

УДК [537.624]

КП

№ госрегистрации 0112U001383.

Инв. №

Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Сумский государственный университет
(СумГУ)

40007, г. Сумы, ул. Римского-Корсакова, 2;
тел. (0542) 33 41 08, факс (0542) 33 40 49

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе
д.ф.-м.н.

_____ А. Н. Чёрноус

ОТЧЁТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
**АНОМАЛЬНЫЕ ДИФфуЗИОННЫЕ И РЕЛАКСАЦИОННЫЕ
СВОЙСТВА КЛАСИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ БЛУЖДАНИЙ С
НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ**
(промежуточный)

Начальник НИЧ
к.ф.-м.н.

Д. И. Курбатов

Руководитель НИР
д.ф.-м.н., профессор

С. И. Денисов

2012

Рукопись закончена 10 декабря 2012 г.
Результаты работы рассмотрены научным советом СумГУ,
протокол от 27.12.2012, № 4

СПИСОК АВТОРОВ

Руководитель НИР, главный научный сотрудник д.ф.-м.н., профессор	10.12.2012	С. И. Денисов (реферат, введение, разделы 1-7, выводы)
Старший научный сотрудник к.ф.-м.н., доцент	10.12.2012	Е. С. Денисова (введение, разделы 1-4, 6)
Заведующий лабораторией к.ф.-м.н., доцент	10.12.2012	Т. В. Лютый (разделы 1-7, выводы)
Лаборант, аспирант	10.12.2012	Ю. С. Быстрик (реферат, введение, разделы 1-7, выводы)
Лаборант, студент	10.12.2012	В. В. Рева (разделы 5-7, выводы)

РЕФЕРАТ

Отчёт о НИР состоит из 61 с., 6 рис., 46 источников.

Целью работы является нахождение предельных плотностей вероятности положения частицы для определённого класса непрерывных во времени случайных блужданий.

Объект исследования — частица, совершающая непрерывные во времени случайные блуждания, которые характеризуются сверхтяжёлыми хвостами распределения времени ожидания между последовательными скачками и асимметрическими распределениями длины скачка с тяжёлыми хвостами.

Исследования проводились путём аналитического решения уравнения Монролла-Вейсса при больших значениях времени, а также с помощью численного моделирования изучаемого типа случайных блужданий.

Актуальность темы обусловлена тем, что многие стохастические системы, имеющие разительные отличия между собой, могут быть описаны с помощью формализма непрерывных во времени случайных блужданий. Так они применяются для изучения процессов в аperiodических средах, сверхмедленной диффузии, анализа финансовых и сейсмических данных, и т.д. Полученные нами результаты расширяют класс изученных случайных блужданий и применимы для понимания более широкого спектра аномальных явлений.

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ, УРАВНЕНИЕ МОНРОЛЛА-ВЕЙССА, АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ, ТЯЖЁЛЫЕ И СВЕРХТЯЖЁЛЫЕ ХВОСТЫ, АНОМАЛЬНАЯ ДИФФУЗИЯ, ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1 ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ПРЕДЫДУЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ...	8
2 ПРЕДЕЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ МАСШТАБИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ	14
2.1 Представление $\mathcal{P}(\mathbf{y})$ в виде обратного преобразования Фурье ...	14
2.2 Распределения длины скачка с $l_1 \neq 0$	16
2.3 Распределения длины скачка с $\alpha \in (1, 2)$ и $l_1 = 0$	16
2.4 Распределения длины скачка с $\alpha \in (0, 1)$	19
2.5 Распределения длины скачка с $\alpha = 1$	20
2.6 Распределения длины скачка с $\alpha = 2$	22
3 АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $\mathcal{P}(\mathbf{y})$	24
3.1 Плотность вероятности $\mathcal{P}(\mathbf{y})$ в терминах обратного преобразования Меллина	24
3.1.1 $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$	26
3.1.2 $\alpha \in (1, 2)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$, $l_1 = 0$	26
3.1.3 $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (0, 1)$, $u_+ \neq u_-$	27
3.1.4 $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (1, 2)$, $u_+ \neq u_-$, $l_1 = 0$	28
3.2 Плотность вероятности $\mathcal{P}(\mathbf{y})$ в терминах преобразования Лапласа	29
3.2.1 $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$	30
3.2.2 $\alpha \in (1, 2)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$, $l_1 = 0$	31
3.2.3 $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (0, 1)$, $u_+ \neq u_-$	33
3.2.4 $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (1, 2)$, $u_+ \neq u_-$, $l_1 = 0$	34
3.3 Представление $\mathcal{P}(\mathbf{y})$ в виде \mathbf{H} -функций Фокса	35

3.4	Представление $\mathcal{P}(y)$ в виде ряда	38
3.4.1	Иррациональные значения α	39
3.4.2	Рациональные значения α	39
4	ПОВЕДЕНИЕ $\mathcal{P}(y)$ НА МАЛЫХ И БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ	42
5	ДРОБНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ $\mathcal{P}(y)$	45
6	ЗАКОНЫ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ ИЗУЧАЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ	46
7	ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗУЧАЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ	50
7.1	Алгоритм	50
7.2	Примеры моделирования предельной плотности $\mathcal{P}(y)$	52
7.3	Примеры моделирования дисперсии положения $X(t)$	56
	ВЫВОДЫ	57
	ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК	58

ВВЕДЕНИЕ

Непрерывные во времени случайные блуждания¹ — это специальный класс кумулятивных скачкообразных процессов, которые характеризуются двумя случайными величинами, а именно: величиной скачка блуждающей частицы и временем ожидания между последовательными скачками. Поскольку для многих систем свойственны случайные величины, которые можно интерпретировать, как время между успешными переходами (скачками) системы в новое состояние и мерой перехода (величиной скачка), то СТ R W представляют удобную и гибкую модель для исследования разнообразных стохастических явлений. Так, например, СТ R W используются для описания аномальной диффузии и переноса вещества в неупорядоченных средах [1–4], изучения миграции [5, 6], анализа финансовых [7–10] и сейсмических [11, 12] данных.

Впервые СТ R W были представлены Э. Монтроллом и Дж. Вейссом в 1965 году в работе [13] (см. также обзоры [2, 3]), и согласно их теории плотность вероятности $P(x, t)$ положения $X(t)$ блуждающей частицы зависит только от её совместной плотности вероятности времени ожидания и величины скачка. Заметим, что в общем случае положение частицы $X(t)$ есть n -мерный вектор, т. е. под длиной скачка подразумеваются величины перемещения вдоль пространственных осей координат. Однако, когда движение вдоль различных направлений независимо, достаточно рассматривать одномерную модель. Более того, часто особый интерес представляет несвязанный (decoupled) случай, при котором времена ожидания и длины скачков не зависят друг от друга. В этой ситуации вместо совместной плотности мы имеем независимые друг от друга плотность вероятности $p(\tau)$ времени ожидания между скачками и плотность вероятности $w(\xi)$ величины скачка. Тем не менее, даже в простой одномерной ситуации несвязанного блуждания точные решения найдены только для некоторых частных случаев [14–16]. Зато асимптотическое (во времени) поведение плотности веро-

¹В научной литературе общепринятым сокращением для такого рода процессов сокращением есть СТ R W (continuous-time random walk), поэтому далее в тексте будем использовать эту аббревиатуру.

ятности $P(x, t)$, которое определяет диффузионные и транспортные свойства блуждающих частиц, было изучено гораздо лучше [17–21].

Под асимптотическим решением имеется ввиду плотность вероятности специальным образом масштабированного положения частицы $Y(t) = a(t)X(t)$ при $t \rightarrow \infty$, где $a(t)$ — масштабирующая функция, выбор которой зависит от поведения на бесконечности $p(\tau)$ и $w(\xi)$ и осуществляется таким образом, чтобы плотность вероятности для $Y(t)$ была невырожденной. Такие решения приведены, в частности, для всех несвязанных плотностей вероятности времени ожидания и длины скачка, которые имеют конечный момент второго порядка или тяжёлые хвосты [20].

К тому же, возникает интерес исследования СТРУ со сверхтяжёлыми хвостами распределения времени ожидания [22]. Поскольку все дробные моменты таких распределений бесконечны, то этот случай оказывается очень удобным для моделирования аномального поведения многих систем и процессов, таких как итерационные отображения [23], ультрамедленная кинетика [24], сверхмедленная диффузия [25], динамика Ланжевена [26, 27]. Для СТРУ, которые характеризуются произвольными сверхтяжёлыми распределениями вероятности времени ожидания, соответствующие масштабирующие функции $a(t)$ и предельные (по времени) плотности вероятности $\mathcal{P}(y)$ нового положения частицы $Y(t)$ при $t \rightarrow \infty$ были недавно получены для распределений величины скачка с конечными моментами второго порядка [28] и для симметричных распределений величины скачка с тяжёлыми хвостами [29].

В данной работе (см. также [30] и [31]) мы продолжаем предыдущие исследования и представляем детальное аналитическое и численное исследование СТРУ со сверхтяжёлыми плотностями вероятности времени ожидания и тяжёлыми асимметрическими плотностями вероятности длины скачка.

1 ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ПРЕДЫДУЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Одной из наиболее важных статистических характеристик для случайных блужданий является предельная плотность вероятности определённым образом масштабированного положения частицы при больших значениях времени, поскольку именно она отвечает за наиболее важные транспортные свойства изучаемых явлений. При описании таких явлений под большим значением времени удобно подразумевать $t \rightarrow \infty$, что влечёт за собой и условие $N \rightarrow \infty$ (где N — количество скачков за соответствующий промежуток времени). Исходя из этого, необходимые решения можно получить используя обобщённые центральные предельные теоремы [32, 33], которые позволяют установить закон распределения интересующего нас положения частицы именно в предположении $N \rightarrow \infty$. Однако, понятно, что с физической точки зрения условие $t \rightarrow \infty$ (а поэтому и $N \rightarrow \infty$) являются лишь полезной абстракцией, и на самом деле мы всегда будем иметь дело с конечным значением t , пусть оно и очень большое. Отсюда следовало бы утверждать, что и число скачков за это время на самом деле будет конечное большое число. Тем не менее, это суждение не выполняется в случае сверхмедленных блужданий, для которых за сколь угодно большой промежуток времени частица может не сдвинуться с места, т. е. при большом t величина N может быть малого порядка (в среднем). Следовательно, для сверхмедленных блужданий полученные на основе центральных предельных теорем результаты могут оказаться довольно грубыми. Таким образом, для как можно более точного описания сверхмедленных случайных процессов желательно искать решения с помощью подхода, который не требует допущения значительного числа скачков. В таком случае вместо центральных предельных теорем следует использовать формализм непрерывных во времени случайных блужданий (CTRW), и искать их асимптотические по времени распределения.

Для несвязанных CTRW, когда множества времён ожидания между последовательными скачками $\{\tau_n\}$ и длин скачков $\{\xi_n\}$ не зависят друг от друга, плотность вероятности $P(x, t)$ положения частички $X(t)$ в про-

странстве Фурье-Лапласа даётся уравнением Монролла-Вейсса [13]

$$P_{ks} = \frac{1 - p_s}{s(1 - p_s w_k)}. \quad (1.1)$$

Здесь $w_k = \mathcal{F}\{w(\xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{ik\xi} w(\xi)$ ($-\infty < k < \infty$) – преобразование Фурье для плотности $w(\xi)$, $p_s = \mathcal{L}\{p(\tau)\} = \int_0^{\infty} d\tau e^{-s\tau} p(\tau)$ ($\text{Res} > 0$) – преобразование Лапласа для $p(\tau)$, и $P_{ks} = \mathcal{F}\{\mathcal{L}\{P(x, t)\}\}$.

Представляя уравнение (1.1) в форме

$$P_{ks} = \frac{1 - p_s}{s} + \frac{(1 - p_s)p_s w_k}{s(1 - p_s w_k)} \quad (1.2)$$

и применяя к последнему выражению обратное преобразование Фурье [$\mathcal{F}^{-1}\{f_k\} = f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} f_k$], получаем

$$P_s(x) = \frac{1 - p_s}{s} \delta(x) + \frac{(1 - p_s)p_s}{s} \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{w_k}{1 - p_s w_k}\right\}, \quad (1.3)$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. Тогда, используя обратное преобразование Лапласа [$\mathcal{L}^{-1}\{g_s\} = g(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{st} g_s$, c – действительное число, превосходящее действительные части всех сингулярностей g_s] к формуле (1.3), для плотности вероятности положения частицы находим

$$P(x, t) = V(t)\delta(x) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(1 - p_s)p_s}{s} \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{w_k}{1 - p_s w_k}\right\}\right\}, \quad (1.4)$$

где

$$V(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 - p_s}{s}\right\} = \int_t^{\infty} d\tau p(\tau) \quad (1.5)$$

– вероятность того, что за время t частичка не совершит скачка, т. е. останется в начальном положении $X(0) = 0$. Согласно определению (1.5), эта вероятность удовлетворяет условию $V(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $V(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow 0$.

Поскольку мы полагаем, что $X(0) = 0$, то начальным условием есть $P(x, t) = \delta(x)$. Также, если граничные условия специально не оговарива-

ются, то мы считаем $P(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для всех x . Из этого следует, что вероятность нахождения частицы в любом интервале является нулевой, т. е. будет казаться, что искомое распределение есть равномерным.

Это подталкивает нас при больших временах ввести масштабированную координату $Y(t) = a(t)X(t)$ со специально подобранной масштабирующей функцией $a(t) \rightarrow \infty$. Следовательно, теперь нам нужно вместо плотности $P(x, t)$ рассматривать асимптотическое поведение плотности вероятности $\mathcal{P}(y, t) = a^{-1}(t)P(y/a(t), t)$ положения $Y(t)$. При этом функцию $a(t)$ нужно выбрать таким образом, чтобы существовал предел

$$\mathcal{P}(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a(t)} P\left(\frac{y}{a(t)}, t\right). \quad (1.6)$$

В случае слишком быстрого стремления $a(t)$ к нулю $\mathcal{P}(y) = \delta(y)$, если же $a(t)$ стремится к нулю недостаточно быстро, то $\mathcal{P}(y) \rightarrow 0$. Тем не менее, можно найти специальный класс асимптотического поведения $a(t)$, для которого предельные вероятности будут невырожденными. При этом предельная плотность $\mathcal{P}(y)$ и масштабирующая функция $a(t)$ определяют поведение оригинальной плотности вероятности при больших значениях времени, а именно $P(x, t) \sim a(t)\mathcal{P}(a(t)x)$ при $t \rightarrow \infty$. Во избежание недопонимания, заметим, что последнее соотношение справедливо только для $\mathcal{P}(y) \neq 0$; в других областях y , где $\mathcal{P}(y) = 0$ (см. детали ниже), использование предельной плотности вероятности для нахождения поведения $P(x, t)$ при больших временах становится некорректным.

Для сверхмедленных блужданий (т. е. при сверхтяжёлых распределениях времён ожидания) эта задача недавно решена для несвязанной модели СТРС с плотностями вероятности длины скачка с конечными моментами второго порядка [28] или с симметрическими тяжёлыми плотностями длины скачка [29].

