professor –** Então qual é o valor do troco?
> **Sara –** 18 euros.

Jorge e Carlota utilizam a compensação (N10C) para resolver o mesmo problema. Os dois alunos adicionam 32 mais 20, para, em seguida, retirarem 2, obtendo 50.



Carlota

Figura 5.12. – Resolução de Carlota da tarefa 2 EE

Na apresentação da sua estratégia aos colegas, a aluna explica a sua opção:

Carlota – Eu fui a 32, que era o preço da camisola e tentei ir até 50. Então fiz 32 mais 20, só que já passava de 50. Então fiz menos 2 e já me dava 50.

Contudo, quando a aluna é questionada pelo professor acerca do resultado, refere que é 22 euros. Esta resposta suscita um diálogo com a turma, já que Sónia verifica que, apesar de a estratégia ser a mesma de Jorge, o resultado é diferente:

Sónia – Ela [a Carlota] fez tudo bem, mas o resultado é 18, porque nos números do meio é 20 menos 2, então tem de dar 18, se fosse mais é que dava 22.
Carlota – Enganei-me. Enganei-me nessa parte.
Professor – Por que colocaste 22 no resultado?
Carlota – Acho que não estava muito concentrada.
Professor – Achas que podia ser 22?
Carlota – Não, porque eu tenho 20 menos 2.
Professor – A Sónia disse que usaste a mesma estratégia do Jorge, mas o resultado dele é 18…
Carlota – É 18. Eu também acho que é 18.

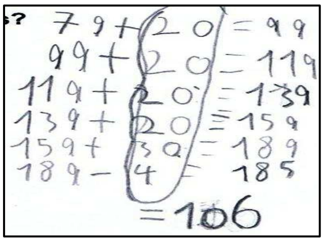
Carlota evidencia a intenção de se aproximar de 50 no primeiro passo de cálculo e utiliza logo o número 20. Ao constatar que ultrapassa o valor pretendido em duas unidades, retira-as e aplica a compensação. Contudo, o resultado que apresenta não estava correto, já que em vez de retirar as duas unidades em excesso ao número 20, como indica na resolução, acaba por somá-las. Um erro que reconhece no momento da aula destinado à discussão das estratégias.

As cadeias de cálculo 2 e 3. Este problema foi intercalado nas cadeias de cálculo 2 e 3. Na cadeia de cálculo 2 a subtração 50-30 tinha como objetivo servir de referência para os alunos calcularem, mais adiante, 50-32, precisamente os números que constavam no problema. Contrariamente ao verificado na primeira cadeia de cálculo, os alunos utilizam os resultados das subtrações anteriores para resolver o cálculo seguinte. Desta forma, 50-30 é calculado a partir de 50-20. Segue-se o cálculo 50-32. Os alunos adotam como referência 50-30=20 e retiram duas unidades ao resultado porque, como justificam, como 32 é maior do que 30, o resultado tem de ser menor porque se retira uma quantidade superior. Todas situações de cálculo desta cadeia eram subtrações, que os alunos resolveram sempre através da subtração direta.

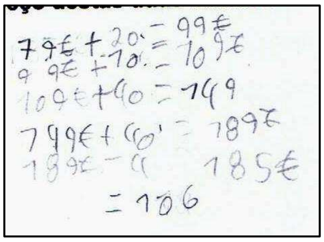
A cadeia de cálculo 3 repete quatro cálculos da cadeia anterior, ancorados em torno de 50 menos 30, aos quais se juntaram duas adições com lacunas (30+__=50) e (32+__=50) para reforçar a utilização de estratégias com base na adição indireta. A identificação dos alunos com o processo de aplicação da cadeia de cálculo, assim como a procura de cálculos que possam servir de referência para os restantes, é mais visível. Assim, 50-32, é resolvido a partir do resultado de 50-30. Jorge relaciona os números registados no quadro com o problema anterior e explica como, na véspera, resolveu o problema através da adição indireta. A intervenção de Jorge serve para o professor introduzir os últimos dois cálculos desta cadeia, precisamente duas situações que visam promover a resolução através da adição indireta. Na primeira (30+__=50), Francisco e Carlota dão saltos de 10 em 10 para chegar a 50, enquanto Sara e Sónia utilizam o cálculo 50-30=20, para referir que se 50 menos 30 são 20, então 30 mais 20 são 50. No último cálculo desta cadeira (32+__=50), os alunos tomam como referência (52-18=32), enquanto Carlota e Joel referem que já fizeram esse cálculo na resolução do problema anterior *"A camisola do Fernando".* O professor explora, ainda, uma estratégia alternativa a partir do cálculo (30+20=50).

O problema 3, *"Vamos comprar bicicletas".* Neste problema os alunos deparam-se, pela primeira vez, no âmbito deste estudo, com cálculos envolvendo números superiores a 100. As resoluções dos alunos neste problema, de subtração com o significado *comparar*, revelam a utilização de três estratégias. Francisco, Carlota e Sara apresentam duas estratégias. Nas suas resoluções é evidenciada a utilização da estratégia N10 nos primeiros passos de cálculo e da compensação (N10C) nos últimos cálculos. Sara parece seguir a estratégia utilizada no problema anterior, embora, desta vez, tenha optado pela subtração indireta. Já Francisco e Carlota utilizam a adição indireta, mas divergem nos números utilizados e nos saltos entre 79 e 185.

Contrariamente aos dois problemas anteriores, as resoluções dos alunos apresentam maior diversidade, pois, como acontece com Carlota e Francisco, utilizam vários passos intermédios de cálculo.



Carlota



Francisco

Figura 5.13. – Resolução de Carlota e Francisco da tarefa 3 EE

Esta opção deve-se às dificuldades sentidas pelos dois em saltar com números maiores. Os alunos usam números que para eles são de referência e fáceis de operar, como refere Carlota na sua apresentação:

Professor – Começaste por somar 20. Porquê?
Carlota – Porque é um número pequeno.
Professor – Como é que sabes que 79 mais 20 são 99?
Carlota – Eu sei que 70 mais 10 são 80, então 70 mais 20 são 90, como tínhamos 79, dá 99.
Professor – Depois continuaste sempre a somar 20…
Carlota – Porque quando fiz a primeira eu vi que era um número fácil de somar.

O mesmo argumento é utilizado por Francisco na apresentação da sua resolução:

Jorge – Por que usaste esses números?
Francisco – Eu comecei pelo 20 que é fácil, depois usei o 10 que é ainda mais fácil.
Jorge – No 79 podias ter feito mais 21 e dava 100.
Francisco – Para mim é mais difícil.
Professor – Por que começaste por somar 20 ao 79 e não 10 ou 30?
Francisco – Porque é fácil fazer 79 mais 20.

Professor – Mas depois somaste 99 mais 10…
Francisco – Porque tinha 99 mais 10 e eu sei que é 109.
Professor – Começaste com 20, depois com 10, mas depois deste um salto maior, de 40. Porquê?
Francisco – Porque eu fui de 10 em 10.
Professor – Então mas deste um salto de 40 ou foste de 10 em 10?
Francisco – Eu fui contando de 10 em 10 e vi que já tinha somado 40.
Professor – Então deste vários saltos de 10. Por exemplo, 119, 129…
Francisco – Sim.

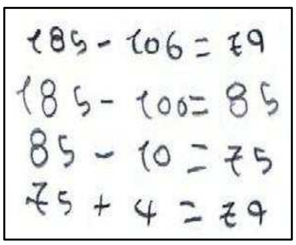
Através dos diálogos dos dois alunos com o professor e com os colegas da turma, verifica-se que, provavelmente, foram adicionando números com os quais se sentiam seguros para calcular a partir de 79 com o objetivo de chegar a 185 sem ter uma noção precisa do número de saltos necessários. A utilização da compensação (N10C), evidente nos registos dos alunos, afinal parece não ter sido propositada como se verifica após a sua apresentação à turma:

Professor – Mas quando chegaste ao 159 somaste 30.
Carlota – Porque achei que já estava a fazer muita conta e então decidi usar o 30 para ver o que dava.
Professor – Chegaste ao 189 e retiraste 4.
Carlota – Porque eu vi que o preço da bicicleta era 185 e eu já estava no 189. Então tive de tirar 4.

O mesmo poderá ter sucedido com Francisco, que foi adicionando 10 até ultrapassar 185:

Professor – Então e do 149 para chegares ao 189, como fizeste?
Francisco – Fui outra vez de 10 em 10.

Contrariamente aos dois colegas, Sara evidencia a utilização propositada do método dos saltos (N10) e da compensação (N10C), já que usa nos seus cálculos números de referência como 10 e 100, sendo a única que usou a subtração indireta.



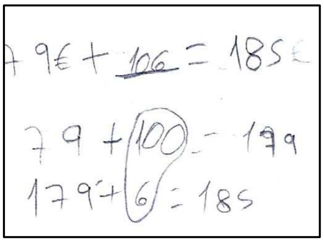
Sara

Figura 5.14. – Resolução de Sara da tarefa 3 EE

Sara – Eu tirei o 100 porque termina em zeros e os números que terminam em zeros são fáceis de tirar. Deu-me 85 e depois tirei 10. Eu tirei mais quatro, por isso tive de somar 4 no fim para chegar o 79.

Comparativamente com Carlota e Francisco, que também utilizam inicialmente a estratégia N10, Sara evidencia nos seus registos e na sua apresentação um maior conhecimento da grandeza e do valor dos números. A aluna aplica um conjunto de factos básicos que lhe permitiu calcular rapidamente e com precisão.

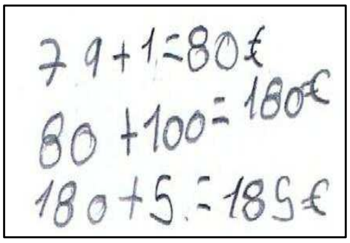
Jorge utiliza exclusivamente a estratégia N10, através da adição indireta. O aluno adiciona 100 a 79 e ao resultado deste cálculo adiciona 6, obtendo 185.



Jorge

Figura 5.15. – Resolução de Jorge da tarefa 3 EE

Sónia foi a única aluna cuja resolução evidencia a utilização da estratégia A10. Através da adição indireta, a aluna realiza três passos de cálculo. Começa por adicionar 1 a 79 para obter 80, soma em seguida 100 e chega a 180. A este resultado soma 5 e obtém 185.



Sónia

Figura 5.16. – Resolução de Sónia da tarefa 3 EE

Na apresentação da sua resolução à turma, a aluna explica o seu raciocínio:

Sónia – Eu somei 1 porque vi que 79 estava muito perto do 80 e é fácil somar com números que terminam em zero. Assim ia ser mais fácil somar com o número seguinte.
Francisco – Por que é que usaste o 100?

Sónia – Eu sabia que 100 mais 80 é 180, então 80 mais 100 também é 180. Depois foi só somar mais 5 para chegar ao 185.

A diversidade de resoluções apresentadas pelos alunos motiva uma discussão final mais prolongada comparativamente com as duas sessões anteriores. Depois de todas as estratégias terem sido registadas no quadro e discutidas depois da apresentação de cada aluno, o professor, como sempre acontece solicita para escolherem a resolução que consideram mais eficiente. Neste problema, a resolução de Jorge e de Sónia é a que reúne a preferência da turma por terem utilizado a adição e apresentarem poucos passos de cálculo. No entanto, a síntese da aula centra-se na análise mais pormenorizada das resoluções de Carlota e de Francisco. O professor desafia os alunos a darem sugestões aos dois colegas, partindo das resoluções apresentadas, de forma a reduzirem o número de passos de cálculo. O diálogo que se segue exemplifica as sugestões da turma relativamente à resolução de Carlota:

Sónia – A Carlota podia ter feito de outra maneira, sem usar tanta conta.
Carlota – Sim, podia ter somado 30 ou 40.
Professor – Trabalhar com o número 79, é fácil?
Carlota – Não.
Sónia – É mais fácil trabalhar com números terminados em 0 e em 5.
Professor – Então neste caso o que poderíamos fazer?
Sara – Trabalhar com o 80. O 79 está muito perto é só mais 1.
Professor – Sim. E depois do 80…
Sara – Mais 20 e tínhamos 100.
Professor – E do 100 para chegar ao 185?
Carlota – É mais 85.
Professor – E tínhamos feito só com 3 saltos.

A discussão das resoluções de Carlota e de Francisco e a apresentação de sugestões por parte dos colegas que conduzissem a alguma reflexão tem como objetivo ajudar os dois alunos a considerarem modelos alternativos, de forma a tornar o seu cálculo mais flexível.

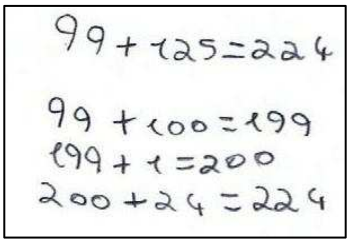
A cadeia de cálculo 4. A cadeia antecedeu a resolução deste problema e ancorou nos cálculos (185-70) e (185-80), para, a partir dessas referências, calcularem (185-79).

Para calcularem (185-70) os alunos decompõem o aditivo em 100 mais 85 e a 85 retiram 70, somando em seguida 100 para obterem o resultado. O cálculo 85 menos 70 é realizado através da subtração (80-70=10) acrescentando 5 no final. Já 185 menos 80 é calculado como se fosse (85-80=5) somando 100 ao resultado obtido. Os alunos resolvem o último cálculo da cadeia (185-79) através de (185-70=115) retirando 9 ao resultado e obtêm 106. Sónia utiliza a referência (185-80=105), no entanto, fica na dúvida se há de retirar ou acrescentar 1 ao resultado. Na dúvida a aluna muda de referência (185-70=115) e chega ao resultado 106. A cadeia de cálculo termina com a discussão entre o professor e os alunos acerca da dúvida colocada por Sónia. Os alunos concluem que se retiram 80 a 185 em vez de 79, estão a subtrair uma unidade em excesso e que terá de ser adicionada ao resultado obtido.

A cadeia de cálculo 5. Esta cadeia decorreu após a resolução do problema e voltou a ancorar nos cálculos de referência da cadeia anterior. No entanto, o cálculo (185-79) antecedeu (185-80). As estratégias utilizadas para calcular (185-70) mantêm-se inalteradas. O terceiro cálculo (185-79) é associado, de imediato, por Jorge aos números envolvidos no problema que intercalou as duas cadeias de cálculo e apresenta a mesma estratégia que seguiu na sua resolução (79+<u>106</u>=185). Os restantes resolvem a partir do primeiro cálculo registado no quadro (185-70=115). Nenhum dos alunos utiliza a referência (185-80), contrariamente ao que se tinha verificado na cadeia de cálculo número 4, talvez devido à inversão da ordem de apresentação dos cálculos. Nas duas cadeias de cálculo, os alunos utilizam essencialmente a subtração direta, o que não se verifica na resolução do problema já que optam pela adição indireta e pela subtração indireta.

Os números envolvidos nas duas cadeias de cálculo permitiram um debate acerca da utilização da compensação em subtrações, já que os alunos denotavam dificuldades em saber se haviam de adicionar ou subtrair no último passo de cálculo sempre que retiravam um número superior ao que era necessário. Por exemplo no cálculo 185-79, resolvido através de 185-80=105, a dúvida surgiu no momento de adicionar ou retirar 1 a 105.

O problema 4 *"O mealheiro da Sofia".* Após a realização de dois problemas na experiência de ensino que envolviam a subtração, foi proposta a exploração deste problema de adição com o significado *acrescentar*. À semelhança do que se verifica na resolução do problema 1, de adição e significado *combinar*, os alunos voltam a apresentar estratégias com base no método dos saltos (N10), na decomposição (1010) e na compensação (N10C). Na resolução de Sara é também visível o recurso à estratégia A10 no segundo passo de cálculo. A aluna volta a utilizar duas estratégias de resolução, à semelhança do que fez nos problemas 2 e 3.



Sara

Figura 5.17. – Resolução de Sara da tarefa 4 EE

A aluna começa por somar 99 a 100. Depois, adiciona 1 e ao resultado deste passo de cálculo soma 24. Desta forma, aluna decompõe o número 25 em 24 mais 1 para poder fazer o arredondamento, como explica na apresentação à turma:

Sara – Eu fiz 99 mais 100 e deu 199. Como o 199 está muito perto do 200 acrescentei mais 1 e deu 200. Depois, como já tinha usado o 1 do 25 somei 24 e deu-me 224.

Na discussão da resolução apresentada por Sara, Carlota faz uma sugestão que poderia facilitar o primeiro passo de cálculo, propondo quem em vez de 99 mais 100 fizesse 100 mais 99:

Carlota – Para ti é mais fácil fazer 99 mais 100 ou 100 mais 99?
Sara – 100 mais 99, mas eu quis deixar o 99 em primeiro, como estava na conta.
Professor – Será que a Sara poderia trocar a ordem do 99 e do 125, apesar de a conta indicar 99 mais 125?
Alunos – Podia.
Carlota – Se para ela é mais fácil 100 mais 99, pode escrever isso.

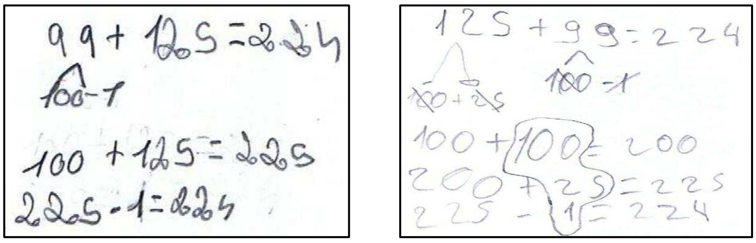
A discussão permite esclarecer a forma como a aluna adicionou 99 mais 100 e que não é visível nos seus registos:

Professor – Então como é que somaste 99 mais 100?
Sara – Eu pensei que 100 mais 100 são 200, menos 1 são 199.
Professor – Então mas não é isso que tens no quadro.
Sara – Pois…

Professor – Se fizeste 100 mais 100 menos 1, então deverias ter registado isso. Mas, diz-me se tivesses feito 100 mais 99, precisavas de ter pensado como se fosse 100 mais 100?
Sara – Não, é 199.
Professor – Somar qualquer número a 100 é…
Alunos – [interrompem] Fácil.

