Aportes del estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas sobre la proporcionalidad en la formación inicial de profesores de primaria

Mauro A. Rivas
rmauro@ula.ve
Universidad de Los Andes, Venezuela

Walter F. Castro
wfcastro82@gmail.com
Universidad de Antioquia, Colombia

Resumen. En este trabajo informamos sobre resultados de un estudio descriptivo-interpretativo sobre el conocimiento de futuros maestros, puesto en juego al resolver un problema de valor faltante. Comprende un análisis epistémico/cognitivo a través del cual se identifican objetos y significados, activados en la resolución del problema. Se estudia la resolución y análisis dada por un experto (configuración epistémica), y por un grupo de 60 estudiantes de magisterio (configuración cognitiva). El análisis epistémico permite la identificación previa de conflictos potenciales de aprendizaje. Mientras el cognitivo, de las respuestas de los estudiantes, permite observar algunos aspectos del conocimiento necesario para resolver problemas de proporcionalidad de valor faltante. La información obtenida se presenta como útil para su consideración en el ámbito de la formación de futuros profesores de primaria.

Palabras clave: Formación inicial de maestros, proporcionalidad, configuraciones epistémicas y cognitivas, razón y proporción.

1. Problemática y marco teórico

Razón y proporción. La proporcionalidad es una noción que conecta muchos de los temas matemáticos estudiados en los grados 6-8 (NCTM, 2000). Lesh Post y Behr (1988, p. 97) establecen el razonamiento proporcional como la cúspide de la matemática elemental y fundamento de las matemáticas superiores. No obstante su adquisición por parte de los escolares no es una tarea sencilla (Kenney, Lindquist y Heffernan, 2002).

Una de las técnicas más difundidas en la cultura escolar para resolver problemas de proporcionalidad, del tipo valor faltante[1], es el llamado método de multiplicación cruzada (a/b = c/x, donde x es un valor desconocido) o la regla de tres. De acuerdo con Lamón (2007) estos métodos son utilizados frecuentemente sin dar lugar a un razonamiento proporcional.

La investigación sobre el razonamiento proporcional indica que este es un proceso complejo (Adjiave y Pluvinage, 2007). De acuerdo con Steinthorsdottir (2006):

> …el razonamiento proporcional se desarrolla desde un pensamiento cualitativo hacia estrategias pre-proporcionales que preparan para el desarrollo del razonamiento multiplicativo. (p. 170).

Buena parte de la literatura sobre la investigación de la razón y la proporción, se ha enfocado hacia el estudio de estrategias, errores y dificultades de los escolares, mientras el estudio de esta temática en la formación de profesores constituye un campo poco explorado (Person, Berenson y Greenspon, 2004, p. 17). Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007) y Sowder, Armstrong, Lamon, Simon, Sowder, y Tompson (1998) señalan que futuros maestros muestran deficiencias en el conocimiento pedagógico del contenido para enseñar estas nociones. Más aún, Ilany, Yaffa, y Ben-Chaim (2004) señalan:

> … emergen dificultades que evidencian la falta de comprensión de los futuros profesores sobre conceptos matemáticos, incluyendo razón y proporción, y se sienten incapaces tanto de tratar con la noción como de enseñarla (pp. 81-82).

En relación con lo expuesto y con el fin de dar inicio a un proceso de formación de maestros que comienzan la carrera, nos hemos formulado las siguientes preguntas: (1) ¿Qué estrategias usan los futuros maestros para resolver un problema de valor faltante? (2) ¿Cuáles son sus errores y dificultades? (3) ¿Cómo puede el educador preparase previamente para enfrentar tales cuestiones?

Estudio de las configuraciones epistémicas y cognitivas. El enfoque onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) ha introducido la noción de configuración de objetos y significados. El estudio y desarrollo de esta noción ha dado lugar a la concepción y diseño de diversas herramientas de análisis, que han permitido avanzar hacia las concepciones de configuración epistémica y configuración cognitiva de una tarea matemática, en el contexto de la instrucción matemática. En esta investigación se pone en práctica un uso integrado de dos herramientas de análisis[2] (epistémico y cognitivo) que dan lugar a la manifestación de las configuraciones correspondientes, durante un proceso de

---

[1] Es un problema del tipo: "si un auto recorre una distancia *a* con *b* cantidad de gasolina, qué distancia recorrerá con *c* cantidad de gasolina".
[2] Ejemplos de la aplicación de esta herramienta pueden verse en Godino, Rivas, Castro y Konic (2008); y Castro y Godino (2008).

formación de futuros maestros, tal uso es considerado como un aspecto novedoso que puede contribuir con la tarea del formador.

