



Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Magistrale in Scienze Fisiche

Anno Accademico 2012/2013

Tesi di Laurea Magistrale

Teoria di Gauge Abeliana di Chern-Simons,  
Integrale Funzionale e Invarianti di 3-Varietà

Candidato:

Daniele Palla

Relatore:

Prof. Enore Guadagnini

*Ai miei genitori.*

*Libero come un uccellino, eh?*

*Te ne vai dove ti pare, con chi ti pare.*

*Quando uno è troppo libero, si mette in qualche guaio, tu che ne dici?*

(Max Cady, Cape Fear, 1991)

# Indice

<b>1</b>	<b>Aspetti Generali della Teoria di Chern-Simons</b>	<b>1</b>
1.1	Introduzione . . . . .	1
1.2	Azione di Chern-Simons in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	2
1.3	Contenuto in Particelle . . . . .	3
1.4	Link e Invarianti Topologici . . . . .	3
1.5	La Teoria di Chern-Simons su 3-Varietà $\mathcal{M}$ . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Nozioni di Teoria dei Nodi</b>	<b>7</b>
2.1	Isotopia Ambiente e Regolare . . . . .	7
2.2	Nodi su Toro Solido . . . . .	9
2.3	Framing e Nastri . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Teoria Abeliana in <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>14</b>
3.1	Propagatori . . . . .	14
3.2	Funzionali Generatori . . . . .	17
3.3	Operatori di Wilson . . . . .	20
3.4	Integrale di Gauss . . . . .	22
3.5	Autoallacciamento e Framing . . . . .	25
3.6	Calcolo delle Osservabili I . . . . .	27
3.7	Calcolo delle Osservabili II . . . . .	30
3.8	Proprietà delle Osservabili . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Chirurgia su 3-Varietà <math>\mathcal{M}</math></b>	<b>36</b>
4.1	Chirurgia di Dehn in $S^3$ . . . . .	36
4.2	Chirurgia Elementare e Link Reali in $\mathcal{M}$ . . . . .	39
4.3	Chirurgia e Teoria di Chern-Simons . . . . .	40
4.4	Operatori di Chirurgia . . . . .	41
	4.4.1 Esempi di Calcolo . . . . .	46
4.5	Invariante Abeliano di Reshetikhin–Turaev . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Connessione su 3-Varietà <math>\mathcal{M}</math></b>	<b>51</b>
5.1	Fibrato Principale . . . . .	51
5.2	Aspetti Generali della Connessione in $\mathcal{M}$ . . . . .	53
5.3	Classi di Deligne-Beilinson [27] . . . . .	57
5.4	Presentazione della Connessione in $\mathcal{M}$ . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Teoria di Chern-Simons in <math>\mathcal{M}</math></b>	<b>64</b>
6.1	Azione di CS in $\mathcal{M}$ . . . . .	64
6.2	Classi Distribuzionali di Deligne-Beilinson . . . . .	66
6.3	Integrale Funzionale e Regole di Calcolo . . . . .	69
6.4	Varietà $\mathcal{M}$ di pura Torsione . . . . .	72
	6.4.1 Funzione di Partizione . . . . .	72
	6.4.2 Presentazione dei Link $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ . . . . .	76
	6.4.3 Valori di Aspettazione . . . . .	82
6.5	Varietà $\mathcal{M}$ Prive di Torsione . . . . .	87
	6.5.1 Funzione di Partizione . . . . .	87

6.5.2	Valori di Aspettazione . . . . .	91
6.6	Generiche 3-Varietà $\mathcal{M}$ . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Esempi di Calcolo</b>	<b>99</b>
7.1	Forme Quadratiche di Torsione . . . . .	99
7.2	Funzione di Partizione . . . . .	104
7.3	Calcolo di $ \mathcal{Z}(\mathcal{M}) $ . . . . .	108
7.4	Valori di Aspettazione . . . . .	110
<b>8</b>	<b>Appendice</b>	<b>116</b>
8.1	Primo Gruppo di Omologia $H_1(\mathcal{M})$ e Link di Chirurgia . . . . .	116
8.2	Forma Quadratica di Torsione . . . . .	124

# 1 Aspetti Generali della Teoria di Chern-Simons

## 1.1 Introduzione

In fisica, una teoria di gauge è una teoria di campo in cui la lagrangiana è invariante sotto un gruppo continuo di trasformazioni locali, dette trasformazioni di gauge. Nello spazio di Minkowski, ad ogni generatore dell'algebra di Lie del gruppo di gauge corrisponde un campo vettoriale, detto campo di gauge, che descrive, una volta quantizzato, delle particelle elementari: i bosoni di gauge. Le teorie di gauge occupano, in fisica, un ruolo di primo piano, in quanto la dinamica delle particelle elementari sembra essere ben descritta da una teoria di gauge in cui il gruppo di gauge (non abeliano) è dato da  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ . In generale, nella descrizione dei fenomeni elementari, i bosoni di gauge (fotoni, gluoni, bosone  $Z^0$ , bosone  $W^\pm$ ) sono i "portatori di forza" responsabili delle interazioni. In futuro, tuttavia, potrebbero diventare interessanti delle teorie di gauge definite in varietà differenti dallo spazio di Minkowski; in questa tesi vogliamo studiarne un particolare esempio, con simmetria locale di gauge  $U(1)$ .

Naturalmente, non tutti i modelli di teorie di gauge sono associati a sistemi fisici esistenti. In questo lavoro ci occuperemo della teoria di campo di Chern-Simons ( $CS$ ), una teoria di gauge che non descrive un insieme di particelle, e le osservabili corrispondono ad invarianti topologici. Alcune applicazioni più o meno dirette di questo modello si possono trovare in fluidodinamica [1], studio dei polimeri [2], biologia [3], gravità  $(2+1)$  [4, 5, 6].

La teoria di  $CS$  può essere risolta esattamente non solo in  $\mathbb{R}^3$  (o  $S^3$ ), ma in qualsiasi 3-varietà  $\mathcal{M}$  chiusa ed orientata. Questo risultato può essere ottenuto in due differenti modi. Nel primo si utilizza un metodo combinatorico basato sulla chirurgia di Dehn, attraverso il quale è possibile ricostruire i valori di aspettazione in  $\mathcal{M}$  a partire dai risultati noti in  $\mathbb{R}^3$ . Il secondo è l'approccio fisico standard, nel quale si danno i campi, l'azione e le regole per l'integrazione funzionale in  $\mathcal{M}$ . Mostriamo che i risultati sono equivalenti.

