Razonamiento algebraico en educación primaria: Un desafío para la formación de maestros

Walter F. Castro G.
wfcastro82@gmail.com
Universidad de Antioquia, Colombia

Juan D. Godino
jgodino@ugr.es
Universidad de Granada, España

Mauro A. Rivas
rmauro@ula.ve
Universidad de los Andes, Venezuela

Resumen. En este trabajo informamos sobre resultados de un estudio descriptivo-interpretativo sobre el análisis epistémico realizado por un grupo de maestros en formación inicial, de educación primaria, cuando proponen, resuelven y discuten tareas matemáticas que presentan rasgos algebraicos. Se exhibe una tarea matemática propuesta por los estudiantes así como el análisis epistémico respectivo. Se ofrecen algunas implicaciones para la formación inicial de maestros de escuela primaria.

Palabras Claves. Formación de maestros, análisis epistémico, algebra, razonamiento algebraico en la escuela primaria.

1. Introducción

El álgebra ha sido considerada como un "guardián" que impide el acceso de los estudiantes a niveles superiores de estudio y reflexión en matemáticas. Kaput (2000) hizo una propuesta denominada "*algebra for all*", en la que sugiere realizar acciones para promover el álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas, en lugar de ser inhibidora. Para Schoenfeld (2002) es urgente investigar las prácticas en el aula de clase para mejorar la formación matemática de los estudiantes, en tanto que "…la falta de competencia matemática y de credenciales constituye una barrera para la participación completa en el sistema económico. Por tanto, tasas de éxito y participación diferencial en matemáticas constituyen un tema de justicia social" (p. 3).

Para lograr que la formación en álgebra alcance a una población mayor, algunos autores han propuesto incluir el razonamiento algebraico desde los niveles inferiores de la educación primaria (Davis, 1985; Vergnaud, 1988; Carpenter, et al., 2003); esta inclusión ha sido denominada “la algebrización” del currículo (Kaput, 2000). Un supuesto universalmente aceptado es que el álgebra está relacionada con una mejor comprensión de la aritmética, con la geometría, el análisis y otros temas matemáticos, parece que no hay duda que una buena experiencia temprana con el álgebra podría servir para mejorar la formación matemática de los niños.

Diversas investigaciones reportan tanto los logros de niños de escuela primaria cuando trabajan con tareas propias del razonamiento algebraico elemental (Amit y Neria, 2008; Becker y Rivera, 2008) como la inclusión del razonamiento algebraico elemental en el currículo de la escuela primaria (Fong, 2004; Watanabe, 2008). Es por tanto pertinente ofrecer a los maestros experiencias de formación que incluyan algunos aspectos del razonamiento algebraico elemental para iniciarlos en el reconocimiento y promoción del mismo.

2. El algebra en la escuela elemental

Como afirman Godino y Font (2003), no se trata de impartir un "curso de álgebra" a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el pensamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato (grados K-12). Parece que la temprana exposición a las ideas básicas del álgebra, adecuadas al currículo matemático para la escuela primaria, podría facilitar la transición desde la aritmética hasta el álgebra.

Algunos reportes de investigación informan sobre diversas experiencias de inclusión del razonamiento algebraico en el currículo de algunos países (Cai, 2004; Fong, 2004, Lew, 2004; Watanabe, 2008). Estos reportes dan evidencia tanto de la diversidad de enfoques de inclusión sobre el razonamiento algebraico elemental como de la aceptación de la comunidad de educadores acerca de la inclusión del álgebra en la primaria. Los resultados reportados alientan a iniciar la enseñanza del razonamiento algebraico elemental desde la escuela primaria; de donde se considera pertinente incluir actividades de reflexión, en cursos de formación de maestros, sobre tareas matemáticas de carácter algebraico.

Para ofrecer oportunidades de formación a los futuros maestros, para que puedan reconocer y promover el razonamiento algebraico manifestado por los niños, parece necesario adaptar el razonamiento algebraico elemental a las creencias de los maestros, a las condiciones de desarrollo cognitivo de los niños, a sus experiencias matemáticas previas, así como a los objetivos curriculares de los programas oficiales emanados de los organismos estatales que regulan la formación matemática, tanto de los niños como de los futuros maestros.