2. Metodología

Esta investigación consiste en un estudio descriptivo sobre el conocimiento de futuros maestros sobre razón y proporción, puesto en juego al resolver un problema de valor faltante, utilizando herramientas desarrolladas por el enfoque onto-semiótico. Esta se desarrolla con un grupo de 60 estudiantes que se inician en el curso "Matemática y su Didáctica", del primer año de la carrera de magisterio de la Universidad de Granada-España. Comprende una revisión de las configuraciones epistémicas y cognitivas en el proceso inicial de formación de los futuros maestros, sobre la proporcionalidad. Específicamente, se realiza un análisis a priori de un problema de valor faltante y su resolución, en el que se identifican los objetos y significados puestos en juego en tal resolución (análisis epistémico), identificando posibles estrategias, errores y dificultades. Luego, este análisis, se contrasta con un análisis de las soluciones dadas al problema por los estudiantes (análisis cognitivo). Para la recogida de los datos se consideró el siguiente problema:

Un auto consume 8,4 litros de gasolina cada 100 Km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

La recogida de datos tuvo lugar durante el desarrollo de una trayectoria didáctica que contempló los siguientes momentos: presentación del problema, exploración personal de posibles respuestas, trabajo cooperativo en equipos para elaborar una respuesta compartida, presentación y discusión de respuestas, e institucionalización por el formador explicitando los conocimientos pretendidos.

Configuraciones epistémicas. Las configuraciones epistémicas fueron obtenidas por medio del análisis epistémico. El análisis epistémico consiste en identificar previamente objetos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) y los respectivos significados, puestos en juego en la resolución de un problema matemático. Esta identificación es realizada por un experto (el formador/investigador).

Resolución utilizando regla de tres: Si con 8,4 litros de gasolina recorro100 Km. con 25,2 litros recorreré x Km., con lo cual:

$$\begin{array}{rcl} 8{,}4\text{ L} & \longrightarrow & 100\text{ Km.} \\ 25{,}2\text{ L} & \longrightarrow & x\text{ Km.} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{25{,}2 \times 100}{8{,}4} = 300$$

Así, se recorren 300 Km. con 25,2 L de gasolina.

Este tipo de problema es uno de los más ampliamente utilizados en la actividad escolar. Fueron identificadas tres posibles resoluciones: (a) utilizando una tabla de magnitudes proporcionales que involucra un proceso de reducción a la unidad, (b) haciendo uso de una regla de tres, y (c) estableciendo la ecuación de la proporción entre las razones y uso del producto cruzado para resolver (estos otros dos procesos no se han incluido en el presente informe). Una vez obtenidas las tres soluciones se procede a realizar su análisis epistémico. El análisis que se presenta solo corresponde a la resolución en la que se utiliza la regla de tres.

Análisis epistémico

Elementos lingüísticos

OBJETOS	SIGNIFICADOS
…consume 8,4 litros de gasolina cada 100 Km.	Razón (tasa), entre magnitudes proporcionales de distancia por volumen, que mide un consumo
¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?	Elemento extensivo de una razón intensiva que forma una proporción con la primera razón dada
8,4 L $\longrightarrow$ 100 Km. x 25, 2 L $\longrightarrow$ *x* Km.	Representa el valor faltante
	Representaciones derivadas de la aplicación de la regla de tres
Conflictos potenciales: (a) No reconocer-denotar la incógnita x.	