Сверхтяжёлые распределения времени ожидания характеризуются следующим асимптотическим поведением

$$p(\tau) \sim \frac{h(\tau)}{\tau} \quad (\tau \rightarrow \infty), \quad (1.7)$$

где $h(\tau)$ — это медленно меняющаяся на бесконечности функция, т. е. $h(\mu\tau) \sim h(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ для всех $\mu > 0$. Поскольку $p(\tau)$ нормирована ($\int_0^\infty d\tau p(\tau) = 1$), то функция $h(\tau)$ должна удовлетворять условию $h(\tau) = o(1/\ln \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Главная особенность таких плотностей состоит в том, что все их дробные моменты $\int_0^\infty d\tau \tau^c p(\tau)$ бесконечны при всех $c > 0$. Показано [27], что если $p(\tau)$ имеет сверхтяжёлые хвосты и $w(\xi)$ имеет конечный момент второго порядка $l_2 = \int_{-\infty}^\infty d\xi \xi^2 w(\xi)$, тогда

$$\mathcal{P}(y) = \frac{2 - \delta_{l_1,0}}{2} e^{-|y|} H(l_1 y) \quad (1.8)$$

и

$$a(t) \sim \begin{cases} \sqrt{2V(t)/l_2}, & l_1 = 0 \\ V(t)/|l_1|, & l_1 \neq 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

при $t \rightarrow \infty$. Здесь $\delta_{a,b}$ — символ Кронекера ($\delta_{a,b} = 1$, если $a = b$ и $\delta_{a,b} = 0$, если $a \neq b$) и $H(x)$ — функция Хевисайда [$H(x) = 1$, если $x \geq 0$ и $H(x) = 0$, если $x < 0$], и $l_1 = \int_{-\infty}^\infty d\xi \xi w(\xi)$ — момент первого порядка $w(\xi)$. Заметим, что если $l_1 \neq 0$, тогда предельная плотность вероятности односторонняя: $\mathcal{P}(y) = 0$ на той полуоси y , где $l_1 y < 0$.

Если плотность вероятности величины скачка симметричная $w(-\xi) = w(\xi)$ и имеет тяжёлые хвосты, то

$$w(\xi) \sim \frac{u}{|\xi|^{1+\alpha}} \quad (|\xi| \rightarrow \infty), \quad (1.10)$$

где константа $u > 0$ и хвостовой параметр $\alpha \in (0, 2]$. Согласно работе [29] в этом случае предельная плотность вероятности может быть записана

В виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(y) &= \frac{1}{\alpha} H_{2,3}^{2,1} \left[|y| \left| \begin{array}{l} (1 - 1/\alpha, 1/\alpha), (1/2, 1/2) \\ (0, 1), (1 - 1/\alpha, 1/\alpha), (1/2, 1/2) \end{array} \right. \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-|y|x} \frac{\sin(\pi\alpha/2)x^\alpha}{1 + 2\cos(\pi\alpha/2)x^\alpha + x^{2\alpha}} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\cos(yx)}{1 + x^\alpha} \tag{1.11}
\end{aligned}$$

($H_{2,3}^{2,1}[\cdot]$ – это частный случай H – функций Фокса). Соответствующие масштабированные функции даются выражением

$$a(t) \sim \begin{cases} \left(\frac{\Gamma(1+\alpha)\sin(\pi\alpha/2)}{\pi u} V(t) \right)^{1/\alpha}, & 0 < \alpha < 2 \\ \sqrt{\frac{2V(t)}{u \ln[1/V(t)]}}, & \alpha = 2 \end{cases} \tag{1.12}$$

при $t \rightarrow \infty$. Здесь $\Gamma(1 + \alpha)$ – гамма функция. Отметим, что уравнение (1.11) при $\alpha = 2$ сводится к (1.8) с $l_1 = 0$. Однако, так как в последнем случае $l_2 = \infty$, то масштабированная функция в формуле (1.12) отличается от данной в уравнении (1.9). Также заметим, что если $p(\tau)$ имеет сверхтяжёлые хвосты, то $V(t)$ – медленно меняющаяся функция [27]. Поэтому, в соответствии с выражениями (1.9) и (1.12), плотность вероятности $P(x, t)$ будет тоже очень медленно изменяться со временем.

Характерное поведение плотностей вероятности, определяемых формулами (1.11), показано на рисунке 1.1.

В данной работе мы продолжаем предыдущие исследования и изучим поведение при больших временах СТРУ со сверхтяжёлыми хвостами времени ожидания (1.7) и асимметрическими тяжёлыми плотностями вероятности величины скачка. Отметим, что распределения $w(\xi)$ могут иметь один или два тяжёлых хвоста. Впрочем, предельная плотность вероятности $\mathcal{P}(y)$ будет зависеть только от наименее убывающего хвоста $w(\xi)$ (см. ниже), а поэтому, не теряя общности, мы полагаем оба хвоста $w(\xi)$ тяжёлыми

$$w(\xi) \sim \frac{u_\pm}{|\xi|^{1+\alpha_\pm}} \quad (\xi \rightarrow \pm\infty) \tag{1.13}$$

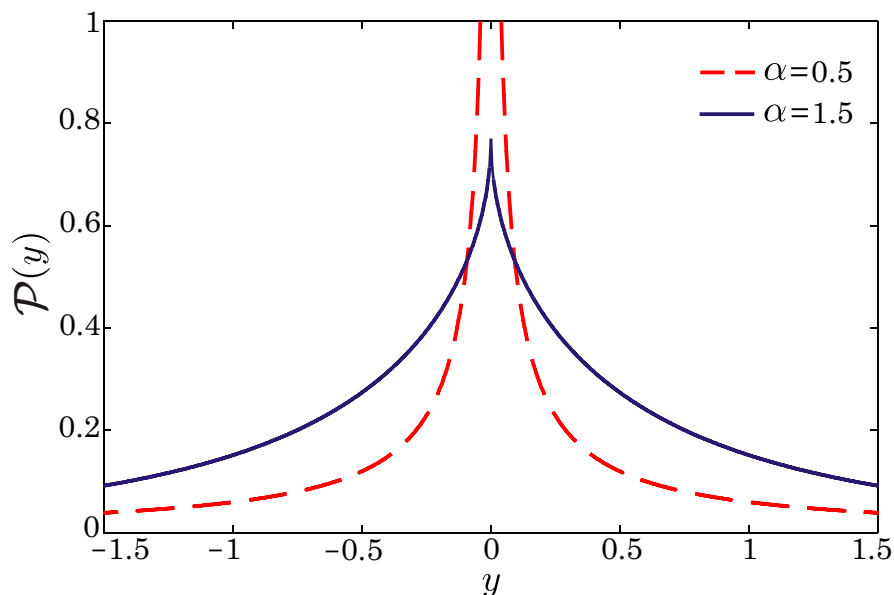


Рисунок 1.1 — Предельная плотность вероятности (1.11) для симметрических блужданий при параметрах $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$.

Здесь $u_{\pm} > 0$ и $\alpha_{\pm} \in (0, 2]$.

В отличие от статьи [29], сейчас мы сконцентрируем внимание на изучении влияния несимметричности распределения длины скачков и покажем, что этот факт существенно сказывается на предельном распределении масштабированного положения частицы. Вдобавок, мы собираемся провести численное моделирование СТРУ, чтобы проверить предсказательные возможности теоретически полученных результатов.

2 ПРЕДЕЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ МАСШТАБИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ

2.1 Представление $\mathcal{P}(y)$ в виде обратного преобразования Фурье

Исходным пунктом для получения асимптотического поведения плотности вероятности $P(x, t)$ при больших временах является формула (1.3). Далее, мы используем тауберову теорему Караматы для преобразования Лапласа [34], которая гласит, что если функция $v(t)$ начиная с некоторого момента будет монотонной и $v_s \sim s^{-\gamma}L(1/s)$ ($0 < \gamma < \infty$) при $s \rightarrow 0$, тогда $v(t) \sim t^{\gamma-1}L(t)/\Gamma(\gamma)$ при $t \rightarrow \infty$, где $L(t)$ медленно меняется на бесконечности. Таким образом, поведение $P(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ будет задаваться поведением $P_s(x)$ при $s \rightarrow 0$. Следовательно, исходя из формулы (1.3), нам необходимо для начала найти асимптотику p_s при малых значениях s . Используя формулу

$$\begin{aligned} 1 - p_s &= \int_0^\infty dt(1 - e^{-st})p(t) \\ &= \int_0^\infty dqe^{-q}V(q/s) \end{aligned} \quad (2.1)$$

и принимая во внимание, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(\mu t)}{V(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mu t}^\infty d\tau p(\tau)}{\int_t^\infty d\tau p(\tau)} = 1, \quad (2.2)$$

(т. е. $V(t)$ является медленно меняющейся на бесконечности), имеем

$$1 - p_s \sim V(1/s) \quad (2.3)$$

при $s \rightarrow 0$. А поэтому уравнение (1.3) даёт

$$P_s(x) \sim \frac{V(1/s)}{s} \delta(x) + \frac{V(1/s)[1 - V(1/s)]}{2\pi s} \times \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-ikx}}{V(1/s) + 1 - w_k}. \quad (2.4)$$

Применяя к $P_s(x)$ сформулированную выше тауберову теорему, из выражения (2.4) следует

$$P(x, t) \sim V(t)\delta(x) + \frac{V(t)[1 - V(t)]}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-ikx}}{V(t) + 1 - w_k} \quad (2.5)$$

($t \rightarrow \infty$). С помощью этого результата мы можем представить предельную плотность вероятности (1.6) в виде обратного преобразования Фурье

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{e^{-i\kappa y}}{1 + \Phi(\kappa)}, \quad (2.6)$$

где

$$\Phi(\kappa) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - w_{\kappa a(t)}}{V(t)}. \quad (2.7)$$

Отметим, что так как $\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-i\kappa y} = 2\pi\delta(\kappa)$ и $\Phi(0) = 0$, то легко видеть, что эта плотность вероятности нормирована ($\int_{-\infty}^{+\infty} dy \mathcal{P}(y) = 1$). Однако, факт неотрицательности $\mathcal{P}(y)$ из формулы (2.6) не виден и будет показан далее. Также ниже мы проведём детальное аналитическое исследование, чтобы получить более удобные формы представления $\mathcal{P}(y)$ и соответствующие функции $a(t)$ во всех интересующих нас случаях, и покажем, что $\mathcal{P}(y)$ удовлетворяет простое дробное (по пространственной координате) уравнение.

2.2 Распределения длины скачка с $l_1 \neq 0$

Если первый момент l_1 плотности вероятности величины скачков существует и не равен нулю, тогда из соотношения $1 - w_k = \int_{-\infty}^{\infty} dx(1 - e^{ikx})w(x)$ при $k \rightarrow 0$ следует $1 - w_k \sim -il_1k$, и поэтому уравнение (2.7) сводится к виду

$$\Phi(\kappa) = -i\kappa \operatorname{sgn}(l_1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|l_1|a(t)}{V(t)} \quad (2.8)$$

[$\operatorname{sgn}(x) = \pm 1$, если $x \gtrless 0$]. Выбирая следующее асимптотическое поведение масштабирующей функции

$$a(t) \sim \frac{V(t)}{|l_1|} \quad (2.9)$$

($t \rightarrow \infty$) уравнение (2.8) даёт $\Phi(\kappa) = -i\kappa \operatorname{sgn}(l_1)$. Значит из (2.6) мы получаем одностороннее экспоненциальное распределение

$$\mathcal{P}(y) = e^{-|y|} H(l_1 y). \quad (2.10)$$

Эта плотность вероятности описывает CTRW-процесс, который характеризуется сверхтяжёлыми распределениями времени ожидания и тяжёлыми распределениями величины скачка с конечным ненулевым моментом первого порядка. Следовательно, формулы (2.9) и (2.10), в частности, характеризуют CTRW с конечным моментом второго порядка для $w(\xi)$ [см. уравнение (1.8)] или с тяжёлыми хвостами $w(\xi)$ при $\alpha_{\pm} \in (1, 2]$.

2.3 Распределения длины скачка с $\alpha \in (1, 2)$ и $l_1 = 0$

Если момент первого порядка $w(\xi)$ равен нулю, тогда для нахождения асимптотического поведения $1 - w_k$ при $k \rightarrow 0$ используем следующую

формулу:

$$1 - w_k = \frac{1}{|k|} \int_0^\infty dx (1 - \cos x) w^+ \left(\frac{x}{|k|} \right) + \frac{i}{k} \int_0^\infty dx (x - \sin x) w^- \left(\frac{x}{|k|} \right), \quad (2.11)$$

где

$$w^\pm(\xi) = w(\xi) \pm w(-\xi). \quad (2.12)$$

Введём обозначение

$$\alpha = \min\{\alpha_+, \alpha_-\} \quad (2.13)$$

и сосредоточимся пока что на случае $\alpha \in (1, 2)$. Тогда, используя стандартные интегралы [35]

$$\int_0^\infty dx \frac{1 - \cos x}{x^{1+\nu}} = \frac{\pi}{2\Gamma(1 + \nu) \sin(\pi\nu/2)} \quad (2.14)$$

($0 < \nu < 2$) и

$$\int_0^\infty dx \frac{x - \sin x}{x^{1+\nu}} = -\frac{\pi}{2\Gamma(1 + \nu) \cos(\pi\nu/2)} \quad (2.15)$$

($1 < \nu < 2$), можно показать, что из уравнения (2.11) следует

$$1 - w_k \sim q|k|^\alpha - i \operatorname{sgn}(k)r|k|^\alpha \quad (2.16)$$

($k \rightarrow 0$), где

$$q = \frac{\pi}{2\Gamma(1 + \alpha) \sin(\pi\alpha/2)} (u_+ \delta_{\alpha\alpha_+} + u_- \delta_{\alpha\alpha_-}) \quad (2.17)$$

и

$$r = \frac{\pi}{2\Gamma(1 + \alpha) \cos(\pi\alpha/2)} (u_+ \delta_{\alpha\alpha_+} - u_- \delta_{\alpha\alpha_-}). \quad (2.18)$$

Стоит отметить, что выражения (2.16)–(2.18) справедливы также и для случая $\alpha_{\max} = \max\{\alpha_+, \alpha_-\}$, т. е. для $\alpha_{\max} \in [\alpha, 2]$.

Пусть $a(t)$ имеет следующее асимптотическое поведение

$$a(t) \sim \left(\frac{V(t)}{\sqrt{q^2 + r^2}} \right)^{1/\alpha} \quad (2.19)$$

($t \rightarrow \infty$), тогда из соотношений (2.7) и (2.16) получаем

$$\Phi(\kappa) = (\cos \varphi - i \operatorname{sgn}(\kappa) \sin \varphi) |\kappa|^\alpha, \quad (2.20)$$

и предельная плотность (2.6) представляется в форме

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\kappa \frac{(1 + \cos \varphi \kappa^\alpha) \cos(y\kappa) + \sin \varphi \kappa^\alpha \sin(y\kappa)}{1 + 2 \cos \varphi \kappa^\alpha + \kappa^{2\alpha}}. \quad (2.21)$$

Здесь

$$\cos \varphi = \frac{q}{\sqrt{q^2 + r^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{r}{\sqrt{q^2 + r^2}} \quad (2.22)$$

и

$$\begin{aligned} \sqrt{q^2 + r^2} &= \frac{\pi}{2\Gamma(1 + \alpha) \sin(\pi\alpha/2) |\cos(\pi\alpha/2)|} \\ &\times (2 \cos(\pi\alpha) u_+ u_- \delta_{\alpha\alpha_+} \delta_{\alpha\alpha_-} \\ &+ u_+^2 \delta_{\alpha\alpha_+} + u_-^2 \delta_{\alpha\alpha_-})^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Предельная плотность вероятности (2.21) и соответствующая ей масштабированная функция (2.19) описывают как симметрические, так и несимметрические СТРУ. В частности, если $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (1, 2)$ и $u_+ = u_- = u$, то $\varphi = 0$,

$$\sqrt{q^2 + r^2} = \frac{\pi u}{\Gamma(1 + \alpha) \sin(\pi\alpha/2)}, \quad (2.24)$$

и уравнения (2.21) и (2.19) сводятся к (1.11) и (1.12).

