# Una experiencia de enseñanza de la integral en la formación inicial de profesores de matemáticas

*Jaime Fonseca González**

RESUMEN

La cuantificación y predicción del movimiento fueron los marcos epistémicos que dieron origen al cálculo en el siglo XVII; el origen, junto con la Resolución de Problemas se emplearon para diseñar una propuesta de enseñanza de la integral en un programa de formación de docentes de matemáticas, en la que se pasa por una fase de construcción de nociones y significados de suma de Riemmann, integral y antiderivada en problemas de movimiento, una fase de ampliación del campo de problemas y significados de la integral, y una fase de argumentación de propiedades de la integral y la antiderivada. En las dos primeras, los estudiantes construyen nociones, significados y propiedades de los conceptos objeto de estudio, siendo el tratamiento por integral definida el de mayor preferencia por los estudiantes.

**Palabras claves:** integración, observación de la enseñanza, formación inicial de profesores.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: jaimejaimef@hotmail.com

## CONTEXTUALIZACIÓN

En la enseñanza tradicional del cálculo, suele darse una presentación teórica, deductiva y formal que se aprecia en el índice de los textos, los cuales mantienen la estructura: números reales, funciones, límites, continuidad, derivada, aplicaciones de la derivada, integral y aplicaciones de la integral. Bajo esta presentación, los conceptos y propiedades aparecen como resultados teóricos y dejan de lado el significado e importancia en el cálculo (Alanis, Salinas, 2010). En contraposición, Imaz y Moreno (2009, citados en Alanis, Salinas 2010), expresan que "existen problemas que se han derivado de una confusión: olvidarse de los orígenes del cálculo y sustituirlos por el aparato formal de análisis matemático derivado del cálculo" (pág. 2). Por su parte, Cantoral y Mirón (2000, citados Alanis, Salinas, 2009) exponen que "en la enseñanza del cálculo se logra que los estudiantes deriven, integren y calculen límites elementales, pero no son capaces de dar un sentido más amplio a esas nociones que les haga reconocer, por ejemplo, cuándo un problema requiere de calcular una derivada" (pág. 360). Esta contraposición se hace más fuerte si se tiene en cuenta que el enfoque algebraico y reduccionista, así como el abordaje simplista de los conceptos específicos del análisis, se opone a la resolución de problemas como un medio para el aprendizaje de las matemáticas.

En este contexto, y considerando la resolución de problemas como metodología para el aprendizaje de las matemáticas, en el proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, específicamente en el Espacio de Formación denominado Matemáticas del Movimiento III, se presenta una propuesta de enseñanza que atiende a la construcción de los conceptos de antiderivada e integral desde la resolución de problemas en la formación inicial de docentes de matemáticas. Se presentará el referente histórico que dirige la propuesta, los momentos que orientan la organización de la propuesta, algunos de los problemas aplicados en la experiencia de aula, las producciones de los estudiantes y los logros y dificultades evidenciadas.

## REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS BÁSICOS

Para el análisis epistemológico de la integral, se ha considerado el concepto de marco epistémico, el cual permite identificar obstáculos epistemológicos. Muñoz (2010) realizó un estudio epistemológico de la integral, antes y después del siglo XVII; particularmente, en el siglo XVII, Galileo introdujo mediciones para establecer relaciones entre distancia y tiempo, bajo el marco epistémico: ¿Qué relaciones se establecen entre distancias y tiempos de caída de los cuerpos? Con esto, Galileo introdujo las relaciones funcionales y asumió al tiempo como variable independiente en la descripción del movimiento. En el mismo siglo, Newton estudió el movimiento de los cuerpos bajo el marco epistémico: ¿Cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado? De este modo, el objetivo era predecir la evolución de un fenómeno de variación.