Desta forma, para além das estratégias N10 e A10, a aluna também recorre à compensação (N10C) no primeiro passo de cálculo, sem que o tenha registado. Embora demonstre fluência no cálculo e na forma como utiliza as várias estratégias de acordo com cada passo de cálculo, a discussão poderá ter ajudado a aluna a tornar a sua estratégia de resolução ainda mais eficiente.

Sónia e Jorge evidenciam nas suas resoluções a utilização da compensação (N10C). Sónia repete a estratégia de resolução do problema 1, já Jorge tinha utilizado a decomposição (1010). Embora utilizem a mesma estratégia, os registos dos dois alunos divergem na forma como fazem a indicação do cálculo e operam com o número 125.



Sónia *Jorge*

Figura 5.18. – Resolução de Sónia e Jorge da tarefa 4 EE

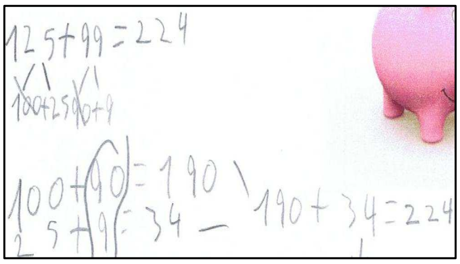
Sónia parece seguir o enunciado do problema na forma como faz a sua transposição para a linguagem matemática (99 + 125) e mantém o número 125 inteiro, enquanto Jorge aplica a propriedade comutativa ao colocar o fator de maior grandeza em primeiro lugar (125 + 99) e decompõe o número 125 em 100 mais 25. No entanto, após a explicação da sua estratégia, verifica-se que Sónia também decompôs 125 em 100 mais 25 de forma a facilitar o cálculo, tal como o seu colega. Os dois alunos calculam mentalmente 100 mais 125, somando 100 mais 100 e ao resultado adicionam 25, como é evidenciado nos registos de Jorge. Relativamente ao motivo por ter colocado o número 125 em primeiro lugar, Jorge explica:

Jorge – Eu comecei pelo 125 porque é mais fácil trabalhar pondo os números maiores em primeiro lugar.

Quando é questionado pelo professor acerca do motivo da transformação do número 99 em 100 menos 1, o aluno responde:

Jorge – Eu vi que 99 mais 1 é 100 e se eu partisse o 125 em 100 mais 1 ficava com um dobro, porque 100 mais 100 são 200.

Os registos da resolução de Carlota evidenciam a utilização da estratégia 1010, quando no problema 1 utilizou a N10.



Carlota

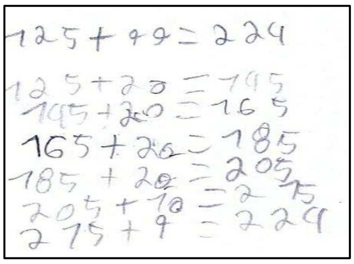
Figura 5.19. – Resolução de Carlota da tarefa 4 EE

Na explicação do seu raciocínio à turma, a aluna justifica que decompôs os dois números porque viu que 100 mais 90 é fácil de fazer, assim como 25 mais 9, porque, como refere, é um resultado que já sabe. A facilidade de cálculo, atendendo aos números envolvidos, parece estar na base da opção por esta estratégia. No entanto, a facilidade dos passos de cálculo anteriores não se verifica no momento de adicionar 190 mais 34. Quando o professor pergunta como fez este cálculo a aluna responde:

Carlota – Eu fiz 190 mais 10 que dá 200, depois fiz 200 mais 10, que dá 210, mais outros 10 são 220. Somei o 30 de 10 em 10. Depois mais 4, são 224.

Tal como no problema anterior, a aluna recorre a vários cálculos intermédios, contudo, desta vez, não os regista.

Pelo contrário, o registo escrito de Francisco é o que denota mais cálculos intermédios, repetindo o que fez no problema anterior. Tal como no problema 1, o aluno recorre à estratégia N10, coloca o número 125 em primeiro lugar e decompõe o mais pequeno, 99, em (20+20+20+20+10+9).



Francisco

Figura 5.20. – Resolução de Francisco da tarefa 4 EE

Quando é questionado pelos colegas acerca do motivo do uso de tantos passos de cálculo intermédios, o aluno justifica:

Francisco – Para mim é mais fácil usar números pequenos.
Carlota – E por que repetiste tantas vezes o número 20?
Francisco – [aponta para o quadro] Eu quero somar 99, então fiz 20 mais 20 igual a 40, 40 mais 20 igual a 60, 60 mais 20 igual a 80, mais 10 são 90 e mais 9 são 99.

A explicação de Francisco gera uma discussão em torno de alternativas mais eficientes de decompor o 99:

Carlota – Podias ter junto o 20 mais 20 que dava logo 40, ficava 125 mais 40 igual…
Francisco – [interrompe] Já sei, eu podia ter feito 40 mais 40 igual a 80 e depois 80 mais 10 são 90 e mais 9 são 99.

Tendo em atenção, as dificuldades em utilizar número maiores admitidas pelo aluno neste problema e no anterior, o professor pergunta:

Professor – Se utilizasses o 40, quanto é que seria 125 mais 40?
Francisco – [hesita] São 165.
Professor – E 165 mais 40?
Francisco – [prontamente] São 205.
Professor – Como é que pensaste?
Francisco – Eu usei o 20, fiz 125 mais 20 e depois mais 20.
Professor – Como é que Francisco poderia ter somado 125 mais 40?
Carlota – Ele só juntou os vintes, de resto é tudo igual.
Professor – Sim, mas como é que poderia ter feito este cálculo sem fazer novamente de 20 em 20?
Carlota – Pode fazer 120 mais 40 e depois junta 5.
Professor – E como é somas 120 mais 40?
Carlota – Pode pensar que 40 mais 20 são 60, mais 100 são 160 e mais 5 são 165.

Apesar de considerar outras alternativas, Francisco continua a dar saltos de 20 em 20. Comparativamente com o problema 1, denota evolução, já que nesse problema utilizou, essencialmente, saltos de 10 em 10.

Verifica-se, pelas resoluções apresentadas, que três dos cinco alunos aplicam a propriedade comutativa da adição, colocando em primeiro lugar o número de maior ordem de grandeza, enquanto Sara admite que essa opção poderia ter-lhe facilitado os cálculos. As vantagens do uso da propriedade comutativa neste problema são reforçadas pelo professor na discussão final. Relativamente às estratégias utilizadas, os alunos consideraram que as de Sónia e de Jorge são as mais eficientes por envolverem menos cálculos e por possibilitarem a utilização de um dobro, 100 mais 100, um facto básico que dominam.

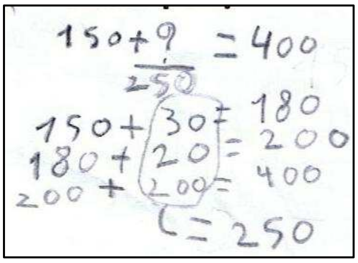
As cadeias de cálculo 6 e 7. As duas cadeias ancoravam nas adições de (100+100), (99+100) e (100+125), de forma a possibilitar a utilização de múltiplas estratégias para a resolução do problema *"O mealheiro da Sofia"* que envolvia a adição de 99 mais 125. Nas duas cadeias, o cálculo (100+100=) é um facto básico que os alunos demonstram conhecer, respondendo de imediato. Na adição seguinte (99+100) Francisco e Sónia invertem a ordem das parcelas e fazem (100+90+9=199). Os restantes alunos utilizam a referência (100+100=200) e retiram 1 ao resultado porque 99 é igual a 100 menos 1. As maiores dificuldades surgem na realização do terceiro cálculo da cadeia 6 (99+120=), que os alunos resolvem fazendo (100+99+20). As dificuldades residem no último passo de cálculo (199+20), com três dos cinco alunos a errarem o resultado. Seguindo o raciocínio dos alunos, o professor intervém e salienta que 199 está muito próximo de um número com o qual demonstram facilidade em operar, o 200, permitindo que se resolva através de (200+20-1). Esta estratégia surge ligada ao cálculo seguinte (100+125=), que os alunos resolvem sem dificuldade servindo-se do cálculo anterior (100+100+25=). Na sequência do diálogo que se foi estabelecendo ao longo da cadeia de cálculo, a adição (99+125=) não causa dificuldades de resolução. Os alunos revolvem-na arredondando 99 a 100 (100+100+25).

A cadeia 6 parece ter facilitado a resolução do problema seguinte e influenciado a opção pelo uso da compensação por parte de Sara, Sónia e Jorge. O mesmo sucede na cadeia de cálculo 7, que é posterior ao problema e na qual não se verificam as dificuldades verificadas anteriormente para calcular, por exemplo, (99+120), devido à utilização por parte de todos os alunos do arredondamento de 99 a 100

O problema 5 *"O parque de estacionamento"*. Neste problema as resoluções de todos os alunos evidenciam o uso da estratégia N10. A opção por uma única estratégia surge pela primeira vez no âmbito deste estudo. Apesar desta coincidência de opções, verifica-se que Carlota, Francisco e Jorge utilizam a adição indireta, enquanto a Sónia e Sara optam pela subtração. Durante a resolução individual, não surgem dúvidas, sendo de salientar a rapidez com que os alunos concluem a tarefa.

Apesar de a estratégia ser a mesma, os passos de cálculo registados pelos alunos divergem bastante, provavelmente, de acordo com a forma como têm interiorizada a estrutura dos números e a sua grandeza.

Entre os alunos que utilizam a adição indireta, a Carlota é a única que usa o dobro (200 mais 200) para chegar ao número 400.



Carlota

Figura 5.21. – Resolução de Carlota da tarefa 5 EE

Este objetivo é assumido pela aluna na sua explicação à turma:

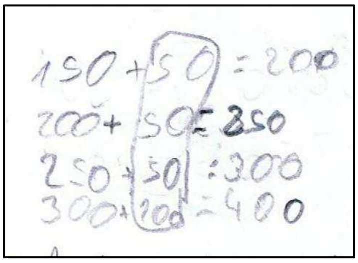
Carlota – Eu pensei em números que dessem para chegar a um número com o qual é fácil de trabalhar, que é o 200, porque 200 mais 200 são 400.

Perante a sua explicação, é evidente que domina este facto básico, contudo, a opção de dar um salto de 30 e outro de 20 para chegar ao 200, a partir do 150, leva Sara a intervir:

Sara – Carlota, para chegares ao 200, podias fazer 150 mais 50.
Carlota – Pois, mas eu pensei em números mais pequenos.
Professor – Mas, repara que 30 mais 20 são 50.
Carlota – Pois podia ter logo feito estes dois juntos. [aponta para o 30 e 20]

Professor – Sara, podes explicar à Carlota como é que podia somar 150 mais 50?
Sara – [hesita] Eu já sabia.
Professor – Mas consegues explicar?
Sara – [hesita e não responde]
Professor – Houve alguém que nos seus cálculos fez 150 mais 50?
Jorge – Eu fiz. É um resultado que já sabia. Eu sei que 100 mais 100 são 200. No 150 eu já tenho 100 mais 50, então faltam outros 50, porque 50 mais 50 são 100.

Tal como Carlota, Jorge também dá um salto para chegar ao número 200, contudo, consegue-o com apenas um passo de cálculo. No entanto, o aluno não aplica o dobro e soma 50. Ao resultado volta a juntar 50 até que chega ao 300. No último passo de cálculo adiciona 100 e chega a 400.



Jorge

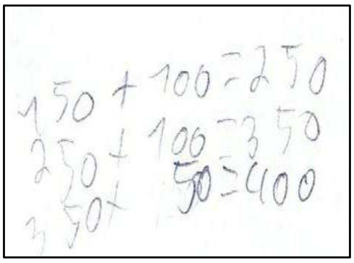
Figura 5.22. – Resolução de Jorge da tarefa 5 EE

O professor questiona Jorge acerca das adições sucessivas do número 50:

Professor – Primeiro somaste 50 a 150 e obtiveste 200. Foi uma boa ideia. Mas, em seguida, será que não podias ter dado um salto como fizeste de 300 para 400?
Jorge – [observa a sua resolução] Podia. Podia ter feito 200 mais 100.
Professor – Não era preciso usares dois saltos de 50.
Jorge – Sim, no 200 fazia logo mais 100. No 300 fiz isso porque já estava a usar muitas vezes o 50.

Antes de avançar para a apresentação seguinte, o professor compara os registos escritos dos dois colegas e salienta que a resolução de Jorge é mais eficiente que a de Carlota no primeiro passo de cálculo (150+50=200) para chegar ao 200, enquanto a opção de Carlota é mais rápida a partir daí, já que se serve do dobro de 200 (200 mais 200) para chegar a 400.

A resolução apresentada por Francisco evidencia a utilização de números de maior grandeza em comparação com os problemas anteriores, onde raramente apresentou saltos para além do 10 ou do 20. Tal como Carlota e Jorge, o aluno parte de 150 para chegar a 400, adicionando 100 nos dois primeiros passos de cálculo e 50 no terceiro.



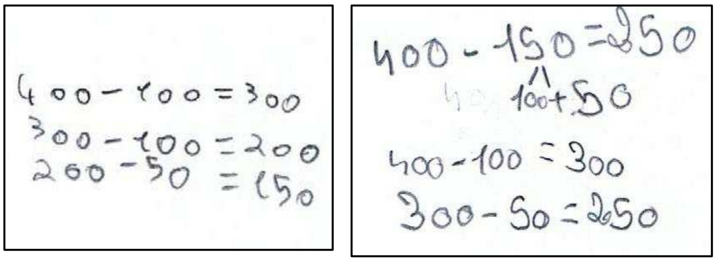
Francisco

Figura 5.23. – Resolução de Francisco da tarefa 5 EE

Quando é questionado pelo professor acerca da forma como pensou para realizar o cálculo 150 mais 100, Francisco responde:

Francisco - É fácil trabalhar com números terminados em dois zeros. Para fazer 150 mais 100, é só acrescentar 1 às centenas e dá 250.
Professor - E como é que sabes que 350 mais 50 são 400?
Francisco - 50 mais 50 são 100 [aponta para o 50 do número 350 e para o 50], então 300 mais 100 são 400.

As resoluções apresentadas por Sara e Sónia evidenciam o uso da subtração. Sara opta pela subtração indireta, tal como no problema 3, enquanto Sónia recorre à subtração direta e retira 150 a 400.



Sara *Sónia*

Figura 5.24. – Resolução de Sara e Sónia da tarefa 5 EE

O registo apresentado no quadro por Sara gera um diálogo entre os alunos, já que lhe identificam semelhanças com os cálculos apresentados por Francisco. O professor utiliza o para encontrar semelhanças com algumas resoluções já registadas no quadro:

> **Jorge -** Ela fez como o Francisco: 100, 100 e 50…
> **Carlota -** [interrompe] Pois mas ela usou contas de menos.
> **Professor -** O Francisco começou em 150 e deu saltos até chegar a 400.
> **Francisco -** A Sara começou no número 400 e quis terminar no 150.
> **Professor -** Os saltos que eles deram foram iguais. Sara qual foi a razão de teres começado em 400 e terminado em 150?
> **Sara -** 150 era o número de lugares ocupados. Eu fui a 400 e tirei números até chegar a 150.
> **Professor -** Tal como alguns colegas disseram, a Sara fez o contrário daquilo que o Francisco, o Jorge e a Carlota apresentaram. Eles partiram de 150 até chegar a 400 e a Sara partiu de 400 até chegar a 150. Quantos lugares estão livres?
> **Sara -** 250.

Na síntese da aula, o professor realça que todos os alunos usaram saltos para chegar ao resultado, sendo que alguns utilizaram a adição e outros a subtração. Os alunos concluem que, na adição, a resolução mais eficiente seria uma junção entre o que Jorge e Carlota apresentaram.

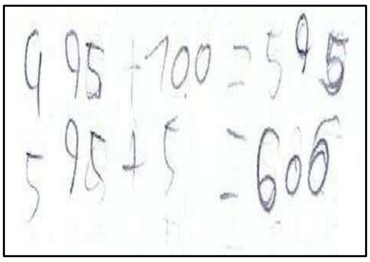
A cadeia de cálculo 8. A resolução do problema foi antecedida pela cadeia de cálculo 8, que se centrou na subtração (400-150), encadeando cálculos que envolviam a decomposição do subtrativo (400-50) e (400-100), mas também a compensação através da subtração (400-200). O cálculo (400-150) é resolvido pelos alunos através da decomposição do subtrativo (400-100-50). Já a subtração (400-200) é realizada pela subtração de duas parcelas de 100 (400-100-100) por Sara, Sónia e Francisco, enquanto Carlota e Jorge afirmam que se 200 mais 200 são 400, então 400 menos 200 são 200.

A cadeia de cálculo 9. Nesta cadeia, para além das situações de cálculo anteriores, foram adicionadas outras com base na adição (200+__=400) e (150+__=400). O cálculo (400-150), tal como na cadeia de cálculo anterior e no problema, é resolvido por alguns alunos através da decomposição de 150 (400-100-50=). No entanto, Sara opta pela compensação, retirando 200 (400-200=200) e adicionando 50 (200+50=250). Nenhum dos alunos que resolveram o problema no dia anterior através da adição indireta usa este processo na cadeia 9. Carlota, uma das alunas que utilizou a adição na resolução do problema, refere que na cadeia de cálculo usa a subtração porque está lá um sinal de menos (400-150). Nos cálculos com lacunas que integram esta cadeia, os alunos para resolver (150+__=400) dão um salto de 50 para chegar a 200 e dois saltos de 100 para chegar a 400 e, após uma intervenção do professor no sentido de relembrar o que tinha sido discutido no dia anterior relativamente a estratégias mais eficientes, afirmam que também poderia ser resolvido com um salto de 50 e outro de 200.