2.4 Распределения длины скачка с $\alpha \in (0, 1)$

Поскольку при $\alpha \in (0, 1)$ момент первого порядка плотности $w(\xi)$ не существует, то в этом случае удобно вместо (2.11) использовать выражение:

$$1 - w_k = \frac{1}{|k|} \int_0^\infty dx (1 - \cos x) w_+ \left(\frac{x}{|k|} \right) - \frac{i}{k} \int_0^\infty dx \sin x w_- \left(\frac{x}{|k|} \right). \quad (2.25)$$

На первый взгляд кажется, что при $\alpha_{\max} \in [\alpha, 1)$ и $\alpha_{\max} \in [1, 2]$ имеют место две разные ситуации. Однако, так как нас интересует главный член разложения $1 - w_k$ при $k \rightarrow 0$, мы можем ограничить себя рассмотрением (2.25) только при $\alpha_{\max} \in [\alpha, 1)$. Тогда, используя асимптотическую формулу (1.13), стандартный интеграл (2.14) и

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x^{1+\nu}} = \frac{\pi}{2\Gamma(1+\nu) \cos(\pi\nu/2)} \quad (2.26)$$

($0 < \nu < 1$), можно показать, что уравнение (2.25) при $k \rightarrow 0$ соответствует (2.16) с параметрами q и r , которые даются формулами (2.17) и (2.18). Так как эти результаты имеют место также и для $\alpha_{\max} \in [1, 2]$, то следует вывод, что выражения (2.19) и (2.21) для функции $a(t)$ и плотности $\mathcal{P}(y)$ справедливы не только при $\alpha \in (1, 2)$, но и при $\alpha \in (0, 1)$. Отметим, что из формул (2.19) и (2.21) при $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (0, 1)$ и $u_+ = u_- = u$ получаются выражения (1.12) и (1.11).

2.5 Распределения длины скачка с $\alpha = 1$

Обозначим первый и второй член в правой части уравнения (2.25) соответственно через J_1 и J_2 , тогда для $\alpha = 1$ при $k \rightarrow 0$ получим

$$J_1 \sim \frac{\pi}{2}(u_+\delta_{1\alpha_+} + u_-\delta_{1\alpha_-})|k| \quad (2.27)$$

и

$$\begin{aligned} J_2 &\sim ik \int_{c|k|}^{\infty} dx \frac{\sin x}{x^2} (u_+\delta_{1\alpha_+} - u_-\delta_{1\alpha_-}) \\ &\sim i(u_+\delta_{1\alpha_+} - u_-\delta_{1\alpha_-})k \ln \frac{1}{|k|}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где константа $c > 0$. Если параметр

$$\rho = u_+\delta_{1\alpha_+} - u_-\delta_{1\alpha_-} \quad (2.29)$$

не равен нулю, то $J_1 = o(J_2)$, а следовательно

$$1 - w_k \sim -i\rho k \ln \frac{1}{|k|} \quad (2.30)$$

($k \rightarrow 0$) и

$$\begin{aligned} \Phi(\kappa) &= -i\rho\kappa \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{V(t)} \ln \frac{1}{|\kappa|a(t)} \\ &= -i\rho\kappa \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{V(t)} \ln \frac{1}{a(t)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Пусть при больших значениях времени

$$\frac{|\rho|a(t)}{V(t)} \ln \frac{1}{a(t)} \sim 1, \quad (2.32)$$

тогда можно показать, что

$$a(t) \sim \frac{V(t)}{|\rho| \ln[1/V(t)]} \quad (2.33)$$

при $t \rightarrow \infty$, а значит $\Phi(\kappa) = -i\kappa \operatorname{sgn}(\rho)$ и

$$\mathcal{P}(y) = e^{-|y|} H(\rho y). \quad (2.34)$$

Сравнение формул (2.34) и (2.10) показывает, что $\mathcal{P}(y)$ при $\alpha = 1$ и $\rho \neq 0$ имеет такую же форму, как и в случае $\alpha \in (1, 2)$ ($l_1 \neq 0$), только роль момента первого порядка $w(\xi)$ (который равен бесконечности при $\alpha = 1$) будет играть параметр ρ . Однако, это только частичная аналогия, так как в этих ситуациях будут различные масштабирующие функции (2.9) и (2.33).

В противном случае, если $\rho = 0$ (это может быть только когда $\alpha_+ = \alpha_- = 1$ и $u_+ = u_- = u$), $J_2 = 0$ и вклад делает только член J_1 , т.е.

$$1 - w_k \sim \pi u |k| \quad (2.35)$$

($k \rightarrow 0$) и

$$\Phi(\kappa) = \pi u \kappa \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{V(t)}. \quad (2.36)$$

Выбирая поведение масштабирующей функции в виде

$$a(t) \sim \frac{V(t)}{\pi u}, \quad (2.37)$$

из (2.6) с $\Phi(\kappa) = |\kappa|$ мы получаем

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\kappa \frac{\cos(y\kappa)}{1 + \kappa}. \quad (2.38)$$

Этот результат является частным случаем формулы (1.11) с той же масштабирующей функцией, что и в уравнении (1.12) при $\alpha = 1$.

2.6 Распределения длины скачка с $\alpha = 2$

Поскольку $\alpha_{\pm} \leq 2$, то из условия $\alpha = 2$ находим $\alpha_+ = \alpha_- = 2$. Очевидно, что если $l_1 \neq 0$, то предельная плотность вероятности даётся формулой (2.10) с соответствующей ей масштабирующей функцией (2.9). Однако, при $l_1 = 0$ из (2.11) и (2.7) получаем

$$\begin{aligned} 1 - w_k &\sim (u_+ + u_-)k^2 \int_{c|k|}^{\infty} dx \frac{1 - \cos x}{x^3} \\ &\sim \frac{1}{2}(u_+ + u_-)k^2 \ln \frac{1}{|k|} \end{aligned} \quad (2.39)$$

($k \rightarrow 0$, константа $0 < c < \infty$) и поэтому

$$\Phi(\kappa) = \frac{1}{2}(u_+ + u_-)\kappa^2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a^2(t)}{V(t)} \ln \frac{1}{a(t)}. \quad (2.40)$$

При следующем поведении масштабирующей функции

$$a(t) \sim 2 \sqrt{\frac{V(t)}{(u_+ + u_-) \ln[1/V(t)]}} \quad (2.41)$$

($t \rightarrow \infty$) функция $\Phi(\kappa) = \kappa^2$ и из (2.6) имеем

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\kappa \frac{\cos(y\kappa)}{1 + \kappa^2} = \frac{1}{2} e^{-|y|}. \quad (2.42)$$

Этот результат при $u_+ = u_-$ совпадает с решением (1.11) и (1.12) в симметрическом случае для $\alpha = 2$. Тем не менее, поскольку условие $l_1 = 0$ не влечёт за собой $w(-\xi) = w(\xi)$, то двухсторонняя экспоненциальная плотность (2.42) соответствует более широкому классу плотностей величины скачка с $\alpha = 2$ и $l_1 = 0$. Отметим также, что предельная плотность вероятности (2.42), как и (2.38), может быть получена из общего представления (2.21) при выполнении предельного перехода $\alpha \rightarrow 2$ и $\alpha \rightarrow 1$. Однако, так как (2.41) и (2.33) не следуют из (2.19), то мы описали эти случаи отдельно.

Таким образом, подводя итоги описанным выше результатам, СТ W со сверхтяжёлыми хвостами плотности вероятности времени ожидания характеризуются двумя различными ситуациями.

В первом случае мы имеем одностороннее экспоненциальное распределение (2.10), соответствующее плотностям величины скачка с конечным ненулевым моментом первого порядка. К тому же, эти же предельные плотности возникают и при $\alpha = 1$ с $\rho = u_+ \delta_{1\alpha_+} - u_- \delta_{1\alpha_-} \neq 0$. Сюда же мы относим и двустороннее экспоненциальное распределение (2.42) при $\alpha = 2$ и $l_1 = 0$. Важной особенностью этого случая есть то, что положение $Y(t)$ имеет конечную дисперсию, а значит мы имеем дело с диффузионным процессом (см. раздел 6).

Во втором случае предельная плотность даётся выражением (2.21) и описывает СТ W при тяжёлых хвостах величины скачка с $\alpha \in (1, 2)$ и $l_1 = 0$, и $\alpha \in (0, 1)$. Также ко второму случаю можно свести предельную плотность (2.38) при $\alpha = 1$ с $\rho = 0$, если в (2.21) положить $\alpha = 1$ и $\varphi = 0$. Характерной особенностью этих плотностей является то, что они будут иметь тяжёлые хвосты (см. раздел 4), т. е. дисперсия $Y(t)$ будет всегда бесконечной и имеет место процесс переноса, но не диффузия.

В завершение этого раздела добавим, что в силу осциллирующего характера подынтегральной функции в (2.21) использование $\mathcal{P}(y)$ в этом виде не удобно. Поэтому, чтобы лучше изучить аналитические свойства предельной плотности вероятности, далее мы найдем более предпочтительные формы её представления.

3 АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $\mathcal{P}(y)$

3.1 Плотность вероятности $\mathcal{P}(y)$ в терминах обратного преобразования Меллина

Для нахождения альтернативного представления предельной плотности вероятности мы для начала перепишем $\mathcal{P}(y)$ формулу (2.21) в виде

$$\mathcal{P}(y) = \mathcal{P}_1(y) + \operatorname{sgn}(y)\mathcal{P}_2(y), \quad (3.1)$$

где

$$\mathcal{P}_1(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\kappa \frac{(1 + \cos \varphi \kappa^\alpha) \cos(y\kappa)}{1 + 2 \cos \varphi \kappa^\alpha + \kappa^{2\alpha}} \quad (3.2)$$

и

$$\mathcal{P}_2(y) = \frac{\sin \varphi}{\pi} \int_0^\infty d\kappa \frac{\kappa^\alpha \sin(|y|\kappa)}{1 + 2 \cos \varphi \kappa^\alpha + \kappa^{2\alpha}} \quad (3.3)$$

Применим к функциям $\mathcal{P}^\pm(y) = \mathcal{P}_1(y) \pm \mathcal{P}_2(y)$ [где $\mathcal{P}(y)|_{y \geq 0} = \mathcal{P}^+(y)$] преобразование Меллина, которое для функции $f(y)$ определяется следующим образом: $f_r = \mathcal{M}\{f(y)\} = \int_0^\infty dy f(y) y^{r-1}$, при этом для $f(y) = \int_0^\infty dx u(yx)v(x)$ справедливо выражение $f_r = u_r v_{1-r}$ (смотрите, например, [36]). Исходя из этого получаем

$$\mathcal{P}_r^\pm = \mathcal{M}\{\cos y\} F_{1-r} \pm \mathcal{M}\{\sin y\} G_{1-r}. \quad (3.4)$$

Здесь, согласно книге [37], $\mathcal{M}\{\cos y\} = \Gamma(r) \cos(\pi r/2)$ ($0 < \operatorname{Re} r < 1$), $\mathcal{M}\{\sin y\} = \Gamma(r) \sin(\pi r/2)$ ($-1 < \operatorname{Re} r < 1$), а также

$$\begin{aligned} F_{1-r} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{1 + \cos \varphi y^\alpha}{1 + 2 \cos \varphi y^\alpha + y^{2\alpha}} y^{-r} \\ &= \frac{1}{\pi \alpha} \int_0^\infty dy \frac{1 + \cos \varphi y}{1 + 2 \cos \varphi y + y^2} y^{\frac{1-r}{\alpha}-1} \\ &= \frac{\cos[\varphi(1-r)/\alpha]}{\alpha \sin[\pi(1-r)/\alpha]} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$(1 - \alpha < \operatorname{Re} r < 1)$, и

$$\begin{aligned}
 G_{1-r} &= \frac{\sin \varphi}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{y^{\alpha-r}}{1 + 2 \cos \varphi y^\alpha + y^{2\alpha}} \\
 &= \frac{\sin \varphi}{\pi \alpha} \int_0^\infty dy \frac{y^{\frac{1-r}{\alpha}}}{1 + 2 \cos \varphi y + y^2} \\
 &= \frac{\sin[\varphi(1-r)/\alpha]}{\alpha \sin[\pi(1-r)/\alpha]}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$(1 - \alpha < \operatorname{Re} r < 1 + \alpha)$.

Таким образом, из соотношения (3.4) находим

$$\mathcal{P}_r^\pm = \frac{\Gamma(r) \sin[(\pi\alpha/2 \pm \varphi)(1-r)/\alpha]}{\alpha \sin[\pi(1-r)/\alpha]} \tag{3.7}$$

с $\max(1 - \alpha, 0) < \operatorname{Re} r < 1$. Используя определение обратного преобразования Меллина: $\mathcal{M}^{-1}\{f_r\} = f(y) = (2\pi i)^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr f_r y^{-r}$ и учитывая соотношения $\mathcal{P}(y)|_{y \geq 0} = \mathcal{P}^\pm(y)$ и (3.7), мы можем представить предельную плотность вероятности (2.21) в терминах обратного преобразования Меллина

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \frac{\Gamma(r) \sin[\phi(y) \frac{1-r}{\alpha}]}{\alpha \sin(\pi \frac{1-r}{\alpha})} |y|^{-r}, \tag{3.8}$$

где $\max(1 - \alpha, 0) < c < 1$ и

$$\phi(y) = \frac{\pi\alpha}{2} + \operatorname{sgn}(y)\varphi. \tag{3.9}$$

Важно подчеркнуть, что представления (2.21) и (3.8) справедливы при всех значениях хвостового индекса α из интервала $(0, 2]$. Но поскольку предельная плотность вероятности при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ (см. подразделы 2.5 и 2.6) имеют простую форму, то далее мы сосредоточим внимание на выражении (3.8) только для $\alpha \in (0, 1)$ и $\alpha \in (1, 2)$. Возможны четыре различных ситуации для интересующих нас значений хвостового параметра, каждую из которых мы по отдельности опишем ниже.

3.1.1 $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$

В этом случае из уравнений (2.22), (2.17), (2.18) и (2.23) следует $\cos \varphi = \cos(\pi\alpha/2)$ и $\sin \varphi = (\delta_{\alpha\alpha_+} - \delta_{\alpha\alpha_-}) \sin(\pi\alpha/2)$. Из двух последних равенств получаем $\varphi = (\delta_{\alpha\alpha_+} - \delta_{\alpha\alpha_-})\pi\alpha/2$, и поэтому уравнение (3.9) даёт следующий результат

$$\phi(y) = [1 + \operatorname{sgn}(\sigma y)] \frac{\pi\alpha}{2}, \quad (3.10)$$

где $\sigma = \delta_{\alpha\alpha_+} - \delta_{\alpha\alpha_-} = \operatorname{sgn}(\alpha_- - \alpha_+)$. Вводя обозначение $\phi_{\operatorname{sgn}(\sigma y)} = \phi(y)$, из (3.10) получаем $\phi_+ = \pi\alpha$ и $\phi_- = 0$. На основании последнего равенства делаем вывод, что $\mathcal{P}(y) = 0$ при $\sigma y < 0$, иными словами в случае $\alpha \in (0, 1)$ и $\alpha_+ \neq \alpha_-$ плотность $\mathcal{P}(y)$ будет односторонней. В соответствии с (3.8) можем получить

$$\mathcal{P}(y) = \frac{H(\sigma y)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \frac{\Gamma(r) \sin\left(\phi_+ \frac{1-r}{\alpha}\right)}{\alpha \sin\left(\pi \frac{1-r}{\alpha}\right)} |y|^{-r} \quad (3.11)$$

с $\phi_+ = \pi\alpha$.

