

Hauteur de Fontaines Retombantes

R. MEHADDI^a, S. VAUX^b, O. VAUQUELIN^a, F. CANDELIER^a

a. Aix-Marseille Université, Laboratoire IUSTI

b. Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire

Résumé :

Dans ce papier nous traitons des fontaines turbulentes Boussinesq en régime permanent. Des simulations numériques de type LES (Large Eddy Simulations) sur le code ISIS développé par l'IRSN sont utilisées afin d'extraire l'évolution des paramètres qui contrôlent la dynamique de l'écoulement. Sur la base de ces observations, un modèle analytique simple basé sur le "Confined Top-Hat Model" est établi et intégré analytiquement. La comparaison entre les résultats théoriques et les expériences trouvées dans la littérature montre un très bon accord pour un nombre de Froude initial supérieur à 1.

Abstract :

The paper deals with steady state turbulent Boussinesq fountains. Numerical simulations of the ISIS code developed by IRSN are used to extract the evolution of the variables which control the flow dynamics. On the basis of these observations, a simple analytical model based on the "Confined Top Hat Model" is established and solved analytically. The comparison between theoretical and experimental results found in the literature shows a good agreement for an initial Froude number greater than 1.

Mots clefs : Fontaine ; Froude ; Hauteur

1 Introduction

On appelle jet à flottabilité négative, ou plus communément fontaine, l'écoulement résultant de l'émission verticale d'un fluide lourd dans un milieu plus léger au repos. Lors de sa phase d'établissement, du fait de sa quantité de mouvement à la source, la fontaine s'étend d'abord verticalement dans le milieu ambiant à la manière d'un jet. Cependant, à cause de la force de flottabilité, la fontaine s'arrête à une certaine hauteur (que l'on notera plus tard H_i pour hauteur initiale) avant de s'effondrer sur elle-même pour former un panache annulaire descendant qui vient entourer l'écoulement ascendant. Il en résulte qu'en régime établi, la fontaine se stabilise à une certaine hauteur (que l'on notera plus tard H_f pour hauteur finale) plus faible que celle atteinte juste avant l'effondrement.

De nombreux auteurs se sont intéressés à la détermination de la hauteur initiale H_i en adaptant le formalisme développé par Morton *et al.* [1] pour les panaches turbulents [2, 3, 4, 5, 6].

La détermination de la hauteur finale H_f est, d'un point de vue théorique, beaucoup plus complexe puisqu'elle résulte de l'interaction entre deux écoulements que le formalisme précédemment cité n'est pas capable d'appréhender.

Certains auteurs ont néanmoins proposé des tentatives de modélisation plus ou moins abouties. McDougall [7] ou Bloomfield & Kerr [5] ont proposé des modèles à deux zones (la zone ascendante et la zone descendante) mais faisant apparaître un nombre important de variables, nécessitant une résolution numérique et ne permettant pas, par ailleurs, de couvrir tous les régimes d'écoulement.

Plus récemment, Carazzo, Kaminski & Tait [8] ont établi un modèle ne traitant que la partie ascendante mais intégrant néanmoins les effets du panache annulaire descendant au travers de conditions aux limites plus physiques.

En s'inspirant de ce travail, nous proposons ici, une approche théorique semblable mais s'appuyant sur des modèles de fermeture différents, calés sur des simulations numériques réalisées avec le code à champ ISIS développé par l'IRSN. Cette approche nous permet également d'obtenir des expressions analytiques pour la hauteur de la fontaine en régime établi.

2 Modélisation de l'écoulement

A partir des équations de Navier-Stokes écrites dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et après application d'une décomposition de Reynolds, nous obtenons à l'ordre principal les équations suivantes :

$$\frac{\partial rwu}{\partial r} + \frac{\partial rw^2}{\partial z} = -rg\eta - \frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial r}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial rw}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial ru\eta}{\partial r} + \frac{\partial rw\eta}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Les équations (1), (2) et (3) représentent respectivement la conservation de la quantité de mouvement, du volume et du déficit de masse volumique. Les variables z , r , w et u sont respectivement les coordonnées verticale et radiale et les vitesses associées, $\overline{w'u'}$ est une tension de Reynolds, ρ est la masse volumique à l'intérieur de la fontaine et ρ_0 est la masse volumique du milieu ambiant. Pour des raisons de clarté, on introduit de plus la variable $\eta = (\rho(z, r) - \rho_0)/\rho_0$ qui correspond au déficit local de densité.