3. La experiencia de formación de maestros

La investigación se realizó en el marco del curso "Currículo de Matemáticas en Educación Primaria" impartido en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, España, el cual, tiene una componente práctica y una teórica. Cabe mencionar que ni el conocimiento del contenido del álgebra ni su didáctica fue motivo de estudio en el curso. El estudio en cuestión se realizó durante el primer cuatrimestre del curso 2008-2009. La edad promedio de los estudiantes sobre los cuales se informa en este documento es veinte años, manifiestan gusto hacia las matemáticas, no tienen experiencia docente, sin embargo suelen dar asesorías a niños de escuela primaria. Durante las reuniones de trabajo mostraron un pensamiento crítico e independiente.

Procedimiento. Como trabajo final del curso, se pidió a los maestros en formación inicial la elaboración de una "unidad didáctica" sobre el razonamiento algebraico elemental. El formador dio a los estudiantes las características que tal unidad didáctica debía incluir: contexto curricular, objetivos de aprendizaje, contenidos matemáticos, secuencia de actividades y metodología, actividades de refuerzo e instrumentos de evaluación. Para tal elaboración se dio a los estudiantes asesoría orientada por el primer autor de este documento. Las dos sesiones iniciales de la asesoría se dedicaron a la discusión, tanto del carácter algebraico de algunos ejercicios adaptados de Booth (1984), como de nuestra aproximación al razonamiento algebraico elemental[1]. Los estudiantes recibieron un material de apoyo que contenía ejemplos de algunas de las dificultades más frecuentes relacionadas con las letras y con el signo igual que los escolares encuentran en su aprendizaje del álgebra.

Para la elaboración de la unidad didáctica se solicitó a los futuros maestros realizar un análisis de las tareas a ser incluidas en el desarrollo de las secuencias de actividades. Para esta acción se dio a los estudiantes una herramienta para efectuar el análisis epistémico, denominada guía para el reconocimiento de objetos y significados -GROS- (Godino, et al., 2008). Esta guía consta de una tabla de doble entrada en cuya primera columna se consideran los siguientes tipos de "objetos" matemáticos: representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades y justificaciones; y en la segunda columna se consideran los significados conferidos a esos objetos matemáticos, los cuales son identificados durante el proceso de resolución de la tarea matemática. La selección de las tareas matemáticas-algebraicas, a ser analizadas, fue hecha por los futuros maestros, a partir de su identificación en libros de texto. El carácter algebraico de las mismas fue valorado mediante el análisis epistémico correspondiente.

[1] Se considera como "razonamiento algebraico elemental" (RAE) al sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.).

4. Recolección y análisis de datos

Para obtener comprensión del proceso experimentado por los estudiantes se efectuó un proceso de triangulación y se usaron varias fuentes de datos: conversaciones informales, solución escrita de ejercicios, identificación escrita de elementos algebraicos, audio de las discusiones y de las entrevistas, y finalmente, video de las sesiones de presentación de sus unidades didácticas. El análisis de datos se realizó en dos momentos: después de cada sesión de trabajo extra-clase con los estudiantes y después que el periodo académico terminó. Se hizo la transcripción de todas las sesiones de audio y de video, se estudiaron todas las unidades didácticas escritas por los estudiantes, se buscaron patrones y categorías usando como unidad mínima de análisis las soluciones a las tareas matemáticas propuestas en las unidades didácticas y vinculándolos con los análisis epistémicos propuestos por los maestros en formación. Adicionalmente, se efectuaron algunas entrevistas después de la finalización del periodo académico.