Conceptos/definiciones

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Magnitudes directamente proporcionales	Dos magnitudes son directamente proporcionales si al variar una el doble, el triple, la mitad, … la otra también varía el doble, el triple, la mitad, …
Razón (cantidad intensiva)	Relación entre magnitudes proporcionales pertenecientes a diferentes sistemas de medidas (L/Km. o Km./L).
Incógnita x	Valor desconocido que debe ser encontrado a partir de la resolución de una ecuación.
Ecuación	Modelización de una situación de proporcionalidad haciendo uso de la regla de tres.
Igualdad	Relación entre expresiones
Conflictos potenciales: (a) No reconocer las magnitudes dadas como magnitudes proporcionales. (b) Despojar a x de su valor de incógnita. (c) Usar la igualdad como símbolo que indica un resultado.	

Procedimientos

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Regla de tres	Procedimiento numérico-algebraico que permite resolver un problema de valor faltante.
Modelización verbal-simbólica	Transforma una expresión verbal en una representación simbólica: $\begin{array}{rcl} 8{,}4\text{ L} & \longrightarrow & 100\text{ Km.} \\ 25{,}\ 2\text{ L} & \longrightarrow & x\text{ Km.} \end{array}$
Modelización simbólica-simbólica	Permite calcular el valor faltante utilizando procedimientos de resolución de ecuaciones. $x = \dfrac{25{,}2\ \times 100}{8{,}4} = 300$

Conflictos potenciales:

(a) Uso inconsciente-mecánico de la regla de tres, evitando el razonamiento proporcional.

(b) Modelización de una expresión verbal de la forma: “Si con 8,4 litros de gasolina recorro100 Km. con 25,2 litros recorreré x”, o “8,4 litros de gasolina es a 100 Km. como 25,2 litros de gasolina es a x Km.”

(c) Modelización de una expresión simbólica en otra también simbólica que permite operar y obtener un resultado que representa la solución del problema.

Propiedades

OBJETOS	SIGNIFICADOS
P1: Se recorren 300 Km. con 25,2 L de gasolina	Solución del problema que indica la relación final de consumo de gasolina por kilómetro recorrido.
Conflictos potenciales: (a) No encontrar la propiedad P1.	

Argumentos

OBJETOS	SIGNIFICADOS
A1: Puesto que al aumentar la cantidad de gasolina aumenta (proporcionalmente) la cantidad del recorrido.	Justifica la propiedad P1
Conflictos potenciales: (a) No evidenciar la relación que existe entre las magnitudes en el problema. (b) Obtener un resultado para el cual no se tiene un significado preciso.	

Una de las aportaciones relevantes del estudio de la configuración epistémica es la previsión de posibles categorías de respuestas que podrían aproximarnos a las configuraciones cognitivas que se harían presentes en las respuestas de los estudiantes. Para este informe se realizaron ajustes para referir sólo a las categorías identificadas al utilizar la regla de tres como estrategia de resolución. En este sentido, se han identificado las siguientes categorías y subcategorías:

C0: No dar respuesta

C1: No-proporcional con justificación: no reconocer las magnitudes dadas como magnitudes proporcionales, asumiendo que en la realidad se presentan circunstancias en las que la relación consumo de combustible por recorrido no es siempre la misma.

C2: Proporcional-regla-correcta: reconocer las magnitudes dadas como proporcionales, dar una respuesta correcta y utilizar una regla de tres para su resolución. Esta comprende las subcategorías:

C2.1: Proporcional-regla-correcta-numérica: elaborar una solución numérica, la cual comprende: (a) despojar a x de su valor de incógnita, (b) usar la igualdad como símbolo que indica un resultado, (c) llevar a efecto una modelización verbal-simbólica correcta, pero la simbólica-simbólica incorrecta, (d) uso inconsciente-mecánico de la regla de tres evitando un razonamiento proporcional.

C2.2: Proporcional-regla-correcta-algebraica: elaborar una solución algebraica, la cual comprende: (a) dar-conservar para x el valor de incógnita, (b) usar la igualdad como símbolo relacional, (c) llevar a efecto ambos procesos de modelización de manera correcta, (d) uso consciente de la regla de tres.

C3: Proporcional-regla-incorrecta: reconocer las magnitudes dadas como proporcionales, dar una respuesta incorrecta y utilizar una regla de tres para su resolución. Esta comprende las subcategorías:

C3.1: Proporcional-regla-incorrecta-numérica: elaborar una solución numérica pero obtener una respuesta incorrecta.