A partir de ces trois équations fondamentales et après quelques manipulations mathématiques inspirées de Carrazzo *et al.* [8], il est possible d'obtenir le modèle ci-dessous :

$$\frac{d(b^2 w_m)}{dz} = 2b w_m (\alpha - \beta Ri), \quad \frac{d(b^2 w_m^2)}{dz} = -g \eta_m b^2 \left(\gamma - \frac{C_d}{Ri} \right), \quad \frac{d(b^2 w_m \eta_m)}{dz} = b w_m \eta_m (k_2 - k_1 Ri), \quad (4)$$

où w_m et η_m sont, respectivement, la vitesse du fluide et le déficit de densité sur l'axe de la fontaine. Le rayon b est défini comme le lieu où s'annule la vitesse radiale (cisaillement entre les parties ascendante et descendante de la fontaine). $Ri = g \eta_m b / w_m^2$ est le nombre de Richardson.

Les constantes du modèle peuvent être définies par les profils de vitesse, de masse volumique et d'une tension de Reynolds et seront par conséquent évaluées à l'aide de simulations numériques. Notons que dans le travail de Carrazzo *et al.* [8], les valeurs des constantes γ , k_2 et C_d sont imposées arbitrairement et valent respectivement 1, 0 et 0.

3 Résolution analytique du modèle

Dans cette section, nous nous proposons de chercher une expression analytique de la hauteur finale de la fontaine à partir du système d'équations (4). En effet, les variables primaires de la fontaine peuvent être exprimées comme suit :

$$\frac{dw_m}{dz} = -\frac{w_m}{b} ((\gamma - 2\beta) Ri + 2\alpha - C_d), \quad (5)$$

$$\frac{db}{dz} = \frac{1}{2} ((\gamma - 4\beta) Ri + 4\alpha - C_d), \quad (6)$$

$$\frac{d\eta_m}{dz} = -\frac{\eta_m}{b} ((K_1 - 2\beta) Ri + 2\alpha - K_2), \quad (7)$$

$$\frac{dRi}{dz} = \frac{Ri}{b} \left(\left(\frac{5}{2} \gamma - 4\beta - K_1 \right) Ri + 4\alpha + K_2 - \frac{5}{2} C_d \right). \quad (8)$$

Afin de simplifier les expressions, nous introduisons les constantes suivantes :

$$\phi = \frac{5}{2} \gamma - 4\beta - K_1, \quad \psi = 4\alpha + K_2 - \frac{5}{2} C_d, \quad A = -(\gamma - 4\beta) \quad ; \quad B = 4\alpha - C_d,$$

ainsi que la fonction fontaine $\Gamma = (\phi/\psi)Ri$.

Ce qui nous permet d'écrire les équations d'évolution du rayon b et de la fonction Γ sous la forme

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \frac{\psi\Gamma}{b}(\Gamma + 1), \quad \frac{db}{dz} = \frac{1}{2} \left(-A\frac{\psi}{\phi}\Gamma + B \right).$$

En combinant les deux dernières expressions nous pouvons exprimer b en fonction de Γ

$$\frac{b}{b_i} = \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_i} \right)^{B/(2\psi)} \left(\frac{\Gamma_i + 1}{\Gamma + 1} \right)^{1/2(A/\phi + B/\psi)}$$

D'une façon analogue, la vitesse et le déficit de densité peuvent être exprimés en fonction de Γ . Ceci conduit à

$$\frac{w_m}{w_{mi}} = \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_i} \right)^{(C_d - 2\alpha)/\psi} \left(\frac{\Gamma_i + 1}{\Gamma + 1} \right)^{(2\beta - \gamma)/\phi + (2\alpha - C_d)/\psi}, \quad \frac{\eta_m}{\eta_{mi}} = \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_i} \right)^{(C_d - 2\alpha)/\psi} \left(\frac{\Gamma_i + 1}{\Gamma + 1} \right)^{(2\alpha - K_2)/\psi + (2\beta - K_1)/\phi},$$

où l'indice i indique les valeurs initiales des différentes grandeurs.

En remplaçant l'expression de b dans l'équation donnant l'évolution de Γ en fonction de z , l'équation d'évolution d'une fontaine turbulente peut être obtenue

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \frac{\psi\Gamma_i^{\omega_1}}{b_i(\Gamma_i + 1)^{\omega_2}} \Gamma^{1-\omega_1} (\Gamma + 1)^{\omega_2+1}, \quad (9)$$

avec $\omega_1 = B/(2\psi)$ et $\omega_2 = \frac{1}{2}(A/\phi + B/\psi)$. Précisons que l'évaluation de Γ en fonction de z permet d'obtenir l'évolution en fonction de z de l'ensemble des variables primaires du problème.