I motivi che ci spingono a considerare la teoria di campo di  $CS$  sono sostanzialmente due. In primo luogo, la teoria di  $CS$  permette di calcolare invarianti topologici delle 3-varietà ed i valori di allacciamento definiti nelle 3-varietà. Per questo motivo, la teoria può essere considerata come un modello giocattolo attraverso il quale si possono sviluppare tecniche di calcolo utili a evidenziare aspetti topologici nella fisica di bassa energia e nei materiali di stato solido. In secondo luogo, nella teoria di  $CS$ , è possibile effettuare il calcolo esatto dell'integrale funzionale in maniera non perturbativa. Da una parte, questo permette di superare i problemi connessi con la procedura di gauge fixing. D'altra parte, è possibile effettuare il calcolo dei valori medi anche in quelle 3-varietà in cui il propagatore di Feynman per i campi non esiste a causa della presenza di modi zero. Naturalmente, i risultati ottenuti sono in accordo con lo sviluppo perturbativo nei casi in cui la teoria perturbativa è ben definita.

In questo primo capitolo introduttivo discuteremo alcuni aspetti generali della teoria come le proprietà dell'azione, contenuto in particelle, anticipando alcuni risultati sui valori d'aspettazione. Il secondo capitolo ha lo scopo di introdurre alcune nozioni di base di teoria dei nodi che ritroveremo per tutto il resto del lavoro. Nel terzo capitolo studieremo la teoria in  $\mathbb{R}^3$  utilizzando i metodi standard delle teorie di campo; in particolare calcoleremo i propagatori e i funzionali generatori per le funzioni di correlazione dei campi  $A_\mu$  e della curvatura  $F_{\mu\nu}$ . Il significato delle osservabili sarà inoltre discusso, e ne calcoleremo il valore d'aspettazione sia utilizzando uno sviluppo perturbativo, che un approccio non perturbativo. A partire dal quarto capitolo, ci dedicheremo all'estensione della teoria in varietà  $\mathcal{M}$  differenti da  $\mathbb{R}^3$  iniziando a discutere la chirurgia di Dehn. In particolare, mostriamo brevemente come sia possibile risolvere la teoria in  $\mathcal{M}$  utilizzando i risultati noti

in  $\mathbb{R}^3$  (o  $S^3$ ). Il quinto capitolo sarà interamente dedicato allo studio delle connessioni di gauge  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{M}$  mediante l'utilizzo della nozione di fibrato. Alla fine, vedremo che sarà possibile esprimere  $\mathcal{A}$  in termini di classi di Deligne-Beilinson. Il sesto capitolo rappresenta la parte più importante di questo lavoro di tesi. Il funzionale d'azione di *CS* viene esteso da  $\mathbb{R}^3$  ad una 3-varietà generica  $\mathcal{M}$ . Viene studiata la struttura dello spazio delle configurazioni, ovvero delle orbite di gauge, per le connessioni  $U(1)$ . L'integrazione funzionale è modellata sulla struttura delle orbite di gauge e si mostra che l'integrale funzionale assume la forma di una somma di integrali funzionali sulle 1-forme in presenza di configurazioni di background, che sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi del primo gruppo di omologia di  $\mathcal{M}$ . Calcoleremo esplicitamente sia le funzioni di partizioni normalizzate che i valori di aspettazione utilizzando unicamente l'integrazione funzionale in una generica varietà. In particolare vedremo come sia possibile ottenere invarianti per 3-varietà direttamente dall'integrazione funzionale. L'ultimo capitolo è destinato agli esempi, e confronteremo l'equivalenza dei risultati ottenuti con l'integrazione funzionale e ottenuti mediante metodi combinatorici.

## 1.2 Azione di Chern-Simons in $\mathbb{R}^3$

La teoria Chern-Simons (*CS*), può essere introdotta a partire dall'azione, che nel caso abeliano è definita da [7]

$$S(A) = 2\pi k \int A \wedge dA, \quad (1)$$

dove l'integrazione è estesa (per adesso) ad  $\mathbb{R}^3$ . Nell'espressione (1),  $A = A_\mu(x) dx^\mu$  è una 1-forma differenziale (connessione) definita sul dominio di integrazione, mentre  $dA = \partial_\mu A_\nu(x) dx^\mu \wedge dx^\nu$  è la derivata esterna di  $A$ . Sfruttando l'anticommutatività del prodotto wedge  $dx_\mu \wedge dx_\nu = -dx_\nu \wedge dx_\mu$ , è possibile riscrivere l'espressione (1) nella forma

$$S(A) = 2\pi k \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu(x) \partial_\nu A_\rho(x), \quad (2)$$

dove il tensore  $\epsilon^{\mu\nu\rho}$  è quello completamente antisimmetrico di Levi-Civita con indici tridimensionali. La costante adimensionale  $k$  è un qualsiasi numero reale diverso da zero. Più avanti si mostrerà che l'invarianza di gauge in  $\mathcal{M}$  generico richiede che  $k$  sia intero.

L'azione (2) è invariante sotto trasformazioni di gauge con gruppo abeliano  $U(1)$ . Si ha infatti:

$$A_\mu^\Lambda(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (3)$$

$$S(A^\Lambda) = S(A) - 2\pi k \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \Lambda(x) \partial_\mu \partial_\nu A_\rho(x) = S(A), \quad (4)$$

dove si è sfruttata l'antisimmetria del tensore di Levi-Civita. L'azione di *CS* è data dall'integrazione di una 3-forma su una 3-varietà ( $\mathbb{R}^3$ ), ed è per questo indipendente dalla parametrizzazione della varietà. Gli integrali (1) e (2) sono quindi invarianti sotto diffeomorfismi delle coordinate. Questa

proprietà viene chiamata *covarianza in senso generale*, e viene realizzata in questa teoria in modo assai più semplice di quanto avvenga in relatività generale. In relatività generale la metrica è una variabile dinamica, mentre l'azione (1) o (2) non dipende affatto dalla metrica eventualmente introdotta in  $\mathbb{R}^3$  o in  $\mathcal{M}$ . Siccome l'azione di *CS* non dipende dalla metrica, nella teoria di *CS* non è definito il concetto di distanza tra due punti nello spazio. Da queste prime osservazioni, risulta ben chiaro come la teoria di *CS* si discosti dalle usuali teorie di gauge. In particolare, la mancanza di una nozione di distanza tra due punti, rende la teoria di *CS* particolarmente adatta a descrivere invarianti topologici [7, 1].

