

## El pensamiento variacional: un asunto de juego y actividad matemática en la escuela

*Julián Ricardo Gómez\**

*José Luis Orozco\*\**

*Germán Darío Realpe\*\*\**

*Gloria Benavides\*\*\*\**

*Ninfa Navarro\*\*\*\*\**

*Edgar Alberto Guacaneme\*\*\*\*\**

### RESUMEN

En este taller se analizan dos tareas (Casa de cambio y Progresión geométrica) planteadas en sendas cartillas del proyecto "Juega y Construye la Matemática", para la Educación Básica Primaria y Secundaria. Con este se pretende evidenciar que el pensamiento variacional es transversal

al currículo y no siempre aparece de manera explícita en la actividad matemática del aula de clase.

**Palabras clave:** pensamiento variacional, juego, actividad matemática, formación de profesores, desarrollo del pensamiento matemático, razonamiento.

\* Colegio Champagnat. Dirección electrónica: [juliangomez@colegiochampagnat.edu.co](mailto:juliangomez@colegiochampagnat.edu.co)

\*\* Colegio Champagnat. Dirección electrónica: [joseluisorozco@colegiochampagnat.edu.co](mailto:joseluisorozco@colegiochampagnat.edu.co)

\*\*\* Colegio Champagnat. Dirección electrónica: [germanrealpe@colegiochampagnat.edu.co](mailto:germanrealpe@colegiochampagnat.edu.co)

\*\*\*\* Colegio Champagnat. Dirección electrónica: [gloriabenavides@colegiochampagnat.edu.co](mailto:gloriabenavides@colegiochampagnat.edu.co)

\*\*\*\*\* Colegio Champagnat. Dirección electrónica: [ninfanavarro@colegiochampagnat.edu.co](mailto:ninfanavarro@colegiochampagnat.edu.co)

\*\*\*\*\* Universidad Pedagógica Nacional. Dirección electrónica: [guacaneme@pedagogica.edu.co](mailto:guacaneme@pedagogica.edu.co)

## PRESENTACIÓN

El proyecto "Juega y Construye la Matemática", propio de la Comunidad de Hermanos Maristas de la Enseñanza, dentro de sus producciones escritas posee una serie de cartillas de matemáticas, que expresan el currículo de preescolar a undécimo grado, en las que se formulan algunas tareas para los estudiantes, a través de las cuales se busca generar actividad matemática en ellos y así permitir la construcción y apropiación de las matemáticas escolares. Actualmente estas cartillas son objeto de estudio por parte de un grupo de profesores de matemáticas del Colegio Champagnat de Bogotá, a través de lo cual se pretende indagar si el pensamiento variacional está siendo atendido y promovido por las tareas allí propuestas y en qué medida es transversal al currículo.

El objetivo de este taller es compartir la metodología de estudio de las tareas y propiciar, en los asistentes, reflexiones y aprendizajes de orden didáctico y matemático sobre el pensamiento variacional.

## REFERENTE TEÓRICO

El proyecto "Juega y Construye la Matemática" se sustenta en los postulados de un enfoque constructivista, pero su tendencia es hacia un constructivismo blando; además, está orientado por los principios de *globalidad* (se requiere de una acción pedagógica global capaz de afectar la totalidad de su pensamiento), *integralidad* (es necesario considerar no solo el aspecto cognitivo del estudiante, sino también las diferentes facetas de su subjetividad), *lo lúdico* (el acercamiento al conocimiento matemático debe resultar placentero), *reconocimiento de la diferencia* (el acceso al conocimiento se debe dar desde el nivel de sus propias elaboraciones), *construcción social del conocimiento* (el conocimiento se construye en comunidades); y *lo tecnológico* (la construcción de conocimiento se da a través de mediaciones tecnológicas).

Esta perspectiva se corresponde ampliamente con lo expuesto en la normativa nacional curricular para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (MEN, 1998, 2006) y pretende efectivamente promoverse a través de las tareas que se incluyen en las cartillas que orientan las acciones docentes y discentes en las aulas de clase. De manera análoga, las tareas de estas cartillas pretenden atender tanto los contenidos, como promover el desarrollo de los distintos pensamientos matemáticos enunciados en dicha normativa. Sin embargo, este marco de intenciones puede no ser suficientemente explícito para los profesores de matemáticas, al igual que las estrategias, conteni-

dos y pensamientos implicados en las tareas propuestas. En este orden de ideas, se reconoce que el estudio de las tareas ofrece una oportunidad para el aprendizaje docente, que puede redundar en el desarrollo de una mayor conciencia sobre el quehacer profesional.