O problema 6 *"A bateria do Gonçalo".* Este problema remete para uma subtração com o significado *retirar*. As resoluções apresentadas pelos alunos evidenciam a utilização das estratégias N10 e N10C.

Comparativamente com o problema 2, que tinha o mesmo significado, verifica-se que apresentam as mesmas estratégias, embora a compensação seja utilizada por menos alunos neste problema. Sara e Francisco são os únicos que mantêm a opção pela mesma estratégia (N10) nos dois problemas.

Entre os alunos que resolvem através da estratégia N10, Carlota e Francisco usam a adição indireta (495+100=595; 595+5=600). A opção pela adição indireta também já se verificou no problema 2 com estes dois alunos.



Francisco

Figura 5.25. – Resolução de Francisco da tarefa 6 EE

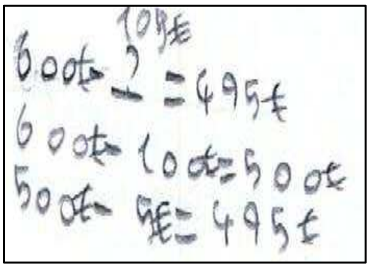
Tal como no problema 5, Francisco utiliza números de maior grandeza. O número 100 parece ter passado a ser uma referência para o aluno:

Francisco - Eu usei o 100 para não usar números mais pequenos e assim dou menos erros.
Professor - E como é que sabes que 495 mais 100 são 595?
Francisco - É só somar 1 ao 4, porque o resto fica igual [aponta para a terminação do 495].

A opção pelo recurso à adição também é questionada pelo professor:

Francisco - A bateria custou 495, então fui somar números até chegar ao 600, que era o dinheiro que a avó lhe deu.

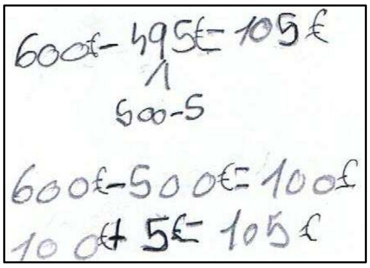
Sara e Jorge também apresentam a estratégia N10, mas chegam ao resultado através da subtração indireta. Os dois alunos retiram 100 a 600 e obtêm 500, ao qual subtraem 5 para chegar a 495.



Sara

Figura 5.26. – Resolução de Sara da tarefa 6 EE

Sónia é a única aluna que chega ao resultado através da compensação, usando a subtração direta, a aluna retira 500 a 600 e compensa no segundo passo de cálculo, adicionando 5.



Sónia

Figura 5.27. – Resolução de Sónia da tarefa 6 EE

Na explicação que faz à turma, a aluna justifica a utilização do número 500 porque, na sua opinião, facilita os cálculos por terminar em zeros e por estar muito próximo de 495.

No âmbito deste estudo, é a primeira que um aluno usa a compensação na subtração. Embora seja aplicada com relativa facilidade na adição, a compensação na subtração, por vezes, causa dificuldades aos alunos quando têm de compensar o valor em excesso e apresentam dúvidas se o devem adicionar ou subtrair. Durante a resolução do problema, o professor constata que a aluna estava hesitante em adicionar ou subtrair 5 no último passo de cálculo e solicita-lhe que esclareça o motivo dessa dúvida:

Sónia - Eu tirei 500 [aponta para o cálculo 600-500] e sei que tirei 5 a mais, mas depois não sabia se havia de tirar ou pôr. Depois eu lembrei-me que 495 são 500 menos 5, então tinha de pôr.

Embora a resolução apresentada por Sónia esteja correta, a explicação apresentada é algo confusa. O professor decide acentuar a discussão em torno do último passo de cálculo e envolve a turma:

Professor - Recordam-se que na quarta-feira, nas cadeias de cálculo, houve uma situação parecida e vocês estavam com dúvidas para decidir se somavam ou subtraíam no fim?
Alunos - Sim.
Sónia - Professor, eu também percebi que se entre 600 e 495 havia 105, então no fim eu tinha de somar 5 [aponta para o cálculo 100+5] porque já tinha 100. Foi assim que percebi.
Professor - Mas como é que sabias que entre 600 e 495 havia 105?
Sónia - Porque de 495 para 500 são 5 e de 500 para 600 são 100.

Perante a dúvida com que se deparou durante a resolução, a aluna evidencia ter confirmado a razoabilidade do resultado que obteve fazendo a operação inversa.

Professor - Como acabaste de dizer entre 500 e 600 são logo 100, por isso, o resultado nunca podia ser inferior a 100, não era? Mas, vamos voltar a olhar para o que está no quadro. A bateria só custou 495 euros mas nós tirámos 500 porque nos dava jeito para fazer as contas. A minha pergunta é: tirámos dinheiro a mais ou a menos?
Carlota - A mais, porque a bateria só custa 495 euros. Nós tirámos 5 a mais então tivemos de os devolver.
Professor- Exatamente. Estamos a tirar 5 a mais, então temos de os devolver [aponta para o cálculo 100+5].

A estratégia é bem recebida pelos alunos, sobretudo, os que utilizaram a adição indireta, por lhes facilitar, ainda mais, os cálculos, como admitiram. A resolução de Sónia é valorizada por Jorge, aluno que já tinha utilizado a compensação em dois problemas anteriores, enquanto os restantes colegas referem que pode causar algumas dificuldades no último passo de cálculo, concretamente, no momento de decidir se é necessário adicionar ou subtrair para fazer a compensação.

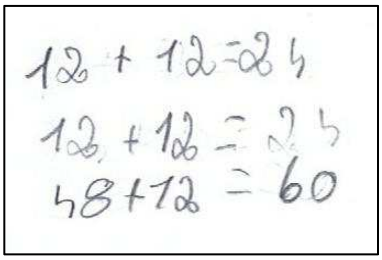
As cadeias de cálculo 10 e 11. A cadeia 10 ancorou no cálculo (600-500), enquanto a cadeia 11 integrou três subtrações e três situações de adição indireta, tendo o cálculo (500+__=600) como ponto de partida.

Na cadeia 10, que antecedeu o problema, o cálculo (600-495) surge após três subtrações diretas. Os alunos resolvem esta subtração decompondo o subtrativo em (600-400-95), utilizando o segundo cálculo da cadeia (600-400=200), embora admitam dificuldades para realizar o último passo de cálculo (200-95). O professor intervém e questiona se no quadro não haverá outro cálculo que pudesse ser mais útil. Sónia afirma que (600-500=100) poderia ser mais fácil, no entanto, a aluna refere que no fim tem dificuldades em saber se tem de adicionar ou retirar 5 ao resultado. Esta dúvida gera um diálogo entre o professor e os alunos, dado que é uma dificuldade que demonstram sempre que têm de utilizar a compensação numa subtração.

Na cadeia de cálculo 11 quando surge novamente o cálculo (600-495) Sara e Francisco decompõem o subtrativo (600-400-90-5), enquanto Carlota, Sónia e Jorge utilizam (600-500=100) e compensam adicionando 5 ao resultado. Sónia refere que optou por esta estratégia na resolução do problema *"A bateria do Gonçalo".* Nos cálculos com lacunas depois de resolverem (500+__=600), os alunos deparam-se com a adição (495+__=600). Francisco resolve a partir do cálculo (600-495=105), os outros quatro alunos adicionam 5 a 495 e a seguir 100 para chegar a 600 (495+5+100=600).

O problema 7 *"As garrafas de água".* O penúltimo da experiência de ensino remete para a adição de parcelas iguais. As resoluções dos alunos evidenciam o uso dos dobros e da decomposição (1010).

Os registos de Sónia, Jorge e Francisco revelam que adicionam as garrafas das cinco embalagens com recurso ao dobro de 12. Os alunos formam dois grupos de 24 garrafas, obtidos através da combinação das garrafas que compõem duas embalagens (12+12=24 e 12+12=24). No último passo de cálculo, adicionam a quinta embalagem consumida ao resultado obtido com a soma das garrafas correspondentes às embalagens já contabilizadas.

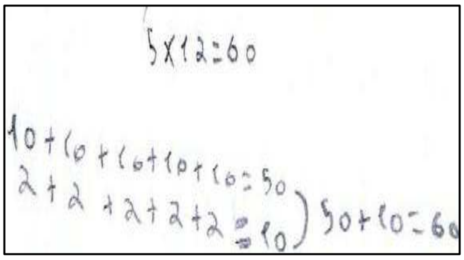


Sónia

Figura 5.28. – Resolução de Sónia da tarefa 7 EE

Através da apresentação das resoluções à turma, verifica-se que o uso dos dobros é justificado pelos alunos por se tratar de um facto básico que já conhecem, tanto o 12 mais 12 igual a 24, como o 24 mais 24 igual a 48. Já no último passo de cálculo (48+12), as estratégias divergem. Sónia arredonda à dezena mais próxima (48+2=50 e 50+10=60), enquanto Jorge e Francisco adicionam 10 (48+10=58) e depois 2 (58+2=60). Esta constatação só surge após as apresentações dos alunos, já que os seus registos não explicitam o raciocínio seguido.

As resoluções de Sara e Carlota evidenciam a utilização da decomposição (1010). As duas alunas começam por registar a indicação 5 vezes 12, contudo, acabam por utilizar a adição e decompõem 12 em 10 mais 2, talvez por se sentirem mais seguras dado que a multiplicação tinha sido introduzida pelo professor recentemente.



Sara

Figura 5.29. – Resolução de Sara da tarefa 7 EE

A opção em decompor 12 em 10 mais 2 é justificada pela facilidade de cálculo, como refere Sara:

> **Sara -** Eu parti todos os 12 em 10 mais 2 porque é fácil somar com o número 10.
> **Professor -** Como é que somaste?
> **Sara -** Fiz 10, 20, 30, 40, 50.

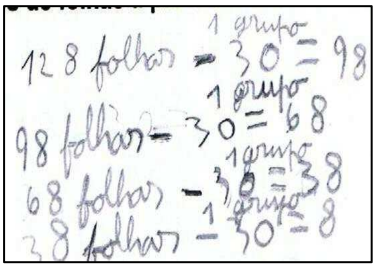
A mesma estratégia de contagem é seguida pelas duas alunas também para a adição sucessiva do número 2.

Este problema é resolvido com eficácia por todos os alunos, que evidenciam que para além das estratégias baseadas nos métodos dos saltos, da decomposição e da compensação, o domínio de factos básicos, em especial os dobros ou as contagens de 10 em 10, que aplicam num problema que aponta para a adição sucessiva do número 12. Na parte final da aula, quando são questionados pelo professor acerca da estratégia que consideram mais eficiente, os cinco alunos mantêm as suas opções iniciais inalteradas. Esta situação ocorre pela primeira vez no âmbito desta experiência de ensino, talvez por a apropriação de factos básicos estar diretamente relacionada com a forma como cada aluno desenvolve as suas próprias estratégias de cálculo.

As cadeias de cálculo 12 e 13. O problema foi intercalado pelas cadeias de cálculo 12 e 13, que tiveram como objetivo recriar adições sucessivas de parcelas iguais, formação de grupos e a utilização dos dobros. Os dobros e a decomposição foram as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das situações de cálculo, utilizando-as, por vezes, em simultâneo. O desempenho dos alunos nas duas cadeias de cálculo demonstra que a adição de (12+12) e de (24+24) são factos básicos que dominam.

O problema 8 *"Vamos arrumar as folhas"*. No último problema da experiência de ensino, os alunos deparam-se com um enunciado que remete para a formação de grupos. Os registos dos alunos mostram a utilização de estratégias de saltos baseadas na subtração sucessiva e na adição sucessiva.

Carlota e Sara evidenciam o uso da subtração e retiram sucessivamente o número 30 ao aditivo até atingirem um valor inferior a 30.



Carlota

Figura 5.30. – Resolução de Carlota da tarefa 8 EE

Através do registo escrito de Carlota verifica-se que a aluna dá significado a cada parcela de 30 que retira, já que regista “1 grupo” por cima do 30 em cada passo de cálculo. Na apresentação da sua resolução à turma, Carlota explica o seu raciocínio:

Carlota - O 128 é o número de folhas que a professora Manuela tinha. Eu tirei 30, que era quanto tinha cada monte e vi que ainda sobravam 98 folhas. Então, tirei mais um grupo e fiquei com 68. Eu fui sempre tirando 30 até que fiquei só com 8 folhas e vi que já não podia tirar mais.

O primeiro passo de cálculo registado pelas duas alunas (128-30) merece a atenção do professor, que as questiona acerca da estratégia seguida. A resposta das alunas é idêntica. Ambas decompuseram 30 em 20 mais 10 para facilitar os cálculos (128-20=108; 108-10=98), embora não o tenham registado. Já no segundo passo de cálculo (98-30), as alunas seguem estratégias diferentes:

Carlota - Eu fiz como se fosse 90 menos 30, que dava 60. Depois acrescentei 8 ao 60, porque na conta tínhamos 98 e deu 68.
Professor - E como é que sabes que 90 menos 30 são 60?
Carlota - É um resultado que eu já sabia.

Para Carlota retirar 30 a 90 parece ser um automatismo, já Sara executa o cálculo de forma diferente:

Sara - Eu sei que 60 mais 30 são 90, então 98 menos 30 é igual a 68.

No registo seguinte, as duas alunas recorrem ao dobro de 30 para calcularem 68 menos 30:

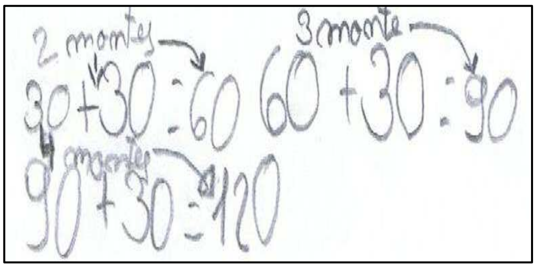
Carlota - 60 menos 30 dava 30, depois tive de acrescentar o 8 ao 30 porque não era só 60, era 68, e deu 38.
Professor - E como é que sabes que 60 menos 30 são 60?
Carlota - Porque 30 mais 30 são 60.

Uma justificação similar é dada também por Sara:

Sara - 30 mais 30 são 60, então 68 menos 30 são 38.

Através da apresentação das suas resoluções e da explicitação dos seus passos de cálculo, verifica-se que as duas alunas usam múltiplas estratégias.

Jorge, Sónia e Francisco optam por adicionar parcelas de 30. Os três alunos somam 30 com o objetivo de se aproximarem o mais possível do número total de folhas para agrupar, 128. Jorge e Sónia mostram-se eficazes na estratégia selecionada já que respondem corretamente e atribuem significado aos cálculos intermédios que executam, como é visível no registo da resolução do Jorge.

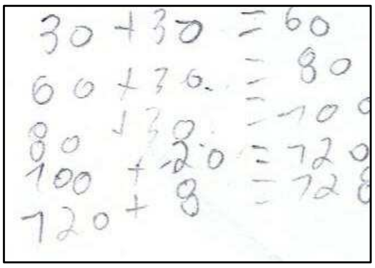


Jorge

Figura 5.31. – Resolução de Jorge da tarefa 8 EE

O aluno regista o número de grupos formados por cima de cada passo de cálculo até chegar ao número 120.

Já Francisco erra os cálculos intermédios e não consegue interpretar o significado da estratégia que segue, já que na sua folha de registo responde: "A professora Manuela consegue fazer 118 grupos de folhas".



Francisco

Figura 5.32. – Resolução de Francisco da tarefa 8 EE

O aluno começa por explicar que cada número 30 corresponde a um grupo de folhas. As dificuldades começam quando surge o momento de explicar o terceiro passo de cálculo:

Francisco - [aponta para o cálculo 100 mais 20] Este 20 é mais um grupo de folhas.
Professor - Pode haver grupos de 20 folhas?
Francisco - Não.

Professor - Quantas folhas tinha cada grupo?
Francisco - 30 folhas.
Professor - Então o número 20 que tens aí pode ser mais um grupo?
Francisco - Não.
Professor - O que têm a dizer acerca da resolução do Francisco?
Sónia - Eu acho que ele não percebeu bem o problema porque 100 mais 20 não é nenhum grupo [refere-se ao 20], falta somar 10 para ser um grupo. Ele enganou-se em dois cálculos porque 60 mais 30 não são 80 e 80 mais 30 não são 100.

Os comentários do professor e dos colegas levam o aluno a refletir sobre a sua resolução:

Francisco - Eu acho que me baralhei. 60 mais 30 são 90.
Professor - Porquê?
Francisco - Porque 60 mais 10 são 70, 70 mais 10 são 80 e 80 mais 10 são 90.

O aluno decide alterar a sua resolução e coloca 90 à frente da indicação 60 mais 30. O número 10 parece ser um dos seus números de referência, já que em caso de dúvida decompõe a parcela 30 em três de 10. Através do mesmo processo, Francisco corrige o passo de cálculo seguinte (90+30=120). No entanto, apesar de corrigir os cálculos, evidencia não ter compreendido totalmente o enunciado do problema já que não para em 120 e tenta formar mais um grupo. Sónia apercebe-se e interrompe:

Sónia - Ele agora não tem que somar mais nada.
Sara - Se ele somar mais 30 dá 150.
Professor - Francisco já arrumaste quantas folhas?
Francisco - 120.
Professor - Achas que podes arrumar mais 30?
Francisco - Não, porque só tenho 128 folhas.
Professor - Então faltam arrumar quantas?
Francisco - 8.
Professor - E essas 8 chegam para fazer mais um grupo?
Francisco - Não, têm de ser 30.
Professor - Quantos grupos é fizeste?
Francisco - 4.
Professor - Foi isso que escreveste tua folha? Queres ler a tua resposta?
Francisco - A professora Manuela consegue fazer 118 grupos de folhas.
Professor - 118? Onde foste buscar esse número?
Francisco - Eu somei os números do meio [aponta para as parcelas 30, 30, 30, 20 e 8].
Professor - Então são 4 grupos ou 118?

Francisco - São 4, porque eu percebi que tenho de contar é quantas vezes usei o número 30, como fizeram a Carlota e a Sara.