### 1.3 Contenuto in Particelle

La teoria di *CS* non descrive particelle nel senso usuale del termine [7, 8]. Questo può essere verificato considerando, per esempio, il tensore energia-impulso. Il tensore  $T^{\mu\nu}$  nella forma direttamente simmetrica è definito da  $T_{\mu\nu} = 2/\sqrt{g} \cdot \delta S/\delta g^{\mu\nu}$ , dove  $g_{\mu\nu}$  rappresenta il tensore metrico. Poiché l'azione di *CS* non dipende affatto dalla metrica, segue che

$$T^{\mu\nu} = 0. \quad (5)$$

Il tensore energia impulso è la corrente di Noether associata all'invarianza per traslazioni dell'azione. In questo caso, le cariche conservate associate a questa simmetria esistono, ma sono tutte nulle. Questo rispecchia precisamente la natura topologica del modello, e mostra che il suo contenuto in particelle è vuoto.

Un altro modo di vedere questo aspetto è quello di considerare le equazioni del moto. Eseguendo la variazione sull'azione (1), quello che si trova è

$$0 = \frac{\delta}{\delta A_\gamma(x)} (2\pi k) \int d^3y \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu(y) \partial_\nu A_\rho(y) = 2\pi k \epsilon^{\gamma\nu\rho} F_{\nu\rho}(x), \quad (6)$$

dove  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  è la curvatura. L'espressione (6) mostra che non vi sono gradi di libertà fisici nella teoria, in quanto l'equazione del moto elimina anche la parte trasversa della connessione  $A_\mu$ . Questo è in accordo con quanto dedotto dall'equazione (5).

### 1.4 Link e Invarianti Topologici

È possibile utilizzare la teoria di *CS* per il calcolo di invarianti topologici [5, 7]. Per fare questo si considerano particolari osservabili, scelte in modo tale da essere invarianti di gauge ed invarianti sotto diffeomorfismi delle coordinate. A partire dalla connessione abeliana  $A_\mu$ , possiamo costruire un'osservabile di questo tipo considerando:

$$W(C_1, \dots, C_n) = e^{i[\oint_{C_1} A + \dots + \oint_{C_n} A]}, \quad (7)$$

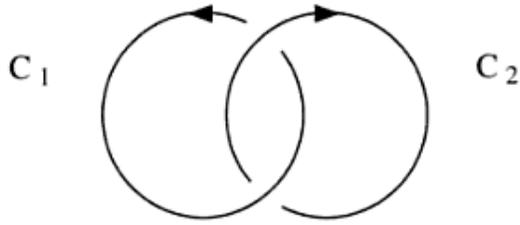


Figura 1: Esempio di link a due componenti. Da [7].

dove  $C_1, \dots, C_n$  sono dei cammini chiusi ed orientati non intersecanti (dei nodi). D'ora in avanti, utilizzeremo il termine "link" per indicare un insieme di nodi.

L'espressione (7) è invariante di gauge poiché ogni nodo rappresenta un cammino chiuso, e non dipende neppure dalla parametrizzazione, in quanto all'esponente troviamo una somma di integrali di 1-forme su 1-varietà. Se consideriamo un link di due sole componenti, come quello mostrato in figura (1), il valore di aspettazione dell'espressione (7) coincide con [7]

$$\left\langle e^{i[\oint_{C_1} A + \oint_{C_2} A]} \right\rangle = e^{-i\frac{1}{8\pi k}\chi(C_1, C_2)}, \quad (8)$$

dove  $\chi(C_1, C_2)$  è il numero di allacciamento di  $C_1$  e  $C_2$ , e prende valori interi che coincidono con gli avvolgimenti di un nodo rispetto all'altro. Nell'esempio mostrato in figura (1) si ha  $\chi(C_1, C_2) = +1$ , ma l'espressione (8) vale in generale per qualsiasi link a due componenti<sup>1</sup>. Nel caso di link più complessi, dotati cioè di un numero maggiore di componenti, il valore  $\langle W(C_1, \dots, C_n) \rangle$  dipende ancora esclusivamente da  $\chi(C_i, C_j)$  con  $i \neq j$ .

Il numero di allacciamento  $\chi(C_i, C_j)$  ( $i \neq j$ ) è una proprietà intrinseca del link, e non cambia se deformiamo con continuità una qualsiasi componente  $C_i$ . In altre parole, il valore d'aspettazione (8) rappresenta un invariante topologico tipico della teoria dei nodi. L'osservabile (7) è chiamato loop di Wilson e rappresentata, come vedremo, un insieme completo di osservabili [7]. Se lo spazio di base è dato da  $\mathbb{R}^3$ , essenzialmente, non ci sono altre quantità interessanti da calcolare oltre ai valori di aspettazione dei loop di Wilson, per cui possiamo limitarci a:

$$\text{osservabili} \iff \text{valori medi dei loop di Wilson} \quad \text{in } \mathbb{R}^3. \quad (9)$$

Se lo spazio di base non è  $\mathbb{R}^3$ , ma una generica 3-varietà chiusa ed orientata, è possibile utilizzare la teoria di CS per calcolare un altro tipo di invarianti topologici, non legati ai link, ma alla varietà [7, 9, 10].

<sup>1</sup>Nella soluzione (8), non si sono considerati i termini di "autointerazione" dovuti al prodotto di integrali sullo stesso cammino. Questi termini saranno discussi più avanti.

## 1.5 La Teoria di Chern-Simons su 3-Varietà $\mathcal{M}$

L'azione di  $CS$  (1) è definita in  $\mathbb{R}^3$ . Siamo interessati ad estendere la teoria ad una qualsiasi 3-varietà  $\mathcal{M}$  chiusa ed orientata. Grazie alla natura topologica del modello, è possibile utilizzare i valori di aspettazione calcolati in  $\mathbb{R}^3$  per determinare i valori di aspettazione in  $\mathcal{M}$ . Similmente a  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathbb{R}^3}$ , anche il valore  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$  è un invariante del link  $\mathcal{L}$ , con la differenza che  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ . Operativamente, è possibile ricostruire il valore  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$  sfruttando alcune simmetrie ed utilizzando i risultati noti in  $\mathbb{R}^3$  (o  $S^3$ ). Queste simmetrie sono legate alla possibilità di costruire qualsiasi 3-varietà chiusa ed orientata  $\mathcal{M}$  a partire da tori solidi. Siccome  $S^3$  può essere immaginato come unione di due tori solidi, i valori di aspettazione degli operatori di Wilson in tori solidi sono sotto controllo. Il meccanismo che discuteremo, attraverso il quale è possibile “costruire”  $\mathcal{M}$  a partire da tori solidi è chiamato *chirurgia di Dehn*, e consiste “nell’incollare” un certo numero di tori solidi identificando opportunamente i loro bordi.

