UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O geoplano na resolução de tarefas envolvendo os conceitos de área e perímetro: um estudo no 2.º Ciclo do ensino básico

Sara Raquel Roque Ventura

Dissertação

Mestrado em Educação

Área de especialização em Didática da Matemática

2013

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O geoplano na resolução de tarefas envolvendo os conceitos de área e perímetro: um estudo no 2.º Ciclo do ensino básico

Sara Raquel Roque Ventura

Dissertação orientada

pelo Professor Doutor Henrique Manuel Alonso da Costa Guimarães

Mestrado em Educação

2013

Resumo

O presente estudo pretende compreender como é que a utilização do geoplano contribui para o desenvolvimento da compreensão das noções de perímetro e de área em relação a figuras planas. Assim, para concretizar este propósito, pretende-se dar resposta às seguintes questões: (i) Que potencialidades e limites o geoplano evidencia na resolução de tarefas, envolvendo os conceitos de perímetro e área de figuras planas? (ii) Que estratégias e dificuldades os alunos manifestam na resolução de tarefas com o geoplano, envolvendo as noções de perímetro e área de figuras planas?

Esta investigação insere-se no paradigma interpretativo, através de uma abordagem qualitativa e numa modalidade de estudo de caso, numa turma de quinto ano de escolaridade. Para a recolha de dados, foram utilizados os seguintes instrumentos: observação de aulas, com registo de notas de campo, vídeo gravação da realização das tarefas, produções dos alunos na realização das tarefas análise documental e entrevistas tipo clínicas.

Os resultados do estudo revelam que o geoplano material permite experienciar os conceitos de área e de perímetro, de forma concreta, contribuindo para uma melhor compreensão e distinção dos mesmos. No geoplano computacional, esse potencial é aumentado, criando contextos dinâmicos e possibilitadores de um maior número de experiências e mais diversificado.

Sobre as dificuldades, na resolução de tarefas, ao nível dos enunciados, os resultados revelam que os alunos evidenciam dificuldades de interpretação, no que diz respeito à linguagem matemática e natural, e na interpretação de figuras; dificuldades concetuais, no que diz respeito à noção de área e de perímetro e dificuldades de argumentação, na explicação e justificação, sobretudo ao nível escrito. No que concerne às estratégias, o geoplano, associado ao tipo de tarefas propostas, potenciou o uso da contagem, da tentativa e erro, decomposição de figuras e o uso de fórmulas.

Palavras-chave: Áreas e perímetros; Geoplano; Aprendizagens em Matemática; Dificuldades e estratégias dos alunos

Abstract

The present study aims to understand how the use of the geoboard contributes to the development of the notions of perimeter and area of plane figures. Thus, in order to achieve this purpose, it is intended to answer the following questions: (i) what are the potentialities and limitations evidenced by the geoboard in tasks solving involving the perimeter and area concepts of plane figures? (ii) What are the strategies and difficulties experienced by the students in tasks solving with the geoboard, which involve the perimeter and area concepts of plane figures?

This research falls within the interpretative paradigm, through a qualitative approach in the form of case study, which is focused in a 5th grade class of schooling. For data collection the following tools were used: classroom observation, productions of the students in the tasks, documental analysis, with record of field notes, video recording of the completion of tasks, and clinical-like interviews.

The study results reveal that the material geoboard enables to experience, in a concrete way, the area and perimeter concepts, contributing to a better understanding and distinction between them. In computational geoboard that potential is increased, creating dynamic contexts and enabling a larger and more diverse set of experiences.

Concerning the difficulties in tasks solving, at the level of their wording, the results show that students have interpretation difficulties relative to the natural and mathematical language, and in the interpretation of figures; conceptual difficulties regarding the notion of area and perimeter, and argumentation difficulties in the explanation and justification, especially in the writhing way. Regarding the strategies, the geoboard associated with the kind of proposed tasks potentiated the use of counting, trial and error, figures decomposition, and the use of formulas.

Keywords: Areas and perimeters; Geoboard; Learning in Mathematics; Difficulties and strategies of the students

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Henrique Manuel Guimarães, por ter acreditado em mim, por me ter encorajado constantemente e por ter demonstrado, sempre, paciência e compreensão infindáveis, que me permitiram apaziguar as minhas angústias e realizar este trabalho. Agradeço, ainda, de forma muito especial o ter-me permitido partilhar a sua amizade.

Aos meus colegas de mestrado, pelos momentos de partilha, de trabalho e de amizade, que me permitiram avançar ao longo deste percurso.

Aos colegas que comigo colaboraram, à Direção da escola onde se realizou este trabalho, muito em especial ao professor António Seixas pela amizade, apoio e incentivo que sempre me demonstrou.

Aos meus alunos, pelo empenho e disponibilidade que manifestaram na realização das tarefas propostas e pelo carinho com que sempre me presentearam. Estiveram sempre presentes, na forma de um sorriso ou de uma palavra de afeto, transmitindo-me uma presença incondicional, de que só as crianças são capazes.

Aos meus amigos, pelas palavras de encorajamento, por me terem ouvido, acarinhado e por se fazerem sentir próximos, em todos os momentos cruciais, em especial à minha D. Isabel, ao meu irmão Daniel, ao Hugo, à professora Carmo e à Susana Patrício.

Aos meus pais, a quem devo tudo o que sou e o porto de abrigo que sempre foram e são.

Índice

Índice de figuras

Índice de quadros

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo irei abordar aspetos que considero relevantes no enquadramento da investigação aqui apresentada, havendo a preocupação de contextualizar a problemática do estudo na sociedade atual e a sua pertinência e contributos para o ensino / aprendizagem da Matemática.

1.1. A Matemática na sociedade atual

A sociedade atual encontra-se em constante evolução e as mudanças ocorrem nas mais variadas áreas. Surgem novas formas de abordagem do conhecimento, enquanto ferramenta que permite, aos indivíduos, tornarem-se mais adaptados às circunstâncias, cada vez mais exigentes, nos conhecimentos básicos necessários à vida quotidiana, bem como no mundo profissional. Estes conhecimentos caracterizam-se por uma forte componente tecnológica e matemática. Estamos constantemente a ser "bombardeados" com a necessidade do usufruto de saberes que envolvem estas duas áreas, nas mais pequenas decisões / análises com que nos confrontamos, diariamente, como, por exemplo, a análise de uma fatura, a gestão do rendimento mensal, a decisão de uma compra (seja ela avultada ou não), o preenchimento de um formulário, entre outras. A informação quantitativa que antes estava disponível apenas para alguns, atualmente está ao dispor de todos, nas mais diversas situações que requerem um bom domínio nesta área, para a sua compreensão e usufruto. A Matemática assume, cada vez mais, um lugar de destaque na sociedade, cujo domínio confere ao indivíduo maior probabilidade de sucesso, traduzindo-se em maior satisfação pessoal e numa forma de poder. Nas diversas áreas profissionais o "saber fazer" ganhou relevância e, consequentemente, o raciocínio matemático e a resolução de problemas exigidos aumentaram, sendo que são transversais a todas as áreas profissionais, havendo, no entanto, áreas em que é exigido um conhecimento matemático mais aprofundado. (NCTM, 2007).

O Homem começou por sentir necessidade de quantificar e mensurar. Estas terão sido as primeiras abordagens matemáticas que, mais tarde, deram origem ao estudo dos números e das operações, das formas geométricas e, gradualmente, a evolução do conceito de Matemática, conduzindo-nos à sua estruturação atual. A transversalidade da resolução de problemas, isto é, da utilização da Matemática para uma melhor compreensão do mundo que nos rodeia é uma constante, na sua evolução enquanto ciência.

Segundo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007):

> Neste mundo em mudança, aqueles que compreendem e são capazes de fazer matemática, terão oportunidades e opções significativamente maiores para construir os seus futuros. A competência matemática abre as portas a futuros produtivos; a sua ausência mantêm-nas fechadas. (p. 5)

Todos os alunos deverão ter acesso à melhor formação possível, para que possam desenvolver as suas capacidades matemáticas, quer seja em relação à compreensão dos conceitos matemáticos mais relevantes, quer se trate de um percurso que envolva uma carreira matemática ou científica, em que a matemática se torne imprescindível (NCTM, 2007).

A controvérsia gerada em torno da matemática, pelos resultados académicos, muitas vezes abaixo do desejável, fez com que fossem realizadas múltiplas investigações sobre a didática desta disciplina, de modo a aperfeiçoar os seus programas e a forma como esta ciência é transmitida aos alunos. O professor em sala de aula deve socorrer-se de recursos que possam veicular o conhecimento, de forma a alcançar o maior número de alunos, permitindo que estes se sintam estimulados e envolvidos no seu processo de aprendizagem. Os recursos de que o professor dispõe, em sala de aula, deixaram de se resumir ao manual do aluno, ao quadro e ao giz. Atualmente, estão à sua disposição, além destes, recursos tecnológicos e materiais manipuláveis. Estes recursos, assumindo um papel relevante, permitem uma abordagem mais próxima dos interesses dos alunos e das suas motivações. Os documentos orientadores do ensino básico indicam a utilização de materiais manipuláveis como recursos importantes para este ensino / aprendizagem. Serão apresentados como um apoio à construção de certos conceitos que, pelo seu nível de abstração, precisam de ser concretizados (ME, 2007).

O recurso aos materiais manipuláveis ganha maior relevância, sobretudo, no ensino da geometria, que deve basear-se na experimentação e na manipulação, privilegiando o desenvolvimento da capacidade de visualização espacial (NCTM, 2007). De acordo com Candeias, Nuno, et al. (2006) a geometria é necessária como instrumento de compreensão e de interpretação do mundo físico. A capacidade de visualização espacial e a compreensão de conceitos como os de área e perímetro são imprescindíveis no currículo da Matemática, sobretudo nos primeiros anos de escolaridade (primeiro e segundo ciclo). Esta exploração tem por base materiais manipulativos diversos - réguas, geoplano, sólidos geométricos..., bem como ferramentas tecnológicas – programas de geometria dinâmica (NCTM, 2007).

1.2. O geoplano no ensino da geometria

Nos últimos anos, a geometria tem vindo a assumir um papel de destaque no ensino da matemática e está presente nos três ciclos de escolaridade, tendo como ideia central o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos. Segundo os Princípios e as Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), desde o início dos primeiros anos, os alunos deverão desenvolver capacidades de visualização, através de experiências concretas, com vários objetos geométricos e através da utilização de tecnologias. Estes precisam de aprender a alterar, quer física, quer mentalmente, a posição, a orientação e a dimensão dos objetos. Devem compreender propriedades das figuras geométricas, no plano e no espaço, desenvolver a visualização e o raciocínio e ser capazes de o usar, bem como resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente, em situações que envolvam contextos geométricos. No estudo deste tema são essenciais materiais de desenho, materiais manipuláveis – geoplano, tangrans, peças poligonais encaixáveis e outros. Os programas computacionais favorecem, de igual modo, a compreensão de conceitos e relações geométricas (ME, 2007).

Os materiais manipuláveis, dos quais faz parte o geoplano, estão fortemente associados ao ensino da Geometria e são referidos, variadas vezes, no programa do ensino da Matemática e nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar.

De acordo com Lorezato, citado por Diniz, José (2010), um material didático pode ser qualquer instrumento que auxilie no processo de ensino aprendizagem. No entanto, antes de usar esse objeto, o professor deve traçar objetivos, pois, a sua intervenção é determinante para o sucesso ou não sucesso da utilização do material em questão. Passo (2006, citado por Diniz, José, 2010), afirma, ainda, que a qualidade de um bom material manipulativo pode ser avaliada pela quantidade de conceitos que é possível trabalhar. O geoplano é um bom exemplo, porque: pode ser aplicado a diversos conceitos matemáticos; permite transformações; é transversal a vários níveis de escolaridade. Pode, ainda, ser apresentado de várias formas: em papel ponteado, enquanto objeto físico ou, também, enquanto ferramenta tecnológica, sob a apresentação de um programa de geometria dinâmica. É um material didático, de fácil acesso nas escolas públicas e que envolve um baixo custo financeiro.

Os programas de ensino do pré-escolar ao décimo segundo ano devem capacitar os alunos para compreender os atributos mensuráveis dos objetos e as unidades, sistemas e processos de medição, bem como, aplicar técnicas, ferramentas e fórmulas adequadas para determinar medidas. O estudo da medida é de extrema importância devido à aplicabilidade na vida quotidiana, em inúmeras situações. Medir é, então, uma atividade que se coaduna com a utilização de materiais manipuláveis, sendo quase improvável que os alunos consigam apropriar-se do processo de medir, sem a utilização de materiais concretos (NCTM, 2007).

Os alunos do segundo ciclo desenvolvem estas primeiras explorações de medida, ao aprofundarem o estudo do perímetro e da área. Estes conceitos podem ser trabalhados com o geoplano, proporcionando -lhes experiências concretas, que conduzem a uma aprendizagem mais sedimentada. Apesar dos conceitos de área e perímetro não oferecerem, à partida, grandes obstáculos, alguns alunos apresentam dificuldades na sua distinção, no seu cálculo, bem como na seleção da unidade a usar.

De entre os vários instrumentos que enriquecem e potenciam o ensino da Geometria, o presente estudo irá incidir no geoplano. É-lhe reconhecido um potencial que permite trabalhar os conceitos de perímetro e área. Este âmbito de investigação assume uma importância relevante para a compreensão do contributo do geoplano, na resolução de tarefas, envolvendo os conceitos de área e perímetro.

1.3. Objetivo e as questões do estudo

A realização deste estudo surgiu com a necessidade de dar resposta ao problema, inicialmente, levantado: como é que a utilização do geoplano contribui para o desenvolvimento da compreensão das noções de perímetro e área de figuras planas?

Com o principal objetivo deste estudo pretendo compreender como é que a utilização do geoplano favorece a compreensão das noções de perímetro e área de figuras planas e a resolução de tarefas que envolvam estes conceitos. Assim, para concretizar este propósito pretendo dar resposta às seguintes questões de estudo:

(i) Que potencialidades e limites o geoplano evidencia na resolução de tarefas, envolvendo os conceitos de perímetro e área de figuras planas?

(ii) Que estratégias e dificuldades os alunos manifestam na resolução de tarefas com o geoplano, envolvendo as noções de perímetro e área de figuras planas**?**

Através do estudo desta temática, proponho-me conhecer quais as dificuldades dos alunos na compreensão destes dois conceitos - perímetro e área - e em que medida a resolução de tarefas, no geoplano, facilita a sua abordagem.

Segundo Silva, João Alberto (2009), o estudo da construção da explicação dos conteúdos elementares da geometria revestem-se de interesse devido à relação que se estabelece entre os aspetos psicológicos da inteligência e os conteúdos ensinados na escola. Mesmo que um aluno domine o cálculo, a elaboração de uma explicação para a relação que existe entre o perímetro e a área, não é facilmente explicável.

De acordo com Kenney e Kouba (1997); Lindquist e Kouba (1989) (citados em NCTM, 2007), muitos alunos do ensino básico têm dificuldades na compreensão do perímetro e da área. A minha experiência, enquanto docente, mostra-me que os alunos apresentam dificuldades na sua aquisição e, consequentemente, na sua distinção e cálculo, bem como na distinção entre a unidade de medida de perímetro e a unidade de medida de área. Estou convicta de que, se os alunos obtiverem uma boa compreensão destes conceitos, criam abertura para uma boa apreensão das noções geométricas de duas dimensões e, posteriormente, da noção de volume.

Ao longo desta investigação, as dúvidas, as questões, e espero, algumas respostas, servirão de reflexão crítica à minha prática pedagógica, de modo a que possa contribuir para um aperfeiçoamento da mesma e, consequentemente, ajudar os meus alunos nas suas aprendizagens.

O trabalho apresentado está dividido em seis capítulos. O primeiro refere-se à presente introdução. O segundo capítulo abrange toda a temática referente ao ensino da geometria e, em particular, às áreas e perímetros, bem como ao geoplano e o seu potencial, enquanto ferramenta facilitadora do ensino destes conceitos, havendo a preocupação de referenciar alguns elementos de investigação. O terceiro capítulo apresenta as opções metodológicas gerais, os instrumentos de recolha de dados e o modo como estes foram analisados. No Capítulo quatro, numa primeira parte é feita uma breve caracterização do meio, em que está inserida a escola onde decorre este estudo, a segunda parte é dedicada à caracterização da turma e para finalizar, todos os aspetos referidos serão contextualizados e enquadrados no modo como decorreram as aulas, desde a sua conceção à sua concretização. Os dados recolhidos são tratados no capítulo cinco, que irá incidir sobre a caracterização do aluno caso e posterior análise dos dados. O capítulo seis será dedicado às conclusões do estudo, que serão alvo de uma síntese e de uma reflexão final.

Capítulo 2

Enquadramento teórico

Este capítulo encontra-se dividido em duas partes: o ensino da geometria e o ensino das áreas e dos perímetros. Na primeira parte, começo por abordar as perspetivas e as orientações curriculares gerais do ensino da geometria, tendo como suporte de informação os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) e as orientações de alguns investigadores que se debruçaram sobre esta temática. Abordarei a capacidade de visualização e o tema medida, aspetos primordiais nas questões abordadas e presentes na geometria.

Numa segunda parte, irei debruçar-me sobre perspetivas e orientações curriculares do ensino da área e do perímetro, tendo por base os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) e investigadores que se debruçaram sobre esta área, nomeadamente sobre as dificuldades sentidas pelos alunos, na aprendizagem e compreensão destes conceitos. Abordarei, também, o contributo dos materiais manipuláveis – nomeadamente o geoplano, no ensino da área e do perímetro.

2.1. O ensino da geometria

Segundo, Canavarro (2003):

> O currículo envolve sempre um propósito, um processo e um contexto. Além disso, resulta da confluência de diversas práticas, exercidas por diferentes actores, em diferentes momentos. É por isso um conceito complexo, dinâmico e multifacetado
>
> (cap. III, p.103)

O desenvolvimento curricular acompanha a evolução da sociedade e, consequentemente, da escola. O currículo é o espelho dos valores e das crenças que predominam, num determinado momento, na sociedade. É o resultado da combinação de muitos interesses por parte dos políticos, professores, cientistas, pais... (Ponte, et al., 1998)

No que respeito ao desenvolvimento curricular da disciplina de Matemática, em Portugal, até aos anos 60, viveu-se o chamado período da Matemática tradicional, em que a memorização e a aprendizagem sem compreensão eram uma prática comum. Segundo Veloso (1998), o currículo da geometria tinha duas componentes principais: construções geométricas e o estudo da geometria Euclidiana no plano e no espaço. Eram enunciados e demonstrados dezenas e dezenas de axiomas, teoremas..., obrigando os alunos a criar hábitos de raciocínio rigoroso e sistemático, a que a maior parte dos alunos reagia mal, criando aversão à geometria. O tema da geometria, naquela época, era bastante relevante, sendo valorizadas as demonstrações até como um tema de elite mesmo na realização de exames. Ainda nos anos 60, o nosso país vivenciava a agitação que se fazia sentir a nível internacional, tendo surgido o período da Matemática Moderna, que veio revolucionar o ensino em Portugal. As metodologias de ensino passaram a apontar para a aprendizagem pela descoberta, o que provocou a restruturação do currículo, introduzindo novos temas e alterações à abordagem de temas já existentes (Ponte, et al., 1998). Na década de setenta, assiste-se a uma nova reformulação das orientações metodológicas - o período da reforma Veiga Simão. A geometria é fortemente desvalorizada. Estas orientações metodológicas prevaleceram na década de setenta à década de noventa, deixando graves sequelas no ensino da Matemática.

Segundo, Ponte, et al. (1998):

> • o virtual desaparecimento da geometria dos programas e a crescente desabilitação dos professores neste domínio;
> • o estabelecimento de uma tradição de desvalorização do uso de materiais didáticos, dando-se grande ênfase à apresentação formalista da disciplina baseada no simbolismo;
> • a aversão dos alunos a tudo o que tem a ver com a Matemática, reforçando-se uma atitude predominantemente negativa em relação a esta disciplina. (p.7)

A geometria foi relegada para segundo plano, bem como a apetência dos professores para lecionarem esta temática. Acresce o facto dos materiais didáticos não serem considerados "uma mais-valia" para o ensino da Matemática, não havendo lugar para a experimentação, baseada na manipulação destes materiais, estando ausente um propósito no que diz respeito ao desenvolvimento da capacidade de visualização espacial.

Segundo Abrantes et al. (1999), durante as décadas de setenta e oitenta, a geometria era vista como um "parente pobre" da álgebra linear, em consequência da reforma da

Matemática Moderna. Os aspetos da geometria ligados à observação, à construção e à experimentação encontravam-se ausentes do ensino básico. No final da década de oitenta, começam a surgir os primeiros movimentos que originaram alterações curriculares significativas: a Associação de Professores de Matemática organiza-se para discutir o currículo em vigor; há preocupação em conhecer realidades educativas de outros países e é aprovada a Lei de Bases do Sistema Educativo. A reforma de Roberto Carneiro conduz à realização de novos currículos, em que a geometria, mais concretamente as representações geométricas ganham relevo e são valorizadas (Ponte, et al., 1998).

Segundo Freuthental (1973) em resposta à pergunta - O que é geometria? – Diz-nos que podemos entendê-la segundo níveis mais elaborados, em que a descrevemos como um capítulo da Matemática, onde estão organizados vários axiomas que, por razões históricas, se deu o nome de geometria. Mas será esse o verdadeiro entendimento que pretendemos desta ciência? Ser professor implica ter um conhecimento aperfeiçoado de determinado conceito, que nos permita explicitá-lo, tornando-o claro e evidente. Talvez este entendimento necessite de uma forma mais simplista e simultaneamente mais explícita. De acordo com Freuthental, (1973) atendendo a um nível menos elaborado, podemos afirmar que a geometria é a aprendizagem do espaço onde uma criança cresce e consequentemente manifesta curiosidade por conhecer, explorar e conquistar, para que possa apropriar-se do ambiente que a rodeia e se sinta cada vez mais adaptada.

De acordo com Veloso (1998), Freuthental foi a personalidade que mais influência teve no regresso da geometria, vista como um tema fundamental, à Matemática escolar, dos nossos dias. De acordo com Freuthental (1973), a geometria prepara o aluno para apreciar as formas que existem à sua volta, valorizando-as e, simultaneamente relacionar ideias geométricas com números e medições.

Esta noção básica de geometria contribui para o aluno se orientar, comunicar, estimar distâncias, calcular medidas ou apreciar as formas. Está presente em várias situações do dia-a-dia e torna-se indispensável para o desenvolvimento de capacidades relacionadas com o espaço e a forma, desenvolvendo no aluno um pensamento que lhe possibilita compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (NCTM, 2007).

Atualmente procura-se que as crianças aprendam através da experimentação e da manipulação, sendo a geometria um meio para a criança conhecer o espaço. De acordo com o exposto, é dada ênfase à visualização espacial, à verbalização e a intuição, bem como à utilização destas na resolução de problemas. As ideias geométricas revelam-se muito úteis na representação e resolução de problemas, em outras áreas da Matemática, pelo que deve ser integrada, sempre que possível, em situações do dia-a-dia, (NCTM, 2007).

Face ao exposto, a geometria assume um papel importante na compreensão da realidade que nos rodeia e alguns tópicos geométricos permitem estabelecer relações com outras áreas da Matemática, nomeadamente com os conceitos de número e de medida, permitindo uma melhor aprendizagem e construção dos mesmos, (NCTM, 2007).

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), o propósito principal do ensino da geometria visa desenvolver, nos alunos, o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão das propriedades de figuras geométricas, no plano e no espaço, a compreensão de grandezas geométricas e respetivos processos de medida, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas em contextos diversos. A geometria, sendo muito mais que um conjunto de definições, baseia-se no raciocínio e na descrição de relações. Vários teóricos e investigadores (Burger e Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes e Tischler; 1988; Senk, 1989; Van Hiele, 1986) compactuam a ideia de que a construção da compreensão em geometria, ao longo dos anos de escolaridade, evolui de raciocínio informal para um raciocínio (mais) formal. (NCTM, 2007)

Segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), a aprendizagem da geometria é realizada baseando-se em experiências concretas, que evoluem para processos mais formais e conduzem ao desenvolvimento de capacidade de organização lógica do pensamento. As orientações mais recentes, sobre o ensino da geometria, remetem para a utilização de experiências concretas, com uma diversidade de objetos geométricos.

Segundo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007),

> desde o pré-escolar ao 12.º ano, o ensino e a aprendizagem da geometria deve permitir:
>
> - Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas;
> - Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação;
> - Aplicar transformações geométricas e usar simetrias para analisar situações matemáticas;
> - Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas. (p. 44)

Através da utilização de modelos concretos, os alunos poderão envolver-se, ativamente, com conceitos geométricos. Com atividades bem conseguidas, com ferramentas adequadas e com o apoio do professor, poderão aprender a raciocinar cuidadosamente sobre as noções geométricas, logo desde os primeiros anos de escolaridade (NCTM,2007).

De acordo com (Abrantes, Serrazina e Oliveira,1999), o ensino da geometria deve privilegiar formas intuitivas e flexíveis próximas das capacidades lógicas dos alunos. Investigações sobre o processo do pensamento geométrico indicam que este evolui de modo lento, desde as formas intuitivas iniciais de pensamento até às formas dedutivas finais, em que a indução e dedução se vão articulando e desenvolvendo. Referem, ainda, como aspetos a desenvolver: "as capacidades de visualização espacial e de verbalização, a intuição e a utilização destas na resolução de problemas".

2.2. Visualização

De acordo com Zirmmermann e Cunningham (1991) a visualização em Matemática, é um processo de formação de imagens que se constituem como elementos fundamentais na descoberta e na compreensão desta ciência.

O significado atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens concretas, associando experiências anteriores, prosseguindo para processos mais formais, levando ao desenvolvimento da capacidade de organização lógica do pensamento (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

O termo visualização assume diferentes definições de acordo com vários autores. De acordo com Dreyfus (1990), p.119, (citado por Costa, 2000), "Visualização do ponto de vista da educação matemática inclui duas direções: a interpretação e a compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica"; Segundo Solano e Presmeg (1995, p.67), (citado por Costa, 2000), "visualização é a relação entre imagens". Ambas as definições se focam na visualização enquanto perceção e manipulação de imagens visuais.

De acordo com os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), desde os primeiros anos de escolaridade, os alunos deverão desenvolver a capacidade de visualização "através de experiências concretas com uma diversidade de objetos geométricos e através da utilização das tecnologias, que permitem rodar, encolher e deformar uma série de objetos bi e tridimensionais" (p. 47).

De acordo com Veloso (1998), no ensino da Matemática, mais especificamente no ensino da geometria, é essencial que a construção de modelos e materiais manipuláveis esteja presente, não só nos primeiros anos, mas ao longo de toda a escolaridade. Defende, ainda, que, só assim, é possível a construção de uma memória de imagens, que permita aceder a visualizações progressivamente mais complexas. Numa Sociedade em que os aspetos visuais se tornam cada vez mais importantes é preciso "aprender a ver". Esta aprendizagem deve ser um dos objetivos e práticas do ensino da geometria.

Segundo Freuthental (1973), a definição de geometria pode adquirir vários contornos. Pode assumir-se, de forma mais complexa, sendo um "capítulo da Matemática organizado axiomaticamente; ou de forma mais simplista, em que a sua essência seja, sobretudo, compreender o espaço em que uma a criança vive, o espaço que deve ser explorado, conhecido, de modo a que a criança possa tirar o maior partido do meio envolvente. Freuthental (1973) sublinha, ainda, o facto da importância da aprendizagem da Matemática estar relacionada com a realidade.

O estudo das formas no espaço e das relações espaciais oferece aos alunos a oportunidade de relacionarem a Matemática com o mundo real. Ao tentarem compreender o mundo que os rodeia, as primeiras experiências das crianças estão relacionadas com o espaço e com noções de geometria, por exemplo, quando distinguem um determinado objeto ou quando estabelecem a relação proximal a um dado objeto, aprendendo a movimentar-se de um lado para o outro, estando a usar noção de espaço (Abrantes, Serrazina e Oliveira,1999).

É notória a importância da visualização, presente nos objetivos gerais da aprendizagem do tema geometria, ao longo do primeiro, segundo e terceiro ciclos (ver quadro 1) (ME, 2007)

Quadro 1 - Objetivos gerais de aprendizagem do tema geometria

1º Ciclo	- Desenvolver a visualização e ser capaz de representar, descrever e construir figuras no plano e no espaço e de identificar propriedades que as caracterizam; - Ser capaz de identificar e interpretar relações espaciais; (...)
2º Ciclo	- Compreender propriedades das figuras geométricas no plano e no espaço; - Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de os usar; (...)
3º Ciclo	- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de os usar; - Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano e no espaço; (...)

As capacidades de visualização deverão ser trabalhadas desde os primeiros anos de escolaridade, através de experiências concretas, contemplando uma diversidade de objetos geométricos e a utilização de tecnologias, que permitam transformar, de várias formas, objetos geométricos bi e tridimensionais. À medida que vão desenvolvendo os seus conhecimentos geométricos, os alunos precisam de aprender a alterar, quer física quer mentalmente, a posição, a orientação e a dimensão dos objetos. Os alunos destas idades – 3º ao 5º ano estão preparados para manipularem figuras mentalmente e usufruírem de experiências que os desafiem e que possam ser exploradas fisicamente. A tecnologia permite-lhes alargar a sua capacidade de raciocínio espacial, por exemplo, através de jogos de computador, que podem ajudar a desenvolver a orientação espacial e a coordenação entre os olhos e a mão (NCTM, 2007).

Ao longo dos segundo e terceiro ciclos, a capacidade de visualizar e raciocinar revelam-se fundamentais, em geometria, sendo igualmente necessário que os alunos analisem, construam, componham e decomponham objetos tri e bi dimensionais, recorrendo a desenhos, modelos geométricos ou programas de geometria dinâmica. Os alunos deverão, entre outros, desenhar objetos, obedecendo a descrições geométricas e descrever um dado objeto, atendendo às suas propriedades geométricas. (NCTM, 2007).

A componente visual dos aspetos matemáticos e geométricos está presente, quer no que diz respeito à aquisição de conhecimentos, quer na abordagem didática e pedagógica da educação em geometria (Costa, 2000).

2.3. Medida

De acordo com os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), "O estudo da medida é importante no currículo de Matemática (...) devido à aplicação prática e à abundância de situações que envolvem a medida em vários aspetos da vida quotidiana." (p.48). A compreensão da noção de medida inicia-se nas vivências dos alunos, nas experiências vivenciadas no dia-a-dia, bem como noutras áreas curriculares. De acordo com esta fonte, medir é uma atividade na qual a utilização de materiais concretos faz todo o sentido, sendo pouco provável que os alunos apreendam o conceito de medir, sem manusearem materiais, fazerem comparações físicas e medirem com os instrumentos apropriados. É também referida a necessidade do uso de materiais concretos, para que os alunos possam adquirir uma série de experiências informais na compreensão dos atributos mensuráveis, de modo a estabelecer relações de grandeza entre os diversos atributos, à medida que evoluem nos diferentes anos de escolaridade - "Por exemplo, a separação e a reorganização das partes de uma figura poderá alterar o seu perímetro, mas não afetará a sua área." (p.49). O conceito de medida é indissociável do conceito de geometria. As duas noções estão interligadas (por exemplo, o perímetro e a área são características mensuráveis de certas figuras). De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), o propósito principal do ensino do tema geometria e medida, no 1º ciclo e geometria no 2º e 3º ciclos, é "desenvolver, nos alunos, o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a noção de grandeza e respetivos processos de medida..." (p. 20). No que diz respeito ao 2º ciclo, mais especificamente, é referida "... a compreensão de grandezas geométricas e respetivos processos de medida, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas em contextos diversos." (p.36). É notória a compreensão do conceito de medida associada à compreensão das grandezas geométricas, aliadas à resolução de problemas.

Os objetivos gerais de aprendizagem para cada ciclo, referentes ao tema geometria e medida, são os que se apresentam no quadro 2 da página seguinte.

Quadro 2 - Objetivos gerais de aprendizagem

1º Ciclo	- Desenvolver a visualização e ser capaz de representar, descrever e construir figuras no plano e no espaço e de identificar propriedades que as caracterizam; - Ser capaz de identificar e interpretar relações espaciais; - Compreender as grandezas dinheiro, comprimento, área, massa, capacidade, volume, e tempo; - Compreender o que é a unidade de medida e o processo de medir; - Ser capaz de realizar estimativas e medições, e de relacionar diferentes unidades de medida; - Ser capaz de resolver problemas, raciocinar e comunicar no âmbito deste tema.
2º Ciclo	- Compreender propriedades das figuras geométricas no plano e no espaço; - Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de os usar; - Ser capaz de analisar padrões geométricos e desenvolver o conceito de simetria; - Ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em situações que envolvam contextos geométricos.
3º Ciclo	- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de os usar; - Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano e no espaço; - Compreender e ser capaz de usar as relações de congruência e semelhança de triângulos; - Desenvolver a compreensão das isometrias e semelhanças; - Compreender a noção de demonstração e ser capaz de fazer raciocínios dedutivos; - Ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos e trigonométricos.

Segundo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), os alunos, ao longo dos anos de escolaridade, deverão possuir um conhecimento crescente das várias técnicas de medida e respetivos instrumentos, bem como o conhecimento de fórmulas que lhes permitam medir em vários contextos. O conjunto dos atributos mensuráveis deverá alargar-se, bem como as relações entre eles. Os alunos deverão ser capazes de escolher a unidade que mais se adequa ao atributo a medir, uma vez que aprender a selecionar a unidade apropriada constitui o elemento principal da medição.

No que concerne às estratégias para a determinação de uma medida, de acordo com os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007) "As técnicas de medição, como a contagem, a realização de estimativas e a utilização de fórmulas e instrumentos, são estratégias usadas na determinação de uma medida." (p.50), salientando, ainda, que "as fórmulas são relações genéricas que produzem medidas, quando são especificados valores para as variáveis da fórmula" (p.50).

2.4. Ensino das áreas e dos perímetros

Como tem vindo a ser referido, os conceitos de medida e geometria estão estreitamente relacionados. O desenvolvimento dos conceitos de perímetro e área são um bom exemplo desta relação. As noções de perímetro e área começam por ser abordadas no primeiro ciclo, onde os alunos são conduzidos a trabalhar estas duas grandezas e a relacioná-las, de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico, (ME, 2007) "A resolução de problemas envolvendo grandezas e medidas em situações do dia-a-dia constitui o contexto fundamental para a aprendizagem deste tema. É a partir da exploração de situações concretas que surgem as fórmulas e os procedimentos para determinar medidas." (p.21). Como recursos são evidenciados os materiais manipuláveis, uma vez que permitem estabelecer comparações e tirar conclusões, de modo a concretizar a compreensão dos conceitos, como exemplos, veja-se a propósito, na coluna que se refere às "Notas", a referência ao geoplano, tangram e pentaminós para trabalhar os conceitos de perímetro e área (Quadro 3)

Quadro 3 - Tópicos e objetivos específicos da geometria – Perímetros e áreas, 1º ciclo

3.º e 4.º anos

Tópicos	Objectivos específicos	Notas
Comprimento, massa, capacidade, área e volume • Medida e medição • Unidades de medida *SI* • Perímetro, área e volume • Estimação	• Compreender a noção de volume. • Realizar medições de grandezas em unidades *SI*, usando instrumentos adequados às situações. • Comparar e ordenar medidas de diversas grandezas. • Calcular o perímetro de polígonos e determinar, de modo experimental, o perímetro da base circular de um objecto. • Estimar a área de uma figura por enquadramento. • Desenhar polígonos em papel quadriculado com um dado perímetro e uma dada área. • Resolver problemas relacionando perímetro e área. • Compreender e utilizar as fórmulas para calcular a área do quadrado e do rectângulo. • Determinar o volume do cubo de uma forma experimental. • Realizar estimativas de medidas de grandezas. • Resolver problemas respeitantes a grandezas, utilizando e relacionando as unidades de medida *SI*.	• Propor o preenchimento de volumes por empilhamento de objectos de igual volume contando as unidades necessárias. • Construir com os alunos as seguintes unidades de medida: *m*, *dm*, *cm* e *dam*; cm^2, dm^2 e m^2; dm^3. Projectar a construção do m^3 *a partir do* dm^3. Propor a realização de medições. • Para o estudo da capacidade, usar recipientes correspondentes às várias unidades de medida e estabelecer as relações correspondentes. Proceder de modo análogo para as outras grandezas. • Usar o método das metades e do enquadramento em figuras desenhadas no geoplano e em papel ponteado ou quadriculado, para calcular aproximadamente a respectiva área. • Promover a utilização do geoplano, tangram e pentaminós para investigar o perímetro de figuras com a mesma área e a área de figuras com o mesmo perímetro. • Promover a exploração de volumes de objectos, colocando-os num recipiente graduado com líquido. • Propor, por exemplo, a estimação da massa de objectos e comparar com o valor obtido por pesagem.

No segundo ciclo de escolaridade, de acordo com o Programa do Ensino da Matemática (ME, 2007), o tema da geometria apresenta como propósito principal "Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão das propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a compreensão de grandezas geométricas e respetivos processos de medida..." (p.36). Continua a ser dada ênfase às grandezas e aos respetivos processos de medição, associados à resolução de problemas, em contextos de vida real. As experiências de medição devem ser diversificadas, sendo fundamental o recurso a instrumentos de medida, bem como a utilização de materiais manipuláveis (ME,2007). Como se pode ver no quadro 4 que a seguir se apresenta, em particular na coluna que se refere às "Notas", a proposta de situações experimentais, que têm por base o cálculo de áreas e de perímetros.

Quadro 4 - Tópicos e objetivos específicos da geometria – Perímetros e áreas, 2º ciclo

Tópicos	Objectivos específicos	Notas
Perímetros • Polígonos regulares e irregulares • Círculo	• Determinar o perímetro de polígonos regulares e irregulares. • Determinar um valor aproximado de π. • Resolver problemas envolvendo perímetros de polígonos e do círculo.	• Propor a determinação experimental de um valor aproximado de π. • Usar situações experimentais para encontrar a fórmula do perímetro do círculo.
Áreas • Equivalência de figuras planas • Unidades de área • Área do triângulo e do círculo	• Compreender a noção de equivalência de figuras planas e distinguir figuras equivalentes de figuras congruentes. • Relacionar a fórmula da área do triângulo com a do rectângulo. • Calcular a área de figuras planas simples, decomponíveis em rectângulos e em triângulos ou por meio de estimativas. • Determinar valores aproximados da área de um círculo desenhado em papel quadriculado. • Resolver problemas que envolvam áreas do triângulo e do círculo, bem como a decomposição e composição de outras figuras planas.	• Usar a sobreposição, composição e decomposição de figuras. • Propor situações que evidenciem a distinção entre área e perímetro. Por exemplo, a separação e a reorganização das partes de uma figura que alterem o seu perímetro mas não a sua área (e reciprocamente). • Usar figuras e respectivo enquadramento em papel quadriculado. • Usar situações experimentais, para determinar a fórmula da área do círculo.

De acordo com os Princípios e Normas para Matemática Escolar (NCTM, 2007) " Os alunos deverão começar a desenvolver fórmulas para o perímetro e a área, nos primeiros anos de escolaridade. Nos anos seguintes, os alunos deverão formalizar essas técnicas, assim como desenvolver fórmulas para o volume e a área de superfícies de objetos, como prismas e cilindros." Os alunos têm dificuldades na compreensão dos conceitos de perímetro e de área (Kenney & Kouba, 1997; Lindquist & Kouba, 1989, citados em NCTM, 2007) apresentam dificuldades na sua diferenciação. Muitas vezes usam fórmulas, sem conseguir compreender como é que estas se relacionam com a grandeza a medir, ou com a unidade de medida que lhe está associada (NCTM, 2007).

As fórmulas para calcular áreas e perímetros surgem quando os alunos têm oportunidade de determinar, informalmente, áreas de figuras planas, recorrendo a materiais manipuláveis que, gradualmente, vão sendo formalizadas, dando origem às fórmulas das áreas dos quadrados, retângulos, triângulos... (Abrantes, Serrazina e Oliveira,1999).

2.5. Elementos da investigação sobre o ensino e aprendizagem de áreas e perímetros

É importante refletir sobre as preconceções das crianças relativamente aos conceitos de perímetro e área, bem como aos procedimentos espontâneos utilizados para os determinar. É de todo imprescindível que estes conceitos sejam claros, de modo a minimizar o célebre conflito entre perímetro e área, havendo uma tendência para uma distinção pouco facilitada, quer seja entre a sua definição e consequente aplicação prática, quer seja no que diz respeito às unidades utilizadas.

De acordo com P. Marchete et al. (2005), um dos objetivos fulcrais é criar atividades que permitam que os alunos tomem consciência da diferenciação destes dois conceitos, iniciando um processo que apenas aponte para aspetos qualitativos destas duas entidades matemáticas, relegando para segundo plano os aspetos quantitativos, isto é, mensuráveis e que implicam a introdução de artefactos que possibilitem essa concretização, por exemplo réguas. A introdução precoce dos instrumentos de medição retira a possibilidade do aluno tomar consciência das propriedades dos objetos por si só, independentemente de serem mensuráveis ou não, como o comprimento ou a quantidade de superfície, traduzindo-se numa metodologia que não deixa espaço para a espontaneidade, que requer o processo de tomada de consciência do conceito de perímetro e área.