3.1.2 $\alpha \in (1, 2)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$, $l_1 = 0$

В этих условиях выражение (2.22) приводит к системе уравнений $\cos \varphi = -\cos(\pi\alpha/2)$ и $\sin \varphi = -\sigma \sin(\pi\alpha/2)$, решение которой даётся выражением $\varphi = -\sigma(\pi - \pi\alpha/2)$. Следовательно, из (3.10) имеем

$$\phi(y) = \frac{\pi\alpha}{2} - \operatorname{sgn}(\sigma y) \left(\pi - \frac{\pi\alpha}{2} \right), \quad (3.12)$$

а значит $\phi_+ = \pi(\alpha - 1)$ и $\phi_- = \pi$. Таким образом, используя обратное преобразование Меллина для гамма-функции [37]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \Gamma(r) |y|^{-r} = e^{-|y|} \quad (3.13)$$

($c > 0$), уравнение (3.8) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) = & \frac{H(\sigma y)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \frac{\Gamma(r) \sin\left(\phi_+ \frac{1-r}{\alpha}\right)}{\alpha \sin\left(\pi \frac{1-r}{\alpha}\right)} |y|^{-r} \\ & + H(-\sigma y) \frac{1}{\alpha} e^{-|y|}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\phi_+ = \pi(\alpha - 1)$.

Исходя из этого можно сделать вывод, что если $\alpha \in (1, 2)$ и $\alpha_+ \neq \alpha_-$, то, в отличие от предыдущего случая, предельная плотность вероятности будет двусторонней. Как видно из (3.14), эта плотность будет экспоненциальной при $y > 0$ и $\alpha = \alpha_-$ или при $y < 0$ и $\alpha = \alpha_+$. Также отметим, что при $y = 0$ предполагается выполнение условия $H(y\sigma)|_{y=0} = H(\sigma)$.

3.1.3 $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (0, 1)$, $u_+ \neq u_-$

В данном случае уравнения (2.22) дают

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{(u_+ + u_-) \cos(\pi\alpha/2)}{\sqrt{u_+^2 + u_-^2 + 2 \cos(\pi\alpha)u_+u_-}}, \\ \sin \varphi &= \frac{(u_+ - u_-) \sin(\pi\alpha/2)}{\sqrt{u_+^2 + u_-^2 + 2 \cos(\pi\alpha)u_+u_-}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Вводя обозначение

$$\epsilon = \frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-}, \quad (3.16)$$

из формулы (3.15) вытекает

$$\varphi = \operatorname{sgn}(\epsilon) \arctan \left[|\epsilon| \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right], \quad (3.17)$$

где $\arctan(\cdot)$ обозначает главное значение обратной к тангенсу функции. И, наконец, представляя двузначную функцию (3.9) как $\phi(y) = \phi_{\operatorname{sgn}(\epsilon y)}$, где

$$\phi_{\pm} = \frac{\pi\alpha}{2} \pm \arctan \left[|\epsilon| \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right], \quad (3.18)$$

и используя уравнение (3.8), мы находим двустороннее представление предельной плотности вероятности

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) = & \frac{H(\epsilon y)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \frac{\Gamma(r) \sin\left(\phi_+ \frac{1-r}{\alpha}\right)}{\alpha \sin\left(\pi \frac{1-r}{\alpha}\right)} |y|^{-r} \\ & + \frac{H(-\epsilon y)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \frac{\Gamma(r) \sin\left(\phi_- \frac{1-r}{\alpha}\right)}{\alpha \sin\left(\pi \frac{1-r}{\alpha}\right)} |y|^{-r}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Так как $\alpha \in (0, 1)$ и $|\epsilon| < 1$, то легко проверить, что $\arctan[|\epsilon| \tan(\pi\alpha/2)] \in (0, \pi\alpha/2)$, а поэтому $\pi\alpha/2 < \phi_+ < \pi\alpha$, $0 < \phi_- < \pi\alpha/2$, и $\phi_+ > \phi_-$.

$$3.1.4 \quad \alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (1, 2), \quad u_+ \neq u_-, \quad l_1 = 0$$

И, наконец, в последнем случае $\mathcal{P}(y)$ даётся той же формулой (3.19), что и в предыдущем. Для нахождения параметров ϕ_+ и ϕ_- мы зададим уравнения

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= -\frac{(u_+ + u_-) \cos(\pi\alpha/2)}{\sqrt{u_+^2 + u_-^2 + 2 \cos(\pi\alpha) u_+ u_-}}, \\ \sin \varphi &= -\frac{(u_+ - u_-) \sin(\pi\alpha/2)}{\sqrt{u_+^2 + u_-^2 + 2 \cos(\pi\alpha) u_+ u_-}}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

которые следуют из (2.22). Так как решение этих уравнений имеют такой же вид как и (3.17), то параметры ϕ_+ и ϕ_- тоже могут быть определены из (3.18). Тем не менее, исходя из того, что $\arctan[|\epsilon| \tan(\pi\alpha/2)] \in (\pi\alpha/2 - \pi, 0)$, в отличие от предыдущего случая, мы имеем $\pi(\alpha - 1) < \phi_+ < \pi\alpha/2$, $\pi\alpha/2 < \phi_- < \pi$, и $\phi_+ < \phi_-$.

3.2 Плотность вероятности $\mathcal{P}(y)$ в терминах преобразования Лапласа

Для нахождения предельной плотности вероятности в терминах преобразования Лапласа в уравнении (3.8) мы сделаем замену переменной интегрирования $\eta = (1-r)/\alpha$ и используем интегральное представление гамма-функции $\Gamma(r) = \int_0^\infty dz e^{-z} z^{r-1}$ ($\text{Re } r > 0$) [38]. Отсюда непосредственно следует

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\eta \Gamma(1-\alpha\eta) \frac{\sin[\phi(y)\eta]}{\sin(\pi\eta)} |y|^{\alpha\eta-1} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty dz e^{-z} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\eta \frac{\sin[\phi(y)\eta]}{|y| \sin(\pi\eta)} \left(\frac{z^\alpha}{|y|^\alpha} \right)^{-\eta} \end{aligned} \quad (3.21)$$

с параметром $0 < c < \min\{1, 1/\alpha\}$. Далее, используя соотношение [39]

$$\frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\eta \frac{\sin(\vartheta\eta)}{\sin(\pi\eta)} z^{-\eta} = \frac{\sin \vartheta z}{1 + 2 \cos \vartheta z + z^2} \quad (3.22)$$

($-\pi < \vartheta < \pi$) и делая в уравнении (3.21) замену переменной $x = z/|y|$, мы находим искомое представление предельной плотности вероятности

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-|y|x} \frac{\sin[\phi(y)]x^\alpha}{1 + 2 \cos[\phi(y)]x^\alpha + x^{2\alpha}}. \quad (3.23)$$

Заметим, что хотя выражение (3.22) не пригодно для $\vartheta = \pi$, уравнение (3.23) при $\phi(y) = \pi$ даёт правильный результат, если $\mathcal{P}(y)|_{\phi(y)=\pi}$ интерпретировать как предел $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \mathcal{P}(y)|_{\phi(y)=\pi-\zeta}$.

Предельная плотность вероятности $\mathcal{P}(y)$ в виде (3.23) удобна для определения многих интересующих нас свойств. В частности, из этого представления следует, что $\mathcal{P}(y) \geq 0$ (т. е. функция $\mathcal{P}(y)$ действительно будет плотностью вероятности), $d\mathcal{P}(y)/d|y| \leq 0$ ($y \neq 0$), и $\max \mathcal{P}(y) = \mathcal{P}(0)$. Более того, в силу экспоненциального множителя в подынтегральной функции представление (3.23) наиболее предпочтительно для численного нахождения

ния $\mathcal{P}(y)$ при больших значениях $|y|$.

С целью упрощения полученного выражения для $\mathcal{P}(y)$ в виде обратного преобразования Лапласа ниже мы отдельно рассмотрим все четыре возможных случая, которые были установлены в подразделе 3.1.

3.2.1 $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$

В соответствии с (3.11) и (3.23) получаем

$$\mathcal{P}(y) = \frac{H(\sigma y)}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-|y|x} \frac{\sin(\phi_+) x^\alpha}{1 + 2 \cos(\phi_+) x^\alpha + x^{2\alpha}} \quad (3.24)$$

с $\phi_+ = \pi\alpha$. Так как при $y = 0$ этот интеграл расходится, то $\mathcal{P}(y)|_{\sigma y \rightarrow +0} = \infty$. Далее, на основе стандартного интеграла [35]

$$\int_0^\infty dz \frac{z^{\nu-1}}{1 + 2 \cos \vartheta z + z^2} = \frac{\pi \sin[\vartheta(1 - \nu)]}{\sin \vartheta \sin(\pi\nu)} \quad (3.25)$$

($0 < |\vartheta| < \pi$, $0 < \nu < 2$) и принимая во внимание, что при $\nu = 1$ правая часть уравнения (3.25) равна $\vartheta / \sin \vartheta$, легко убедиться, что условие нормировки для $\mathcal{P}(y)$ сохраняется:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty dy \mathcal{P}(y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin(\pi\alpha) x^{\alpha-1}}{1 + 2 \cos(\pi\alpha) x^\alpha + x^{2\alpha}} \\ &= \frac{1}{\pi\alpha} \int_0^\infty dz \frac{\sin(\pi\alpha)}{1 + 2 \cos(\pi\alpha) z + z^2} = 1. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Главная особенность предельной плотности вероятности в этом случае состоит в её односторонности, а именно: $\mathcal{P}(y) = 0$ при $y > 0$, если $\alpha_+ > \alpha_-$; или при $y < 0$, если $\alpha_- > \alpha_+$. Следовательно, распределение частиц будет сосредоточено на той полуоси, для которой хвостовой индекс наименьший, т. е. вероятность совершить очень длинный скачок выше. Для ясности подчеркнём, что общая вероятность скачка в этом направлении $W_{\text{sgn}(\sigma)} = \int_0^\infty d\xi w[\text{sgn}(\sigma)\xi]$ может быть меньше, чем вероятность $W_{-\text{sgn}(\sigma)} = 1 - W_{\text{sgn}(\sigma)}$ скачка в противоположном направлении.

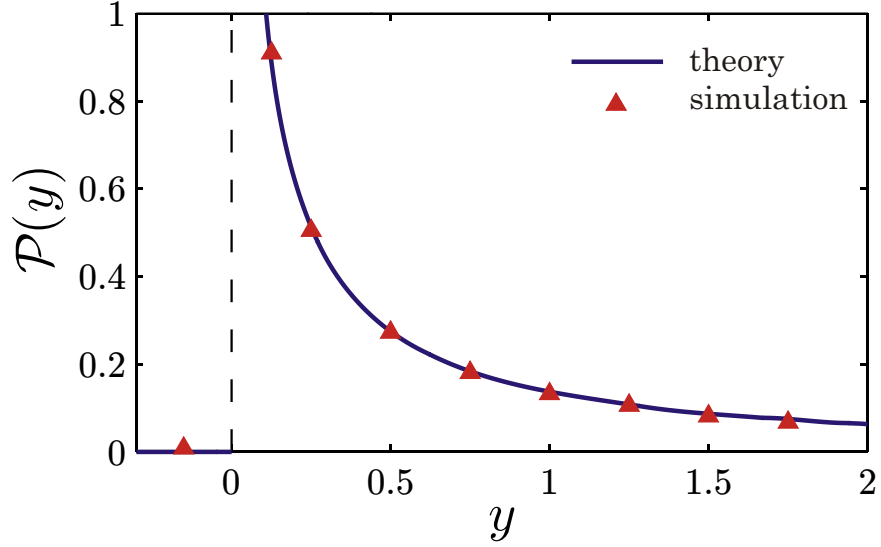


Рисунок 3.1 – Предельная плотность вероятности при $\alpha_+ = \alpha = 1/2$ и $\alpha_- > \alpha_+$. Сплошная линия показывает теоретическое поведение (3.24), а результаты численного моделирования (см. раздел 7) показаны треугольниками.

Поведение предельной плотности вероятности при $\alpha \in (0, 1)$ и $\alpha_+ \neq \alpha_-$ представлено на рисунке 3.1.

3.2.2 $\alpha \in (1, 2)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$, $l_1 = 0$

В данной ситуации предельная плотность вероятности имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) = & \frac{H(\sigma y)}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-|y|x} \frac{\sin(\phi_+) x^\alpha}{1 + 2 \cos(\phi_+) x^\alpha + x^{2\alpha}} \\ & + H(-\sigma y) \frac{1}{\alpha} e^{-|y|}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где $\phi_+ = \pi(\alpha - 1)$. С помощью уравнения (3.25) можно показать, что $\mathcal{P}(y)$ нормирована и

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y)|_{\sigma y \rightarrow +0} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin(\phi_+) x^\alpha}{1 + 2 \cos(\phi_+) x^\alpha + x^{2\alpha}} \\ &= \frac{1}{\pi \alpha} \int_0^\infty dz \frac{\sin(\phi_+) z^{1/\alpha}}{1 + 2 \cos(\phi_+) z + z^2} \\ &= \frac{\sin(\phi_+/\alpha)}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

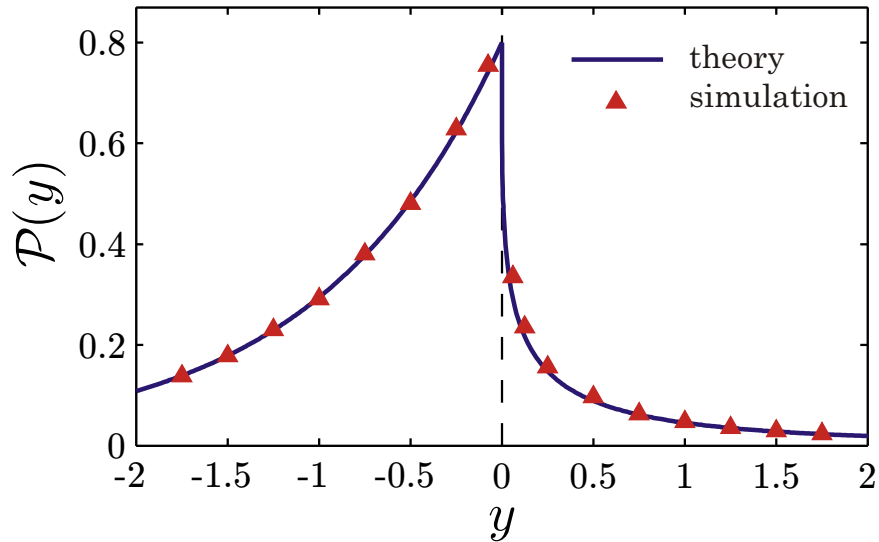


Рисунок 3.2 – Предельная плотность вероятности при $\alpha_+ = \alpha = 5/4$ и $\alpha_- > \alpha_+$. Сплошная линия показывает теоретические результаты, полученные из формулы (3.27), а треугольники соответствуют численным результатам.

Поскольку $\phi_+ = \pi(\alpha - 1)$, то, с учётом (3.27), имеем

$$\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}(y)|_{\sigma y \rightarrow \pm 0} = \frac{1}{\alpha}. \quad (3.29)$$

Таким образом, в отличие от предыдущего случая, предельная плотность вероятности будет двусторонней. При этом одна ветвь $\mathcal{P}(y)$ (левая при $\alpha_- > \alpha_+$ или правая при $\alpha_+ > \alpha_-$) будет чисто экспоненциальной, а вторая имеет тяжёлый хвост (см. раздел 4). Отметим, что тяжёлая ветвь $\mathcal{P}(y)$ будет на той полуоси, где хвостовой индекс плотности величины скачка наименьший. Однако, вероятность $\int_0^\infty dy \mathcal{P}[-\text{sgn}(\sigma)y] = 1/\alpha$ того, что $\sigma Y(\infty) < 0$, т. е. вероятность определяемая экспоненциальной ветвью, будет всегда больше $1/2$.