Qualsiasi link  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$  ammette una descrizione chirurgica, e può essere rappresentato come un link  $L \subset S^3$  più un link speciale  $\mathcal{L}_s(\mathcal{M}) \subset S^3$ , detto di chirurgia. Il link di chirurgia è legato alla varietà ed è connesso con una serie di simmetrie. Alla fine [11]:

$$\text{link } \mathcal{L} \text{ in } \mathcal{M} \sim \text{link } L \text{ in } S^3 + \text{link chirurgico } \mathcal{L}_s(\mathcal{M}) \text{ in } S^3. \quad (10)$$

La chirurgia di Dehn permette di collegare lo studio delle 3-varietà allo studio di opportuni link in  $S^3$ ; per questo motivo l'utilizzo della chirurgia di Dehn risulta conveniente. Nel contesto della teoria di campo, si possono introdurre degli operatori di chirurgia  $\hat{S}(\mathcal{L}_s)$  che agiscono sui valori d'aspettazione in  $S^3$  mimando l'effetto del link  $\mathcal{L}_s(\mathcal{M})$  su  $L$ . In generale abbiamo [7]:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{\langle W(L) \hat{S}(\mathcal{L}_s) \rangle_{S^3}}{\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \rangle_{S^3}}, \quad (11)$$

dove il denominatore dipende solo dalla varietà. Il grande vantaggio della rappresentazione (11) sta nel fatto che i valori di aspettazione in  $\mathcal{M}$  sono ottenuti a partire dai risultati noti in  $S^3$  (o  $\mathbb{R}^3$ ). D'altra parte, questo “trucco” suggerisce che la teoria è risolubile in  $\mathcal{M}$ ; definendo opportunamente campi, azione ed integrazione funzionale su  $\mathcal{M}$  dovremmo riottenere il risultato (11). Questo, dal punto di vista fisico è più interessante, in quanto l'integrale funzionale è uno strumento fondamentale in ogni teoria di campo.

Come vedremo, anche l'approccio “fisico” basato sull'integrale funzionale può essere pienamente realizzato. L'azione di  $CS$  viene definita da [12]

$$S_{CS}[\mathcal{A}] = 2\pi k \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\mathcal{A}], \quad (12)$$

dove  $[\mathcal{A}]$  sono le classi di Deligne Beilinson associate alla connessione  $\mathcal{A}$  su  $\mathcal{M}$ , mentre “\*” denota il prodotto di Deligne-Beilinson. L'azione (12) generalizza la teoria di  $CS$  a qualsiasi 3-varietà  $\mathcal{M}$  chiusa ed orientata. Vale inoltre

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{\int_{\mathcal{M}} D[\mathcal{A}] e^{iS_{CS}[\mathcal{A}]} W(\mathcal{L})}{\int_{\mathcal{M}} D[\mathcal{A}] e^{iS_{CS}[\mathcal{A}]}} \quad (13)$$

Oltre ai valori di aspettazione (13), è possibile calcolare invarianti legati alla varietà. Dal punto di vista chirurgico-combinatorio, questi invarianti sono proporzionali al denominatore dell'espressione (11), e sono dati da

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}) = G(\mathcal{L}_s) \left\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \right\rangle_{S^3}, \quad (14)$$

dove  $G(\mathcal{L}_s)$  è una costante che dipende dal link di chirurgia. L'invariante  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$  è chiamato invariante abeliano di Reshetikhin-Turaev, e può essere calcolato direttamente a partire dal link di chirurgia. In questo senso, l'espressione (14) non è legata alla teoria di campo  $CS$ .

D'altra parte, confrontando le espressioni (11), (13) e (14), è lecito attendersi che qualche invariante  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$  della 3-varietà  $\mathcal{M}$  possa essere ottenuto tramite integrazione funzionale in  $\mathcal{M}$ . Più precisamente

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = N_0^{-1}(\mathcal{M}) \int_{\mathcal{M}} D[\mathcal{A}] e^{iS_{CS}[\mathcal{A}]} \quad (15)$$

rappresenta la funzione di partizione normalizzata calcolata mediante integrazione su  $\mathcal{M}$ . Questo è esattamente quello che succede; infatti mostreremo che

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = P(\mathcal{M}) \mathcal{I}(\mathcal{M}), \quad (16)$$

dove la costante  $P(\mathcal{M})$  dipende dal gruppo di omologia della varietà. In particolare, se  $\mathcal{M}$  è una 3-varietà di pura torsione vale [10]

$$P(\mathcal{M}) = (p_1 p_2 \dots p_n)^{\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

dove gli interi  $p_i$  sono i numeri di torsione. Similmente, se  $\mathcal{M}$  ha gruppo di omologia liberamente generato abbiamo

$$P(\mathcal{M}) = \left( \frac{1}{2k} \right)^{\frac{n}{2}}, \quad (18)$$

dove  $k$  è la costante d'accoppiamento, mentre  $n$  è il numero di generatori del gruppo di omologia (detto anche primo numero di Betti).

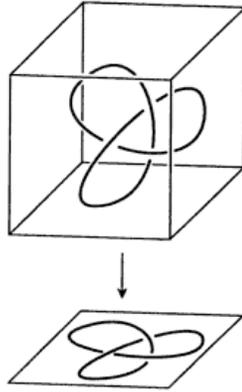


Figura 2: Diagramma del nodo trifoglio.

## 2 Nozioni di Teoria dei Nodi

### 2.1 Isotopia Ambiente e Regolare

Definiamo un nodo come una curva semplice, chiusa, ed orientata  $C$  in  $\mathbb{R}^3$  [11]. Allo stesso modo, un link  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3$  è dato dall'unione di un certo numero di nodi non intersecanti tra loro  $\mathcal{L} = C_1 \cup \dots \cup C_n$ . D'ora in avanti, specificheremo un link attraverso la seguente notazione:  $\mathcal{L} = \{C_1, \dots, C_n\}$ .

È possibile associare ad ogni link  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3$  un diagramma, che si ottiene proiettando  $\mathcal{L}$  su un piano avendo cura di specificare sopra/sotto in corrispondenza degli incroci. Un esempio è mostrato in figura (2), dove è rappresentato il diagramma del nodo “trifoglio”. Per non avere ambiguità è necessario proiettare il link in modo da avere incroci singoli; formati cioè da due sole linee come mostrato in figura (3). Poiché questo è sempre possibile, possiamo sempre associare al link  $\mathcal{L}$  il relativo diagramma  $D_{\mathcal{L}}$ . Dal punto di vista grafico, un diagramma è formato da un certo numero di archi  $\{\alpha_i\}$   $i = 1, \dots, m$ . Se  $m = +\infty$ , il link si dice “selvaggio”; per ipotesi non considereremo link di questo tipo.