Quando o aluno é convidado a diferenciar um objeto físico ou uma representação geométrica entre a sua grandeza ou em uma ou duas dimensões, surge o conflito entre o conceito de área e perímetro (Jaquet 2000, citado por P.Marchett, 2005). As crianças, inicialmente, tendem a identificar a maior forma com o mais largo e/ou mais alto (Montis et al.,2003, citado por P. Marchet, 2005). Mais tarde, para calcular área tendem a adicionar as medidas da largura e comprimento em vez de as multiplicar (Vergnaud, 1990, citado por P. Marchet, 2005). Compreende-se que a adição prossupõe um facto que dominam, isto é, adicionam duas medidas, cuja soma ainda é uma medida de comprimento. Agora, quando se multiplicam duas medidas, resultarão numa outra medição de um género completamente diferente (Jaquet 2000, citado por P.Marchett, 2005).

Para que os alunos possam apreender mais facilmente os conceitos de perímetro e área, há que relegar para segundo plano a mensurabilidade destes dois conceitos e, consequentemente, o uso de fórmulas para o seu cálculo, dando primazia à comparação de figuras, quer seja em termos perimétricos, quer seja ao nível da quantidade de superfície observável. Os alunos conseguem comparar o comprimento de duas linhas, bem como a quantidade de superfície de duas figuras, muitas vezes recorrendo ao método de sobreposição, muito antes da tomada de consciência do conceito de perímetro e de área. O facto de a escola iniciar o processo de aprendizagem, através da quantificação destes conceitos, por uma questão de tempo e até da disponibilidade de objetos que permitem medir, e, ainda, que se inicie através de processo de comparação, existe, sempre, a necessidade de o traduzir numericamente (Chamorro, 2001, citado por P.Marchett, 2005). Existe uma etapa que é desprezada e que, o facto de não ser explorada suficientemente, conduz ao conflito de área e perímetro. A comparação de figuras, atendendo unicamente à sua superfície e ao comprimento das linhas que as limitam, facilita a compreensão dos conceitos de área e de perímetro que, só numa fase posterior, aparece associada a uma medida de comprimento e a uma unidade que expressa uma quantidade de superfície (P. Marchett, 2005).

A medição, numa fase primária, surge como um obstáculo colocado ao aluno, um obstáculo desnecessário, que o impede de ter acesso ao real entendimento dos conceitos de grandeza de área e perímetro, acabando por se dispersar, havendo um foco maior na necessidade da compreensão das fórmulas e das unidades de medida que lhe estão associadas.

O ensino aprendizagem da área aponta fragilidades, de acordo com Lopes et al. (2008), na compreensão do conceito pelos alunos, para tal são apontadas questões de natureza didática, isto é, que se prendem com o tempo dedicado ao tema, com o ensino precoce do conceito, ou mesmo pelas deficiências das abordagens realizadas (Freuthental, 1983; Doudy & Perrin – Glorian,1989; Olmo, Moreno & Gil,1993; Abrantes, Serrazina & Oliveira 1999; Chamorro,2001; Owens & Outhered, 2006, citado por Lopes et al., 2008).

A incompreensão deste conceito prende-se muitas vezes com o conflito área / perímetro (Douady & Perrin-Glorian, 1989; Corberán, 1996; Jaquet, 2000; Chamorro, 2001, citado por Lopes et al., 2008). É frequente alunos do segundo ciclo determinarem a área de um retângulo através da soma das medidas dos seus lados ou calcularem o perímetro utilizando uma fórmula apropriada para o cálculo da área ou, ainda, a associação incorreta das unidades de medida a cada um dos conceitos (Kidman e Cooper, citado por Lopes et al., 2008). Também é frequente, o cálculo da área e do perímetro de uma figura e a atribuição do maior valor à área e do menor valor ao perímetro (Olmo, Moreno e Gil 1993, citado por Lopes et al., 1998).

Lopes et al.,1998 refere que, segundo, Freudenthal, 1983; Douady & Perrin-Glorian, 1989; Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; NCTM, 2000; Chamorro, 2001, as metodologias que vão ao encontro da desconstrução deste conflito são tarefas geradoras de conflito cognitivo, permitindo aos alunos a análise, a discussão e confrontação de resultados, para, assim, existir a destrinça efetiva destes dois conceitos. Implicitamente, o trabalho cooperativo conjuntamente com a escolha de tarefas com potencial e geradores de conflito cognitivo constituem o ponto de partida para a identificação das dificuldades dos alunos e simultaneamente da sua possível colmatação. Para que se dê início ao processo, a consciência da importância do trabalho colaborativo, como o meio propício às interações sociais, que impulsionam a aprendizagem entendida como um processo pessoal de construção de significados (Ponte et al., 1998) é de extrema importância e sustentado por vários investigadores (Slavin, 1995; Johnson, Johnson & Holubec, 1999, Cohen et al, 1999; Serrano, González-Herreiro & Martínez Herrero, 1997; Melero & Fernandez, 1995; Wiersema,2000; Davidson & Kroll, 1991, citado por Lopes et al., 1998). Estes contextos de aprendizagem permitem, aos alunos, expor as ideias aos seus pares, fazendo-o de modo mais proximal, quer a nível da formalidade, quer a nível de linguagem, gerando-se um nível de entendimento que permite expor ideias, confrontá-las, discuti-las, argumentá-las e criticá-las, propiciando-se desenvolvimento intelectual e, consequentemente, construção de conhecimento (Lopes, et al.,1998).

2.6. Materiais manipuláveis no ensino das áreas e perímetros – Geoplano

O Geoplano mais comum é feito com uma base de madeira, quadrada, onde se dispõem pregos, dispostos de forma a constituírem uma malha. Faz-se acompanhar de um conjunto e elásticos coloridos que desenham as figuras pretendidas e de papel ponteado, onde os alunos podem desenhar os trabalhos realizados. É um material manipulativo, apropriado para trabalhar diversos conceitos.

Ao ensino da geometria, estão associados materiais manipuláveis, onde os alunos podem experienciar e concretizar os diversos conceitos geométricos, para que numa fase posterior, possam tirar conclusões, no sentido de uma melhor compreensão dos conceitos. De acordo com o Programa do Ensino da Matemática (ME,2007) “O estudo da geometria deve ter como base tarefas que proporcionem oportunidades para observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e de operar com elas.” (p.36). Acrescentando, ainda, a importância do recurso a instrumentos de medida e desenho, bem como materiais manipuláveis. De entre os materiais manipuláveis selecionados é referenciado o geoplano. No decorrer das indicações metodológicas, são dadas indicações da pertinência deste tipo de materiais “Todos estes instrumentos e materiais são um apoio importante para a aprendizagem em Geometria, em particular na exploração, análise e resolução de problemas de natureza geométrica...”.

Segundo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), reconhecer que os objetos possuem atributos mensuráveis constitui o primeiro passo para o estudo da medida. À medida que os alunos, avançam na escola o conjunto dos atributos mensuráveis deverá ampliar-se, assim como o aprofundamento das relações entre os diversos atributos. De acordo com Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), existem diversas investigações que revelam que alguns alunos, já no 2º e 3ºciclos, não estão convictos da conservação do comprimento, da área..., e outros esquecem a unidade usada para os medir, o que leva à necessidade de um maior reforço das competências relacionadas com a medida. Ainda, segundo a mesma fonte, no que diz respeito ao conceito de perímetro e área, são mencionados os materiais manipuláveis, entre eles o geoplano, para os trabalhar, de modo a que os alunos possam realizar tarefas que envolvam decomposição de figuras e sucessivos rearranjos, relacionando estas duas grandezas.

O geoplano é um material manipulável, ao qual, vários documentos, acima citados, fazem referência, aquando da sugestão de materiais manipulativos, usados no ensino da geometria. Os conceitos de áreas e perímetros, que os alunos nem sempre distinguem facilmente, encontram no geoplano um excelente material para a sua introdução, ampliação e aprofundamento do seu conhecimento.

De acordo com Serrazina e Matos (1988):

> “Muitas vezes o perímetro e a área são introduzidos através de fórmulas. Mais tarde é pedido aos alunos que determinem o “comprimento à volta”, ou o “espaço ocupado”, e muitos não são capazes de reconhecer aquelas ideias (...) Os alunos devem passar por muitas experiências concretas construídas por eles próprios, até chegarem à compreensão da utilização das fórmulas.” (p.114)

A introdução de jogos educacionais nas escolas veio ajudar os professores no processo de motivação dos alunos e, simultaneamente, torná-los os principais agentes na construção do seu conhecimento. O jogo do geoplano insere-se num conjunto que visa proporcionar, aos alunos, maior interação e integração, estimulando a compreensão de certos conceitos, mais fácil e rapidamente concretizáveis nesta ferramenta. De acordo com Moraes et al. (2008), o jogo do geoplano enriquece a formação geral do aluno, auxiliando-o a ampliar a sua linguagem a adquirir estratégias de resolução de problemas e de planeamento de ações, a desenvolver a sua capacidade de realizar estimativa e cálculos mentais, a iniciar-se nos métodos de investigação científica, a estimular a sua concentração, raciocínio, perseverança e criatividade, a promover a troca de ideias através de trabalhos de grupo, a estimular a compreensão de regras, perceção espacial, discriminação visual e fixação de conceitos. Este jogo foi introduzido pelo matemático Italiano Caleb Gattegno em 1961, como sendo um material manipulativo confinado à construção de conceitos de geometria plana, bem como o ensino de frações..., As atividades trabalhadas podem proporcionar, segundo Moraes et al. (2008) o trabalho com a lateralidade, a identificação e reprodução de figuras geométricas, a identificação e diferenciação de unidades de medida, a compreensão das ideias de semelhança e congruência, a identificação e comparação de propriedades de figuras, a produção de figuras semelhantes a outras dadas, a medição e comparação de áreas e perímetros para a compreensão das diferenças entre tais conceitos, o trabalho como uma forma para o cálculo da área de um polígono e o desenvolvimento do conceito de ângulo, entre outros.

Segundo Leivas (2012) a palavra *geoplano* vem do inglês “geoboards” ou do francês “geoplans” onde “geo” vem de geometria e plano, tábua ou tabuleiro ou superfície plana dando origem à palavra. Existem diversos tipos de geoplano. De acordo com Serrazina e Matos (1988), chama-se “geoplano 3x3” àquele onde a malha é quadrada e tem três pregos de cada lado (9 pregos no total) (ver fig. 1); do mesmo modo “geoplano de 5x5” tem uma malha quadrada de cinco pregos em cada lado; o “geoplano de 10x10” possui uma malha quadrada de dez pregos de lado; O “geoplano isométrico” ou triangular tem uma malha de pregos hexagonal, (ver fig.2); Os “geoplanos circulares”, que podem ser de dois tipos, constituídos por vinte e quatro pregos igualmente espaçados dispostos sobre uma circunferência (ver fig.3) e outro que além dos pregos do geoplano anterior possui, ainda, doze pregos dispostos sobre uma outra circunferência concêntrica com a anterior com metade do raio (ver fig.4).

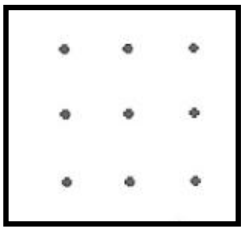


Figura 1 - "Geoplano 5 x 5"

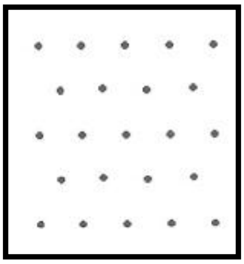


Figura 2 - "Geoplano Isoperimétrico"

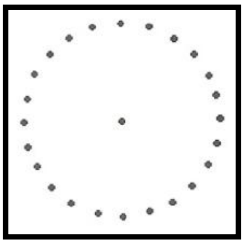


Figura 3 - "Geoplano Circular"

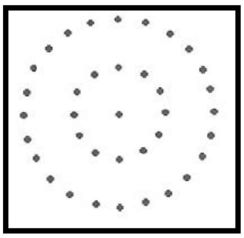


Figura 4 - "Geoplano Circular"

O modelo do geoplano, simulado no computador, tem como características tornar o geoplano mais flexível e rápido e, consequentemente, mais variado e diria até mais criativo, aumentando o potencial do geoplano enquanto objeto físico. Papert et al. (1980), usou o termo de *"objeto-de-pensar-com",* referindo-se a objetos que usados facilitam a construção de muitos conceitos matemáticos, sendo o geoplano um objeto que permite uma variedade de situações que procuram desenvolver uma linguagem propícia ao cálculo de áreas e perímetros, podemos também identificá-lo como um "*objeto-de-pensar-com".* No computador, o seu potencial é aumentado, tendo em conta a variedade aliada à velocidade de processamento de informação, no caso do geoplano, fundamental, no que diz respeito à descoberta, mas essencialmente, à exercitação e prática de determinados conteúdos. Não é de todo aceitável que o geoplano computacional substitua o geoplano, enquanto objeto físico, onde são explorados outro tipo de exercícios que requerem uma experimentação concreta e permitem, mais tarde, um nível de abstração maior, exigido quando se trabalha com o geoplano computacional. O computador pode, no entanto, enriquecer as possibilidades de atividades oferecidas pelo geoplano. Considero, assim, que o geoplano computacional pode ser associado, tal como o geoplano, enquanto objeto físico, à expressão "*objeto-de-pensar-com",* quando explorado corretamente, bem como orientado pelo professor, que deve minimizar, em ambos, as intervenções, remetendo-se ao papel de um mero orientador das descobertas dos alunos.

A utilização das tecnologias é, hoje, uma constante no nosso dia-a-dia, a que as crianças têm acesso, cada vez mais precocemente, e para a qual têm revelado grande aptidão e rapidez de aprendizagem, estando, assim, familiarizadas e predispostas à sua utilização, nos mais diversos contextos. No contexto de ensino aprendizagem, as novas tecnologias, quando são alvo de uma utilização adequada e se rentabiliza todo o seu potencial, tornam-se uma mais-valia, na aprendizagem e/ou sistematização dos mais diversos conteúdos na área da Matemática. No que diz respeito à geometria, as tecnologias, nomeadamente jogos computacionais, criam contextos dinâmicos e possibilitadores de um maior número de experiências que permitem generalizações e sistematizações dos diversos conceitos. Segundo Breda et al. (2011), ao trabalhar com programas de geometria dinâmica, a aprendizagem dos alunos é auxiliada pela resposta que a tecnologia pode dar. Podendo explorar-se relações, formular e testar conjeturas. O trabalho desenvolvido com o geoplano computacional vem enriquecer a exploração do geoplano enquanto material manipulável, não o substituindo, de modo algum, mas permitindo um alargar de experiências. Os alunos podem construir, no geoplano, um número de figuras geométricas que, posteriormente, poderão num programa de computador, com maior rapidez, obter um número mais elevado de figuras, num espaço de tempo menor, permitindo-lhes generalizar o objeto de estudo, a uma série de outras situações análogas. Digamos que o geoplano computacional surge no prolongamento da utilização do geoplano material, conduzindo o aluno a outro tipo de experiências, que têm por base o trabalho desenvolvido no material manipulável.

Capítulo 3

Metodologia

O objetivo do estudo realizado consiste em analisar as tarefas empreendidas pelos alunos, no geoplano material e no geoplano computacional, de modo a poder compreender todo o processo inerente ao cumprimento das tarefas, permitindo-me concluir quais as potencialidades e limitações da sua utilização, bem como as estratégias usadas e as dificuldades com que se deparam os alunos, aquando da resolução das mesmas. Assim, para concretizar este propósito, pretendo dar resposta às seguintes questões de estudo: (i) Que potencialidades e limites evidencia o geoplano na resolução de tarefas, envolvendo os conceitos de perímetro e de área de figuras planas? (ii) Que estratégias e dificuldades os alunos apresentam para a resolução de tarefas, com o geoplano, envolvendo as noções de perímetro e área de figuras planas? Neste capítulo, irei apresentar a metodologia adotada que norteou a realização desta investigação. Numa primeira fase, serão descritas, bem como justificadas, as opções metodológicas gerais do estudo, seguindo-se os instrumentos adotados na recolha de dados e os procedimentos usados na sua análise.

3.1. Opções metodológicas gerais

Este estudo é de natureza qualitativa, inserindo-se no paradigma interpretativo recorrendo a uma metodologia de estudo de caso. Segundo Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa caracteriza um grupo de estratégias que têm em comum características específicas. Os dados recolhidos pelo investigador são de natureza qualitativa, isto é, são pormenorizados, descrevem pessoas, locais, diálogos e são sujeitos a um complexo tratamento estatístico. As questões que norteiam a investigação têm por objetivo averiguar todos os factos, em toda a sua complexidade, vivenciados em contexto natural. É dada primazia à compreensão dos comportamentos, sob a ótica do investigador. Os autores supracitados referem, ainda, características essenciais de uma investigação qualitativa, tais como a atribuição da fonte direta de recolha de dados ao ambiente natural, assumindo o investigador o principal instrumento de recolha de dados; a forte componente descritiva; o foco no processo em detrimento dos resultados; a análise de dados realizada segundo uma natureza indutiva, bem como a importância fundamental atribuída ao significado, neste tipo de metodologia.

Esta investigação é caracterizada, na sua essência, pelas características acima, referenciadas, e, por isso, próprias de um paradigma interpretativo. Pretendo, com este estudo, encontrar respostas para as questões enunciadas e abordar hipóteses que, eventualmente, se possam converter em novas questões para futuras investigações.

Como já foi descrito, esta investigação é norteada pela intuição e o estudo das perceções pessoais, de modo descritivo; os dados são recolhidos no ambiente natural, assumindo-se o investigador, como a principal fonte na recolha de dados. Assim, é notório que a análise de dados realizada está sujeita à interpretação do investigador, aquando da sua apreciação, sendo da sua inteira responsabilidade. Este estudo orientado segundo os princípios enunciados, assume uma natureza interpretativa, em que o foco aponta para a importância atribuída aos significados, à luz do olhar do investigador (Erikson, 1986)

Esta investigação, de natureza empírica, integrará um estudo de caso, que se baseia, fortemente, em trabalho de campo ou em análise documental. Estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando todo o partido possível de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações, documentos e artefactos (Yin, 1984).

3.2. Participantes

O estudo envolveu os alunos de uma turma de quinto ano de escolaridade, dos quais foi selecionado um aluno caso – a Maria - sobre o qual incidiu esta investigação. Embora tivesse conhecimento de todos os elementos do grupo turma, havendo um bom ambiente de trabalho com cada um deles, a seleção da aluna que iria ser alvo de estudo, recaiu sobre a Maria. A aluna destacava-se dos demais, pelo facto de ter uma postura em sala de aula, reveladora de uma maturidade pouco habitual para alunos da sua idade, mostrando-se interessada e empenhada na resolução das tarefas propostas. Além disso a Maria apresentava facilidade de expressão oral, aquando da explicitação das respostas pedidas e um bom desempenho na disciplina de Matemática. Foi uma aluna que revelou potencial, quer no que se refere à predisposição para a realização das tarefas propostas, quer para melhor esclarecer os procedimentos de resolução usados, no que diz respeito às dificuldades sentidas e às estratégias usadas.

A opção deste nível de ensino prende-se com o facto dos conceitos de perímetro e área serem trabalhados pela primeira vez no segundo ciclo, no quinto ano de escolaridade, havendo maior interesse, por parte do investigador, na observação da exploração do geoplano, na sua abordagem.

Acresce, ainda, o facto do investigador lecionar a disciplina de Matemática nas turmas de quinto ano de escolaridade, permitindo-me motivar os alunos, tendo por base um conhecimento fundamentado dos mesmos, quer a nível cognitivo, quer a nível comportamental / emocional, bem como gerir os recursos materiais e humanos, usando o próprio horário letivo, como ponto de partida, o que facilitou a gestão do tempo e a concordância dos fatores acima descritos. Na recolha de dados, nomeadamente, na observação de aulas e na áudio gravação das mesmas, enquanto docente, houve a preocupação de promover um distanciamento e imparcialidade nas observações realizadas, permitindo – me, simultaneamente, um maior envolvimento nas tarefas propostas e uma análise mais rica, tendo em conta factos observados no decorrer da aula.

De acordo com Tuckman (2000), a inclusão dos alunos no estudo obedece a princípios éticos, que foram respeitados na realização desta investigação tais como o direito ao anonimato e o direito à privacidade. Todos os alunos participantes deste estudo foram identificados por nomes fictícios.

Solicitei autorização ao Exmo. Sr. Presidente da Comissão Administrativa Provisória, do Agrupamento de Escolas onde decorreu a investigação, para a realização da investigação (ver anexo I) que me foi concedida. Posteriormente foi pedida autorização aos encarregados de educação dos alunos participantes no presente estudo (ver anexo II). Todos os intervenientes no processo se mostraram, desde logo, colaborantes, acedendo com agrado e de forma prestativa à participação na investigação.

3.3. Instrumentos e procedimentos de recolha de dados

No que concerne à recolha de dados, foi realizada de modo a consultar várias fontes de informação, para que os dados recolhidos sejam o mais fidedignos possível e se complementem na sua diversidade. As questões de estudo nortearam a recolha e análise dos dados caracterizados por uma descrição detalhada e fundamentada.

Esta investigação, de natureza empírica, integra um estudo de caso, que se baseia fortemente em trabalho de campo e em análise documental. Estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando todo o partido possível de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações, documentos e artefactos (Yin, 1984), características dos estudos que seguem um paradigma interpretativo.

Os alunos começam por ter um primeiro contacto de carácter exploratório, quer com o geoplano, enquanto material manipulável, quer com o geoplano computacional. Nesta primeira abordagem, tiveram oportunidade de explorar, de forma livre, o geoplano e, posteriormente, segundo indicações da professora, de modo a que a variável - conhecimento do funcionamento do jogo em causa (enquanto material manipulável e na versão computacional) - não fosse um fator limitativo para a realização das tarefas.

Foi realizado um pré - teste, para que as tarefas pensadas pudessem sofrer algum tipo de reajuste, no sentido de aperfeiçoar os enunciados, tornando-os suficientemente claros para os alunos. Nesta primeira fase foram selecionados alunos de outras turmas de quinto ano de escolaridade, tendo em conta as avaliações na disciplina de Matemática, de modo a formar um grupo heterogéneo, que conferisse fiabilidade ao estudo. O grupo foi constituído por quatro alunos: duas raparigas e dois rapazes. Dois alunos tinham um aproveitamento mediano, correspondente ao nível três e os outros dois, aproveitamento Bom, correspondente ao nível quatro. Assim, e após a análise dos dados recolhidos, procederam-se a pequenas alterações de modo a tornar as questões mais explícitas, bem como facilitar a recolha de dados, introduzindo alguns elementos que tornam os registos dos alunos mais facilmente associados às questões em causa, tendo o cuidado de não os condicionar.

Posto isto, foram propostas, em aula, tarefas de caráter exploratório, a desenvolver no geoplano. O processo de resolução destas tarefas foi vídeo gravado e registado, pelos alunos, em papel, para posterior análise, no caso do geoplano material e além dos registos escritos, foram também gravadas as imagens, no que diz respeito ao geoplano computacional.

Relativamente aos instrumentos de recolha de dados, foram utilizados os seguintes: observação de aulas, com registo de notas de campo, vídeo gravação da realização das tarefas, produções dos alunos na realização das tarefas, análise documental e entrevistas tipo clínicas.

3.3.1. Observação de aulas

O investigador, num primeiro momento, através da observação de aulas, tem acesso à informação disponibilizada no momento, percecionada e condicionada pelos seus sentidos. Há que realizar um trabalho prévio que possa orientar a observação a realizar, permitindo ao investigador / observador uma maior focalização no objeto em estudo. Nesta investigação, o observador é participante e professor de Matemática da turma de quinto ano de escolaridade, onde foi selecionado o estudo de caso. Os blocos de aulas, onde foram aplicadas as tarefas construídas para dar resposta ao objeto do estudo, foram alvo de uma observação direcionada. O investigador, enquanto observador, teve a preocupação de direcionar o seu foco de atenção para o modo como os alunos reagiam às tarefas propostas e ao contacto com o geoplano e consequentemente as reações provocadas por esta interação, bem como o tipo de relações estabelecidas entre eles. A minha presença não foi um fator desestabilizador, uma vez que era professora de turma. No entanto, o uso de material audiovisual foi, nos primeiros momentos de observação das várias aulas, destacado por alguns alunos, que no decorrer da aula desprezaram a sua presença. Ainda, assim, e uma vez que tinha cumulativamente o papel de professora da turma em questão e o papel de investigadora, tornou mais difícil o cumprimento desta função, uma vez que a gestão dos dois papéis teve que ser feita de forma a não descurar nenhum dos dois e simultaneamente tirar o maior partido da situação. O equilíbrio entre os dois foi fundamental para uma boa condução e observação do desenrolar da atividade. Durante os momentos de observação foram retiradas notas de campo diversas, que obedeciam a uma ordem temporal, tentando registar os elementos mais significativos, sobre o os aspetos triviais do desenrolar da mesma, sem ignorar os dados principais, por se destacarem dentro da normalidade ou por fugirem ao funcionamento normal das atividades letivas e serem, simultaneamente, reveladores de potenciais dados fundamentais para o estudo em causa. As observações eram pessoais, tentando que fossem, simultaneamente, imparciais e o mais fidedignas possível. Simultaneamente foram também registadas informações relativas às estratégias desenvolvidas pelos alunos, bem como as dificuldades sentidas na resolução das tarefas.

A observação não obteve quaisquer grelhas estruturadas ou outro tipo de estruturação, apenas um guião com tópicos que tinham como intuito nortear o investigador nas suas observações e facilitar, posteriormente, a análise das mesmas, deixando sempre em aberto, espaço para a recolha de outras informações relevantes, que pudessem não estar contempladas nos tópicos do guião (ver anexo IV).

3.3.2. Produções dos alunos na realização das tarefas

As produções dos alunos resultantes da realização da ficha de trabalho 1 (geoplano material) e da realização da ficha de trabalho 2 (geoplano computacional) foram alvo de uma análise detalhada, de modo a que fossem recolhidas o maior e mais completo número de informações, contribuindo assim para um entendimento mais aprofundada de como é que a utilização do geoplano contribui para o desenvolvimento da compreensão das noções de perímetro e área. As fichas de trabalho contemplam dois momentos: um primeiro momento, em que os alunos são confrontados com um conjunto de tarefas direcionadas para a exploração do geoplano material e, um segundo momento, em que um novo conjunto de tarefas é direcionado para a exploração do geoplano computacional. A compilação das tarefas que compõem as duas fichas de trabalho surgiu após uma pesquisa em manuais da disciplina de Matemática de quinto e sexto ano de escolaridade (Monteiro, Pinto, & Ribeiro, Kit de Materiais, 2010; Monteiro, Pinto, & Ribeiro, mp.5 matemática para pensar, 2010; Monteiro & Pereira, 2005; Santos & Almeida, 2010), atividades do livro "O Geoplano na Sala de aula" Matos e Serrazina (1996), tarefas propostas na tese de mestrado de Lavrador (2002), bem como em sites sobre a exploração do geoplano, disponíveis na Internet (Utah State university, 2012; Nunes, V., 2012). As tarefas sofreram alterações ao nível da linguagem utilizada e na seleção das imagens, atendendo à faixa etária dos destinatários e à importância de uma boa compreensão dos enunciados, na resolução das tarefas.

A primeira ficha de trabalho (ver anexo V) contempla, essencialmente, as noções de área e de perímetro, apelando à sua quantificação em figuras geométricas dadas e à construção de polígonos, obedecendo a valores de área e perímetro pré definidos (tarefas 1, 2, e 3) e atendendo a características geométricas enunciadas (tarefa 4)

A segunda ficha de trabalho (ver anexo VI) tem como foco principal a noção de área, apesar da noção de perímetro estar presente nas duas primeiras questões. Numa primeira fase, as tarefas propostas têm como objetivo proporcionar o contacto com o geoplano computacional, levando os alunos a construírem figuras geométricas que obedecem a características definidas de perímetro e área e, simultaneamente, à sua quantificação (tarefas 1e 2). Posteriormente, os alunos são confrontados com um desafio que os convida a descobrir a fórmula de cálculo da área do triângulo, partindo de uma figura dada, onde são dadas pistas que os devem conduzir no processo de descoberta (tarefas 3 e 4). As tarefas seguintes prendem-se com a aplicação do conhecimento do modo que lhes permite calcular a área de um triângulo, tendo o geoplano como material que poderá auxiliar este percurso (tarefas 5 e

6). Para finalizar, são propostas tarefas que levam os alunos a calcular a área de composições geométricas, compostas por vários polígonos e onde se pretende que os alunos possam desenvolver estratégias que os conduzam ao cálculo da área das referidas figuras (tarefa 7).

Há a preocupação da contextualização das tarefas da primeira ficha de trabalho, sobressaindo um elo de ligação na forma da continuação de uma pequena história, na segunda ficha de trabalho. Este aspeto teve, sobretudo, a preocupação de motivar os alunos e enquadrar as tarefas em situações próximas da sua realidade.

No que diz respeito à sequência, o grau de dificuldade das tarefas vai sendo gradual, registando-se um salto cognitivo da primeira para a segunda ficha de trabalho. A primeira exploração é feita no geoplano material e a segunda é realizada no geoplano computacional.

Após um estudo piloto, em que um grupo de quatro alunos realizou as tarefas a aplicar e foi sujeito a entrevistas, procedi à análise das mesmas. No que se refere ao aperfeiçoamento, foi detetada uma pequena incorreção na tarefa dois da ficha de trabalho I e na tarefa três da ficha de trabalho II. Foram, ainda, melhorados os enunciados da tarefa três da ficha de trabalho I e o enunciado da tarefa três da ficha de trabalho II. Suprimiram-se duas tarefas da ficha de trabalho II, por tornarem a atividade demasiado longa e abordarem conceitos já referidos noutras questões. Também a folha de papel ponteado sofreu alterações, criando um espaço para os alunos identificarem a questão a que se referia o polígono construído. Esta primeira abordagem permitiu-me, por um lado, a restruturação das fichas de trabalho, melhorando-as enquanto instrumento de recolha de dados. Por outro lado, um conhecimento mais detalhado do modo como os alunos resolveram as várias tarefas, evidenciando estratégias e dificuldades, o que me levou a refletir sobre o fio condutor que nortearia o meu trabalho numa fase posterior, alertando-me sobre possíveis questões que deveriam ser ponderadas, de modo a contribuírem para o enriquecimento do estudo.

3.3.3. A entrevista

De acordo com Bogdan e Biklen, (1994):

> Este tipo de entrevista é designada por "não-estruturada" (Maccoby e Maccoby, 1954) ou "aberta" (Jahoda, Deutsch e Cook, 1951), "não-directiva" (Meltzer e Petras, 1970) ou, ainda, entrevista "de estrutura flexível" (Whyte, 1979, p.17)

Com este tipo de instrumento de recolha de dados, o objetivo do investigador é compreender detalhadamente como é que os entrevistados estruturaram o seu pensamento, através da descrição, na primeira pessoa, das várias situações que envolvem a realização das tarefas propostas.

Foi alvo de entrevista, do tipo clínica, o estudo de caso, selecionado previamente, uma vez que é ele o cerne do estudo desta experiência de ensino. Esta aluna foi sujeita a várias questões, elaboradas, para que o investigador pudesse ter acesso à forma como a aluna estruturou o seu pensamento na realização das diversas tarefas. Houve necessidade, em algumas questões, de pedir à aluna que voltasse a resolvê-las, de modo a que a explicação pudesse ser pormenorizada e complementada pelo manuseamento do geoplano, quer computacional, quer enquanto objeto físico. As primeiras entrevistas aconteceram em finais de fevereiro, aquando da realização de uma experiência piloto, que me permitiram refletir sobre a condução das entrevistas a realizar. O grupo de quatro alunos selecionados, após ter realizado as tarefas, foi entrevistado, a um nível mais relacionado com a estrutura das fichas de trabalho apresentadas e a compreensão das questões realizadas. Contudo, foram também recolhidas informações relacionadas com estratégias e dificuldades sentidas pelos alunos, quase sempre acompanhadas da repetição da resolução da questão no geoplano. Esta primeira abordagem deu conta de algumas das possíveis estratégias usadas pelos alunos no geoplano, para o cálculo de perímetros e áreas, bem como dificuldades experienciadas, que me permitiram refletir e nortear o meu estudo.

Posteriormente, as entrevistas aconteceram em dois momentos distintos. A primeira atividade decorreu entre cinco e oito de março. As entrevistas aconteceram entre catorze e dezasseis de março, em que foi entrevistada a aluna, selecionada para o estudo de caso. A segunda atividade decorreu entre oito e onze de abril. As entrevistas foram feitas entre dezassete e vinte de abril, com incidências no estudo de caso.

Numa primeira fase, as entrevistas foram realizadas no “Laboratório de Matemática”. Os alunos tinham à sua disposição a ficha de trabalho já realizada em sala de aula, um geoplano, elásticos e uma folha de papel ponteado em branco. Os alunos sabiam que estavam a ser áudio-gravados. O facto de ser eu, a professora da disciplina de Matemática, a fazer a entrevista e do espaço ser muito familiar, quebrou qualquer tipo de constrangimento que pudesse ocorrer. Nalgumas situações senti necessidade de questionar a resolução, pedindo-lhes que me explicassem como é que resolveram determinada tarefa. Noutros casos, foram os próprios que manifestaram essa necessidade. Numa segunda fase, as entrevistas foram realizadas na sala de TIC (Tecnologias de Computação e Informação). Os alunos tinham acesso às pastas gravadas no computador, aquando da realização da ficha, ao programa do geoplano computacional, bem como aos registos escritos produzidos na ficha de trabalho. O espaço era familiar e não houve constrangimentos durante a entrevista. O objetivo foi compreender detalhadamente e recolher informações o mais completas possíveis. As entrevistas foram áudio-gravadas e transcritas integralmente. A duração das entrevistas foi variável, uma vez que a sua condução não foi estruturada, tendo sido feito um guião orientador dos possíveis temas a abordar (ver anexo VII). O ponto de partida foram as respostas dadas pelos alunos, com o objetivo de recolher o maior número de informações possíveis, sobre: potencialidades do geoplano na resolução de tarefas, envolvendo os conceitos de perímetro e de área de figuras planas e estratégias e dificuldades na resolução de tarefas, com o geoplano, envolvendo as noções de perímetro e área de figuras planas.

3.3.4. Análise documental

Para a recolha de dados que permitiram caracterizar as turmas envolvidas e a escola, onde foi realizada a presente investigação, foram analisados documentos oficiais. Os documentos analisados foram produzidos, independentemente da existência desta investigação, sem ter em conta os seus propósitos. No entanto, contêm informações relevantes para o estudo em questão, pondo à disposição do investigador, elementos caracterizadores do meio envolvente e dos participantes que integram o estudo. Assim, para a caracterização dos participantes, foi analisado o inquérito, da responsabilidade do agrupamento, caracterizadores das turmas (idade, agregado familiar, percurso escolar, condições socioeconómicas, acesso a novas tecnologias, hábitos de estudo, rotinas diárias), bem como: relatos do diretor de turma, referentes às modalidades de apoio de que os alunos usufruem, as avaliações cognitivas, nas diferentes disciplinas e outras informações consideradas relevantes no percurso escolar do aluno. Foram, também, consultados os planos educativo e curricular de escola, para caracterização do estabelecimento de ensino, onde foi realizada a investigação, de modo a conseguir-se um conhecimento mais aprofundado da filosofia e da conceção educativa subjacentes ao Plano Educativo de Agrupamento e a influência na integração e consequente motivação dos alunos, para as suas aprendizagens.

Além dos referidos, foram, ainda, pedidos, junto das respetivas diretoras de turma dados considerados relevantes para a investigação em causa.

3.4. A análise de dados

As principais questões do estudo são o fio condutor da análise de conteúdo que caracteriza, na sua essência, a análise de dados, tendo por objetivo primeiro, a identificação de aspetos relevantes, no que concerne a cada uma das questões, de modo a que possam ser organizados em categorias, como refere Bogdan e Biklen (1994).

Tendo em conta a natureza da investigação, bem como os seus propósitos, a análise realizada tem por objetivo a associação de significados aos dados recolhidos, especialmente nas interações verbais resultantes das entrevistas realizadas e da análise dos trabalhos escritos aquando das tarefas propostas. Foram também alvo de especial atenção as aulas vídeo gravadas, bem como o registo de observação de aulas, que em muito contribuíram para a significação dos dados recolhidos.

A análise de dados aconteceu paralelamente à recolha dos mesmos, tendo início após os primeiros momentos de trabalho de campo, para que pudesse dar sentido ao trabalho e, simultaneamente, orientar a seleção e reformulação dos instrumentos de recolha de dados.

No que diz respeito às aulas observadas, os registos realizados tiveram por base as informações recolhidas aquando da observação. Os registos nortearam-se pelos seguintes itens: estrutura da aula e inter-relações pessoais, o papel do aluno e da professora. Esta análise contribuiu para a compreensão das interações da turma em contexto de sala de aula.

Relativamente às entrevistas, todas foram sujeitas a transcrição, sendo a sua análise realizada segundo as questões de estudo, atendendo às seguintes categorias: estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas; dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de tarefas. Após a definição das categorias mencionadas, surgiram subcategorias inerentes à análise de dados realizada.

O presente estudo pretende compreender como é que a utilização do geoplano contribui para o desenvolvimento da compreensão das noções de perímetro e área de figuras planas. Assim, para concretizar este propósito pretende-se dar resposta às seguintes questões de estudo:

(i) Que potencialidades e limites evidencia o geoplano na resolução de tarefas, envolvendo os conceitos de perímetro e área de figuras planas?

(ii) Que estratégias e dificuldades os alunos manifestam na resolução de tarefas com o geoplano envolvendo as noções de perímetro e área de figuras plana?

No que se refere às potencialidades evidenciadas pelo geoplano na resolução de tarefas, as dimensões de análise emergiram da análise das entrevistas realizadas aos alunos, que na primeira pessoa emitiram o seu parecer, genuíno, relativamente ao trabalho realizado no geoplano, bem como da observação realizada aquando da realização das tarefas, pelos alunos, em sala de aula. Assim, e tendo por base as questões do estudo, foram consideradas duas dimensões para analisar os dados recolhidos, no que diz respeito às estratégias e dificuldades evidenciadas pelos alunos aquando da resolução das tarefas propostas. As duas dimensões consideradas foram: dificuldade dos alunos na resolução das tarefas e estratégias dos alunos para a resolução das tarefas. Deste modo, irão ser analisados os dados recolhidos, tendo em conta as duas dimensões pré estabelecidas, subdivididas em categorias que surgiram aquando da análise realizada

3.4.1. Dificuldades dos alunos na resolução de tarefas

Neste ponto, serão analisadas as dificuldades da aluna caso – Maria, aquando da resolução das tarefas propostas na ficha de trabalho 1, onde se apela ao trabalho com o geoplano material e das tarefas propostas na ficha de trabalho 2, tendo por base o trabalho no geoplano computacional. Pontualmente, sempre que se julgue pertinente, serão analisadas dificuldades evidenciadas por outros alunos da turma.

No que concerne a esta dimensão – dificuldade dos alunos na resolução de tarefas, foi dividida em cinco categorias: dificuldades de interpretação; dificuldades concetuais e dificuldades argumentativas.

Relativamente às dificuldades de interpretação, são tidas em conta as dificuldades de perceção, quer em relação à linguagem natural, quer em relação à linguagem matemática. Este tipo de dificuldades cria uma barreira, quer na compreensão do que é pedido, do vocabulário específico e, consequentemente, da terminologia usada, ainda que o investigador, durante o processo de construção das tarefas, tenha tido em conta todos estes aspetos, no sentido de minimizar tudo o que fosse impeditivo de uma boa compreensão matemática da tarefa proposta. Outra das dificuldades detetadas, não menos importante, para a compreensão do que era pedido ao aluno, é a interpretação de figuras (geométricas, tabelas e esquemas), presentes na grande maioria das tarefas. Estas dificuldades aparecem, muitas vezes, associadas às dificuldades de visualização / identificação de elementos geométricos que constituem as figuras, bem como dificuldades de construção e reconstrução de figuras, obedecendo a determinados critérios.

No que concerne às dificuldades concetuais, refiro-me ao conceito de comprimento, ao célebre conflito área / perímetro e, consequentemente, às propriedades de cada um.

As dificuldades argumentativas incidem na comunicação matemática, utilizada para a justificação e explicação das estratégias usadas, oralmente e por escrito, na resolução das diferentes tarefas propostas, com o objetivo de clarificar procedimentos e resultados

3.4.2. Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas

No que diz respeito aos dados recolhidos, relativos às estratégias que os alunos aplicaram na resolução das várias tarefas, foram agrupados nas seguintes categorias: contagem; tentativa e erro; utilização de fórmulas e decomposição de figuras.

i) Contagem

Estratégia utilizada pelos alunos na resolução de tarefas que envolvem a determinação de áreas e perímetros e, consequente, construção de figuras no geoplano.

No cálculo do perímetro – contagem dos pins, o que nem sempre é realizado de forma correta, havendo um erro muito frequente que inviabiliza a contagem correta dos pins, a acrescentar, ainda, dificuldades de interpretação de figuras / concetual. No cálculo da área – contagem dos quadrados unitários que compõem a figura.

ii) Tentativa e erro

É uma estratégia utilizada frequentemente na construção e reconstrução de figuras geométricas pedidas, segundo determinados critérios, que envolvem os conceitos de área e perímetro. O aluno constrói a figura e, posteriormente, verifica se esta se enquadra nos parâmetros pedidos, na questão. Este processo conduz inúmeras vezes à reconstrução sucessiva das figuras, até obter o pretendido.

