

## El juego de dados de Mozart como recurso didáctico para dinamizar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las nociones básicas de la probabilidad

*Yeimy Rodríguez García<sup>\*</sup>*

*Geral Stivens Galán García<sup>\*\*</sup>*

*Milton Sady Riveros Castellanos<sup>\*\*\*</sup>*

*Dolly Carolina Mora Villota<sup>\*\*\*\*</sup>*

### RESUMEN

Una de las tareas más importantes del docente es la transposición didáctica, que consiste en transformar el saber abstracto en un saber enseñado, que se acomode a las necesidades de los estudiantes y que cumpla la función de ser significativo. En ese orden de ideas, el uso de recursos didácticos y la gestión docente facilitan tal tarea.

En efecto, este taller consiste en la aplicación del recurso "Juego de dados de Mozart", y tiene como finalidad ilustrar en qué consiste el juego, con ayuda de medios tecnoló-

gicos que permiten que cada persona pueda crear diversas composiciones musicales por medio del azar, y que, además, construya algunos conceptos de probabilidad. De esta manera se hará un aporte a la didáctica de la estocástica y, por ende, una propuesta para enseñar probabilidad por medio de un recurso innovador y que se puede adaptar para abordar diferentes conceptos.

**Palabras clave:** Experimentación, probabilidad, constructivismo, gestión docente, recursos didácticos

<sup>\*</sup> Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: yeimy.rodriguez111@yahoo.com

<sup>\*\*</sup> Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: geraldsteveng@gmail.com

<sup>\*\*\*</sup> Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: mimilton88@gmail.com

<sup>\*\*\*\*</sup> Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: dolly\_carolina\_mora@hotmail.com

## PRESENTACIÓN DEL TALLER

El taller tiene como objetivo, que los docentes de matemáticas y estadística consideren el "Juego de dados de Mozart" como un recurso para enseñar probabilidad condicional, o incluso algunas nociones básicas de probabilidad.

La idea es aplicarlo por medio de algunas preguntas orientadoras y una situación fundamental que los llevará a hacer un análisis más profundo del juego. Luego se hará una conclusión de los objetos estocásticos trabajados y el uso de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau como una metodología para llevar a cabo en el aula este instrumento. De igual forma se hará una reflexión en torno a las ventajas y desventajas del taller y del recurso.

## MARCO TEÓRICO

Como ya se ha mencionado, la propuesta "Juego de dados de Mozart" es un aporte a la enseñanza de la probabilidad, y por ello es importante centrarse en la construcción del juego y algunos aspectos relacionados directamente con la didáctica y lo que postula el Ministerio de Educación Nacional.

Para el diseño de este taller se toma la tesis de Tiburcio S. (2002), en la cual se describe el juego de composición musical de vales ideado por Wolfgang Amadeus Mozart en 1777, titulado: "*Juego de dados musical para escribir vales con la ayuda de dos dados, sin ser músico ni saber nada de composición*".

El juego de dados consiste en la creación de una pequeña obra musical: un vals de 16 compases<sup>1</sup>. El método se basa en dos tablas y un repertorio de 176 compases cifrados y agrupados en 16 conjuntos de 11 compases cada uno. Las columnas indican el número de orden del compás, y en cada una de las filas aparece un número entre 2 y 12 que corresponde a la suma de las caras de dos dados.

Para obtener el primer compás se arrojan dos dados y se suma su resultado, obteniéndose un número de fila que interceptada con la columna I da la cifra del compás a seleccionar. Por ejemplo, si la suma dio 3, se debe seleccionar el compás 32 del repertorio. Se procede igual con el segundo compás y así sucesivamente, hasta conseguir los 16 elementos que deberán incluirse en la partitura. El método funciona porque los compases correspondientes a una misma columna son variaciones sobre una idéntica base armónica. Las

---

<sup>1</sup> División rítmica de fragmentos de igual duración que se lleva a cabo en una obra musical.

tablas cumplen ciertas reglas (las de la armonía y melodía tradicional) que son conjugadas con el azar.

