

## Representación de objetos tridimensionales utilizando multicubos. Software: multicubos, geoespacio, explorando el espacio 3D

*Efraín Alberto Hoyos Salcedo\**  
*Jorge Hernán Aristizábal\*\**

### RESUMEN

El presente taller es la respuesta a una necesidad sentida en el desarrollo del currículo de matemática en Básica Primaria y Secundaria con el propósito de desarrollar competencias espaciales en los estudiantes. El software educativo ocupa un lugar muy importante en esta propuesta en cuanto al desarrollo de las actividades, y está compuesto por una secuencia didáctica con tres programas diseñados con herramientas 3D: explorando el espacio, multicubos y geoespacio. La fundamentación teórica se basa en la teoría de las representaciones de objetos matemáticos, y la metodología

del taller incluye trabajo en la sala de informática apoyado con guías, software educativo y, por supuesto, el espacio para las reflexiones teóricas de los participantes.

El software está diseñado como ambientes de reconocimiento y de construcción de objetos tridimensionales con preguntas y sus correspondientes respuestas de evaluación en formato de micromundo para el desarrollo del pensamiento espacial.

**Palabras clave:** pensamiento espacial, tridimensional, software educativo, representaciones, transformaciones, visualización.

\* Universidad del Quindío. Dirección electrónica: [eahoyos@uniquindio.edu.co](mailto:eahoyos@uniquindio.edu.co)

\*\* Universidad del Quindío. Dirección electrónica: [jhaz@uniquindio.edu.co](mailto:jhaz@uniquindio.edu.co)

## PRESENTACIÓN

En didáctica de las matemáticas, está demostrado que, en todos los campos de las matemáticas escolares, el aprendizaje y la enseñanza resultan más fáciles y profundos cuando evitan la abstracción innecesaria y se apoyan en representaciones o modelizaciones gráficas simbólicas o físicas que los estudiantes pueden articular mediante la observación, construcción, manipulación o transformación, que permitan la solución de los problemas matemáticos. Para el caso del desarrollo de la visualización espacial, la utilización del software educativo que se va socializar en este taller ocupa un lugar de gran importancia.

Es también importante resaltar que hoy, según los estándares por competencias en matemáticas en Colombia, se traslada la responsabilidad del desarrollo de competencias espaciales en los estudiantes de Básica Primaria y Secundaria a los docentes de matemáticas, asunto que antes estaba incluido en el currículo de dibujo técnico.

## REFERENTES TEÓRICOS

Pensamiento espacial y sistemas geométricos. El estudio de la geometría intuitiva en los currículos de las matemáticas escolares se había abandonado como una consecuencia de la adopción de la matemática moderna. Desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no solo en lo que se refiere a la geometría.

Howard Gardner (2001) en su teoría de las múltiples inteligencias considera como una de estas inteligencias la espacial y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, puesto que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física, matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial.

Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que

se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales. Por tanto, el estudio de la geometría en la escuela debe favorecer estas interacciones. Se trata de actuar y argumentar sobre el espacio ayudándose con modelos y figuras, con palabras del lenguaje ordinario, con gestos y movimientos corporales y recursos informáticos.

Geometría activa. Para lograr este dominio del espacio se sugiere el enfoque de geometría activa que parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo. Se da prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas y a la importancia de las transformaciones en la comprensión aun de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos. Se trata pues de hacer cosas, de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna. Esta conceptualización va acompañada en un principio por gestos y palabras del lenguaje ordinario, hasta que los conceptos estén incipientemente contruidos en un nivel suficientemente estable para que los alumnos mismos puedan proponer y evaluar posibles definiciones y simbolismos formales.

Representación bidimensional del espacio tridimensional. Otro aspecto importante del pensamiento espacial es la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación, y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio.