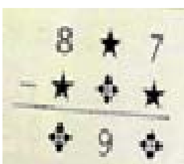
5. Una tarea y su análisis epistémico

En la Figura 1, se muestra una tarea propuesta por los maestros en formación inicial así como la solución dada. La solución dada por los futuros maestros mediante el uso de ecuaciones, que se ilustra en la Figura 1, muestra la estrategia que han usado; en donde reconocen un único objeto lingüístico: “calcula y averigua el valor de cada dibujo”. A cada dibujo asignan el significado de “incógnita” cuyo valor debe ser hallado mediante la identificación de conceptos, de los procedimientos asociados y de las propiedades pertinentes. En relación con la identificación de los “conocimientos matemáticos”, que en este trabajo hacen referencia a las entidades primarias (representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades, justificaciones), propuestas por el enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, et al., 2007), se muestran en las Tablas 1, 2 y 3. Por razones de espacio solo se incluyen algunos de los objetos y significados identificados por los maestros en formación inicial para las entidades de Representaciones, Conceptos y Procedimientos.

<u>*Solución:*</u>

En segundo lugar resolvemos la resta:

Si observamos la columna de las unidades, obtenemos la siguiente expresión:



7 - ★ = ✣ , o lo que es lo mismo: ✣ + ★ = 7

Como resulta fácil deducir podría haber muchos valores posibles para ★ y ✣, pues son muchas las parejas de números que cumplen esa igualdad (6 y 1, 5 y 2, 4 y 3…), pero si nos fijamos en la columna de las decenas, encontramos una condición que tan solo restringe a uno el resultado posible, pues vemos que la diferencia entre ★ y ✣ es 9, y esto es solo posible si ★ es una unidad menor que ✣.

Por ello de todas las posibles parejas de valores, el único resultado válido es el de:

★ = 3 , ✣ = 4

Con lo cual tenemos que la resta que buscamos es la siguiente:

$$\begin{array}{r} 837 \\ -\,343 \\ \hline 494 \end{array}$$

Figura 1. Enunciado y solución de la tarea sobre el valor de cada dibujo.

La identificación se extrajo de la unidad didáctica final presentada por los futuros maestros y corresponde a una elaboración que tomó varias sesiones de trabajo. El concepto de incógnita, inmerso en la solución de la tarea, es mencionado, y reconocido como un "dibujo" que representa "valores numéricos". Nótese que la "resta" se interpreta en términos del uso que se le concede en la solución de la tarea. Interesa la asignación de significado a "ecuaciones de primer grado" en términos de "relación de igualdad entre dos términos" que parece resaltar el carácter de "relación de equivalencia" de la igualdad sobre el carácter de resultado

Tabla 1. Algunas representaciones para la tarea.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
¿Cuál es el valor de cada dibujo en la siguiente figura?	Cada uno de los dibujos empleados para designar las cifras cuyo valor desconocemos, son incógnitas que deberemos hallar tratando de resolver la suma que nos propone el enunciado.

Tabla 2. Algunos conceptos que intervienen en la tarea.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
CONCEPTOS (Entidades matematicas para las cuales se puede formular una definicion)	
Introduccion a la notación algebraica mediante el uso de incógnitas.	Los valores numéricos con los que debemos completar la resta vienen designados por incógnitas, que son dibujos en este caso.
Resta	Operación utilizada para encontrar la diferencia, o proceso de quitar un número de otro para encontrar la cantidad restante.
Ecuaciones de primer grado con una incógnita.	Expresión matemática que establece una relación de igualdad entre dos términos, cada uno de los exponentes que acompañan a las cifras que componen cada uno de los dos términos son 0 ó 1.

Los procedimientos identificados se corresponden con los usados por el grupo en la solución de la tarea, y los significados conferidos se adecuan a la resolución mostrada en la Figura 1. Nótese que los dos procedimientos referidos trascienden el uso de operaciones matemáticas y algoritmos que suelen estar asociados con la resolución de tareas.

Tabla 3. Algunos procedimientos para la tarea.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Traducción de lenguaje ordinario a lenguaje algebraico.	Al leer en el enunciado. "Calcula y averigua el valor de cada simbolo...", el alumno lo traduce al lenguaje algebraico, buscando ecuaciones en las que pueda relacionar datos desconocidos (el valor de cada uno de los simbolos) con datos conocidos.
Resolución de ecuaciones de primer grado	Utilizadas para establecer las relaciones entre los símbolos, así como para evaluar sus valores numéricos.