Kolmogórov (1936) expresa que durante el siglo XVII, las ciencias y la tecnología llevaron a las matemáticas a centrar su atención en la creación de métodos que permitieran el estudio del movimiento y los procesos de cambio. Los matemáticos de este siglo comprendieron la naturaleza y tuvieron en cuenta el carácter práctico de las matemáticas, llevándolas a una nueva etapa de desarrollo; por esto, los nuevos conceptos se justificaron en correspondencia con las relaciones del mundo real. En este momento del desarrollo del cálculo, Newton y Leibniz ofreciendo dos miradas diferentes al estudio de la variación. Leibniz desarrolló sus estudios desde el análisis de lo infinitamente pequeño, en el que la integral se entendió como la suma de un número infinitamente grande de cantidades infinitamente pequeñas, de modo que los diferenciales (aumentos infinitamente pequeños de las cantidades variables), constituyen un concepto básico del cálculo diferencial. Por su parte, Newton, con el método de fluxiones, construyó los conceptos de fluente (cantidad variable) y de sus "fluxiones" (velocidad de su cambio), llegando al problema de encontrar las fluxiones y las relaciones entre las fluxiones con el fluente asignado. Sin embargo, estas dos maneras de abordar los conceptos del cálculo se vincularon con lo que hoy conocemos como fórmula de Newton-Leibniz: si $f$ es una función continua en $[a, b]$, entonces , donde $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$.

Este corto recorrido histórico relaciona el cálculo con problemas reales de estudio del movimiento, en los que la velocidad y la aceleración representaron conceptos físicos que originaron los conceptos derivada, antiderivada e integral desde dos miradas diferentes: la de Leibniz y la de Newton, bajo el problema de cuantificar y predecir el movimiento.

## DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA

El proceso de enseñanza se ha planeado en tres fases: en la primera fase, los estudiantes construyen nociones y significados de suma de Riemann, integral y antiderivada en problemas de movimiento. En la segunda, se proponen otros problemas para ampliación del campo de problemas y significados de la integral y la antiderivada. En la tercera, se argumenta sobre propiedades de la integral y la antiderivada. A su vez, cada en cada fase se da un momento de trabajo en grupo para la resolución de los problemas; un momento de socialización de los resultados de la resolución, establecimiento de significados, conjeturas, teoremas, representaciones y estrategias; un momento de institucionalización en la que se organizan los diferentes resultados obtenidos del proceso. Este documento presentará resultados sobre la aplicación de actividades de las dos primeras fases, algunos de los problemas propuestos, se comentan soluciones que muestran avances de los estudiantes en la conceptualización de la integral y su significado para la resolución de problemas del movimiento, así como algunos errores y dificultades evidenciadas en el proceso.

*Primera fase.* En esta fase, la actividad de aula se centra en la resolución del siguiente problema:

El sistema biela-manivela se compone de una biela AB cuyo extremo A (pie de biela), se desplaza a lo largo de una recta, mientras que el otro extremo B (cabeza de biela), articulado en B con una manivela OB, describe una circunferencia (Ver la ilustración). La cabeza de la biela se mueve con velocidad circular constante, de modo que la función que describe la velocidad del pistón desde que la manivela está alineada con la biela, es $v(t) = 6sen(2t)$, donde $t$ se mide en segundos y $v(t)$ en $cm/s$. Determine la longitud de la manivela.

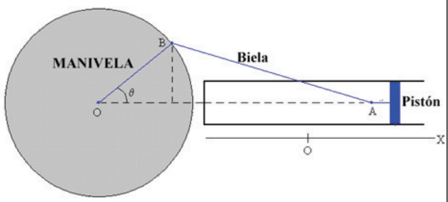


Ilustración I. Problema de movimiento aplicado en la primera I

El proceso de resolución del problema de los estudiantes pasó por cuatro momentos: 1) comprensión del problema. 2) documentación. 3) interpretación de datos y resultados encontrados en las dos primeras fases. 4) solución del problema. Además, las dificultades de los estudiantes para la resolución de este problema fueron: el conocimiento previo de los estudiantes sobre la velocidad hace que la definan en todos los casos, como v = d/t; suponer que la distancia recorrida es la longitud del arco de la curva de la función de velocidad; desconocer una relación entre la velocidad y la distancia recorrida cuando la velocidad es variable; la existencia de dos velocidades (la velocidad constante a la que gira la biela y la velocidad a la que se mueve el pistón); la relación entre el movimiento de la biela y el del pistón; la interpretación de velocidades negativas o cero en el movimiento del pistón. Los errores más frecuentes identificados en la solución del problema son: los estudiantes no reconocen $t$ en la fórmula, como el tiempo de recorrido a la velocidad considerada, sino como el tiempo del recorrido, es decir, $t = 0.1$, $t =0.2$, $t = 0.3$,…. ; los estudiantes saben que deben integrar o calcular el área bajo la curva, pero no saben por qué representa la distancia recorrida, por lo que se les cuestionan las razones; consideran que el desplazamiento del pistón es igual a la longitud del círculo generado por el movimiento de la biela.