Também é uma estratégia a que os alunos recorrem para descobrir valores necessários para calcular áreas e perímetros de determinadas figuras dadas ou valores que lhe permitam construir figuras pedidas.

iii) Utilização de fórmulas

A utilização de fórmulas é uma estratégia recorrente para o cálculo de áreas de figuras conhecidas (quadrado e o retângulo), bem como para aplicação de fórmulas descobertas pelos alunos (cálculo de área do triângulo), durante a realização das tarefas propostas. Os alunos podem generalizar e olhar para a fórmula como uma tábua de salvamento, aplicando-a a figuras que não têm características dos polígonos, cujo cálculo de área é possível e do conhecimento dos alunos, através de uma fórmula (quadrado, retângulo, triângulo).

Noutras situações, os alunos deparam-se com alguns constrangimentos, pelo fato de se terem apropriado das fórmulas e não conseguirem utilizá-las, porque não conseguem encontrar valores, que lhe permitam aplicá-las.

iv) Decomposição de figuras

Estratégias utilizadas pelos alunos no cálculo de áreas, muitas vezes associadas ao processo de contagem e à utilização de fórmulas. A decomposição de figuras é feita, muitas vezes, pela decomposição da figura em outras estandardizadas que permitem a aplicação de fórmulas para o cálculo da área.

No capítulo seguinte irei caracterizar as aulas, com o geoplano, em toda a sua envolvência: a escola, a turma, os alunos envolvidos e o funcionamento das aulas, através dos dados recolhidos. Os dados foram sistematizados, tendo em conta as diversas fontes de informação.

Capítulo 4

As aulas com o geoplano

Este capítulo está subdividido em quatro partes distintas. Inicialmente, numa primeira parte é feita uma breve caracterização do meio, em que está inserida a escola onde decorre este estudo. Posto isto, a segunda parte é dedicada à caracterização da turma, tendo em conta aspetos como a faixa etária, o agregado familiar, o percurso escolar, as condições socioeconómicas, o acesso a novas tecnologias, os hábitos de estudo, bem como a ocupação dos tempos livres, de forma generalizada. Mais seletivamente serão especificados os critérios de seleção, bem como a caracterização do aluno caso. Para finalizar, todos os aspetos referidos serão contextualizados e enquadrados no modo como decorreram as aulas, desde a sua conceção à sua concretização, havendo a preocupação de evidenciar todos os aspetos relevantes que contribuíram para a recolha de dados, desde o planeamento das tarefas, à sua aplicação.

4.1. A escola

"A autonomia da escola concretiza-se na elaboração de um projeto educativo próprio, constituído e executado de forma participada, dentro de princípios de responsabilização dos vários intervenientes na vida escolar e de adequação a características e recursos da comunidade em que se insere."

Decreto-Lei nº 43/89

À escola atual exige-se que desempenhe papéis que exceda largamente a mera transmissão e aquisição de conhecimentos. A escola transformou-se numa instituição cujo papel não se esgota na instrução, mas tem que ampliar o seu papel e veicular uma conceção do currículo que abrange, para além da dimensão do saber, as dimensões "do ser, do formar-se, do transformar-se, do decidir, do intervir e do viver e conviver com os outros" (Leite, C., 2001)

Da educação escolar não se espera que apenas veicule uma cultura-padrão feita de valores universais e saberes definidos de forma homogénea, para todo o país. Espera-se que mobilize e incorpore saberes e recursos do seu contexto, que façam dela uma instituição de vivência e de aprendizagem das culturas e da democracia e a tornem um espaço favorecedor do sucesso para todos.

É consensual a ideia de que importa valorizar a singularidade e a cultura de cada escola e reforçar a sua identidade própria, porque esta está ligada aos contextos sociais, culturais e económicos em que se insere e às pessoas que a integram. A Escola passou a ser considerada como uma unidade dotada de uma identidade própria e de uma multidimensionalidade única, que se diferencia das outras em função dos seus atores, das suas histórias de vida, dos seus valores e da sua cultura.

A escola onde se desenvolveu esta investigação situa-se no conselho de Oeiras, integra um jardim-de-infância, quatro escolas de primeiro ciclo, uma escola de 2º e 3º ciclo e a escola sede de 3º ciclo e secundário.

Em termos de caracterização socioeconómica e familiar, a população residente caracteriza-se por alguma homogeneidade, quer a nível da sua inserção laboral, quer quanto ao grau de instrução e idade, predominando os estratos sociais médios e superiores. Daqui se depreende que a maior parte dos alunos deste Agrupamento provém de agregados familiares que se integram na chamada classe média, do ponto de vista socioeconómico e culturalmente favorecidos, com uma considerável franja de pais com formação académica de nível superior. Contudo, verifica-se, igualmente, a inserção, nesta comunidade escolar, de alunos pertencentes a estratos socioeconómicos e culturalmente menos favorecidos. Os alunos, na sua maioria, são assíduos e participativos, havendo condições para que todos gostem do que fazem, se sintam bem e vivam a Escola como algo que a todos pertence e que é produto da ação e das práticas de toda a comunidade educativa.

4.2. A turma

A turma onde decorreu o estudo é constituída por vinte e quatro alunos, nove raparigas e quinze rapazes com idades compreendidas, à data do inquérito (setembro de 2012) entre os nove e os onze anos de idade:

Quadro 5 - Idades dos alunos

Idade	9 anos	10 anos	11anos	Total
Rapazes	6	9	1	16
Raparigas	2	4	1	8

No que se refere ao agregado familiar, sete alunos são provenientes de famílias em que os pais estão divorciados, mas vivem, à exceção de alguns casos, situações estáveis. As habilitações dos encarregados de educação permitem um acompanhamento das atividades letivas dos seus educandos, o que acontece com alguma frequência.

Quadro 6 - Habilitações literárias dos Encarregados de educação

Habilitações Literárias dos Encarregados de Educação	
Licenciatura	3
Bacharelato	5
11º ano	1
12º ano	6
3º ciclo do ensino recorrente	1
9º ano	1
8º ano	1
7ºano	2
6º ano	1
4ºano	1
Desconhecido	2
Total	24

No que diz respeito à caracterização socioeconómica da turma, existem nove alunos que usufruem de apoio por parte do serviço de Ação Social Escolar (SASE), atribuído segundo as necessidades dos alunos. Sendo o escalão A o apoio máximo que o aluno pode usufruir e o escalão C o apoio menos avultado, a distribuição é feito do seguinte modo:

Quadro 7 - Alunos abrangidos pelo Serviço de Ação Social Escolar

Escalão (SASE – Serviço de Ação Social Escolar)	Nº de Alunos Abrangidos
A	7
B	2
C	0

Os alunos, provêm, maioritariamente, de escolas do agrupamento. Dois sofreram retenções no seu percurso escolar.

Quadro 8 - Caracterização global / sumária do percurso académico da turma

Escola frequentada no ano anterior		Escola do agrupamento (22 alunos) Escola não pertencente ao agrupamento (2 aluno)
Repetências	2º ciclo	2 Alunos (5ºano de escolaridade)

Os vinte e quatro alunos transitaram do primeiro para o segundo ciclo, com aproveitamento à disciplina de Matemática.

Aquando da primeira avaliação do primeiro período letivo, registaram-se dois casos de alunos com níveis inferiores a três; no segundo período, três alunos com níveis inferiores a três e no final do presente ano letivo, registaram-se 3 níveis inferiores a três. No entanto, considera-se o aproveitamento da turma satisfatório.

4.3. Os alunos e as aulas com o geoplano

Aquando da realização desta investigação, abordei conceitos e ideias fundamentais que me fizeram refletir sobre a ciência que envolve toda a arte de lecionar e as suas implicações na construção do conhecimento matemático. Senti-o como um processo gradual, em que os vários aspetos focados se foram inserindo e, quase que de forma inconsciente, surgiu a autoanálise do meu trabalho em sala de aula.

A turma apresenta características que são transversais a uma turma de quinto ano de escolaridade tipo. Alunos que iniciam o seu percurso no segundo ciclo e que enfrentam uma grande mudança a nível de organização curricular. A turma adaptou-se bem ao funcionamento da nova escola e das aulas de matemática. O fato de os acompanhar desde o início do ano letivo, quatro vezes por semana, em três blocos de noventa minutos e um bloco de quarenta e cinco minutos (Apoio ao Estudo), permite-me ter um conhecimento de todos os alunos, nos âmbitos emocional e cognitivo. As regras são cumpridas, havendo a necessidade de fazer um esforço, para que todos estejam envolvidos nas atividades de sala de aula. É uma turma em que é possível encontrar um bom ritmo de trabalho, englobando todos os alunos, não havendo uma heterogeneidade vincada, que dificulte o trabalho realizado em sala de aula. As aulas de Matemática são apreciadas pelos alunos, com os quais criei uma empatia que é fundamental para transmitir os conteúdos lecionados. Existem, no entanto, alguns elementos perturbadores que, quando motivados, trabalham grande parte do tempo, não comprometendo o bom desenrolar das atividades letivas. As atividades em grupo provocam sempre muita agitação que, salvo raras exceções, advém do envolvimento e da partilha entre os alunos. Eles são competitivos e aguerridos, sendo necessário" pulso firme" para a condução das aulas. Não é fácil criar hábitos de discussão de forma tácita, em que tudo ocorra naturalmente. Este processo exige um trabalho continuado, com base num modelo, de modo que as regras de participação se orientem segundo expetativas em que eles são sujeitos, como ouvintes ativos para poderem participar na discussão, expondo o seu raciocínio, quer para mostrar concordância, quer para gerar desacordo. Por outro lado, o conhecimento dos seus pares, enquanto membros da turma, permite-lhes antever determinados comportamentos, o que lhes confere segurança enquanto membros da discussão, Wood, T. (1999). Ainda, assim, é uma turma que permite a existência de discussões matemáticas, com alguma frequência, em grande grupo. O desenrolar das aulas obedece a rotinas, para que os alunos se apropriem delas e lhes seja mais fácil compreender o que é esperado do seu desempenho. As aulas dão início com a escrita do sumário e a abertura da lição, a que se segue a confirmação, por aluno, da realização dos trabalhos de casa e, por fim, a revisão dos conteúdos abordados na aula anterior. Posto isto, dá-se início ao cumprimento do objetivo da aula com as atividades planificadas. Os alunos sabem que as dúvidas devem ser colocadas e todos têm abertura para as colocar, sem qualquer tipo de constrangimento. A aula acontece, em que cada aluno é o foco principal na construção do seu conhecimento.

Regra geral, não existem grandes incumprimentos ao nível do material necessário para as aulas. São alunos que têm encarregados de educação presentes, que se envolvem na vida escolar dos seus educandos, embora em níveis distintos. Contudo, quando os encarregados de educação são informados de algum incumprimento de caráter repetitivo, por parte do aluno, atuam no sentido de menorizar esses acontecimentos.

4.4. As aulas com o geoplano

O ensino aprendizagem sobre a área aponta fragilidades, de acordo com Lopes et al. (2008) na compreensão do conceito pelos alunos. Para tal são apontadas questões de natureza didática, isto é, que se prendem com o tempo dedicado ao tema, como o ensino precoce do conceito, ou mesmo pelas deficiências das abordagens realizadas (Freuthental, 1983; Doudy & Perrin-Glorian,1989; Olmo, Moreno & Gil,1993; Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Chamorro,2001; Owens & Outhered, 2006, citado por Lopes et al., 2008).

A incompreensão deste conceito prende-se muitas vezes com o conflito área / perímetro (Douady & Perrin-Glorian, 1989; Corberán, 1996; Jaquet, 2000; Chamorro, 2001, citado por Lopes et al., 2008). É frequente alunos do segundo ciclo determinarem a área de um retângulo através da soma das medidas dos seus lados ou calcularem o perímetro utilizando uma fórmula apropriada para o cálculo da área, ou ainda a associação incorreta das unidades de medida a cada um dos conceitos (Kidman e Cooper, citado por Lopes et al., 2008). Também é frequente no cálculo da área e do perímetro de uma figura atribuírem maior valor à área e menor valor ao perímetro (Olmo, Moreno e Gil, 1993, citados em Lopes et al., 1998).

Lopes et al. (1998) refere que, segundo, Freudenthal (1983); Douady & Perrin-Glorian (1989); Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999); NCTM (2000); Chamorro (2001), as metodologias que vão ao encontro da desconstrução deste conflito são tarefas geradoras de conflito cognitivo, permitindo, aos alunos, a análise, a discussão e confrontação de resultados, para assim existir a destrinça efetiva destes dois conceitos. Implicitamente, o trabalho cooperativo conjuntamente com a escolha de tarefas com potencial e geradores de conflito cognitivo, serem o ponto de partida para a identificação das dificuldades dos alunos e simultaneamente da sua possível colmatação. Para que se dê início ao processo, a consciência da importância do trabalho colaborativo, como o meio propício às interações sociais, que impulsionam a aprendizagem entendida como um processo pessoal de construção de significados (Ponte et al., 1998), é de extrema importância e sustentado por vários investigadores (Slavin, 1995; Johnson, Johnson & Holubec, 1999, Cohen et al, 1999; Serrano, González-Herreiro & Martínez Herrero, 1997; Melero & Fernandez, 1995; Wiersema,2000; Davidson & Kroll, 1991, citado por Lopes et al., 1998). Estes contextos de aprendizagem permitem, aos alunos, expor as ideias aos seus pares, fazendo-o de modo mais proximal, quer a nível da formalidade, quer a nível de linguagem, gerando-se um nível de entendimento que permite expor ideias, confrontá-las, discuti-las, argumentá-las e criticá-las, propiciando-se desenvolvimento intelectual e, consequentemente, construção de conhecimento (Lopes, et al.,1998).

No presente estudo, as tarefas foram realizadas individualmente, podendo os alunos confrontarem ideias com os seus pares, expondo o seu ponto de vista e partilharem informação, que além de ajudar a consolidar os conhecimentos, funcionou como desbloqueio de algumas situações.

As tarefas propostas surgiram, após planificação da unidade de aprendizagem, com o intuito de trabalhar os conceitos de perímetro e área, introduzindo aspetos que fogem à rotina, como o trabalho com um instrumento “manipulativo” específico – o geoplano, bem como a diversidade de estratégias possíveis que são proporcionadas com este tipo de materiais, quer enquanto objeto físico, quer na vertente computacional. As tarefas têm uma forte componente prática e simultaneamente integradora de outros conceitos matemáticos já apreendidos. Numa primeira fase, os materiais fornecidos cingem-se ao mínimo: ficha de trabalho, papel ponteado, geoplano e elásticos coloridos. Posteriormente os alunos realizaram as tarefas no geoplano computacional, tendo ao seu dispor o computador e o respetivo programa e a ficha de trabalho, com as tarefas propostas.

O geoplano, material e computacional, foi um instrumento a utilizar na lecionação das aulas dedicados ao tópico – Áreas e Perímetros. Deste modo, foram construídas duas fichas de trabalho, cuja realização das tarefas implicava o uso do geoplano. A ficha de trabalho – 1 foi direcionada para o geoplano material, a ficha de trabalho - 2 foi pensada para o trabalho com o geoplano computacional.

A planificação base realizada, pelo grupo disciplinar de Matemática e Ciências da Natureza do departamento de Matemática e Ciências Experimentais, do estabelecimento de ensino em que decorreu o estudo foi cumprida, no que diz respeito à calendarização e ao encadeamento dos subtópicos a cumprir. No entanto, as tarefas propostas, no que se refere ao cumprimento do subtópico “Perímetro de polígonos regulares e irregulares”, “Áreas de Polígonos regulares e irregulares” e “ Alturas de um triângulo – área de um triângulo e relação entre a fórmula da área de um triângulo com a do retângulo” deram lugar ao trabalho com o geoplano material / computacional (ver quadro 9). Um dos objetivos foi que as aulas decorressem dentro da normalidade, sendo as tarefas, com o geoplano, atividades de sala de aula, a que os alunos reagiram normalmente e sem qualquer aviso prévio da sua implementação. Foi elaborada uma planificação, que visava a calendarização das atividades propostas, e o cumprimento dos respetivos subtópicos que implicavam trabalhar os conceitos de perímetro e área, para os quais tinham sido pensadas as tarefas realizadas. Esta planificação foi de extrema importância, uma vez que permitiu esquematizar todo o desenrolar das atividades propostas e, de certo modo, antever alguns constrangimentos e, simultaneamente, encontrar respostas que pudessem minimizar o seu impacto na implementação das tarefas. Aquando da sequencialização das tarefas, houve a imposição da interrupção das atividades letivas, entre o trabalho com o geoplano material e o trabalho com o geoplano computacional. Numa primeira abordagem, houve uma tentativa de alteração da calendarização, que foi abandonada, após reflexão do impacto da mesma no estudo. Senti que um interregno poderia ser uma mais-valia para o trabalho com o geoplano, levando os alunos a acomodar os conceitos trabalhados numa primeira fase. Posteriormente, o trabalho com o geoplano computacional iria abordar os mesmos conceitos, recorrendo a tarefas semelhante, que acumulavam duas funções: recordar conceitos já abordados e permitindo, aos alunos, apropriarem-se dos pré-requisitos necessários para a realização das tarefas que se seguiam e uma familiarização com o geoplano computacional, nomeadamente no que diz respeito à apropriação do seu funcionamento, evitando constrangimentos a este nível, na realização das tarefas seguintes, que apelavam, agora, a um maior grau de dificuldade e, consequentemente, se traduziam num maior desafio para os alunos.

Para observação das aulas, foi elaborado um guia de observação, em que tive a preocupação de antecipar alguns aspetos que seriam relevantes para uma boa apropriação do desenrolar dos acontecimentos e posterior interpretação dos mesmos. A observação foi pensada de forma não estruturada, tendo a preocupação de apontar itens que poderiam ser relevantes para o desenrolar do estudo e deixando um espaço dedicado à observação livre, onde fosse possível registar todos os acontecimentos que, no desenrolar da ação, fossem considerados pertinentes para o estudo em causa, quer seja porque saíam da zona de conforto, previsível pelo observador, quer seja por alterar o encadeamento dos acontecimentos no alinhamento planificado.

Quadro 9 - Planificação da implementação das tarefas com o geoplano

<table>
<tr><td rowspan="7">Período de tempo em que decorreu o estudo</td><td rowspan="3">Geoplano material
(2º Período letivo – 5 a 8 de março)</td><td colspan="4">Tópico - Perímetros e Áreas</td></tr>
<tr><td>Subtópicos</td><td>Objetivos*</td><td>Estratégias</td><td>Tempos letivos</td></tr>
<tr><td>- Perímetros de polígonos regulares e irregulares

- Áreas de polígonos regulares e irregulares</td><td>- Determinar o perímetro de perímetros regulares e irregulares;
- Resolver problemas envolvendo perímetros de polígonos;
- Formular argumentos válidos recorrendo á visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;

- Determinar a área de polígonos regulares e irregulares.
- Resolver problemas envolvendo áreas de polígonos.</td><td>- Realização da ficha de trabalho – 1 (ver anexo V) e discussão dos resultados</td><td>- Três blocos de 90 minutos.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Interrupção das atividades letivas - Interregno entre o 2º e 3º período letivo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Geoplano computacional
(3º Período letivo – 8 a 11 de abril</td><td>Subtópicos</td><td>Objetivos*</td><td>Estratégias</td><td>Tempos letivos</td></tr>
<tr><td>- Alturas de um triângulo. Área de um triângulo e relação entre a fórmula da área de um triângulo com a do retângulo</td><td>- Compreender propriedades das figuras geométricas no plano e no espaço;
- Descobrir / Relacionar a fórmula da área do triângulo com a do retângulo
- Calcular a área de figuras planas, decomponíveis em retângulos e em triângulos;</td><td>- Realização da ficha de trabalho - 2 (ver anexo VI) e discussão dos resultados</td><td>- Três blocos de 90 minutos.</td></tr>
</table>

*objetivos retirados da planificação realizada pelo grupo disciplinar da escola onde foi realizado o referido estudo. (ver anexo III)

Capítulo 5

Maria

A Maria tem dez anos e não apresenta retenções no seu percurso escolar. Apesar de ser meiga e segura de si é, simultaneamente, tímida e, às vezes, um pouco introvertida. Os pais divorciaram-se recentemente e, como a mãe espontaneamente me relatou numa conversa informal, foi um processo moroso e bastante doloroso para todos. Além dos danos emocionais, a família perdeu poder económico, tendo inclusive de mudar de residência. A Maria tem dois irmãos mais novos, com quem vive juntamente com a mãe. Como é a irmã mais velha, a mãe muitas vezes dá-lhe a responsabilidade dos irmãos, que estudam na escola do primeiro ciclo próxima do estabelecimento de ensino que ela frequenta, encarregando-a de os levar para casa depois das aulas. O pai, disse-me a Maria, não mantém contato próximo com ela, apesar de não morar longe. Ao falar sobre esta ausência, fá-lo com tristeza, ainda que serenamente, como que resignada. A mãe é extremamente atenta, procurando manter-se presente ao longo do dia através de contactos telefónicos frequentes que pude presenciar. No entanto, como também me referiu, o tempo de que dispõe não lhe permite apoiar a filha nas tarefas escolares, percebendo-se pelas suas palavras que a aluna é autónoma e responsável no cumprimento dos seus deveres. Isto vem ao encontro da minha perceção sobre a Maria a este respeito que também considero com um grau de maturidade acima da média, que se traduz em comportamentos ajustados em ambiente de sala de aula e na relação com os seus pares e com os adultos.

A Maria tem revelado boas capacidades de compreensão matemática, expressando-se de forma clara e bem fundamentada. A avaliação do seu desempenho na disciplina começou por ser de nível quatro, passando para nível cinco, no segundo e terceiro períodos. É uma aluna, que diferentemente de muitos dos seus colegas, quando é questionada ou se lhe pede um trabalho escrito, adota um estilo sóbrio, muito próprio, acatando as tarefas propostas pela professora e tentando sempre corresponder, quer no que diz respeito à sua resolução, quer no que se refere a questões disciplinares.

Esta aluna foi selecionada por ter uma boa capacidade de comunicação, por escrito e oralmente, fazendo-o com muita assertividade e objetividade, mostrando-se muito interessada em participar neste estudo, assim que lhe foi sugerida a proposta. Contrariamente à tendência atual, a Maria apresenta alguma dificuldade no manuseamento do computador, o que pode ser explicado pelo facto do computador de que dispõe, de acordo com a aluna, ser uma versão bastante antiga e de só ter acesso à internet na escola. A este propósito, durante a entrevista, mostrou vontade em ter um computador, onde pudesse ter acesso à internet, e disse-me que tem esperança que a mãe adquira um brevemente. Estas condições relativas ao uso do computador, terão contribuído para que a Maria se tivesse sentido muito atraída pelo trabalho com as novas tecnologias durante as aulas.

Dificuldades na resolução das tarefas

Neste ponto vão ser apresentadas as dificuldades manifestadas, pelos alunos, na resolução das várias tarefas e que foram agrupadas nas seguintes categorias: dificuldades de interpretação, dificuldades conceptuais e dificuldades argumentativas.

5.1. Dificuldades de interpretação

Nesta categoria estão integradas as dificuldades na interpretação de enunciados ao nível da linguagem, quer matemática, quer natural, envolvendo também, dificuldades na compreensão do vocabulário específico e da terminologia usada. São, igualmente, abrangidas dificuldades de interpretação de figuras, por vezes, associadas às dificuldades de visualização ou de identificação de elementos que as constituem, bem como dificuldades na sua construção.

Geoplano material (ficha de trabalho 1)

A Maria é uma aluna com uma boa capacidade de interpretação e de comunicação quer escrita quer oral.

Na realização das tarefas com o geoplano material (ficha de trabalho 1), a Maria apenas solicitou a minha ajuda na questão 2.1 (ver fig. 5), pelo facto de não estar a conseguir interpretar o que lhe era pedido. A minha intervenção foi no sentido de conduzir a aluna a uma nova leitura do enunciado, pedindo-lhe que identificasse os aspetos que lhe levantavam dificuldades de interpretação.

Após esta nova leitura, a situação foi desbloqueada pela própria aluna que, pelo simples facto de ter realizado uma leitura mais pausada e focada, deu a entender ter-se apropriado do enunciado da questão.

Penso que, às dificuldades de interpretação do enunciado desta questão poderão também ter estado associadas dificuldades de construção de figuras, obedecendo a determinados valores de perímetro e área, até porque esta era a primeira tarefa em que a aluna teve que atender, simultaneamente, aos conceitos de perímetro e de área na construção das figuras pedidas, o que poderá ter originado alguma insegurança.

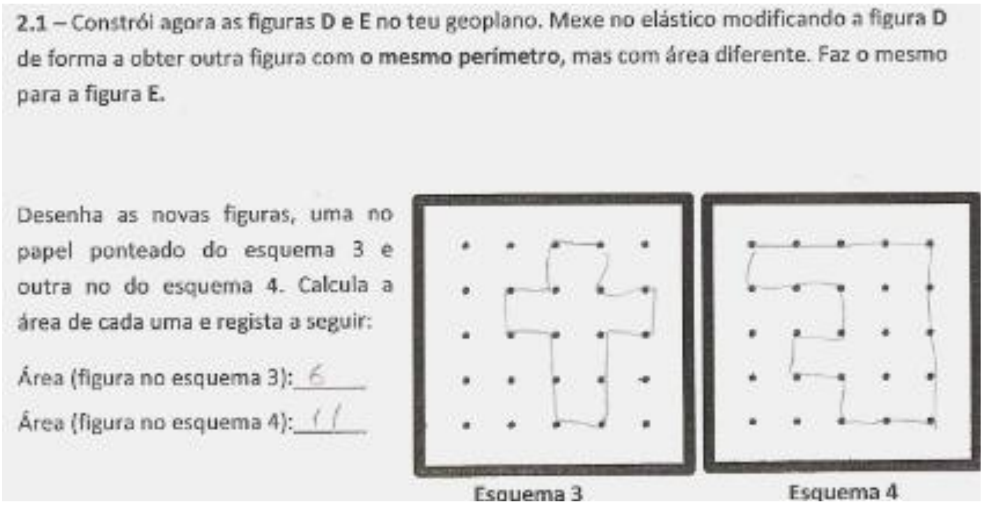
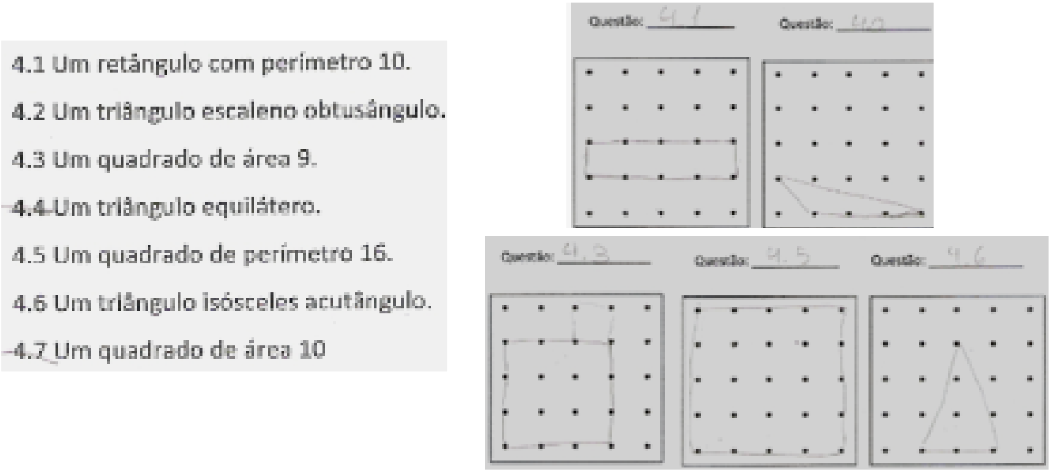


Figura 5 - Enunciado da questão 2.1

Para além disso esta questão (2.1) tinha um enunciado ligeiramente mais extenso, o que terá suscitado mais dificuldades na sua interpretação. Pelo que pude acompanhar, a Maria ter-se-á "perdido" na leitura do texto e, quando chegou ao fim, já não se recordava do início, isto é, não conseguiu encadear o que ia lendo, como se existisse uma incapacidade em manter um fio condutor.

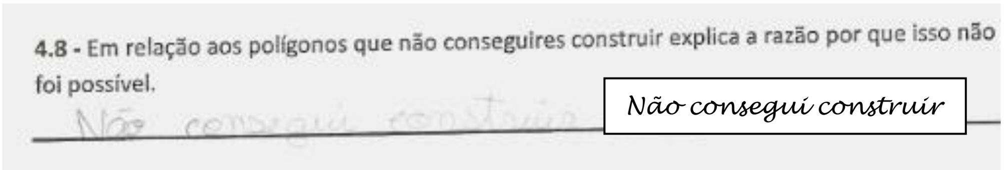
No que se refere à linguagem matemática, percebi que a aluna tinha algumas dificuldades quando me pediu ajuda para confirmar algumas propriedades geométricas na tarefa 4 (ver fig. 6), que ela me enunciava, como foi o caso dos termos que caracterizavam os triângulos que deveria construir, como por exemplo: "triângulo escaleno obtusângulo", "Triângulo isósceles acutângulo", "Triângulo equilátero", revelando alguma insegurança que, momentaneamente, a impediu de prosseguir a realização do trabalho.



4.1 Um retângulo com perímetro 10.
4.2 Um triângulo escaleno obtusângulo.
4.3 Um quadrado de área 9.
~~4.4 Um triângulo equilátero.~~
4.5 Um quadrado de perímetro 16.
4.6 Um triângulo isósceles acutângulo.
~~4.7 Um quadrado de área 10~~

Figura 6 - Tarefa 4 - polígonos construídos pela Maria

Após o desbloqueio destas situações, a Maria prosseguiu sem grande hesitação, realizando, corretamente, as construções que eram possíveis (ver fig. 6). No entanto, em relação à explicação que era pedida na questão 4.8 (fig. 7), a aluna não justificou as impossibilidades de construção, limitando-se a dizer "Não consegui construir":



4.8 - Em relação aos polígonos que não conseguires construir explica a razão por que isso não foi possível.

Não consegui construir

Figura 7 - Resposta da Maria à questão 4.8

Da interação com a Maria, durante a entrevista, a propósito da tarefa 4, consegui perceber que a deficiente justificação escrita, elaborada pela aluna, terá sido influenciada pelas incertezas na interpretação dos termos matemáticos, presentes nas alíneas da tarefa (como por exemplo: "triângulo escaleno obtusângulo", "triângulo isósceles acutângulo" e "triângulo equilátero") e, eventualmente, ainda, pela dificuldade em sintetizar a informação e construir um texto coerente, tendo, no entanto, partilhado oralmente comigo os conhecimentos corretos que tinha. Na verdade, durante a entrevista, a Maria foi justificando, a meu pedido, alínea a alínea, a razão da possibilidade ou impossibilidade da construção de cada figura, apesar de não se alongar muito no discurso e de ter necessidade de complementar a linguagem matemática utilizada com as figuras que tinha representado no papel ponteado. Estas figuras serviam de ligação entre as palavras, quando os termos matemáticos faltavam, para explicar determinada característica geométrica, na figura construída. Por exemplo, quando questionada sobre a impossibilidade da construção de um triângulo equilátero, como já se tinha apercebido na resolução de questões anteriores, que a diagonal de um quadrado tem um comprimento maior do que o respetivo lado, a construção do triângulo equilátero não era possível, pelo que a explicação dada é sucinta, como quem está a explicar algo óbvio, que não oferece grande dúvida:

Professora: E a 4.4, um triângulo equilátero. Onde é que está...?
Maria: Não fiz.
Professora: Porquê?
Maria: Porque eu sabia que a diagonal era maior... E não dava... Este lado fica sempre mais pequeno [aponta para um dos triângulos que tinha desenhado [ver fig. 9], que não considerou como resposta à questão]... E pronto.

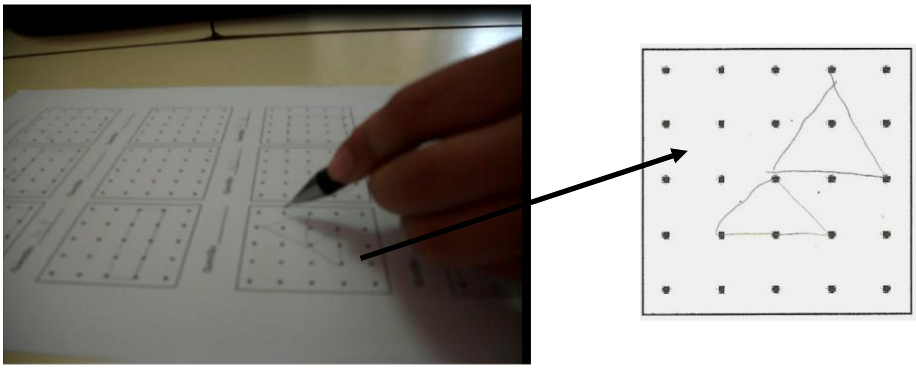


Figura 8 - Tarefa 4, figuras intermédias

Repare-se, existem duas figuras representadas no papel ponteado – dois triângulos —, que aluna sentiu necessidade de construir, sem que as considerasse resposta ao pedido, em nenhuma das alíneas da tarefa, como que de uma confirmação se tratasse, que não apagou, seguindo as instruções dadas (ver fig.8).

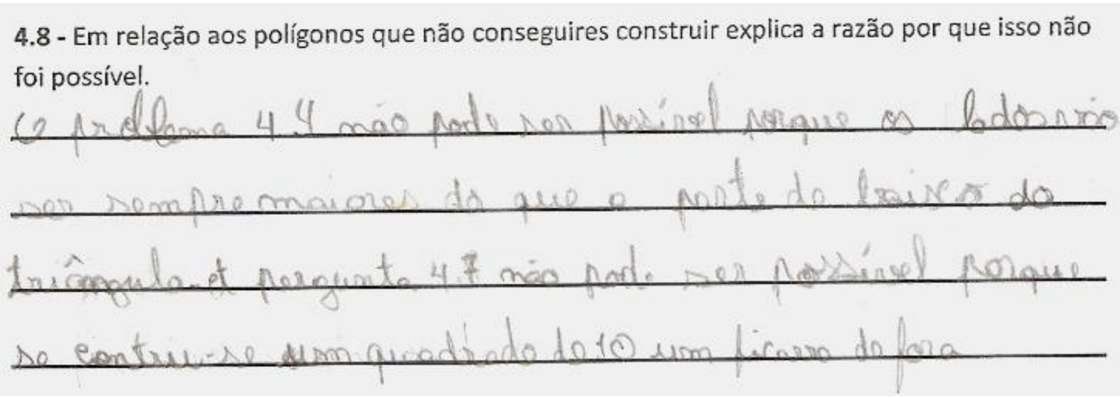
Mais à frente, na entrevista, quando questionada sobre a construção de um quadrado de área 10 (questão 4.7), a Maria recorreu ao quadrado de área nove, da questão 4.3, já desenhado em papel ponteado, para justificar a impossibilidade dessa construção (ver fig. 6). Veja-se o que a aluna referiu a propósito:

Professora: Muito bem! Na 4.7... Um quadrado de área 10...
Maria: É impossível.
Professora: Porque é que é impossível?
Maria: Porque se fizéssemos um de 9 e acrescentássemos aqui mais um [refere-se a um quadrado, correspondente a uma unidade de área, imaginando que está disposto lateralmente], não ia ficar um quadrado [aponta para o quadrado de área 9]

Professora: Então mas não é possível arranjar outra estratégia para fazer o quadrado 10?
Maria: Hum... Hum... .... Acho que não.

No que concerne à linguagem matemática, especialmente na tarefa 4 (fig. 6), foi assim manifesto, a insegurança da aluna sobre o significado dos vários termos associados às figuras geométricas pedidas, havendo necessidade da confirmação por parte da professora. Repare-se que, na resposta oral, a aluna conseguiu uma explicação mais completa do que na resposta escrita.

Em resposta à questão 4.8, um outro aluno demonstrou ter conseguido reunir a informação necessária para a construção de uma pequena justificação, onde expôs o porquê da impossibilidade de construir as duas figuras geométricas propostas na tarefa 4.


4.8 - Em relação aos polígonos que não conseguires construir explica a razão por que isso não foi possível.

O problema 4.4 não pode ser possível porque os lados vão ser sempre maiores do que a parte do baixo do triângulo e a pergunta 4.7 não pode ser possível porque se contru-se um quadrado de 10 um ficava de fora

Figura 9 - Resposta dada pelo António à questão 4.8

Nesta questão, parece-me que o António fez um esforço para construir um texto que explicitasse, de forma mais cuidada, a razão da não construção do triângulo equilátero e do quadrado de área 10. Em entrevista, o aluno socorreu-se do geoplano material para comprovar a inexistência de figuras geométricas, com as características pedidas, nas questões 4.4 e 4.7, construindo figuras geométricas, no geoplano, que comprovassem a impossibilidade de construção de um triângulo equilátero e a inexistência de um quadrado de área 10.Veja-se a propósito o seguinte diálogo:

Professora: E o triângulo equilátero, onde está?
António: É impossível! Acho impossível... Porque as laterais vão ser sempre maiores do que as bases... [Constrói um triângulo isósceles no geoplano]
(...)
Professora: Onde está a figura correspondente à questão 4.7?
António: Acho que não dá... [Faz um quadrado de área 9 no geoplano e explica] agora ia sobrar um quadradinho e não ia ficar bem! Se fosse um retângulo já dava... No geoplano 3 não deu e 4 não deu [referia-se à medida do lado do quadrado, em unidades de medida]

Ao contrário da Maria, um outro aluno da turma, o António não desenhou, no papel, ponteado nenhuma das figuras intermédias, que o levaram a concluir a impossibilidade da sua construção no geoplano. No entanto, durante a explicação, recorreu à exemplificação, através do geoplano, como forma de colmatar algumas das dificuldades de argumentação surgidas.

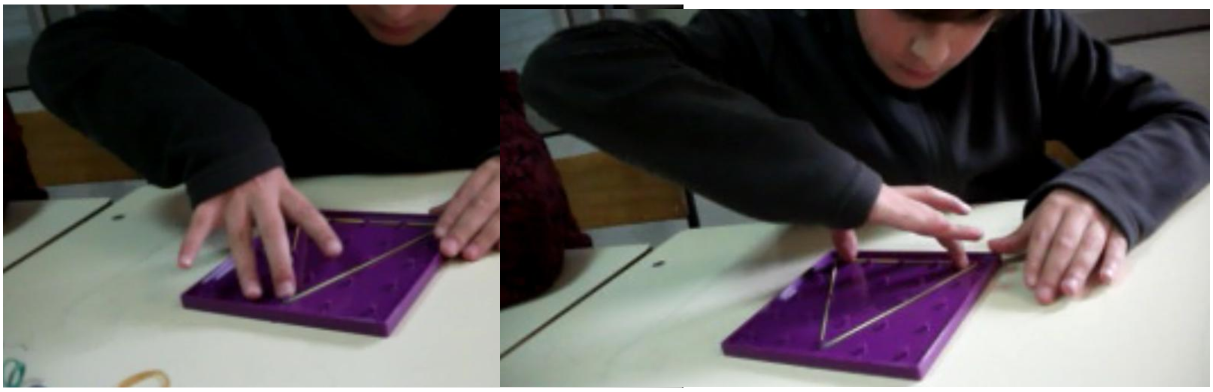


Figura 10 - Momento em que o aluno explica a impossibilidade de construção de um triângulo equilátero

É de salientar que a Maria não evidenciou dificuldades na interpretação das figuras dadas, no papel ponteado, nas diferentes tarefas, não havendo registo de qualquer impedimento na sua resolução que evidencie dificuldades deste tipo. Ainda assim, na entrevista, quando questionada sobre as dificuldades que sentiu na tarefa 1 (fig. 11), onde era pedida a construção das figuras desenhadas e, posteriormente, a determinação das respetivas áreas, tendo por unidade de área o quadrado Q, afirmou que sentiu alguma dificuldade em identificar, de imediato, a unidade de área na figura A, por associação à unidade de área Q apresentada na mesma questão.

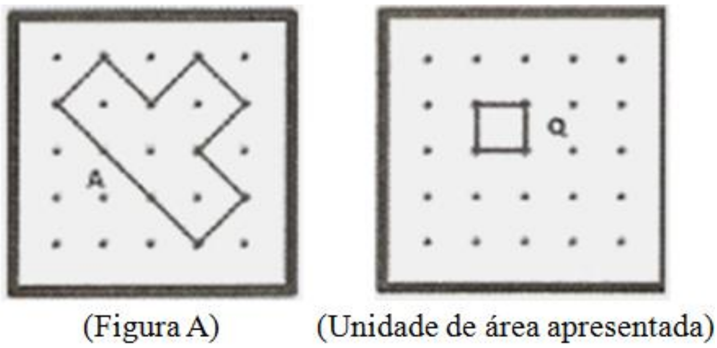


Figura 11 - Tarefa 1

Veja-se o diálogo que surgiu a propósito na entrevista:

Professora: Como é que fizeste na figura A? Explica-me lá...
Maria: Na A... eh... Primeiro eu juntei... Bem eu contei quadrados assim grandes [aponta para a figura A, aparentemente referindo-se ao quadrado cujo lado é a diagonal do quadrado Q] mas ficou mal...
Professora: Porque é que não podias contar quadrados grandes?
Maria: Porque não eram iguais a este [aponta para a unidade de medida de área pré estabelecida]
Professora: Hum... hum... E isso era a nossa unidade de quê?
Maria: A nossa unidade de área!
Professora: E tu tens que a respeitar... Muito bem! E depois foste tentar o quê?
Maria: eh... Fui desmanchando estes quadrados grandes em triângulos e eh... juntava dois triângulos e dava um quadrado destes [aponta para a unidade de área Q].