6. Conclusiones para la formación de maestros

La tarea propuesta por los maestros en formación inicial, su carácter algebraico y el análisis propuesto evidencia cierta competencia de análisis epistémico. La puesta en práctica de este tipo de análisis ha permitido al grupo de maestros en formación efectuar un reconocimiento más específico de algunas características propias del razonamiento algebraico elemental. Al contrastar la solución dada por los futuros maestros (ver Figura 1) con el análisis epistémico (ver Tablas 1, 2 y 3) se observa que este ofrece la identificación, discriminación y asignación de significados que han surgido durante la solución de la tarea. La identificación y asignación de significados puede resultar conflictiva, ya que supone un cierto nivel de actividad metacognitiva a la que no están habituados, sin embargo consideramos que la actividad de análisis epistémico enmarcada en la formación inicial de maestros parece promover el desarrollo del conocimiento especializado para la enseñanza (Ball, et al., 2008) en tanto que ofrece una herramienta que promueve el reconocimiento de los diversos tipos de objetos y los significados algebraicos que intervienen en la instrucción matemática. Para Carraher, et al. (2006) "…*la idea no es simplemente atribuir significado algebraico a las actividades matemáticas de la escuela primaria. Los contenidos matemáticos deben ser transformados sutilmente para resaltar su carácter algebraico*" (p. 88). En tal sentido, la atribución de carácter algebraico a la tarea se fundamenta en la identificación de características algebraicas que se especifican mediante "objetos" y "significados" presentes e intervinientes en el proceso de solución de la tarea. La investigación reportada ofrece una aproximación de respuesta a la pregunta formulada por Carraher y Schlieman (2007, p. 675): ¿Pueden los maestros de primaria enseñar álgebra? Los maestros ciertamente pueden abordar la tarea de la enseñanza, reconocimiento y promoción del razonamiento algebraico elemental en tanto que les sean ofrecidas oportunidades para aprender a reconocer y a promover el razonamiento algebraico manifestado por los niños, lo que podría favorecer el acceso de los niños a niveles superiores de formación matemática.

Referencias bibliográficas

- Amit, M., y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 111-129
- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.
- Beker, J. R., y Rivera, F. D. (2008). Generalization in algebra: the foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades. ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 1.
- Booth, L. R. (1984). Algebra: Children´s strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project. Windsor, Berkshire: NFER-Nelson.
- Carraher, D. W., y Schlieman, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F.K. Lester Jr. (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (Vol. 2, pp. 669-706). Charlotte, NC.: NCTM.
- Carraher, D., Schliemann, A.D., Brizuela, B., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education, 37(2), 87-115.
- Davis, R. B. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. The Journal of Mathematical Behavior, 4(2), 195-208.
- Davis, R. B. (1989). Theoretical considerations: Research studies in how humans think about algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra (Vol. 4, pp. 266-274). Reston, VA: NCTM y Laurence Erlbaum Associates.
- Fong, N. S. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: A case study of the singapore primary mathematics curriculum. The Mathematics Educator, 8(1), 39-59.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM The International Journal on Mathematics Education, 19(1-2), 127-135.
- Godino, J. D. y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico para maestros. En Godino, J. D. (Dir.) (2004). Matemáticas para maestros (pp. 379 - 421). Granada: Los autores. (Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/welcome.html
- Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., y Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. ICME 11, Topic Study Group 27, Mathematical Knowledge for Teaching. Monterrey, Mexico. Recuperable en http://tsg.icme11.org/document/get/391.
- Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum. En The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum. Proceedings of a National Symposium, Washington D.C.: National academic Press.
- Lew, H.C. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of korean elementary school mathematics. The Mathematics Educator, 8(1), 88-106.
- Schoenfeld, A. H. (2002). Looking for leverage: Issues of classroom research on "Algebra for All". En Proccedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics. Hersonissos, Crete, Grecia. Recuperado el 18 de Noviembre de 2009 desde ERIC Document Reproduction Service No. ED472051.
- Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. In C. Laborde (Ed.), Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique (pp. 189-199). Paris: La Pense Sauvage.
- Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A japanese perspective. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics (pp. 183-194). Reston, VA: NCTM.

Volver al índice
Comunicaciones Breves