Al respecto Lappan y Winter afirman: A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros niños son bidimensionales. Nos valemos de libros bidimensionales para presentar las matemáticas a los niños, libros que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales. A no dudar, tal uso de dibujos de objetos le supone al niño una dificultad adicional en el proceso de comprensión. Es empero, necesario que los niños aprendan a habérselas con las representaciones bidimensionales de su mundo. En nuestro mundo moderno, la información seguirá estando diseminada por libros y figuras, posiblemente en figuras en movimiento, como en la televisión, pero que seguirán siendo representaciones bidimensionales del mundo real Linda Dickson y otros, *El aprendizaje de las matemáticas*, (Dickson, 1991)

Para comunicar y expresar la información espacial que se percibe al observar los objetos tridimensionales es de gran utilidad el uso de representaciones planas de las formas y relaciones tridimensionales. Hay distintos tipos de tales representaciones. Cada una es importante para resaltar un aspecto, pero es necesario utilizar varias a la vez para desarrollar y completar la percepción del espacio. El dibujo en perspectiva se puede utilizar con mucho provecho para la educación estética, y para el ejercicio de las proyecciones de objetos tridimensionales en la hoja de papel, y de la hoja de papel al espacio. Para esto último se puede empezar por dibujar cubos y cajas en perspectiva, de manera que unos oculten parcialmente a los otros, y luego tratar de colocar cubos y cajas de cartón sobre una mesa de manera que se vean como en el papel. Aun en el dibujo en perspectiva es difícil dibujar las elipses que representan las distintas maneras como aparece un círculo desde distintos puntos de vista. Por eso puede ser aconsejable limitar la perspectiva a figuras rectilíneas, a menos que los mismos alumnos quieran explorar cómo se dibujan las tapas de las alcantarillas en las calles ya dibujadas en perspectiva.

Las transformaciones. En la actualidad, gran parte de la geometría escolar se ha ocupado del movimiento de figuras geométricas desde una posición a otra, y de movimientos que cambian el tamaño o la forma. El estudio de las transformaciones de figuras ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría, basada en teoremas y demostraciones y en el método deductivo.

Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. En las investigaciones analizadas en el campo de la educación matemática se proponen diferentes definiciones de visualización y orientación, tanto en el contexto de la geometría como en otras disciplinas (por ejemplo, el álgebra o la aritmética), pero muchas veces se designa un mismo concepto con nombres diferentes y conceptos diferentes con un mismo nombre. Además, estas definiciones pueden resultar de difícil aplicación directa en la enseñanza.

Es importante mencionar una manera operativa el tema de la visualización y la orientación en el contexto de la geometría espacial, identificando y clasificando los principales tipos de tareas sobre la visualización y la orientación de objetos o espacios tridimensionales (representados en el plano o presentados físicamente).

En el contexto tridimensional (prescindimos de las tareas de orientación y visualización de figuras planas) podemos diferenciar tres grandes familias de actividades, según el tópico específico tratado:

1. Orientación estática del sujeto y de los objetos
2. Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales
3. Orientación del sujeto en espacios reales

En este taller nos centraremos en la visualización de objetos tridimensionales, mediante la elaboración e implementación de una propuesta de intervención pedagógica que potencie el desarrollo de habilidades de visualización del espacio 3D, en ambientes informáticos.

Esta propuesta intenta devolver la dinámica a los sistemas geométricos, con sus operadores y transformaciones, que resultan de interiorizar en forma de esquemas activos en la imaginación, los movimientos, acciones y transformaciones que se ejecutan físicamente. Se propone que se trabaje la geometría por medio de aquellas transformaciones que ayuden a esa exploración activa del espacio y a desarrollar sus representaciones en la imaginación y en el plano del dibujo.

Muchas son las investigaciones que estudian las estrategias, los conocimientos, las habilidades, las dificultades, puestas en juego al resolver diferentes actividades de perspectivas de cuerpos tridimensionales. Describimos brevemente las tareas presentadas en algunos trabajos centrados en este tópico.

Gutiérrez (1996a, p. 36), en el análisis de un experimento de enseñanza de las representaciones planas de módulos multicubos, distingue tres tipos de actividades:

- A partir de una representación plana de módulos en perspectiva en el ordenador con la posibilidad de girarlo libremente), tiene que dibujar diferentes tipos de sus representaciones planas.
- El estudiante tiene que relacionar dos tipos de representaciones planas del módulo, sin construirlo físicamente.