Due link  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  sono legati da isotopia ambiente  $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$  se possono essere deformati con continuità l'uno nell'altro. Intuitivamente, se  $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$  il link è lo stesso dal punto di vista topologico. Dato che siamo interessati alle sole proprietà topologiche dei link, le grandezze davvero rilevanti sono rappresentate dalle classi di equivalenza di isotopia ambiente.

Si può dimostrare [11] che  $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$  se e solo se i rispettivi diagrammi possono essere trasformati l'uno nell'altro con una sequenza finita di mosse di Reidemesiter. Le mosse sono mostrate in figura (4), e rappresentano le parti dei diagrammi associate alle operazioni fondamentali di deformazione sui link.

È utile introdurre inoltre il concetto di isotopia regolare. Due diagrammi  $D_1, D_2$  sono legati tra loro da isotopia regolare se è possibile ottenere uno dall'altro soltanto con mosse di II e III tipo. Una grandezza invariante di isotopia regolare è il writhe, definito da

$$w(D_{\mathcal{L}}) = \sum_p \epsilon(p), \quad (19)$$

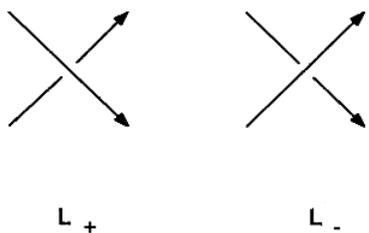


Figura 3: Incroci possibili in un diagramma. Da [7].

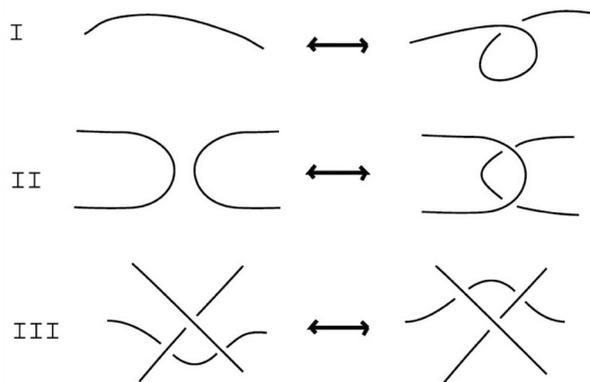


Figura 4: Mosse di Reidemeister. Da [33].

dove  $\epsilon(p)$  prende valore su ogni incrocio, e vale convenzionalmente  $\epsilon(L_{\pm}) = \pm 1$ , dove  $L_{\pm}$  è mostrato in figura (3). Verificare che il writhe è un invariante di isotopia regolare è immediato, ed è sufficiente notare che le mosse di tipo II e III non modificano il numero  $\#(L_+ - L_-)$  di incroci dei diagrammi. Consideriamo un generico link  $\mathcal{L} = \{C_1, C_2\}$  di due componenti, ed indichiamo con  $D_{\mathcal{L}}, D_1, D_2$  i relativi diagrammi. Come si è visto  $w(D_{\mathcal{L}}), w(D_1), w(D_2)$  sono invarianti di isotopia regolare. Poiché  $\mathcal{L} = C_1 \cup C_2$ , una mossa di I tipo modifica il writhe come  $\Delta w(D_{\mathcal{L}}) = \Delta[w(D_1) + w(D_2)] = \pm 1$ . Per questo motivo, la combinazione

$$\chi(C_1, C_2) = \frac{1}{2} [w(D_{\mathcal{L}}) - w(D_1) - w(D_2)] \quad (20)$$

è un invariante di isotopia ambiente per il link  $\mathcal{L}$ . La grandezza  $\chi(C_1, C_2)$  è chiamata numero di allacciamento, e conta il numero di volte con cui  $C_1$  si avvolge attorno a  $C_2$  e viceversa. Naturalmente, il numero di allacciamento non specifica univocamente le classi di equivalenza di isotopia ambiente di  $\mathcal{L}$ . In altre parole, due link inequivalenti possono avere il medesimo numero di allacciamento. Alternativamente [11], è possibile calcolare il numero di allacciamento a partire dal link  $\mathcal{L} = C_1 \cup C_2 \subset \mathbb{R}^3$  in modo analitico, utilizzando l'integrale di Gauss:

$$\chi(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{(x-y)^\rho}{|x-y|^3}, \quad (21)$$

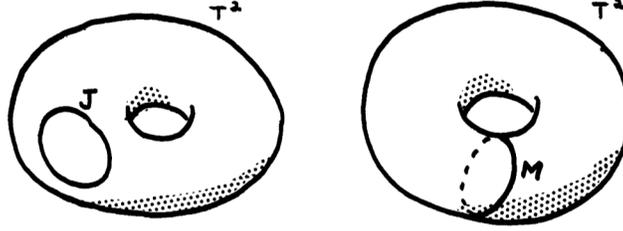


Figura 5: Due nodi torici inequivalenti in  $T^2$ ; si ha infatti  $[J] = (0, 0)$ ,  $[M] = (0, 1)$ . Da [11].

dove  $|x - y|$  è l'usuale distanza euclidea. L'espressione (21) dipende dalla metrica, ma il valore numerico dell'integrale  $\chi(C_1, C_2)$  non ne dipende, e dà come risultato proprio il numero di avvolgimento. L'integrale di Gauss mostra come sia possibile ottenere invarianti di isotopia ambiente integrando direttamente opportune espressioni sui link in  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.2 Nodi su Toro Solido

Dato che ci sarà utile in seguito, è conveniente discutere alcuni aspetti legati ai nodi definiti sul toro bidimensionale e nel toro solido.

Iniziamo considerando un toro 2-D,  $T^2 = S^1 \times S^1$  (rappresentato in figura (5)), dove  $S^1$  è il cerchio unitario. I punti di  $T^2$  possono essere identificati in termini di variabili complesse come  $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$  dove  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ . Consideriamo le funzioni  $\mu, \lambda : S^1 \rightarrow T^2$  definite da:

$$\begin{cases} \lambda : e^{i\Phi} \rightarrow (e^{i\Phi}, 1) & \text{longitudine} \\ \mu : e^{i\Phi} \rightarrow (1, e^{i\Phi}) & \text{meridiano} \end{cases} . \quad (22)$$

Fissata l'orientazione di  $S^1$ , possiamo prendere longitudine e meridiano come rappresentanti del gruppo fondamentale<sup>2</sup> di  $T^2$ , dato da  $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Definita una certa mappa  $f : S^1 \rightarrow T^2$ , la classe di omotopia  $[f]$ , può essere scritta in termini di base longitudine-meridiano come  $[f] = (a, b)$ , dove  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Intuitivamente,  $a$  e  $b$  rappresentano il numero di avvolgimenti nelle direzioni definite nell'espressione (22). Nel caso  $a = b = 0$  la mappa può essere contratta per omotopia ad un punto; in ogni altro caso non sarà possibile. Due esempi sono mostrati in figura (5). La curva descritta da  $f$  rappresenta un nodo in  $T^2$  (detto nodo torico) se non si interseca con sé stessa; questo implica che  $a, b$  devono essere primi tra loro<sup>3</sup>.