Francisco é o terceiro aluno a apresentar a sua resolução e o primeiro dos que usam a adição. O professor iniciou esta fase da aula com as duas alunas que utilizaram a subtração, no entanto, apesar de a sua estratégia ser diferente, Francisco retira significado relativamente à forma de contabilizar os grupos de folhas, o que o leva a alterar a sua resposta inicial. A apresentação de cada uma das resoluções e a discussão que se segue parece ter influenciado o aluno, o que realça a importância desta fase da aula, sobretudo, para os alunos com maiores dificuldades.

Após a apresentação e discussão das cinco resoluções, na fase da aula destinada à discussão final e síntese, os alunos identificam a existência de duas abordagens diferentes nas resoluções que são apresentadas no quadro, uma baseada na adição e outra na subtração.

Jorge sintetiza as diferenças entre as duas estratégias:

Jorge - A Carlota e a Sara usaram contas de menos. Começaram no 128 e foram tirando grupos de 30, enquanto eu, o Francisco e a Sónia usámos contas de mais e começámos no 30 que era o primeiro monte.

Durante a síntese da aula, o professor apresenta uma estratégia alternativa, que pode ser facilitadora para quem usou a adição:

Professor - Olhem para a resolução do Jorge. No primeiro cálculo temos 30 mais 30, que são 60 e, como o Jorge disse, formam dois grupos.
Jorge - Isso é um dobro.
Professor - Jorge estás a dizer que 30 mais 30 igual a 60 é um dobro, a seguir o que é que se poderia fazer [aponta para o segundo passo de cálculo, 60+30 do registo do Jorge]?
Carlota - 60 mais 60.
Professor - [regista no quadro a resposta da aluna]. Então quantos grupos já tinha?
Jorge - 4.
Sara - Pois, porque assim são dois dobros [refere-se ao 30 mais 30 e ao 60 mais 60.
Jorge - Pois [levanta-se e dirige-se para o quadro e aponta para os registos do professor]. Cada dobro são dois grupos.
Professor - Estão a ver, só com dois cálculos chegamos a 120.

Este problema foi o que trouxe maiores dificuldades aos alunos durante a experiência de ensino, essencialmente, na compreensão do enunciado e na seleção de uma estratégia de resolução, pelo que a síntese e a discussão das várias resoluções dos alunos é mais demorada comparativamente com as tarefas anteriores. No final, Francisco, Jorge e Carlota consideram a estratégia apresentada pelo professor como a mais eficiente. Carlota reconhece que a opção pela adição lhe poderia ter facilitado os cálculos. Sónia e Sara mantêm a opção pela estratégia que seguiram na resolução da tarefa.

A cadeia de cálculo 14. Esta cadeia que antecedeu a exploração do problema tinha como objetivo a apresentação de cálculos cuja resolução envolvesse os dobros, a formação de grupos e a adição sucessiva de parcelas. Os alunos mostram que dominam a adição de (30+30) e de (60+30). Para calcular (90+30) Jorge decompõe 90 em 60 mais 30, em seguida adiciona os dois 30 para ficar com duas parcelas de 60, construindo um dobro (60+30+30; 60+60=120). Os outros alunos optam por decompor 30 em 20 mais 10 (90+10+20=120).

5.2.1. Síntese

Na experiência de ensino os alunos evidenciaram a utilização de diversas estratégias de cálculo mental. No método dos saltos usaram a N10*,* A10 e a compensação N10C e no método da decomposição a 1010. Os dobros, as contagens de 10 em 10 e de 100 em 100, foram os factos básicos que os alunos integraram nas suas resoluções.

A estratégia N10 foi a que mais vezes surgiu nas resoluções dos alunos, sendo o seu uso mais evidente nos problemas de subtração. Nos problemas de adição houve uma maior diversidade, comparativamente com a subtração, já que para além do método dos saltos N10, os registos dos alunos evidenciaram o uso da decomposição (1010). A análise das resoluções dos alunos demonstrou ainda o uso da compensação (N10C), quer nos problemas de adição, quer nos de subtração. O uso desta estratégia de cálculo não foi visível nos problemas do teste diagnóstico. A opção pela utilização da compensação poderá estar relacionada com o trabalho desenvolvido nas cadeias de cálculo e também a partir das discussões que se seguiram à resolução individual dos problemas. A estratégia A10 foi utilizada apenas uma vez.

Sara foi a aluna que apresentou uma maior variedade de estratégias nas suas resoluções, chegando a combiná-las no mesmo problema. Sónia foi quem mais vezes recorreu à compensação. Contrariamente, Francisco utilizou sempre a estratégia N10.

Nos problemas de subtração, os alunos recorreram maioritariamente à operação inversa e à subtração indireta, sendo esta opção extensível a todos os significados desta operação: *retirar*, *comparar* e *completar*. Sara foi a aluna que mais vezes utilizou a subtração indireta, enquanto Francisco recorreu sempre à adição indireta.

Relativamente ao desempenho dos alunos, verificou-se que, durante a experiência de ensino, o seu cálculo se tornou mais adequado aos números que compunham os problemas, sendo este aspeto evidenciado numa maior variedade de estratégias utilizadas, combinadas com o recurso aos factos básicos.

A discussão de cada uma das resoluções e a síntese final, combinadas com a exploração das cadeias de cálculo, poderão ter facilitado o uso de estratégias mais adequadas e o conhecimento da diversidade de estratégias que podem ser usadas, já que permitiram a apresentação, discussão das suas ideias e apropriação das ideias dos colegas. Esta interação permitiu que os alunos que apresentavam um cálculo mental menos flexível passassem a utilizar números de maior ordem de grandeza e estratégias mais adequadas aos contextos dos problemas e dos números envolvidos.

Os alunos mostraram grande motivação e disponibilidade para aprender, mostrando-se gradualmente mais identificados com o estudo que estava a ser desenvolvido. Esta evidência tornou as cadeias de cálculo, as apresentações das tarefas e as discussões mais participadas e com maior competência de observação e de argumentação.

5.3. Teste final

Na tabela 5.3 apresentam-se as estratégias apresentadas pelos alunos na resolução do teste final.

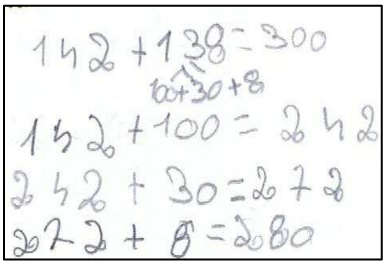
Tabela 5.3. Estratégias utilizadas pelos alunos no teste final

Tarefas	**Estratégias**					
	N10	**A10**	**1010**	**10's**	**N10C**	**Dobros**
1 TF “Vamos comprar um televisor” (Adiç./Acresc.)	2	-	-	3	-	-

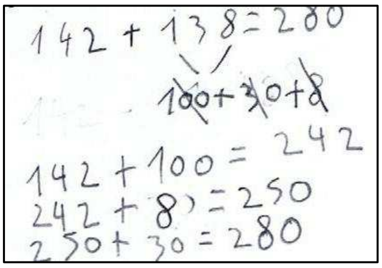
2 TF "O parque de estacionamento" (Adiç./Comb.)	1	-	-	3	-	-
3 TF "As casas em construção" (Sub./Ret.)	4	-	-	-	1	-
4 TF "O túnel rodoviário" (Sub./Ret.)	1	-	-	-	4	-
5 TF "Vamos ao cinema" (Sub./Complt.)	4	-	-	-	1	-
6 TF "Os berlindes" (Adiç./Comb.)	1	-	1	-	-	3
7 TF 132 + 128 =	1	-	3	1	-	-
8 TF 399 + 425 =	1	-	-	2	2	-
9 TF 579 + 380 =	3	-	-	-	2	-
10 TF 500 – 348 =	5	-	-	-	-	-

O problema 1, "Vamos comprar um televisor". Este problema envolve uma adição com o significado *combinar*. A partir da análise dos registos dos alunos pode-se identificar o uso de duas estratégias diferentes. Carlota e Sónia usam o método dos saltos (N10), enquanto Francisco, Jorge e Sara optam pela decomposição (10's).

Carlota e Sónia mantém o primeiro número inalterado, 142, e decompõem o segundo, 138, em 100 mais 30 mais 8. Em seguida, adicionam 100 a 142. No segundo passo de cálculo, Sónia adiciona 30, enquanto Carlota opta por adicionar 8 a 242 para obter um número terminado em 0, o que facilita o terceiro passo de cálculo.



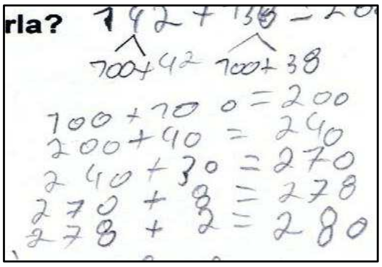
Sónia



Carlota

Figura 5.33. – Resolução de Sónia e Carlota da tarefa 1 TF

Os registos de Francisco e de Jorge evidenciam a utilização da decomposição, através da estratégia 10's. Os dois alunos decompõem os números das duas parcelas e adicionam as centenas dos dois números, ao resultado obtido somam as dezenas do primeiro número, depois as do segundo e seguem o mesmo processo para as unidades. A possibilidade de formarem um dobro, através de 100 mais 100, parece estar na origem da opção em decomporem os números das duas parcelas.



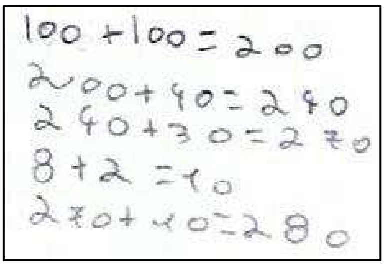
Francisco

Figura 5.34. – Resolução de Francisco da tarefa 1 TF

Na entrevista individual que se seguiu ao teste final, Jorge refere:

Jorge - Eu parti os dois números porque vi que podia somar 100 mais 100. É um dobro e é fácil trabalhar com dobros.

Sara também recorre à estratégia 10's, combinando-a com a 1010. Embora não o registe, a aluna decompõe as duas parcelas e segue esta estratégia até ao terceiro passo de cálculo. No quarto registo a aluna soma as unidades das duas parcelas (8+2=10), valor que adiciona ao resultado obtido no terceiro passo de cálculo.

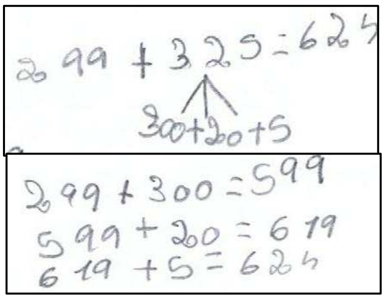


Sara

Figura 5.35. – Resolução de Francisco da tarefa 1 TF

O problema 2, *"O parque de estacionamento".* Os registos dos alunos evidenciam o uso das estratégias N10 e 10's, ou seja, o método dos saltos e a decomposição. Estas duas estratégias surgem combinadas com a compensação (N10C) em alguns passos de cálculo, facto ao qual não será indiferente um dos números envolvidos ser 299. Comparativamente com o problema anterior, uma adição com o significado *acrescentar*, verifica-se que os alunos mantêm as suas estratégias de resolução, à exceção de Carlota que usa a decomposição (10's) e a compensação (N10C) em vez dos saltos (N10).

Sónia é a única que usa a estratégia N10. A aluna mantém inalterado o número 299 e decompõe 325.



Sónia

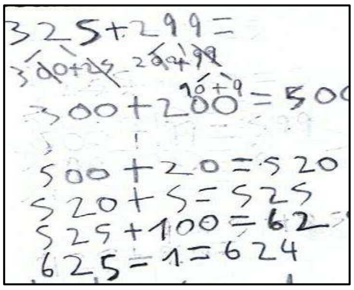
Figura 5.36. – Resolução de Sónia da tarefa 2 TF

Na entrevista, Sónia esclarece que para somar 299 com 300 pensou como se fosse 200 mais 300 e acrescentou 99 ao resultado. No segundo passo de cálculo recorre à compensação (N10C):

> **Sónia -** Para fazer 599 mais 20 pensei como se fosse 600 mais 20. Se 600 mais 20 são 620, então 599 mais 20 são 619, porque é só 1 a menos.

A aluna aplica a mesma estratégia no terceiro passo de cálculo. A sua resolução, apesar de os registos não o evidenciarem, combina as estratégias N10 e N10C.

Carlota também usa duas estratégias na sua resolução. Através da estratégia 10's, a aluna decompõe as duas parcelas e adiciona as centenas dos dois números (300+200). Em seguida, junta ao resultado obtido as dezenas e, posteriormente, as unidades da primeira parcela. No quarto passo de cálculo, quando tem de adicionar 99, opta pela compensação (N10C), junta 100 e ao resultado obtido retira 1.

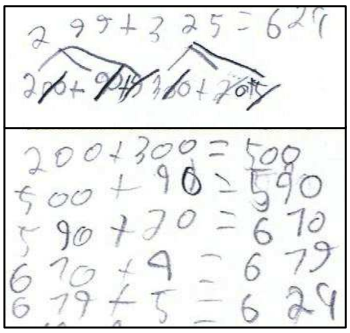


Carlota

Figura 5.37. – Resolução de Carlota da tarefa 2 TF

A aluna parece definir as suas estratégias tendo em atenção as características dos números a adicionar em cada passo de cálculo.

Francisco, Sara e Jorge usam a decomposição através da estratégia 10's.



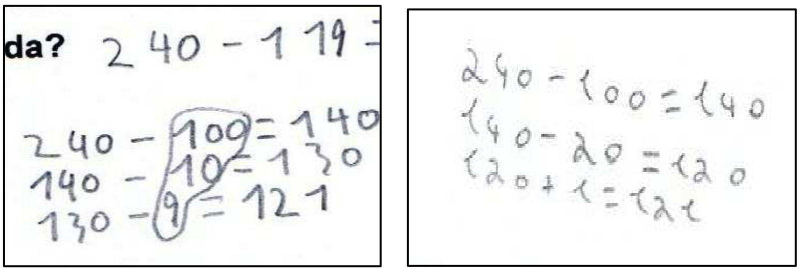
Francisco

Figura 5.38. – Resolução de Sónia da tarefa 2 TF

Na entrevista realizada aos alunos surge a confirmação de que o uso desta estratégia se deve à possibilidade de operarem com números terminados em zero na maior parte dos passos de cálculo intermédios, o que, na sua opinião, facilita a resolução e diminui a probabilidade de erros.

Após a análise das resoluções dos cinco alunos verifica-se que apesar de Sónia e Carlota utilizarem a compensação, ao arredondarem à centena mais próxima quando têm de adicionar um número terminado em 99, os alunos não utilizam as estratégias mais eficientes, como seria, por exemplo, arredondar 299 a 300 e adicionar 325 mais 300 e retirar 1 ao resultado, cálculo que seria facilitado por envolver um dobro que é do seu conhecimento (300+300).

O problema 3, *"As casas em construção".* As resoluções dos alunos neste problema, uma subtração com o significado *retirar*, evidenciam a utilização das estratégias N10 e N10C. Carlota, Francisco, Sara e Jorge utilizam a estratégia N10, embora apresentem diferenças nos seus registos. Carlota, Francisco e Sara optam pela subtração direta e retiram 119 a 240. No entanto, os registos apresentam algumas diferenças.



Carlota *Sara*

Figura 5.39. – Resolução de Carlota e Sara da tarefa 3 TF

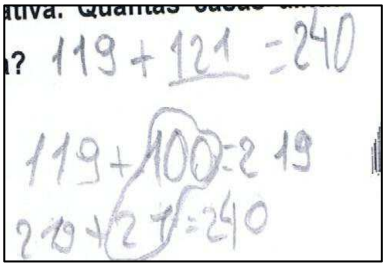
Carlota e Fernando decompõem 119 em 100 mais 10 mais 9, enquanto Sara transforma 119 em 120-1 e aplica a compensação (N10C) no último passo de cálculo. Após a entrevista verifica-se que, na realidade, Carlota e Francisco também combinam o método dos saltos com a compensação nas suas resoluções. Após a realização dos dois primeiros passos de cálculo, no terceiro resolvem o cálculo 130 menos 9, como se fosse 130 menos 10:

Carlota - Eu parti 119 em 100, mais 10, mais 9. Primeiro tirei 100 ao 240 e deu-me 140. Depois, 140 menos 10 são 130 e 130 menos 9 são 121.
Professor - Consegues explicar como calculaste 130 menos 9?
Carlota - Eu fiz como se fosse 120 menos 10 e depois acrescentei 1.

No registo de Sara, a combinação das duas estratégias é evidente logo no seu registo. A aluna retira primeiro 100 e depois 20 e compensa no terceiro passo de cálculo:

Sara - Eu fiz 240 menos 100 e depois 140 menos 20, porque eu parti 19 em 20 menos 1.
Professor - Por que fizeste isso?
Sara - Porque 19 está muito perto do 20. E depois na última conta tive de somar mais 1.

Jorge também utiliza a estratégia N10, no entanto, a sua resolução mostra o uso da adição indireta. O aluno dá saltos a partir de 199 até chegar a 240. Após um primeiro salto de 100 apresenta outro de 21



Jorge

Figura 5.40. – Resolução de Jorge da tarefa 3 TF

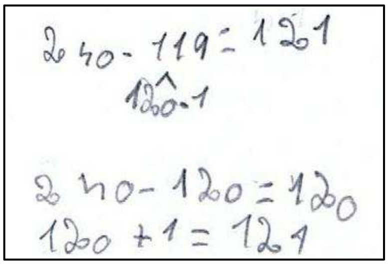
A escolha do número 100 no primeiro salto parece ser bem ponderada:

Jorge - Eu somei 100 ao 119 porque eu quero chegar ao 240 e fico lá perto porque 100 mais 100 [refere-se ao 100 do 119] são 200.