Para desarrollar este estudio se ha decidido seleccionar inicialmente el pensamiento variacional y considerar los planteamientos hechos en la normativa curricular (MEN, 1998, 2006), así como acopiar un marco de referencia sobre el razonamiento variacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003).

Un primer planteamiento, que se convierte en hipótesis de trabajo y, a la vez, en hipótesis objeto de estudio es la afirmación de que el pensamiento variacional es un eje curricular transversal a los grados escolares y que su estudio se inicia muy temprano en esta escolaridad. En esta dirección, entre otras ideas, se propone el estudio de "... situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica... [o] ... el estudio de los patrones" (MEN, 1998, p. 50) como una manera de acceder a las relaciones funcionales en donde "... emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para enlazar patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio" (p. 51).

Una segunda hipótesis se refiere al planteamiento de que el pensamiento variacional es uno de los logros para alcanzar en la Educación Básica, que

... presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas (MEN, 1998, p. 49).

En esta dirección se reconoce que el pensamiento variacional está relacionado con nociones y conceptos como: constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, modelos funcionales, relaciones de desigualdad, y ecuaciones e inecuaciones.

Un tercera hipótesis, conectada estrechamente con la anterior, se refiere a que "El pensamiento variacional se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico) y con otros tipos de pensamiento más propios de otras ciencias" (MEN, 2006, p. 66).

Por otra parte, para cualificar la mirada a las tareas propuestas en las cartillas, se ha asumido una perspectiva teórica sobre el razonamiento covariacional<sup>1</sup>, que refiere un marco conceptual para describir las acciones mentales y los niveles de razonamiento covariacional, sintetizados en la tabla siguientes (Carlson et al., 2003, p. 128-129).

<i>Acción mental</i>	<i>Descripción de la acción mental</i>	<i>Comportamientos</i>
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e. g., $y$ cambia con cambios en $x$ ).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Tabla N° 1. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación

<sup>1</sup> Entendido como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (Carlson et al., 2003, p. 124)

#### NIVELES DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL

El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.

##### Nivel 1 (N1). Coordinación

En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).

##### Nivel 2 (N2). Dirección

En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.

##### Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa

En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.

##### Nivel 4 (N4). Razón promedio

En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.

##### Nivel 5 (N5). Razón instantánea

En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

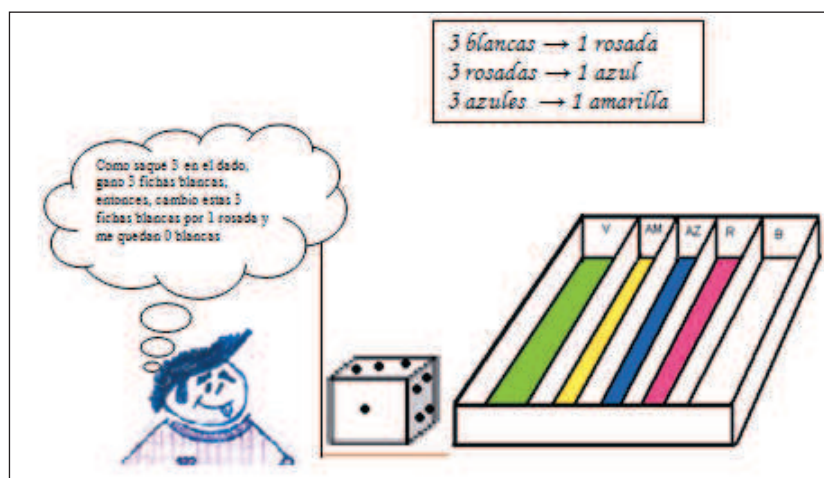
Tabla N.º 2. Marco conceptual para los niveles de la covariación

## METODOLOGÍA DEL TALLER

El taller está configurado por tres partes. En la primera, a partir del conocimiento y experiencia de los participantes, se presentarán y discutirán las indicaciones de la normativa curricular respecto del pensamiento variacional y se presentará una visión sobre el marco conceptual sobre el razonamiento conceptual; en la segunda y tercera se abordará la presentación y estudio de sendas tareas (El juego de la casa de cambio y Progresión

geométrica) extractadas de las cartillas del proyecto "Juega y Construye la Matemática".

*El juego de la Casa de Cambio.* (Vera, Rodríguez y Ríos, 2012, pp. 1-5). Este juego consiste en hacer cambios de fichas de un color por otras de otro color, según una equivalencia que se fija apropiadamente. La siguiente imagen muestra la forma como, en base 3, se deben hacer los cambios.



Una de las consignas que se propone a los estudiantes es: Si se juega Casa de Cambio en base 3 ¿cuántas fichas blancas se necesitan para obtener una ficha azul?, ¿cuántas fichas blancas se necesitan para obtener una ficha amarilla?