C3.2: Proporcional-regla-incorrecta-algebraica: elaborar una solución algebraica pero obtener una respuesta incorrecta.

C4: Proporcional-no-regla-correcta: reconocer las magnitudes dadas como proporcionales, dar una respuesta correcta y no utilizar la regla de tres para su resolución.

C5: Proporcional-no-regla-incorrecta: reconocer las magnitudes dadas como proporcionales, dar una respuesta incorrecta y no utilizar la regla de tres para su resolución.

3. Resultados

Configuraciones cognitivas. La revisión de las respuestas de los estudiantes, a la luz de las categorías obtenidas a partir del estudio de las configuraciones epistémicas, ha permitido identificar regularidades en las respuestas de los estudiantes (configuraciones cognitivas). En la Tabla 1, se muestra un resumen de la manifestación de las mismas, en la muestra considerada. En la Fig. 1 se muestran ejemplares relativos a las categorías identificadas. Aún cuando la mayoría de respuestas pudieron ser previstas de acuerdo con las categorías derivadas del estudio de las configuraciones epistémicas, se debe señalar que algunas de las respuestas no lo fueron. Algunos de estos casos se muestran en la Fig. 2.

Tabla 1: Frecuencias de las categorías y subcategorías
del ítem, según estrategia regla de tres.

Categorías	Subcategorías	Frecuencias	
		Nº	%
C2: Proporcional-regla-correcta	C2.1: Prop-regla-correcta-numérica	13	21,7
	C2.2: Prop-regla-correcta-algebraica	40	66,6
C4: Proporcional-no-regla-correcta		3	5,0
Total		56	93,3

4. Discusión de resultados

Todos los sujetos obtienen una respuesta correcta para el problema. Mientras 3 sujetos (5%) muestran una respuesta correcta a partir de un procedimiento "ilógico" no previsto, similar al mostrado en S2, Fig. 2.

La otra tendencia dominante observada es el uso del procedimiento numérico-algebraico implicado en la regla de tres, mostrado por el 66,7% de los sujetos, mientras el 21,7% reduce el procedimiento a lo numérico. Únicamente un sujeto muestra un razonamiento aditivo correcto que no fue previsto (S3, Fig. 2). Dos de las respuestas, aún estando dentro de las categorías previstas, muestran un razonamiento multiplicativo del tipo S1, Fig. 1, lo que indica la puesta en práctica de un razonamiento proporcional. Para la categoría C2.2 se muestran en la Fig. 1 cierta diversidad de repuestas que quedó incluida dentro de la misma.

