

# NAGOYA MATHEMATICAL JOURNAL

VOL. 27-2

JULY, 1966

Edited by

NOBORU ITO, TOMIO KUBOTA, MASATAKE KURANISHI,  
SIGEKATU KURODA, YOZÔ MATSUSHIMA, HISASI MORIKAWA,  
TADASI NAKAYAMA†, KIYOSHI NOSHIRO, KATUZI ONO,  
TIKAO TATUZAWA, KÔSAKU YOSIDA

PUBLISHED BY

MATHEMATICAL INSTITUTE, FACULTY OF SCIENCE  
NAGOYA UNIVERSITY

## CONTENTS

---

Some Results on Finite Groups Whose Order Contains a Prime to the First Power. ....	R. BRAUER	381
Generators and Relations for Cyclotomic Units. ....	H. BASS	401
On Doubly Transitive Groups of Degree $n$ and Order $2(n-1)n$ . ...	N. ITO	409
Involutive Property of Resolutions of Differential Operators. ....		
.....	M. KURANISHI	419
On Block Idempotents of Modular Group Rings. ....		
.....	M. OSIMA	429
Clifford Algebras and Families of Abelian Varieties. ....	I. SATAKE	435
On Some Dualities Concerning Abelian Varieties. ....		
.....	H. MATSUMURA and M. MIYANISHI	447
Hereditary Semi-primary Rings and Tri-angular Matrix Rings. ....		
.....	M. HARADA	463
On $q$ -Galois Extensions of Simple Rings. ....	H. TOMINAGA	485
Geometry of Group Representations. ....	G. DE. B. ROBINSON	509
Character Theory of Finite Groups with Trivial Intersection Subsets. .....	J. H. WALTER	515
Eine Kennzeichnung Semi-perfekter Moduln. ....		
.....	F. KASCH und E. A. MARES	525
Holomorphic Cohomology of Complex Analytic Linear Groups. ....		
.....	G. HOCHSCHILD and G. D. MOSTOW	531
A Theorem on Analytic Mappings of Complex Manifolds. ...	M. KURITA	543
On Meromorphisms of Algebraic Systems. ....	J. HASHIMOTO	559
Groups with a Cyclic Sylow Subgroup. ....	W. FEIT	571
Orthogonal Group Matrices of Hyperoctahedral Groups. ...	J. S. FRAME	585
Cartan Subalgebras of Jordan Algebras. ....	N. JACOBSON	591
Simple Algebras over a Commutative Ring. ....	A. HATTORI	611
On Some Properties of Prime Factors of Integers. ....	P. ERDÖS	617
Splitting of Algebras by Function Fields of One Variable. ....		
.....	P. ROQUETTE	625
Radical Modules over a Dedekind Domain. ....	A. FRÖHLICH	643
A Theorem of Harrison, Kummer Theory, and Galois Algebras. ....		
.....	S. U. CHASE and A. ROSENBERG	663
On $S$ -Rings in the Sense of F. Kasch. ....	K. MORITA	687

Completely Faithful Modules and Self-Injective Rings. . . . .	G. AZUMAYA	697
The Cohomology Groups of Tori in Finite Galois Extensions of Number Fields. . . . .	J. TATE	709
Galois Theory for Rings with Finitely Many Idempotents. . . . .	O. E. VILLAMAYOR and D. ZELINSKY	721
The Schur Multipliers of the Mathieu Groups. . . . .	N. BURGOYNE and P. FONG	733
Lifting Projectives. . . . .	J. R. STROOKER	747

# EINE KENNZEICHNUNG SEMI-PERFEKTER MODULN

FR. KASCH und E. A. MARES

Dem Gedenken an TADASI NAKAYAMA gewidmet

1. Ein projektiver Modul wird (in [1]) semi-perfekt genannt, wenn jedes epimorphe Bild von ihm eine projektive Hülle besitzt. Eine projektive Hülle eines Moduls  $C$  ist eine exakte Folge  $P \xrightarrow{f} C \rightarrow 0$ , wobei  $P$  projektiv ist und der Kern  $\text{Ker}(f)$  von  $f$  klein (= small = superfluous)\* in  $P$  ist. In [1] wird gezeigt, daß ein projektiver Modul  $P$  dann und nur dann semi-perfekt ist, wenn das Radikal  $\text{Ra}(P)$  von  $P$  klein in  $P$  ist,  $\bar{P} = P/\text{Ra}(P)$  halbeinfach ist und jede direkte Zerlegung von  $\bar{P}$  durch eine direkte Zerlegung von  $P$  induziert wird.