Apercebi-me assim que, no cálculo da área da figura A, e ainda que a Maria se tenha auto corrigido, numa primeira abordagem à questão, a força da imagem (ver figura A, fig. 11) como que a fez esquecer que o quadrado dado como unidade era o da figura Q. Contudo, a aluna não se ficou pela primeira interpretação e, analisando a figura com mais atenção, conseguiu identificar a unidade de área que devia utilizar, respondendo corretamente (fig.12).

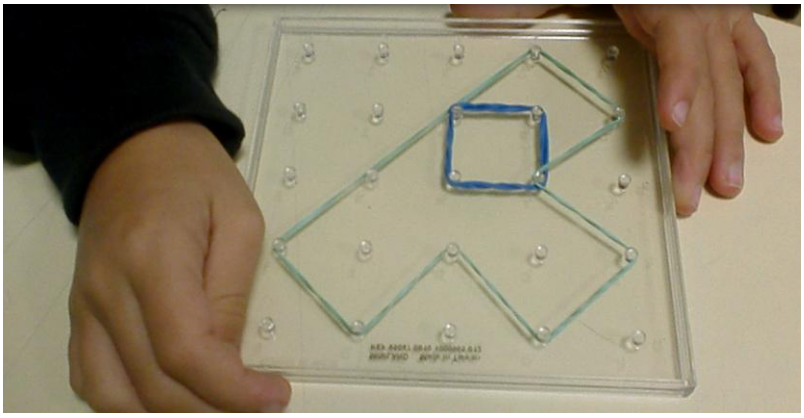


Figura 12 - Identificação da unidade de área Q, na figura A

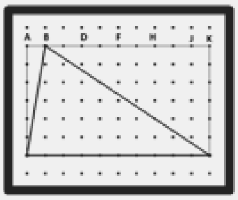
Geoplano computacional (ficha de trabalho 2)

Como foi referido anteriormente, a Maria, contrariamente a muitos dos seus colegas, apenas tem acesso ao computador e à internet na escola. Na interpretação do texto que na ficha dá indicações sobre o modo como os alunos deviam gravar as diferentes imagens que iam sendo desenhadas, apenas manifestou algumas dúvidas que foram rapidamente resolvidas com a minha ajuda. Ultrapassadas estas primeiras dúvidas, a aluna dominou a aplicação computacional e não evidenciou qualquer tipo de dificuldades que a impedissem de resolver, adequadamente, as tarefas propostas. O facto de não ter acesso fácil ao computador foi um fator que lhe proporcionou maior entusiasmo na realização destas tarefas. Veja-se o diálogo em que a Maria lamenta o facto de não poder aceder com maior frequência ao computador:

Professora: E tu gostas mais de trabalhar no computador? Porquê?
Maria: Sim
Professora: Porquê
Maria: Ah... Não sei...Eu em casa não tenho computador... Tenho computador, mas não tenho internet... Mas também nunca ando nele porque ele já está um bocado meio estragado, e então pronto... Não ligo... Não tenho facebook, não tenho email, não tenho nada disso. E... então por exemplo estudo sempre pelos livros... Eu já disse à minha mãe que gosto mais de computadores! Mas... E eu gostei muito de trabalhar no computador...

Na tarefa 3 (fig. 13)**,** a Maria não teve dificuldade em apropriar-se das indicações para a construção de um retângulo "10 por 6".

3 – Com uma geobanda constrói uma figura, constituída por um retângulo 10 por 6 e um triângulo, no interior do retângulo, como a que vês no esquema 1



Esquema 1

3.1 – Na tabela 1, regista a área do retângulo. A seguir, desloca o vértice superior do triângulo, primeiro para B, depois para C, para D e assim sucessivamente até percorreres as letras todas e em cada mudança do vértice escreve na tabela 1, os dados do triângulo respetivo.
Para o cálculo da área dos triângulos obtidos, clica no ícone

Vértice escolhido	Altura dos triângulos	Base dos triângulos	Área dos triângulos	Área do Retângulo
A				
B				
D				
F				
H				
J				
K				

Tabela I

Figura 13 - Tarefa 6

A aluna, na entrevista, diz que associou o “10” ao comprimento do retângulo e o “6” à largura, afirmando que não teve necessidade de recorrer à imagem (esquema 1, fig. 13) para construir o retângulo:

Maria: Não, eu não segui por aqui [aponta para o esquema representado na ficha]... Diziam as medidas e eu fiz...
Professora: Então, para identificares o “10” e o “6” como é que fizeste? ... O “10” era o quê?
Maria: Era a base
Professora: A base do teu retângulo?
Maria: Hum... do triângulo
Professora: Mas para construíres o retângulo, o 10 conseguiste associá-lo à ...
Maria: À largura e o “6” ao comprimento... Sim.

Ainda na tarefa 3, houve alguma dificuldade na interpretação do enunciado que devido ao facto de ser um pouco mais extenso do que em outros casos, solicitando um conjunto de ações encadeadas, e, depois de cada ação com base na figura construída, o aluno ter que preencher a tabela fornecida. A Maria não teve dificuldade em compreender o modo como iria fazer este preenchimento, mas hesitou na identificação das alturas dos triângulos, o que lhe criou um impedimento momentâneo. Depois de eu lhe ter recordado esta noção, a Maria interpretou corretamente o esquema 1 da tarefa 3, o que foi muito importante para que tivesse compreendido que a medida da altura do triângulo era a mesma que a medida da largura do retângulo. A Maria realizou corretamente o preenchimento da tabela e explicou do modo como se pode ver no extrato seguinte da entrevista:

Professora: E o preenchimento da tabela 3.1., como é que tu conseguiste calcular a altura dos triângulos?
Maria: Eu já não me lembrava da altura e depois perguntei à professora... E ela fez-me lembrar. Depois movi o vértice e depois encostei à largura do retângulo e depois consegui medir.
Professora: E viste que a altura dos triângulos era quê?
Maria: 6
Professora: E que correspondia ao quê?
Maria: Hum... À largura... À largura do retângulo
Professora: À largura do retângulo... E a altura variava?
Maria: Não
Professora: Não variava. Mas tu mexeste o vértice de um lado para o outro?
Maria: Sim.
Professora: E a altura não variou.
Maria: Foi sempre 6.
Professora: Para ti foi fácil visualizares isso? Achaste que foi mais fácil dentro do retângulo ou o facto de o retângulo estar lá não te ajudou em nada?
Maria: Eu acho que foi mais fácil...

Professora: Porquê?
Maria: Porque se eu não tivesse um retângulo se calhar ia mover para fora (referindo-se ao vértice do triângulo) e... Por exemplo ia ficar obtuso e ... Não sei...
Professora: O facto de ele estar aqui acabou por te criar limites, foi isso?
Maria: Sim

O preenchimento da tabela foi fundamental para se iniciar o processo de descoberta da fórmula para o cálculo da área do triângulo que a Maria fez sem hesitar, sem nenhum tipo de constrangimento tendo dito que não teve necessidade de recorrer ao "measures" (comando que o programa tinha para o cálculo da área e do perímetro). Maria conseguiu interpretar a figura de modo a apropriar-se do triângulo, enquanto figura inscrita no retângulo, e, ao mover o vértice superior, conseguiu compreender que o triângulo dividia o retângulo ao meio. Veja-se o que a aluna disse em entrevista:

Professora: Não foste ao "measures"?
Maria: Não, porque eu pensava que a professora tinha dito que não era para irmos...
Professora: E não foste ao "measures"? [risos] Então como calculaste a área do triângulo? Já sabias que era a dividir por dois? Nós nunca tínhamos falado da área do triângulo...
Maria: Eu acho que fiz base vezes a altura... Mas depois ouvi dizer... E fui lá confirmar [ao measures]
Professora: Como é que tu descobriste que o triângulo era metade do retângulo?
Maria: Quando movi o vértice [refere-se ao triângulo "inscrito" no retângulo] para este canto do retângulo [aponta para o canto superior esquerdo do retângulo] e vi que ia dar do outro lado outro triângulo ao contrário e ocupava o espaço...
Professora: Que espaço?
Maria: Este aqui [aponta para o espaço em branco, no retângulo, representado na tarefa 3.1]
Professora: E esse espaço aí é o quê?
Maria: Metade.
Professora: Metade do "quê"?
Maria: Do retângulo.

Na tarefa 4 (fig. 14) onde era pedida a determinação das áreas dos triângulos A, B e C, presentes no esquema 3, a interpretação das figuras foi de extrema importância para o cálculo das respetivas áreas.

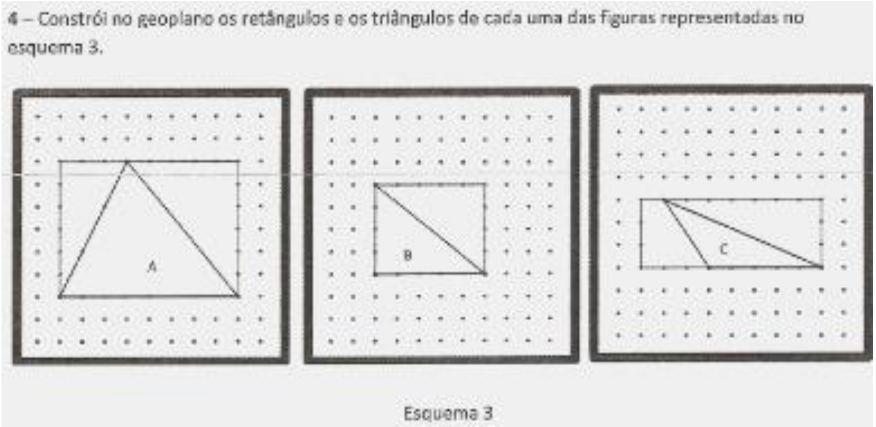
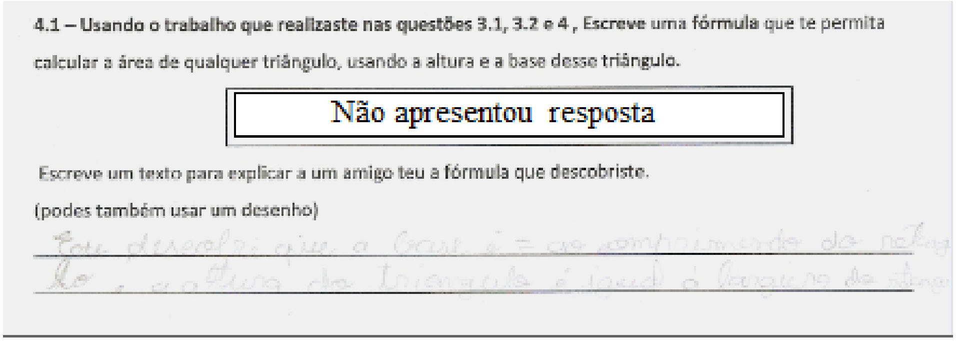


Figura 14 - Tarefa 4

No caso do triângulo A, a Maria moveu o vértice superior sobre o lado do retângulo e conseguiu visualizar, antes de realizar qualquer cálculo numérico, que a área do triângulo é sempre metade da área do retângulo onde está "inscrito". Com o triângulo B, nem sequer sentiu necessidade de movimentar o vértice reconhecendo que esta relação era visualmente evidente. Já no caso do triângulo C, a aluna não conseguiu interpretar, numa primeira fase, como calcular a sua área.

Na questão 4.1 (fig. 15), pretendia-se que a aluna escrevesse uma fórmula para calcular a área de um triângulo deixando para o efeito, o espaço em branco, em que a aluna nada escreveu. Na entrevista, afirmou que não percebeu que era para escrever uma fórmula:

Professora: Tu optaste por não escrever nada, mas explicaste (...) [li em voz alta as conclusões a que a aluna escreveu na justificação pedida]
Maria: Eu, agora, percebi... Que acho que era para escrever... A base vezes altura a dividir por dois... Mas eu só escrevi isto...
Professora: Mas gostavas de ter escrito mais alguma coisa?
Maria: Agora já percebi isso, escrevia... base vezes altura a dividir por dois.
Professora: Mas tu, na altura, não conseguiste perceber muito bem, pois não? O que tu querias dizer era o quê? Que o triângulo era metade do retângulo?!
Maria: Hum... Hum só que não consegui...
Professora: Escrever uma fórmula que te ajudasse a traduzir isso, foi?
Maria: Sim.



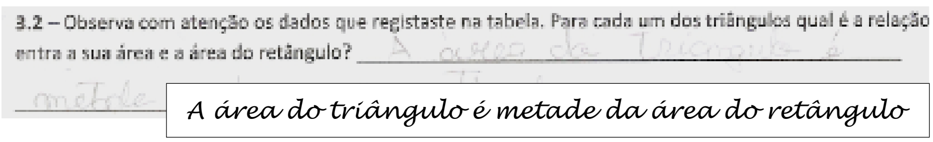
4.1 – Usando o trabalho que realizaste nas questões 3.1, 3.2 e 4 , Escreve uma fórmula que te permita calcular a área de qualquer triângulo, usando a altura e a base desse triângulo.

Não apresentou resposta

Escreve um texto para explicar a um amigo teu a fórmula que descobriste.
(podes também usar um desenho)

Figura 15 - Resposta da Maria à questão 4.1

A Maria não consegue representar, em linguagem matemática, a relação entre a área de um triângulo “inscrito” num retângulo e a área desse retângulo, apesar ter compreendido que a medida da base do triângulo é a mesma que a medida da comprimento do retângulo e que a medida da altura do triângulo é a mesma da largura do retângulo - “Eu descobri que a base é igual ao comprimento do retângulo e a altura do triângulo é igual à largura do retângulo”. Repare-se, ainda, que, apesar de ter compreendido que a área do triângulo é metade da área do retângulo (questão 3.2, fig.16), não chegou a escrever a fórmula mas traduz a relação pedida:

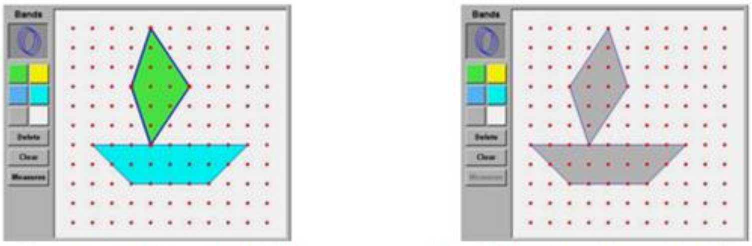


3.2 – Observa com atenção os dados que registaste na tabela. Para cada um dos triângulos qual é a relação entra a sua área e a área do retângulo?

A área do triângulo é metade da área do retângulo

Figura 16 - Resposta, da Maria, à questão 3.2

A interpretação de figuras é também exigida na tarefa 7 (fig. 17). Neste caso para o cálculo de áreas de figura ‘compostas’ dadas em papel ponteado. Nesta tarefa, a Maria manifestou alguma dificuldade em reproduzir o “Barco” no geoplano, especialmente a parte correspondente à “vela”. Quando questionada a este propósito, não conseguiu justificar a razão: “... porque é mais difícil... Não sei explicar!...”. Aparentemente, o polígono dado para a vela do barco e a sua posição (os lados só têm ‘pins’ nas extremidades) terão levantado dificuldades à Maria, na sua reprodução, no geoplano, que só concretizou à segunda tentativa:



(Primeira tentativa da Maria) (Segunda Tentativa da Maria)

Figura 17 - Tarefa 7, construção do ‘Barco’ pela Maria

A construção da “Casa” (fig. 18) foi feita à primeira tentativa não tendo a aluna explicitado nenhuma dificuldade.

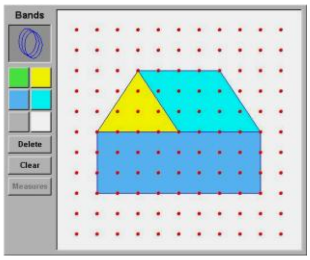


Figura 18 - Tarefa 7, reprodução da figura “Casa”

5.2. Dificuldades concetuais

Nesta categoria, estão integradas as dificuldades em lidar com os conceitos de comprimento, perímetro e área, em particular, que a Maria manifesta na resolução das várias tarefas propostas.

Geoplano material (Ficha de trabalho 1)

A Maria não apresentou dificuldades na distinção entre os conceitos de área e de perímetro. Em nenhuma das tarefas, em que estavam envolvidos estes dois conceitos, simultaneamente, houve evidência de conflito, tanto no que diz respeito ao cálculo da área, como ao do perímetro, quer no que se refere à construção ou transformação no geoplano de figuras dadas.

Em situação de sala de aula, no entanto, deparei-me com alguns alunos que calculavam a área de uma figura pensando que estavam a calcular o perímetro e vice-versa. Notei até uma certa tendência para relacionar e mesmo comparar estes conceitos, sem sequer atenderem às unidades respetivas. O exemplo a seguir foi observado em sala de aula quando o aluno em questão solicitou a minha ajuda relativamente à questão 2.1 (fig. 19):

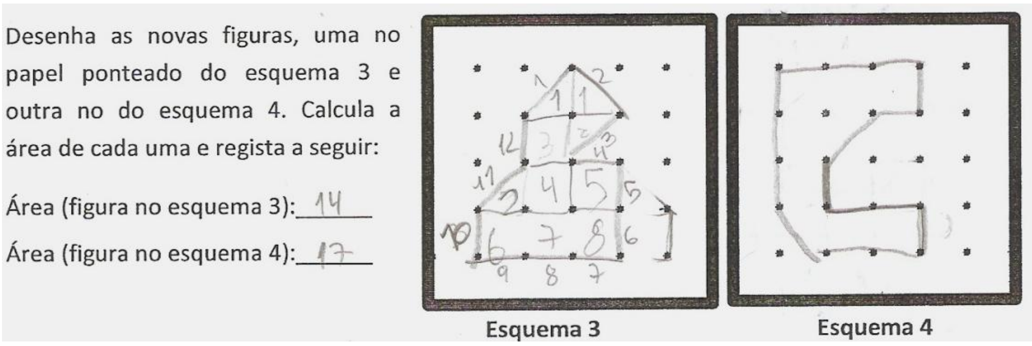


Figura 19 - Resolução do Ivo na questão 2.1

Como se pode ver no Esquema 3, o Ivo foi ‘contanto’ os segmentos que compunham a linha poligonal da figura e as várias ‘partes’ do seu interior, recompondo quadrados unitários e numerando-os sucessivamente. No entanto, quando se tratou de escolher entre os dois valores a que tinha chegado para responder ao que lhe era pedido na questão, teve dúvidas e perguntou-me. Remeti-o para o que tinha feito e o aluno acabou por usar, para a medida da área, a medida do perímetro, o mesmo acontecendo no caso da figura do Esquema 4. Repare-se que usou, não as medidas dos perímetros das figuras que desenhou, mas as dos perímetros das figuras dadas na tarefa 2 (14 e 17, respetivamente).

É ainda de salientar que alguns alunos, para determinar comprimentos, procediam à contagem do número de pins, em vez de considerarem o número de segmentos determinado por cada par de pins, apesar da unidade de comprimento estar desenhada de forma bastante explícita.

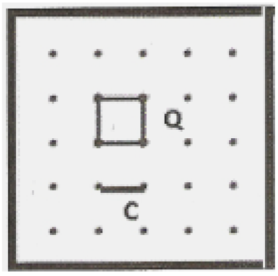


Figura 20 - Unidade de comprimento C e de área Q pré estabelecidas

Aparentemente, a imagem dos pins sobressai fazendo esquecer a unidade de comprimento C, explicitamente dada na figura (ver fig. 20), levando-os a contá-los como se estivessem a contar os segmentos que cada par define. Isto não aconteceu com a Maria que, como já referi, também não revelou confusões entre área e perímetro. Percebi esta facilidade na aluna e procurei que me dissesse alguma razão para isso. Logo a Maria me disse que, no geoplano (comparando com o papel ponteado), podia "mexer" nas figuras construídas. Explicou contornando, com os seus próprios dedos, a linha poligonal que corresponde ao perímetro pedido e delimita a figura de área a determinar.

Na tarefa 1, a Maria, após construir as figuras no geoplano, procedeu ao cálculo da área tal como era pedido no enunciado da questão (ver fig. 21). Em certas figuras, revelou alguma hesitação na identificação da unidade de área (no caso da figura A, ver pág.59). Apesar disso, a Maria acabou por interpretar corretamente as três figuras no esquema 1, e conseguiu responder acertadamente.

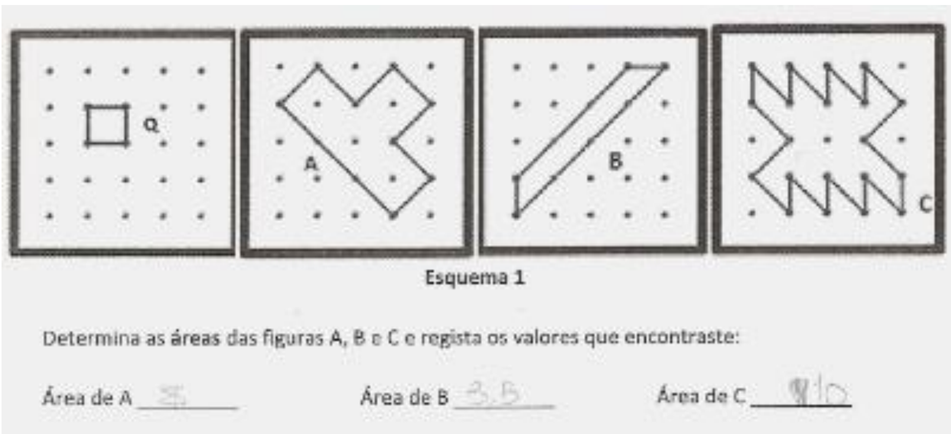


Figura 21 - Resposta da Maria à tarefa 1

Um outro aluno, o António evidenciou dificuldades na identificação da unidade de área, embora apenas se tenha apercebido do erro aquando da entrevista. Há evidências de que o aluno compreendeu que a unidade de área nem sempre pode ser considerada na sua forma unitária, havendo necessidade de reunir partes que constituem uma unidade inteira dividindo as figuras em triângulos e quadrados unitários (ver fig. 22). Contudo o aluno não conseguiu determinar, corretamente, a área da figura A. Neste caso, ao contrário do sucedido nas figuras B e C, o António, dividiu as unidades de área em triângulos, assumindo que estes seriam a nova unidade de área.

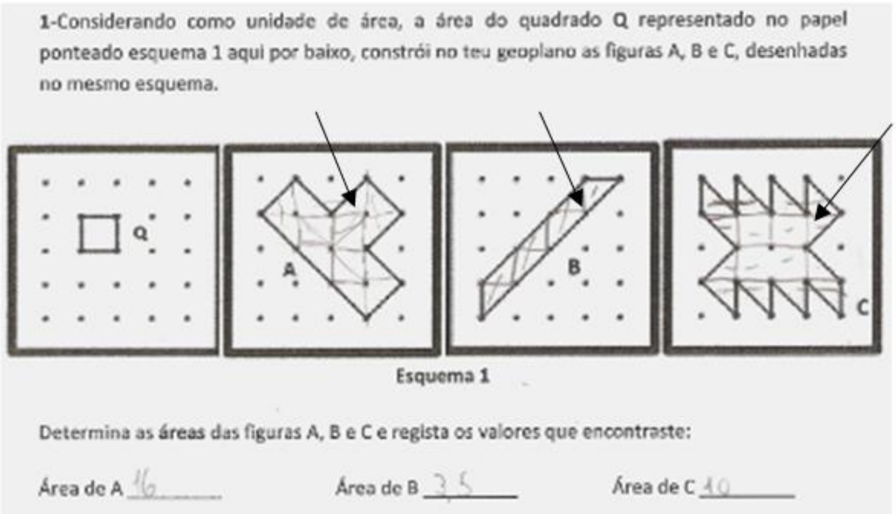


Figura 22 - Resposta do António à tarefa 1

Veja-se a propósito o seguinte excerto da entrevista, onde o António explica o modo como procedeu para determinar a área da figura A e se apercebe do erro cometido:

Professora: Então como é que determinaste a área aqui? [refere-se à figura A]
António: Eu primeiro tentei ver se havia algum quadrado para poder contar e então fiz isto aqui para marcar [aponta para o traço a lápis feito no papel ponteado, dentro da figura, que delimita os quadrados inteiros na figura]
Professora: Hum, hum
António: Depois fui tentando fazer triângulos como aqui... aqui [aponta para os triângulos delimitados no papel ponteado, no interior da figura]... E depois fui juntando os triângulos... Que deu 16
Professora: 16 quê? Triângulos ou quadrado?
António: Eh..., 16 foi ao todo...
Professora: Então conta lá...
António: [Com a ajuda de um lápis, conta 10 triângulos, e tem na figura três quadrados delimitados]... Tenho aqui 16... Como é que eu fiz?!... Eu fui dividindo estes quadrados e depois é só contar [aponta para os quadrados inteiros delimitados dentro da figura, que divide em 2 triângulos cada]

Professora: Então mas qual é a tua unidade de área?
António: Unidade de área?...
Professora: Sim...
António: Eu fui vendo aqui na figura... [já confuso]

Como pode ver-se na resposta dada, o António procedeu à contagem do número de triângulos na figura A, em vez de contar o número de quadrados. Assim, a resposta dada é “16” em vez de “8” unidades de área. Depreendo que o impacto visual gerado pelo posicionamento, na malha do geoplano, da figura A, induziu o aluno em erro, causando alguma confusão que impediu a junção das partes identificadas (triângulos) em unidades de área.

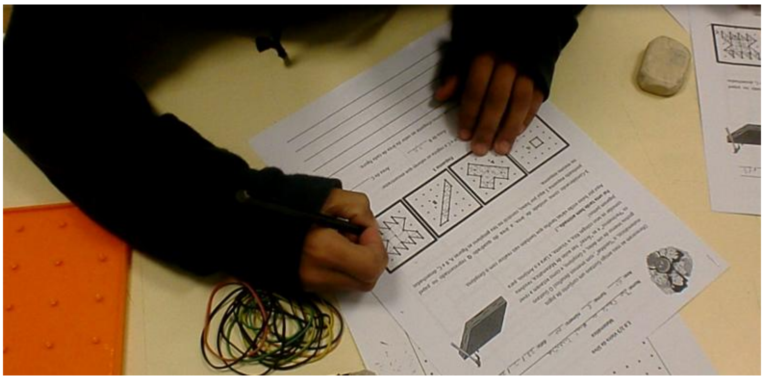


Figura 23 - Resolução da tarefa 1 pelo António

Na tarefa 2, era pedido a construção das figuras D e E no geoplano, a que se seguia o cálculo das respetivas área e perímetros (fig. 24):

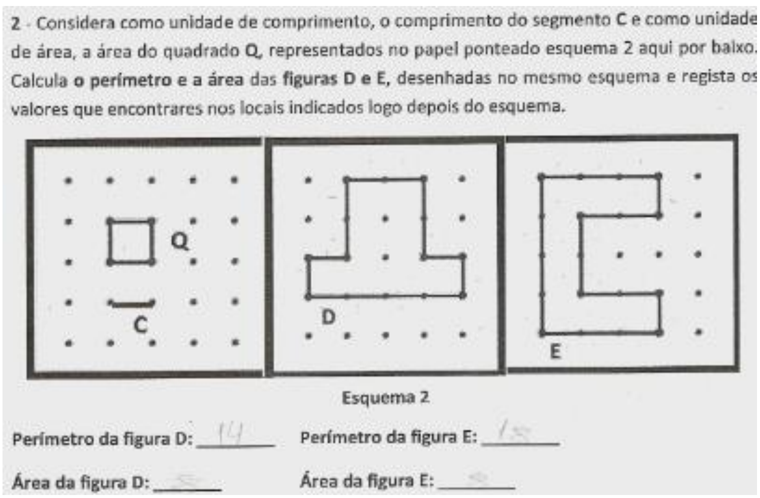


Figura 24 - Resposta da Maria à tarefa 2

Na entrevista, a propósito desta tarefa, a Maria respondeu com naturalidade às perguntas que lhe coloquei, deixando transparecer o à vontade com que sempre lidou com as questões que lhe foram propostas:

Professora: Como é que tu determinaste o perímetro, na figura D?
Maria: Comecei por aqui [aponta para um dos lados da figura e conta os segmentos de reta entre os pins] e fiz um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze, treze, catorze.
Professora: Muito bem! Catorze unidades de perímetro! Então, e a área quantas unidades de área tem?
Maria: [Aponta para a figura] Uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete, oito.
Professora: Muito bem! E na E? Foi fácil?
Maria: Foi!
Professora: E o perímetro, também?
Maria: Acena com a cabeça [sim]
Professora: Consegues perceber bem o que é o perímetro? Nunca confundiste o perímetro com a área?
Maria: Não!

Durante a realização da tarefa 2 (ver fig.24), quando questionado sobre o modo como determinou o perímetro e a área, um outro aluno, o Daniel, relatou algumas dificuldades que lhe surgiram aquando da determinação do perímetro. Veja-se, a propósito, o seguinte excerto da entrevista:

Professora: Muito bem! E aqui [na tarefa 2] foi fácil calculares o perímetro?
Daniel: Foi. Eu fui contando de uma bola à outra [refere-se aos pins do geoplano e aponta com o lápis, mostrando como procedeu], assim de um pin ao outro
Professora: Conseguiste perceber que a distância de um pin ao outro correspondia ao quê...
Daniel: Era, nesse caso é o que está aqui [aponta para a unidade de medida C representada na figura ao lado]... Mas no início eu pensava que para contar o perímetro, nós tínhamos que contar os pins, mas depois eu vi que se nós tivéssemos sempre a contar os pins ia dar como se tivesse a contar a área... [aponta para o interior da figura D]

Apesar do Daniel ter iniciado a tarefa contando os pins que delimitavam a figura, autocorrigiu-se e conseguiu compreender que o número de pins não correspondia ao valor do perímetro. O Daniel vai mais longe e afirma que o número de pins coincide com o valor da área da figura. Este facto último não corresponde à verdade. Parece-me, no entanto, que, o aluno, ao fazer esta afirmação, tinha noção do conceito de área (o aluno elucida a firmação apontando para o espaço interior da figura) proferindo-a apenas, em forma de justificação pelo erro cometido.

No que se refere à questão 2.1 (fig. 25), a construção de figuras com o mesmo perímetro de figuras dadas mas com áreas diferentes, embora a resolução não fosse imediata, a Maria deu as respostas corretas, não revelando dificuldades, mesmo quando questionada na entrevista. Foi construindo várias figuras no geoplano, sucessivamente tentando ir ao encontro das características que lhe eram pedidas.

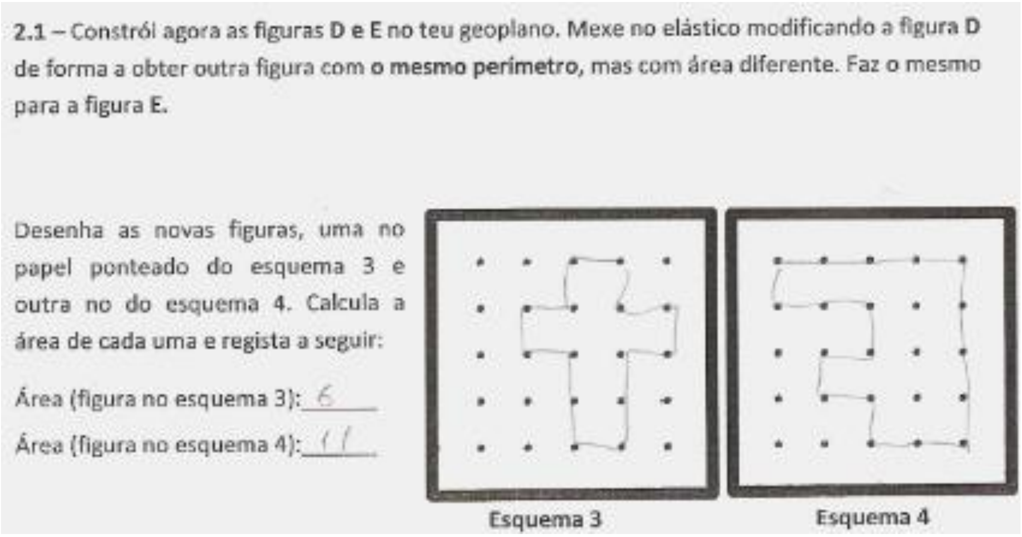


Figura 25 - Resposta, da Maria, à questão 2.1

Veja-se o diálogo que surgiu a propósito das construções que a Maria realizou:

Professora: Então e aqui pediam-te para mexeres nos elásticos e desenhares novamente as figuras, de forma a que elas ficassem com o mesmo perímetro e áreas diferente... Como é que tu fizeste?
Maria: Hum... Fui fazendo várias figuras, fui inventando e, depois, antes de contar o perímetro, tive sempre de ver a área, porque senão ia contar o perímetro para nada, porque eu tinha que fazer diferentes, mas depois consegui.
Professora: Muito bem! E só utilizaste a distância de pin a pin...
Maria: Sim, porque eu sabia que a diagonal era maior... E, pronto, fiz assim.

No cálculo da medida de perímetros, a Maria, diferentemente de outros alunos, nunca usou a diagonal do quadrado unitário, considerando-a como o comprimento do lado. Em relação a figuras em que a Maria tinha que construir, com o mesmo perímetro e áreas diferentes (e vice-versa), não teve quaisquer dificuldades, como pode ver-se na resolução da tarefa 3, questões 3.3 e 3.4 (fig. 26).

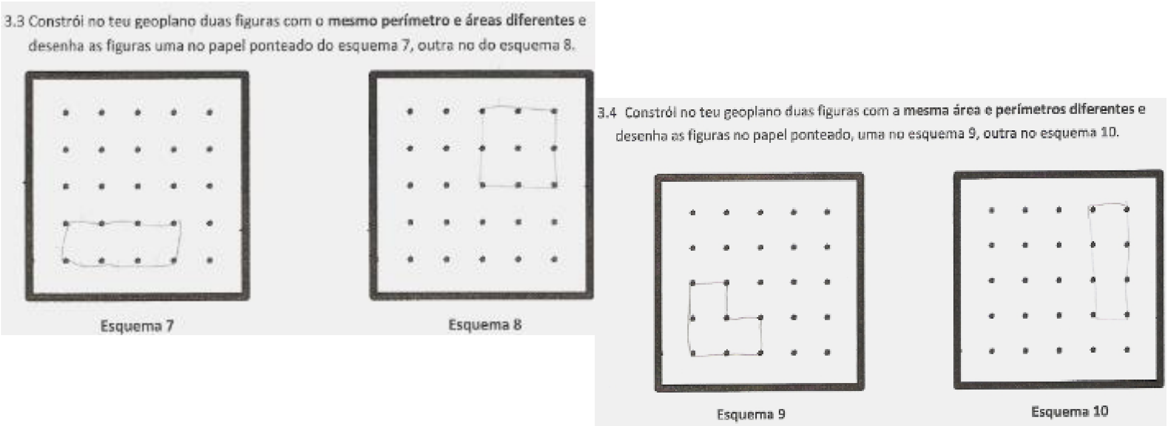


Figura 26 - Resposta, da Maria, às questões 3.3 e 3.4

No seguinte excerto da entrevista, é percetível a facilidade com que a Maria, dá resposta às questões propostas:

Professora: Muito bem! Na questão3.3... Constrói no teu geoplano duas figuras com o mesmo perímetro e áreas diferentes. E estas, como é que tu as construíste no teu geoplano?
Maria: Estas, eu acho que não cheguei a construir no geoplano, porque eu acho que era uma coisa muito fácil, se eu quisesse fazer uma maior... talvez era mais difícil... mas eu fiz logo as mais fáceis...
Professora: E como é que tu fizeste?
Maria: Vi figuras óbvias... contei o perímetro e a área e como tinham que ter áreas diferentes ... eu fiz áreas diferentes
Professora: E o perímetro é o mesmo?
Maria: É...1, 2, 3,4, 5, 6, 7, 8 [calcula o perímetro nas duas figuras desenhadas]
Professora: Muito bem! Então e estas... era diferente, agora tinhas que fazer...
Maria: ...figuras coma mesma área e perímetros diferentes... Fiz as mais óbvias!
Professora: Para ti foram as mais óbvias... Mas para alguns meninos não foram as mais óbvias...
Maria: Porque eles puseram-se a construir coisas grandes e eu fiz logo as mais pequeninas...

O mesmo não aconteceu com outros alunos da turma, como foi o caso do António. Na questão 3.2 (fig. 27), o António ao construir figuras diferentes com perímetro 8, considera diagonais, como unidades de perímetro.

3.2 Constrói, no teu geoplano, quatro figuras diferentes com **perímetro oito.** Desenha essas figuras na tua folha de papel ponteado e indica na folha a área **de cada uma.**

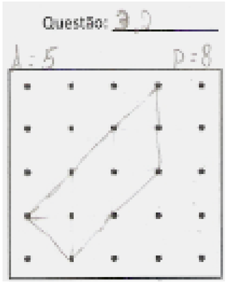


Figura 27 - Exemplo de uma das figuras construídas pelo António

Repare-se que a figura construída pelo António (ver fig. 27), apenas apresenta dois segmentos de reta coincidentes com a unidade de comprimento definida. O restante perímetro da figura resulta da união dos vários pins, sempre na diagonal. Ainda assim o António não tem este facto em consideração, contando as diagonais, como unidades de comprimento. A figura é construída e a determinação do perímetro é feita, sem atender aos diferentes comprimentos dos vários segmentos de reta, procedendo simplesmente à sua contagem.

Professora: Então e agora na 3.2 tiveste que construir quatro figuras diferentes com perímetro 8. Certo? Como é que tu fizeste isso?
António: Eu fui fazer as mais fáceis...
Professora: E todas têm perímetro 8... Determina lá o perímetro desta? [aponta para a figura 29]
António: [Após observar...] Aqui não pode ser porque há aqui uma linha diagonal [o aluno apercebe-se do erro cometido]
Professora: Onde é que está a linha?
António: É aqui esta. [aponta para um dos segmentos de reta na diagonal]
Professora: E esse segmento de reta está...
António: Está deitado... Ai... Está na diagonal!

Depreendo que o António, apesar de saber que o segmento de reta na diagonal apresenta um comprimento maior que a distância entre dois pins na horizontal ou na vertical, relegou esse facto para segundo plano, e focou-se na necessidade de fazer figuras diferentes. Ao desvalorizar o comprimento das diagonais, é-lhe mais fácil dar resposta à questão. Ainda assim, quando questionado sobre este facto, tem noção de que o comprimento não é o mesmo, recorrendo ao geoplano para o exemplificar:

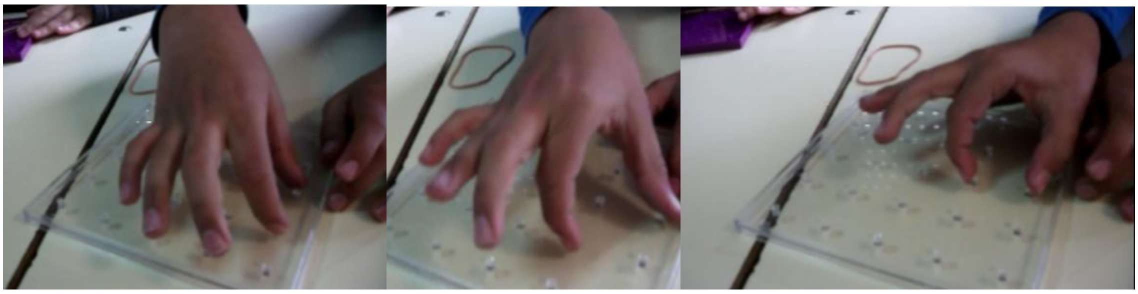


Figura 28 - Sequência em que o António explica a diferença entre os comprimentos da diagonal e do lado do quadrado unitário (Q)

Nas tarefas seguintes, todas as respostas da Maria estão corretas o que reforça a ideia de que esta aluna têm uma boa compreensão das noções de área e de perímetro. Por exemplo, na tarefa 4, onde é pedida a construção de várias figuras obedecendo a diferentes critérios geométricos, na questão 4.1, a aluna constrói o retângulo pedido de perímetro 10:

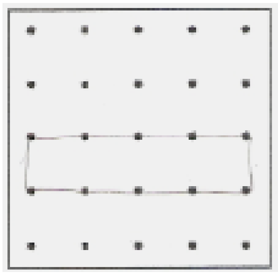


Figura 29 - Resposta da Maria à questão 4.1

Veja-se o diálogo que surgiu a propósito da construção da aluna:

Professora: Então e, agora, na questão 4.1, foi fácil fazer um retângulo de perímetro 10?
Maria: Foi.
Professora: Como é que tu fizeste?
Maria: Fiz um retângulo deitado...
Professora: Hum... Hum, na horizontal, não foi?
Maria: Sim e depois fiz 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 [vai apontando e enumerando cada um dos segmentos entre dois pins consecutivos].
Professora: Para ti, foi fácil construir o retângulo?
Maria: Sim, vi logo que era capaz de fazê-lo.