Já a opção pelo número 21 no segundo salto fica a dever-se à flexibilidade de cálculo que revela:

Professor - Por que somaste 21 logo a seguir?
Jorge - 19 mais 21 são 40 e depois acrescentei os 200 e seu 240.
Professor - Mas como é que sabes que 19 mais 21 são 40?
Jorge - Porque 10 mais 20 são 30, 30 mais 9 são 39 e 39 mais 1 são 40.

Sónia é a única aluna que utiliza apenas a decomposição (N10C). Ao aperceber-se que 119 está muito próximo de 120, opta por utilizar este número no primeiro passo de cálculo.



Sónia

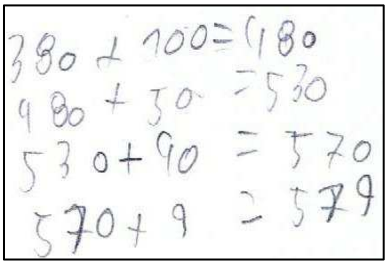
Figura 5.41. – Resolução de Sónia da tarefa 3 TF

Sónia - Eu fiz 240 menos 119 para saber o resultado. Decidi partir o 119 em 120 menos 1. Depois, 240 menos 120 é 120, porque 120 mais 120 são 240. Eu já tinha tirado 1 a mais e então devolvi-o e deu 121 [refere-se ao último passo de cálculo].

A estratégia selecionada pela aluna é influenciada pela possibilidade de utilizar o dobro e coloca em prática o conhecimento que tem acerca das características dos números.

O problema 4, *“O túnel rodoviário”*. A análise dos registos dos alunos revela que a compensação (N10C) é a estratégia mais utilizada pelos alunos. Francisco é o único aluno que recorre à estratégia N10.

Francisco pretende juntar números a partir do comprimento do túnel velho, 380, até atingir o valor do novo túnel, 579 e utiliza números que para si são referência, como 100 e 10, e com os quais consegue antecipar o resultado de cada passo de cálculo.



Francisco

Figura 5.42. – Resolução de Francisco da tarefa 4 TF

Embora o seu registo induza que utiliza 50 e 40, nos segundo e terceiro passos de cálculo, na verdade essas adições (480 mais 50 e 530 mais 40) são realizadas através de contagens intermédias de 10 em 10 e que depois agrupa em 50 e em 40:

Francisco – Eu fui juntando números a partir do túnel velho até chegar ao túnel novo. Eu comecei pelo 100 porque assim já me ia dar 480 e já está mais perto do 579. Depois juntei 50.
Professor - Por que escolheste o 50?
Francisco - Para continuar a calcular com números fáceis.
Professor - Consegues explicar-me como somaste 480 mais 50?
Francisco - Eu somei de 10 em 10.
Professor - E 530 mais 40?
Francisco - Também contei de 10 em 10.

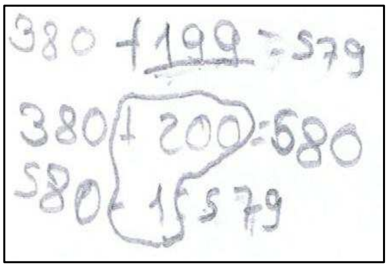
Depois de somar 100 no primeiro passo de cálculo, a opção de utilizar outro número referência surge após antecipar que se desse mais um salto de 100 iria ultrapassar 579:

Professor - Achas que poderias ter somado 100?
Francisco - Não, porque assim já ultrapassava o comprimento do túnel novo.

Através das resoluções dos problemas anteriores, verifica-se que o aluno não utiliza a compensação, embora pareça conhecer esta estratégia e até admita que lhe poderia facilitar os cálculos:

Professor - E ultrapassava muito?
Francisco -É só mais 1.
Professor -Achas que poderias ter resolvido de outra forma?
Francisco -Podia ter somado 100 e tirava 1, mas não me lembrei.
Professor -Esta forma de resolução seria mais fácil?
Francisco -Sim.

Jorge, Sara, Carlota e Sónia adicionam 200 a 380 e, no segundo passo de cálculo, retiram 1 para obterem 579. Os alunos usam a adição indireta para calcular quantos metros o novo túnel tem a mais do que o túnel antigo.



Jorge

Figura 5.43. – Resolução de Jorge da tarefa 4 TF

Jorge, Sara, Carlota e Sónia recorrem à compensação e adicionam 200 a 380 e, no segundo passo de cálculo, retiram 1 para obterem 579. Tal como Francisco, os alunos usam a adição indireta para calcular quantos metros o novo túnel tem a mais do que o túnel antigo.

Após a entrevista confirma-se que os quatros procuraram um número que os colocasse perto do comprimento do novo túnel:

Carlota - Eu escolhi o 200, porque eu sabia que 300 mais 200 eram 500, como eu tinha 380 dava 580.
Professor - Chegar ao 580 ajudava-te?
Carlota - Sim, porque o túnel novo tinha 579 metros. O 580 está perto é só tirar 1.

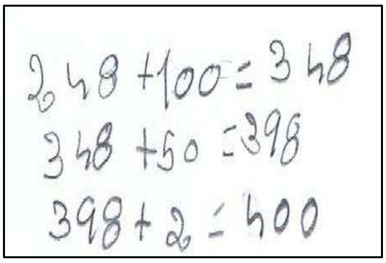
Uma vez mais, as características dos números envolvidos no problema influenciam o valor a utilizar no salto:

Professor - Por que somaste logo 200?
Sónia - Eu somei 200 ao 380 porque ia dar 580 e era só 1 a mais. Era um cálculo que não me baralhava nada.

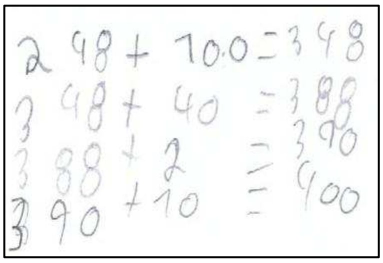
A facilidade com que utilizam a compensação, sobretudo quando envolve a adição, permitiu que os alunos tenham usado a estratégia mais eficiente, tendo em conta as características dos números envolvidos.

O problema 5, *"Vamos ao cinema"*. As resoluções dos alunos evidenciam a utilização das estratégias N10 e N10C. Jorge, Sónia, Francisco e Sara utilizam a estratégia N10, enquanto Carlota opta pela estratégia N10C.

Jorge, Sónia e Francisco usam a estratégia N10 com recurso à adição indireta, dando saltos a partir de 280 até chegar a 400. Sónia e Jorge apresentam os mesmos passos de cálculo, enquanto Francisco recorre, uma vez mais, a números que para ele são referência, neste caso 100, 20 e 10.



Sónia



Francisco

Figura 5.44. – Resolução de Francisco da tarefa 5 TF

Sónia e Jorge começam por adicionar 100, depois, 50 e, por último, 2. Na entrevista Sónia justifica porque recorre à adição para resolver o problema:

Sónia - Eu juntei números a partir do 248 porque para mim é mais fácil do que fazer 400 menos 248.

A estratégia seguida pelos dois alunos é reveladora da flexibilidade de cálculo que apresentam, baseada no conhecimento das características dos números e na forma como fazem a sua decomposição e recomposição mental durante os cálculos intermédios:

Jorge - Eu somei 100 ao 248 porque se somasse 200 já ultrapassava o 400.
Professor - A seguir somaste 50. Como é que calculaste 348 mais 50?
Jorge - 48 mais 50 são 98, mais 300 são 398.

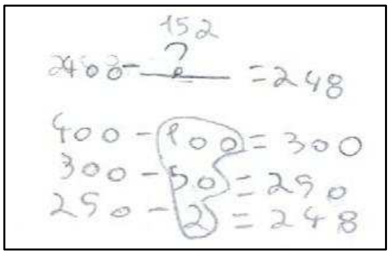
O arredondamento à dezena seguinte obtido a partir da adição de 2 a 248, no primeiro passo de cálculo, poderia, à partida, facilitar os cálculos, na medida em que passariam a ter números terminados em zero, contudo, apesar de não se terem apercebido dessa possibilidade, Sónia e Jorge não evidenciam dificuldades.

Francisco também recorre à adição indireta, no entanto, após a adição de 100 no primeiro passo de cálculo, tal como os dois colegas, a seguir adiciona 40 e obtém 388. No terceiro passo de cálculo intermédio arredonda à dezena seguinte e obtém 390, resultado a que soma 10 para obter 400. Apesar de eficaz, a seleção dos números e o encadeamento dos vários passos de cálculo parece pouco eficiente. A entrevista que se seguiu ajuda a compreender algumas das suas opções:

Professor - Por que começaste pelo 100?
Francisco - Eu comecei pelo 100 porque é um número fácil de somar.
Professor - E a seguir juntaste 40, como é que calculaste 348 mais 40?
Francisco - Primeiro juntei 20 e depois outra vez 20.
Professor - A seguir, por que juntaste 2?
Francisco - Eu juntei 2 para me dar um número fácil, 390, depois era só somar 10 e dava-me 400.
Professor - Achas que já poderias ter usado o número 2 antes?
Francisco - [hesita e observa os passos de cálculo anteriores] Sim no segundo, porque 348 mais 2 ia dar 350.
Professor - E a seguir qual era o número que poderias juntar ao 350 para chegares ao 400?
Francisco - O 10…não, o 50.

Tal como no problema anterior, durante a entrevista o aluno apercebe-se que poderia ter seguido outras possibilidades que acabariam por lhe facilitar os cálculos intermédios.

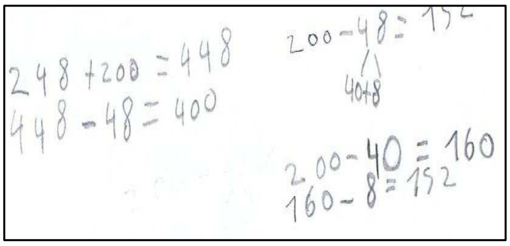
Entre os alunos que utilizam a estratégia N10, Sara é a única que recorre à subtração indireta. A aluna dá saltos desde 400 até atingir 248. Os saltos são idênticos aos de Sónia e de *Jorge, já que primeiro subtrai 100, depois 50 e, por fim, 2.*



Sara

Figura 5.45. – Resolução de Sara da tarefa 5 TF

O registo escrito de Carlota evidencia, num primeiro momento, o uso da estratégia N10C, já que a aluna adiciona 200 a 248 e obtém 448. A este resultado subtrai 48 para chegar ao número que pretende. Num segundo momento, Carlota apresenta cálculo auxiliar para subtrair 48 a 200, de forma a poder responder à questão colocada e recorre à estratégia N10.



Carlota

Figura 5.46. – Resolução de Carlota da tarefa 5 TF

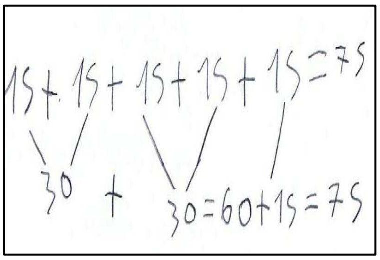
Através da entrevista verifica-se que a opção de adicionar 200 a 248 tem em conta as características dos números envolvidos, já que se apercebe da possibilidade de obter um dobro através da decomposição de 248 em 200 mais 48:

> **Carlota -** Primeiro juntei 200 ao 248 e deu-me 448. Depois tirei 48 para dar 400. Para saber quanto era 200 menos 48 dividi o 48 em 40 mais 8. 200 menos 40 são 160 e 160 menos 8 são 152.
> **Professor -** Por que somaste 200 ao 248?
> **Carlota -** Porque eu sabia que 200 mais 200 dava 400, mas como tinha 248, ia dar 448, tive de tirar 48.

Contudo, a estratégia seguida obriga-a a um registo de cálculo auxiliar, que apresenta à parte na sua folha de registo, para poder saber quanto é 200 menos 48. A aluna apresenta, por isso, uma estratégia de resolução mista, com recurso à compensação e ao método dos saltos.

O problema 6 *"Os berlindes".* O último problema do teste final remete para a adição de parcelas iguais. As resoluções dos alunos evidenciam o uso dos saltos (N10) da decomposição (1010) e dos dobros.

Carlota, Jorge e Sónia agrupam os sacos de berlindes aos pares (15 mais 15 igual a 30) e, em seguida, adicionam os resultados obtidos (30 mais 30), o que permite calcular o número de berlindes dos primeiros quatro sacos. A este resultado adicionam os berlindes do último saco (60 mais 15).



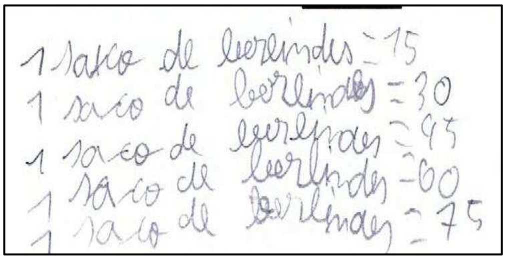
Carlota

Figura 5.47. – Resolução de Carlota da tarefa 6 TF

A estratégia seguida pelos três alunos relaciona-se com a possibilidade de usar os dobros, como se verifica na entrevista do Jorge:

Jorge - Eu fiz 15 mais 15 igual a 30 e outra vez 15 mais 15 igual a 30. Já tinha usado 4 vezes o número 15. A seguir fiz 30 mais 30 igual a 60 e somei o 15 que faltava e deu-me 75.
Professor - Porque somaste 30 mais 30?
Jorge - Porque é fácil trabalhar com dobros e 30 mais 30 é um dobro e também foi por isso que decidi fazer 15 mais 15 [refere-se aos dois primeiros passos de cálculo].
Professor - Então juntaste os sacos aos pares?
Jorge - Sim, é fácil trabalhar com dobros, por isso fiz logo 3 dobros seguidos.
Professor - Como sabes que 15 mais 15 são 30?
Jorge - Eu já sabia mas posso explicar. 10 mais 10 são 20 e 5 mais 5 são 10, então 20 mais 10 são 30.

O registo escrito da resolução de Francisco permite verificar que o aluno recorre a contagens de 15 em 15 para saber quantos berlindes têm os cinco sacos.



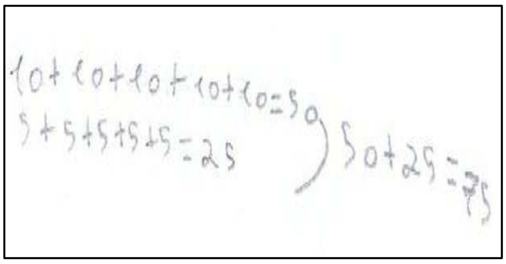
Francisco

Figura 5.48. – Resolução de Francisco da tarefa 6 TF

Através da audição da sua entrevista percebe-se que o aluno decompõe 15 em 10 mais 5 para facilitar cada cálculo intermédio:

Francisco - Cada saco tinha 15 berlindes, então eu contei de 15 em 15.
Professor - Contar de 15 em 15 é fácil?
Francisco - Eu tenho uma forma que é somar 10 e depois mais 5.
Professor - Podes explicar como somaste 15 mais 15?
Francisco - Sim. 10 mais 10 são 20, mais 5 são 25 e mais 5 são 30.
Professor - E 30 mais 15?
Francisco - 30 mais 10 são 40, mais são 45.

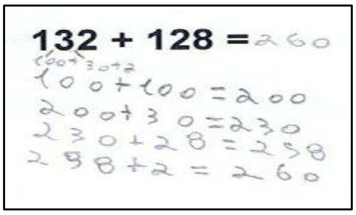
Sara utiliza a estratégia 1010 e decompõe as cinco parcelas de 15 em 10 mais 5. Em seguida, soma todas as parcelas das dezenas e, em separado, as das unidades. No último registo adiciona os dois resultados obtidos (50 mais 25) para calcular o número total de berlindes dos cinco sacos.



Sara

Figura 5.49. – Resolução de Sara da tarefa 6 TF

A tarefa 7. As próximas tarefas são situações de cálculo sem contexto. Na tarefa 7 (132+128) a estratégia 10's é a utilizada pelos alunos. Sara, Carlota e Francisco decompõem os dois números, 132 (100+30+2) e 128 (100+28), e começam por adicionar 100 mais 100, em seguida juntam 30 do primeiro número e, ao resultado obtido, 28, do segundo número. No último passo de cálculo adicionam 2.



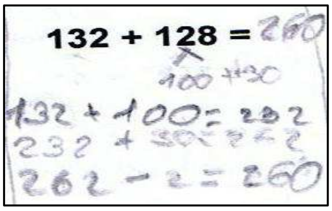
Sara

Figura 5.50. – Resolução de Sara da tarefa 7 TF

A opção por esta estratégia deve-se, segundo as entrevistas recolhidas dos três alunos, à facilidade que cálculo que a presença de 100 nos dois números decompostos proporciona:

> **Sara –** Eu comecei com 100 mais 100 porque é 100 é um número muito fácil de somar.

Jorge apresenta uma resolução com base na estratégia N10, à qual junta a compensação. O aluno decompõe o segundo número, 128, em 100 mais 30 e adiciona-os ao primeiro número, 132. No último passo de cálculo compensa retirando duas unidades.



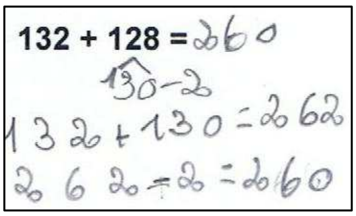
Jorge

Figura 5.51. – Resolução de Jorge da tarefa 7 TF

A proximidade de 128 com 130 e a facilidade de cálculo que o arredondamento à dezena seguinte possibilita, de acordo com o aluno, parecem estar na base da adoção desta estratégia mista.

> **Jorge –** Eu fiz como se 128 fosse 130, porque 130 é 128 mais 2. Depois parti em 100 mais 30. Assim é fácil porque 132 mais 100 são 232 e 232 mais 30 são 262, porque 30 mais 30 são 60. Depois tirei o 2 que estava a mais e deu 260.

Os registos da resolução de Sónia indiciam a utilização da compensação. Tal como o colega, a aluna arredonda o segundo número à dezena seguinte e adiciona os dois números, compensando no último passo de cálculo. No entanto, após a entrevista, verifica-se que a aluna também utilizou a decomposição 1010, já que para realizar a adição 132 mais 130, admite ter decomposto os dois números em centenas e em dezenas, somando-as separadamente.