El ingenio del Mozart lo llevó a componer no una pieza para piano, sino un generador de minuetos<sup>2</sup>. La obra no contiene una partitura para una pequeña composición, sino que tiene un sistema que, apoyado en el azar, puede generar un número muy grande de composiciones diferentes. Pues el número de posibles partituras corresponde a 11 elevado a 16, que es un número tan grande que se estima que si se interpretaran continuamente todas las partituras posibles, y cada interpretación tardara 30 segundos, para agotar todas las posibilidades, se necesitarían más de 728 millones de años, interpretando la obra de día y de noche y de manera continua.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Figura 1: Tablas del juego de dados de Mozart, con los 176 compases cifrados.

Se observa que el conjunto del espacio muestral que se obtiene de lanzar dos dados y sumar sus resultados es de 36 elementos:

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Figura 2: posibles resultados que se obtienen al lanzar dos dados

<sup>2</sup> Composición instrumental de ritmo ternario y moderado que se intercala entre los tiempos de una sonata, cuarteto o sinfonía.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figura 3: suma de los posibles resultados que se obtienen al lanzar dos dados

Es importante mencionar que no todas las obtenciones para la suma de las caras de dos dados son igualmente probables; se tiene que el número total de parejas (i,j) es 36, y las respectivas probabilidades de la suma son:

Prob.(2) = 1/36 = Prob.(12)	Prob.(5) = 4/36 = Prob.(9)
Prob.(3) = 2/36 = Prob.(11)	Prob.(6) = 5/36 = Prob.(8)
Prob.(4) = 3/36 = Prob.(10)	Prob.(7) = 6/36

Los 16 lanzamientos del par de dados se hacen de manera independiente; si por ejemplo las 16 sumas dieran como resultado: (2, 4, 11, 6, 7, 6, 11, 8, 3, 5, 4, 8, 2, 12, 10, 7), se tiene una probabilidad asociada. Se calcula su probabilidad de ocurrencia multiplicando las 16 probabilidades que le corresponden a cada uno de los números ejemplificados, la del 2, la del 4, la del 11, etcétera. En este caso el resultado es: Prob. = (1 x 3 x 2 x 5 x 6 x 5 x 2 x 5 x 2 x 4 x 3 x 5 x 1 x 1 x 3 x 6) x (1/36 elevado a 16). De las más de 45,949 billones de posibles realizaciones, muchas comparten el tener la misma probabilidad de ocurrir pero solo una de ellas se distingue, desde el punto de vista probabilístico, en tener la probabilidad de ocurrencia más alta; esta corresponde a la realización en donde para cada uno de los 16 compases, los dados suman 7 en todas las ocasiones.

*Necesidad social de la interdisciplinariedad entre las ciencias.* Caro, M. (2006) advierte que es sumamente importante salir de la enseñanza de asignaturas fragmentadas, para pasar a una enseñanza integrada e interdisciplinar. Es decir, que es posible entonces formar constructores del conocimiento a través de la educación integradora de saberes; por ello, una idea para abordar la interdisciplinariedad en este proyecto está en lograr una conexión entre la estocástica y la música, las dos vistas desde su desarrollo y aplicación aparentemente intuitivo. En efecto, se puede componer sin nece-

sidad de ser músico, y un músico puede aprender probabilidad a partir de lo que compone.

*Aprovechar la tecnología como recurso facilitador y potenciador del aprendizaje matemático.* La Oficina Regional de Educación de la UNESCO para América Latina y el Caribe (2005) ha visto dentro de su investigación que un problema es que gran número de escuelas no posee computadoras o acceso a Internet y que esto, debido al impacto tecnológico en el cual está inmerso el mundo entero, perjudica el progreso educativo, pues la tecnología avanza en la vida cotidiana más rápido que en las escuelas, y un docente que no maneje las tecnologías de información y comunicación está en clara desventaja con relación a los alumnos. Es decir, que en acuerdo, el uso de nuevas tecnologías en la escuela es una herramienta para el mejoramiento de la calidad de la educación matemática en el país, es fundamental para irrumpir el problema de desarrollo y, por tanto, debe aprovecharse dentro de la gestión docente.