Quanto si è visto è possibile estenderlo, dopo qualche considerazione, al toro solido:  $V = S^1 \times D^2$ , dove  $D^2$  è il disco unitario. Un meridiano di  $V$  è una curva semplice e chiusa, non banale su  $\partial D$  ma omotopicamente banale in  $V$ , mentre un parallelo è una curva chiusa su  $\partial D$  che interseca un meridiano in un punto soltanto. Tutti i meridiani, così definiti, sono omotopicamente equivalenti tra loro, mentre le longitudini no, visto che quest'ultime possono avvolgersi in direzione " $\mu$ " un numero arbitrario di volte, intersecando comunque un meridiano in un punto. Per definire in maniera

<sup>2</sup>Si veda l'appendice (8.1)

<sup>3</sup>Per convincersene, è sufficiente rappresentate i nodi torici su di un rettangolo con la convenzione di identificare i lati opposti.

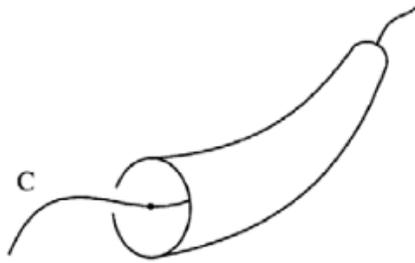


Figura 6: Intorno tubolare del nodo  $C$ . Da [7].

univoca una longitudine, occorre fare una scelta, e specificare il concetto di framing ed intorno tubolare. Definiamo quindi il *framing* di  $V$ :

- **Framing:** Il *framing* di  $V$  è un omeomorfismo  $h : S^1 \times D^2 \rightarrow V$  tale che  $h(1 \times \partial D^2)$  è un meridiano, mentre  $h(S^1 \times 1)$  è una longitudine.

Allo stesso modo, definiamo l'intorno tubolare  $N$  di un nodo:

- **Intorno tubolare:** Un *intorno tubolare* di un nodo  $C$  in  $S^3$ , è un immersione  $f : C \times D^2 \rightarrow S^3$  tale che  $f(x, 0) = x$

Intuitivamente, fissato un nodo  $C$ , possiamo creare l'intorno tubolare "allargando" il nodo sino a renderlo un oggetto tridimensionale, ossia un toro solido. Questo è mostrato in figura (6).

Dati un nodo  $C$ , il suo intorno tubolare  $N$  ed il framing  $h$  per  $N$ , la longitudine  $h(S^1 \times 1)$  di  $N$  definisce il framing  $C_f$  di  $C$ . Se  $\chi(C, C_f) = 0$ ,  $C_f$  si definisce framing "preferito" di  $C$ ; allo stesso modo, se la longitudine di  $N$  ha numero di avvolgimento nullo con  $C$ ,  $h$  viene detto framing "preferito" di  $N$ .

Sia  $C$  un nodo orientato,  $\lambda = h(S^1 \times 1)$  la longitudine definita dal framing preferito  $h$  di  $N$ , e  $\mu = h(1 \times \partial D^2)$  il meridiano tale che  $\chi(\mu, C) = +1$ . Allora, la longitudine  $\lambda$ , e il meridiano  $\mu$  sono i generatori di omotopia della cosiddetta base di Rolfsen in  $\partial N$ . In figura (7) è mostrato un esempio esplicito di base di Rolfsen, per  $C = U$  (unknot). Ogni classe  $[f] \in \pi_1(\partial N)$  può essere espressa in questa base come:

$$[f] = a \cdot [\lambda] + b \cdot [\mu]. \quad (23)$$

Un nodo in  $\partial N$  è un meridiano di  $N$  solo se la sua classe è  $(0, \pm 1)$ , allo stesso modo è una longitudine solo se la sua classe è  $(\mp 1, p)$ , con  $p$  intero. Le basi di Rolfsen possibili sono soltanto 2, ottenibili l'una dall'altra invertendo l'orientazione di meridiano e longitudine.

Un dato omeomorfismo  $h : \partial N \rightarrow \partial N$ , può essere esteso ad auto-omeomorfismo di  $N$  se e solo se  $h$  manda meridiani in meridiani. Il gruppo degli auto-omeomorfismi del toro solido  $N$ , modulo isotopia ambiente, è un gruppo abeliano, ed i propri generatori sono chiamati twist di  $N$ . Utilizzando, al

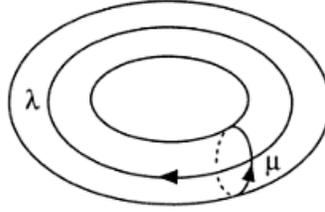


Figura 7: Meridiano e longitudine. Da [7].

solito, variabili complesse per rappresentare il disco  $D^2$ , ed il cerchio unitario  $S^1$ , possiamo scrivere i punti di  $V$  come  $(e^{i\theta_1}, re^{i\theta_2})$  con  $0 \leq r \leq 1$ . L'auto-omeomorfismo  $\tilde{\tau}_{\pm}$  di  $D^2 \times S^1$  definito da:

$$\tilde{\tau}_{\pm} \left( e^{i\theta_1}, re^{i\theta_2} \right) = \left( e^{i\theta_1}, re^{i(\theta_1 \pm \theta_2)} \right), \quad (24)$$

rappresenta il twist meridiano di base (o elementare) di  $D^2 \times S^1$ . Allo stesso modo, se  $h$  è l'omeomorfismo che definisce il framing preferito di  $N$ , il twist (meridiano) destro  $\tau_+$  e levogiro  $\tau_-$  di  $N$  sono dati da:

$$\tau_{\pm} = h \cdot \tilde{\tau}_{\pm} \cdot h^{-1}. \quad (25)$$

L'effetto di un twist meridiano è quello di modificare la classe di omotopia  $[f] \in \pi_1(\partial N)$  come:

$$[f] = (a, b) \xrightarrow{twist} [f'] = (a, b \pm a). \quad (26)$$

dove il segno dipende dal tipo di twist. Dato che per un nodo torico  $a, b$  sono primi tra loro, anche  $a, a + b$  lo sono, per cui un nodo torico è sempre ben definito dopo l'azione di uno (o più) twist meridiani.