Рисунок 3.2 показывает поведение $\mathcal{P}(y)$ в рассматриваемом случае.

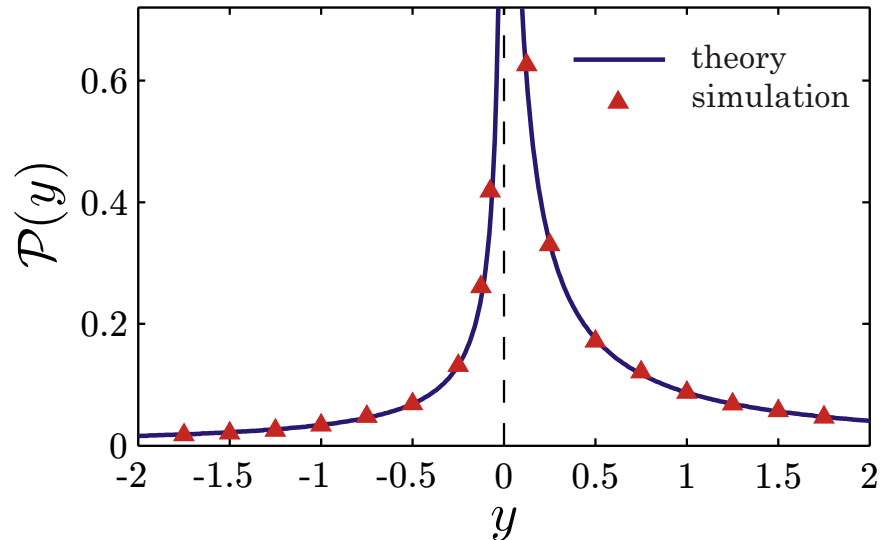


Рисунок 3.3 – Предельная плотность вероятности при $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha = 1/2$ и $\epsilon = 1/3$. Сплошная линия и треугольники показывают соответственно теоретические [см. формулу (3.30)] и численные результаты.

3.2.3 $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (0, 1)$, $u_+ \neq u_-$

Из выражений (3.19) и (3.23) находим

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) = & \frac{H(\epsilon y)}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-|y|x} \frac{\sin(\phi_+) x^\alpha}{1 + 2 \cos(\phi_+) x^\alpha + x^{2\alpha}} \\ & + \frac{H(-\epsilon y)}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-|y|x} \frac{\sin(\phi_-) x^\alpha}{1 + 2 \cos(\phi_-) x^\alpha + x^{2\alpha}}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где параметры ϕ_+ и ϕ_- даются уравнением (3.18). Исходя из того, что $\alpha < 1$, имеем $\mathcal{P}(0) = \infty$, и, вновь используя (3.25), легко проверить нормированность $\mathcal{P}(y)$.

Сравнение с первым случаем показывает, что при $\alpha_+ \neq \alpha_-$ наблюдается сильная асимметрия (одностороннее распределение) плотности вероятности $\mathcal{P}(y)$, в то время как при $u_+ \neq u_-$ (при условии $\alpha_+ = \alpha_-$) распределение будет менее асимметричным двусторонним. Согласно (3.30), в рассматриваемой ситуации обе ветви предельной плотности вероятности будут иметь тяжёлые хвосты с тем же параметром α , что и соответствующая плотность величины скачка (см. также 4).

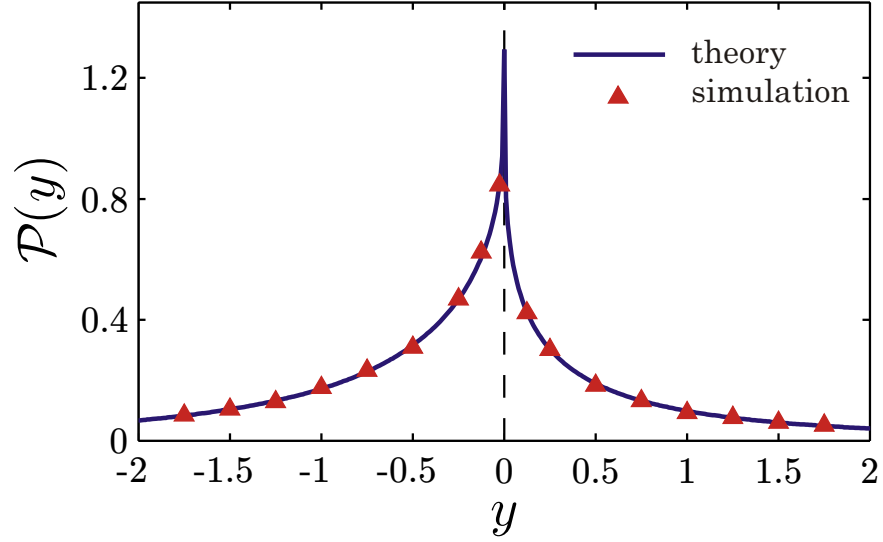


Рисунок 3.4 – Предельная плотность вероятности при $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha = 5/4$ и $\epsilon = (\sqrt{2} - 1)/(\sqrt{2} + 1)$. Сплошная линия показывает теоретическую плотность, полученную из формулы (3.30), а треугольники соответствуют результатам численного моделирования.

В этом случае поведение $\mathcal{P}(y)$ показано на рисунке 3.3.

3.2.4 $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (1, 2)$, $u_+ \neq u_-$, $l_1 = 0$

Как и в предыдущем случае, предельная плотность вероятности и параметры ϕ_+ и ϕ_- определяются уравнениями (3.30) и (3.18) соответственно. Важным отличием есть то, что в этот раз $\mathcal{P}(0) < \infty$. Чтобы показать чему равно $\mathcal{P}(0)$, мы используем выражение (3.30) и известный интеграл (3.25), отсюда

$$\mathcal{P}(y)|_{\epsilon y \rightarrow \pm 0} = \frac{\sin(\phi_{\pm}/\alpha)}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}. \quad (3.31)$$

Основываясь на (3.18), находим $\sin(\phi_+/\alpha) = \sin(\phi_-/\alpha)$, а значит $\mathcal{P}(y)|_{\epsilon y \rightarrow \pm 0} = \mathcal{P}(0)$, где

$$\mathcal{P}(0) = \frac{1}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} \cos \left\{ \frac{1}{\alpha} \arctan \left[|\epsilon| \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right] \right\}. \quad (3.32)$$

Сравнивая этот случай со вторым, мы снова замечаем, что при неравных значениях параметров α_+ и α_- поведение правой и левой ветвей $\mathcal{P}(y)$ бу-

дет сильнее отличаться между собой, чем для различных u_+ и u_- при равенстве хвостовых параметров $\alpha_+ = \alpha_-$.

Поведение $\mathcal{P}(y)$ в этой ситуации показано на рисунке 3.4.

3.3 Представление $\mathcal{P}(y)$ в виде H -функций Фокса

Поскольку H -функции Фокса являются одними из наиболее общих специальных функций, т. е. очень многие элементарные и специальные функции являются их частным случаем, и, к тому же, основные свойства H -функций хорошо изучены, то имеет смысл найти представление предельной плотности вероятности в терминах этих функции. С этой целью мы используем формулу Эйлера [38] $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ и получим

$$\frac{\sin\left[\phi(y)\frac{1-r}{\alpha}\right]}{\sin\left(\pi\frac{1-r}{\alpha}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1-r}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1-r}{\alpha}\right)}{\Gamma\left[\phi(y)\frac{1-r}{\pi\alpha}\right]\Gamma\left[1-\phi(y)\frac{1-r}{\pi\alpha}\right]}. \quad (3.33)$$

Далее, подставляя это выражение в (3.8), находим

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{2\pi i\alpha} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dr \frac{\Gamma(r)\Gamma\left(\frac{1-r}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1-r}{\alpha}\right)}{\Gamma\left[\phi(y)\frac{1-r}{\pi\alpha}\right]\Gamma\left[1-\phi(y)\frac{1-r}{\pi\alpha}\right]} |y|^{-r}. \quad (3.34)$$

С другой стороны, H -функции могут быть определены с помощью интеграла Меллина-Барнса [40]

$$\begin{aligned} H_{p,q}^{m,n} \left[y \middle| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right] &= H_{p,q}^{m,n} \left[y \middle| \begin{matrix} (a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L dr \Theta_r y^{-r}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где

$$\Theta_r = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j r) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j r)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j r) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j r)}, \quad (3.36)$$

m, n, p, q — целые числа, $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$, a_j и b_j — действительные

или комплексные числа, $A_j, B_j > 0$, L — это подходящий контур в комплексном r -плане, который разделяет полюсы гамма-функций $\Gamma(b_j + B_j r)$ от полюсов гамма-функций $\Gamma(1 - a_j - A_j r)$, и пустое произведение полагается равным 1. Следовательно, сравнивая уравнение (3.36) с подынтегральной функцией в выражении (3.34), приходим к выводу, что предельная плотность $\mathcal{P}(y)$ может быть представлена через H -функции следующим образом

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{\alpha} H_{2,3}^{2,1} \left[|y| \left| \begin{array}{l} (1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}), (1 - \frac{\phi(y)}{\pi\alpha}, \frac{\phi(y)}{\pi\alpha}) \\ (0, 1), (1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}), (1 - \frac{\phi(y)}{\pi\alpha}, \frac{\phi(y)}{\pi\alpha}) \end{array} \right. \right]. \quad (3.37)$$

Используя эту общую формулу, несложно найти соответствующие представления для всех четырёх обсуждаемых выше случаев. Для примера мы сосредоточим внимание на первом из них [который даётся формулой (3.37)], поскольку в этом случае результат может быть существенно упрощен. В самом деле, так как в этом случае $\phi(y) = \phi_{\text{sgn}(\sigma y)}$ с $\phi_+ = \pi\alpha$ и $\phi_- = 0$, из уравнения (3.37) и с учётом формулы [40]

$$\begin{aligned} & H_{p,q}^{m,n} \left[y \left| \begin{array}{l} (a_1, A_1), \dots, (a_{p-1}, A_{p-1}), (b_1, B_1) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] \\ &= H_{p-1,q-1}^{m-1,n} \left[y \left| \begin{array}{l} (a_1, A_1), \dots, (a_{p-1}, A_{p-1}) \\ (b_2, B_2), \dots, (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

($m \geq 1, p > n$) мы находим

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) &= \frac{H(\sigma y)}{\alpha} H_{2,3}^{2,1} \left[|y| \left| \begin{array}{l} (1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}), (0, 1) \\ (0, 1), (1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}), (0, 1) \end{array} \right. \right] \\ &= \frac{H(\sigma y)}{\alpha} H_{1,2}^{1,1} \left[|y| \left| \begin{array}{l} (1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}) \\ (1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}), (0, 1) \end{array} \right. \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Используя соотношение

$$H_{p,q}^{m,n} \left[y \left| \begin{array}{l} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] = \frac{\chi}{y^{\lambda\chi}} H_{p,q}^{m,n} \left[y^\chi \left| \begin{array}{l} (a_p + \lambda\chi A_p, \chi A_p) \\ (b_q + \lambda\chi B_q, \chi B_q) \end{array} \right. \right] \quad (3.40)$$

($\chi > 0, -\infty < \lambda < \infty$) с $\chi = \alpha$ и $\lambda = 1/\alpha - 1$, уравнение (3.39) может быть сведено к виду

$$\mathcal{P}(y) = \frac{H(\sigma y)}{|y|^{1-\alpha}} H_{1,2}^{1,1} \left[|y|^\alpha \middle| \begin{array}{l} (0, 1) \\ (0, 1), (1 - \alpha, \alpha) \end{array} \right]. \quad (3.41)$$

И, наконец, исходя из того, что последняя H -функция является обобщённой функцией Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ [40], а именно

$$H_{1,2}^{1,1} \left[-z \middle| \begin{array}{l} (0, 1) \\ (0, 1), (1 - \beta, \alpha) \end{array} \right] = E_{\alpha,\beta}(z) \quad (3.42)$$

($\alpha, \beta > 0$), предельная плотность вероятности в рассматриваемом случае [т. е. при $\alpha \in (0, 1)$ и $\alpha_+ \neq \alpha_-$] упрощается к виду

$$\mathcal{P}(y) = \frac{H(\sigma y)}{|y|^{1-\alpha}} E_{\alpha,\alpha}(-|y|^\alpha). \quad (3.43)$$

Удобство этого результата связано с тем, что функция Миттаг-Леффлера очень хорошо изучена (например, см. [41] и ссылки в ней). В частности, используя представление этой функции в виде ряда $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\alpha n + \beta)$, получаем

$$\mathcal{P}(y) = \frac{H(\sigma y)}{|y|^{1-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |y|^{\alpha n}}{\Gamma[\alpha(n+1)]}. \quad (3.44)$$

Отметим, что предельная плотность вероятности (3.43) при $\alpha = 1/2$ может быть сведена к очень простой форме. Для этого примем во внимание, что

$$E_{\alpha,\alpha}(-|y|^\alpha) = -|y|^{1-\alpha} \frac{d}{d|y|} E_{\alpha,1}(-|y|^\alpha). \quad (3.45)$$

Это соотношение следует непосредственно из представления функции Миттаг-Леффлера в виде ряда. Далее, на основе известного результата [41] $E_{1/2,1}(-z) = e^{z^2} \operatorname{erfc}(z)$, где $\operatorname{erfc}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_z^\infty dx e^{-x^2}$ — дополни-

тельная функция ошибок, уравнение (3.43) при $\alpha = 1/2$ принимает форму

$$\mathcal{P}(y) = H(\sigma y) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi|y|}} - e^{|y|} \operatorname{erfc}(\sqrt{|y|}) \right]. \quad (3.46)$$

График этой плотности вероятности показан на рисунке 3.1.

3.4 Представление $\mathcal{P}(y)$ в виде ряда

Для полноты изучения альтернативных форм предельной плотности вероятности найдём также её представление в виде ряда. Это оказывается особенно удобным для численного нахождения значений $\mathcal{P}(y)$ при малых $|y|$, в то время как представления в виде полученных интегральных преобразований при малых значениях $|y|$ являются неэффективным. Исходным пунктом будет использование предельной плотности вероятности в терминах обратного преобразования Меллина $\mathcal{P}(y) = (2\pi i)^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\eta S(\eta)$, где

$$S(\eta) = \Gamma(1 - \alpha\eta) \frac{\sin[\phi(y)\eta]}{\sin(\pi\eta)} |y|^{\alpha\eta-1} \quad (3.47)$$

[см. уравнение (3.21)]. Для нахождения этого интеграла мы замкнём контур интегрирования полуокружностью C_R с радиусом R , которая лежит в правой полуплоскости для комплексного переменного η [полагаем, что эта полуокружность не пересекает ни одну точку сингулярности $S(\eta)$]. Тогда, устремляя радиус $R \rightarrow \infty$, на основании формулы Стирлинга для гамма-функции [38] можно показать, что вклад в интеграл по контуру C_R будет стремиться к 0. А поэтому, согласно теореме о вычетах (см., например, книгу [42]), мы имеем $\mathcal{P}(y) = -\sum_j \operatorname{Res}(S, \eta_j)$, где $\operatorname{Res}(S, \eta_j)$ обозначает вычет $S(\eta)$ при $\eta = \eta_j$, сумма берётся по всем полюсам функции $S(\eta)$ внутри контура L , а знак “ $-$ ” возникает из-за направления контура L .