*Propuesta de enseñanza de objetos estocásticos.* Se habla, entonces, de que hay una conexión estrecha entre la música y la probabilidad, y que la tecnología es útil para el aprendizaje de las matemáticas. En ese orden de ideas se diría que es posible generar música por medio de programas de computadora enfocados en el aprendizaje de la probabilidad, debido a que el terreno de la informática ha dado nuevas herramientas para el compositor.

Sin embargo, para efectuar dicha relación que establece la interdisciplinariedad es esencial conocer algunos modelos de enseñanza para la probabilidad. Para ello, Vergel, R. Rocha, P. y León, O. (2001) proponen unos elementos conceptuales que sustentan una propuesta de enseñanza de objetos estocásticos, basándose en tres elementos conceptuales: desarrollo de proyectos de aula como estrategia didáctica, la teoría de las situaciones didácticas y el análisis exploratorio de datos.

Teniendo en cuenta lo anterior, en este taller se hará una reflexión sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje bajo la resolución de problemas por medio de la teoría de situaciones didácticas propuesta por Brousseau, reconociendo las ventajas didácticas de los dispositivos juego y proyecto de aula.

Ahora bien, la teoría de las situaciones didácticas propuesta por Guy Brousseau (1986) se basa en una aproximación constructivista, la cual actúa bajo el principio de que una noción se construye en un ambiente de situaciones

de enseñanza, creando un discurso hecho tanto por el maestro, como por los alumnos.

El estudiante debe pasar por cuatro situaciones en el aula, mientras se desarrolla una situación didáctica:

Situaciones de acción: ensayo y error que hace el alumno para resolver el problema.

Situaciones de formulación: el alumno intercambia información con maestro y compañeros.

Situaciones de validación: el estudiante justifica la pertinencia y la validez de la estrategia usada, del modelo empleado para la resolución de la situación. Hay un intercambio de información que lleva al alumno a la revisión.

Situaciones de institucionalización: es un proceso a cargo del profesor; las respuestas de los alumnos deben ser transformadas a través de un proceso de re-descontextualización y re- personalización, para que dichos conocimientos puedan ser convertidos en saberes.

Cuando la situación problema recoge todas las características anteriores, se adapta en su desarrollo a cada una de las situaciones propuestas por Brousseau (1986). Entonces se le reconoce como situación fundamental

Los proyectos de aula nacen como una estrategia didáctica que busca la interdisciplinariedad y la transversalidad para potenciar el aprendizaje significativo en un contexto de aplicación social, económico, político, etc. Además, permiten que el estudiante dé solución a una situación fundamental en relación con un conocimiento específico; por ello este dispositivo será esencial, dado que aborda transversalidad (música, tecnología y probabilidad) y se fundamenta en una situación problema de la cual se desprenden todos los conceptos que se quieren enseñar en probabilidad para los que el juego es útil.

*Enseñanza de la probabilidad.* Glayman y Varga (1975) recomiendan un proceso de enseñanza de la probabilidad en tres etapas: la experimentación, razonamiento elemental y medida de la probabilidad.

La experimentación. Es la primera etapa para familiarizar al niño con el mundo probabilístico, y consiste en una amplia experimentación, manipulando material variado (datos, peonzas, monedas, bolas, etc.). Cada experiencia se repite muchas veces en las mismas condiciones y luego se propone a los

niños que traten de adivinar el resultado con el objeto de que capten las propiedades inherentes a fenómenos aleatorios.

**Razonamiento elemental.** Es la segunda etapa –razonamiento elemental– consiste en proponer juegos que permitan comparar cualitativamente las probabilidades de ciertos sucesos.

