

## Aproximación de curvas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ a partir del plegado de superficies planas

*Carlos Mario Pulgarín Pulgarín\**

*Carlos Mario Jaramillo López\*\**

### RESUMEN

El carácter discreto y continuo de las matemáticas se pone en evidencia al generar algunos tipos de curvas en y por medio del doblado de papel. Esta actividad hace que el concepto de Suma de Riemann, en el que se encuentra encubierto el concepto de infinito y los métodos clásicos para

hallar el área bajo ciertas curvas, pueda fundamentarse y visualizarse a través de la axiomática de Huzita-Hatori formulando otra perspectiva en la iniciación al estudio del cálculo diferencial e integral.

**Palabras clave:** superficies, sumas de Riemann, aproximación de curvas

\* Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: [cpulgarin@ayura.udea.edu.co](mailto:cpulgarin@ayura.udea.edu.co)

\*\* Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: [cama@matematicas.udea.edu.co](mailto:cama@matematicas.udea.edu.co)

## INTRODUCCIÓN

La generación de curvas en tres dimensiones puede involucrar serias dificultades para su enseñanza y aprendizaje cuando no se tienen al alcance software o aplicativos virtuales que puedan contribuir a la construcción de modelos matemáticos simples para la comprensión de diversos conceptos geométricos y algebraicos. Sin embargo, el pliegue de superficies permite relacionar fácilmente conceptos del cálculo y la geometría, a la vez que estimula múltiples aspectos motivadores por medio de la generación de figuras en dos y tres dimensiones.

Se presenta de este modo, a continuación, una alternativa didáctica para el docente y un elemento modelador en la geometría y las matemáticas para el estudiante, en el cual se tomará como punto de partida el plano, región donde se introduce la axiomática de Huzita-Hatori para brindar un formalismo y principios básicos en el pliegue de superficies y la construcción de elementos teóricos necesarios en la geometría plana, que luego dan paso a un estudio más profundo en el campo matemático relacionando la geometría analítica y el cálculo. Es así como se pone en evidencia el carácter discreto y continuo de las matemáticas al igual que saltan a la vista conceptos tales como límites, diferenciales y sumas infinitas, los cuales se pueden analizar desde otra perspectiva que potencie los modelos mentales y conceptuales del estudiante por medio de material concreto.

## AXIOMAS DE HUZITA-HATORI

La axiomática de Huzita-Hatori surge como referente teórico y punto de partida en el formalismo y construcción de los diversos modelos de pliegado. Consta de siete axiomas que se enuncian a continuación:

[ $A_1$ ] Dados dos puntos  $p_1$  y  $p_2$ , hay un dobléz único que pasa por ambos puntos.

[ $A_2$ ] Dados dos puntos  $p_1$  y  $p_2$ , hay un dobléz único que coloca  $p_1$  sobre  $p_2$ .

[ $A_3$ ] Dadas dos líneas  $l_1$  y  $l_2$ , hay un dobléz que coloca  $l_1$  sobre  $l_2$ .

[ $A_4$ ] Dado un punto  $p_1$  y una línea  $l_1$  hay una única perpendicular al dobléz  $l_1$  que pasa a través del punto  $p_1$ .

[ $A_5$ ] Dados dos puntos  $p_1$  y  $p_2$  y una línea  $l_1$ , hay un dobléz que coloca  $p_1$  sobre  $l_1$  y pasa a través de  $p_2$ .

[A<sub>6</sub>] Dados dos puntos  $p_1$  y  $p_2$  y dos líneas  $l_1$  y  $l_2$ , hay un dobléz que coloca  $p_1$  sobre  $l_1$  y  $p_2$  sobre  $l_2$ .

[A<sub>7</sub>] Dados un punto  $p_1$  y dos líneas  $l_1$  y  $l_2$ , hay un dobléz que coloca  $p_1$  sobre  $l_1$  y es perpendicular a  $l_2$ .

### GENERACIÓN DE CURVAS EN $R^2$

Es posible construir polígonos regulares tomando como base un cuadrado. El perímetro del polígono generado puede aproximar una curva bien definida y, además, pueden obtenerse cálculos muy precisos de longitudes de arcos.

Si se considera la longitud del lado del cuadrado como  $a$  unidades puede relacionarse dicha medida con las del triángulo equilátero formado en su interior, y haciendo uso de sus habilidades algebraicas y geométricas podrá obtener las medidas del perímetro y área en función del lado del cuadrado base. Construcciones como esta, en las cuales se toman como punto de partida el mismo cuadrado, pueden elaborarse para un mayor número de lados en un polígono regular. Los resultados de algunos polígonos regulares puede verlos en la tabla 1.