A l'aide de l'équation (9) il est possible d'exprimer la hauteur de la fontaine sous forme intégrale :

$$\frac{H_f}{b_i} = \frac{(\Gamma_i + 1)^{\omega_2}}{\psi\Gamma_i^{\omega_1}} \int_{\Gamma_i}^{\infty} \Gamma^{\omega_1-1} (\Gamma + 1)^{-\omega_2-1} d\Gamma. \quad (10)$$

Dans certains cas (asymptotiques) l'équation (10) peut être simplifiée pour donner des expressions analytiques de la hauteur H_f . Pour une fontaine faible ($\Gamma_i \gg 1$), nous obtenons en première approximation

$$\frac{H_f}{b_i} = \frac{(\Gamma_i + 1)^{\omega_2}}{\psi\Gamma_i^{\omega_1}} \int_{\Gamma_i}^{\infty} \Gamma^{\omega_1-\omega_2-2} d\Gamma = \frac{1}{\psi(\omega_2 - \omega_1 + 1)\Gamma_i}.$$

Notons que cette solution peut être portée à un ordre de précision plus important en utilisant le formalisme des développements asymptotiques raccordés [9] qui permet ici d'écrire la solution

$$\frac{H_f}{b_i} = \frac{(\Gamma_i + 1)^{\omega_2}}{\psi\Gamma_i^{\omega_1}} \frac{\left(\Gamma_i - \frac{1+\omega_2}{\omega_1-\omega_2-2} \right)^{-(\omega_2-\omega_1+1)}}{(\omega_2 - \omega_1 + 1)}.$$

De façon analogue, nous obtenons pour les fontaines forcées ($\Gamma_i \ll 1$) la relation ci-dessous :

$$\frac{H_f}{b_i} = \frac{(\Gamma_i + 1)^{\omega_2}}{\psi\Gamma_i^{\omega_1}} \left(\beta[1 + \omega_2 - \omega_1; \omega_1] - \frac{1}{\omega_1}\Gamma_i^{\omega_1} \right) \quad \text{avec} \quad \beta[x, y] = \int_0^1 (1-z)^{x-1} z^{y-1} dz.$$

4 Simulations numériques

Ayant obtenu les relations donnant la hauteur de la fontaine en fonction du nombre de Froude (ou de Γ_i), il faut maintenant estimer les valeurs des constantes qui interviennent dans le modèle. Dans cette optique des simulations numériques de fontaines turbulentes ont été effectuées avec le code ISIS développé par l'IRSN.

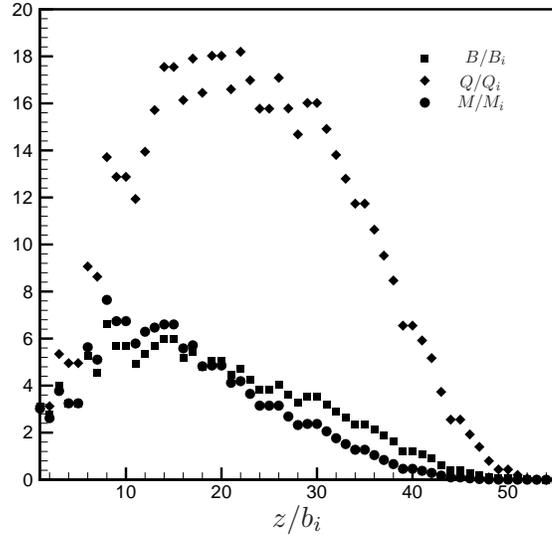


FIGURE 1 – Évolutions verticales de la quantité de mouvement ($M = w_m^2 b^2$), du débit volumique ($Q = w_m b^2$) et du débit de flottabilité ($B = w_m b^2 \eta_m^2$) de la partie ascendante pour $Fr = 23.7$.

ISIS est un code de calcul numérique dédié à la simulation 3D des écoulements turbulents et réactifs faiblement compressibles. Les équations de conservations sont décrites dans le temps en utilisant la méthode des pas fractionnaires. La discrétisation spatiale est basée sur la méthode des éléments finis pour les équations hydrodynamiques et la méthode des volumes finis pour les équations de transport.

Le tableau 1 montre les caractéristiques d'injection des fontaines qui ont été simulées. Nous pouvons remarquer en particulier que les régimes des fontaines forcées et faibles ont tous été testés. Cela nous permettra d'observer la sensibilité au changement de régime d'écoulement, des constantes du modèle.