Fischbein (1993) analiza el caso del desarrollo de un cubo, como ejemplo de una práctica con estudiantes de actividades mentales en las cuales la cooperación entre el aspecto conceptual y el figural requiere un esfuerzo especial. Esta actividad se refiere al desarrollo de un cuerpo geométrico y está compuesta de tres partes:

- Dibujar la imagen obtenida desarrollando un cuerpo geométrico  
Identificar el cuerpo geométrico obtenido a partir de un desarrollo plano
- Indicar en el desarrollo las aristas que se hacen corresponder cuando el

objeto tridimensional sea reconstruido.

## METODOLOGÍA DEL TALLER

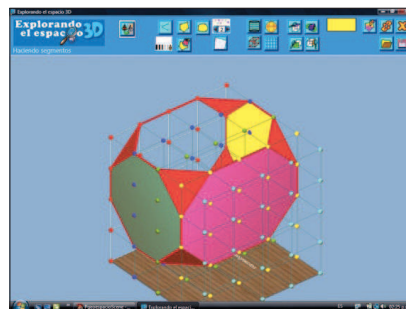
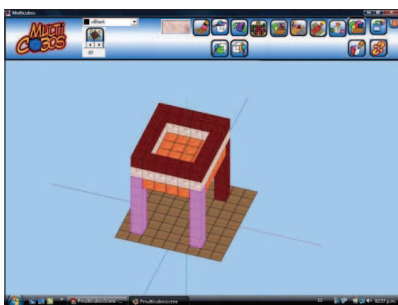
El taller se desarrollará en tres momentos durante hora y media:

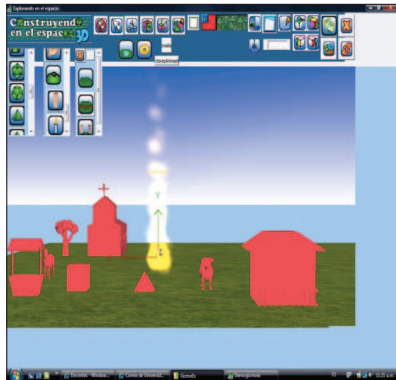
- a. Introducción teórica sobre sistemas de representación del espacio 3D.
- b. Desarrollo de actividades en una sala de informática en grupos de dos participantes por computador, utilizando software educativo que incluye los siguientes programas: multicubos, Geoespacio y explorando el espacio 3D.
- c. Discusión de los alcances bondades y dificultades de la propuesta didáctica.

Resumiendo: la importancia de un buen desarrollo del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes es un hecho reconocido lo cual determina la necesidad de una recuperación del sentido espacial como herramienta de exploración y modelación del espacio 3D.

Por lo tanto, siempre que se manejen objetos tridimensionales y haya la necesidad de representarlos mediante figuras planas se tendrá planteado un problema que tiene que ver con la capacidad de visualización espacial de los estudiantes y con su habilidad para dibujar representaciones planas de objetos tridimensionales. La capacidad de visualización espacial es uno de los elementos clave en este problema, y los recursos informáticos pueden ser de gran ayuda y una alternativa de solución.

Las siguientes gráficas ilustran los entornos informáticos de la secuencia didáctica a desarrollar como actividades del taller:





## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Dickson, L. (1991). El aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Editorial Labor S.A.
- Ferrero, L. (2008). Mateáticas 4: Primaria, segundo ciclo. Madrid: Anaya.
- Ferrero, L. (2006). Mateáticas 6: Primaria, tercer ciclo. Madrid: Anaya.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 139-162.
- Galvez, G. (1985). El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria (Tesis doctoral). Centro de Investigación del IPN, México.
- García, J. (2009). Estimular la orientación espacial, nivel 1-2-3-4. Madrid: Grupo Gesfomedia.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 3-19). Valencia: Universidad Valencia.
- Howard, G. (2001). Estructuras de la mente: la teoría de las inteligencias múltiples. Estados Unidos: Fondo de Cultura Económica USA.
- Lappan, G., Phillips, E. D., & Winter, M. J. (1984). Spatial visualization. *Mathematics Teacher*, 618-623.
- NCTM. (20 de 01 de 2012). National Council of Teachers of Mathematics. Recuperado el 15 de 04 de 2012, de Principles and standards for school mathematics: <http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=4294967312>