Tabla 1. Comparativo de magnitudes para polígonos de  $2^n$  lados, siendo  $n$  entero positivo par

Polígono de 4 lados	Polígono de 8 lados	Polígono de 16 lados
Lado: $R\sqrt{2}$	Lado: $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	Lado: $R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
Perímetro: $R \cdot 2^2 \sqrt{2}$	Perímetro: $R \cdot 2^3 \sqrt{2-\sqrt{2}}$	Perímetro: $R \cdot 2^4 \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
Apotema: $R \frac{\sqrt{2}}{2}$	Apotema: $R \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	Apotema: $R \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$
Área: $R^2 \cdot 2$	Área: $R^2 \cdot 2 \sqrt{2}$	Área: $R^2 \cdot 2^2 \sqrt{2-\sqrt{2}}$

*Generación de polígonos de  $2n$  lados.* Una forma alternativa de obtener polígonos de  $2n$  lados que permiten generar con mayor detalle la aproximación a una curva es a partir del plegado reiterativo de bisectrices y perpendiculares a ciertos dobleces dentro una región plana de papel, como se muestra en la Fig. 1.

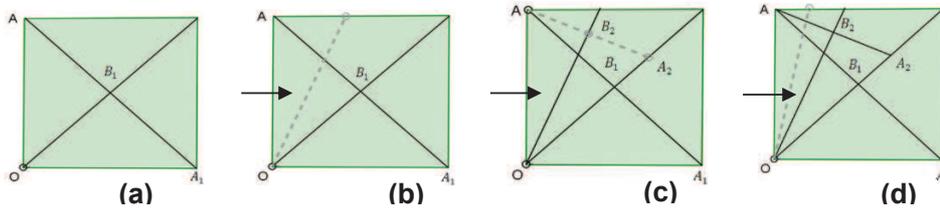


Fig. 1. Forma sucesiva de obtener polígonos de  $2n$  lados tomando como base un cuadrado<sup>1</sup>. Todos los cálculos y deducciones matemáticas hasta ahora vistos pueden tomar como punto de partida el pliegue de superficies de papel, pero dichos pliegues no solo son para el caso de una circunferencia, sino que es posible generalizarlos para cualquier tipo de curva.

Al analizar los resultados de la tabla 1 y establecer una generalización para el caso de la longitud del lado de dichos polígonos se obtiene que:

$l = R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$ . Asimismo, se ponen en evidencia resultados de radicales jerarquizados que al generalizarse para cualquier valor  $n$  (siendo  $n$  entero positivo) arrojan la siguiente expresión:

$$\sqrt{n(n-1) - \sqrt{n(n-1) + \sqrt{n(n-1) + \dots}}$$

Surge entonces una forma alternativa de aproximar el valor de  $\pi$  por medio de límites:

$$\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

Siendo  $k$ : Número de raíces cuadradas involucradas<sup>2</sup>

Todos los cálculos y deducciones matemáticas hasta ahora vistos pueden tomar como punto de partida el pliegue de superficies de papel, pero dichos pliegues no solo son para el caso de una circunferencia, sino que es posible generalizarlos para cualquier tipo de curva.

<sup>1</sup> Algunas construcciones han sido extraídas del texto: Geometric Exercises in Paper Folding de Sundara Row.

<sup>2</sup> Dicha expresión es llamado algoritmo iterativo. Fue usado por el matemático Liu Hui para calcular  $\pi$  partiendo de polígonos inscritos en un círculo. Para mayor ampliación ver: [http://es.wikipedia.org/wiki/Radicales\\_jer%C3%A1rquicos](http://es.wikipedia.org/wiki/Radicales_jer%C3%A1rquicos)

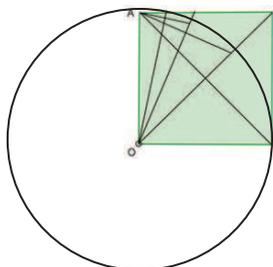


Fig. 2. Aproximación a la longitud de arco de la circunferencia por medio de los polígonos generados en la Fig. 1

Cualquier función diferenciable puede ser aproximada en el nivel local por una función lineal; entonces, en algunos casos las funciones lineales son las más importantes y de la misma forma podría decirse que las formas diferenciales son los más importantes integrandos.