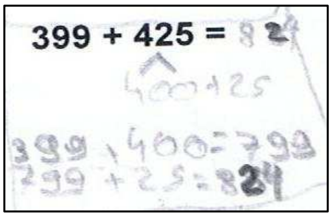


Sónia

Figura 5.52. – Resolução de Sónia da tarefa 7 TF

Sónia – Eu vi que 128 estava muito perto de 130, então somei 132 mais 130, que é igual a 262, depois tirei 2 e deu 260.
Professor – Como é somaste 132 mais 130?
Sónia – Se 100 mais 100 são 200 e 30 mais 30 são 60, então dá 260, mais 2 dá 262.

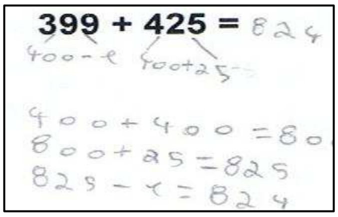
A tarefa 8. Nesta tarefa (399+425) os registos dos alunos indiciam a utilização de três estratégias diferentes. Jorge, tal como na tarefa anterior, opta pela estratégia N10.



Jorge

Figura 5.53. – Resolução de Jorge da tarefa 8 TF

Sara e Sónia evidenciam nos seus registos a utilização da decomposição (N10C) e do método dos saltos (N10). As alunas arredondam 399 à centena seguinte e decompõem o segundo número em 400 mais 25.



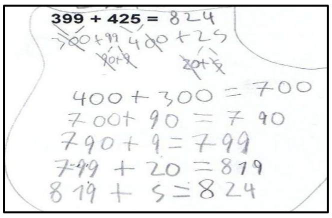
Sara

Figura 5.54. – Resolução de Sara da tarefa 8 TF

Sara explica a sua opção por esta resolução mista pela proximidade de 399 a 400 e da facilidade em adicionar 400 mais 400:

Sara – Eu fiz 400 mais 400 porque o 399 está muito perto de 400 (…) depois tirei 1 porque não tinha 400 mas sim 399 e deu-me 824.
Professor – Utilizares 400 em vez de 399 ajudou-te nos cálculos?
Sara – Sim, porque 399 está muito perto de 400 e somar 400 mais 400 é fácil.

Carlota e Francisco denotam nos seus registos o recurso à estratégia 10’s. As suas resoluções apresentam um número de passos de cálculo superior aos dos colegas já que decompuseram os dois números em centenas, dezenas e unidades. Na resolução de Carla é visível a inversão da ordem de adição dos números no primeiro registo, ao colocar em primeiro lugar o número de maior ordem de grandeza.

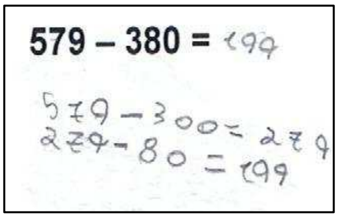


Carlota

Figura 5.55. – Resolução de Carlota da tarefa 8 TF

Professor - Podes explicar porque colocaste 400 primeiro do que 300 no primeiro cálculo?
Carlota – Eu coloquei 400 mais 300 porque é mais fácil somar um número pequeno a um número grande.
Professor – Como calculaste 799 mais 20?
Carlota – Eu fiz 799 mais 10 e deu-me 809 e depois somei mais 10 outra vez.

A tarefa 9. Nesta tarefa, Sónia, Sara e Francisco utilizam a estratégia N10, com recurso à subtração direta. Os alunos decompõem



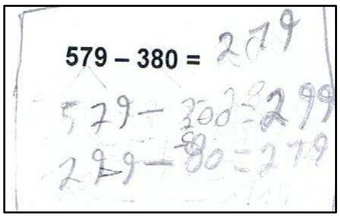
Sara

Figura 5.56. – Resolução de Sara da tarefa 9 TF

No último passo de cálculo (279-80) as duas alunas arredondam 279 à dezena seguinte, de forma facilitar o cálculo (280-80), embora não seja visível nos seus registos. Sara, na entrevista, explica este cálculo:

Professor – Como é calculaste 279 menos 80?
Sara – 280 menos 80 são 200, depois é só tirar 1 porque só tínhamos 279.

Francisco não apresenta um resultado correto, já que se engana quando escreve o resultado do primeiro passo de cálculo (579-300=299), tal como reconhece:

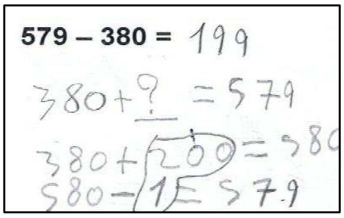


Francisco

Figura 5.57. – Resolução de Francisco da tarefa 9 TF

Professor – 579 menos 300 são 299?
Francisco – [hesita] Não… dá 279. Enganei-me a escrever o resultado.

Carlota e Jorge utilizam a adição indireta e através da compensação (N10C) adicionam 200 a 380 e ao resultado retiram 1.

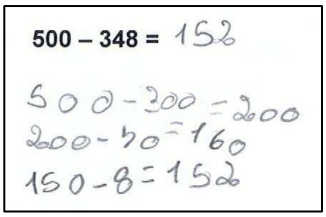


Carlota

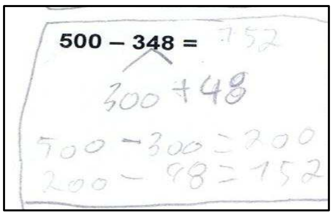
Figura 5.58. – Resolução de Carlota da tarefa 9 TF

Professor – Porque somaste logo 200 a 380?
Carlota – Eu sei que 300 mais 200 são 500, depois é só acrescentar 80 e deu-me 580. Como queria chegar até 579 tirei 1.

Na última tarefa, também uma subtração (500-348), os cinco alunos recorrem à estratégia N10, embora os seus registos denotem algumas diferenças. Sónia, Sara e Carlota decompõem o subtrativo em 300 mais 40 mais 8, enquanto Francisco decompõe em 300 mais 48.



Sónia



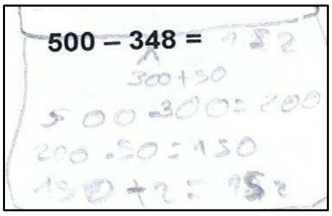
Francisco

Figura 5.59. – Resolução de Sónia e Francisco da tarefa 9 TF

Embora não o registe, Francisco não retira 48 a 200 de uma só vez. Na sua explicação o aluno reconhece que dá saltos de 10 em 10:

Francisco – Eu dividi o 348 em 300 mais 48. 500 menos 300 são 200 e 200 menos 48 são 152.
Professor – Como é que calculaste 200 menos 48?
Francisco – 200 menos 20 são [hesita] 180, menos 20 são [hesita]…
Professor – Tu estás mesmo a retirar 20?
Francisco – Não. Estou a dar saltos de 10.

Jorge embora recorra ao método dos saltos (N10) no seu registo também é visível a utilização da compensação, já que o aluno arredonda 348 à dezena mais próxima.



Jorge

Figura 5.60. – Resolução de Jorge da tarefa 9 TF

Jorge – 348 está muito perto de 350, então pensei como se fosse 350 porque é mais fácil e fiz 500 menos 300 igual a 200, 200 menos 50 são 150. Depois somei 2 porque tinha tirado 50 e só devia ter tirado 48.

5.3.1.Síntese

Na resolução dos seis problemas que compuseram o teste final, os alunos evidenciaram a utilização de diversas estratégias de cálculo mental. No método dos saltos usaram a N10 e a compensação N10C e no método da decomposição a 1010 e a 10's. Os dobros e as contagens de 15 em 15, foram os factos básicos que os alunos integraram nas suas resoluções.

A estratégia N10 foi a que mais vezes surgiu nos registos escritos dos alunos, sendo o seu uso transversal quer nos problemas de adição, quer nos de subtração.

Nos dois problemas de adição, os alunos recorreram às estratégias N10 e 10's, na subtração os registos evidenciaram o uso da estratégia N10 e da compensação (N10C). A utilização da compensação por parte de mais alunos, comparativamente com o teste diagnóstico e a experiência de ensino, como é visível no problema 4 "O túnel rodoviário" – subtração com significado *comparar,* poderá estar relacionada com o trabalho desenvolvido durante a experiência de ensino. No teste final, não é visível o uso da estratégia A10.

Sara, Sónia, Jorge e Carlota apresentaram estratégias de resolução baseadas no método dos saltos, incluindo a compensação, e no método da decomposição. Francisco utilizou a decomposição nos problemas de adição e o método dos saltos na subtração, não sendo visível o uso da compensação.

Nos problemas de subtração, os alunos recorreram maioritariamente à adição indireta e à subtração indireta, sendo esta opção extensível a todos os significados desta operação: *retirar*, *comparar* e *completar*. O número de alunos a utilizar a adição indireta no teste final foi superior ao que se verificou no teste diagnóstico, enquanto Sara foi a aluna que mais vezes utilizou a subtração indireta.

Relativamente ao desempenho dos alunos na resolução dos problemas, verificou-se que as estratégias utilizadas foram condicionadas pelos enunciados dos problemas e pelos números envolvidos, o que tornou os seus cálculos mais eficientes. As estratégias foram combinadas com o recurso aos factos básicos.

Nas tarefas de cálculo sem contexto, a estratégia N10 também foi a mais utilizada, no entanto, este dado é mais visível nas duas subtrações. Nas adições, os alunos recorreram a estratégias mais diversificadas, como a 10's e a compensação (N10C). Nas quatro tarefas não é visível o uso da estratégia A10, enquanto a 1010 surge apenas associada a outras estratégias. Nas subtrações, o recurso à adição indireta só foi visível na tarefa 9, pelos alunos Jorge e Carlota.

Comparativamente com o teste diagnóstico verificou-se que a estratégia N10 continuou a ser a mais utilizada pelos alunos, seguida pela compensação, que foi utilizada em três das quatro tarefas nos dois testes. No plano oposto, a estratégia A10 não foi utilizada nos cálculos sem contexto nos dois testes, enquanto a estratégia 1010 só foi utilizada no teste diagnóstico, já que no teste final surge associada a outras estratégias. Nas tarefas de subtração os alunos raramente recorreram à adição indireta, o que não se verificou na resolução de problemas.

Nas tarefas de cálculo sem contexto, o desempenho individual dos alunos denotou algumas alterações numa análise comparativa entre os dois testes. No teste diagnóstico Francisco usou sempre a estratégia N10, enquanto no teste final a sua utilização só se verificou nas subtrações, optando pela 10's nas adições. A Carlota foi a aluna que apresentou mais estratégias diversificadas no teste final (N10, 10's e N10C) quando no teste diagnóstico optou sempre pela estratégia N10. Na linha do que se verificou no teste diagnóstico Sónia e Jorge são os alunos que mais utilizam a compensação, ainda que o aluno o faça em conjunto com outras estratégias no mesmo cálculo.

Os alunos mostraram-se motivados e empenhados na resolução do teste final, o que terá influenciado positivamente a eficácia dos resultados obtidos e a variedade de estratégias evidenciadas na resolução das tarefas.

Capítulo 6

CONCLUSÕES

Neste capítulo começo por apresentar a síntese do estudo e as conclusões que dele resultaram tendo em conta o objetivo central e as questões que o orientaram. Em seguida, apresento um conjunto de limitações e recomendações do estudo e concluo com uma reflexão pessoal onde foco os aspetos que considero mais relevantes sobre o trabalho desenvolvido.

6.1. Síntese do Estudo

Este estudo tem como objetivo compreender como é que os alunos do 2.º ano de escolaridade desenvolvem o cálculo mental num contexto de resolução de problemas de adição e subtração com números naturais, no âmbito de uma experiência de ensino.

A partir deste objetivo, delineei quatro questões orientadoras, a que procuro dar resposta: (i) quais as estratégias a que os alunos recorrem?; (ii) que mudanças são evidenciadas nas estratégias utilizadas pelos alunos ao longo da experiência de ensino? (iii) que dificuldades evidenciam os alunos?; e (iv) de que forma o contexto das tarefas influencia a seleção de estratégias por parte dos alunos?

No enquadramento teórico abordei quatro temas que considerei relevantes para o desenvolvimento deste estudo: (i) sentido de número; (ii) cálculo mental; (iii) resolução de problemas; e (iv) ambiente de aprendizagem. No primeiro, fiz referência ao conceito de sentido de número na perspetiva de vários autores, às componentes do sentido de número, bem como a importância que lhe é atribuída por documentos curriculares e orientadores e a forma como se desenvolve. No segundo, abordei o que é o cálculo mental e a pertinência da sua presença nos currículos de Matemática e identifiquei várias perspetivas acerca da evolução do nível de cálculo, concluindo este tema com as estratégias de cálculo mental. No terceiro tema referi a importância que a resolução de problemas, mais concretamente os de adição e subtração, assume na aplicação do conhecimento que os alunos têm dos números e das operações. Neste tema, também descrevi os vários significados associados à adição e à subtração. No último tema do enquadramento teórico, apresentei as ideias fundamentais acerca da construção de uma cultura de sala de aula que promova aprendizagens ativas, onde a comunicação assume um papel de relevância.

Este estudo insere-se no paradigma interpretativo, pelo que segui uma abordagem qualitativa, com *design* de estudo de caso, no âmbito de uma experiência de ensino. Os cinco alunos que nele participaram, Carlota, Francisco, Jorge, Sara e Sónia, representam a totalidade dos alunos do 2.º ano da turma que lecionei no ano letivo 2010/2011. A experiência de ensino desenrolou-se no terceiro período letivo, ao longo de oito semanas tendo por base a resolução de problemas de adição e subtração e de cadeias de cálculo. Em cada semana, após a resolução do problema, no primeiro dia, seguiu-se uma cadeia de cálculo nos dois dias seguintes. A primeira cadeia de cálculo da semana está encadeada com os números e operações subjacentes ao problema do dia anterior, enquanto a segunda se encadeia com o problema da semana seguinte. As aulas de resolução de problemas foram organizadas em quatro momentos: (i) apresentação e interpretação do problema; (ii) resolução individual do problema; (iii) apresentação e discussão das estratégias seguidas; e (v) síntese da aula com realce para as estratégias mais eficientes. Antes da experiência de ensino os alunos fizeram um teste diagnóstico com cinco problemas e quatro situações de cálculo sem contexto e, depois da experiência de ensino, um teste final com seis problemas e quatro situações de cálculo sem contexto.

Para a recolha de dados, durante a experiência de ensino, gravei em vídeo os momentos de apresentação, discussão e síntese das resoluções de cada problema, assim como as cadeias de cálculo. Depois do teste final, fiz uma entrevista aberta a cada aluno, que gravei em áudio. Foram ainda analisados os registos dos alunos na resolução dos problemas e as notas de campo.

Na identificação das estratégias de cálculo, segui o modelo proposto por Beishuizen (1997).

6.2. Conclusões do estudo

Para dar resposta às questões que orientaram este estudo, organizei as conclusões em quatro pontos: (i) estratégias usados pelos alunos; (ii) evolução das estratégias usadas pelos alunos ao longo do estudo; (iii) dificuldades evidenciadas pelos alunos; e (iv) influência do contexto na seleção de estratégias.

6.2.1. Estratégias usadas pelos alunos

No decurso do estudo, os alunos evidenciaram o uso de estratégias de cálculo mental pertencentes à categoria dos saltos e à categoria da decomposição, evidência que segue os resultados de estudos realizados por autores como (Fuson, 1992, Beishuizen, 1997; Beishuizen et al., 1997; Fuson et al., 1997; Blöte et al., 2000; Buys, 2001; Heirdsfield & Cooper, 2004; Murphy, 2004; Morais, 2011).

A estratégia N10, da categoria dos saltos, foi a mais utilizada pela generalidade dos alunos, sendo visível a sua utilização tanto nas tarefas de adição como nas de subtração. Este aspeto insere-se na perspetiva de Beishuizen (1997a; 1997b) que considera que a N10 é uma estratégia eficiente na medida em que tanto pode ser utilizada na adição como na subtração. No entanto, o uso desta estratégia foi mais evidente nas resoluções dos alunos nos problemas de subtração com o significado *retirar*, sempre que optavam pela subtração direta ou pela subtração indireta. Nos registos que denotavam o uso da adição indireta, quando se tratava dos significados *comparar* e *completar*, a estratégia N10 continuou a ser a mais utilizada, embora se tenha verificado também o uso da compensação. Francisco foi o aluno que mais utilizou a N10, sendo visível o seu uso em vinte e duas das vinte e sete tarefas que compuseram o teste diagnóstico, a experiência de ensino e o teste final. Este facto parece estar relacionado com a preferência do aluno por resoluções com base em saltos utilizando números que para ele são referência como 10 e 100, com os quais se sentia confortável.

Ainda dentro da categoria dos saltos, a compensação (N10C), que é uma variante da estratégia N10, surgiu no decurso do estudo. Verificou-se que o uso desta estratégia foi transversal às situações sem contexto e aos problemas de adição e subtração, neste caso sempre que a resolução se fazia através da adição indireta. As investigações de (Blöte et al., 2000; Murphy, 2004) também constataram esta evidência, justificada pela dificuldade que os alunos demonstram na utilização da compensação em subtrações. O trabalho desenvolvido durante a experiência de ensino e a seleção de números específicos para as tarefas, cujo algarismo das unidades era 1, 2, 8 e 9, poderão justificar esta opção dos alunos. Sónia foi a aluna que mais recorreu a esta estratégia.

Na adição, a utilização de estratégias foi mais diversificada. Para além das estratégias N10 e N10C, os registos dos alunos também denotaram o uso das estratégias 1010 e 10's, ambas da categoria da decomposição.