Fr	w_i (m/s)	b_i (m)	η_i	Re
0.8	0.1931	0.116	0.0526	4025
1.2	0.2530	0.0881	0.0526	3996
1.6	0.3070	0.073	0.0526	4017
3.2	0.4865	0.0458	0.0526	3994
11.9	1.1749	0.019	0.0526	4002
23.7	1.8593	0.0119	0.0526	3966

TABLE 1 – Détails des simulations sur ISIS (la vitesse débitante est donnée par $w_i = (72/91)w_m$).

Nous observons sur la figure (1) que la quantité de mouvement, le débit volumique et le débit de flottabilité passent par un maximum dans leurs évolutions verticale. L'augmentation du débit volumique Q est dû à un accroissement de l'entraînement lié à une intensification des transferts turbulents entre les parties ascendante et descendante de la fontaine [10]. Cet accroissement de débit volumique Q induit une augmentation de la quantité de mouvement M de la partie ascendante de la fontaine. De surcroît la stratification imposée par la partie descendante de la fontaine sur la partie ascendante, atténue la réduction de la vitesse due principalement à la force de flottabilité. L'addition de ces deux phénomènes explique l'augmentation de la quantité de mouvement M dans la zone proche de la source ($z \ll H_f$).

On remarque aussi que le débit de flottabilité B et la quantité de mouvement M atteignent leur valeur maximale à la même altitude. Ceci est dû au fait que le terme $(K_2 - K_1 Ri)$ devient négatif à la même altitude que le terme $(\gamma - \frac{C_d}{Ri})$. Nous en déduisons que l'influence de la partie descendante sur la

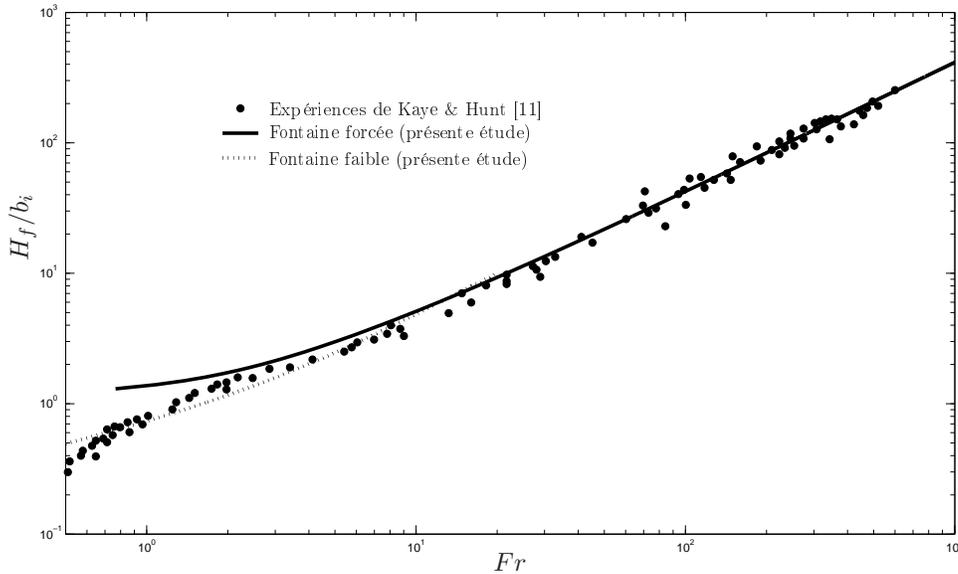


FIGURE 2 – Comparaison des corrélations théoriques obtenues dans la présente étude avec les données expérimentales existantes dans la littérature.

stratification se manifeste au travers du nombre K_2 et C_d . Quant à la décroissance du débit volumique Q , elle est principalement due au paramètre β qui montre que la partie ascendante est entraînée par la partie descendante. Le fait que tous ces paramètres soient fonctions du nombre de Richardson local (qui tend vers l'infini au sommet de la fontaine) montre pourquoi la décroissance de la quantité de mouvement est rapide et donc donne lieu à une hauteur de fontaine plus faible que la hauteur initiale de la fontaine.

Notons enfin que les paramètres du modèle théorique sont considérés constants, mais les simulations numériques montrent qu'ils varient fortement au voisinage de la source et au sommet de la fontaine. Ils sont cependant approximativement constants dans la région centrale de la fontaine où les profils sont auto-similaires. Ces observations permettent de conclure qu'en première approximation, le modèle reproduit de manière satisfaisante les phénomènes mis en jeu et explique pourquoi la hauteur finale d'une fontaine est plus faible que sa hauteur initiale. Des conclusions analogues peuvent être tirées pour les fontaines faibles ($Fr < 3$), pour lesquelles les valeurs des constantes du modèle théorique sont plus faibles.