В соответствии с уравнением (3.47), полюсы $S(\eta)$ являются следствием простых полюсов $\eta_n = n/\alpha$ ($n \geq 1$) гамма-функции $\Gamma(1 - \alpha\eta)$ и простых полюсов $\eta_m = m$ ($m \geq 1$) функции $1/\sin(\pi\eta)$. Если параметр α будет

иррациональным, то множества полюсов $\{\eta_n\}$ and $\{\eta_m\}$ не пересекаются, а значит все полюса $S(\eta)$ также будут простыми. Впрочем, если α — рационально, то некоторые (или все при $\alpha = 1$) полюса из множества $\{\eta_n\}$ будут совпадать с некоторыми (или всеми) полюсами из множества $\{\eta_m\}$, а значит в точках совпадения функция $S(\eta)$ будет иметь полюса второго порядка. Из-за такого отличия для иррациональных и рациональных значений параметра α , мы рассмотрим данные ситуации отдельно.

3.4.1 Иррациональные значения α

В этом случае предельная плотность вероятности записывается в виде $\mathcal{P}(y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}(S, n/\alpha) - \sum_{m=1}^{\infty} \text{Res}(S, m)$. Следовательно, принимая во внимание формулу $\Gamma(1 - \alpha\eta)|_{\eta=n/\alpha+\xi} \sim (-1)^n/[\alpha\Gamma(n)\xi]$ и $1/\sin(\pi\eta)|_{\eta=m+\xi} \sim (-1)^m/(\pi\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$, а также используя формулу отражения Эйлера $\Gamma(1 - \alpha m) = \pi/[\Gamma(\alpha m) \sin(\pi\alpha m)]$, мы находим

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) &= \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin[\phi(y)n/\alpha]}{\Gamma(n) \sin(\pi n/\alpha)} |y|^{n-1} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} \sin[\phi(y)m]}{\Gamma(\alpha m) \sin(\pi\alpha m)} |y|^{\alpha m-1}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

3.4.2 Рациональные значения α

Когда хвостовой параметр α будет рациональным числом, т. е. даётся несократимой дробью $\alpha = l/p$, где $l(\geq 1)$ и $p(\geq 1)$ — натуральные числа, удовлетворяющие условию $l \leq 2p$, то простые полюса $\Gamma(1 - p\eta/l)$ с порядковыми номерами $n = lk$ ($k = 1, 2, \dots$) и простые полюса $1/\sin(\pi\eta)$ с номерами $m = pk$ совпадают. А поэтому функция $S(\eta)$ при $\eta = pk$ будет иметь полюса второго порядка. Исходя из этого, удобно представить пре-

дельную плотность вероятности в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) = & - \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq l, 2l, \dots)}}^{\infty} \text{Res}(S, pn/l) - \sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq p, 2p, \dots)}}^{\infty} \text{Res}(S, m) \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res}(S, pk), \end{aligned} \quad (3.49)$$

где последняя сумма включает в себя вычеты $S(k)$ в полюсах второго порядка. Используя приведённые выше результаты для простых полюсов $S(\eta)$ и асимптотическую формулу [38] $\Gamma(1 - l\eta/p)|_{\eta=pk+\xi} \sim (-1)^{lk}(p/l)[\xi^{-1} - (l/p)\psi(lk)]/\Gamma(lk)$ ($\xi \rightarrow 0$) [здесь $\psi(x) = d \ln \Gamma(x)/dx - \psi$ (или дигамма) функция], из выражения (3.49) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) = & \frac{p}{l} \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq l, 2l, \dots)}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin[\phi(y)pn/l]}{\Gamma(n) \sin(\pi pn/l)} |y|^{n-1} \\ & + \sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq p, 2p, \dots)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} \sin[\phi(y)m]}{\Gamma(lm/p) \sin(\pi lm/p)} |y|^{lm/p-1} \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{pk+lk}}{\Gamma(lk)} \left([\psi(lk) - \ln |y|] \sin[\phi(y)pk] \right. \\ & \left. - \frac{p}{l} \phi(y) \cos[\phi(y)pk] \right) |y|^{lk-1}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Заметим, что если $\alpha \in (0, 1)$ и $\alpha_+ \neq \alpha_-$, то функция $\phi(y)$ даётся уравнением (3.10). В этом случае уравнения (3.48) и (3.50) сводятся к (3.44), а значит и к (3.43), т. е. выражаются с помощью функции Миттаг-Леффлера. Если $\alpha \in (1, 2)$ и $\alpha_+ \neq \alpha_-$, то $\mathcal{P}(y)$ также может быть выражена в терминах функции Миттаг-Леффлера. Действительно, используя определение (3.12), а также соотношения $\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n |y|^n/n! = e^{\pm |y|}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |y|^{\alpha n}/\Gamma(\alpha n) = E_{\alpha,0}(|y|^\alpha) = |y|^\alpha E_{\alpha,\alpha}(|y|^\alpha)$, уравнения (3.48) и (3.50)

легко привести к следующему виду

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y) = & H(\sigma y) \left(\frac{e^{|y|}}{\alpha} - |y|^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(|y|^\alpha) \right) \\ & + H(-\sigma y) \frac{e^{-|y|}}{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Также стоит сказать, что разложения (3.48) и (3.50) имеют существенное отличие, а именно: первый ряд содержит только степенные функции, в то время как второй и логарифмическую.

4 ПОВЕДЕНИЕ $\mathcal{P}(y)$ НА МАЛЫХ И БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ

Асимптотическое поведение при малых значениях $|y|$ предельной плотности вероятности $\mathcal{P}(y)$ полностью описывается разложениями (3.48) и (3.50). В то время, как для описания асимптотического поведения $\mathcal{P}(y)$ при больших $|y|$, удобно использовать представление предельной плотности в виде преобразования Лапласа (3.23). В соответствии с леммой Ватсона [42], асимптотика $\mathcal{P}(y)$ при $|y| \rightarrow \infty$ будет определяться разложением функции $(\sin[\phi(y)]x^\alpha)/(1+2\cos[\phi(y)]x^\alpha+x^{2\alpha})$ при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, используя выражение [43]

$$\frac{\sin[\phi(y)]x^\alpha}{1+2\cos[\phi(y)]x^\alpha+x^{2\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin[\phi(y)n]x^{\alpha n} \quad (4.1)$$

($|x| < 1$) и известный интеграл [35]

$$\int_0^{\infty} dx e^{-|y|x} x^{\alpha n} = \frac{\Gamma(1+\alpha n)}{|y|^{1+\alpha n}}, \quad (4.2)$$

из уравнения (3.23) имеем

$$\mathcal{P}(y) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin[\phi(y)n] \frac{\Gamma(1+\alpha n)}{|y|^{1+\alpha n}} \quad (4.3)$$

при $|y| \rightarrow \infty$. При всех рассматриваемых значениях параметра α ниже мы приведёт асимптотику $\mathcal{P}(y)$ при $|y| \rightarrow 0$ и $|y| \rightarrow \infty$ с учётом только главных членов.

1. $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$

В данном случае двузначная функция $\phi(y)$ даётся выражением (3.10), также $\mathcal{P}(y)|_{\sigma y < 0} = 0$, а поэтому уравнения (3.44) и (4.3) приводят соответственно к

$$\mathcal{P}(y)|_{\sigma y > 0} \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{|y|^{1-\alpha}} \quad (4.4)$$

($|y| \rightarrow 0$) и

$$\mathcal{P}(y)|_{\sigma y > 0} \sim \frac{1}{\pi} \sin(\pi\alpha) \Gamma(1 + \alpha) \frac{1}{|y|^{1+\alpha}} \quad (4.5)$$

($|y| \rightarrow \infty$).

2. $\alpha \in (1, 2)$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$, $l_1 = 0$

При этих условиях функция $\phi(y)$ задаётся уравнением (3.12), а с учётом $\mathcal{P}(y)|_{\sigma y < 0} = e^{-|y|}/\alpha$, из выражений (3.48), (3.50) и (4.3) мы находим

$$\mathcal{P}(y)|_{\sigma y > 0} \sim \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} |y|^{\alpha-1} \quad (4.6)$$

при $|y| \rightarrow 0$ и

$$\mathcal{P}(y)|_{\sigma y > 0} \sim -\frac{1}{\pi} \sin(\pi\alpha) \Gamma(1 + \alpha) \frac{1}{|y|^{1+\alpha}} \quad (4.7)$$

при $|y| \rightarrow \infty$.

3. $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (0, 1)$, $u_+ \neq u_-$

Используя (3.18), легко получить

$$\mathcal{P}(y) \sim \frac{1 + \operatorname{sgn}(\epsilon y)|\epsilon|}{2\Gamma(\alpha)\sqrt{\epsilon^2 + (1 - \epsilon^2)\cos^2(\pi\alpha/2)}} \frac{1}{|y|^{1-\alpha}} \quad (4.8)$$

при $|y| \rightarrow 0$ и

$$\mathcal{P}(y) \sim \frac{[1 + \operatorname{sgn}(\epsilon y)|\epsilon|] \sin(\pi\alpha) \Gamma(1 + \alpha)}{2\pi\sqrt{\epsilon^2 + (1 - \epsilon^2)\cos^2(\pi\alpha/2)}} \frac{1}{|y|^{1+\alpha}} \quad (4.9)$$

при $|y| \rightarrow \infty$. В отличие от первого случая, предельная плотность вероятности является двусторонней и имеет левый и правый хвост с одинаковым хвостовым параметром α .

$$4. \quad \alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (1, 2), \quad u_+ \neq u_-, \quad l_1 = 0$$

И, наконец, в этот раз имеем

$$\mathcal{P}(y) \sim \mathcal{P}(0) - \frac{1 + \operatorname{sgn}(\epsilon y)|\epsilon|}{2\Gamma(\alpha)\sqrt{\epsilon^2 + (1 - \epsilon^2)\cos^2(\pi\alpha/2)}}|y|^{\alpha-1} \quad (4.10)$$

при $|y| \rightarrow 0$ и

$$\mathcal{P}(y) \sim -\frac{[1 + \operatorname{sgn}(\epsilon y)|\epsilon|] \sin(\pi\alpha)\Gamma(1 + \alpha)}{2\pi\sqrt{\epsilon^2 + (1 - \epsilon^2)\cos^2(\pi\alpha/2)}} \frac{1}{|y|^{1+\alpha}} \quad (4.11)$$

при $|y| \rightarrow \infty$. Заметим, что при $\epsilon = 0$ выражения (4.8)–(4.11) сводятся к полученным в работе [29] для симметрического блуждания.

Как мы видим, во всех четырёх приведённых выше случаях плотность вероятности $\mathcal{P}(y)$ при $|y| \rightarrow \infty$ будет иметь тяжёлые хвосты с тем же хвостовым параметром α , что и минимальный хвостовой индекс для распределения величины скачка $w(\xi)$. Значит момент второго порядка для $\mathcal{P}(y)$ не существует [момент первого порядка тоже не существует, если $\alpha \in (0, 1)$], а поэтому дисперсия положения $Y(t)$ в этих ситуациях является бесконечной при любых t .

5 ДРОБНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ $\mathcal{P}(y)$

При изучении аномальных транспортных и диффузионных процессов значительное внимание уделяется их связи с дробными уравнениями, которые асимптотически следуют из обобщённых основных кинетических уравнений. Так, например, дробные уравнения оказываются крайне полезными при изучении очень важного явления аномальной диффузии [2–4], для которой дисперсия положения частички нелинейна во времени. Это подталкивает нас попытаться найти соотношение между рассматриваемым нами классом случайных блужданий и определённым типом дробных уравнений.

Поскольку мы имеем дело главным образом только с масштабированной координатой положения частицы, то и нужное дробное уравнение мы будем искать для плотности вероятности $\mathcal{P}(y)$. Известно, что дробная по пространственной координате производная Рисса-Феллера ${}_y D_\theta^\gamma$ порядка γ и с коэффициентом асимметрии θ задаётся следующим образом (см., например, статью [46])

$$\mathcal{F}\{{}_y D_\theta^\gamma f(y)\} = -e^{i\text{sgn}(\kappa)\pi\theta/2} |\kappa|^\gamma f_\kappa, \quad (5.1)$$

где $\gamma \in (0, 2]$, $|\theta| \leq \min\{\gamma, 2 - \gamma\}$, и $\mathcal{F}\{f(y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i\kappa y} f(y) = f_\kappa$. Далее, используя это определение и уравнение (2.20), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{{}_y D_{-2\varphi/\pi}^\alpha \mathcal{P}(y)\} &= -e^{-i\text{sgn}(\kappa)\varphi} |\kappa|^\alpha \mathcal{P}_\kappa \\ &= -\Phi(\kappa) \mathcal{P}_\kappa. \end{aligned} \quad (5.2)$$

И, наконец, принимая во внимание, что $\mathcal{F}\{\delta(y)\} = 1$ и

$$\mathcal{F}\{\mathcal{P}(y)\} = \frac{1}{1 + \Phi(\kappa)} \quad (5.3)$$

[это следует из соотношения (2.6)], дробное уравнение для предельной плотности вероятности $\mathcal{P}(y)$ может быть записано в следующей форме

$${}_y D_{-2\varphi/\pi}^\alpha \mathcal{P}(y) = \mathcal{P}(y) - \delta(y). \quad (5.4)$$

6 ЗАКОНЫ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ ИЗУЧАЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Основываясь на полученных в разделе 2 предельных плотностях вероятности $\mathcal{P}(y)$, мы замечаем, что в случаях $l_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi w(\xi) \neq 0$ (подраздел 2.2); $\alpha = 1$ и $\rho = u_+ \delta_{1\alpha_+} - u_- \delta_{1\alpha_-} \neq 0$ (подраздел 2.5); и $\alpha = 2$ (подраздел 2.6) блуждающая частица будет иметь одно/двустороннее экспоненциальное распределение, а значит и конечную дисперсию. Следовательно, имеет смысл рассмотреть и соответствующие законы дисперсии. В остальных же случаях, согласно разделу 4, плотность вероятности $\mathcal{P}(y)$ имеет тяжёлые хвосты, характеризующиеся бесконечной дисперсией, поэтому говорить о диффузии нет смысла. Найдём возможные законы диффузии для рассматриваемых случайных блужданий.

Дисперсия масштабированного положения $Y(t)$ даётся формулой

$${}_y\sigma^2 = {}_y l_2 - {}_y l_1^2, \quad (6.1)$$

где

$${}_y l_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dy y \mathcal{P}(y) \quad \text{и} \quad {}_y l_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 \mathcal{P}(y) \quad (6.2)$$

— момент первого и второго порядка для $\mathcal{P}(y)$ соответственно. Очевидно, что так как предельная плотность вероятности не зависит от времени, то и дисперсия положения y будет не зависеть от времени, то есть является постоянной. Поэтому для определения типа диффузии следует рассмотреть закон дисперсии для оригинального положения. Как ранее говорилось, при больших значениях времени $P(x, t) \sim a(t) \mathcal{P}[a(t)x]$. Значит момент первого порядка для $X(t)$

$${}_x l_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx x P(x, t) \sim \frac{{}_y l_1}{a(t)}, \quad (6.3)$$

а момент второго порядка

$${}_x l_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 P(x, t) \sim \frac{y l_2}{a^2(t)}. \quad (6.4)$$

А поэтому дисперсия оригинального положения блуждающей частицы равна

$$\begin{aligned} {}_x \sigma^2(t) &= {}_x l_2 - {}_x l_1^2 \sim \frac{y l_2}{a^2(t)} - \frac{y l_1^2}{a^2(t)} \\ &\sim \frac{y \sigma^2}{a^2(t)}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

1. Распределения длины скачка с $\alpha = 1$ и $\rho \neq 0$

В данном случае предельная плотность вероятности $\mathcal{P}(y) = e^{-|y|} H(\rho y)$ [формула (2.34)], а значит ${}_y \sigma^2 = 2 - [\text{sgn}(\rho)]^2 = 1$. Учитывая масштабирующую функцию (2.33), закон дисперсию для $X(t)$ имеет вид

$${}_x \sigma^2(t) \sim \frac{\rho^2 \ln^2[1/V(t)]}{V^2(t)} \quad (6.6)$$

при $t \rightarrow \infty$.