Nas tarefas que envolveram a adição, a estratégia 1010 dividiu as preferências com a N10, um aspeto realçado também por autores como Blöte et al, (2000) e Buys (2001) que consideram a 1010 eficiente para adição, o que já não se verifica na subtração com empréstimo. Sara e Sónia foram as alunas que mais recorreram à 1010 nas tarefas de adição. Trata-se de duas alunas que demonstram flexibilidade no uso de diferentes estratégias atendendo aos significados das operações e aos números envolvidos no decurso deste estudo, denotando um bom conhecimento acerca das múltiplas representações dos números.

A estratégia 10's foi menos utilizada e surgiu apenas nas adições, enquanto a estratégia A10, do método dos saltos, só foi utilizada uma vez durante o estudo.

A utilização de estratégias de cálculo mental foi influenciada, em algumas resoluções, pelo conhecimento que os alunos tinham dos factos básicos, como os dobros, por exemplo. Este aspeto foi visível quando algumas resoluções denotaram o uso da decomposição ou da compensação para obter um dobro que auxiliasse um determinado passo de cálculo, ou até mesmo na resolução dos problemas cujo contexto apontava para adição ou subtração sucessiva de parcelas. A utilização de estratégias mistas e a integração de factos básicos nas estratégias de cálculo mental são aspetos realçados por Buys (2001) e Ferreira (2012) relativamente a alunos que denotam flexibilidade no cálculo, derivada do conhecimento que têm dos números.

6.2.2. Evolução das estratégias utilizadas pelos alunos ao longo do estudo

A forma como os alunos utilizam as estratégias de cálculo mental, assim como a sua apropriação, é um processo flexível e criativo na perspetiva de autores como Blöte et al. (2000) e Murphy (2004). Neste sentido, o estudo também pretendeu identificar a evolução das estratégias de cálculo mental usadas pelos alunos.

Neste sentido, a análise dos registos das resoluções dos alunos permitiu evidenciar alterações no uso das estratégias de cálculo mental, dos factos básicos e na relação entre a adição e a subtração.

Relativamente às tarefas de cálculo mental, foi evidente a preferência gradual dos alunos pela categoria dos saltos comparativamente com a categoria da decomposição. A estratégia 1010 surgiu nos problemas de adição no teste diagnóstico e na experiência de ensino sendo pouco visível no teste final. Neste tipo de problemas, esta estratégia foi parcialmente substituída pela compensação (N10C). Esta evidência poderá estar relacionada com a escolha de números propícios ao uso da compensação e ao trabalho desenvolvido no decurso da experiência de ensino.

Numa análise aos três momentos que compuseram este estudo, verificou-se um aumento gradual do uso da compensação (N10C). A utilização desta estratégia surgiu com maior frequência nas tarefas da experiência de ensino e do teste final. A compensação foi introduzida pelo professor e trabalhada no decurso das cadeias de cálculo e na síntese das aulas de resolução de problemas, verificando-se a sua utilização por quatro dos cinco alunos que integram este estudo.

Numa fase inicial da experiência de ensino o uso da compensação surgiu associado aos problemas de subtração com significados *retirar* e *comparar* sempre que os alunos optaram pela adição indireta. Posteriormente, o uso desta estratégia também foi evidenciado nas resoluções com base na subtração direta, nos problemas de *retirar*, o que se reveste de um grau de complexidade superior.

No decurso do estudo verificou-se que os alunos foram adequando as suas estratégias aos números envolvidos nos problemas, às quais associaram o recurso aos factos básicos, o que encontra correspondência nas investigações realizadas por autores como (Fuson, 1992; Fuson et al., 1997; Buys, 2001; Morais, 2011).

Os registos dos alunos na experiência de ensino, e no teste final evidenciaram o recurso crescente a estratégias mistas de resolução, influenciadas pelos números envolvidos em cada passo de cálculo. A combinação das estratégias N10 e N10C, por exemplo, surgiu em várias resoluções na experiência de ensino e no teste final. Para além do uso simultâneo de diversas estratégias, os alunos evidenciaram a utilização crescente de factos básicos, como os dobros, nas suas resoluções, opções descritas no nível mais elevado de desenvolvimento do cálculo mental de acordo com o modelo de evolução proposto por Buys (2001). Sónia foi a aluna que mais procurou a formação de dobros recorrendo à compensação para transformar os *quase dobros* ou os *dobros mais um* em dobros.

No estudo verificou-se que os alunos foram tornando, progressivamente, os seus cálculos mais eficientes, resultado da variedade de estratégias que apresentaram e da utilização de números de referência de maior ordem de grandeza. No entanto, a evolução dos cinco alunos não foi homogénea, estando relacionada com o conhecimento que cada um tem acerca dos números e das suas múltiplas representações. Os alunos Jorge, Sara e Sónia apresentaram as resoluções mais eficientes, reduzindo progressivamente a quantidade de cálculos intermédios nos seus registos.

Entre estes três alunos, Sara foi quem apresentou uma maior variedade de estratégias ao longo do estudo, combinando-as progressivamente de forma a facilitar os cálculos. Uma evidência deste facto surgiu no quarto problema da experiência de ensino *"O mealheiro da Sofia",* quando recorreu à estratégia A10 para arredondar 199 a 200, de forma a facilitar o cálculo: (99 + 125 = 99+100 = 199 + 1 = 200 + 24 = 224). Os números envolvidos influenciaram a utilização desta estratégia, já que no decurso do estudo não a voltou a usar e que está de acordo com Murphy (2004) quando considera que a utilização de estratégias de cálculo mental é influenciada pelo conhecimento prévio e pela experiência do aluno, em igual medida com o discurso de sala de aula. Sónia foi quem mais utilizou a decomposição, sendo a única a utilizá-la em resoluções com base na subtração direta.

Carlota foi a aluna cujos registos denotaram uma maior evolução na diversidade de estratégias usadas. Deixou de centrar as suas resoluções apenas na estratégia N10, como se verificou no teste diagnóstico, passando a utilizar também as estratégias 1010 e 10's nos problemas de adição e a compensação (N10C) na adição indireta.

Francisco denotou evolução na ordem de grandeza dos números que para ele são referência. Inicialmente, o aluno adicionava ou subtraía sempre através da decomposição do segundo número em parcelas de 10, já que dominava os saltos de 10 em 10. No decurso da experiência de ensino, passou a dar saltos de 20, 50 e 100, números que se tornaram referência para ele. No teste final, o aluno também denotou o uso da estratégia 10's, que pertencendo à categoria da decomposição, também apresenta características dos saltos, no momento de adicionar as unidades.

O uso de estratégias progressivamente mais eficientes por parte dos alunos foi acompanhado por um maior conhecimento da relação entre as operações de adição e subtração e das suas propriedades. Na experiência de ensino e no teste final verificou-se a utilização da propriedade comutativa nas adições, quando a segunda parcela era de maior grandeza do que a primeira.

Exemplos da relação que estabeleceram entre as operações estão presentes na forma como utilizaram a adição indireta na resolução de problemas de subtração com os significados *comparar* e *completar* e no problema 4 do teste final *"O túnel rodoviário"*, cuja proximidade entre os números envolvidos na expressão numérica que resultou da interpretação do problema (579 - 380) influenciou a utilização subtração indireta.

6.2.3. Dificuldades evidenciadas pelos alunos

O processo de desenvolvimento do cálculo mental não foi linear nem homogéneo para todos os alunos. Ao longo da experiência de ensino as dificuldades que surgiram podem ser agrupadas em três tipos: (i) cálculos com números com mais de dois dígitos; (ii) grandeza dos números de referência; e (iii) uso da compensação (N10C).

As dificuldades identificadas nos cálculos com mais de dois dígitos verificaram-se a partir do problema 3 da experiência de ensino *"Vamos comprar bicicletas"*. Inicialmente, os alunos evidenciaram dificuldades sempre que o cálculo a realizar ultrapassava a centena mais próxima, por exemplo (190 + 34). O erro nos resultados era evitado com recurso a saltos mais pequenos, que permitissem chegar à centena, o que aumentou o número de cálculos intermédios nas resoluções de alguns alunos, diminuindo a flexibilidade no cálculo. Buys (2001) considera ser natural que surjam dificuldades neste processo evolutivo da grandeza dos números, já que se tornam mais complexos e de difícil compreensão para os alunos. As cadeias de cálculo possibilitaram que estas dificuldades deixassem de existir para a generalidade dos alunos, que transpuseram gradualmente para os números com mais de dois dígitos os conhecimentos e a experiência que tinham adquirido com números de menor grandeza, como é descrito igualmente nos estudos de Fuson (1992) e Fuson et al. (1997).

A dificuldade relacionada com a grandeza dos números de referência foi mais evidente nos registos de Francisco. Em diversas resoluções, utilizando o método dos saltos, registou um número de maior grandeza, quando na realidade saltou de 10 em 10. Esta opção ocorreu da vontade do aluno em reduzir o número de passos intermédios confrontada com as dificuldades iniciais em dar saltos superiores a 10. No decurso da experiência de ensino, verificou-se que Francisco também passou a ter como referência números de maior grandeza como 20, 50 ou 100.

As dificuldades associadas ao uso da compensação (N10C) foram mais generalizadas. Na resolução das primeiras tarefas, os alunos hesitavam entre adicionar ou subtrair no último passo de cálculo para compensar. A experiência obtida a partir da resolução de diversas tarefas e as discussões de sala de aula, possibilitaram ultrapassar as dificuldades verificadas no uso da compensação associado à adição. Na subtração o processo de compensar é mais complexo, como refere Murphy (2004) e, apesar dos vários diálogos ocorridos na síntese das aulas de resolução de problemas e nas cadeias de cálculo, a generalidade dos alunos optou por recorrer à compensação apenas em resoluções com base na adição. Sónia foi a única aluna que utilizou esta estratégia também na subtração.

6.2.4. Influência do contexto na seleção de estratégias

Mais do que nas estratégias utilizadas, o contexto parece ter tido influência no momento da escolha da operação para resolver as tarefas envolvendo a subtração. Assim, nos problemas os alunos recorreram à adição indireta e à subtração indireta e, com menor frequência, à subtração direta. Nas questões sem contexto usadas no teste diagnóstico e no teste final, destacou-se o uso da subtração direta, surgindo a adição indireta em apenas duas resoluções no teste final. De facto, nas expressões numéricas os alunos apresentaram resoluções bastante influenciadas pelo sinal de operação, o que confirma os resultados de um estudo de Blöte et al (2000) no qual os alunos foram mais flexíveis na escolha de estratégias quando resolviam problemas do que quando resolviam cálculos sem contexto. Esta pode ser uma das justificações da presença da estratégia 10's em três resoluções da expressão numérica (63 – 19), de forma a evitar a dificuldade que a estratégia N10 poderia trazer no momento de calcular 53 menos 9, ou então quando tivessem de subtrair as unidades (3 – 9) caso tivessem optado pela estratégia 1010.

Relativamente aos problemas, o contexto permite criar diversos significados, quer na adição, quer na subtração (Treffers & Buys, 2001). Contudo, é na subtração que o contexto parece ter mais influência nas estratégias, já que são evidenciadas diferentes abordagens nos problemas com significado *retirar* comparativamente com os problemas com significado *comparar* e *completar*, confirmando os resultados de estudos de autores como Morais (2011) e Ferreira (2012).

Nos problemas de *retirar* verificou-se que os alunos utilizaram frequentemente a subtração direta e a subtração indireta recorrendo, sobretudo, à estratégia N10. Com menor frequência, também foi evidenciado o uso da compensação (N10C) associada à adição indireta, na experiência de ensino, e à subtração direta, no teste final.

Já nos problemas com os significados *comparar* e *completar* os registos dos alunos denotaram uma preferência pela adição indireta. No teste de diagnóstico a estratégia N10 foi selecionada por todos os alunos, enquanto na experiência de ensino e no teste final esta estratégia surge em igualdade com a compensação (N10C). A importância de propor aos alunos problemas com diferentes significados das operações é realçada por autores como (Ponte & Serrazina, 2000; Fosnot & Dolk, 2001). Nos dois primeiros anos de escolaridade, os problemas são o contexto que promove o desenvolvimento dos vários significados que as operações de adição de subtração podem assumir (Treffers & Buys, 2001) permitindo o desenvolvimento de estratégias mais diversificadas e eficientes.

Concluindo, neste estudo verificou-se que nas tarefas com contexto os alunos apresentaram um maior conhecimento acerca das relações entre as operações, aspeto também salientado por Ferreira (2012), recorrendo diversas vezes à operação inversa, o que não foi evidenciado nas expressões numéricas, nas quais o sinal de operação influenciou as resoluções e tornou os cálculos menos eficientes.

6.3. Limitações do Estudo e recomendações

Uma das recomendações que é possível retirar deste estudo passa por os professores encorajarem os alunos a utilizarem estratégias de cálculo mental progressivamente mais flexíveis e eficientes, partindo das suas resoluções informais.

Uma cultura de aula centrada na resolução de problemas contendo os vários significados da adição e da subtração, complementados com tarefas sem contexto como as cadeias numéricas, e na discussão e reflexão acerca das resoluções dos alunos é fortemente recomendada. Trata-se de um veículo de desenvolvimento do cálculo mental e do sentido de número, conceitos estruturantes do ensino da Matemática de acordo com os mais recentes documentos orientadores e normativos.

Neste estudo, a seleção das tarefas e a forma como se estruturaram as aulas durante a experiência de ensino parecem ter possibilitado o desenvolvimento do conhecimento que os alunos tinham acerca dos números e da relação entre a adição e a subtração. Os momentos de discussão e de reflexão possibilitaram que mesmo os alunos que denotavam uma menor flexibilidade no cálculo passassem a apresentar resoluções cada vez mais eficientes e uma maior diversidade de estratégias de cálculo.

Nos últimos anos, têm sido realizados em Portugal vários estudos, no âmbito de trabalhos de mestrado e de doutoramento, acerca do desenvolvimento do cálculo mental no primeiro ciclo do ensino básico, centrando-se, sobretudo, na compreensão e na identificação das estratégias que os alunos utilizam nas tarefas que lhes são propostas. Neste sentido, parece pertinente a realização de um estudo mais abrangente que se centre na sequência de aprendizagem das diferentes estratégias de cálculo mental e que explicite quais as estratégias de cálculo mental a privilegiar nos dois primeiros anos de escolaridade.

Apesar de vários estudos demonstrarem que os alunos são capazes de desenvolver as suas próprias estratégias de cálculo, o professor tem a responsabilidade de promover o desenvolvimento dessas estratégias, no sentido de se tornarem mais complexas e eficientes. Até porque, se é verdade que a apropriação de estratégias de cálculo mental é um processo pessoal e por vezes intuitivo, o professor também deve ter presente que se não forem ensinadas explicitamente existe o risco de alguns alunos não terem acesso a elas.

Para concluir, apresento algumas das limitações do estudo e que estão relacionadas, essencialmente, com as condições em que foi realizado e o seu tempo de duração.

O meu duplo papel de professor e investigador possibilitou-me fazer a recolha de dados sem alterar o ambiente da sala de aula e o comportamento dos alunos. Contudo, nem sempre foi fácil gerir a recolha de dados com a condução da aula. A minha atenção tinha de estar focada tanto na investigação como no ensino, o que me criou alguns dilemas que tive de ultrapassar.

Este estudo realizou-se durante o terceiro período do ano letivo 2010/2011. Um estudo mais prolongado no tempo permitiria um trabalho mais aprofundado, nomeadamente, na compreensão do desenvolvimento das estratégias de cálculo mental.

Por fim, na experiência de ensino, a cadeia de cálculo que antecedia um problema de subtração era exclusivamente formada por expressões numéricas envolvendo a subtração. Talvez a inclusão de expressões numéricas que envolvessem também a adição com lacunas, como acontecia na cadeia seguinte à resolução do problema, pudesse ter influenciado as resoluções dos alunos que denotavam um menor conhecimento acerca das relações entre as operações.

6.4. Reflexão final

Este estudo é a concretização de um objetivo definido após a conclusão da minha formação inicial como professor do 1.º ciclo do ensino básico, durante a qual fui alimentando a curiosidade sobre alguns temas do ensino da Matemática que pela sua pertinência careciam de um maior aprofundamento da minha parte.

O contacto com os materiais desenvolvidos no âmbito do projeto "*Desenvolvendo o sentido de número*", do *"Programa de Formação Contínua de Matemática"* e a existência de um novo programa da disciplina para o ensino básico, levaram-me a querer aprofundar os conhecimentos que detinha acerca do sentido de número e do cálculo mental. Após algumas leituras prévias, apercebi-me que os dois conceitos estavam interligados, daí ter centrado este estudo no cálculo mental por considerar que a valorização que o novo programa lhe dava não tinha correspondência na prática de sala de aula.

A realização deste estudo constituiu um momento importante de aprendizagem para mim, no acréscimo de conhecimento acerca do desenvolvimento do cálculo mental e do processo de ensino e aprendizagem da Matemática nos primeiros anos.

Embora já centrasse a aula de Matemática na resolução de problemas explorando os vários significados das operações de adição e de subtração, passei a dar mais atenção à seleção dos números e ao seu contributo para explorar estratégias de cálculo progressivamente mais complexas. O mesmo também se verificou com as rotinas de cálculo, que já desenvolvia nos quinze minutos iniciais de cada aula, que passaram a ser mais estruturadas e objetivas.

Para além da minha atividade enquanto professor, este estudo possibilitou-me o primeiro contacto com a investigação em sala de aula. Através dos vários instrumentos de recolha de dados aprofundei o conhecimento que tinha acerca do desenvolvimento matemático dos meus alunos, com impacto direto nos cinco que participaram no estudo e nos restantes elementos da turma, já que passei a compreender melhor os seus registos e os seus raciocínios. A revisão da literatura permitiu-me contactar com diversos estudos realizados por autores de referência no âmbito desta temática, o que melhorou a minha capacidade de análise e de reflexão da atividade dos alunos e da minha prática letiva.