### 2.3 Framing e Nastri

Consideriamo un generico nodo  $C \subset \mathbb{R}^3$  ed il relativo intorno tubolare  $N \subset \mathbb{R}^3$ . Come si è visto,  $N$  è un toro solido mentre  $C$  ne rappresenta il “cuore”. Una longitudine su  $\partial N$  è chiamato framing  $C_f$  di  $C$ , e può essere visto come un nodo che circonda il nodo originale. D'ora in avanti, con nodo “fremato” si intenderà un qualsiasi nodo  $C \subset \mathbb{R}^3$  con una specifica longitudine definita su  $N$ . Come i nodi ordinari, anche i nodi fremati possono essere rappresentati tramite diagrammi; è infatti sufficiente aggiungere al diagramma di  $C$  quello della propria longitudine. Un esempio è mostrato in figura (8). Questo, tuttavia, non è l'unica presentazione possibile.

Da un certo punto di vista, un nodo fremato è equivalente ad un nastro  $\Sigma$ , i cui bordi sono fissati da  $\partial \Sigma = \{C, C_f\}$  in cui  $C, C_f$  hanno il medesimo orientamento.

$$nodo\ con\ framing \sim nastro. \quad (27)$$

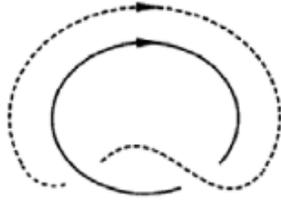


Figura 8: Nodo con framing (linea tratteggiata). Da [7].

La topologia di un nastro è la medesima del nodo  $C$ ; l'unica differenza è che per il nastro è possibile definire una nuova variabile  $T(C, C_f) = \chi(C, C_f)$ , detta di twist. In generale, è sempre possibile rappresentare un nastro mediante diagrammi di nodi, con la convenzione che

$$T(C, C_f) = w(D_C), \quad (28)$$

dove  $w(D_C)$  è il writhe del diagramma di  $C$ . Con la convenzione (28), è possibile rappresentare un nodo fremato come un nodo ordinario, e l'informazione sul framing è contenuta nel writhe del diagramma. Naturalmente, sotto isotopia ambiente, il nastro non modifica il suo twist. D'altra parte, per la convenzione (28), neppure il writhe del diagramma cambia sotto isotopia ambiente del nastro. Questo significa che è possibile rappresentare i nastri (ossia nodi fremati) tramite diagrammi di nodi ordinari nell'ambito dell'isotopia regolare.

I due metodi di rappresentazione discussi sono illustrati in figura (9); a sinistra è mostrato il diagramma del nodo ed il relativo framing, mentre a destra è presente il diagramma del solo nodo nell'ambito dell'isotopia regolare (con la convenzione (28)).

Il numero di allacciamento  $\chi(C_1, C_2)$  tra due diversi nodi non intersecanti non dipende dal fatto che i nodi siano fremati o meno. Questo può essere verificato immediatamente a partire dalla definizione (20), ed utilizzando la presentazione nell'ambito dell'isotopia regolare. Dato che  $\chi(C_1, C_2)$  è invariante sotto mosse di I tipo, non dipende dagli incroci delle componenti di uno stesso nodo. Per questo motivo non dipende dal framing. Questo risultato, ovviamente, non dipende dal metodo utilizzato per rappresentare i nodi fremati. Utilizzando la rappresentazione mostrata in figura (8) è facile vedere che il numero di allacciamento è ben definito, ed è lo stesso comunque venga calcolato. Esplicitamente:

$$\chi(C_1, C_2) = \chi(C_1, C_{2f}) = \chi(C_{1f}, C_2) = \chi(C_{1f}, C_{2f}). \quad (29)$$

La proprietà (29) presuppone che l'intorno tubolare di ciascun nodo sia sufficientemente piccolo in modo tale da avere  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ .



Figura 9: Due possibili diagrammi dello stesso nastro (nodo con framing). Da [7].

### 3 Teoria Abeliiana in $\mathbb{R}^3$

#### 3.1 Propagatori

Come sempre avviene nelle teorie di gauge [13], l'azione (2) è degenera, e per calcolare le funzioni di correlazione di  $A_\mu$  è necessario fissare una gauge, in quanto  $A_\mu$  non è gauge-invariante. Utilizzando il metodo di *BRS*, l'azione di *CS* (nella gauge di Landau) risulta

$$S^{tot} = 4\pi k \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - B \partial^\mu A_\mu + \bar{C} \partial_\mu \partial^\mu C \right] \equiv S + S_{brs}, \quad (30)$$

dove  $B$  è il campo bosonico ausiliario, mentre  $C, \bar{C}$  sono i campi anticommutanti di ghost e antighost. Le contrazioni tra gli indici di Lorentz nei termini di gauge-fixing sono fatte secondo la metrica piatta euclidea  $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ . L'azione (30) è invariante per costruzione<sup>4</sup> sotto le trasformazioni di *BRS*, definite da:

$$\begin{aligned} \delta_{brs} A_\mu &= -\partial_\mu C, & \delta_{brs} B &= 0, \\ \delta_{brs} \bar{C} &= -B, & \delta_{brs} C &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

L'operatore  $\delta_{brs}$  soddisfa  $(\delta_{brs})^2 = 0$ . Per calcolare i propagatori, è conveniente riscrivere la densità di lagrangiana in modo compatto come:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \phi^t \Delta \phi + \bar{C} \square C, \quad (32)$$

dove

$$\frac{1}{2} \phi^t \Delta \phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu(x), & B(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu & \partial_\mu \\ -\partial_\rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\rho(x) \\ B(x) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

I propagatori per i campi  $B$  e  $A_\mu$ , per definizione, soddisfano

$$4\pi k \begin{pmatrix} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu & \partial_\mu \\ -\partial_\rho & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle A_\rho(x) A_\lambda(y) \rangle & \langle A_\lambda(x) B(y) \rangle \\ \langle B(x) A_\lambda(y) \rangle & \langle B(x) B(y) \rangle \end{pmatrix} = i\delta(x-y) \begin{pmatrix} \delta_\lambda^\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

Per risolvere le equazioni differenziali definite dall'espressione (34), conviene passare in trasformata di Fourier, e riscrivere i propagatori nella seguente forma generale:

---

<sup>4</sup>La parte di gauge fixing dell'azione totale è data dalla variazione  $S_{brs} = \delta_{brs} \chi(A, B, C, \bar{C})$ , dove  $\chi$  è un opportuno funzionale.