Também na questão 4.3, onde era pedida a construção de um quadrado de área 9, a aluna resolveu corretamente e com muita rapidez, "Sim, foi fácil", disse-me na entrevista sobre como encarou a questão, não evidenciando qualquer tipo de dificuldades.

Geoplano computacional (ficha de trabalho 2)

A segunda ficha de trabalho surge após o intervalo de interrupção das atividades letivas, que marcou a transição do segundo para o terceiro período, prevendo-se a sua realização com o geoplano computacional. As primeiras duas tarefas dessa ficha de trabalho tinham como objetivo familiarizar os alunos com este geoplano, bem como atualizar conceitos de perímetro e área, trabalhados no geoplano material (ficha de trabalho 1). Estas duas tarefas pediam a construção de figuras em que os conceitos de área e de perímetro estavam envolvidos, e a Maria, tal como aconteceu em tarefas similares com o geoplano material, não revelou dificuldades, significativas. Como já foi referido, a aluna não tinha em casa computador, mas familiarizou-se rapidamente com o modo de funcionamento do programa.

A tarefa 3 iniciava-se com a construção de um retângulo de "10 por 6", ilustrada por uma imagem com a figura a reproduzir no geoplano para servir de base ao conjunto de questões que se seguia (fig. 30).

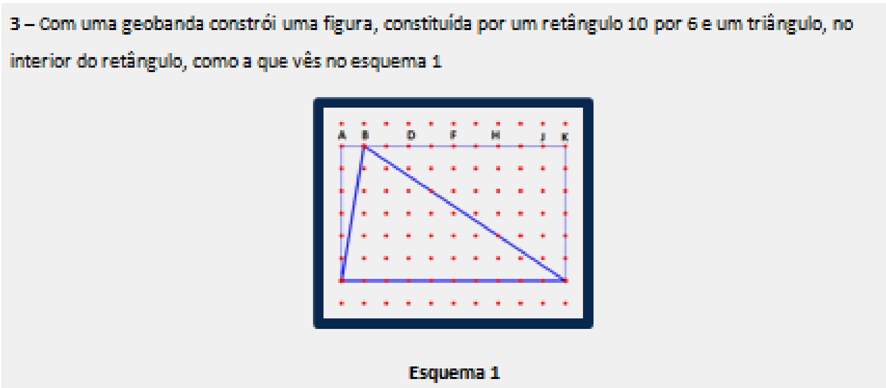


Figura 30 – Tarefa 3

Para calcular a área do retângulo "10 por 6" dado, necessária para o preenchimento da tabela da questão 3.1 (fig. 31), a aluna identificou o "10" como o comprimento e o "6" como a largura do retângulo e, prontamente, calculou a área, recorrendo à fórmula que ela própria enunciou como "comprimento vezes largura": Repare-se que a Maria calcula a área do retângulo através da fórmula — Comprimento vezes Largura — que já foi trabalhada no primeiro ciclo e, no entanto, ainda sentiu necessidade de comprovar o valor numérico obtido, através da contagem das unidades de área. A aluna revela que tem perfeita noção de área, ainda assim, precisou de ‘concretizar’ o valor obtido, como que a querer comprová-lo fisicamente – “Hum... Fiz comprimento vezes largura e depois contei.”

Ainda na tarefa 3, a Maria preencheu a tabela tal como a seguir se apresenta:

Vértice escolhido	Altura dos triângulos	Base dos triângulos	Área dos triângulos	Área do Retângulo
A	6	10	30	60
B	6	10	30	
D	6	10	30	
F	6	10	30	
H	6	10	30	
I	6	10	30	

Figura 31 - Tabela preenchida em resposta à questão 3.1

Neste preenchimento, não houve qualquer problema com a determinação da medida da base dos triângulos. No cálculo da altura do triângulo para o preenchimento da coluna respetiva, a Maria apresentou algumas dificuldades, solicitando ajuda, dizendo que já não se lembrava. Ao chegar junto da aluna, percebi que tinha que desbloquear a situação e resolvi dizer-lhe apenas o seguinte: “Não te lembras? É uma perpendicular à base do triângulo.” A Maria recordou-se, de imediato, eventualmente dos esquemas feitos há pouco tempo em aula, e começou logo a deslocar o vértice do triângulo ‘ao longo’ do lado do retângulo e preencheu com “6” a coluna em causa. Na entrevista, a aluna mostrou que o facto de o triângulo estar “inscrito” no retângulo a ajudou a ultrapassar as dificuldades que apresentou, inicialmente, na identificação da altura. Durante a explicação que lhe solicitei, ‘rodeou’ com os dedos o retângulo, como se de uma fronteira se tratasse, estratégia que a terá ajudado a calcular corretamente a medida da altura do triângulo.

Em relação ao cálculo da área para preencher a penúltima coluna, os alunos como dei indicação, deviam recorrer ao comando “measures”. No entanto, a Maria não o fez, pois, como me disse em entrevista, pensava que não podia usar essa possibilidade: “Não [usei], porque eu pensava que a professora tinha dito que não era para irmos [ao measures]...”. Assim, para o preenchimento da referida coluna, a aluna encontrou primeiro a relação entre a área do triângulo e a retângulo que veio a registar na questão seguinte — “A área do triângulo é metade da área do retângulo” — e que explicou do seguinte modo como a encontrou:

Professora: A seguir era pedido que observasses com atenção os dados que registaste na tabela, para cada um dos triângulos, qual a relação entre a sua área e a área do retângulo? Como é que fizeste isso?... Foi fácil verificares essa relação?
Maria: Ah... Sim. Acho que era sempre metade...
Professora: Tu escreveste que era sempre metade... Para ti, foi claro. Porquê?
Maria: Eu fui movendo o vértice e depois ia dar sempre o triângulo... e... o espaço que sobrava era sempre igual, portanto, via-se que era metade... Está aqui [apontava para a imagem desenhada na ficha de trabalho]
Professora: E tu conseguiste chegar a essa conclusão pelo espaço que ela ocupava, ou pelos valores numéricos?
Maria: Pelo espaço...
Professora: Tu conseguiste visualizar através deste espaço aqui da figura [aponta para o espaço restante, aquando do movimento do triângulo].
Maria: Ainda fiz outro triângulo aqui... [aponta para a figura, referindo-se à deslocação do vértice para outro ponto que não o que estava indicado pela letra maiúscula] que era mesmo para ver... Mas sem medidas, sem nada... Tentei perceber assim as coisas
Professora: Através do espaço... Muito bem... Os valores depois acabaram por confirmar, foi isso?
Maria: Sim

Como se pode ver pelo que a aluna diz, conseguiu determinar o valor da área do triângulo, apenas por comparação com o valor da área do retângulo, considerando que o facto de mudar a posição do vértice do triângulo, "inscrito" no retângulo, não alterava a sua altura e frisando que todos os triângulos, resultantes da mudança de posição do vértice, tinham a mesma área. A Maria não evidencia ter conhecimento da fórmula da área do triângulo *"*Base vezes Altura / *2"*, mas refere que quando começou a resolução tinha pensado em multiplicar a medida da base do triângulo pela sua altura. O facto de ter usado o mesmo valor da área em todos os triângulos, independentemente do vértice escolhido, parece-me que se deve à constância dos valores da altura e da base dos respetivos triângulos, de que a Maria se apropriou. Estes valores foram suficientemente fortes para alimentar a descoberta feita pela Maria que, como ela disse, confirmou materialmente quando, sobrepondo o vértice do triângulo com o vértice A do retângulo, destacou outro triângulo geometricamente igual ao dado:

Maria: Sim... [descobri] quando movi o vértice [refere-se ao triângulo "inscrito" no retângulo] para este canto do retângulo [aponta para o vértice A do retângulo] e vi que ia dar do outro lado outro triângulo ao contrário e pronto ocupava o espaço...
Professora: Que espaço?
Maria: Este aqui [aponta para o espaço em branco, no retângulo, representado na tarefa 3.1]
Professora: E esse espaço aí é o quê?
Maria: Metade.
Professora: Metade do "quê"?
Maria: Do retângulo.

Veja-se que também na tarefa 4 (fig. 32), em que a Maria tem que calcular a área de três triângulos "inscritos" em retângulos, a aluna continua a determinar a área dos triângulos, dividindo a área dos retângulos, em que estes estão "inscritos", por dois.

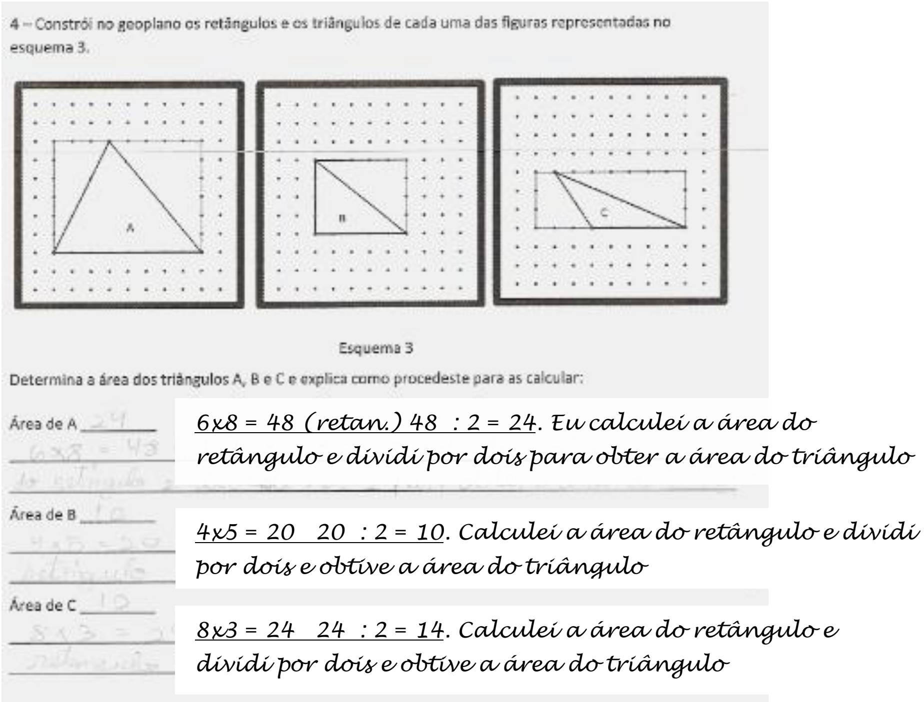


Figura 32 - Resposta da Maria à tarefa 4

Repare-se na explicação dada pela Maria, na entrevista, relativamente à resposta apresentada na tarefa 4:

Professora: Então, destas figuras [A, B, C] qual é a mais óbvia [para calculares as áreas]?
Maria: O B [refere-se ao triângulo figura B]
Professora: Porquê?
Maria: Já está encostado aqui... [aponta para a largura do retângulo, em que o triângulo está "inscrito"]
Professora: **'**Encostado' a quê?
Maria: Ao vértice... do retângulo
Professora: E consegues ver o quê?
Maria: Que são dois triângulos
Professora: Dois triângulos diferentes?
Maria: Não, iguais!
Professora: Então e no [triângulo] C?
Maria: No C... foi mais difícil!
Professora: Porquê?

Maria: Porque... quando movia este vértice aqui de cima... já não conseguia ver tão bem o espaço como vi destes [A e B] porque era obtusângulo [aponta para o espaço que 'sobra' do retângulo]... E aí tive de ir mesmo por medidas...
Professora: Pelo "measures"?
Maria: Não... Fiz... vi a altura [e] a base... [refere-se ao produto largura pelo comprimento do retângulo]

A Maria no cálculo da área do triângulo C teve dificuldade. Quando fazia coincidir o vértice superior do triângulo C com o vértice superior esquerdo do retângulo, obtinha dois outros triângulos e não apenas um geometricamente igual ao triângulo dado. Perante isto, afirma que "E aí tive mesmo de ir por medidas", explicando que calculou o produto 8x3, dividindo depois por 2. Quando confrontada com o seu procedimento, percebe-se que a aluna tinha alguma consciência que o tinha realizado não estava correto:

Professora: E a base? Como é que descobriste a medida da base? Refiro-me ao triângulo C]
Maria: A base... é 8.
Professora: Do triângulo?!
Maria: Hum... Do retângulo...
Professora: É igual?
Maria: Hum... Acho que não...
Professora: Este triângulo é diferente dos triângulos A e B?
Maria: Acho que fiz mal... Não é igual ao retângulo [quer dizer que base do triângulo não coincide com o comprimento retângulo]
Professora: Então o que é que não está bem? Se calculasses de novo, como é que tu fazias?
Maria: Hum... Não sei... Este [triângulo] não dá.

A aluna não consegue determinar a área do triângulo C, porque ele não ocupa metade do retângulo onde está "inscrito". Na ficha de trabalho explicou da mesma maneira como tinha calculado a área dos três triângulos. Na entrevista, percebe-se que a Maria tinha consciência que o caso triângulo C era diferente dos anteriores (triângulos A e B) e que o procedimento usado neste, como disse, "não dá".

Na questão 4.1 (fig15), a Maria deixa em branco o espaço onde deveria escrever uma fórmula que lhe permitisse calcular a área de qualquer triângulo mas escreveu as conclusões a que chegou da análise das figuras: "Eu descobri que a base é = ao comprimento do retângulo e a altura do triângulo é igual à largura do retângulo*"*. Veja-se o seguinte excerto da entrevista, em que a aluna explica o modo como procedeu e dá-se conta do que realmente era solicitado. Na entrevista ela reafirmou:

Professora: Então e agora aqui em te pedem para usares a informação recolhida nas questões 3.1, 3.2 e escrever uma fórmula que te permita calcular a área de qualquer triângulo... Tu não escreveste nada neste espaço... Escreveste que descobriste que o comprimento do retângulo era igual à base do triângulo e a altura do triângulo era igual à largura do retângulo. E o que é que tu descobriste mais?
Maria: Hum... Eu acho que agora percebi que era para escrever base vezes altura sobre 2... mas eu só escrevi isto...
Professora: Gostavas de ter escrito mais alguma coisa...?
Maria: Agora que já percebi... Escrevia base vezes altura a dividir por dois
Professora: O que tu querias dizer era o quê?
Maria: Que o triângulo era metade do retângulo...

A ideia de que a "área de um triângulo é metade da área de um retângulo" ficou muito enraizada na Maria. Tornou-se visualmente evidente nas construções que fez para obter triângulos que obedecessem a determinados valores de área. Por exemplo, em resposta à tarefa 5 (fig. 35), a aluna, para construir um triângulo de área doze, opta por construir um retângulo de área igual a vinte e quatro — "porque 12 é metade de 24" — e a seguir desenhou um triângulo retângulo que dividisse o retângulo ao meio, ou, nas palavras da aluna — "de maneira a que coubesse outro [triângulo] igual lá dentro" (ver figura 33).

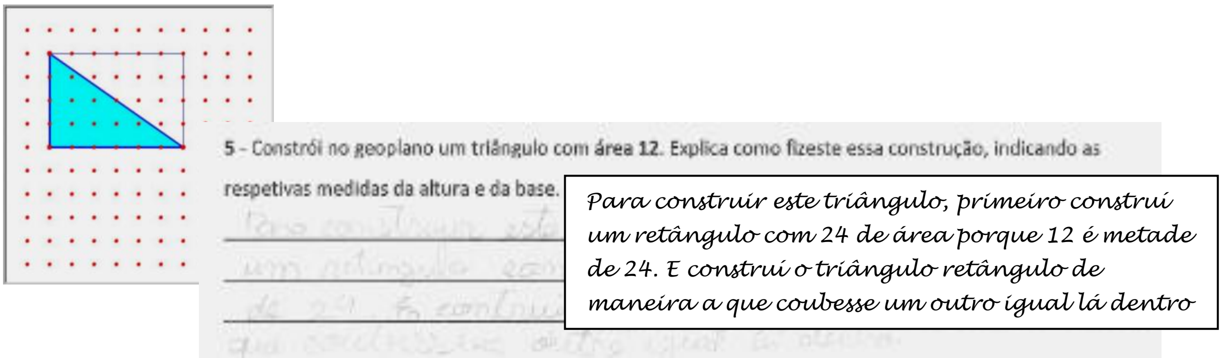


Figura 33 - Resposta da Maria à tarefa 5

Na entrevista, a Maria explicou assim o modo como procedeu:

Professora: Então e aqui na questão 5? Como é que tu construíste um triângulo com área 12?
Maria:[pausa] Hum... Primeiro fiz um retângulo e depois fiz um triângulo
Professora: Um triângulo como?
Maria: Um triângulo lá dentro, portanto, fiz... Como já sabia que o triângulo ia ser metade do retângulo, fiz com o dobro de 12... Então fiz, um retângulo com 24 de área e, depois, por dentro fiz um triângulo que ocupasse metade do retângulo e dava 12 de área.

Na tarefa 6, a Maria tem como proposta a construção de vários triângulos com área doze. Em alguns casos terá que obedecer a características geométricas dos triângulos que não permitem a utilização do procedimento adotado até ao momento. A aluna apercebe-se que é impossível "inscrever" os triângulos obtusângulos num retângulo, não conseguindo que as medidas da base e da altura do triângulo sejam iguais à medida da largura e do comprimento do retângulo (ver fig. 34). Quando a base do triângulo é um dos lados do retângulo, o procedimento adotado funciona, quando não é, a aluna não consegue construir triângulos, com o valor de área pedido. Veja-se o seguinte diálogo, em que a Maria se dá conta da impossibilidade da aplicação da estratégia usada até então:

Professora: Ok. "Constrói no teu geoplano os triângulos indicados nas alíneas seguintes, todos com área 12" [reli o enunciado] E, agora, como é que tu fizeste todos [os triângulos] com área 12?
Maria: Foi... inscrevê-los num retângulo.
Professora: Mas a base deste triângulo não é igual à base do retângulo [aponto para um dos triângulos construídos pela aluna]. E, então, como é que fizeste?
Maria: Hum... Não ficou com 12 de área.
Professora: O que é que falhou aqui?
Maria: Eu tinha que fazer coincidir a base [do triângulo] com o comprimento [do retângulo]... e não fiz.
Professora: E estes [aponto para os triângulos construídos nas alíneas b) e c), fig. 25 e 26]?
Maria: A base é a mesma
Professora: Ou seja, só no triângulo obtusângulo é que tu não [conseguiste] fazer coincidir a base com o comprimento do retângulo. Porquê?
Maria: Porque, depois, acho que não dava para chegar mais para trás... ia sair fora do retângulo.
Professora: E então optaste por deixar assim... Mesmo achando que a área não era 12?
Maria: Pois...

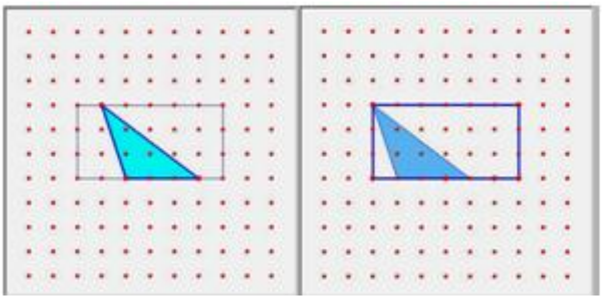


Figura 34 - Resposta da Maria à questão 6 a) (triângulos obtusângulos escalenos)

Na resposta às questões 6b) e 6c) (figs. 35 e 36), a Maria conseguiu inscrever os triângulos acutângulos e retângulo num retângulo de área vinte e quatro, fazendo uso do conhecimento da relação entre a área do triângulo e da área do retângulo, considerando doze unidades de área

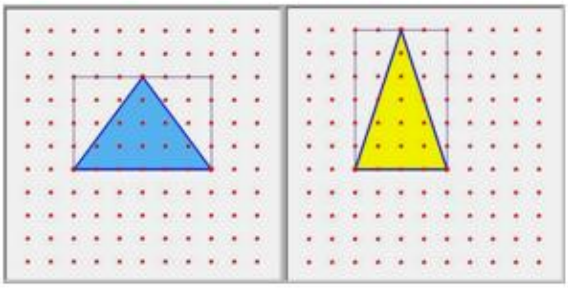


Figura 35 - Resposta da Maria à questão 6b, triângulos acutângulos isósceles

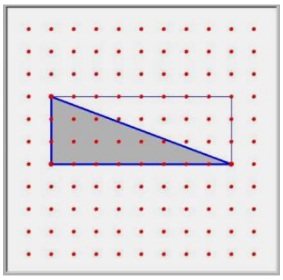
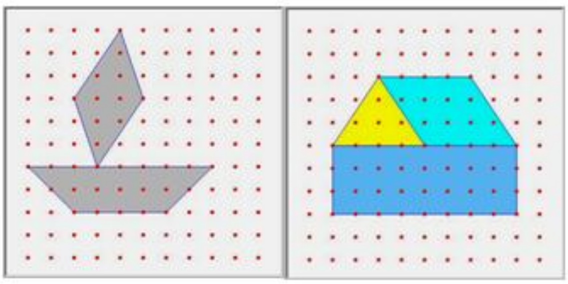


Figura 36 - Resposta dada à questão 6c, triângulo retângulo

Na última tarefa (tarefa 7), pedia-se que fossem reproduzidas, no geoplano computacional, as figuras "Barco" e "Casa", que a Maria reproduziu sem manifestar dificuldades significativas, que a impedissem uma resolução correta da tarefa (fig. 37).



(Barco) (Casa)

Figura 37 - Figuras reproduzidas, pela Maria, na tarefa 7

Para determinar o cálculo da área do "Barco" na ficha de trabalho, a Maria divide a "vela" em dois triângulos. Após esta divisão, identificou a medida da base e da altura do triângulo que multiplicou e, depois, dividiu por dois. Ao explicar, na entrevista, este cálculo, a aluna diz ter usado a "fórmula" nas figuras geométricas em que não conseguia contar as unidades de área com recurso à figura dada:

Maria: Hum... A área daqui... Só contei os quadrados [refere-se ao trapézio do barco]
Professora: Só contaste os quadradinhos, não foi? Então e em cima [vela do barco] não contaste os quadrados, porquê?
Maria: Não dava... Porque tinha linhas na diagonal...
Professora: Então, não dava e tu decidiste ir fazer o quê?
Maria: Hum...
Professora: Aqui [na ficha] dizes que foste utilizar a "fórmula". Como é que utilizaste a fórmula?
Maria: Afinal fiz bem...! [Para encontrar a altura do triângulo] movi o vértice [superior], fiz três vezes três [e] deu nove [a base vezes a altura]. Mas não fiz cálculos nenhuns, fiz tudo de cabeça. Dava 4,5 [base vezes altura a dividir por dois] e, depois, fiz vezes dois que eram os dois triângulos e, depois, somei com o [valor da área] do trapézio [aponta para o casco barco].
Professora: E deu área...?
Maria: Área 21.

A Maria socorreu-se do facto de poder mover o vértice do triângulo da vela do barco, e posicioná-lo de modo a obter um triângulo retângulo, tornando-se mais fácil visualizar a medida do comprimento da sua altura. A aluna introduz uma alteração momentânea num dos triângulos da vela do barco, que lhe permite transformá-lo sem alterar os valores das medidas da base e da altura, voltando, depois, à forma original, bastando para isso apenas um "clique" informático. Repare-se que nesta tarefa, com o geoplano computacional, a Maria se "desprende" do retângulo — até então, com uma presença muito vincada no cálculo de áreas de triângulos e na construção deste tipo de polígonos com valores de área dados — passando a usar como ela disse "a fórmula base x altura / 2" (ver fig. 38). Contudo, parece-me que a Maria continua a visualizar um retângulo imaginário, que lhe facilita a determinação do valor da altura do triângulo e, consequentemente, da área do triângulo. Isto, pelo facto de continuar a sentir necessidade de mover o vértice do triângulo, oposto à base, de forma a que o lado do triângulo coincida com a largura de um retângulo imaginário que 'enquadra' o triângulo, criando-lhe limites.

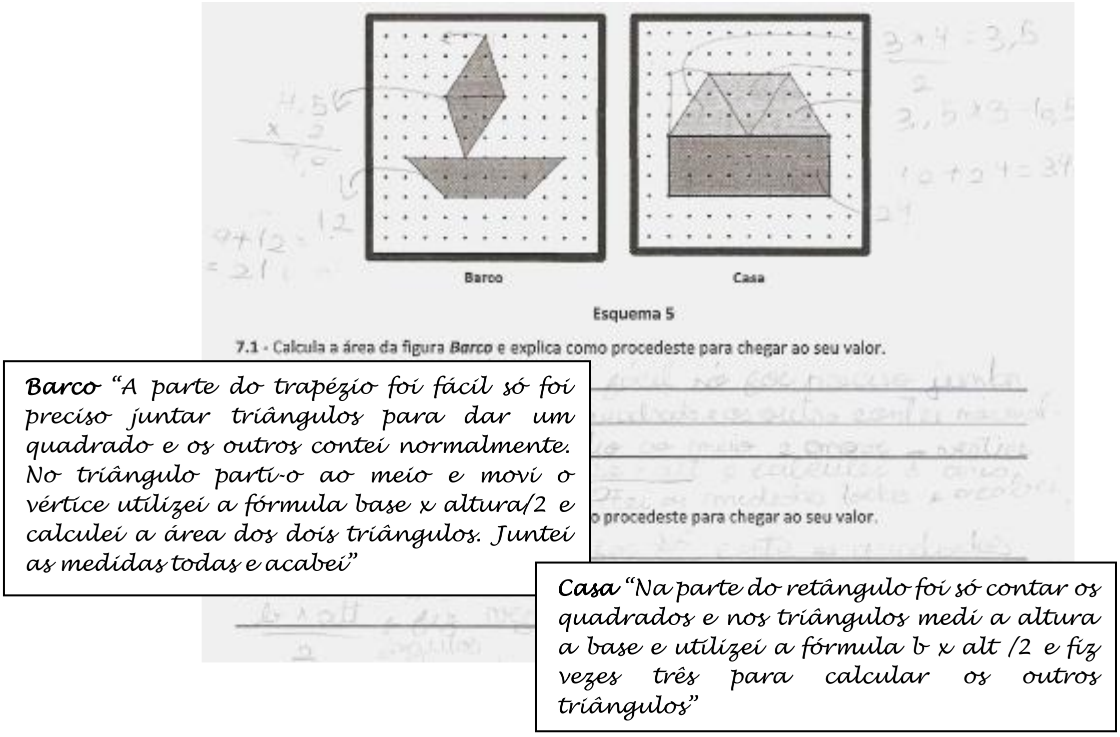


Figura 38 - Resposta dada à tarefa 7

Para o cálculo da área da "Casa", a Maria recorreu à divisão da figura em polígonos seus conhecidos, decompondo o "telhado" em três triângulos geometricamente iguais, calculando a área de cada um recorrendo à fórmula e multiplicando o valor obtido por três, (ver fig. 38). A área do retângulo, que compõe o resto da figura "Casa", é feita através da contagem das unidades de área. Para finalizar, a Maria adiciona os valores da área dos três triângulos e do retângulo, obtendo o valor da área total da figura "Casa". No seguinte excerto da entrevista, a Maria explica como procedeu:

Professora: E a área da casa?
Maria: Hum... Também fiz a mesma coisa... Utilizei a fórmula para os triângulos [aponta para o telhado da casa] aqui [aponta para o retângulo que faz parte "Casa"] fiz a mesma coisa [contar as quadrículas], mas não foi preciso juntar triângulos, foi só contar. E depois aqui [aponta para o telhado da casa] só fiz um [triângulo] e depois fiz vezes três [a aluna decompôs o telhado em três triângulos]
Professora: Por que conseguiste descobrir aí três triângulos iguais. Foi isso?
Maria: Foi!
Professora: Boa! E como é que tu calculaste a área? Descobriste a base e a altura?
Maria: Sim... Foi só mover [refere-se ao vértice superior do triângulo]
Professora: Quanto é que foi a base?
Maria: 4.
Professora: E a altura?
Maria: ... [pausa]
Professora: Quando tu dizes" mover", tu "moves" o quê?

Maria: O vértice!
Professora: Para quê?
Maria: Hum... Não sei explicar... Mas...
Professora: Mas moveste o vértice para quê?
Maria: Para determinar a altura.
Professora: E como é que tu moves o vértice? Explica lá?
Maria: Fiz assim para aqui para coincidir com isto [refere-se ao lado do triângulo, agora, facilmente identificado]
[Com a ajuda do lápis a aluna simulou um movimento que tem por objetivo mover o vértice de modo a tornar o triângulo, num triângulo retângulo, em que a altura é igual ao lado do triângulo]
Professora: Fizeste como se o triângulo estivesse dentro do retângulo, não foi?
Maria: Sim!
Professora: E depois identificaste os três triângulos iguais e multiplicaste por três...
Maria: Sim!
Professora: Muito bem!

5.3. Dificuldades argumentativas

São abrangidas, nesta categoria, as dificuldades de explicação e justificação que a Maria apresenta, que se revelaram, sobretudo a nível escrito, na realização das fichas de trabalho e na exposição da forma, como resolveu as questões, especialmente no que se refere às questões de desenvolvimento da ficha de trabalho 1.

Geoplano material (Ficha de trabalho 1)

As questões em que era esperado que a Maria clarificasse por escrito os procedimentos adotados não foram muito elaboradas ou desenvolvidas. As respostas dadas apresentavam-se, sobretudo, em forma de texto telegráfico e pouco encadeado, aparentemente, valorizando pouco o enunciado que apelava à explicação “por palavras tuas” ou à quantidade de linhas que podiam sugerir a escrita de um texto mais extenso (fig. 39)

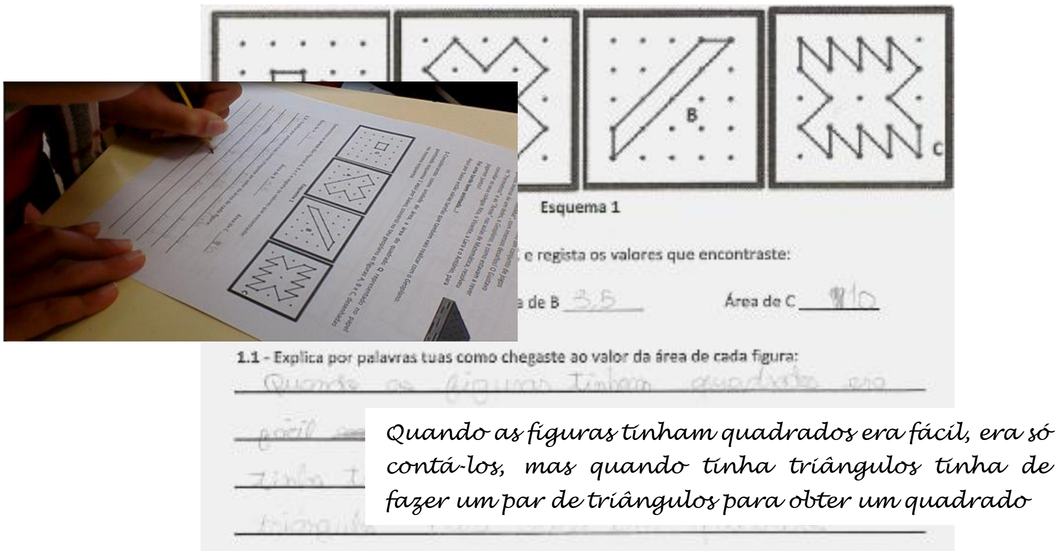


Figura 39 - Resposta da Maria à questão 1.1

Na resposta à questão 1.1, a Maria desenvolveu muito pouco a explicação, aparentemente sem sentir necessidade de explicitar o procedimento adotado para o cálculo da área de cada uma das figuras (A, B, C). Escreve um texto genérico que descreve a estratégia adotada para calcular a área de todas as figuras, não havendo evidência de uma preocupação em clarificar o modo como procedeu para calcular a área de cada uma das figuras. Oralmente, a aluna apresenta outra desenvoltura. No decorrer da entrevista, de certo modo, o seu raciocínio é guiado por mim, para que ela possa mostrar como procedeu ao realizar determinada tarefa. Durante o questionamento, a Maria responde tentando esclarecer o porquê de determinado procedimento:

Professora: Então e depois como é que determinaste a área? Foi fácil, para ti, perceber o que era a área?
Maria: Eh... Sim, eu fui juntando triângulos
Professora: Triângulos porquê? De onde é que apareceram os triângulos?
Maria: Eh... Da figura, como não eram quadrados... Eu tinha que juntar dois triângulos para fazer um quadrado.
Professora: Como é que fizeste na figura A? Explica-me lá...
Maria: Na A... eh... Primeiro eu juntei... Bem eu contei quadrados assim grandes [aponta para a figura] mas ficou mal...
Professora: Por que é que não podias contar quadrados grandes?
Maria: Porque não eram iguais a este [aponta para a unidade de medida de área pré estabelecida]
Professora: Hum, hum E isso era a nossa unidade de quê?
Maria: A nossa unidade de área!
Professora: E tu tens que a respeitar... Muito bem! E depois foste tentar o quê?
Maria: Eh... Fui desmanchando estes quadrados grandes em triângulos e eh... Juntava dois triângulos e dava um quadrado destes [aponta para a unidade de área].

Na explicação pedida na questão 4.8, a Maria, escreve, apenas uma frase: “ Não consegui construir”. Parece-me que a Maria se satisfez com uma simples afirmação em que apenas manifesta a incapacidade que sentiu na construção de determinadas figuras, não sentindo necessidade de clarificar, por escrito, a impossibilidade de construção das figuras. No que se refere ao discurso oral, proferido durante a entrevista, a aluna consegue outra desenvoltura e outra completude, indo mais longe na enunciação e clarificação dos procedimentos adotados na resolução das várias questões. No decorrer da entrevista, a aluna, auxiliando-se das figuras geométricas que foi construindo, ao longo da tarefa, argumenta e justifica o porquê da impossibilidade de construção de algumas figuras, alínea por alínea, correspondendo às perguntas que lhe vou fazendo. Repare-se, por exemplo, como a Maria justifica, oralmente, a impossibilidade da construção do triângulo equilátero, questão 4.4 da tarefa 4:

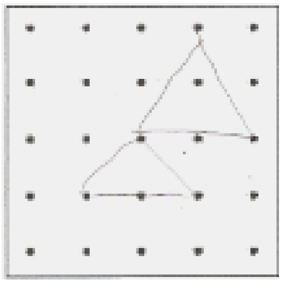


Figura 40 - Figuras intermédias em resposta à questão 4.4

Professora: E a 4.4 um triângulo equilátero. Onde é que está...?
Maria: Não fiz.
Professora: Porquê?
Maria: Porque eu sabia que a diagonal era maior... E não dava... Este lado fica sempre mais pequeno [aponta para um dos triângulos desenhados, que não considerou como resposta à questão]

Apesar do discurso oral não ser muito organizado, chega-nos de forma mais explícita, aquando do questionamento, a que a aluna recorreu às figuras construídas, durante o processo de resposta às diferentes questões. Parece-me que estas figuras tiveram uma função apelativa na construção do discurso oral, compensando algumas dificuldades manifestadas na elaboração de um texto escrito.

Ainda no que se refere à tarefa 4, quando é solicitada a construção de um quadrado de área dez, a aluna desenha uma figura para mostrar que é impossível construir esse quadrado:

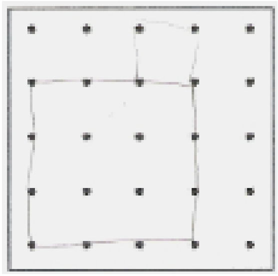


Figura 41 - Figura intermédia em resposta à questão 4.7

Em entrevista, a Maria explica como procedeu, recorrendo à imagem que construiu para justificar a inexistência do referido quadrado:

Professora: Muito bem! Na 4.10... Um quadrado de área 10
Maria: É impossível!
Professora: Por que é que é impossível?
Maria: Porque se fizéssemos um de 9 e acrescentássemos, aqui, mais um [refere-se a um quadrado, correspondente a uma unidade de área], não ia ficar um quadrado [aponta para um quadrado de área 9 representado no papel ponteado]
Professora: Então, mas não é possível arranjar outra estratégia para fazer o quadrado 10?
Maria: Hum...Hum... .... Acho que não.

Geoplano computacional (Ficha de trabalho 2)

Nesta segunda ficha em relação às questões em que era exigido a produção de um texto mais elaborado, a Maria, nas respostas que deu, explicou o modo como procedeu, de forma mais completa e organizada. Depreendo que as sucessivas chamadas de atenção, aquando da realização da primeira ficha de trabalho, em que apelei a uma explicação mais pormenorizada nas respostas escritas, possa ter tido influência nesta alteração de postura em relação a este tipo de questões.

Em particular na tarefa 4, a aluna expõe, por escrito, a estratégia adotada para a resolução da tarefa, de forma mais organizada. Oralmente, a Maria dá uma resposta um pouco mais confusa, havendo necessidade de orientar o seu discurso, de modo a nortear o encadeamento dos seus argumentos. Como se pode ver na figura 42, apesar de a Maria cometer erros no cálculo da área dos triângulos, tem a preocupação de integrar os cálculos efetuados com texto escrito como forma de justificação, de modo a tornar claro o procedimento adotado.

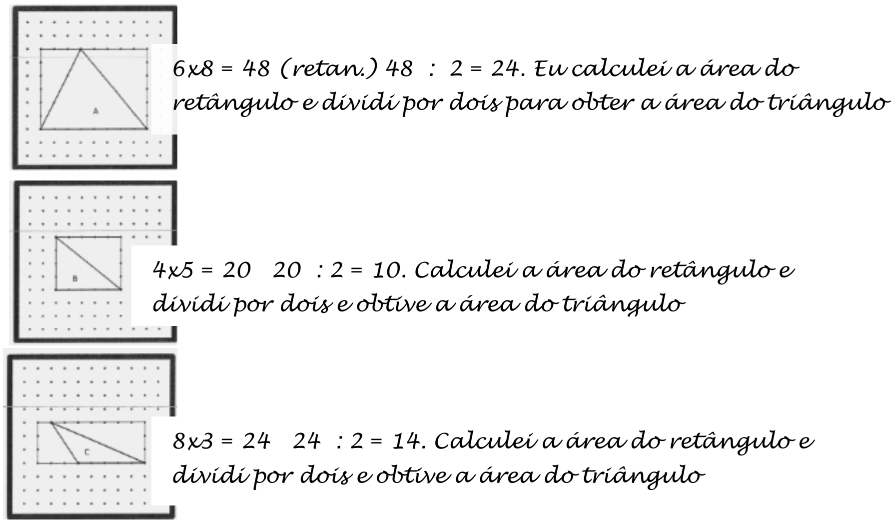


Figura 42 - Resposta da Maria à Tarefa 4

A propósito, veja-se o seguinte excerto em resposta à tarefa 4, onde é dito pela Maria, em entrevista, uma resposta pouco organizada, comparativamente com o texto que escreveu em resposta à mesma tarefa:

Professora: Então, destas figuras [A, B, C] qual é a mais óbvia [para calculares as áreas]?
Maria: O B [refere-se ao triângulo figura B]
Professora: Porquê?
Maria: Já está encostado aqui... [aponta para a largura do retângulo, em que o triângulo está "inscrito"]
Professora: **'**Encostado' a quê?
Maria: Ao vértice... do retângulo
Professora: E consegues ver o quê?
Maria: Que são dois triângulos
Professora: Dois triângulos diferentes?
Maria: Não, iguais!
Professora: Então e no [triângulo] C?
Maria: No C... foi mais difícil!
Professora: Porquê?
Maria: Porque... quando movia este vértice aqui de cima... já não conseguia ver tão bem o espaço como vi destes [A e B] porque era obtusângulo [aponta para o espaço que 'sobra' do retângulo]... E aí tive de ir mesmo por medidas...
Professora: Pelo "measures"?
Maria: Não... Fiz... vi a altura [e] a base... [refere-se ao produto largura pelo comprimento do retângulo]

A tarefa 5, em que era pedida a construção de um triângulo com área 12, levou a Maria a construir um triângulo recorrendo à sua ‘inscrição’ num retângulo de área 24:

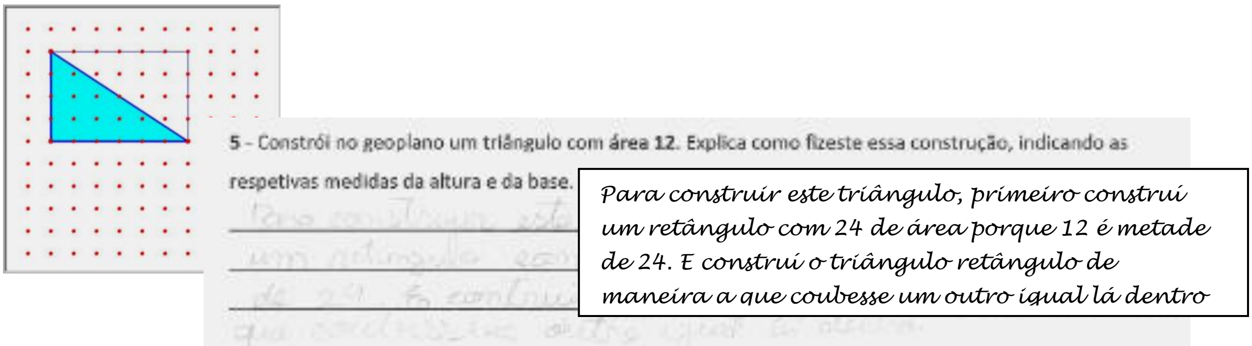


Figura 43 - Resposta dada pela Maria à questão 5

Na resposta dada, a Maria explicita de forma clara e objetiva, usando terminologia matemática adequada, o modo como sequenciou a construção do triângulo de área 12 e a sua explicação permite até, a quem lê, criar uma imagem mental próxima da imagem que construiu. O que escreveu mostra que a aluna se baseou no trabalho desenvolvido nas questões anteriores (3.1 e 3.2), onde estabeleceu a relação entre a área do retângulo e a área do triângulo (a área do triângulo é metade da área do retângulo). A argumentação usada no discurso oral vem complementar o discurso escrito, enriquecendo-o, mostrando melhor o modo como a Maria construiu o triângulo de área 12. Veja-se o seguinte excerto da entrevista:

Professora: Então e aqui na questão 5? Como é que tu construíste um triângulo com área 12?
Maria: ... [pausa] Hum... Primeiro fiz um retângulo e depois fiz um triângulo
Professora: Um triângulo como?
Maria: Um triângulo lá dentro, portanto fiz... Como já sabia que o triângulo ia ser metade do retângulo, fiz com o dobro de 12... Então, fiz um retângulo com 24 de área e, depois, por dentro fiz um triângulo que ocupasse metade do retângulo e dava 12 de área.

