

Propuesta metodológica para la conceptualización de la noción de derivada a través de su interpretación geométrica

*Rossmajer Guataquira López**
*María Sildana Castillo Torres***
*Hellen Carolina Carranza Sanabria****

RESUMEN

Esta propuesta metodológica (en vía de desarrollo) presenta el esquema de una secuencia de actividades dirigida a estudiantes de décimo, once y primeros semestres de universidad. Busca propiciar la conceptualización de la noción de derivada a través de su interpretación como la pendiente de la recta tangente a un punto y el razonamiento geométrico respecto a la misma. Emplea, para ello, Geogebra, como una forma de representar diná-

micamente la derivada; los niveles de razonamiento de Van Hiele y la teoría de conceptualización de Vinner, para el planteamiento de la secuencia; y una adaptación de las "Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría" de Samper y otros (2003), para el esquema de las actividades.

Palabras clave. Derivada, conceptualización, razonamiento geométrico.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: rossmajer@yahoo.com.

** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: sildanak@hotmail.com.

*** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: carito9026@gmail.com.

CONTEXTUALIZACIÓN

Existe –según nuestra propia experiencia como estudiantes bachilleres y universitarias y según los estudios realizados por investigadores en educación como Dolores y Cantoral (2000)– una gran cantidad de estudiantes bachilleres y universitarios que presentan dificultades en la comprensión de la noción de derivada. En reconocimiento de este problema y de las prácticas educativas que se realizan en las aulas de clase (muchas de ellas enfocadas en la representación algebraica de la derivada), en el espacio de formación denominado Tecnología en el Aula de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, surge esta secuencia de actividades como una propuesta metodológica de enseñanza mediante la cual se busca potenciar la conceptualización de la noción de derivada (a través de su interpretación geométrica) en jóvenes de últimos grados de bachillerato y primeros semestres de universidad, haciendo uso del software Geogebra como un medio de visualización e interacción con la derivada, del diseño de siete actividades estructuradas de acuerdo con los niveles de razonamiento de Van Hiele, de los planteamiento acerca de conceptualización de Vinner y de una adaptación de la propuesta didáctica denominada "*Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría*", planteada por Samper y otros (2003) para promover la conceptualización de un objeto geométrico inventado, denominado Kuid.

MARCO DE REFERENCIA

Matemático. En matemáticas, podemos hablar de pendiente de una línea recta o de una línea curva. Una línea recta tiene pendiente constante a lo largo de todos sus puntos, puesto que ella es la misma en cualquier punto de la recta, pero, en el caso de la pendiente de una curva no sucede lo mismo y ello da origen al concepto de derivada de una función. La derivada de una función se puede considerar respecto a ella o a un punto de ella. Para efectos de esta propuesta solo la consideraremos respecto a un punto de ella.

Legal y didáctico. El Ministerio de Educación Nacional, en sus *Estándares curriculares de matemáticas* (MEN 2007, p. 69), propone que la enseñanza de la derivada en la Educación Básica Secundaria se realice interpretándola como el valor de la pendiente de la tangente a una curva, y trabajarla a partir de argumentos geométricos modelados en problemas de contextos matemáticos y de otras ciencias.

En cuanto a la enseñanza de la derivada, Hitt (2003) propone que el docente desarrolle en los estudiantes habilidades de visualización, para la construcción

de pensamiento matemático, y en este sentido, Font (2005) incita a trabajar con un software la interpretación geométrica de la derivada en un punto, para que el alumno visualice todas las tangentes de una función, de tal forma que pueda expresar simbólicamente las pendientes de las rectas tangentes de la misma. Al respecto, Dolores (2000) propone el trabajo de la derivada como un enfoque geométrico y computacional, teniendo en cuenta que el **enfoque geométrico** trabaja la derivada por medio de la recta tangente de un punto, y el **enfoque computacional**¹ realiza una visualización dinámica de la derivada, a partir del comportamiento que tiene la misma en la aproximación de las rectas secantes a la recta tangente.

Metodológico. El diseño de las actividades tiene en cuenta la recomendación didáctica dada por Samper y otros (2003), para construir situaciones de conceptualización de objetos geométricos, considerando el concepto que será objeto de estudio, a partir de su punto de vista matemático y didáctico y de la construcción del concepto desde sus diversas propiedades.

Asimismo, tienen en cuenta que la cercanía entre la imagen conceptual y el concepto depende de la cantidad de experiencias que tenga el estudiante con una gran variedad de imágenes conceptuales del objeto de estudio, pues como lo afirman Vinner y Hershkowitz *“adquirir un concepto significa adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto, tal como éste está concebido por la comunidad matemática”* (Citado por Samper y otros, 2003, p. 9).

La implementación en el aula de estas actividades se lleva a cabo de acuerdo con las recomendaciones didácticas que se detallan en cada actividad (apartados que se han realizado de acuerdo con las recomendaciones de Samper y otros (2003)), especificando la finalidad, las acciones que debe realizar el docente, la explicación de cómo funciona la actividad y su conexión con el nivel de Van Hiele. En algunas actividades se requiere el uso del software Geogebra, el cual debe ser implementado como una herramienta que permite la visualización dinámica de la derivada de acuerdo con las instrucciones de uso que se dan en la actividad correspondiente. Al final de cada actividad, se sugiere socializar las respuestas dadas por los estudiantes, llegando a acuerdos que sean dirigidos por el docente según la intención de cada actividad.

¹ En la propuesta hemos implementado el software Geogebra debido a que este es un software libre de acceso gratuito.

DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA

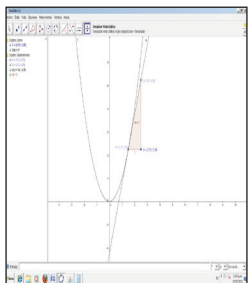
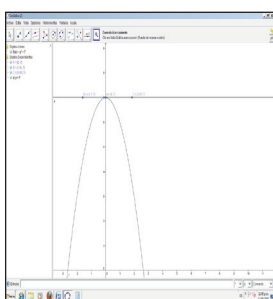
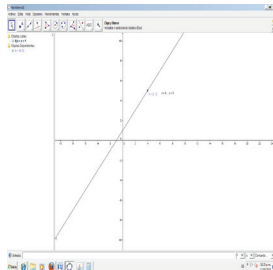
Las actividades propuestas están comprendidas por la intencionalidad de la actividad, los materiales y los prerrequisitos conceptuales y procedimentales que deben tener los estudiantes, además de las fichas con los kuid (nuestro kuid es la derivada en un punto) a presentar. Para efectos de este documento (por cuestiones de espacio) solo daremos a conocer la intencionalidad de cada una de las actividades de acuerdo con el nivel de Van Hiele al que corresponden y una parte de la primera actividad.

SECUENCIA DE ACTIVIDADES		
Nivel según Van Hiele	No	Intencionalidad:
Tipo 1: Visualización	1	El descubrimiento, por el alumno, de las características esenciales del Kuid, a través del análisis de ejemplos y contraejemplos.
Tipo 2: Análisis o Descripción	2	Los estudiantes deben identificar características del kuid, a partir de la construcción de distintos ejemplos del mismo.
	3	Trabajar con una propiedad del kuid, haciendo al estudiante responsable de las construcciones que realiza con base en las sesiones anteriores.
Tipo 3: Clasificación	4	Seleccionar ejemplos con una propiedad común.
Tipo 4: Deducción Formal	5	Perfeccionamiento de la definición de Kuid, a partir del estudio de casos poco conocidos del mismo.
	6	Recoger las ideas intuitivas desarrolladas en torno al concepto de kuid y concretarlas en una definición formal.
Tipo 5: De rigor	7	Invitar a los alumnos a dar explicaciones y justificaciones para avalar las propiedades del kuid trabajadas durante toda la secuencia, usando el concepto de kuid ya adquirido.

Actividad no. 1. Descripción de la actividad: Para el desarrollo de la actividad el maestro proyectará (mediante el uso de computador o retroproyector) las imágenes de los Kuid (Derivada en un punto) sobre un telón o tablero, de manera secuencial, manteniendo ocultas las figuras posteriores a las que se están analizando. El alumno tiene que realizar contrastes entre la figura recientemente destapada y aquellas que ya ha tenido la oportunidad de analizar.

Este ejercicio requiere de un análisis totalmente abstracto, sin la intervención de herramientas manuales. El alumno debe operar mentalmente sobre las figuras, descomponiéndolas con el fin de reconocer sus partes constitutivas (función, recta tangente y pendiente) y efectuar una comparación entre las imágenes y la información que estas presentan. Las primeras tres imágenes,

de las nueve que se le presentan al estudiante, son las siguientes:

 <p>$m = 3$ en la recta tangente a, es el Kuid de $f(x) = x^2$, con $x = 1.5$.</p> <p>Imagen 1</p>	<p>¿Es, el Kuid de , con $x = 0$?</p>  <p>Imagen 2</p>	<p>La imagen 2 no presenta un Kuid. ¿$y = 5$ es el Kuid de , con $x = 4$?</p>  <p>Imagen 3</p>
---	--	--

LOGROS Y DIFICULTADES

Las ventajas que posee la secuencia de actividades radica, por una parte, en que esta es producto de una adaptación de la propuesta de Samper y otros (2003) para promover la conceptualización de un objeto geométrico, y por otra, que esta está fundamentada en el trabajo visual y manipulativo de la derivada, aunque tiene como dificultad el hecho de que se encuentra en vía de desarrollo, y, por tanto, aún no ha sido validada en el contexto para el cual ha sido diseñada: grados 10° y 11° y primeros semestres de universidad, para hacer de esta una propuesta más consistente.

REFLEXIÓN FINAL

A partir de la experiencia propia y de consultas realizadas consideramos que el trabajo geométrico, visual y manipulativo de la derivada que proponemos puede contribuir a la motivación de los estudiantes frente al tema, además de facilitarles la comprensión y conceptualización del mismo y de potenciarles su razonamiento geométrico. También consideramos que el camino investigativo recorrido por las docentes Samper, Camargo y Leguizamón (2003) y los logros obtenidos por ellas en dicho camino garantizan en gran medida buenos resultados en la aplicación de esta propuesta, puesto que estamos considerando a la derivada (desde su interpretación geométrica, como la pendiente de la recta tangente a un punto) como aquel Kuid del que hablan estas docentes, un Kuid ya no pensado para primaria sino para los últimos años de colegio y principios de universidad.

Referencias bibliográficas

- Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En: El futuro del cálculo infinitesimal (Cap. 5) [En línea]. (Consultado el 13/04/2011). Disponible en: <http://cimate.uagro.mx/pub/Crisologo/ArticuloICME8.pdf>
- Font (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. Universidad de Barcelona. [En línea]. (Consultado el 24/08/2012). Disponible en: <http://start.funmoods.com/results.php>.
- Hitt F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. Boletan de la Asociación Matemática Venezolana, (Vol. X, No. 2). [En línea]. (Consultado el 23/08/2012). Disponible en: <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias. MEN. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Samper, C., Camargo, L., y Leguizamón, C. (2003). Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. Asociación Colombiana de Matemática Educativa, ASOCOLME, Cuaderno No. 6. (Consultado: 21/04/2011). Disponible en línea en: <http://asocolme.com/documento/publicaciones/cuadernos/cuaderno%206%20razonamiento.pdf>.