Como resultado, los grupos de trabajo presentaron razonamientos para resolver el problema, los cuales responden a acercamientos de los puntos de vista de Newton y Leibniz: emplean fórmulas físicas de movimiento uniforme acelerado para aproximarse a la solución. Retoman la situación desde el movimiento de la manivela, que tiene velocidad circular constante, y por medio de la derivada y la forma de la fórmula obtenida, identifican la longitud de la manivela. Retroceden en el razonamiento de la razón de cambio para obtener la velocidad, llevándolos a la antiderivada. Emplean aproximaciones de área empleando software como Excel o Geogebra, previa interpretación del significado del área bajo la curva de la función de velocidad.

*Segunda fase.* Para esta fase, se proponen otros problemas de movimiento y se sugiere que para cada uno, realicen una solución numérica mediante cálculos en Excel y una solución analítica por antiderivada, comparando los resultados de las dos soluciones. En esta actividad, los estudiantes se familiarizan con métodos y conceptos desarrollados por sus compañeros para resolver el primer problema y comprender las definiciones y afirmaciones que surgieron en la institucionalización. Sin embargo, mayoritariamente los estudiantes encuentran más fácil la relación entre la situación, los datos, la incógnita, cuando abordan el problema desde la integral o la suma de Riemann, que cuando lo hacen por la antiderivada. Esto, porque el producto de las magnitudes relacionadas en el dominio y codominio de la función les indica la magnitud con la cual relacionar el área, mientras que por el método de la antiderivada, a los estudiantes se les dificulta dar significado a la constante de integración y la antiderivada. Un tipo de problema que resulta fructífero para la actividad matemática de los estudiantes es aquel que indaga por una descripción de movimiento, cuando tiene como dato la velocidad de aceleración de un móvil, o cuando se presenta al estudiante solo la representación tabular o gráfica de la aceleración, pues permite llevar a otra forma equivalente del teorema fundamental del cálculo o a diferentes métodos numéricos de integración. Además, es recomendable involucrar, no solo la posición de los objetos en unos ciertos instantes, sino la gráfica de posición.

*Tercera fase*. Se recopilan todas las conjeturas y fórmulas que hasta el momento se han obtenido desde la resolución de los problemas propuestos y la institucionalización de los resultados, se retoman las definiciones, y los estudiantes, en trabajo colectivo, buscan sugerir argumentos para justificar su validez. La recolección de datos de esta fase aún se está realizando, así que para este reporte no se presentan resultados ni reflexiones.

## REFLEXIÓN FINAL

El desarrollo histórico del cálculo indica que conceptos como derivada e integral emergieron, por una parte, del estudio de los problemas del movimiento, principalmente en física, y por otra parte, del cálculo de cuadraturas, pero los resultados convergen con el teorema fundamental del cálculo. Al considerar el desarrollo histórico y la resolución de problemas para el diseño e implementación de problemas para la enseñanza del concepto de integral, los estudiantes construyen significados y representaciones de los conceptos, y establecen fórmulas y conjeturas sobre el comportamiento de tales objetos. Se identifica en los estudiantes, preferencia por el método de la integral para resolver problemas, y las principales dificultades se observan en la significación de la antiderivada y la integral definida, a pesar de que la relación entre función y derivada es fácilmente concebida por los estudiantes.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alanís, J., Salinas, P. (2009) Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (México), Vol. 12, N.° 3, 2009, pp. 355-382. Recuperado el 15 de diciembre de 2011 de http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33511859004.

Alanis, J., Salinas, P. (2010). Cálculo de una variable: acercamientos newtonianos y leibniziano integrados didácticamente. Revista El Cálculo y su Enseñanza (México) Vol. II, 2010. Recuperado el 10 de enero de 2012 de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/

Kolmogórov, A. (1936). Matemáticas. La Gaceta. Traducción de B., Fernández y E., Pastor. Recuperado el 15 de marzo 2011 de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/Gaceta/historia91b.pdf.

Muñoz G., (2010). Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Clame. Vol. 13 N.°4, pp. 283-302.