Relativamente aos alunos, acredito que o desenvolvimento deste estudo lhes proporcionou aprendizagens sobre o cálculo mental e as operações que, de outra forma, dificilmente poderiam realizar. Em convergência com as conclusões deste estudo, a sua participação na experiência de ensino possibilitou-lhes o contacto com diversas estratégias de cálculo mental, que passaram a utilizar de uma forma mais criteriosa e eficiente, tendo em atenção os números envolvidos, as relações entre as operações e a aplicação das suas propriedades. A evolução generalizada dos cinco alunos, ainda que em ritmos diferentes, no sentido de tornar as suas estratégias mais complexas e eficientes foi para mim motivo de grande satisfação, na medida em que para além de investigador também era professor e a experiência de ensino ocupou uma boa parte das aulas de Matemática durante o terceiro período do ano letivo 2010/2011.

Dois anos após a realização deste estudo, os resultados dos alunos na Prova Final de Matemática do 4.º ano de escolaridade de 2012/2013 denotaram um desempenho que considero bastante satisfatório tendo como referência a média nacional, com Francisco a atingir nível 3 e os outros quatro alunos a atingirem nível 4. Numa análise mais pormenorizada dos tópicos de avaliação da prova, verificou-se que o seu desempenho foi superior nos *Números e Operações* comparativamente com a *Geometria e Medida* e a Organização e *Tratamento de Dados*. Jorge atingiu nível 5, Carlota, Sónia e Sara nível 4 e Francisco nível 3.

Para além destes aspetos mais mensuráveis, acredito que os momentos de apresentação, argumentação e reflexão, que cada aula desta experiência de ensino previa, melhoraram o seu sentido crítico e a comunicação matemática.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática, 8*, 7-10 e 35.

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME-DEB.

Beishuizen, M. (1997a). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In M. Beishuizen, K. P. E. Gravemeijer & E. C. D. M. Van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathemetical strategies and procedures* (pp. 127-162). Utrecht: Utrecht University.

Beishuizen, M. (1997b). Two types of mental arithmetic and empty numberline. *BSRLM Proceedings of the Day Conference (pp. 18-22).* Nottingham, England. [Acesso Eletrónico]. Disponível em http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip17-12/BSRLM-IP17-12-Full.pdf

Beishuizen, M., van Putten, C. M. & van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction, 7*(1), 87-106.

Blöte, A. W., Klein, A. S., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction*, *10,* 221-247.

Boavida, A. M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração.* Lisboa: APM.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico - Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: ME: DGIDC.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto, Porto Editora.

Brocardo, J., & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de Matemática. In *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 97-115). Lisboa: Escolar Editora.

Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (2008). *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Lisboa: Escolar Editora.

Buys, K. (2001). Mental Arithmetic. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics: a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*, 61-88. Utrecht: Freudenthal Institute.

DGEBS (1990). *Ensino Básico: Programa do 1º Ciclo*. Ministério de Educação: Direção Geral do Ensino Básico e Secundário.

Erickson, F. (1986). Qualititative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: MacMillan.

Ferreira, E. (2012). *O Desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade*. Tese de Doutoramento apresentada ao Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition and subtraction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan.

Fuson, K,C., Wearne, D., Hiebert, J., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 130-162.

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2002). Flexibility an inflexibility in accurate mental addition and subtraction: Two cases studies. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*, 57-74.

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 443-463.

Heirdsfield, A., Dole, S., & Beswick, K. (2007). Instruction to support mental computation development in young children of diverse ability. In Jeffery, Peter L., Eds. *Proceedings Australian Association for Research in Education Conference*. Adelaide, Australia.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping Children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Markovits, Z., & Sowder, J. T. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 4-29.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8 e 44.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico* [Acesso eletrónico]. Disponível em: http://sitio.dgidc.min-edu.pt.

Morais, C. (2011). *O Cálculo mental na resolução de problemas: um estudo no 1º ano de escolaridade.* Dissertação de Mestrado, Instituto Politécnico de Lisboa, Escola Superior de Educação de Lisboa.

Murphy, C. (2004). How do children come to use a taught mental calculation stategy?. *Educational Studies in Mathematics*, *56*, 3-18.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J.P. (1994). *O estudo de caso na investigação em educação matemática*. Quadrante, 3(1), 3-18.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didática da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projeto MPT.

Serrazina, L & Ferreira, E. (2005). *Competência de cálculo? Sim! E também…colaborando à distância*. In *Desenvolvendo o sentido do número – perspetivas e exigências curriculares*, 29-40. Lisboa: APM.

Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 337-389). New York, NY: Macmillan.

Stein, M. K. (2001). Mathmatical Putting Umph Into. *Mathematics Teaching in Middle School, 7,* 110-12.

Thompson, I. (2009). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary schools*, (pp. 145–156). Buckingham: Open University Press.

Treffers, A., & Buys, K. (2001). Grade 2 (and 3): calculation up to 100. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics: a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*, 61-88. Utrecht: Freudenthal Institute.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.

Wood, T. (1999). Creating a Context for Argument in Mathmatics Class. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 171-191.

Yackel, E. (2000). *Creating a Mathematics Classroom Environment that Fosters the Development of Mathematical Argumentation.* [Acesso eletrónico] Disponível em: http://www.nku.edu/~sheffield/eyackel.html

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*, 423-440.

Yin, R. K. (2005). Estudo de Caso: planejamento e métodos, cap. I e II, 3a ed. Porto Alegre: Bookman. [Acesso eletrónico]. Disponível em: http://pt.scribd.com/doc/18238247/Robert-Yin-Estudo-de-Caso-livro-capitulos1-e2

ANEXOS

ANEXO 1

Requerimento à Diretora do Agrupamento

Requerimento

Exma. Sra. Diretora do
Agrupamento de Escolas
____

No âmbito do Mestrado em Educação, especialidade em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, pretendo desenvolver um estudo, que terá como foco o Desenvolvimento do Cálculo Mental no 2º Ano de Escolaridade.

O estudo, enquadrado na dissertação do referido Mestrado, terá início na última semana de março e irá prolongar-se pelos meses de abril, maio e junho e prevê a realização de tarefas de sala de aula na turma em que leciono na EB1 de _____________, durante as aulas de Matemática, tendo como orientadora a professora Joana Brocardo.

Desta forma solicito a V. Exa. autorização para proceder à recolha de dados sob a forma de produções escritas dos alunos e áudio/vídeo, que asseguro não serem divulgadas a terceiros, servindo apenas para o estudo em questão e estando salvaguardada a privacidade de todos os alunos.

Informo, ainda, que todos os encarregados de educação dos alunos do 2º ano serão contactados a fim de lhes ser solicitada a autorização para a recolha de dados.

Com os melhores cumprimentos,

_______________, 17 de março de 2011

Pede deferimento,

O Professor

(Nuno Miguel Oliveira)

ANEXO 2

Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo. Encarregado de Educação

No âmbito do Mestrado em Educação, especialidade em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, pretendo desenvolver um estudo, que terá como foco o Desenvolvimento do Cálculo Mental no 2º Ano de Escolaridade.

Desta forma solicito a V. Exa. autorização para proceder à recolha de dados sob a forma de produções escritas dos alunos, imagem e áudio, que asseguro não serem divulgadas a terceiros, servindo apenas para o estudo em questão e estando salvaguardada a privacidade de todos os alunos.

Informo, ainda, que a Direção do Agrupamento de ____________________ deu autorização para a implementação do estudo.

Obrigado pela atenção.

___________ 22 de março de 2011
O professor Nuno Miguel Oliveira

Eu, ____, encarregado de educação do aluno ________________________, do 2º Ano, declaro que dou autorização para o meu educando participar no estudo acima referido.

O encarregado de educação

____

ANEXO 3

Tarefas que compõem o teste diagnóstico

Tarefa 1

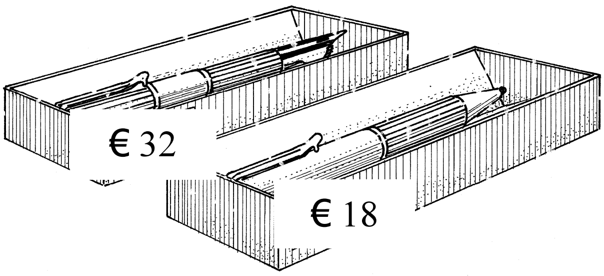
A Visita de Estudo

As Escolas do 1º Ciclo de Vale da Pedra e de Chã da Laranjeira fizeram uma visita de estudo. O autocarro passou primeiro pela escola de Vale da Pedra e entraram 29 pessoas, a seguir passou por Chã da Laranjeira e entraram 25 pessoas. Quantas pessoas foram à visita de estudo?

R: ____ .

Tarefa 2

O Dia do Pai



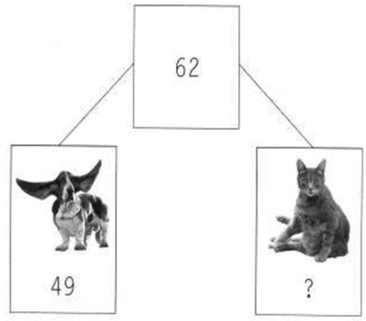
A Carla comprou estas duas canetas para oferecer ao pai no Dia do Pai. Quanto pagou pelas duas canetas?

R: ____ .

Tarefa 3

Os animais de estimação

62 alunos da escola da Sofia têm um animal de estimação: um cão ou um gato. Se souberes que 49 desses alunos têm um cão, consegues saber quantos têm um gato?



R: ____ .

Tarefa 4

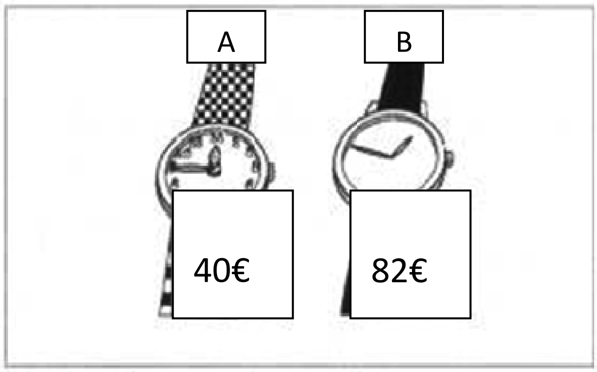
Os berlindes

Na sexta-feira, o Gonçalo trouxe para a escola 60 berlindes. No recreio esteve a jogar com os colegas e perdeu 35 berlindes. Com quantos berlindes ficou o Gonçalo?

R: ____ .

Tarefa 5

Vamos comprar um relógio



O Fernando foi comprar um relógio para oferecer ao pai. Na montra da loja viu estes dois relógios.

- Qual é o mais caro? _________

- Quanto custa a mais do que o outro?

R: ____ .

Calcula. Apresenta o resultado e regista a forma como pensaste.

49 + 35 =

63 – 19 =

25 + 28 =

82 – 40 =

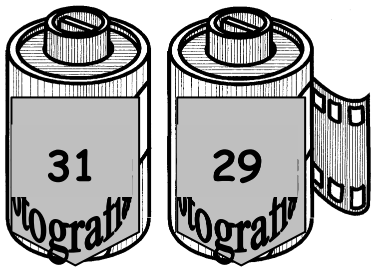
ANEXO 4

Tarefas que compõem a experiência de ensino

Tarefa 1

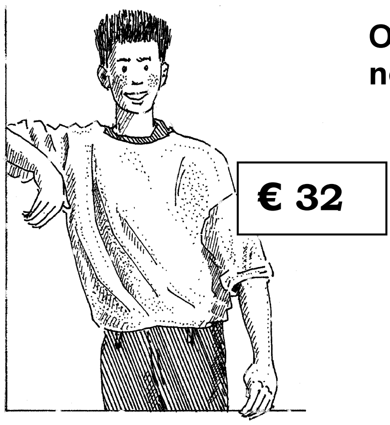
Os rolos de fotografia

O João gastou estes dois rolos de fotografia na Visita de Estudo. Quantas fotografias é que ele tirou?



Tarefa 2

A camisola do Fernando



O Fernando pagou esta camisola com uma nota de 50 euros. Quanto recebeu de troco?

Tarefa 3

Vamos comprar bicicletas

Na montra de uma loja, em Leiria, estavam estas duas bicicletas. Qual a diferença de preço destas duas bicicletas?

Tarefa 4

O mealheiro da Sofia

A Sofia tinha 99 euros no mealheiro. Na Páscoa deram-lhe 125 euros. Com quanto dinheiro ficou?

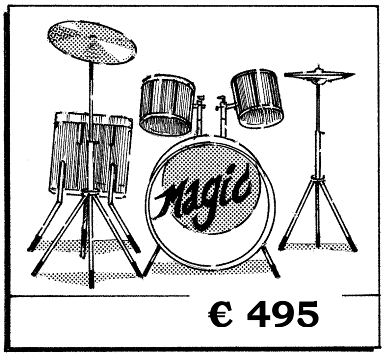
Tarefa 5

O parque de estacionamento

Este parque de estacionamento do LeiriaShopping já tem 150 lugares ocupados. Quantos automóveis podem ainda estacionar neste parque?

Tarefa 6

A bateria do Gonçalo



A avó do Gonçalo deu-lhe 600 euros para ele comprar uma bateria.

a) O dinheiro é suficiente para comprar esta bateria?

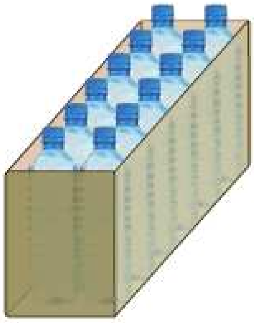
Porquê?____

____

b) O Gonçalo comprou esta bateria, com quanto dinheiro ainda ficou?

Tarefa 7

As garrafas de água

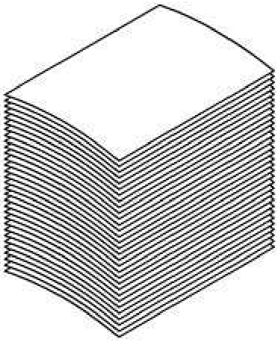


Na nossa escola, no Dia Mundial da Criança, foram bebidas 5 embalagens de água como a da figura. Quantas garrafas de água se beberam?

Tarefa 8

Vamos arrumar as folhas

A professora Manuela tem 128 folhas de papel no armário. Ela quer arrumá-las em grupos de 30 folhas. Quantos grupos de folhas a professora Manuela consegue fazer?



ANEXO 5

Tarefas que compõem o teste final

Tarefa 1

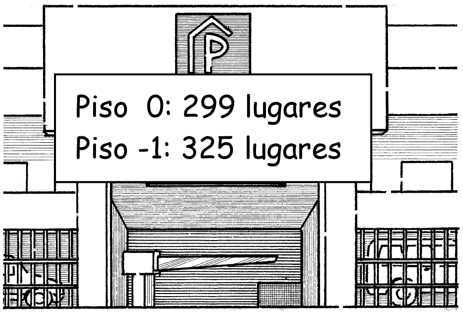
Vamos comprar um televisor

O pai da Carla anda a poupar dinheiro para comprar um televisor. No mês passado tinha 142 euros. Este mês conseguiu poupar 138 euros. Quanto dinheiro já poupou o pai da Carla?

R: ____ .

Tarefa 2

O parque de estacionamento



Quantos lugares tem este parque de estacionamento?

R: ____ .

Tarefa 3

As casas em construção

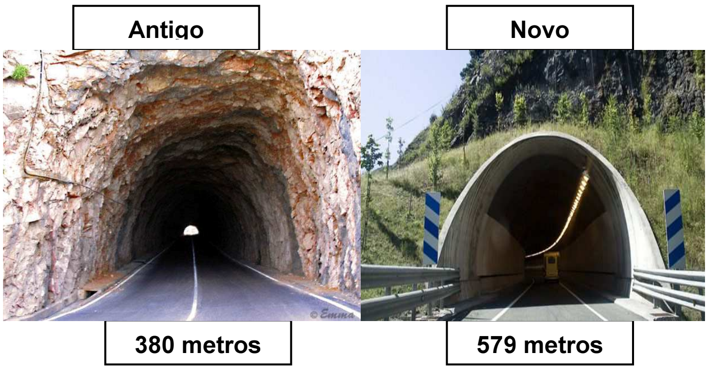
Os pais da Solange querem comprar uma casa nova. Em Leiria viram esta placa informativa. Quantas casas ainda estão à venda?

R: ____ .

Tarefa 4

O túnel rodoviário

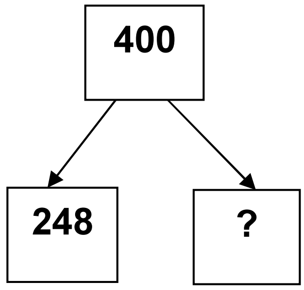
Na Serra da Estrela foi construído um túnel rodoviário novo.
O novo túnel tem mais ____ metros de comprimento do que o túnel antigo.



Tarefa 5

Vamos ao cinema

No Dia Mundial da Criança foram ao cinema 400 alunos de duas escolas (escola da Rita e escola do João). Da escola da Rita foram 248 crianças. Quantos foram os alunos da escola do João?

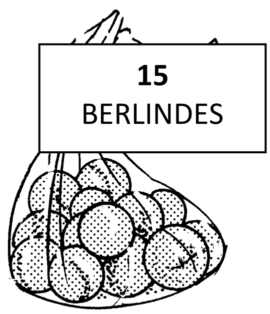


R: ____

Tarefa 6

Os berlindes

O Joel foi ao supermercado e comprou 5 sacos de berlindes.
Ao todo ficou com ________ berlindes.



Calcula. Apresenta o resultado e regista a forma como pensaste.

132 + 128 =

579 – 380 =

399 + 425 =

500 – 348 =

ANEXO 6

Guião de apoio à observação das tarefas

Data:

Tarefa proposta:

---

1) Ambiente da aula
(Como foi o envolvimento dos alunos? Demonstraram interesse?...)

2) Atividade dos alunos
(Como lidaram com a tarefa proposta? Exibiram dificuldades? Quais? Solicitaram muito o professor? Para quê?...)

3) Episódios de sala de aula
(Aconteceu algo que o surpreendeu, pela positiva ou pela negativa? Comentários ou atitudes dos alunos?