2. Распределения длины скачка с $l_1 \neq 0$

Принимая во внимание, что в этом случае $\mathcal{P}(y) = e^{-|y|} H(l_1 y)$ [формула (2.10)], имеем ${}_y \sigma^2 = 2 - [\text{sgn}(l_1)]^2 = 1$. Следовательно, учитывая (2.9), получаем закон дисперсии положения частицы $X(t)$

$${}_x \sigma^2(t) \sim \frac{l_1^2}{V^2(t)} \quad (6.7)$$

при $t \rightarrow \infty$.

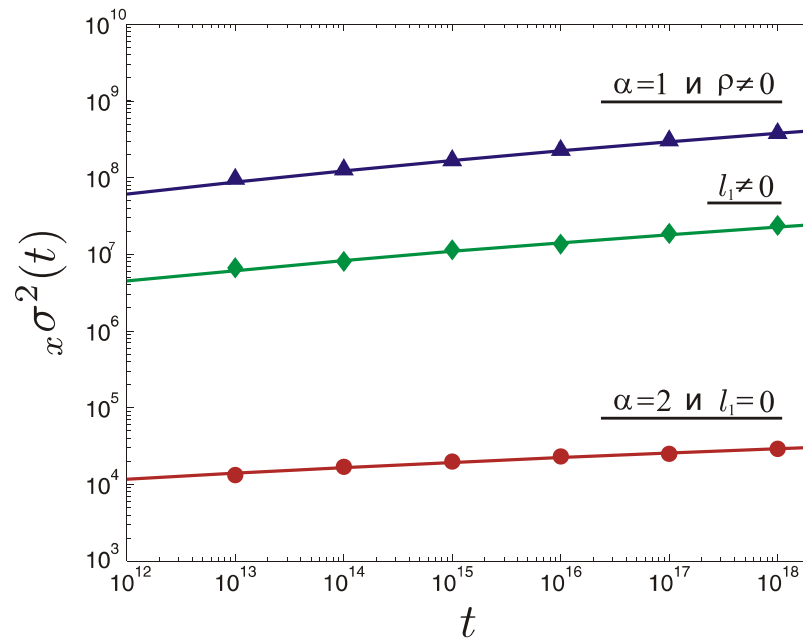


Рисунок 6.1 — Дисперсия положения частицы при больших значениях времени. Сплошные линии показывают теоретическое поведение и построены согласно формулам (6.6), (6.7) и (6.8); треугольники, ромбы и круги отвечают соответствующим численным результатам. Параметры моделирования приведены в разделе 7.3.

3. Распределения длины скачка с $\alpha = 2$ и $l_1 = 0$

Наконец, в последнем из возможных случаев предельная плотность вероятности будет уже двусторонней $\mathcal{P}(y) = \frac{1}{2} e^{-|y|}$ [формула (2.42)]. Отсюда следует $y\sigma^2 = 2 - 0 = 2$, и, с учётом масштабирующую функции (2.41), имеем следующий закон дисперсии для $X(t)$

$$x\sigma^2(t) \sim \frac{(u_+ + u_-) \ln[1/V(t)]}{2V(t)} \quad (6.8)$$

при $t \rightarrow \infty$.

Как можно заметить из формул (6.7), (6.6) и (6.8), дисперсия оригинального положения блуждающей частицы $X(t)$ будет медленно изменяться при больших значениях времени, а именно

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x\sigma^2(\mu t)}{x\sigma^2(t)} = 1 \quad (6.9)$$

при всех $\mu > 0$. Это есть следствием того, что дополнительная кумулятив-

ная функция $V(t)$ для наших блужданий является медленно меняющейся на бесконечности. Следовательно, во всех трёх рассматриваемых в этом разделе ситуациях имеет место формула

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x\sigma^2(t)}{t^\nu} \rightarrow 0 \quad (6.10)$$

для всех $\nu > 0$. Значит дисперсия изменяется медленнее любой положительной степени времени, а поэтому СТРУ в трёх выше приведённых случаях приводят к появлению аномальной сверхмедленной диффузии. Также отметим, что при $t \rightarrow \infty$ выполняется соотношение $x\sigma^2(t)|_{\text{при } \alpha=1 \text{ и } \rho \neq 0} \gg x\sigma^2(t)|_{\text{при } l_1 \neq 0} \gg x\sigma^2(t)|_{\text{при } \alpha=2 \text{ и } l_1=0}$.

Графики дисперсии оригинального положения частицы при больших временах приведены на рисунке 6.1.

7 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗУЧАЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

7.1 Алгоритм

Нахождение предельной плотности вероятности $\mathcal{P}(y)$ с помощью численного моделирования является не совсем стандартной задачей. Это следует из того, что $\mathcal{P}(y)$ является плотностью вероятности случайной величины $Y(t) = a(t)X(t)$ в пределе $t \rightarrow \infty$. В то время, как при численном моделировании, нам нужно определить поведение величины $Y(T) = a(T)X(T)$ и её плотности вероятности

$$\mathcal{P}_T(y) = \frac{1}{a(T)} P\left(\frac{y}{a(T)}, T\right) \quad (7.1)$$

для некоторого конечного значения $t = T$. Чтобы быть уверенными, что эта плотность вероятности соответствует $\mathcal{P}(y)$, время моделирования (блуждания) T должно быть достаточно велико и превышать среднее время ожидания. Однако, в нашем случае все дробные моменты плотности вероятности времени ожидания не существуют, а поэтому нет и конечного характерного среднего времени для $p(\tau)$. Это означает, что для каждого конечного значения T всегда существует не ничтожно малая вероятность превышения величины $V(T) = \int_T^\infty d\tau p(\tau)$. Следовательно, минимальное значение времени T должно определяться условием $a(T) \ll 1$ или, что эквивалентно, $V(T) \ll 1$. Так как $V(T)$ — медленно меняющаяся функция, то она спадает очень медленно при увеличении T , а значит это время блуждания должно быть очень велико. Но с другой стороны, большие значения T приводят к большому (в среднем) числу скачков частицы $\bar{N}(T)$ за промежуток $(0, T)$. Это следует из того, что при больших временах среднее число $\bar{N}(T) \sim V^{-1}(T)$ [44], а значит и время численного счёта будет слишком большим. Таким образом, для выбора приемлемого времени блуждания T нужно одновременно учитывать условие $V(T) \ll 1$ и разумное времени численного счёта.

Опишем вкратце саму процедуру моделирования СТРВ. Напомним,

что частица начинает блуждание в момент $t = 0$ и имеет позицию $X(0) = 0$. Через время τ_1 частичка делает скачок длиной ξ_1 , следовательно её новая позиция равна $X(\tau_1) = \xi_1$, далее через время τ_2 частичка совершит прыжок величиной ξ_2 и её положение будет $X(\tau_1 + \tau_2) = \xi_1 + \xi_2$, и т. д. Пусть за время блуждания T частица совершит N скачков, т. е. $\sum_{n=1}^N \tau_n \leq T$ и $\sum_{n=1}^{N+1} \tau_n > T$, тогда в финальный момент времени T её положение равно $X(T) = \sum_{n=1}^N \xi_n$, а значит интересующее нас масштабированное положение частицы определяется величиной $Y(T) = a(T)X(T)$ при соответствующих функциях $a(T)$. Повторяя эту процедуру много раз, мы можем найти распределение положения частиц при больших временах.

Времена ожидания τ_n и величины скачков ξ_n имеют соответственно плотности $p(\tau)$ и $w(\xi)$, поэтому важно представить метод их генерирования. Существует много таких подходов, которые отличаются простотой и уместностью в той или иной ситуации [45]. Однако, очень часто наиболее оптимальной процедурой оказывается метод обратного преобразования, который особенно удобный для генерирования случайных величин с положительной плотностью (т. е. не имеющей интервалов, где она равна нулю). Это объясняется тем, что в таком случае кумулятивная функция будет строго возрастать, а значит иметь обратную функцию на всей области определения. В основе данного метода лежит теорема, которая гласит: пусть $F(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} d\zeta' f(\zeta')$ — непрерывная кумулятивная функция распределения и $F^{-1}(U) = \inf\{\xi : F(\xi) = U, 0 < U < 1\}$ — обратная к ней функция, тогда, если U — случайная величина равномерно распределённая на $(0, 1)$, случайная величина $\xi = F^{-1}(U)$ будет иметь кумулятивную функцию распределения F . Таким образом, когда плотности $p(\tau)$ и $w(\xi)$ являются положительными, их кумулятивные функции распределения $F_p(\tau) = \int_0^{\tau} d\xi' f(\xi')$ и $F_w(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' w(\xi')$ будут иметь обратные к ним функции, а поэтому мы можем генерировать необходимые нам случайные величины методом обратного преобразования.

Следовательно, в соответствии с описанной выше процедурой, мы можем представить следующий алгоритм численного моделирования масштабированного положения блуждающей частицы

Задаём начальное положение: $X \leftarrow 0$

Задаём начальное время: $t \leftarrow 0$

Задаём общее время блуждания: T

REPEAT

Генерируем равномерную на $(0,1)$ случайную величину U

Вычисляем время ожидания: $\tau \leftarrow F_p^{-1}(U)$

Вычисляем текущее время блуждания: $t \leftarrow t + \tau$

IF $t \leq T$

THEN

Генерируем равномерную на $(0,1)$ случайную величину U

Вычисляем величину скачка: $\xi \leftarrow F_w^{-1}(U)$

Вычисляем текущую позицию: $X \leftarrow X + \xi$

ELSE

Вычисляем соответствующую масштабирующую функцию $a(T)$

Возвращаем масштабированное положение $Y = a(T)X$

UNTIL $t \leq T$

Заметим, что предложенный алгоритм легко модифицировать для моделирования СТРУ в связанном случае, когда множества ξ_n и τ_n зависят друг от друга, или для численного изучения многомерных СТРУ.

7.2 Примеры моделирования предельной плотности $\mathcal{P}(y)$

Для иллюстративного примера моделирования мы используем следующую плотность вероятности времени ожидания

$$p(\tau) = \frac{v \ln^v g}{(g + \tau) \ln^{1+v}(g + \tau)} \quad (7.2)$$

с $v > 0$ и $g > 1$. Выбор этой плотности обуславливается тем, что её кумулятивная функция распределения $F_p(\tau) = \int_0^\tau d\tau' p(\tau')$ легко вычисляется

$$F_p(\tau) = 1 - \frac{\ln^v g}{\ln^v(g + \tau)}, \quad (7.3)$$

а поэтому обратная к $U = F_p(\tau)$ даётся выражением $\tau = g^{(1-U)^{-1/v}} - g$. Исходя из этого, на основе метода обратного преобразования, случайные величины с медленно меняющейся плотностью (7.2) можно генерировать с помощью уравнения

$$\tau_n = g^{(1-U_n)^{-1/v}} - g, \quad (7.4)$$

где $n = 1, 2, \dots$ и U_n – равномерно распределённые на $[0, 1]$ числа. Как мы видим, в этом случае генерация нужных времён ожидания осуществляется очень просто. Для нашего моделирования в качестве параметров в соотношении (7.2) [а значит и в (7.4)] мы выбрали $g = 2, v = 2$ и задали время $T = 10^{15}$, из чего следует $V(T) \approx 4 \cdot 10^{-4}$.

Выбор плотности вероятности $w(\xi)$ для проведения моделирования ограничен двумя условиями. Во-первых, для проверки теоретических результатов нам необходимо рассмотреть все представленные ранее характерные случаи. А, во-вторых, плотность $w(\xi)$ должна, опять же, быть таковой, чтобы для её кумулятивной функции распределения $F_w(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' w(\xi')$ легко находилась обратная. Эти условия просто удовлетворить, например, задав такую плотность вероятности величины скачка

$$w(\xi) = \begin{cases} \alpha_- c_- b_-^{\alpha_-} / (b_- - \xi)^{1+\alpha_-}, & \xi < 0 \\ \alpha_+ c_+ b_+^{\alpha_+} / (b_+ + \xi)^{1+\alpha_+}, & \xi \geq 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Здесь $b_{\pm} \in (0, \infty)$ и $c_+ + c_- = 1$, где c_+ и c_- – вероятности того, что $\xi \geq 0$ и $\xi < 0$ соответственно. Из уравнения (7.5) находим

$$F_w(\xi) = \begin{cases} c_- b_-^{\alpha_-} / (b_- - \xi)^{\alpha_-}, & \xi < 0 \\ 1 - c_+ b_+^{\alpha_+} / (b_+ + \xi)^{\alpha_+}, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad (7.6)$$

а поэтому величины скачков определяются выражением

$$\xi_n = \begin{cases} -b_-(c_-/U_n)^{1/\alpha_-} + b_-, & U_n < c_- \\ b_+[c_+/(1-U_n)]^{1/\alpha_+} - b_+, & U_n \geq c_-. \end{cases} \quad (7.7)$$

Отметим, что применяя предложенный выше алгоритм моделирования СТWR для \mathcal{N} частиц, мы в каждом случае находим соответствующее положение $Y(T)$, а интересующую предельную плотность вероятности приблизительно можно посчитать следующим образом: $\mathcal{P}_T(y) = \mathcal{N}_{\Delta y}/\mathcal{N}$, где $\mathcal{N}_{\Delta y}$ — это число частиц с положением $Y(T) \in [y, y + \Delta y)$. Во всех случаях проведённого численного моделирования мы полагали $\mathcal{N} = 10^5$ и $\Delta y = 10^{-1}$; остальные необходимые параметры приведены ниже.

1. $\alpha \in (0, 1), \alpha_+ \neq \alpha_-$

В этом случае предельная плотность вероятности $\mathcal{P}(y)$ зависит только от минимального значения хвостового индекса α [см., например, уравнение (3.11)]. Однако, для численного определения предельной плотности $\mathcal{P}_T(y)$ с помощью предложенной процедуры, все параметры в уравнениях (7.2) и (7.5) должны быть заданы. В добавление к отмеченным ранее значениям выбранных параметров, мы задаём $\alpha = \alpha_+ = 1/2$, $c_+ = 2/3$, $b_+ = 1$ и $\alpha_- = 3/4$, $c_- = 1/3$, $b_- = 1$. При этих параметрах выражение (2.19) приводит к $a(T) \approx 1.2 \cdot 10^{-7}$, а численно полученные значения $\mathcal{P}_T(y)$ показаны на рисунке 3.1 треугольниками.