Dieses Resultat soll hier benutzt werden, um eine weitere Charakterisierung semi-perfekter Moduln zu beweisen, die ebenso einfach wie bemerkenswert ist und darüber hinaus durch Dualisierung eine einfache Konstruktion der injektiven Hülle liefert.

2. Es sei  $R$  ein Ring mit 1-Element und alle Moduln seien unitäre  $R$ -Rechtsmoduln. Ein Modul  $M$  heiße *komplementiert* (bezuglich der Addition), wenn zu jedem Untermodul  $U \subset M$  in der Menge der Untermoduln  $V \subset M$  mit  $M = U + V$  (mindestens) ein minimaler existiert; jeder solche minimale Untermodul heiße ein *Komplement* von  $U$  und eines dieser Komplemente werde mit  $U'$  bezeichnet.

**HILFSSATZ.** *Ist  $U'$  ein Komplement von  $U$  in  $M$ , dann ist  $U \cap U'$  klein in  $U'$ . Ist  $U''$  ein Komplement von  $U'$  in  $M$ , dann ist  $U'' \cap U'$  klein in  $U''$ .*

*Beweis.* Sei  $U \cap U' + B = U'$  mit  $B \subset U'$ , dann folgt  $M = U + U \cap U' + B = U + B$  und wegen der Minimalität von  $U'$  folgt  $B = U'$ , d.h.  $U \cap U'$  ist klein in  $U'$ . Sei  $U'' \cap U' + B = U'$  mit  $B \subset U'$ , dann folgt  $M = U + U'' \cap U' + B$ ; da nach der schon bewiesenen ersten Aussage des Hilfssatzes  $U'' \cap U'$  klein in  $U''$  ist, ist

---

Received May 17, 1965.

\* Ein Untermodul  $K$  von  $P$  heißt klein in  $P$ , wenn für jeden Untermodul  $U \subset P$ ,  $U \cong P$  auch  $U + K \cong P$ .

$U'' \cap U'$  auch klein in  $M$ , also folgt  $M = U + B$  und daraus ergibt sich wieder  $B = U'$ .

3. Wir kommen nun zu der angekündigten Kennzeichnung semi-perfekter Moduln.

**SATZ.** *Ein projektiver Modul ist dann und nur dann semi-perfekt, wenn er komplementiert ist.*

*Beweis.*

“Nur dann”. Sei  $P$  ein semi-perfekter Modul und  $U \subset P$  ein Untermodul. Bezeichne  $\bar{U}$  das Bild von  $U$  in  $\bar{P} = P/Ra(P)$  bei dem natürlichen Epimorphismus  $P \xrightarrow{\nu} \bar{P}$ . Da  $\bar{P}$  halbeinfach ist, existiert ein Untermodul  $A \subset \bar{P}$  mit  $\bar{P} = \bar{U} \oplus A$ . Nach Voraussetzung existiert eine Zerlegung  $P = U_1 \oplus V$  mit  $\bar{U}_1 = \bar{U}$ ,  $\bar{V} = A$ . Aus  $\bar{U}_1 = \bar{U}$  folgt  $U_1 + Ra(P) = U + Ra(P)$  und daher gilt  $P = U + Ra(P) + V$ . Da  $Ra(P)$  klein in  $P$  ist, folgt  $P = U + V$ . Angenommen  $P = U + V_0$  mit  $V_0 \subset V$ , dann folgt  $\bar{V}_0 \subset \bar{V} = A$  und  $\bar{P} = \bar{U} + \bar{V}_0 = \bar{U} \oplus \bar{V}_0 = \bar{U} \oplus \bar{V}$ , also  $\bar{V}_0 = \bar{V} = A$ . Daraus folgt  $V_0 + Ra(P) = V + Ra(P)$  und da  $Ra(P)$  klein in  $P$  ist und  $V_0 \subset V$  ergibt sich

$$P = U_1 \oplus V = U_1 + V_0 + Ra(P) = U_1 + V_0 = U_1 \oplus V_0,$$

also  $V_0 = V$ , d.h.  $V$  ist ein Komplement von  $U$ .