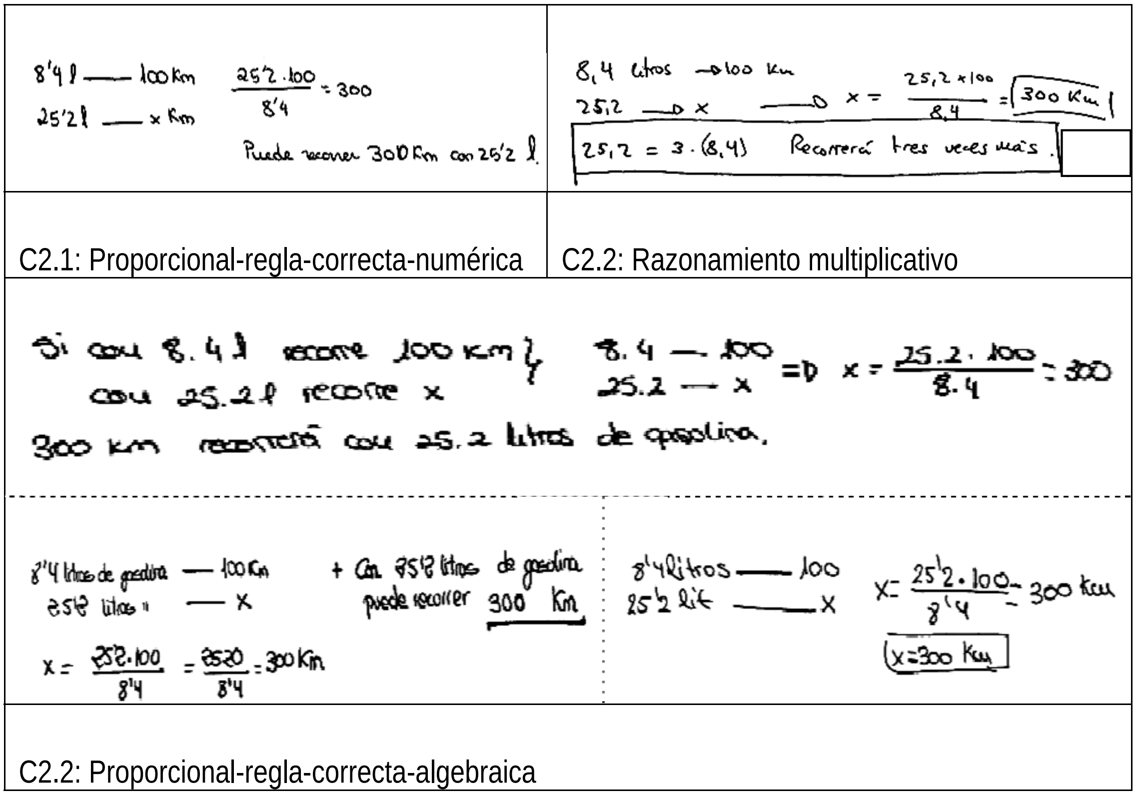

Fig. 1: Ejemplos de respuestas incluidas en las categorías previstas

Aún cuando las categorías identificadas a partir de las configuraciones epistémicas explican un alto porcentaje (90%) de los casos de respuestas, resultaron insuficientes para explicar la totalidad de las respuestas dadas por los estudiantes, esto da relevancia a la necesidad de identificar los aspectos que pueden deducirse a partir del estudio de las configuraciones cognitivas. El estudio integrado de ambas configuraciones informa sobre la totalidad de los procesos manifestados durante el desarrollo de la lección, relacionados con el problema puesto en práctica.

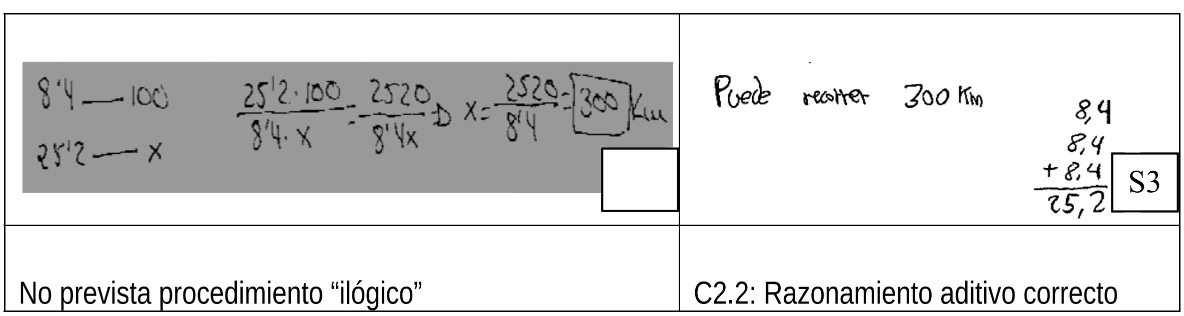

Fig. 2: Ejemplos de respuestas no previstas

El estudio de las configuraciones epistémicas/cognitivas comprende la identificación de la puesta en juego de las estrategias correctas e incorrectas, los errores y las dificultades, que pueden manifestarse en los procesos de resolución de problemas. En efecto, las estrategias correctas de resolución son indagadas al explorar las diferentes posibles resoluciones, elaboradas previamente al análisis epistémico. Las estrategias incorrectas y los errores, generalmente, serán evidenciados por la puesta en juego de significados diferentes/opuestos a los propuestos para los distintos objetos identificados, los cuales pueden ser observados a partir de las configuraciones cognitivas respectivas. Las dificultades estarían incluidas en la identificación de los conflictos potenciales, aquellos cuya presencia se manifiesta con alta frecuencia en las respuestas de los sujetos. De modo que la determinación de estrategias, errores y dificultades de los maestros en formación, al resolver un problema de proporcionalidad, podría hacerse en buena medida por medio del estudio de las configuraciones epistémicas del problema y seguramente complementado por el estudio de las configuraciones cognitivas. Este hecho responde a las dos primeras preguntas de investigación inicialmente formuladas.