Na tarefa 7, a Maria era solicitada a calcular a área das figuras “Barco” e “Casa” (ver fig. 44) e a explicar o modo como procedeu para chegar ao seu valor. Na explicação pedida, a Maria, embora não apresente os cálculos parcelares (escritos junto às figuras), dá-nos uma explicitação da estratégia, referindo os procedimentos adotados, suficientemente clara e completa.

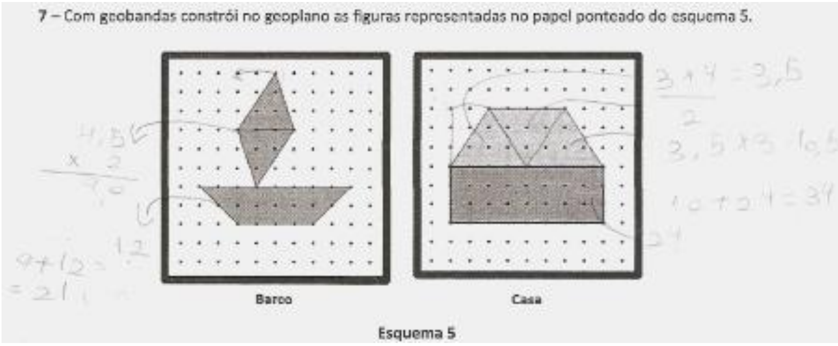


Figura 44 - Tarefa 7 (“Barco” e “Casa”)

Para explicitar o modo como calculou a área da figura casa, a Maria começa por descrever o procedimento adotado para o cálculo da área do trapézio (casco do barco) – “A parte do trapézio foi fácil só foi preciso juntar triângulos para dar um quadrado e os outros contei normalmente” – seguindo-se a explicação do modo como calculou a área da vela do barco – “No triângulo parti-o ao meio e movi o vértice. Utilizei a fórmula base x altura /2 e calculei a área dos dois triângulos” – para finalizar explica o modo como procedeu para o cálculo total da área da figura – “...juntei as medidas todas e acabei”. Também na figura “Casa”, a aluna explicita como procedeu, descrevendo o processo que a levou à obtenção do valor total da área da figura – “Na parte do retângulo foi só contar os quadrados e nos triângulos medi a altura e a base e utilizei a fórmula base x altura / 2 e fiz vezes três para calcular os outros triângulos”.

Durante a entrevista, e apesar de alguma resistência inicial a uma explicação mais detalhada do modo como procedeu, a aluna vai mais longe, integrando no discurso oral os cálculos que tinha feito. Repare-se como a Maria menciona pormenores no que diz respeito ao procedimento adotado, no que se refere aos cálculos parcelares que realizou junto das figuras, integrando-os no seu discurso – “Afinal fiz bem...! [Para encontrar a altura do triângulo] movi o vértice [superior], fiz três vezes três [e] deu nove [a base vezes a altura]. Mas não fiz cálculos nenhuns, fiz tudo de cabeça. Dava 4,5 [base vezes altura a dividir por dois] e, depois, fiz vezes dois que eram os dois triângulos e, depois, somei com o [valor da área] do trapézio [aponta para o casco barco].” O discurso oral da aluna é mais pormenorizado, complementando e enriquecendo o discurso escrito.

Estratégias utilizadas na resolução de tarefas

Após análise das dificuldades sentidas, pela Maria, na resolução das várias tarefas no geoplano material e computacional, debruçar-me-ei sobre os dados recolhidos relativamente às estratégias que a aluna usou. Para análise das várias estratégias utilizadas, foram definidas as seguintes categorias: contagem; tentativa e erro; utilização de fórmulas; e, decomposição de figuras.

5.4. Tentativa e erro

A tentativa e erro é uma estratégia que a Maria usou, sobretudo, na construção de figuras com valores de perímetro e de área previamente dados. Estas tarefas não são de resolução imediata, sendo de algum modo natural que os alunos vão construindo figuras sucessivamente e verificando se correspondem ao pedido.

Geoplano material (Ficha de trabalho 1)

Na resposta à questão 2.1, onde é pedida à construção de figuras, tendo por base uma outra figura dada, mantendo os mesmos valores de perímetro e variando a área (ver fig. 45), é bastante explícita a estratégia de tentativa e erro usada, pela Maria, para a resolução da questão.

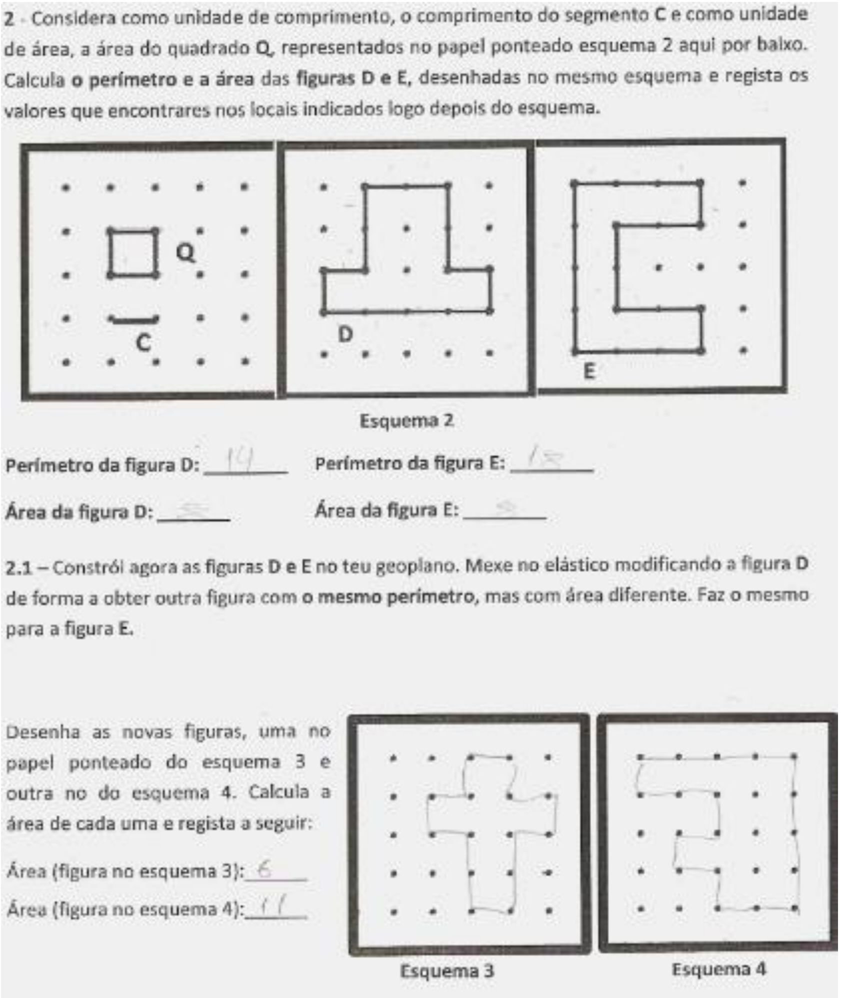


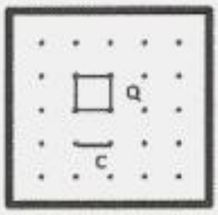
Figura 45 - Resposta da Maria à questão 2.1

Na entrevista, percebe-se que a aluna recorreu a construções intermédias — " ...fui fazendo várias figuras..." — até conseguir construir as figuras pretendidas

Professora: Então e aqui, pediam-te para mexeres nos elásticos e desenhares novamente as figuras para que elas ficassem com o mesmo perímetro e áreas diferente... Como é que tu fizeste?
Maria: Hum... Fui fazendo várias figuras, fui inventando e, depois, antes de contar o perímetro tive sempre de ver a área, porque se não ia contar o perímetro para nada, porque eu tinha que fazer diferentes, mas depois consegui.
Professora: Muito bem!

Veja-se, agora, o exemplo da tarefa 3 (fig.46) em que a Maria tem de construir vários polígonos no geoplano e registá-las no papel ponteado para cada uma das questões (3.1; 3.2; 3.3).

3 - Considera como unidade de comprimento, o comprimento do segmento **C** e como unidade de área, a área do quadrado **Q**, representados no papel ponteado do esquema aqui ao lado e realiza as seguintes tarefas:



3.1 Constrói, no teu geoplano, quatro figuras diferentes com **área 6**. Desenha essas figuras na tua folha de papel ponteado e indica na folha o **perímetro de cada uma**.

3.2 Constrói, no teu geoplano, quatro figuras diferentes com **perímetro oito.** Desenha essas figuras na tua folha de papel ponteado e indica na folha a área **de cada uma.**

3.3 Constrói no teu geoplano duas figuras com o **mesmo perímetro e áreas diferentes** e desenha as figuras uma no papel ponteado do esquema 7, outra no do esquema 8.

Figura 46 - Enunciado da tarefa 3

A Maria construiu os polígonos pedidos, por tentativa e erro, validando por contagem as suas construções. Isto é visível no excerto da entrevista que apresento a seguir, em que a Maria explica este procedimento:

Professora: Então e aqui o que é que tínhamos que fazer... Na 3.1, pediam-nos para construir...
Maria: ... construir quatro figuras de área 6
Professora: E perímetro diferente, não é? Agora vou pôr aqui a tua folhinha e as quatro figuras que têm área 6... Para ti foi muito fácil construíres estas figuras? Não apagaste?... Fizeste primeiro no geoplano?... Como é que tu fizeste?
Maria: Sim, fiz sempre tudo primeiro no geoplano e só depois, no fim, é que passei para aqui.
Professora: Na 3.2... Constrói no teu geoplano quatro figuras diferentes com perímetro 8. Aqui como é que tu determinaste o perímetro? [aponto para as figuras correspondentes à resposta dada na questão 3.]
Maria: Hum... fui contando o perímetro... e tinha que fazer figuras com área... Acho que era diferente...
Professora: Sim. As figuras tinham que ser diferentes e ter perímetro 8.
Maria: Sim eu construí várias figuras diferentes e fui vendo as que davam... mas algumas tinham a mesma área. [aponta para as figuras desenhadas]

A aluna não registou nenhuma das figuras intermédias que refere na entrevista, construídas no geoplano, com a ajuda dos elásticos, e que foi alterando assim que se dava conta de que não obedeciam às características pedidas, registando no papel ponteado, apenas as figuras que validava como corretas.

Esta estratégia – tentativa e erro – também foi utilizada para dar resposta à tarefa 4 em que, também, se pedia a construção de polígonos, obedecendo a determinadas características geométricas, mais especificamente nas questões 4.4 e 4.7, onde se pedia, respetivamente, a construção de um triângulo equilátero e de um quadrado de área 10.

Para responder à questão 4.4, a Maria desenhou duas figuras auxiliares, no caso dois triângulos (ver fig.47), na tentativa de encontrar um equilátero.

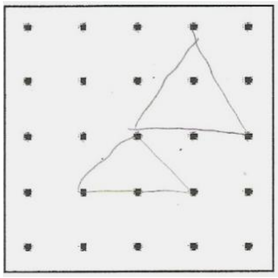


Figura 47 - Figuras auxiliares construídas pela Maria (questão 4.4)

Depreendo que estas figuras resultaram de várias ensaios que conduziram a aluna a concluir a impossibilidade da construção de um triângulo equilátero no geoplano de malha quadriculada com que trabalhava. No seguinte excerto da entrevista percebe-se que as tentativas que a Maria realizou no papel ponteado ajudaram à tomada de consciência e à compreensão da impossibilidade da construção pedida:

Professora: E a 4.4, um triângulo equilátero. Onde é que está...?
Maria: Não fiz.
Professora: Porquê?
Maria: Porque eu sabia que a diagonal era maior... E não dava... Este lado fica sempre mais pequeno [aponta para um dos triângulos que tinha desenhado [ver fig. 47], que não considerou como resposta à questão]... E pronto.

Relativamente à construção de um quadrado de área 10, a Maria apercebe-se da impossibilidade desta construção, embora não o justifique na ficha de trabalho. Também nesta questão desenhou figuras auxiliares que a terão ajudado a tomar consciência desse impedimento:

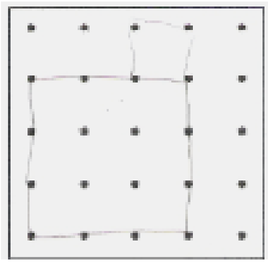


Figura 48 - Figura auxiliar construída pela Maria (questão 4.7)

Procurei compreender, mais uma vez, os ensaios que a aluna fez e qual a sua importância na tomada de consciência do impedimento da construção de um quadrado de área 10, veja-se o seguinte excerto da entrevista, em que a Maria explica como procedeu:

Professora: Muito bem! Na 4.7... Um quadrado de área 10.
Maria: É impossível!
Professora: Porque é que é impossível?
Maria: Porque se fizéssemos um de [área] 9 e acrescentássemos aqui mais um [refere-se a uma unidade de área], não ia ficar um quadrado [aponta para a figura que desenhou no papel ponteado]
Professora: Então mas não é possível arranjar outra estratégia para fazer o quadrado [de área] 10?
Maria: Hum...Hum... .... Acho que não.
Professora: Muito bem!

Percebe-se que a Maria consegue construir um quadrado de área 9, sobrando-lhe, no entanto, uma unidade que, pelos ensaios que fez, se consciencializou da impossibilidade desta construção.

Geoplano computacional (Ficha de trabalho 2)

Na resolução das tarefas 1 e 2, no geoplano computacional, a Maria recorre, igualmente, ao uso da estratégia tentativa e erro (fig.49), ao construir as figuras segundo os valores de perímetro e área indicados. Usou esta estratégia de modo a conseguir construir polígonos que obedecessem aos critérios definidos.

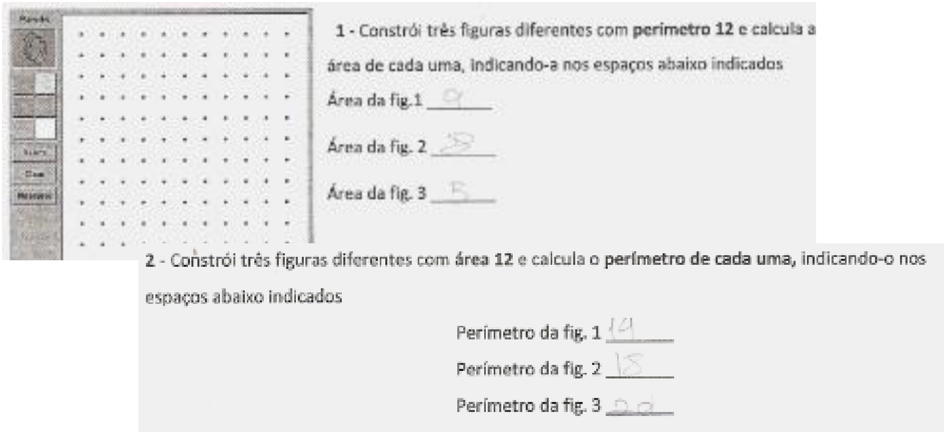


Figura 49 - Enunciado das tarefas 1 e 2

A aluna resolveu, do mesmo modo, tarefas idênticas que já tinha feito no geoplano material. O tipo de tarefas foi determinante na estratégia utilizada. Na realização das duas primeiras tinha-se por objetivo a familiarização dos alunos com o geoplano computacional, bem como atualizar conceitos de perímetro e área, trabalhados no geoplano material (ficha de trabalho1).

Numa outra tarefa (fig. 50) em que era pedida a construção de triângulos com área 12, percebe-se, também, que a Maria, no caso dos triângulos obtusângulos, adota uma tentativa de construção que a leva à tomada de consciência da impossibilidade dessa estratégia. No caso dos triângulos acutângulos e retângulo, não revelou quaisquer dúvidas, sendo a estratégia adotada exequível.

6 – Constrói no teu geoplano os triângulos indicados nas alíneas seguintes, todos com **área 12**:

a) Três triângulos obtusângulos escalenos
b) Dois triângulos acutângulos isósceles
c) Um triângulo retângulo.

Figura 50 - Enunciado da tarefa 6

Na alínea 6 a), a Maria construiu três triângulos obtusângulos (fig. 51). Para tal, adotou como estratégia a sua ‘inscrição’ num retângulo de área 24. Esta estratégia, apesar das várias tentativas da aluna, revelou-se inadequada, não lhe permitindo a obtenção de triângulos com área 12. Através das figuras que construiu, apercebe-se que é impossível “inscrever” os triângulos obtusângulos num retângulo, de tal maneira que as medidas da base e da altura do triângulo sejam iguais às medidas do comprimento e da largura do retângulo, respetivamente.

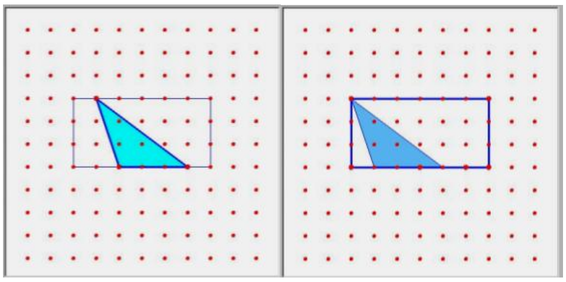


Figura 51 - Resposta da Maria à questão 6 a) (triângulos obtusângulos escalenos)

Veja-se o seguinte diálogo, em que a Maria relata o modo como procedeu para tentar construir os triângulos obtusângulos com as características pedidas:

Professora: Ok. “Constrói no teu geoplano, os triângulos indicados nas alíneas seguintes, todos com área 12” [reli o enunciado]. E agora, como é que tu fizeste [os triângulos] todos com área 12?
Maria: Foi... inscrevê-los num retângulo.
Professora: Mas a base deste triângulo não é igual à base do retângulo [aponto para um dos triângulos construídos pela aluna]. E, então, como é que fizeste?
Maria: Hum... Não ficou com 12 de área.
Professora: O que é que falhou aqui?
Maria: Eu tinha que fazer coincidir a base [do triângulo] com o comprimento [do retângulo]... e não fiz.
Professora: E estes [aponto para os triângulos construídos nas alíneas b) e c)]?
Maria: A base é a mesma
Professora: Ou seja, só no triângulo obtusângulo é que tu não [conseguiste] fazer coincidir a base com o comprimento do retângulo. Porquê?
Maria: Porque depois acho que não dava para chegar mais para trás... ia sair fora do retângulo.
Investigadora: E então optaste por deixar assim... Mesmo achando que a área não era 12?
Maria: Pois...

Na resolução desta tarefa, houve alunos que utilizaram o ícone “measures” para validar os vários triângulos que iam construindo, aperfeiçoando as várias tentativas de construção até obterem os valores pretendidos. Veja-se, a título de exemplo, as várias tentativas realizadas pelo António:

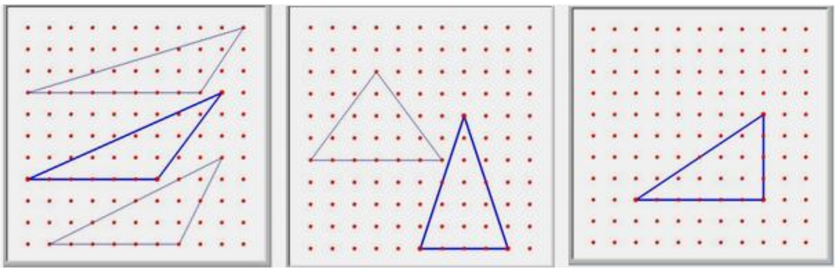


Figura 52 - Resposta do António à tarefa 6

O António, para construir triângulos de área 12, construiu várias figuras e através do comando “measures”, foi aperfeiçoando e validando as que tinham área 12 (fig. 52). Veja-se o seguinte excerto da entrevista, em que o aluno explica como procedeu:

António: Eu achei um bocado fácil...Porque eu no primeiro também tinha que fazer com área 12. Então eu fui tentando várias figuras e ver quanto é que tinham
Professora: Como é que tu “vias”? Vias onde?
António: Primeiro contava e depois para corrigir eu ia “measures”
Professora: Ah! Ias ao “measures”... Então e como é que tu contavas?!
António: Contava os quadrados e os triângulos [refere-se às unidades de área presentes no interior dos triângulos]
Professora: E depois ias ver no “measures”
António: Sim

5.5. Contagem

A contagem é utilizada nas questões em que a Maria tem que determinar o perímetro e a área de figuras dadas ou construir figuras geométricas, obedecendo a determinados valores de perímetro e de área. Para responder a estas questões, a Maria calculou o perímetro, contando os segmentos de reta unitários e, para determinar as áreas, procedeu à contagem das quadrículas. Não cometeu erros nem manifestou dificuldades nestas questões, diferentemente de outros colegas como irei mostrar.

Geoplano material (Ficha de trabalho 1)

Na tarefa 2 (fig. 53), a Maria, depois de construir as figuras D e E no geoplano como era pedido, procedeu à determinação dos respetivos perímetros e áreas. A aluna adotou como estratégia a contagem, realizando a tarefa sem dificuldades.

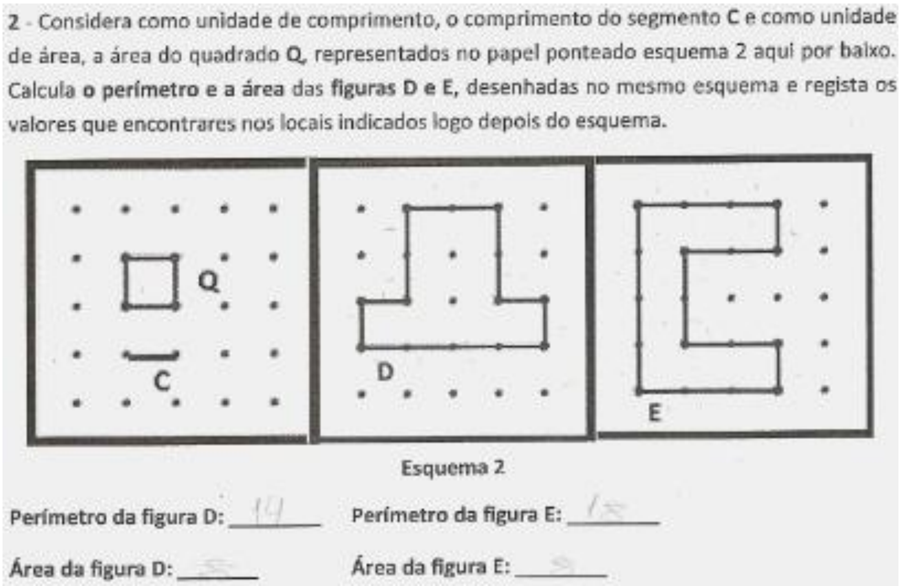


Figura 53 - Resposta da Maria à tarefa 2

Veja-se o seguinte excerto da entrevista onde a Maria explica como procedeu para determinar o valor do perímetro e da área da figura D:

Professora: Como é que tu determinaste o perímetro na figura D?
Maria: Comecei por aqui e fiz um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze, treze, catorze. [aponta para um dos lados da figura e conta os segmentos de reta entre os pins]
Professora: Muito bem! Catorze unidades de perímetro. Então e tem quantas unidades de área?
Maria: [Aponta para a figura, enumerando as várias unidades de área que a constituem] um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito.
Professora: Muito bem! E na E? Foi fácil?
Maria: Foi!

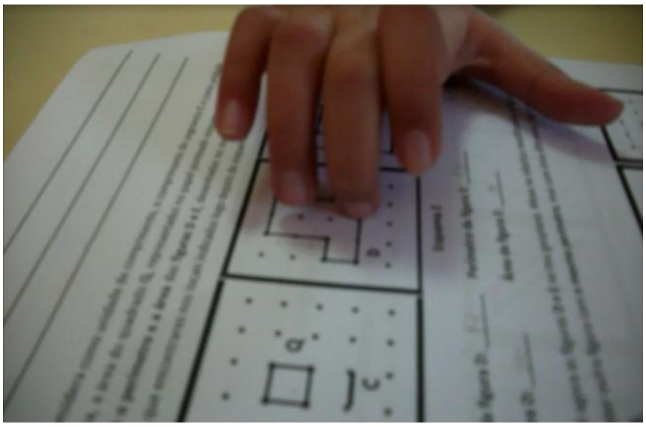
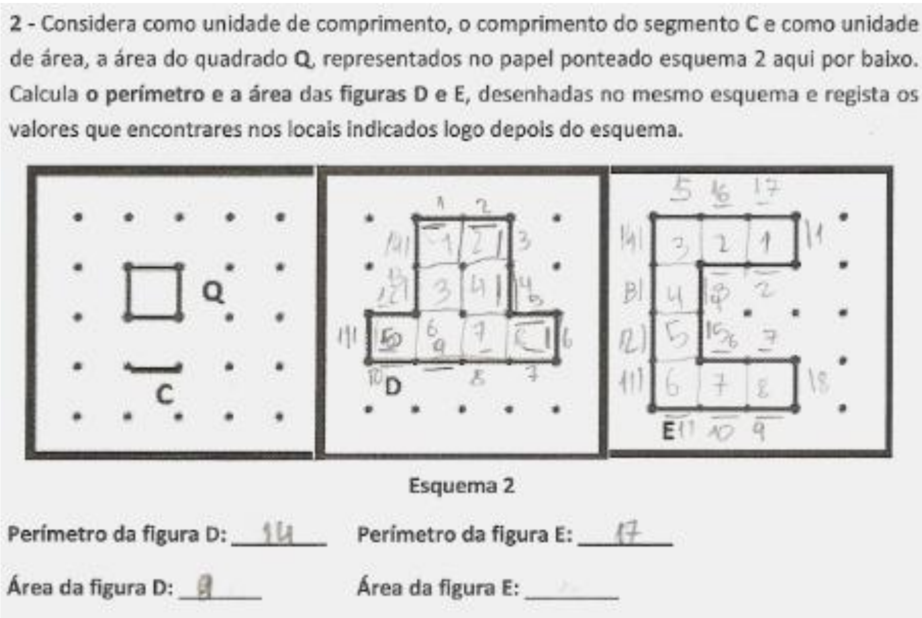


Figura 54 - Resolução da tarefa 2, pela Maria

Houve casos de alunos em que a esta estratégia foi expressa, por escrito, de forma evidente, na própria ficha de trabalho. Repare-se, a título de exemplo, a enumeração das unidades de perímetro e das unidades de área efetuada por um outro aluno da turma (ver fig. 55).



2 - Considera como unidade de comprimento, o comprimento do segmento **C** e como unidade de área, a área do quadrado **Q**, representados no papel ponteado esquema 2 aqui por baixo. Calcula **o perímetro e a área das figuras D e E**, desenhadas no mesmo esquema e regista os valores que encontrares nos locais indicados logo depois do esquema.

Perímetro da figura D: 14 **Perímetro da figura E:** 17

Área da figura D: 9 **Área da figura E:** ______

Figura 55 - Exemplo da resposta de um aluno da turma à tarefa 2

Houve ainda situações que ocorreram com alguma frequência em que alguns alunos, para determinar o perímetro de uma figura, contaram o número de pins em vez do número de segmentos unitários entre cada dois pins. É provável que o facto de os pins serem o que mais se destaca, nos esquemas ou no geoplano, possa ter favorecido este tipo de incorreção.

Existem, nas tarefas desta ficha de trabalho, outras questões em que a contagem é utilizada como estratégia. Foi o que sucedeu com a Maria, por exemplo na questão 2.2 (fig.

56), em que se pede a construção de uma figura dada (Esquema 5) que, depois, deve ser modificada, de modo a obter outra com a mesma área e perímetro diferente (Esquema 6).

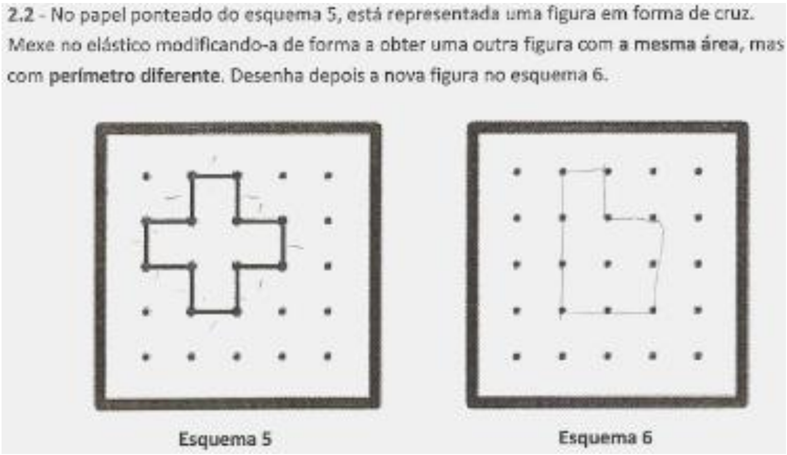


Figura 56 - Resposta da Maria à questão 2.2

A Maria respondeu à questão sem quaisquer dificuldades usando a contagem quer para construir a figura, cujos valores de área e de perímetro é a aluna que os tem que determinar, quer na verificação dos valores de área e de perímetro, na nova figura construída. Veja-se a propósito o seguinte excerto da entrevista:

Professora: Muito bem! Então na questão 2.2 o que é que é que era pedido?
Maria: Uma figura com a mesma área e perímetro diferente.
Professora: Para ti foi fácil encontrar a área da 'Cruz' [Esquema 5]?
Maria: Foi... é 5 [limitou-se a olhar para a figura].
Professora: E o perímetro também? Mostra-me como fizeste?
Maria: Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez [Rodeia a figura, fazendo pequenos traços com o lápis, procedendo à contagem dos segmentos de reta, entre cada dois pins]
Professora: E qual é o perímetro da nova figura?
Maria: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,11,12.
Professora: E a área?
Maria: 5.

Também nas questões 4.1, 4.3, 4.5 e 4.7 da tarefa 4 (fig. 57), a Maria construiu todas as figuras que lhe foram pedidas nessas questões, utilizando a contagem, como estratégia para validar cada figura construída, no que se refere aos valores da área e do perímetro que eram fornecidos.

4.1 Um retângulo com perímetro 10.

4.2 Um triângulo escaleno obtusângulo.

4.3 Um quadrado de área 9.

4.4 Um triângulo equilátero.

4.5 Um quadrado de perímetro 16.

4.6 Um triângulo isósceles acutângulo.

4.7 Um quadrado de área 10

Figura 57 - Questões propostas na tarefa 4

Por exemplo, a propósito da construção do retângulo de perímetro 10, em resposta à questão 4.1 (ver fig. 58), veja-se o seguinte excerto da entrevista:

Professora: Muito bem! Então e agora na questão 4.1, foi fácil fazer um retângulo de perímetro 10?
Maria: Foi
Professora: Como é que tu fizeste?
Maria: Fiz um retângulo deitado...
Professora: Hum... Hum, na horizontal não foi?
Maria: sim e depois fiz 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10 [aponta para o papel ponteado onde representou o retângulo, procedendo à determinação do perímetro]
Professora: Para ti foi muito fácil fazer o retângulo, viste logo que conseguia fazê-lo facilmente, foi?
Maria: Sim

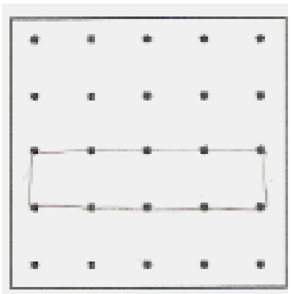


Figura 58 - Resposta da Maria à questão 4.1

Na tarefa 1 (fig. 59), onde a Maria tem que reproduzir as figuras A, B e C, no geoplano e proceder à determinação das respetivas áreas, a aluna evidencia algumas dificuldades na interpretação da figura A, que comprometem uma contagem correta das unidades de área que a compõem que, contudo, veio a ultrapassar autocorrigindo-se (ver pág.59) conseguindo calcular corretamente as áreas pedidas.

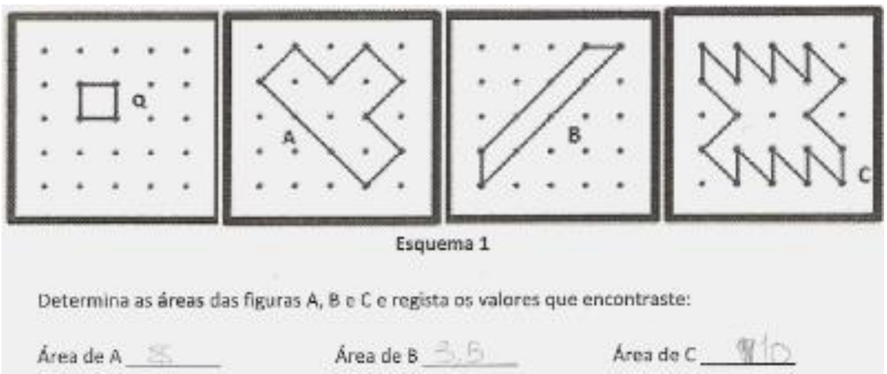


Figura 59 - Resposta da Maria à tarefa 1

Para a determinação das áreas, a Maria usa a contagem, como estratégia. Veja-se a propósito o excerto da entrevista, em que a Maria explica o modo como procedeu:

Professora: Muito bem! E na figura B como é que tu fizeste?
Maria: Na B, fui juntando triângulos, como não havia nenhum quadrado
Professora: E na C, foi mais fácil determinar a área do que desenhá-la?
Maria: Sim
Professora: Como é que tu fizeste?
Maria: Juntei estes, e estes dois [aponta para triângulos constituintes da figura C], já eram dois quadrados e depois estes dois [aponta para a figura], três, quatro, cinco, seis, sete, oito com estes dois [aponta para a figura], nove e dez.
Professora: Muito bem! Depois de chegares aqui, sentiste que este foi mais fácil ou mais difícil?
Maria: Primeiro tinha que arranjar uma estratégia... Mas depois foi fácil!

Embora a Maria tenha apenas indicado os valores das áreas pedidos (ver fig.59), percebe-se, pela entrevista, que a estratégia que usou na resolução da tarefa foi próxima do procedimento usado por um outro aluno da turma que apresento a seguir (ver fig. 60). Como pode ver-se, este aluno enumera as unidades de área no interior das próprias figuras, tornando evidente o modo como procedeu para a determinação do seu valor:

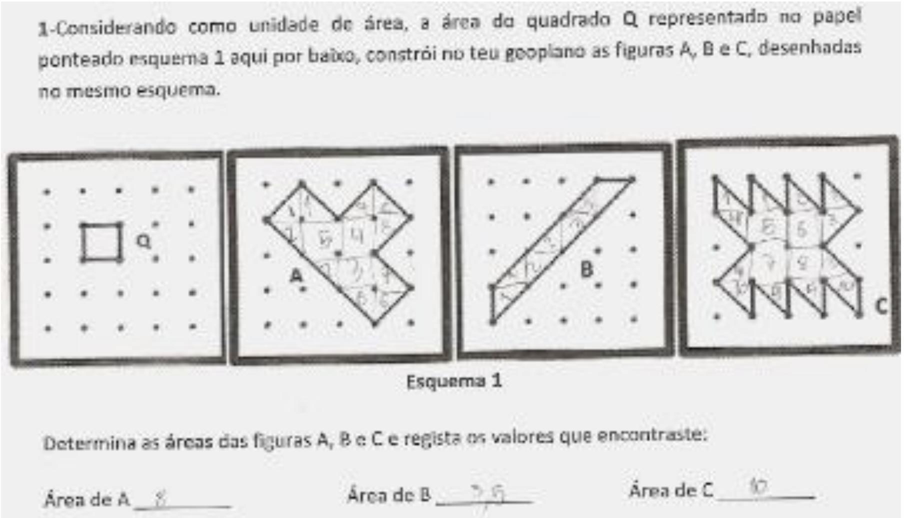


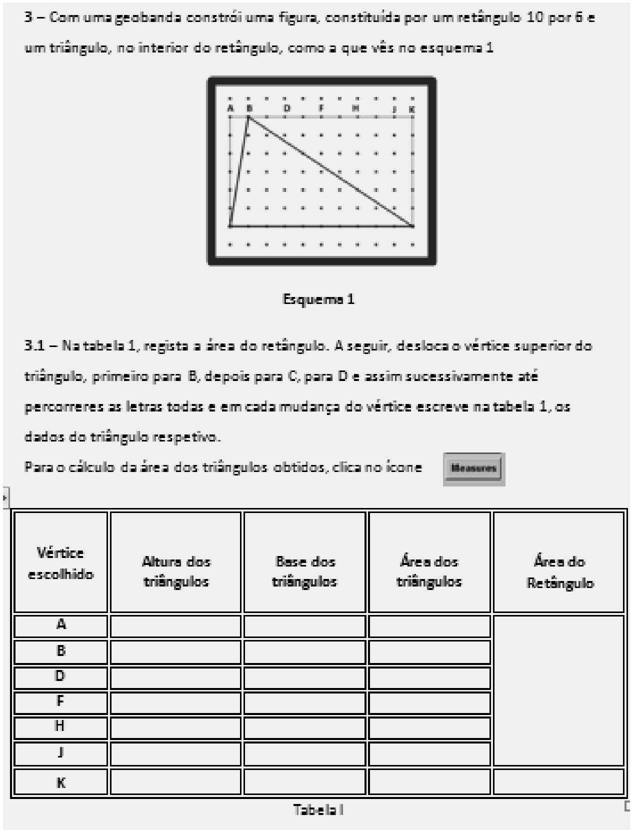
Figura 60 - Exemplo da resposta de um aluno da turma à tarefa 1

Geoplano computacional (Ficha de trabalho 2)

Nas tarefas 1 e 2, a Maria tinha como proposta a construção de figuras geométricas diferentes, obedecendo ao mesmo valor dado de perímetro ou de área. O geoplano computacional dispunha de um comando (‘measures’) que fornecia, quando acionado, as medidas de área e de perímetro das figuras nele construídas. Apesar de não ser suposto a sua utilização nesta questão, houve alunos que, explorando o programa, começaram a utilizá-la espontaneamente. A Maria não utilizou este comando, determinando o perímetro e a área das diferentes figuras construídas através da contagem que me disse estar mais facilitada no geoplano computacional, por os pins estarem mais visíveis e coloridos (vermelhos) ‘saltando’, deste modo, mais à vista. A aluna, para determinar um perímetro, ‘seguia’ com o cursor do rato os segmentos unitários entre cada dois pins, e, para determinar uma área, os quadrados unitários. Veja-se a propósito o seguinte excerto da entrevista:

Professora: E aqui, o facto de teres pontos vermelhos em vez de preguinhos, estes pontos vermelhos, que representam os pins, causaram-te alguma dificuldade?
Maria: Não.
Professora: Nada?
Maria: Não, porque aqui fica mais direito do que no outro geoplano, porque os pins eram mais grossos... Aqui [os ‘elásticos’] fica[m] por cima, não fica[m] por entre [os ‘pregos’].
Professora: E as áreas?
Maria: Hum... área também foi fácil.
Professora: Não tiveste dificuldade?
Maria: Não... foi só contar... [unidades de área e de perímetro]

O modo como a Maria lidou com estas duas primeiras tarefas, que tinham como objetivo principal a familiarização com a aplicação computacional, foi um fator determinante no êxito nas tarefas seguintes. Na questão 3.1, pedia-se para preencher uma tabela (ver fig. 61), onde deviam constar a altura, a base e a área dos triângulos, bem como a área do retângulo onde estes estavam inscritos.