“Dann”. Sei  $P$  projektiv und komplementiert und sei  $P \xrightarrow{f} C \rightarrow 0$  exakt. Wir können und wollen voraussetzen, daß  $C = P/U$  und  $f = \nu$  der natürliche Epimorphismus von  $P$  auf den Faktormodul  $P/U$  sind. Sei  $P = U + U'$  mit einem Komplement  $U'$  von  $U$ . Wegen  $P/U = (U + U')/U$  folgt dann, daß  $\nu' = \nu|U'$  (= Einschränkung von  $\nu$  auf  $U'$ ) ein Epimorphismus von  $U'$  auf  $P/U$  ist, dessen Kern  $Ke(\nu') = U \cap U'$  nach dem Hilfssatz klein in  $U'$  ist.

Bisher haben wir nicht benutzt, daß  $P$  projektiv ist. Mit dieser Voraussetzung kann nun gezeigt werden, daß  $U'$  direkter Summand von  $P$  und daher selbst wieder projektiv ist. Dann ist

$$U' \xrightarrow{\nu'} P/U \rightarrow 0$$

offenbar eine projektive Hülle von  $P/U$  und der Beweis ist vollständig. Sei  $P = U'' + U'$  mit einem Komplement  $U''$  von  $U'$ . Seien

$$\mu : P \rightarrow P/U'' \cap U', \quad \mu' = \mu|U'$$

und sei  $\pi$  die Projektion von  $P/U'' \cap U' = U''/U'' \cap U' \oplus U'/U'' \cap U'$  auf  $U'/U'' \cap U'$ . Dann existiert wegen der Projektivität von  $P$  ein Homomorphismus  $f$  so, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ f \swarrow & & \searrow \pi\mu \\ U' & \xrightarrow{\mu'} & U'/U'' \cap U' \end{array}$$

kommutativ ist. Aus  $\pi\mu = \mu'f$  folgt

$$\pi\mu(U') = U'/U'' \cap U' = \mu'f(U')$$

und daher gilt  $f(U') + Ke(\mu') = U'$ . Da  $Ke(\mu') = U'' \cap U'$  nach dem Hilfssatz klein in  $U'$  ist, folgt  $f(U') = U'$  und folglich gilt  $P = Ke(f) + U'$ . Wegen  $Ke(f) \subset Ke(\pi\mu) = U''$  und wegen der Minimalität von  $U''$  folgt  $Ke(f) = U''$ . Andererseits gilt

$$U'' = Ke(\pi\mu) = Ke(\mu'f) = f^{-1}(Ke(\mu')) = f^{-1}(U'' \cap U')$$

und da  $f$  ein Epimorphismus ist, folgt  $0 = f(U'') = U'' \cap U'$ , was zu zeigen war.

4. Bemerkungen und Folgerungen.

a) Der zweite Teil des Beweises kann so formuliert werden, daß für  $P$  nicht Projektivität sondern nur Selbstprojektivität vorausgesetzt wird. Dazu betrachte man bei sonst gleichen Bezeichnungen wie zuvor das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \hat{f} \swarrow & & \searrow \pi\mu \\ P & \xrightarrow{\mu} & P/U'' \cap U', \end{array}$$

wobei  $\hat{f}$  nach Voraussetzung existiert. Dann gilt  $Bi(\hat{f}) \subset U'$  und man erhält die Abbildung  $f$  im Beweis des Satzes aus  $\hat{f}$  durch Einschränkung des Zieles  $P$  von  $\hat{f}$  auf  $U'$ .

b) Existenz der injektiven Hülle

Sei  $U \subset Q$ , dann gibt es in der Menge der Untermoduln  $V \subset Q$  mit  $U \cap V = 0$  nach dem Zornschen Lemma (mindestens) einen maximalen, der hier ein Komplement genannt und mit  $U^*$  bezeichnet werden soll. Ebenso gibt es ein Komplement  $U^{**}$  von  $U^*$  mit  $U \subset U^{**}$ . Der zum Begriff "klein" duale

Begriff ist "groß" (= large = essential). Damit kann der zweite Teil des Beweises dualisiert werden und liefert einen neuen Beweis für die Existenz der injektiven Hülle, bei dem das Zornsche Lemma *nur* zum Existenzbeweis von  $U^*$  und  $U^{**}$  benutzt wird. Da auch das Duale zur Bemerkung a) gilt, erhält man allgemeiner folgende Aussage: *Ist  $U \subset Q$  und ist  $Q$  selbstinjektiv, dann ist  $U$  groß in  $U^{**}$  und  $U^{**}$  ist direkter Summand von  $Q$ . Ist  $Q$  injektiv, dann ist folglich  $U^{**}$  injektiv und daher eine injektive Hülle von  $U$ .*

c) *Hilfssatz. Ist  $A$  komplementiert und ist  $f : A \rightarrow B$  ein Epimorphismus mit  $\text{Ke}(f)$  klein in  $A$ , dann ist auch  $B$  komplementiert.*

*Beweis.* Seien  $V \subset B$ ,  $U = f^{-1}(V)$  und  $A = U + U'$ , dann zeigt man leicht, daß  $V' = f(U')$ .