El hecho que el 90% de las respuestas se encuentre explicado por las categorías previamente establecidas, implica una preparación previa suficiente del formador para enfrentar las dificultades de los estudiantes en la resolución del problema, lograda tal suficiencia a partir de la realización del análisis previo. Este hecho responde a nuestra tercera pregunta de investigación.

5. Algunas conclusiones: implicaciones en la formación inicial de maestros

La identificación de objetos y significados puestos en juego cuando el educador y los estudiantes resuelven un problema de valor faltante, fue realizada por medio de los análisis epistémico y cognitivo. Estos análisis han proporcionado la identificación de configuraciones epistémicas y cognitivas. Por medio del primer análisis el formador fue haciéndose progresivamente consciente de la complejidad de los significados matemáticos que subyacen en la base de las formas de resoluciones. En consecuencia, el formador estuvo en capacidad de identificar previamente las potenciales estrategias, errores y dificultades que podrían manifestarse. Esta identificación, de acuerdo con Hill, Ball y Schilling (2008), fomenta el desarrollo del conocimiento matemático para enseñar del formador.

El modelo de estudio implementado, el uso de las configuraciones epistémicas y cognitivas, ha permitido identificar algunos aspectos relevantes, posiblemente útiles para el formador en su labor con futuros maestros, a saber: (a) Lo numérico y lo algebraico: que se manifiesta en la resolución del problema al utilizar la regla de tres. (b) La modelización verbal-simbólica: que transforma el enunciado del problema en una representación que simboliza la regla de tres. (c) La modelización simbólica-simbólica: que transforma una expresión simbólica (regla de tres) en otra expresión simbólica (ecuación).

Finalmente, el modelo de estudio puesto en práctica ha mostrado tener potencial para fomentar el desarrollo del conocimiento matemático para enseñar del formador, por lo que su uso, como herramienta para el desarrollo de esa forma de conocimiento en futuros profesores, está siendo estudiado.

Referencias bibliográficas

- Adjiage, R. y Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. Educational Studies in Mathematics, 65, 149–175
- Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. (2007) Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 333–340.
- Castro, W. F. y Godino, J. D. (2008). Evaluación del razonamiento algebraico elemental en futuros maestros: Un estudio exploratorio. En L. González (Coord.). Investigación en Educación Matemática, XII Simposio de la SEIEM. Badajoz: SEIEM.
- Disponible en: http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F. y Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic – algebraic problem solution. ICME 11, TSG 27: Mathematical knowledge for teaching.
- Disponible en: http://tsg.icme11.org/document/get/391
- Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. Journal for Research in Mathematics Education, 39, 372-400.
- Ilany, B., Keret, Y., y Ben-Chaim, D. (2004). Implementation of a model using authentic investigative activities for teaching ratio and proportion in pre-service elementary teacher education. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 81–88). Bergen, Norway: PME
- Kenney, P., Lindquist, M. y Heffernan, C. (2002). Butterflies and caterpillars: Multiplicative and proportional reasoning in the early grades. En B. Litwiller y G. Bright. (Eds.). Making sense of fractions, ratios, and proportions. (pp. 87-99). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (Vol. 1, pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Lesh, R., Post, T., y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En M. Behr y J. Hiebert (Eds.), Number concepts and operations for the middle grades (pp. 93-118). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- National Council of the Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: The Council.
- Person, A., Berenson, S. y Greenspon, P. (2004). The role of number in proportional reasoning: a prospective teacher's understanding. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 17–24). Bergen, Norway: PME
- Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L. y Tompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. Journal of Mathematics Teacher Education, 1, 127–155.
- Steinthorsdottir, O. B. (2006). Proportional reasoning: Variable influencing the problems difficulty level and one's use of problem solving strategies. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková. (Eds.), Proceedings of 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 5, pp. 169-176). Prague: PME.

Volver al índice
Comunicaciones Breves