En faisant la moyenne des valeurs des constantes du modèle dans la région centrale de la fontaine où les profils sont auto-similaires, nous obtenons les valeurs indiquées dans le tableau 2.

	α	β	γ	C_d	K_1	K_2
Fontaine forcée	0.27	1.31	3.3	0.267	2.88	0.4
Fontaine faible	0.2	0.3	1.2	0.1	1.1	0.2

TABLE 2 – Valeurs moyennes des constantes du modèle.

Finalement, en remplaçant ces constantes dans les expressions obtenues dans la section 2, on peut

d'exprimer la hauteur finale de la fontaine en fonction du nombre de Froude comme suit :

$$\frac{H_f}{b_i} = \left(2.42 - \frac{1.53}{Fr^2}\right) \left(\frac{0.33}{Fr^2} + 1\right)^{2.64} Fr \quad \text{Fontaines Forcées} \quad (11)$$

$$\frac{H_f}{b_i} = \frac{27.55 (29 + 50 Fr^2)^{\frac{7}{15}}}{(58 + 73 Fr^2)} Fr^2 \quad \text{Fontaines Faibles} \quad (12)$$

avec le nombre de Froude densimétrique :

$$Fr = \sqrt{\frac{w_i^2}{g\eta_i b_i}}$$

où w_i est la vitesse débitante à la source basée sur un profil de vitesse turbulent, b_i le rayon de la source et η_i le déficit de densité à la source. On peut constater sur la figure (2) qui présente la comparaison des relations théoriques avec les données expérimentales de Baines & Turner [4] et numérique de Lin & Armfield [3] rapporté par Kaye & Hunt [11] un accord satisfaisant.

5 Discussion et Conclusion

Nous avons étudié théoriquement et numériquement les fontaines turbulentes en régime établi. Le modèle théorique présenté ici explique comment la partie descendante de la fontaine réduit la hauteur finale de la fontaine. En effet, outre le paramètre de stratification mis en évidence par Carazzo, Kaminski & Tait [8], deux paramètres supplémentaires ont été introduit dans l'équation de quantité de mouvement. Ces derniers traduisent l'effet des forces volumiques induites par la partie descendante de la fontaine sur la partie ascendante.

Le modèle théorique reproduit aussi de façon acceptable le comportement moyen du débit volumique, de la quantité de mouvement et du débit de flottabilité. La limitation vient du fait qu'il dépend de six paramètres traduisant chacun un effet sur l'évolution de ces flux. Ces paramètres ont été estimés à partir de simulations numériques effectuées sur le logiciel ISIS développé par l'IRSN. Finalement, des relations nouvelles pour la hauteur de la fontaine retombante ont été obtenues.

Références

- [1] Morton, B. R., Taylor, G. I. and Turner, J. S. 1956 Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources. *Proc. R. Soc. Lond. A* **234**, 1-23.
- [2] Turner, J. S. 1966 Jets and plumes with negative or reversing buoyancy. *J. Fluid Mech.* **26**, 779-792.
- [3] Lin, W. & Armfield, S. W. 2000 Direct simulation of of weak axisymmetric fountains in a homogeneous fluid. *J. Fluid Mech.* **403**, 67-88.
- [4] Baines, W. D., Turner, J. S. & Campbell I. H. 1990 Turbulent fountains in an open chamber. *J. Fluid Mech.* **212**, 557-592.
- [5] Bloomfield, L. J. & Kerr, R. C. 2000 A theoretical model of a turbulent fountain. *J. Fluid Mech.* **424**, 197-216.
- [6] Mehaddi, R., Vauquelin, O. & Candelier F. 2012 Analytical solutions for Boussinesq fountains in a linearly stratified environment. *J. Fluid Mech.* **691**, 487-497.
- [7] McDougall, T. J. 1981 Negatively buoyant vertical jets. *Tellus* **33**, 313-320.
- [8] Carazzo, G., Kaminski, E. & Tait, S. 2010 The rise and fall of turbulent fountains : a new model for improved quantitative predictions. *J. Fluid Mech.* **657**, 265-284.
- [9] Candelier, F., & Vauquelin, O. 2012 Matched asymptotic solutions for turbulent plumes. *J. Fluid Mech.* **699**, pp 489-499
- [10] Kaminski, E., Tait, S. & Carazzo, G. 2005 Turbulent entrainment in jets with arbitrary buoyancy. *J. Fluid Mech.* **526**, 361-376.
- [11] Kaye, N. B. & Hunt, G. R. 2006 Weak fountains. *J. Fluid Mech.* **558**, 319-328.