Se prevé que el juego permita construir un sistema de cambios análogos a las situaciones problema de conversión de unidades, multiplicación compuesta, potenciación, proporcionalidad y, además, que permita trabajar elementos para generar pensamiento variacional.

Los profesores tienen la posibilidad de hacer algunas modificaciones del contexto y proponer situaciones como las siguientes:

Una fábrica de gomas empaqueta su producto en base 6, así: 6 gomas en un paquete, 6 paquetes llenos en una bolsa y 6 bolsas en una caja. ¿Cuántas gomas hay en 2 cajas y 3 paquetes?

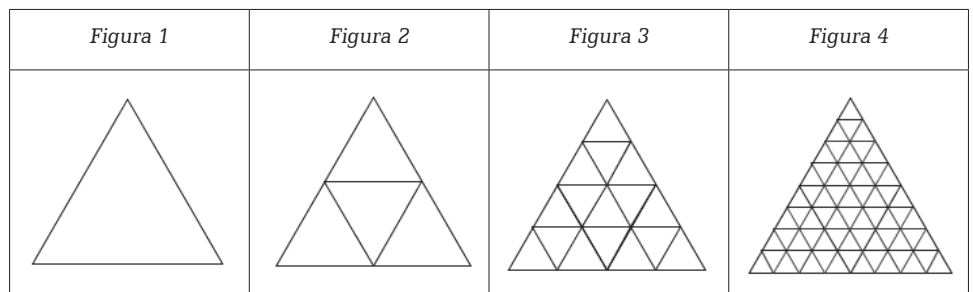
Una fábrica de galletas empaqueta su producto de la siguiente manera: 4 galletas en un paquete, 12 paquetes en una bolsa, 24 bolsas en una caja

¿Cuántos galletas hay en 2 cajas?

Luego de la presentación del juego, se propondrán las siguientes consignas para que sean resueltas en grupos de tres integrantes.

1. Resuelva la anterior situación colocándose en el lugar del estudiante e identifique qué estrategias utilizaría. Realice una representación de la situación.
2. Discuta si el juego se ajusta a los planteamientos sobre el pensamiento variacional expresados en los Lineamientos y Estándares (MEN, 1998, 2006).
3. Identifique si a través del juego se promueven aspectos del razonamiento covariacional (Carlson et al. 2003).
4. Especifique si el juego debe modificarse para responder a la normativa curricular y a los niveles del razonamiento covariacional.

*Progresión geométrica.* (Orozco, 2010). Esta tarea busca descubrir patrones de variación y regularidad, así como abordar el concepto de progresión geométrica. Para ello se propone al estudiante observar la sucesión de triángulos mostrados en la secuencia de figuras y posteriormente completar la tabla, teniendo en cuenta que el área de la figura 1 es de una unidad cuadrada.



Números de veces que se trazan puntos medios.	0	1	2	3	4	5	...	n
Total de puntos medios trazados sobre cada lado del triángulo.	0	1	3	7	15	31	...	
Números triángulos equiláteros de menor área en cada figura.	1	4	16					
Área del triángulo equilátero más pequeño de cada figura.	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$					
Perímetro del triángulo equilátero más pequeño de cada figura, tomando $x$ , como la longitud del lado del triángulo de la figura 1.	$3x$	$\frac{3x}{2}$	$\frac{3x}{4}$					

La tarea se complementa con la formulación a los estudiantes de algunas de las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué tipo de progresión forma el número de triángulos pequeños, que se forman en cada figura?
- b) ¿Qué tipo de progresión forman las magnitudes del área de los triángulos pequeños, que se forman en cada figura?
- c) ¿Qué tipo de progresión forman las longitudes del perímetro de los triángulos pequeños que se forman en cada figura?
- d) ¿En cada caso anterior, cuál es la razón de cada una de las progresiones?
- e) Si  $n$ , representa el número de veces que se realiza el proceso de trazar puntos medios, iniciado en cero, ¿cuáles son las expresiones que permiten calcular: el número de triángulos, el área y el perímetro del triángulo pequeño que se forma?

Luego de la presentación de la segunda tarea se pedirá a los asistentes al taller que, organizados en grupos de tres integrantes, respondan las preguntas propuestas para el análisis de la tarea del *juego de la casa de cambio*.

Finalmente, se hará la discusión plenaria de las posturas de los asistentes y se contrastará con la de los profesores, coordinadores del taller.

#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA* 8 (2), 121-156.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Orozco, J. (2010) *Juega y Construye la Matemática. Noveno Grado*. Bogotá: Ediciones Maristas.
- Vera, J., Rodríguez, A., & Ríos, A. (2012). *Juega y Construye la Matemática. Quinto Grado*. Bogotá: Editorial Kimpres Ltda.