**Medida de la probabilidad.** Se propone el uso de fracciones, surgidas de las frecuencias, como medida de la probabilidad. El aprendizaje y la utilización de este instrumento se podrán ir haciendo simultáneamente con el estudio de las situaciones y vendrá motivado por ellas (Batanero 1996, p. 55).

**Políticas educativas vigentes.** Teniendo en cuenta los estándares básicos de calidad para el área de matemáticas (2006) del MEN, se identifica que los siguientes estándares responden a la propuesta a implementar:

“Calculo probabilidad de eventos simples, usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).”

“Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.)”

## **METODOLOGÍA DEL TALLER**

**Recursos.** Para realizar una “transposición didáctica” del juego de dados de Mozart, se requiere una sala de informática, puesto que se proponen dos programas con ciertas particularidades cuya función será llevar a cabo la integración entre la música y la probabilidad: el Mozart Dice, y el Notación Player. El “Mozart Dice” es, básicamente, la sistematización del juego de dados para la composición musical de valeses, ideado por Mozart, y permite reproducir y guardar la obra, en formato de audio. El “Notación Player”, por otra parte, es un programa que admite tomar las canciones y reproducirlas, mostrando su partitura completa, y en el caso de los valeses producidos por juego de dados de Mozart, es posible ver y reproducir sus compases por separado, lo que abre la opción de que usando los dos programas simultáneamente, se pueda identificar de manera intuitiva, primero escuchando y luego asociando un número a un sonido. Y según un orden específico, deducir el número correspondiente a la suma de los dados para cada compás (del 2 al 12), y el compás para entrar a determinar la probabilidad de ocurrencia de un vals dado.

De igual forma, a cada persona se le hará entrega de una guía de trabajo y dos dados. En la guía va a aparecer una situación fundamental y algunas preguntas clave para poder solucionarlas; los dados son para que cada persona tenga la posibilidad de componer e identificar con mayor facilidad el espacio muestral del experimento aleatorio.

*Organización, primera parte:* se explicará claramente en qué consiste el juego, para que luego cada uno de los asistentes interactúen directamente con este, experimentando, lanzando los dados y ubicando los resultados obtenidos en las tablas puestas en el programa tecnológico, para así obtener diversas composiciones musicales. Enseguida se presentará la situación fundamental, y se proporcionará la composición musical en formato audio, para que cada uno la escuche atentamente y la descifre con ayuda del juego y de un reproductor de audio.

*Organización, segunda parte.* Una vez descifrada la composición musical dada, cada participante del taller debe calcular la probabilidad de ocurrencias de esta, también debe deducir la composición más probable, la menos probable, algunas composiciones equiprobables; y calcular su probabilidad de ocurrencia haciendo uso de la probabilidad condicional.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Azcárate, P. & Cardeñoso, J. M. (2001). *Probabilidad*. Madrid, España. Editorial Síntesis.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, VII (2), pp. 33-115.
- Caro Valverde, M. (2006). *Los clásicos redivivos en el aula. Modelo didáctico interdisciplinar en educación literaria*. Universidad de Murcia, Facultad de Educación. Departamento de Didáctica de la Lengua y la Literatura. Tesis doctoral.
- Godino, J., Batanero, C. & Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid España. Editorial Síntesis.
- Godino, Juan D. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada
- Godino, Juan D. (2001). *Análisis de datos y su didáctica*. Universidad de Granada, España.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de calidad para el área de matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.



- Tiburcio S. (2002). *Teoría de la probabilidad en la composición musical contemporánea*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Escuela de Artes. México
- Vergel, Rodolfo. Rocha, Pedro & León, Olga (2001). *El juego, la resolución de problemas y el proyecto de aula como dispositivos en las didácticas de la matemática y de la estadística*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Esta dirección electrónica esta protegida contra spambots. Es necesario activar Javascript para vis