Al aplicar doblesces en forma reiterativa a una superficie de papel y limitándose a un intervalo  $[a, b]$  se obtiene una aproximación a la curva dada por la Fig. 3. Ahora, considere una función  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  que es rectificable, es decir,  $f'$  es continua en  $[a, b]$ . De tal función se dice que su gráfica en  $[a, b]$  es una curva suave. Bajo las anteriores condiciones y tomando como punto de partida las construcciones elaboradas en la Fig. 2 y Fig. 3 se extraen las siguientes deducciones:

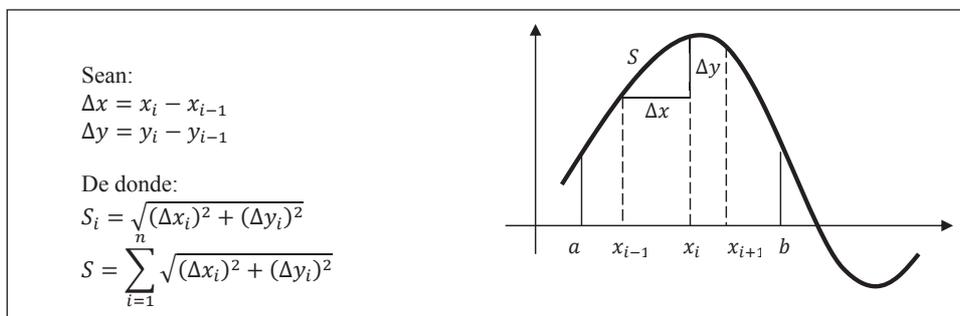


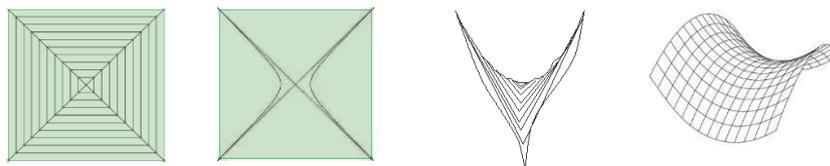
Fig. 3 Curva suave en un intervalo  $[a, b]$  con particiones regulares

Se ha llegado así a una forma de relacionar el pliegue de superficies con el concepto de límites, derivadas y más allá, aún, la construcción del concepto de sumas infinitas.

### GENERACIÓN DE CURVAS EN $R^3$

Las curvas generadas por el pliegue de superficies son muy diversas y la profundidad de los conceptos y expresiones matemáticas que se estudian pueden llegar a ser de muy alto nivel a tal punto que el pliegue de superficies

se traslada a áreas tales como la computación, y la arquitectura. Es decir, dentro de todas estas matemáticas se encuentran muchas ciencias aplicadas a las cuales se puede llegar desde otra perspectiva en la enseñanza de las Matemáticas.



Para  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cada doblez define un límite sobre el cual se intersectan dos planos, de este modo si se lleva ese pliegue de superficies de papel a una región tridimensional puede llegar a generarse una función de dos variables que consiste en utilizar un campo escalar en el que se asigna al punto  $(x, y)$  el escalar  $z = f(x, y)$ . Un campo escalar queda caracterizado por sus curvas de nivel (o líneas de contorno) a lo largo de las cuales el valor de  $f(x, y)$  es constante.

En la figura 4 se muestra la representación gráfica de la ecuación  $z = y^2 - x^2$  también conocido como paraboloides hiperbólico o "silla de montar".

#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Bachman, D. (2000). *A Geometric Approach to Differential Forms*. United States of América. Boston: Birkhäuser.
- [2] Eisenhart, L. (1947) *An Introduction to Differential Geometry with use of the tensor calculus*. Princeton: Princeton University Press.
- [3] Huzita, H. (1989) *Axiomatic development of origami geometry*. En Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, New York.
- [4] Larson, R. y Hostetler R. (1999) *Cálculo y Geometría Analítica, 6ª edición*. México: Mc Graw Hill.
- [5] Leithold, Louis. (1998). *El cálculo. 7ª edición*. México: Oxford University Press.
- [6] Monsalve, Orlando y Jaramillo, C. (2003) *El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas*. En: *Revista Educación y Pedagogía*. 15(35), 11-25.
- [7] Row, T. (1966) *Geometric Exercises in Paper Folding*. New York: Dover.
- [8] Santa Z. M. y Jaramillo, C. (2010). *Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas*. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (31). Recuperado de: [http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com\\_content&task=view&id=169&Itemid=1](http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com_content&task=view&id=169&Itemid=1)
- [9] Demaine E. *exhibitions*. Recuperado de: <http://erikdemaine.org/>