2. $\alpha \in (1, 2), \alpha_+ \neq \alpha_-, l_1 = 0$

Исходя из того, что в данной ситуации момент первого порядка плотности вероятности (7.5) даётся выражением

$$l_1 = \frac{c_+b_+}{\alpha_+ - 1} - \frac{c_-b_-}{\alpha_- - 1}, \quad (7.8)$$

($\alpha_{\pm} > 1$) условие $l_1 = 0$ влечёт за собой то, что параметры $w(\xi)$ должны удовлетворять ограничениям $c_+b_+/(\alpha_+ - 1) = c_-b_-/(\alpha_- - 1)$. В частности,

если $\alpha = \alpha_+ = 5/4$, $c_+ = 5/22$, $b_+ = 1$ и $\alpha_- = 37/20$, $c_- = 17/22$, $b_- = 1$, тогда $c_+b_+ / (\alpha_+ - 1) = c_-b_- / (\alpha_- - 1) = 10/11$, $a(T) \approx 1.8 \cdot 10^{-3}$, и результаты моделирования $\mathcal{P}_T(y)$ изображены на рисунке 3.2.

$$3. \quad \alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (0, 1), u_+ \neq u_-$$

Согласно уравнению (7.5) и асимптотической формуле (1.13), параметры u_{\pm} выражаются следующим образом: $u_{\pm} = \alpha_{\pm} c_{\pm} b_{\pm}^{\alpha_{\pm}}$. Учитывая, что $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha$ и $u_+ \neq u_-$, т. е. $c_+ b_+^{\alpha_+} \neq c_- b_-^{\alpha_-}$, мы выбираем $\alpha = 1/2$, $c_+ = 2/3$, $b_+ = 1$ и $c_- = 1/3$, $b_- = 1$. Для этих параметров $u_+ = 1/3$, $u_- = 1/6$ (т. е. $\epsilon = 1/3$), $a(T) \approx 9.3 \cdot 10^{-8}$, результаты численного моделирования можно видеть на рисунке 3.3.

$$4. \quad \alpha_+ = \alpha_- = \alpha \in (1, 2), u_+ \neq u_-, l_1 = 0$$

И, наконец, в этот раз условия $u_+ \neq u_-$ и $l_1 = 0$ приводят соответственно к $c_+ b_+^{\alpha} \neq c_- b_-^{\alpha}$ и $c_+ b_+ = c_- b_-$. Задавая $\alpha = 5/4$, $c_+ = 1/5$, $b_+ = 5$ и $c_- = 4/5$, $b_- = 5/4$, получаем $u_+ = 5^{5/4}/4 \approx 1.87$, $u_- = (5/4)^{5/4} \approx 1.32$ [т.е., $\epsilon = (\sqrt{2} - 1)/(\sqrt{2} + 1) \approx 0.17$], $a(T) \approx 5.2 \cdot 10^{-4}$ и результаты моделирования $\mathcal{P}_T(y)$ показаны на рисунке 3.4.

Как мы видим из этих рисунков, полученные численным методом результаты очень хорошо соответствуют теоретическим предсказаниям. Следует также сказать, что предложенный алгоритм и в других рассматриваемых нами случаях, а именно для предельной плотности вероятности при $l_1 \neq 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ с $l_1 = 0$ [а также для рассмотренного нами ранее случая $w(-\xi) = w(\xi)$], тоже даёт очень хорошее согласование теоретических и численных результатов. Однако, так как теоретические плотности $\mathcal{P}(y)$ в этих случаях будут иметь простой вид одно- или двусторонней экспоненциальной функции, то, во избежание излишней громоздкости, мы не будем приводить полученные в этих условиях с помощью численного моделирования плотности $\mathcal{P}(y)$.

7.3 Примеры моделирования дисперсии положения $X(t)$

Численное моделирование поведения дисперсии оригинального положения частицы проводилось на основе описанного выше алгоритма. Сначала мы получали положение $X_i(T)$ ($i = 1 \dots \mathcal{N}$) для каждой из \mathcal{N} частиц в определённый момент T , а затем искали значения дисперсии полученной совокупности случайных величин $X_i(T)$ согласно известной формуле

$${}_x\tilde{\sigma}^2(T) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} X_i^2(T) - \left[\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} X_i(T) \right]^2. \quad (7.9)$$

Плотности времени ожидания и величины скачка были выбраны такими же, как и ранее, т. е. $p(\tau)$ задавалась формулой (7.2) с $g = 2, v = 2$ и $w(\xi)$ определялась согласно (7.5). Моделирование проводилось для $\mathcal{N} = 10^5$ частиц при разных значений времени (их можно увидеть на рисунке 6.1), остальные используемые параметры следующие:

1. Для случая $\alpha = 1$ и $\rho \neq 0$ мы выбрали $\alpha_+ = 1, b_+ = 1, c_+ = 2/3$ и $\alpha_- = 1, b_- = 1, c_- = 1/3$, т. е. $\rho = 2/3$;

2. В случае $l_1 \neq 0$ задали $\alpha_+ = 5/4, b_+ = 1, c_+ = 1/2$ и $\alpha_- = 7/4, b_- = 1, c_- = 1/2$, а значит $l_1 = 4/3$;

3. И, наконец, при $\alpha = 2$ и $\rho \neq 0$ мы взяли $\alpha_+ = 2, b_+ = 1/2, c_+ = 4/5$ и $\alpha_- = 2, b_- = 2, c_- = 1/5$, а следовательно $l_1 = 0, u_+ = 2/5$ и $u_- = 8/5$.

Полученные численным методом законы поведения дисперсии положения частички $X(t)$ при больших временах показаны на рисунке 6.1 и находятся в прекрасном соответствии с теоретическими результатами.

ВЫВОДЫ

Мы изучили асимптотические (по времени) решения для непрерывных во времени случайных блужданий, которые характеризуются сверхтяжёлыми хвостами распределения времени ожидания и асимметрическими тяжёлыми распределениями величины скачка. Главным образом наш интерес был сосредоточен на нахождении плотности вероятности $\mathcal{P}(y)$ масштабированного положения $Y(t) = a(t)X(t)$ блуждающей частицы, то есть оригинального положения $X(t)$ умноженного на специально подобранную масштабирующую функцию $a(t)$, которая зависит от времени, и чей вид определяется исходя из асимптотических свойств плотностей вероятности времени ожидания $p(\tau)$ и длины скачка $w(\xi)$.

Показано, что в отличие от масштабирующих функций, поведение предельных плотностей вероятности будет зависеть только от асимптотики на бесконечности распределения длины скачка, при этом основную роль играет наименьший из хвостовых параметров α . Искомые плотности $\mathcal{P}(y)$ получены в терминах обратного преобразования Фурье, а для детального изучения свойств они выражены также в виде преобразования Лапласа, H - функций Фокса и рядов. Кроме того, установлено, что плотность вероятности $\mathcal{P}(y)$ удовлетворяет определённое дробное уравнение.

В работе исследовано поведение полученных решений при малых и больших значениях положения частицы. Определено, что хвосты $\mathcal{P}(y)$ могут быть либо экспоненциальными, либо тяжёлыми с тем хвостовым индексом, что и наименее убывающий хвост распределения величины скачка. Исходя из этого, сделано заключение, что когда хоть один из хвостов предельной плотности вероятности будет тяжёлым, дисперсия положения частицы является бесконечной даже при конечном времени блуждания, а в остальных случаях получен закон дисперсии блуждающей частицы при больших значениях времени.

И, наконец, мы провели численное моделирование изучаемых непрерывных во времени случайных блужданий, результаты которого находятся в полном соответствии с теоретическими предсказаниями.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. H. Scher and E. W. Montroll. Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids // *Phys. Rev. B* - 1975. - Vol. 12. - P. 2455 - 2477.
2. R. Metzler and J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach // *Phys. Rep.* - 2000. - Vol. 339. - P. 1-77.
3. D. ben-Avraham and S. Havlin. *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems.* - Cambridge: Cambridge University Press. - 2000. - 336 p.
4. R. Klages, G. Radons, and I. M. Sokolov. *Anomalous Transport: Foundations and Applications.* - 2008. - Berlin: Wiley-VCH. - 584 p.
5. D. Brockmann, L. Hufnagel, and T. Geisel. The scaling laws of human travel // *Nature.* - 2006. - Vol. 439. - P. 462-465.
6. C. Song, T. Koren, P. Wang, and A.-L. Barabási. Modelling the scaling properties of human mobility // *Nat. Phys.* - 2010. - Vol. 6. - P. 818-823.
7. E. Scalas, R. Gorenflo, F. Mainardi. Fractional calculus and continuous-time finance // *Physica A.* - 2000. - Vol. 284. - P. 376-384.
8. J. Masoliver, M. Montero, and G. H. Weiss. Continuous-time random-walk model for financial distributions // *Phys. Rev. E.* - 2003. - Vol. 67, 021112 (10).
9. E. Scalas. The application of continuous-time random walks in finance and economics // *Physica A.* - 2006. - Vol. 362. - P. 225-239.
10. J. Masoliver, M. Montero, J. Perelló, and G. H. Weiss. The CTRW in finance: Direct and inverse problems with some generalizations and extensions // *Physica A* - 2007. - Vol. 379. - P. 151-167.
11. A. Helmstetter and D. Sornette. Diffusion of epicenters of earthquake aftershock, Omori law and generalized continuous-time random walk models // *Phys. Rev. E.* - Vol.66, 061104 (24).
12. L. Palatella, P. Allegrini, P. Grigolini, V. Latora, M. S. Mega, A. Rapisarda, and S. Vinciguerra. Non-Poisson distribution of the time distances between two consecutive clusters of earthquakes // *Physica A.* - 2004. - Vol.338. - P. 201-205.

13. E. W. Montroll and G. H. Weiss. Random Walks on Lattices. II // J. Math. Phys. - 1965. - Vol.6. - P. 167-181.
14. J. Klafter and G. Zumofen. Probability Distributions for Continuous-Time Random Walks with Long Tails // J. Phys. Chem. - 1994. - Vol.98. - P. 7366-7370.
15. E. Barkai. Fractional Fokker-Planck equation, solution, and application // Phys. Rev. E. - 2001. - Vol.63, 046118. - P. 1-17.; E. Barkai. CTRW pathways to the fractional diffusion equation // Chem. Phys. - 2002. - Vol.284. - P. 13-27.
16. G. Germano, M. Politi, E. Scalas, and R. L. Schilling. Stochastic calculus for uncoupled continuous-time random walks // Phys. Rev. E. - 2009. - Vol. 79, 066102 (12).
17. J. K. E. Tunaley. Asymptotic solutions of the continuous-time random walk model of diffusion // J. Stat. Phys. - 1974. - Vol.11. - P. 397-408.
18. M. F. Shlesinger, J. Klafter, and Y. M. Wong. Random walks with infinite spatial and temporal moments // J. Stat. Phys. - 1982. - Vol.27. - P. 499-512.
19. H. Weissman, G. H. Weiss, and S. Havlin. Transport properties of the CTRW with a long-tailed waiting-time density // J. Stat. Phys. - 1989. - Vol.57, №1-2. - P. 301-317.
20. M. Kotulski. Asymptotic Distributions of the Continuous-Time Random Walks: A Probabilistic Approach // J. Stat. Phys. - 1995. - Vol.81. - P. 777-792.
21. M. M. Meerschaert and H. P. Scheffler. Limit Theorems for Continuous-Time Random Walks with Infinite Mean Waiting Times // J. Appl. Prob. - 2004. - Vol. 41. - P. 623-638.
22. S. Havlin and G. H. Weiss. A new class of long-tailed pausing time densities for CTRW // J. Stat. Phys. - 1990. - Vol.58, №5-6 - P. 1267-1273.
23. J. Drager and J. Klafter. Strong Anomaly in Diffusion Generated by Iterated Maps // Phys. Rev. Lett. - 2000. - Vol.84, №26, - P. 5998-6001.
24. A. V. Chechkin, J. Klafter, and I. M. Sokolov. Fractional Fokker-Planck equation for ultraslow kinetics // Europhys. Lett. - 2003. - Vol.63, №3. -

- P. 326-332.
25. S. I. Denisov and H. Kantz. Continuous-time random walk theory of superslow diffusion // *Europhys. Lett.* - 2010. - Vol.92, №3. - P. 1-4.
 26. S. I. Denisov, H. Kantz, and P. Hänggi. Langevin equation with superheavy-tailed noise // *J. Phys. A: Math. Theor.* - 2010. - Vol. 43, 285004 (10).
 27. S. I. Denisov and H. Kantz. Probability distribution function for systems driven by superheavy-tailed noise // *Eur. Phys. J. B.* - 2011. - Vol. 80. - P. 167-175.
 28. S. I. Denisov and H. Kantz. Continuous-time random walk with a superheavy-tailed distribution of waiting times // *Phys. Rev. E.* - 2011. - Vol.83, 041132. - P. 1-7.
 29. S. I. Denisov, S. B. Yuste, Yu. S. Bystrik, H. Kantz, and K. Lindenberg. Asymptotic solutions of decoupled continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting time and heavy-tailed jump length distributions // *Phys. Rev. E* - 2011. - Vol. 84, 061143 (7).
 30. S. I. Denisov, Yu. S. Bystrik, H. Kantz. Limiting distributions of continuous-time random walks with superheavy-tailed waiting times, arXiv:1211.6389, 2012.
 31. S. I. Denisov, Yu. S. Bystrik, H. Kantz. Numerical Simulation of Decoupled Continuous-Time Random Walks with Superheavy-Tailed Waiting Time Distributions // *Nanomaterials: Application & Properties* - 2012. - Vol. 1 No 4, 04MFPN17.
 32. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. - М.: Наука. - 1983. - 304 с.
 33. L. B. Korolov and Y. G. Sinai. *Theory of Probability and Random Processes*, 2nd ed. - Springer-Verlag. - 2007. - 358 p.
 34. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Том 2. - М.: Мир. - 1967. - 765 с. (Глава XIII, Раздел 5).
 35. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, и О. И Маричев. *Интегралы и ряды*, Том 1, 2-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ. - 2002. - 632 с.
 36. L. Debnath and D. Bhatta. *Integral Transforms and their Applications*, 2nd ed. - New York : Chapman & Hall/CRC Press. - 2007. - 728 p. (Chap. 8

- and App. B-6).
37. Г. Бейтмен, А. Эрдейи и др. Таблицы интегральных преобразований, Том 1. - М.: Наука. - 1969. - 344 с.
 38. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, Том 1, Гипергеометрическая функция, функции Лежандра, 2-е изд. - М.: Наука. - 1973. - 296 с. (Глава 1).
 39. R. B. Paris and D. Kaminski. Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals. - Cambridge: Cambridge University Press. - 2001. - 422 p. (Eq. (3.3.12)).
 40. A. M. Mathai, R. K. Saxena, and H. J. Haubold. The H-Function: Theory and Applications. - New York: Springer. - 2010. - 268 p. (Chap. 1).
 41. H. J. Haubold, A. M. Mathai, and R. K. Saxena. Mittag-Leffler Functions and Their Applications // J. Appl. Math. - 2011. - Vol. 2011, 298628 (51).
 42. M. J. Ablowitz and A. S. Fokas. Complex Variables: Introduction and Applications. - Cambridge: Cambridge University Press. - 2003. - 647 p.
 43. H. B. Dwight. Tables of Integrals and Other Mathematical Data, 4th ed. - New York: Macmillan. - 1961. - 289 p.
 44. B. D. Hughes. Random Walks and Random Environments, Vol. 1. - Oxford: Clarendon Press. - 1995. - 631 p. (Chap. 5.1.4).
 45. L. Devroye. Non-Uniform Random Variate Generation. - New York: Springer-Verlag. - 1986. - 843 p. (Chap. 2).
 46. F. Mainardi, Yu. Luchko, and G. Pagnini. The Fundamental Solution of the Space-Time Fractional Diffusion Equation // Fract. Calc. Appl. Anal. - 2001. - Vol. 4, No 2. - P. 153-192.