3 – Com uma geobanda constrói uma figura, constituída por um retângulo 10 por 6 e um triângulo, no interior do retângulo, como a que vês no esquema 1

Esquema 1

3.1 – Na tabela 1, regista a área do retângulo. A seguir, desloca o vértice superior do triângulo, primeiro para B, depois para C, para D e assim sucessivamente até percorreres as letras todas e em cada mudança do vértice escreve na tabela 1, os dados do triângulo respetivo.
Para o cálculo da área dos triângulos obtidos, clica no ícone

Vértice escolhido	Altura dos triângulos	Base dos triângulos	Área dos triângulos	Área do Retângulo
A				
B				
D				
F				
H				
J				
K				

Tabela I

Figura 61 - Enunciado da questão 3.1

A Maria, para o preenchimento da coluna relativa à área do retângulo, usou a fórmula respetiva e, como se percebe pelo que disse na entrevista, a contagem surge como uma estratégia de que se auxilia para comprovar os valores obtidos através da aplicação da fórmula:

Professora: E a área do retângulo?
Maria: Hum... era o dobro da do triângulo...
Professora: Mas tu conseguiste calcular a área do retângulo? Como é que tu calculaste? Como é que fizeste para preencher? [a coluna da tabela]
Maria: Hum... Fiz comprimento vezes largura e depois contei... [refere-se às unidades de área que compõem o retângulo]

No cálculo da área de figuras compostas, como era o caso das figuras “Barco” e “Casa”, da tarefa 7 (fig. 62), a Maria procedeu combinando diferentes estratégias como se percebe bem, quer no que aluna escreveu e traçou no Esquema 5, quer pela explicação que deu do cálculo das áreas:

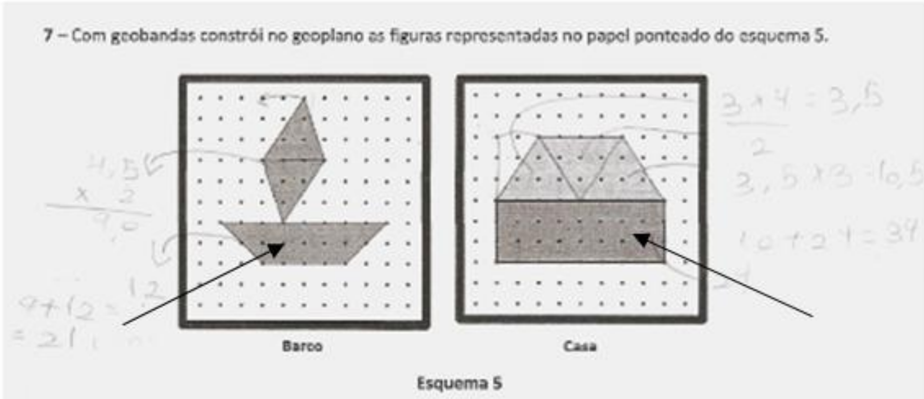


Figura 62 - Resolução da Maria, tarefa 7

A Maria, para o cálculo da área pedidas, começou por decompor as figuras, mas, como se pode ler no que escreveu, na ficha de trabalho, usou a contagem para determinar a áreas do trapézio do casco do Barco — “A parte do trapézio foi fácil foi só preciso juntar triângulos para dar um quadrado e os outros contei normalmente...”. Aparentemente, a Maria refere-se à contagem dos quadrados unitários, que obteve após a decomposição da figuras, em que juntou os dois triângulos, ficando o trapézio decomposto num quadrado e num retângulo, como também deu a entender na entrevista:

Professora: Não consegues explicar? Então, mas tu escreveste aqui que a parte do trapézio foi fácil, que só foi preciso juntar triângulos para dar um quadrado e o resto contaste... Então, aqui não precisaste de cálculos... Foi através do quê?
Maria: Hum... A área daqui [refere-se ao trapézio do barco]... Só contei os quadrados.

Na determinação da área da Casa, a Maria também usou a contagem mas apenas para a determinação da área do retângulo.—“Na parte do retângulo foi só contar os quadrados”. Para o cálculo das outras áreas, recorreu ao uso de fórmulas e à decomposição de figuras, que serão abordados mais à frente.

5.6. Decomposição de figuras

A decomposição de figuras é uma estratégia utilizada, pela Maria, no cálculo de áreas, normalmente associado a outros processos, como a contagem e a utilização de fórmulas, já referidos anteriormente.

Na resolução da tarefa 7 (fig. 63), é notória a presença desta estratégia, até porque de outro modo seria impossível calcular a área das figuras apresentadas.

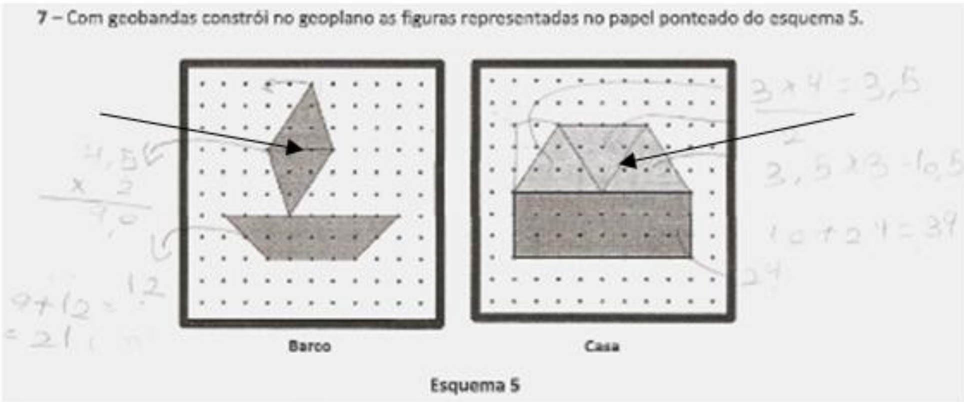


Figura 63 - Resposta da Maria na tarefa 7

No que diz respeito ao cálculo da figura "Barco", a Maria começou por decompor o trapézio num retângulo e em dois triângulos, calculando o número de unidades de área, como explica em entrevista - " A parte do trapézio foi fácil, só foi preciso juntar triângulos e os outros contei normalmente". Para calcular a área da vela do "Barco", a Maria dividiu-a em dois triângulos iguais, como pode ver-se pelos traços a lápis, feitos na própria figura. Determinou a área através da fórmula da área de cálculo do triângulo, explicando: "...parti ao meio e movi o vértice utilizei a fórmula base x alt. / 2 e calculei a área dos dois triângulos juntei as medidas todas e acabei." (ver fig. 63)

No que concerne à figura "Casa", decompôs o "telhado" (trapézio) em três triângulos iguais, como pode, também, ver-se pelos traços a lápis, feitos na própria figura, o que lhe permitiu usar a fórmula de cálculo da área dos triângulos e usar a contagem, como estratégia, para o cálculo da área do retângulo (ver fig. 63)

A Maria não conseguiu usar, como estratégia, somente a contagem das unidades de área nem conhecia a fórmula que lhe permitia calcular a área de todos os polígonos que compunham a "Casa" (por exemplo do trapézio). Assim, recorreu à decomposição das figuras, partindo-as em figuras geométricas suas conhecidas (triângulo e retângulos), o que lhe permitiu o cálculo, total, da área das figuras "Barco" e "Casa".

5.7. Utilização de fórmulas

A utilização de fórmulas é uma estratégia a que a aluna recorre conjuntamente com outras, na resolução das tarefas onde o cálculo da área das figuras pedidas se torna difícil (impossível) de determinar de outro modo

Na tarefa 4, em que é pedido o cálculo da área dos triângulos A, B e C do esquema 3, a Maria recorre à fórmula para determinar a área do retângulo em que os triângulos A, B e C estão inscritos que depois divide por dois (ver fig.64).

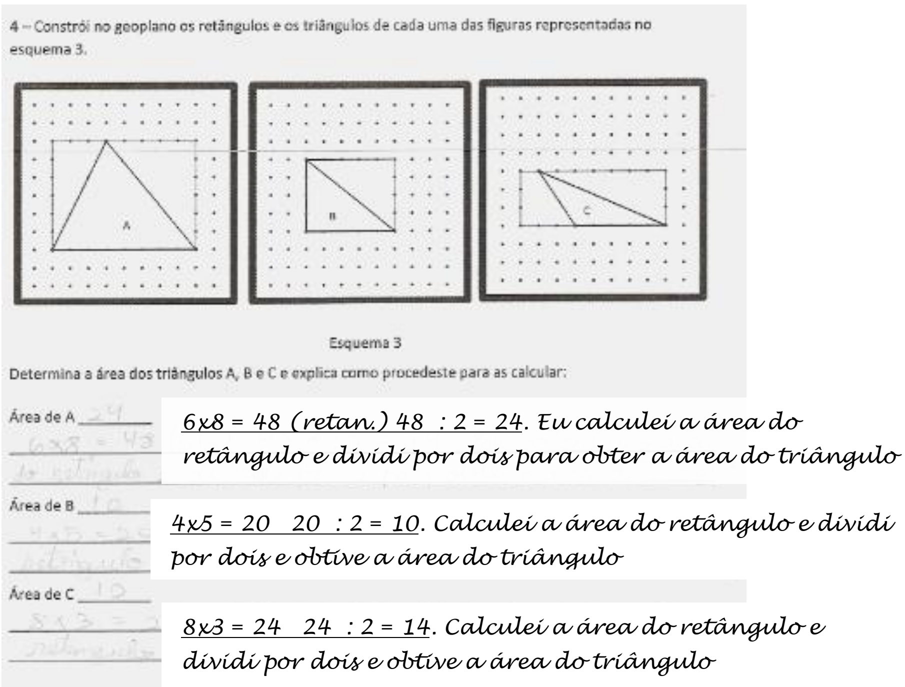


Figura 64 - Resposta da Maria à tarefa 4

A Maria começa por calcular a área dos retângulos onde os triângulos estão "Inscritos", que depois divide por dois, como pode ver-se, pela resposta dada em relação ao triângulo A – "6x8=48 (retan.) 48:2=24. Eu calculei a área do retângulo e dividi por dois para obter a área do triângulo". Esta resposta, é idêntica às respostas que a Maria escreve relativamente aos triângulos B e C, alterando apenas, no texto, os valores correspondentes à largura e ao comprimento do retângulo, onde os triângulos B e C estão “inscritos”. Repare-se que a Maria procedeu do mesmo modo nos três casos. Na entrevista, a aluna explica deste modo:

Professora: Eles [os triângulos] estão dentro de um retângulo, não é? Então, se tu descobriste que a área do triângulo era metade da área do retângulo...
Maria: Era a dividir por dois. Sim... Eu vi isso!
Professora: Então, e na figura C como é que tu fizeste? A figura B consegues ver que é a dividir por 2?
Maria: Sim
Professora: Então, dessas figuras qual é a mais óbvia?
Maria: O [trângulo] B.
Professora: Porquê?
Maria: Já está encostado aqui... [aponta para a largura do retângulo, em que o triângulo está “inscrito”]
Professora: Encostado a quê?
Maria: Ao vértice... Do retângulo
Professora: E consegues ver o quê?
Maria: Que são dois triângulos
Professora: E...
Maria: Hum...
Professora: Dois triângulos diferentes?
Maria: Não, iguais

No caso dos triângulos A e B, o procedimento adotado conduz à determinação do valor correto da área. A Maria calcula do mesmo modo a área do triângulo C, usando a relação de que se tinha apropriado – a área do triângulo é metade da área do retângulo – o que não se aplica neste caso (ver fig. 64). Veja-se, a propósito, o seguinte excerto da entrevista, em que a aluna explica o modo como procedeu, apercebendo-se da impossibilidade da estratégia adotada, no caso do triângulo C:

Professora: Então e no C, o que é que aconteceu ao triângulo C?
Maria: No C... foi mais difícil!
Professora: Porquê?
Maria: Porque ... quando movia este vértice aqui de cima... já não conseguia ver também o espaço (aponta para o espaço interior do retângulo onde está inscrito o triângulo), como vi destes (A e B) porque era obtusângulo... e aí tive de ir mesmo por medidas...
Professora: Pelo “measures”?
Maria: Não... Fiz... vi a altura a base...
Professora: E foi fácil visualizares a altura, no triângulo obtusângulo?
Maria: Foi
Professora: Explica lá?
Maria: Não se via logo encostado... mas movi o C para aqui [referia-se ao vértice do triângulo]
Professora: E isso não ia alterar a altura?

Maria: Hum ... Acho que não
Professora: E a base? Como é que descobriste a medida da base?
Maria: A base... é 8
Professora: Do triângulo?!
Maria: Hum... Do retângulo...
Professora: É igual?!
Aluna: Hum... Acho que não...
Professora: Este triângulo é diferente dos triângulos A e B?
Maria: Acho que fiz mal... Não é igual ao retângulo [refere-se à coincidência do comprimento do retângulo com a base do triângulo]
Professora: Então o que é que não está bem? Se calculasses de novo, como é que tu fazias?
Maria: Hum... Não sei... Este não dá.

Tal como aconteceu na tarefa 4 (ver fig. 64) e na tarefa 6 (ver fig. 50), também na resposta à tarefa 5 (ver fig. 65), em que era pedida a construção de um triângulo de área 12, a Maria explica como procedeu, não deixando margem para dúvidas, baseando-se num triângulo "inscrito" num retângulo — "primeiro construí um retângulo com 24 de área porque 12 é metade de 24, e [depois] construí um triângulo retângulo de maneira a que coubesse outro igual lá dentro [do retângulo]". Parece-me que o entendimento da fórmula de cálculo da área do triângulo aparece, mais uma vez, associado à relação de que aluna se apropriou, de que a área do triângulo é metade da área do retângulo.

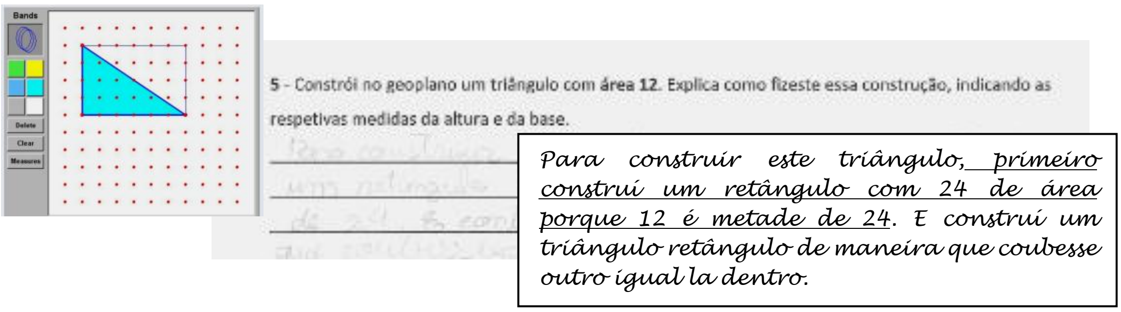
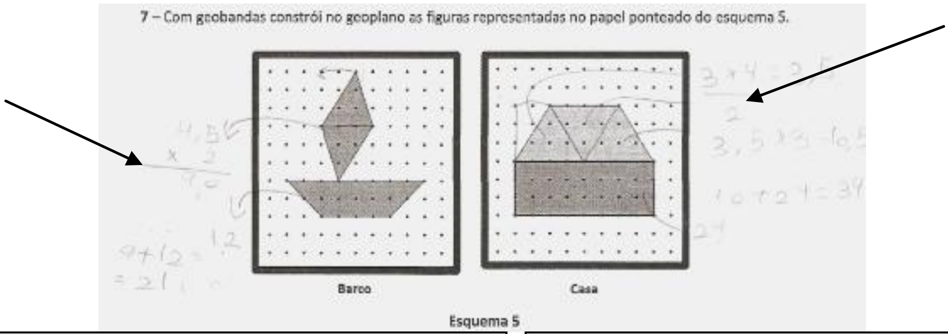


Figura 65 - Resposta da Maria à tarefa 5

À medida que as tarefas foram propostas, a sua realização e discussão levaram a Maria a uma reflexão que me parece que a conduziram à compreensão da fórmula de cálculo da área do triângulo dissociada da sua "inscrição" num retângulo, como aconteceu na tarefa 7



Barco
"A parte do trapézio foi fácil só foi preciso juntar triângulos para dar um quadrado e os outros contei normalmente. No triângulo parti-o ao meio e movi o vértice utilizei a fórmula base x altura/2 e calculei a área dos dois triângulos. Juntei as medidas todas e acabei"

Casa
"Na parte do retângulo foi só contar os quadrados e nos triângulos medi a altura a base e utilizei a fórmula b x alt /2 e fiz vezes três para calcular os outros triângulos"

Figura 66 - Resposta da Maria à tarefa 7

Como é percetível na figura 66, a Maria procedeu ao cálculo da área dos triângulos resultantes da divisão da vela do "Barco" e do telhado da "Casa", recorrendo à fórmula de cálculo da área do triângulo. Repare-se nos cálculos, a lápis, que evidenciam o uso da fórmula, junto das figuras: "Casa" e "Barco", associados aos triângulos que compõem as figuras, através de setas. Veja-se o seguinte excerto da entrevista, relativo à determinação do cálculo da área da figura "Barco", nomeadamente no que se refere ao cálculo da área dos triângulos presentes na vela da figura "Barco" e em que é explícito o uso da fórmula para o cálculo da área do triângulo (ver fig. 66 – figura "Barco"):

Professora: Só contaste os quadradinhos, não foi? [faz referência ao retângulo que compõem o trapézio presente no barco] Então e em cima [vela do barco] não contaste os quadrados, porquê?
Maria: Não dava... Porque tinha linhas na diagonal...
Professora: Então, não dava e tu decidiste ir fazer o quê?
Maria: Hum...
Professora: Aqui dizes que foste utilizar a "fórmula". Como é que utilizaste a fórmula?
Maria: Afinal fiz bem...! Movi o vértice fiz três vezes três deu nove, mas não fiz cálculos nenhuns, fiz tudo de cabeça, dava 4,5 e, depois, fiz vezes dois que eram os dois triângulos e depois somei com o do trapézio [aponta para a parte de baixo do barco].
Professora: E deu área...?
Maria: Área 21.

No caso dos retângulos que constituem as figuras: "Barco" e "Casa", não há evidência do uso de fórmulas, no cálculo da área destes polígonos. Nestes casos, a Maria utilizou, como estratégia, a contagem das quadrículas unitárias. No que se refere ao trapézio, que constitui o casco do “Barco”, juntou os dois triângulos retângulos dos “extremos”, de modo a obter um quadrado contando, depois, as unidades de área — veja-se o que a aluna escreveu na questão 7.1 (ver fig. 66).

Para calcular a área da “Casa” (fig. 66), a Maria divide o “telhado” em três triângulos acutângulos, que identifica como iguais. Há evidências, na figura, da identificação correta da medida da base e da altura, bem como da aplicação da fórmula. Veja-se, também, o seguinte diálogo, em que a aluna explica como determinou a altura dos triângulos (acutângulos) presentes na figura, movendo o vértice superior do triângulo, o que lhe permitiu transformá-lo num triângulo retângulo, tornando-se mais fácil, para a aluna, determinar a sua altura. Posto isto, identifica a base e, facilmente, calcula a área dos triângulos, recorrendo à fórmula:

Professora: Boa! E como é que tu calculaste a área? Descobriste a base e a altura?
Maria: Sim... Foi só mover [refere-se ao vértice]
Professora: Quanto é que foi a base?
Maria: 4
Professora: E a altura?
Maria: ...[pausa]
Professora: Quando tu dizes” mover”, tu “moves” o quê?
Maria: O Vértice!
Professora: Para quê?
Maria: Hum... Não sei explicar...Mas...
Professora: Mas moveste o vértice para quê?
Maria: Para determinar a altura
Professora: E como é que tu moves o vértice? Explica lá.
Maria: [Com a ajuda do lápis, a aluna simula um movimento, que tem por objetivo mover o vértice de modo a tornar o triângulo, num triângulo retângulo, em que a altura coincide com o lado do triângulo]. Fiz assim para aqui para coincidir com isto [refere-se ao lado do triângulo, agora, facilmente identificado]
Professora: Fizeste como se o triângulo estivesse dentro do retângulo, não foi?
Maria: Sim!

Note-se que a Maria para calcular a área da “Casa” usa a fórmula da área do triângulo, mas os cálculos apresentados junto à figura — “ 3x4 / 2 = 3,5” — estão incorretos.

Capítulo 6

A concluir

Neste capítulo, irei apresentar uma síntese do estudo, seguida das principais conclusões da investigação, onde integro considerações sobre a minha prática letiva. Finalizarei com uma reflexão, salientando os aspetos relevantes desta investigação e o seu contributo para a minha atividade enquanto professora.

6.1. Síntese do estudo

O presente estudo procura caracterizar, significativamente, as práticas dos alunos, através de um estudo de caso, envolvendo os conceitos de perímetro e de área, na resolução de tarefas no trabalho com o geoplano. O objetivo desta investigação era compreender o contributo da utilização do geoplano no desenvolvimento da compreensão dos alunos das noções de perímetro e de área de figuras planas. Para isso estabeleceram-se as seguintes questões de estudo: (i) Que potencialidades e limites evidencia o geoplano na resolução de tarefas, envolvendo os conceitos de perímetro e de área de figuras planas? (ii) Que estratégias e dificuldades os alunos apresentam na resolução de tarefas, com o geoplano, envolvendo as noções de perímetro e área de figuras planas?

O enquadramento teórico encontra-se dividido em duas partes: o ensino da geometria, onde são abordados os subtópicos: visualização e medida e o ensino das noções de área e de perímetro - incidindo sobre os elementos de investigação que envolvem o ensino e aprendizagem de áreas e perímetros e a importância da utilização de materiais manipuláveis no ensino destes conceitos.

Na primeira parte – Ensino da geometria - começo por abordar as perspetivas e as orientações curriculares gerais do ensino da geometria, tal como os resultados de algumas investigações que se debruçaram sobre esta temática, bem como a capacidade de visualização e o tema medida, aspetos essenciais nas questões abordadas e presentes em geometria. Na segunda parte – Ensino das áreas e dos perímetros - são apresentadas perspetivas e orientações do ensino da área e do perímetro, assim como as dificuldades sentidas, pelos alunos, na aprendizagem e compreensão destes conceitos, à luz de trabalhos de investigação que se debruçaram sobre esta matéria. O geoplano é referenciado, e muito valorizado, no âmbito do contributo dos materiais manipuláveis no ensino das áreas e dos perímetros.

Dada a natureza do objetivo a que se propõe esta investigação, optei por um estudo de natureza qualitativa, inserindo-se no paradigma interpretativo, recorrendo a uma metodologia de estudo de caso. No que concerne à recolha de dados, foi planeada de modo a incluir várias fontes de informação, para que os dados recolhidos fossem o mais fidedignos e precisos e se complementassem na sua diversidade. Assim, foram utilizados os seguintes instrumentos de recolha de dados: observação de aulas, produções dos alunos na realização das tarefas, e entrevistas de tipo clínico.

As questões de estudo guiaram a sua recolha e análise, apoiada numa descrição detalhada e fundamentada, tendo sido definidas duas dimensões analíticas com base nessas questões: a dimensão "dificuldades dos alunos na resolução de tarefas" em que foram analisadas as categorias "dificuldades de interpretação", "dificuldades concetuais" e "dificuldades argumentativas"; e a dimensão "estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas" - em que foram analisadas as categorias "contagem", "tentativa e erro", "utilização de fórmulas" e "decomposição de figuras". Os dados recolhidos, nas duas dimensões e respetivas categorias, foram alvo de uma análise de tipo indutiva.

6.2.Conclusões do estudo

As conclusões que a seguir se apresentam procuram dar resposta às questões do estudo, tendo por base a análise dos dados recolhidos e literatura de investigação, envolvendo o ensino dos conceitos de perímetro e área, mais especificamente na resolução de tarefas no geoplano. As reflexões sobre a minha prática letiva, que emergiram ao longo desta investigação, foram também integradas na análise sempre que pertinente

6.2.1. Potencialidades do geoplano na resolução de tarefas envolvendo os conceitos de perímetro e de área de figuras planas

Durante esta investigação, foram propostas duas fichas de trabalho que tinham por objetivo trabalhar os conceitos de perímetro e de área, em tarefas com o geoplano. O primeiro conjunto de tarefas, correspondente à ficha de trabalho 1, e teve por base o trabalho no geoplano material. A segunda ficha de trabalho privilegiou a resolução de tarefas no geoplano computacional.

De acordo com Moraes et al. (2008), o trabalho com o geoplano enriquece a formação geral do aluno: auxilia-o na ampliação da sua linguagem, fá-lo adquirir estratégias de resolução de problemas e de planeamento de ações, estimula a sua concentração, desenvolve-lhe o raciocínio, a perseverança e a criatividade, leva-o a promover a troca de ideias através de trabalhos de grupo e promove a fixação de conceitos.

Aquando do primeiro contacto da turma, de caráter exploratório, com o geoplano (material), foi notório o envolvimento empenhado de todos os alunos, com grande vontade de experimentar e partilhar as figuras construídas com os seus pares e com a professora, o que contribuiu para a persistência da concentração nas tarefas. O geoplano permitiu a construção de várias figuras em curto espaço de tempo, bastando, para isso, alterar a posição de um elástico — "não é preciso apagar", como foi dito pela Maria, reconhecendo a comodidade e maior ritmo no trabalho desenvolvido. Os materiais manipuláveis, como é o caso do geoplano, estão fortemente associados ao ensino da geometria e são mencionados, diversas vezes, no programa do ensino da Matemática (ME, 2007) e nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), onde se salienta que, desde os primeiros anos, os alunos deverão desenvolver capacidades de visualização, através de experiências concretas, com vários objetos geométricos e através da utilização de tecnologias.

Um material didático pode ser qualquer instrumento, utensílio ou objeto que auxilie no processo de ensino aprendizagem. No entanto, antes de usar esse material, o professor deve traçar objetivos de ensino e aprendizagem, pois a sua intervenção é determinante para o sucesso ou não sucesso da utilização do material em questão (Lorezato, citado por Diniz, José, 2010). Na primeira ficha de trabalho, o conjunto de tarefas delineado tinha por objetivo trabalhar os conceitos de perímetro e área, nomeadamente na determinação do valor destas grandezas em figuras geométricas e na construção de polígonos com valores de área e perímetro específicos, bem como a outras características geométricas diferenciadas. Todas estas tarefas foram desenvolvidas no geoplano material e registadas em papel ponteado. A construção de figuras no geoplano material revelou-se altamente motivadora e desafiadora e foi percetível a importância que a Maria deu ao facto de poder “mexer” nas figuras construídas e “nos perímetros e nas áreas”, como várias vezes se ouviu durante a realização das tarefas em aula, também da parte da generalidade dos alunos.

Na verdade, o geoplano proporcionou aos alunos um apoio concreto na determinação do perímetro e da área de figuras que construíam permitindo-lhes uma experiência intuitiva dos conceitos envolvidos. Era “mais fácil trabalhar assim”, como disse a Maria, porque podia “contar com os dedos” reconhecendo também que “o geoplano ajudou a perceber qual é a diferença entre o perímetro e a área”. De acordo com Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), a aprendizagem da geometria é realizada com base em experiências concretas, que evoluem para processos mais formais e conduzem ao desenvolvimento de capacidade de organização lógica do pensamento. Como recursos, são evidenciados os materiais manipuláveis, uma vez que permitem, como apoio concreto, a melhor compreensão dos conceitos, estabelecer comparações e tirar conclusões. A experiência material, proporcionada pelo geoplano, permite ao aluno concretizar os valores de área e de perímetro, contribuindo para uma melhor compreensão e distinção dos conceitos.

As tarefas em que era proposta a construção de figuras atendendo a determinadas características geométricas, encontraram no geoplano um instrumento de trabalho poderoso, atendendo a que a sua utilização favorece a construção sucessiva de figuras, até obter a correta. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), no que diz respeito aos conceitos de perímetro e de área, referem o geoplano para os trabalhar, de modo a que os alunos possam realizar tarefas que envolvam decomposição de figuras e sucessivos rearranjos, relacionando estas duas grandezas. O geoplano possibilita, ao aluno, delinear e experimentar estratégias que lhe permitem ir aperfeiçoando as várias construções, alterando-as com facilidade e rapidez, total ou parcialmente, até obter a resposta considerada correta. Foi difícil conseguir que as figuras intermédias ficassem registadas em papel ponteado, uma vez que a rapidez com que os movimentos com os elásticos eram realizadas, acompanhando o movimento do próprio raciocínio na realização da tarefa, levava a que ficasse para segundo plano o registo das sucessivas figuras e fossem desenhadas apenas aquelas validadas como corretas.

A decomposição de figuras foi utilizada para o cálculo das respetivas áreas usando elásticos coloridos na construção das figuras no geoplano, o que favorecia a identificação e visualização das unidades de área, embora nem sempre com facilidade, pois a sobreposição dos elásticos exigia uma motricidade fina desenvolvida. Apesar de não ter sucedido com a

Maria, queria salientar o facto de alguns alunos contarem o número de ‘pins’ que “limitavam” uma figura geométrica, com intuito de calcular o valor do perímetro. Os ‘pins’ evidenciavam-se pelo seu destaque visual, sobrepondo-se aos segmentos de reta que definiam, levando a um procedimento incorreto, o que acontecia em outros estudos (Lavrador, 2010).

Para a Maria, foi mais fácil determinar o perímetro do que a área, no geoplano material, considerando que esta era mais fácil de calcular no papel ponteado pois, com um lápis, aproveitando as quadrículas do papel, as figuras eram decompostas nas suas unidades constituintes, e assim identificadas mais rapidamente.

Tendo em conta as tarefas propostas, as principais limitações do geoplano material, que foram observadas, tem que ver com os elásticos utilizados e os ‘pins’ constituintes do geoplano. A utilização dos elásticos, é identificada como uma limitação, porque muitas vezes são selecionados sem atender à exigência das figuras e por exigirem, muitas vezes, uma motricidade fina para a construção de certas figuras com fronteiras mais complexas. Para além disso, os ‘pins’, sobretudo no geoplano de plástico, quando são muito espessos, levam a ligeiras, mas visíveis imperfeições na construção de determinadas figuras geométricas, em que a Maria reparava e chamava a atenção, o que também aconteceu com muitos dos alunos da turma.

Com a segunda ficha de trabalho, realizada com o geoplano computacional, pretendia que os alunos descobrissem a fórmula de cálculo de área do triângulo e a aplicação da referida fórmula. O facto de se tratar de um programa computacional contribuiu para a motivação das crianças, criando uma predisposição para o trabalho com esse geoplano, o que é corrente acontecer na presença das novas tecnologias.

Sendo o geoplano um objeto que permite uma variedade de situações que procuram desenvolver uma linguagem propícia à compreensão de certas noções, no caso as noções de área e perímetro, podemos identificá-lo como um “*objeto-de-pensar-com”,* com o sentido de Papert et al. (1980), referindo-se a objetos que facilitam a construção de muitos conceitos matemáticos. No computador, o potencial do geoplano é maior, tendo em conta a diversidade de situações que permite e a rapidez com que podemos concretizá-las, possibilidades muito importantes no que diz respeito a processos de descoberta e de generalização, bem como na exercitação de determinados conteúdos.

Com o geoplano computacional, nas questões em que os alunos tinham que construir figuras obedecendo a determinados valores de área e perímetro, foi possível construir um número elevado de figuras e, num curto espaço de tempo, gravar todas as imagens elaboradas, podendo facilmente visualizar as sequências obtidas. Segundo Breda et al. (2011), ao trabalhar com programas de geometria dinâmica, a aprendizagem dos alunos é auxiliada pela resposta que a tecnologia pode dar, e, de alguma maneira, tal como os programas de geometria dinâmica, também o geoplano computacional tem esse papel. Para além das potencialidades já referidas, este tipo de geoplano tem uma funcionalidade, o comando "measures", que permite calcular o valor de área e de perímetro de uma qualquer figura construída. Este comando foi usado para validar valores de área e de perímetro de figuras, permitindo ao aluno progredir nas aprendizagens de forma autónoma, levando-o à tomada de consciência das possíveis alterações a efetuar, de modo a obter uma figura que obedecesse aos valores de área e perímetro pedidos, e repetindo este processo o número de vezes que achasse necessário. Esta funcionalidade, foi também muito útil no cálculo da área de um triângulo quando o objetivo era relacionar a área do retângulo com a área do triângulo nele 'inscrito', apoiando os alunos na descoberta da referida fórmula

O geoplano computacional permite colorir as figuras construídas ou partes de uma mesma figura, bastando para isso um simples 'clique', o que facilitava a visualização dos vários polígonos constituintes de uma figura, contribuindo para a distinção dos conceitos de perímetro e de área. Para além disso, permite que os alunos construam figuras com maior precisão geométrica, os segmentos de reta desenhados no geoplano computacional são 'perfeitos', não havendo lugar para impedimentos de natureza física, como no caso do geoplano material (o elástico não rebenta, os 'pins' têm sempre a espessura adequada e não comprometem o rigor das construções realizadas). Quando a tarefa a realizar exige como estratégia a tentativa e erro, os alunos têm possibilidade de guardar, facilmente e com rapidez, as imagens que constroem durante o processo, sendo possível observar as alterações que as diferentes figuras vão sofrendo até conseguirem a construção pretendida.

O trabalho desenvolvido com o geoplano computacional vem enriquecer a exploração permitida com o geoplano material, não o substituindo de modo algum, mas permitindo um alargar e diversificar de experiências. Digamos que o geoplano computacional surge no prolongamento da utilização do geoplano material, aperfeiçoando-o enquanto "objeto de pensar com" conduzindo o aluno a outro tipo de experiências.

6.2.2. Dificuldades dos alunos

Neste ponto serão apresentadas as dificuldades de interpretação, dificuldades concetuais e dificuldades interpretativas que emergiram no estudo. No que diz respeito às dificuldades de interpretação, são consideradas dificuldades de perceção, quer em relação à linguagem natural, quer em relação à linguagem matemática, bem como, dificuldades de interpretação de figuras, por vezes associadas às dificuldades de visualização, ou de identificação de elementos que as constituem e dificuldades na sua construção. Este tipo de dificuldades, na maioria das vezes, eram acentuadas pelo constrangimento sentido na interpretação de enunciados de algumas tarefas que dificultou o progresso na sua resolução, em alguns casos, causado pela extensão do enunciado. Ao nível da compreensão do vocabulário específico, como por exemplo em casos como – " Triângulo escaleno obtusângulo", "Triângulo isósceles acutângulo", "Triângulo equilátero" – foi evidente alguma insegurança na aluna, que também observei em outros alunos, só ultrapassada pela validação, por meu intermédio, do que a aluna afirmava em relação ao significado dessas expressões. Foram ainda detetadas dificuldades de interpretação textual dos enunciados, ao nível da identificação do que era pedido ou do significado de determinados termos não matemáticos. De acordo com Lopes, 2007; Sgarbosa, 2007; D´Antonio, 2006 citados por Lopes, Silvia (s.d.) a compreensão dos enunciados e o uso de procedimentos adequados dependem da apropriação dos termos ou expressões que neles aparecem, da mobilização de conceitos prévios e da retenção das informações neles contidas, o que vem ao encontro do referido anteriormente**.** Foram, também, detetadas dificuldades de interpretação de figuras nos casos em que a figura visada interfere negativamente na perceção que a aluna tem. Verificou-se que o posicionamento das figuras na quadrícula do geoplano pode conduzir a erros na sua reprodução e na identificação das unidades de perímetro e de área e, consequentemente, na determinação dos seus valores.

No que diz respeito às dificuldades concetuais, há estudos que apontam para a frequente confusão por parte dos alunos entre as noções de perímetro e área (Henriques, M. D., 2011; Lavrador, 2010; Lopes et al.,2008). No trabalho que realizei, na aluna em que o estudo se centrou, não foram evidentes esse tipo de dificuldades, no entanto percetíveis em vários dos alunos da turma, em que foi patente a confusão entre os conceitos de área e de perímetro, quer no que diz respeito ao cálculo dos seus valores, quer quando tinham que construir ou transformar figuras dadas. Em situação de sala de aula, deparei-me com alunos que calculavam a área de uma figura convictos de que estavam a calcular o perímetro e vice-versa. Notei até uma certa tendência para relacionar e mesmo comparar estes conceitos sem sequer atenderem às unidades respetivas, tal como foi referido noutras investigações (Lavrador, 2010; Jaquet, 2000) em que são evidenciadas as dificuldades de compreensão, dos conceitos de área e de perímetro, no ensino básico e secundário.

É, ainda, de salientar que alguns dos alunos, para determinarem comprimentos procediam à contagem do número de 'pins', em vez do número de segmentos determinado por cada par de 'pins', apesar da unidade de comprimento estar desenhada de forma bastante explícita. Aparentemente, os 'pins' sobressaem fazendo esquecer a unidade de comprimento (pré-definida), levando os alunos a contá-los em vez dos segmentos que cada par define, tendência que outros estudos também observaram (Lavrador**, 2010).**

De acordo com Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), existem diversas investigações que revelam que alguns alunos, já no 2º e 3ºciclos, não estão convictos da conservação do comprimento, da área... e outros esquecem a unidade usada para os medir, o que leva à necessidade de um maior reforço das competências relacionadas com a medida. De acordo com P. Marchete et al. (2005), para contrariar esta confusão frequente é importante propor atividades que permitam que os alunos tomem consciência da diferença entre estes dois conceitos, através de um processo que começa por apontar apenas para os aspetos qualitativos destas duas entidades matemáticas, relegando para segundo plano os aspetos quantitativos, isto é, mensuráveis.

No cálculo da área de triângulos a Maria mostrou dificuldades no que diz respeito à identificação da altura dos triângulos havendo necessidade de lhe recordar a noção de altura, para que a aluna pudesse prosseguir com a resolução das tarefas. Mesmo assim, a aluna manifestou ainda dificuldades em estabelecer a fórmula de cálculo da área do triângulo, limitando-se a apresentar afirmações que resultaram da análise das figuras sem as articular e traduzir numa expressão matemática.

A Maria teve uma perceção relativamente imediata da relação entre a área de um retângulo e a área de um triângulo nele 'inscrito'. Por esta razão, não manifestou dificuldades no caso de triângulos acutângulos e retângulos recorrendo sistematicamente a essa relação. No caso do triângulo obtusângulo, uma vez que era impossível "inscrevê-lo" num retângulo, de modo a que a relação entre as suas áreas fosse facilmente percetível, a aluna não conseguiu calcular a área, usando o mesmo procedimento que resultou com os triângulos acutângulo e retângulo.

No que concerne às dificuldades de argumentação, são abrangidas por esta categoria as dificuldades de explicação e justificação, sobretudo ao nível escrito. Quando a Maria responde por escrito tende a usar poucas palavras e a exprimir-se muito sinteticamente. No que se refere ao discurso oral, tem outra desenvoltura e, em geral, é mais completa, e tem mais cuidado na enunciação e clarificação dos procedimentos adotados, na resolução das várias questões. Na expressão oral, a Maria tem maior propensão para uma explicitação das questões propostas, recorrendo a outras formas de comunicação, que colmatam algumas dificuldades manifestadas na expressão escrita, como por exemplo a substituição de termos matemáticos por figuras que constrói ou desenha enquanto fala. O facto de alertar a aluna para a necessidade de um maior cuidado na produção escrita, levou-a a um aperfeiçoamento do texto elaborado para explicitação dos procedimentos adotados de forma mais completa e organizada. É provável que a idade da aluna, a dificuldade que sentiu na compreensão de alguns enunciados e em utilizar termos matemáticos específicos, estejam na origem do carácter muito sintético dos seus procedimentos. Quando o seu discurso é orientado por mim, com questões, para que tornem claros os seus procedimentos, fica mais completo e elaborado.

6.2.3. Estratégias utilizadas pelos alunos

Na resolução das várias tarefas apresentadas, as estratégias utilizadas são distintas: são usadas a contagem, a tentativa e erro, a utilização de fórmulas e a decomposição de figuras.

É frequente a combinação de várias estratégias na determinação da área das figuras propostas, sobretudo na resolução das tarefas da ficha de trabalho 2 (geoplano computacional) e há tarefas, que pela sua natureza, determinam o tipo de estratégias a usar na sua resolução.

A tentativa e erro foi a estratégia adotada na construção de figuras no geoplano que obedeciam a determinadas caraterísticas, como valores de área e / ou perímetros previamente dados no enunciado das várias tarefas, associados, por vezes, a outras propriedades geométricas que as figuras deveriam evidenciar. Estas tarefas não são de resolução imediata, sendo de algum modo natural que a aluna realizasse vários ensaios sucessivos e verificasse se correspondiam ao pedido. No geoplano material a validação das figuras construídas é feita através da contagem das unidades de perímetro ou de área, conforme os casos. Houve ainda outro tipo de situações em que a estratégia de tentativa e erro concorreu para a tomada de consciência da impossibilidade da construção de determinadas figuras propostas, bem como da ineficácia da utilização de determinadas estratégias. Em relação a este último caso, a Maria apercebe-se que o recurso à 'inscrição' de um triângulo obtusângulo de área 12 num retângulo de área 24, para calcular a sua área, não funciona. Pode ainda identificar-se a estratégia de tentativa e erro na utilização do comando ‘measures’ para confirmar ou não os valores das áreas ou perímetros de figuras construídas dados determinados valores destas grandezas e, conforme o caso, validá-las ou conduzir os alunos à construção de outra figura que corresponda aos valores dados.

A estratégia de contagem foi utilizada quer para determinar valores de perímetros e áreas de figuras dadas, quer para verificar os valores de área e perímetros de figuras construídas. A Maria calculou o perímetro contando os segmentos de reta unitários e para determinar as áreas procedeu à contagem das quadrículas. Contudo, como já mencionei antes, pude observar alunos que em vez de contarem segmentos unitários contaram os ‘pins’. É provável que o facto de os ‘pins’ serem o que mais se destaca nos esquemas ou no geoplano possa ter favorecido este tipo de incorreção, como também já anteriormente referi.

Foi percetível, que para a Maria, na contagem, das unidades de área, estava mais facilitada a determinação do perímetro nas figuras desenhadas no geoplano material e a contagem das unidades de área no geoplano representado no papel ponteado, por ser possível, com a ajuda de um lápis, construir uma malha quadriculada, em que os quadrados unitários ficam definidos. A aluna evidenciou algumas dificuldades na identificação da unidade de área em figuras, devido à sua posição no geoplano. Este tipo de dificuldades foi, também, manifestado por outros alunos, na contagem das unidades de área, que foram calculadas incorretamente devido à posição da figura. A estratégia de contagem, na determinação do perímetro e da área das diferentes figuras construídas, revelou-se mais facilitada no geoplano computacional, por os ‘pins’ estarem mais visíveis e coloridos (vermelhos) ‘saltando’ mais à vista.