**FOLGERUNG.** *Ist  $B$  ein Modul derart, daß jedes epimorphe Bild von  $B$  eine projektive Hülle besitzt<sup>1)</sup>, dann ist  $B$  komplementiert.*

*Beweis.* Nach [1] ist die projektive Hülle von  $B$  semi-perfekt also komplementiert und nach dem Hilfssatz gilt dies dann auch für  $B$ .

d) Ein Modul  $M$  heißt *endlich  $P$ -erzeugt*, wenn  $M$  epimorphes Bild einer endlichen direkten Summe von Kopien von  $P$  ist. Sei  $n$  eine natürliche Zahl und bezeichne  $\mathfrak{G}_n(P)$  die Klasse der Moduln, die epimorphe Bilder einer direkten Summe von  $n$  Kopien von  $P$  sind. Ein Modul  $M$  heiße *regulär*, wenn jeder endlich erzeugte Untermodul von  $M$  direkter Summand von  $M$  ist (dies stimmt für Ringe mit dem Begriff regulär im Sinne von Neumann überein). Sei

$$\delta = \delta(P, M) = \{f \mid f \in \text{Hom}_R(P, M) \wedge \text{Bi}(f) \text{ klein in } M\};$$

sei  $S = \text{Hom}_R(P, P)$ , dann ist  $H = \text{Hom}_R(P, M)$   $S$ -Rechtsmodul und, wie leicht zu sehen, ist  $\delta$   $S$ -Untermodul von  $H$ . Für  $H$  und  $\delta$  als  $S$ -Rechtsmoduln gilt dann der folgende Satz, dessen erster Teil auf F. Sandomierski zurückgeht (Spezialfall in [1]).

**SATZ.**

- 1) *Ist  $P \in \mathfrak{G}_n(P)$ -projektiv und ist  $M \in \mathfrak{G}_n(P)$ , dann gilt  $\delta = \text{Ra}(\text{Hom}_R(P, M))$ .*
- 2) *Ist ausserdem  $M$  komplementiert, dann ist  $\text{Hom}_R(P, M)/\text{Ra}(\text{Hom}_R(P, M))$*

<sup>1)</sup> Es dürfte vielleicht zweckmäßig sein, anders als in [1] bereits derartige Moduln (die also nicht notwendig projektiv sind) als semi-perfekt zu bezeichnen.

*regulär.*

Die Voraussetzungen sind z.B. alle erfüllt, wenn  $P$  semi-perfekt und  $M$  endlich  $P$ -erzeugt ist.

Dualisiert man diesen Satz, so erhält man eine Verallgemeinerung eines Satzes von Johnson und Wong [2].

Beim Beweis, der hier nicht ausgeführt werden soll, ist es zweckmäßig, vom Begriff eines quasi-regulären Untermoduls  $U$  eines Moduls  $M$  Gebrauch zu machen, den wir, da er (wie bei Ringen) selbständiges Interesse besitzt, noch erwähnen wollen.  $U$  heiße quasi-regulärer Untermodul von  $M$ , wenn für jedes Erzeugendensystem  $\langle m_i | i \in \mathfrak{I} \rangle$  von  $M$  und jede Teilmenge  $\langle u_i | i \in \mathfrak{J} \rangle$  von  $U$  auch  $\langle m_i + u_i | i \in \mathfrak{I} \rangle$  Erzeugendensystem von  $M$  ist. Es gilt dann, daß ein Untermodul genau dann quasi-regulär ist, wenn er klein ist und daß daher das Radikal  $Ra(M)$  von  $M$  Summe aller quasi-regulären Untermoduln ist.

#### LITERATUR

- [1] Mares, E. A.: Semi-perfect modules. Math. Zeitschr. **82**, 347-360 (1963).
- [2] Johnson, R. E. and E. T. Wong: Self-injective rings. Can. Math. Bull. **2**, 167-174 (1959).

*München, Mathematisches Institut der Universität  
Swarthmore College, Swarthmore, Pennsylvania*