Associado a outros processos, como a contagem e a utilização de fórmulas, já referidos anteriormente, a decomposição de figuras é uma estratégia utilizada no cálculo de áreas, sobretudo, no caso de figuras compostas. A aluna decompõe as figuras dadas em figuras que lhe são familiares, aplicando depois outro tipo de estratégias, como a contagem e a uso de fórmulas. Sempre que possível usa a contagem recorrendo à fórmula apenas no caso de figuras em que não consegue contar as unidades de área.

A utilização de fórmulas é uma estratégia a que os alunos recorrem, conjuntamente com outras, na resolução das tarefas onde o cálculo da área das figuras não é possível de determinar de outro modo. Pude observar que, mesmo após o uso da fórmula, sempre que exequível, a aluna, recorre à contagem: por exemplo no cálculo da área do retângulo, a Maria usa a fórmula e de seguida confirma o valor obtido através da contagem. Nas tarefas, em que é pedido o cálculo da área de triângulos, a Maria, começa por fazer uso da relação de que se tinha apropriado – a área do triângulo é metade da área do retângulo — de seguida, recorre à fórmula para determinar a área do retângulo em que o triângulo está inscrito. Posto isto, divide o valor da área do retângulo por dois, de modo a obter a área do triângulo inscrito.

A utilização da fórmula de cálculo da área do triângulo dissociada da sua “inscrição” num retângulo é aplicada apenas na última tarefa da ficha de trabalho. Após a realização de um conjunto de tarefas propedêuticas, a Maria chega à fórmula, no entanto, pelo modo como é explicitada a resolução da questão, é notória a dificuldade em libertar-se totalmente da necessidade do retângulo. De acordo com P. Marchett (2005), a comparação de figuras, atendendo unicamente à sua superfície e ao comprimento das linhas que as limitam, facilita a compreensão dos conceitos de área e de perímetro que, só numa fase posterior, aparece associada a uma medida de comprimento e a uma unidade que expressa uma quantidade de superfície. Assim, é evidente alguma dificuldade no abandono da estratégia adotada, que teve por base a determinação da área do triângulo, através da comparação entre as áreas do retângulo e do triângulo nele inscrito.

6.3. Reflexão final

A geometria assume um papel importante na compreensão da realidade que nos rodeia e alguns tópicos geométricos permitem estabelecer relações com outras áreas da Matemática, nomeadamente com os conceitos de número e de medida, permitindo uma melhor aprendizagem e construção dos mesmos (NCTM, 2007).

Para ensinar, por exemplo, um conceito, é necessário ter um conhecimento suficientemente aprofundado e aperfeiçoado desse conceito que permita explicitá-lo, tornando-o claro e evidente e criar situações que conduzam à sua apropriação por parte do aluno. Atualmente procura-se que as crianças e jovens aprendam através da experimentação e da manipulação, sendo a geometria um meio para a criança conhecer o espaço. A compreensão da noção de medida inicia-se com as vivências dos alunos, nas experiências do dia-a-dia, bem como em outras áreas curriculares. É também amplamente reconhecida a necessidade do uso de materiais concretos, para que os alunos possam passar por experiências informais na compreensão dos atributos mensuráveis, de modo a estabelecer relações de grandeza entre os diversos atributos, ao longo dos diferentes anos de escolaridade (NCTM, 2007). Os conceitos de perímetro e área são noções fundamentais, na Matemática e no seu quotidiano.

Esta investigação contribuiu para um melhor conhecimento do modo como se processa a aprendizagem dos conceitos de perímetro e área, tendo por base o geoplano, como material de concretização. O estudo permitiu evidenciar as potencialidades deste material, sobretudo no que favorece o desenvolvimento de estratégias que conduzem os alunos a uma melhor apreensão destes conceitos, bem como da forma como suprir as dificuldades experienciadas. Penso que os conceitos de perímetro e área carecem, sobretudo, de tempo para que possam ser trabalhados simultaneamente e evidenciar distinções entre esses conceitos. O geoplano é um material concreto muito adequado a este tipo de abordagem que conduz e apoia o aluno num processo de auto descoberta, ao ritmo do próprio aluno. Estas potencialidades são mais intensas no geoplano computacional que permite o tratamento de maior quantidade de tarefas e mais diversas, num espaço de tempo curto, sendo um instrumento de trabalho precioso para o desenvolvimento de tarefas propedêuticas. Pessoalmente foi muito importante conhecer as dificuldades e as estratégias dos alunos na resolução das tarefas com estes geoplanos e centradas nos conceitos de área e perímetro para que, enquanto docente, possa contribuir para uma melhor aprendizagem dos meus alunos, minimizando os constrangimentos existentes no processo.

Esta investigação permitiu-me fazer um balanço pessoal da minha prática pedagógica, refletindo sobre vários aspetos das tarefas no âmbito deste estudo, como por exemplo a natureza das tarefas, o vocabulário usado no enunciado das tarefas, as dificuldades e estratégias dos alunos no seu processo de aprendizagem e outros que abrangem todo o meu desempenho profissional: o papel do professor, o papel do aluno, a interação professor – aluno..., contribuindo para uma melhoria da minha postura enquanto professora. Desde o propósito do estudo, passando pela aplicação das tarefas, tudo contribuiu para uma maior consciencialização das dificuldades dos meus alunos. Para além disto, enquanto professora, sinto que me tornei mais consciente e atenta a todo o desenrolar do processo de ensino aprendizagem, processo sempre dinâmico e evolutivo, e com maior capacidade de análise das situações emergentes no trabalho em aula com os alunos.

Referências

Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na Sala de Aula. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Org.), *Ensino da Geometria ao Virar do Milénio* (1.ª ed.). Lisboa: Departamento de Educação da FCUL.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica* (1.ª ed.). Lisboa: Ministério da Educação/Departamento de Educação Básica.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). Geometria e medida do ensino – Brochura de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) para o ensino da Geometria e Medida. Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC), consultado em dezembro de 2012

Canavarro, A. P. (2003). Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos. (cap. III, p.103)

Costa, C. (2000). Visualização, veículo para a educação em geometria. *Encontro de Investigação em Educação Matemática*, *9*, 157-184.

de Moraes, M. B. S., Dutra, D. L., dos Anjos, U. U., do Rego, R. G., de Moraes, R. M., & dos Santos Machado, L. (2008). Geoplano: Um Jogo Educacional Inteligente Para o Ensino de Geometria Plana.

Diniz, J., & Oliveira, C. (2010). O uso de Geoplano nas aulas de matemática do ensino básico.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). Nova Iorque: MacMillan.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task* (1.ª ed.). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Henriques, M. D. (2011). *Um estudo sobre a produção de significados de estudantes do ensino fundamental para área e perímetro* (Doctoral dissertation, Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, Minas Gerais: UFJF).

Jaquet, F. , (2000). Il conflitto area-perimetro,.*L'educazione Matemática*. Ano XXI - serie VI- Vol 2, nº 2 pp. 66-77 e nº3 (pp.126-143).

Lavrador, C. M. D. (2010). Resolução de tarefas envolvendo áreas e perímetros: um estudo com alunos do curso de educação e formação.

Leite, C. (2001). A reorganização curricular do Ensino Básico–problemas, oportunidades e desafios. *A Reorganização curricular do Ensino Básico. Porto: CRIAPASA*, 29-37.

Leivas, J. C. P. Geoplano. Fundação Universidade Federal do Rio Grande (FURG). Disponível em: http://mathematikos.psico.ufrgs.br/textos/geoplan.pdf Consultado em 14 de novembro de 2012

Lopes, M. H., Salinas, M. J., & Palhares, P. (2008). O trabalho cooperativo na resolução de problemas de áreas.

Lopes, S. E. (s.d.*). A leitura e a interpretação de problemas de matemática no ensino fundamental: algumas estratégias de apoio.
* http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2212-8.pdf (consultado em setembro de 2013)

Matos, J., & Serrazina, L. (1996). O Geoplano na sala de aula.

Ministério da Educação (1989). Decreto-Lei n.º 43/89 de 23 de fevereiro. In *Diário da República*, I série, nº 29/89, p. 456 a 461. Lisboa: INCM.

Ministério da Educação (2007). Programa de Matemática do ensino básico. Lisboa: DGIDC.

Monteiro, C., Pinto, H., & Ribeiro, S. (2010). *mp.5 matemática para pensar.* Lisboa: Sebenta.

Monteiro, C., Pinto, H., & Ribeiro, S. (2010). *Kit de Materiais.* Lisboa: Sebenta.

Monteiro, M., & Pereira, S. (2005). *Números e Companhia 6º ano - Caderno de materiais* . Vila Nova de Gaia: Gailivro.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. (Tradução portuguesa do original de 2000). Lisboa: APM.

Nunes, V. (18 de 2012 de Outubro). *Matemática.* Obtido de Geoplano: http://escolovar.org/mat_geoplano.htm

P. Marchett, D. Medici, Paola Vighi, E. Zaccomer (2005).*Comparing perimeters and areas: childrens' preconceptions and spontaneous procedures,* 766

Ponte, João Pedro da; Matos, José Manuel; Abrantes, Paulo (1998).Investigação em educação matemática: implicações curriculares. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Santos, E., & Almeida, P. (2010). *Matemática 5ºano.* Carnaxide: Santillana.

Silva, J. A. D. (2009). As Relações entre Área e Perímetro na Geometria Plana: o papel dos observáveis e das regulações na construção da explicação.

Tuckman, B. (2000). *Métodos de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Utah State university. (18 de Outubro de 2012). *Nacional Library of Virtual Manipulatives*. Obtido de NLVM Web Site: http://nlvm.usu.edu/

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas Actuais.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for research in mathematics education*, 171-191.

Yin, R. (1984). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park, CA: Sage.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Editors´ introduction: What is mathematical visualization. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Orgs).Visualization in teaching and learning mathematics (pp. 1-7). Washington, DC: Mathematics Association of America.

Anexos

Anexo I – Pedido de Autorização para a realização do Estudo – Direção da escola

Exmo. Sr. Presidente da Comissão Administrativa Provisória,

Eu, Sara Raquel Roque Ventura, professora contratada do grupo 230, na Escola Básica 2, 3 Vieira da Silva, estou a desenvolver um trabalho de investigação no âmbito do Mestrado em Educação, especialidade de Didática da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. O principal objetivo deste trabalho é compreender como é que a utilização do geoplano favorece a compreensão das noções de perímetro e área de figuras planas e a resolução de tarefas que envolvam estas noções.

Face ao exposto, venho solicitar autorização, para iniciar o processo de recolha de dados, que terá como público-alvo as turmas que leciono através de gravação em vídeo das aulas, de entrevistas a alunos e de alguns trabalhos produzidos pelos mesmos.

Numa primeira fase, será pedida autorização aos encarregados de educação para dar início à referida recolha de dados.

O desenvolvimento da investigação não interfere com o normal funcionamento das atividades letivas e não traz qualquer prejuízo para os participantes, estando garantida a confidencialidade dos dados recolhidos e o anonimato da escola/Agrupamento e dos alunos em posteriores divulgações da investigação realizadas no âmbito do mestrado

Agradecendo desde já a colaboração e a atenção dispensada, solicito deferimento.

Carnaxide, 30 de janeiro de 2013

____

(Sara Ventura)

Anexo II – Pedido de Autorização para a realização do estudo – Enc. de Educação

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Sara Ventura, professora de Matemática e Ciências da Natureza, estou a desenvolver um trabalho de investigação no âmbito do curso de Mestrado em Educação, especialidade Didática da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. O principal objetivo deste trabalho é procurar compreender como é que os alunos aprendem a noção de área e perímetro e consequentemente melhorar as suas aprendizagens.

Neste sentido, é necessário proceder à recolha de dados junto da turma em causa, através de gravação em vídeo das aulas, de entrevistas a alunos e de alguns trabalhos produzidos pelos mesmos.

O desenvolvimento da investigação não interfere com o normal funcionamento das atividades letivas e não traz qualquer prejuízo para os alunos, estando garantida a confidencialidade dos dados recolhidos e o anonimato da escola/Agrupamento e dos alunos em posteriores divulgações da investigação realizadas no âmbito do mestrado.

Face ao exposto, solicito autorização para implementar o trabalho de investigação anteriormente descrito através do preenchimento da declaração em anexo

Antecipadamente grata pela colaboração e pela atenção dispensada,

Cumprimentos.

Carnaxide, de janeiro de 2013 A Professora de Matemática

____

(Sara Ventura)

Eu ____, Encarregado(a) de Educação do aluno(a) ____ n.º ___, autorizo/não autorizo **(riscar o que não interessa)** a participação do meu educando neste projeto de investigação.

O (A) Encarregado(a) de Educação

____

Anexo III - Planificação realizada pelo grupo disciplinar da escola onde foi realizado o estudo

Perímetros e Áreas					
Subtópicos	**Objetivos**	**Notas**	**Tarefas**	**Tempos letivos**	**Avaliação**
• **Perímetro de um círculo. Dedução do valor aproximado de "pi".** • **Área de um círculo.**	• Determinar um valor aproximado de π, relacionando o diâmetro e o perímetro do círculo. •Determinar a área de círculos.	•Propor a determinação experimental de um valor aproximado de π. • Usar situações experimentais para encontrar a fórmula do perímetro e área do círculo. •Apreciar a geometria no mundo real e reconhecer a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação.	•Manipulação de objetos do quotidiano, de forma cilíndrica, para descobrir a relação entre o diâmetro e o comprimento da circunferência (valor aproximado de π). • Exploração da tarefa 1 da página 120 do manual (volume 2): perímetro do círculo. • Exploração da tarefa 1 da página 148 do manual (volume 2): Área do círculo. •Resolução do exercício 1 da página 149 do manual (volume 2): Perímetro e área do círculo.	3	•Observação e registo em grelha, do comportamento dos alunos, da participação e empenho (de forma informal e estruturada).
			•Resolução de exercícios da página 121 do manual (volume 2).	4	•Verificação dos trabalhos de

• **Medidas de comprimento.**	• Identificar as unidades do Sistema Métrico Internacional. • Determinar medições e estimativas em situações diversas. •Efetuar conversões. •Compreender conceitos de comprimento, perímetro e área.		• Exploração das tarefas 2, 3, 4 e 5 das páginas 113 e 114 do manual (volume 2). •Utilização de instrumentos de medida e desenho, para construção de figuras geométricas. •Resolução de exercícios da página 118 do manual (volume 2). •Resolução de situações problemáticas para revisão dos conteúdos lecionados no 1º ciclo.	2	casa. •Trabalho de pares.
• **Perímetro de polígonos regulares e irregulares.**	• Determinar o perímetro de polígonos regulares e irregulares.	•Resolver problemas envolvendo perímetros de polígonos. •Formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente.	• Resolução de situações problemáticas para revisão dos conteúdos lecionados no 1º ciclo. • Exploração da tarefa 1 da página 116 do manual (volume 2): Perímetro e Área do quadrado e do retângulo – Molduras. •Resolução de exercícios da página 117 do manual (volume 2).	4	•Observação e avaliação do caderno diário. •Participação na elaboração e discussão das tarefas.
• **Medidas de áreas.**	• Identificar as unidades de área.		• Resolução de situações problemáticas para revisão dos conteúdos lecionados no 1º ciclo.	2	

	• Determinar medições e estimativas em situações diversas. •Efetuar conversões.		• Exploração da tarefa 2 da página 116 do manual (volume 2): Sequências e regularidades - Hexaminós.		•Colaboração com o professor e com os colegas na resolução e discussão da tarefa.
• Áreas de polígonos regulares e irregulares.	• Determinar a área de polígonos regulares e irregulares.	•.Resolver problemas envolvendo áreas de polígonos. • Noção de quadrado perfeito.	•Resolução de exercícios e problemas das páginas 118, 119, 122 e 133 do manual (volume 2. •Exploração da tarefa 2 da página 141 do manual (volume 2): Quadrados e mais quadrados.	2	•Fichas de avaliação.
• Alturas de um triângulo. **Área de um triângulo e relação entre a fórmula da área de um triângulo com a do retângulo.**	•Rever as alturas de um triângulo	• Compreender propriedades das figuras geométricas no plano e no espaço. •Relacionar a fórmula da área do triângulo com a do retângulo. • Calcular a área de figuras planas simples, decomponíveis em retângulos e em triângulos ou por meio de estimativas.	•Revisão dos conceitos sobre as alturas de um triângulo. •Exploração das tarefas 1 e 2 das páginas 144 e 145 do manual (volume 2): Área do triângulo.	2	•Observação e registo em grelha, do comportamento dos alunos, da participação e

• **Equivalência de figuras planas.**	• Compreender a noção de equivalência de figuras planas e distinguir figuras equivalentes de figuras congruentes. •Resolver e formular problemas que envolvam relações entre os conceitos de perímetro e de área, em diversos contextos. • Resolver problemas que envolvam áreas do triângulo e do círculo, bem como a decomposição e composição de outras figuras planas.	• Usar a sobreposição, composição e decomposição de figuras. • Propor situações que evidenciem a distinção entre área e perímetro. Por exemplo, a separação e a reorganização das partes de uma figura que alterem o seu perímetro mas não a sua área (e reciprocamente).	• Exploração da tarefa 1 da página 132 do manual (volume 2): Figuras equivalentes e figuras congruentes - Figuras com quadrados. •Construção de figuras equivalentes, sendo utilizadas as peças do Tangram do Kit de materiais dos alunos. •Resolução de exercícios das páginas 133, 135, 136, 137 e 139 do manual (volume 2).	3	empenho (de forma informal e estruturada). •Verificação dos trabalhos de casa. •Trabalho de pares.
• **Áreas por enquadramento e por decomposição**		• Usar figuras e respetivo enquadramento em papel quadriculado.	• Resolução de exercícios das páginas 137, 146 e 147 do manual (volume 2).	2	•Observação e avaliação do caderno diário. •Participação na elaboração e discussão das tarefas.
			Consolidação de conhecimentos: Resolve das páginas 142 e 143 do manual (volume 2).	2	
			• Revisões - Consolidação de conhecimentos: Tarefas de Nível I, II e III	2	

			das páginas 126, 127,128,129, 156, 157, 158 e 159 do manual (volume 2).		•Colaboração com o professor e com os colegas na resolução e discussão da tarefa. •Fichas de avaliação.
Ficha de avaliação e respetiva correção				4	
Total dos tempos letivos				**32**	

Anexo IV - Guião de observação

Identificação

- Data da elaboração;
- Número de alunos em falta;
- Sumário.

Estrutura da aula

- Início da aula;
- Momentos principais e a sua sequência;
- Fim da aula.

Ambiente de aula e interações pessoais

- Ambiente geral da aula;
- Ritmo de trabalho;
- Grau de atenção e envolvimento dos alunos nas atividades;
- Comportamento geral da turma;
- Tipos de interações na aula.
- Acontecimentos inesperados
- Outros considerados relevantes pelo observador

Papel da professora

- Introdução da tarefa;
- Natureza das suas intervenções;
- Solicitação da participação dos alunos;
- Acompanhamento da tarefa;
- Abordagem às dificuldades sentidas pelos alunos;
- *Outros considerados relevantes pelo observador*

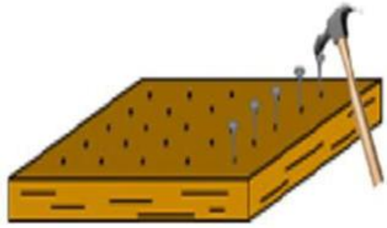
Papel do aluno

- Participação dos alunos na aula;
- Como reagem os alunos à tarefa
- Iniciativa;
- Tarefas realizadas;
- Natureza das suas intervenções;
- Estratégias utilizadas;
- Dificuldades sentidas;
- Colaboração entre alunos.
- Outros considerados relevantes pelo observador

Registo Livre

Anexo V - Geoplano Material (Ficha de trabalho 1)

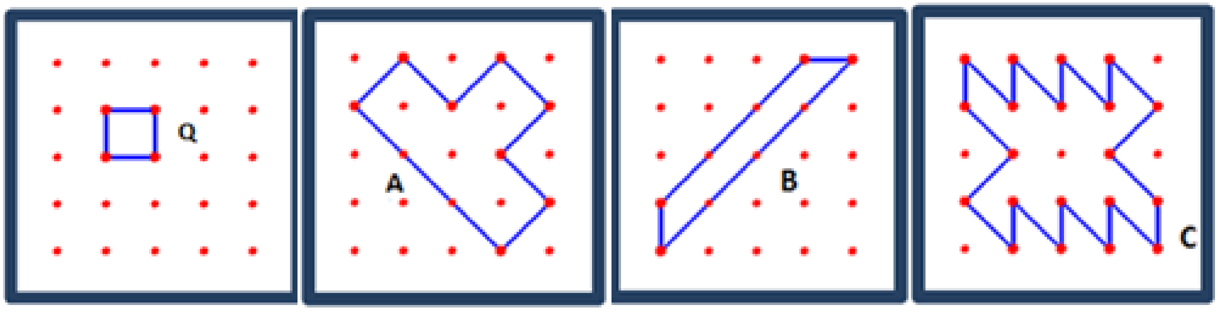
Ofereceram ao meu amigo Gustavo um conjunto de jogos matemáticos, o "GeoMat", com imensos desafios! O Gustavo gostou imenso de um deles, o Geoplano, e como estavam a rever os "Perímetros" e as "Áreas" nas aulas de Matemática, resolveu convidar os seus colegas Rita, o Vicente, a Lara e o António, para jogarem juntos!



Foi uma tarde bem animada...!

Aqui por baixo estão várias tarefas que também vais realizar com o *Geoplano.*

1-Considerando como unidade de área, a área do quadrado **Q** representado no papel ponteado esquema 1 aqui por baixo, constrói no teu geoplano as figuras A, B e C, desenhadas no mesmo esquema.



Esquema 1

Determina as **áreas** das figuras A, B e C e regista os valores que encontraste:

Área de A _________ Área de B _________ Área de C _________

1.1 - Explica por palavras tuas como chegaste ao valor da área de cada figura:

____

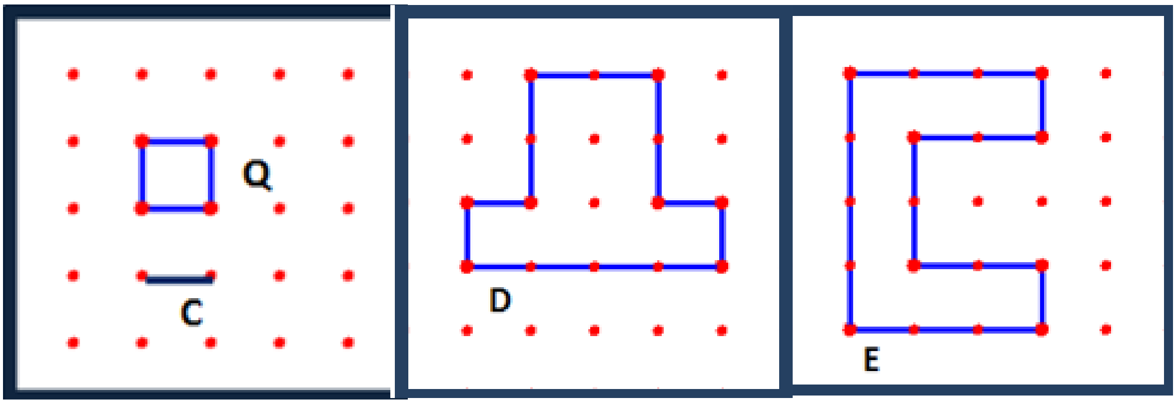
____

____

____

____

2 - Considera como unidade de comprimento, o comprimento do segmento C e como unidade de área, a área do quadrado Q, representados no papel ponteado esquema 2 aqui por baixo. Calcula o perímetro e a área das figuras D e E, desenhadas no mesmo esquema e regista os valores que encontrares nos locais indicados logo depois do esquema.



Esquema 2

Perímetro da figura D: ________   **Perímetro da figura E: ________**

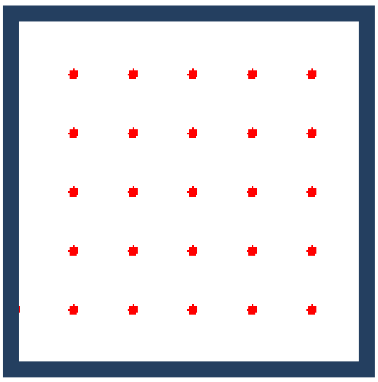
Área da figura D: _______   **Área da figura E: ________**

2.1 – Constrói agora as figuras **D e E** no teu geoplano. Mexe no elástico modificando a figura **D** de forma a obter outra figura com **o mesmo perímetro**, mas com área diferente. Faz o mesmo para a figura **E.**

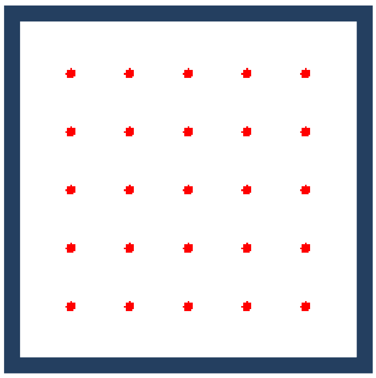
Desenha as novas figuras, uma no papel ponteado do esquema 3 e outra no do esquema 4. Calcula a área de cada uma e regista a seguir:

Área (figura no esquema 3):______

Área (figura no esquema 4):______

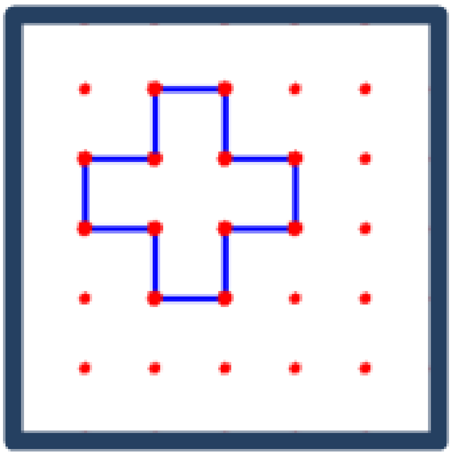


Esquema 3

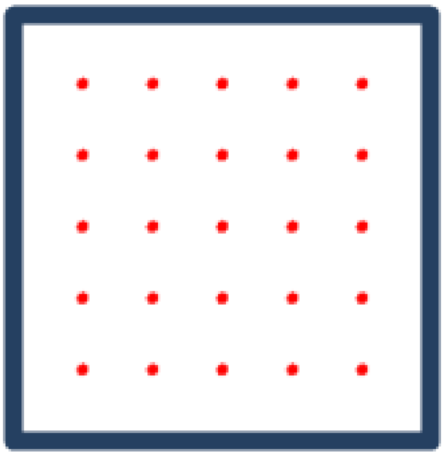


Esquema 4

2.2 - No papel ponteado do esquema 5, está representada uma figura em forma de cruz. Mexe no elástico modificando-a de forma a obter uma outra figura com **a mesma área**, mas com **perímetro diferente**. Desenha depois a nova figura no esquema 6.

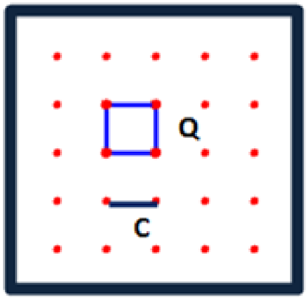


Esquema 5



Esquema 6

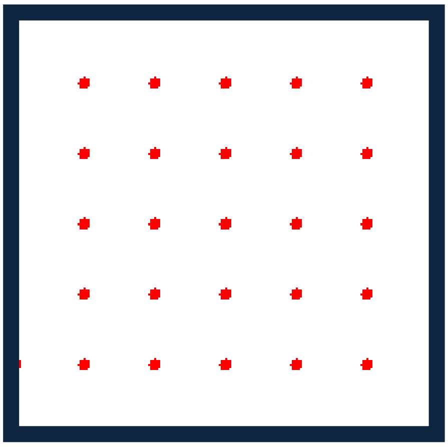
3 - Considera como unidade de comprimento, o comprimento do segmento **C** e como unidade de área, a área do quadrado **Q**, representados no papel ponteado do esquema aqui ao lado e realiza as seguintes tarefas:



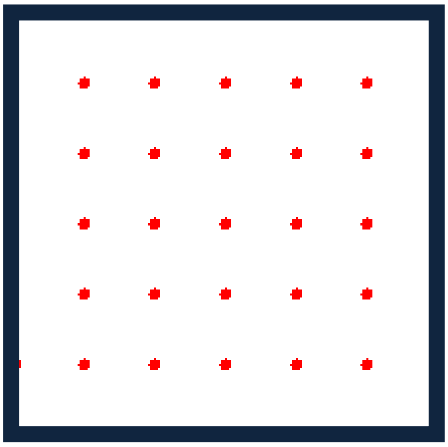
3.1 Constrói, no teu geoplano, quatro figuras diferentes com **área 6**. Desenha essas figuras na tua folha de papel ponteado e indica na folha o **perímetro de cada uma**.

3.2 Constrói, no teu geoplano, quatro figuras diferentes com **perímetro oito.** Desenha essas figuras na tua folha de papel ponteado e indica na folha a área **de cada uma**.

3.3 Constrói no teu geoplano duas figuras com o **mesmo perímetro e áreas diferentes** e desenha as figuras uma no papel ponteado do esquema 7, outra no do esquema 8.

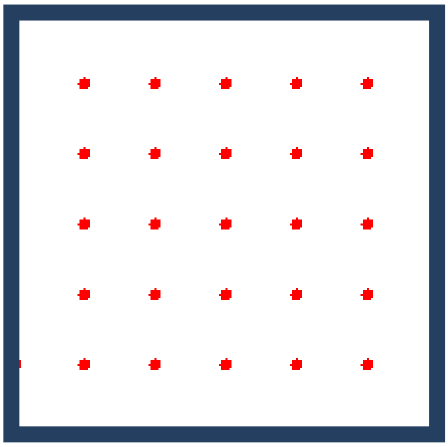


Esquema 7

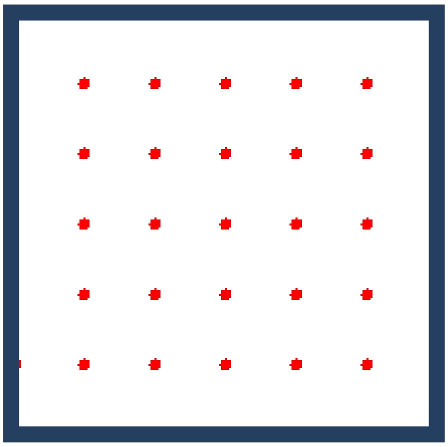


Esquema 8

3.4 Constrói no teu geoplano duas figuras com a **mesma área e perímetros diferentes** e desenha as figuras no papel ponteado, uma no esquema 9, outra no esquema 10.



Esquema 9



Esquema 10

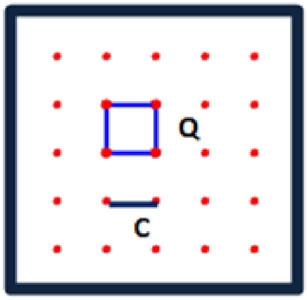
3.5 - Constrói no teu geoplano: duas figuras com perímetro 12, duas figuras com perímetro 16 e duas figuras com perímetro 18. Desenha as seis figuras na tua folha de papel ponteado e indica a seguir a área de cada uma:

Áreas das figuras com perímetro 16: Fig 1 ______ Fig 2 ______

Áreas das figuras com perímetro 18: Fig 3 ______ Fig 4 ______

Áreas das figuras com perímetro 12: Fig 5 ______ Fig 6 ______

4- Considera como unidade de comprimento, o comprimento do segmento **C** e como unidade de área, a área do quadrado **Q**, representados no papel ponteado do esquema aqui ao lado. Experimenta construir no teu geoplano cada um dos polígonos a seguir indicados e desenha na tua folha de papel ponteado os que conseguiste construir.



4.1 Um retângulo com perímetro 10.

4.2 Um triângulo escaleno obtusângulo.

4.3 Um quadrado de área 9.

4.4 Um triângulo equilátero.

4.5 Um quadrado de perímetro 16.

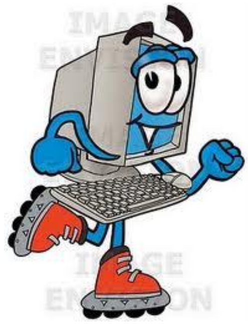
4.6 Um triângulo isósceles acutângulo.

4.7 Um quadrado de área 10

4.8 - Em relação aos polígonos que não conseguires construir explica a razão por que isso não foi possível.

Anexo VI – Geoplano Computacional (Ficha de trabalho 2)

Depois de jogarem no geoplano do meu amigo Gustavo, a Rita estava a fazer uma pesquisa no computador sobre jogos matemáticos e descobriu o mesmo jogo na Internet! Ficou toda entusiasmada e quando se encontrou com os amigos, na escola, contou-lhes:



- Descobri um geoplano que se pode jogar no computador!

- Boa Rita! – Exclamou o Gustavo

- Tive uma ideia! E se contássemos à professora de Matemática... Será que ela nos deixava jogar na sala de aula? – Disse o Vicente.

- Não custa nada experimentar... – Disse a Lara

Depois de conversar com Rita a professora de Matemática ficou entusiasmada!... E resolveu propor uma série de tarefas para trabalhar no geoplano computacional.

Vamos a Isto, Amigos! Adoramos Desafios!

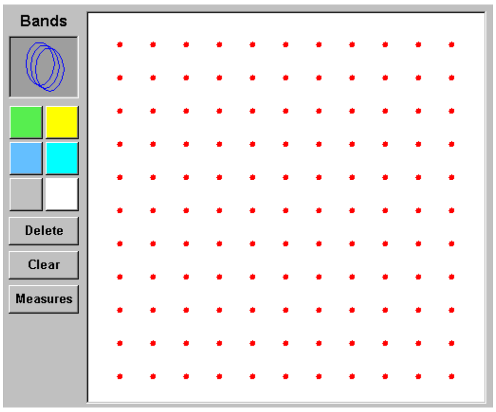
Liga o computador, clica no ícone  , para aceder ao geoplano, e segue as instruções do teu professor.

Após a realização de cada uma das tarefas, grava o trabalho final, com o teu nome, seguido do número da tarefa. Por exemplo: a Lara ao finalizar a tarefa 1 clicou no ícone 

,de seguida

no ícone pasta tarefas,  escreve em *File* : lara-1, clicando de seguida em *Save Image to Disk*

Posto isto, prossegue com a realização da ficha de trabalho, procedendo do mesmo modo, após a finalização de cada uma das tarefas.



1 - Constrói três figuras diferentes com **perímetro 12** e calcula a área de cada uma, indicando-a nos espaços abaixo indicados

Área da fig.1 _______

Área da fig. 2 _______

Área da fig. 3 _______

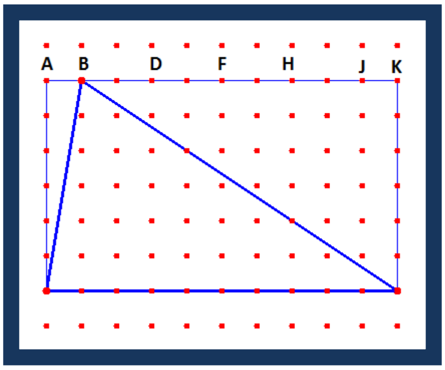
2 - Constrói três figuras diferentes com **área 12** e calcula o **perímetro de cada uma,** indicando-o nos espaços abaixo indicados

Perímetro da fig. 1 _______

Perímetro da fig. 2 _______

Perímetro da fig. 3 _______

3 – Com uma geobanda constrói uma figura, constituída por um retângulo 10 por 6 e um triângulo, no interior do retângulo, como a que vês no esquema 1



Esquema 1

3.1 – Na tabela 1, regista a área do retângulo. A seguir, desloca o vértice superior do triângulo, primeiro para B, depois para C, para D e assim sucessivamente até percorreres as letras todas e em cada mudança do vértice escreve na tabela 1, os dados do triângulo respetivo.

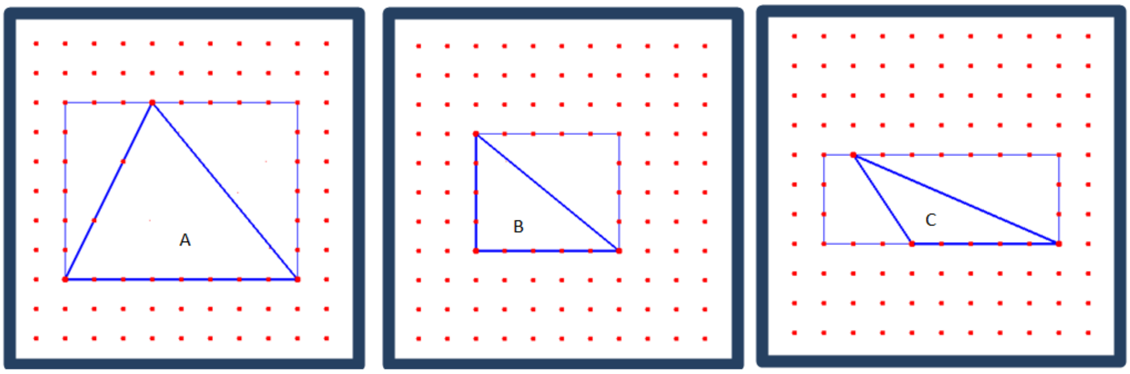
Para o cálculo da área dos triângulos obtidos, clica no ícone 

Vértice escolhido	Altura dos triângulos	Base dos triângulos	Área dos triângulos	Área do Retângulo
A				
B				
D				
F				
H				
J				
K				

Tabela I

3.2 – Observa com atenção os dados que registaste na tabela. Para cada um dos triângulos qual é a relação entra a sua área e a área do retângulo?

4 – Constrói no geoplano os retângulos e os triângulos de cada uma das figuras representadas no esquema 3.



Esquema 3

Determina a área dos triângulos A, B e C e explica como procedeste para as calcular:

Área de A _________

____

____

____

Área de B _________

____

____

____

Área de C _________

____

____

____

4.1 – Usando o trabalho que realizaste nas questões 3.1, 3.2 e 4 , Escreve uma **fórmula** que te permita calcular a área de qualquer triângulo, usando a altura e a base desse triângulo.

Escreve um texto para explicar a um amigo teu a fórmula que descobriste.

(podes também usar um desenho)

____

____

____

____

5 - Constrói no geoplano um triângulo com **área 12**. Explica como fizeste essa construção, indicando as respetivas medidas da altura e da base.

____

____

____

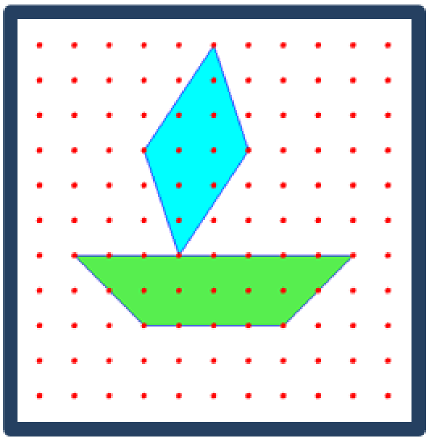
6 – Constrói no teu geoplano os triângulos indicados nas alíneas seguintes, todos com **área 12**:

a) Três triângulos obtusângulos escalenos

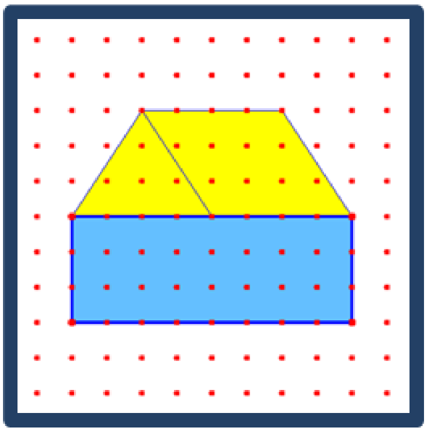
b) Dois triângulos acutângulos isósceles

c) Um triângulo retângulo.

7 – Com geobandas constrói no geoplano as figuras representadas no papel ponteado do esquema 5.



Barco



Casa

Esquema 5

7.1 - Calcula a área da figura ***Barco*** e explica como procedeste para chegar ao seu valor.

____

____

____

____

7.1 - Calcula a área da figura ***Casa*** e explica como procedeste para chegar ao seu valor.

____

____

____

____

Anexo VII - Guião das tarefas

Questões do estudo:

(i) Que potencialidades e limites evidencia o geoplano na resolução de tarefas, envolvendo os conceitos de perímetro e área de figuras plana?

(ii) Que estratégias e dificuldades os alunos manifestam na resolução de tarefas com o geoplano envolvendo as noções de perímetros e áreas de figuras plana?

Dificuldades Gerais:

- Compreensão (interpretação) do enunciado;
- Passagem da linguagem corrente para a linguagem Matemática (formalização);
- Explicação do raciocínio.

Dificuldades Especificas:

- Reprodução de figuras geométricas, no geoplano.
- Visualização de uma figura geométrica
- Distinção entre perímetros e áreas;
- Construção de figuras geométricas, obedecendo a determinados critérios;

Estratégias:

- Contagem
- Tentativa e erro
- Utilização de fórmulas
- Decomposição de figuras