$$\langle A_\rho(x) A_\lambda(y) \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} [\Phi(p^2) \delta_{\rho\lambda} + \Psi(p^2) p_\rho p_\lambda + \epsilon_{\rho\lambda\tau} p^\tau \chi(p^2)], \quad (35)$$

$$\langle A_\rho(x) B(y) \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} p_\rho \xi(p^2), \quad (36)$$

$$\langle B(x) B(y) \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} \Xi(p^2), \quad (37)$$

dove si è usato il fatto che gli indici liberi possono essere portati unicamente dai vettori  $p_\mu$ , e dai tensori  $\delta_{\mu\nu}$ ,  $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ . Sostituendo le espressioni (35), (36), (36), nelle relazione (34), otteniamo un sistema di quattro equazioni date da:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \epsilon^{\mu\nu\rho} (-ip_\nu) [\Phi \delta_{\rho\lambda} + \Psi p_\rho p_\lambda + \epsilon_{\rho\lambda\tau} p^\tau \chi] - ip^\mu p_\lambda \xi = \frac{i}{4\pi k} \delta_\lambda^\mu, \\ (b) \quad \epsilon^{\mu\nu\rho} (-ip_\nu) p_\rho \xi - ip^\mu \Xi = 0, \\ (c) \quad ip^\rho [\Phi \delta_{\rho\lambda} + \Psi p_\rho p_\lambda + \epsilon_{\rho\lambda\tau} p^\tau \chi] = 0, \\ (d) \quad ip^\rho p_\rho \xi = \frac{i}{4\pi k}. \end{array} \right. \quad (38)$$

Per determinare le funzioni  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $\chi$ , ... possiamo procedere come segue. Dall'espressione (d), otteniamo subito:

$$\xi(p^2) = \frac{1}{4\pi k p^2}, \quad (39)$$

mentre, nella relazione (b) il primo termine si elide identicamente, ed otteniamo:

$$\Xi(p^2) = 0. \quad (40)$$

La funzione  $\Phi(p^2)$  può essere espressa in termini di  $\Psi(p^2)$  utilizzando l'equazione (c). Poiché il contributo di  $\Phi(p^2)$  si ha solo per  $\lambda = \rho$ , quello che si trova è:

$$\Phi(p^2) = -p^2 \Psi(p^2). \quad (41)$$

Dall'espressione (a), notiamo poi, come  $\Phi(p^2)$  dia contributo solo quando  $\rho = \lambda$ . In questo caso, tuttavia, il relativo termine  $\epsilon^{\mu\nu\lambda} (-ip_\nu) \Phi(p^2)$  non può essere semplificato con gli altri elementi della somma su  $\rho$ . In altre parole:

$$\Phi(p^2) = \Psi(p^2) = 0 \quad (42)$$

Il propagatore  $\langle AA \rangle$ , alla fine, dipende soltanto dalla funzione  $\chi(p^2)$ , che può essere determinata dalla condizione

$$-i[-\delta_\lambda^\mu \delta_\tau^\nu + \delta_\tau^\mu \delta_\lambda^\nu] p_\nu p^\tau \chi(p^2) - i \frac{p^\mu p_\lambda}{4\pi k p^2} = \frac{i}{4\pi k} \delta_\lambda^\mu. \quad (43)$$

Il suo valore risulta essere:

$$\chi(p^2) = -\frac{1}{4\pi k p^2}. \quad (44)$$

In conclusione, in trasformata di Fourier, i propagatori sono dati da:

$$\langle A_\rho(x) A_\lambda(y) \rangle = -\frac{i}{4\pi k} \epsilon_{\rho\lambda\tau} \partial_\tau \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2}, \quad (45)$$

$$\langle A_\rho(x) B(y) \rangle = \frac{i}{4\pi k} \partial_\rho \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2}, \quad (46)$$

$$\langle B(x) B(y) \rangle = 0. \quad (47)$$

Le equazioni (45), (46) possono essere integrate direttamente notando che vale:

$$\frac{1}{4\pi |x-y|} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2}, \quad (48)$$

dove  $|x-y|$  è la distanza euclidea. Alla fine, utilizzando l'espressione (48) nelle (45), (46), otteniamo i seguenti valori per i propagatori [8]:

$$\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle = \frac{i}{(4\pi)^2 k} \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{(x-y)_\rho}{|x-y|^3}, \quad (49)$$

$$\langle A_\mu(x) B(y) \rangle = -\frac{i}{(4\pi)^2 k} \frac{(x-y)_\mu}{|x-y|^3}, \quad \langle C(x) \bar{C}(y) \rangle = -\frac{i}{(4\pi)^2 k} \frac{1}{|x-y|}. \quad (50)$$

Si è aggiunto, inoltre, il valore del propagatore  $\langle \bar{C}C \rangle$  per completezza.

Le funzioni di correlazione a due punti per i campi son ben definite, e dipendono esplicitamente dalla metrica euclidea. Questo non è in contrasto con le proprietà topologiche della teoria, in quanto la metrica entra solo nella parte di gauge-fixing dell'azione totale. Il valore di aspettazione di osservabili gauge invarianti e indipendenti dalla metrica, infatti, non potrà dipendere da  $S_{brs}$  (in quanto gauge invarianti), e la covarianza generale sarà preservata.

Concludiamo con un commento sulla dinamica dei campi dell'azione  $S^{tot}$ . Sappiamo che l'azione (1) (senza gauge-fixing) ha tensore energia-impulso nullo, per cui non ci sono quantità dinamiche legate ai campi. Nel caso di  $S^{tot} = S + S_{brs}$ , invece, il tensore energia-impulso non è più nullo ma è proporzionale alla variazione di  $S_{brs}$

$$T_{\mu\nu}^{tot} \sim \frac{\delta S^{tot}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta S_{brs}}{\delta g^{\mu\nu}} \sim \delta_{brs} \chi(A, B, C, \bar{C}). \quad (51)$$

Senza dover specificare  $\chi(A, B, C, \bar{C})$ , l'espressione (51) è sufficiente per ottenere

$$\langle T_{\mu\nu}^{tot}(x) T_{\sigma\rho}^{tot}(y) \rangle = 0, \quad (52)$$

in quanto la variazione  $\delta_{brs}$  è nilpotente. La proprietà (52), che continua a valere anche per un prodotto arbitrario di tensori energia-impulso, conferma la mancanza di un contenuto dinamico standard della teoria descritta da  $S^{tot}$ .

### 3.2 Funzionali Generatori

I funzionali generatori rappresentano un comodo strumento per il calcolo delle varie funzioni di correlazione. Iniziamo a considerare il funzionale generatore  $Z[J]$  per le funzioni di correlazione dei campi  $A_\mu$ . Per definizione si ha

$$Z[J] = \left\langle e^{i \int d^3x A_\mu J^\mu} \right\rangle = \frac{\int D\psi e^{i S_{tot}[\psi]} e^{i \int d^3x A_\mu J^\mu}}{\int D\psi e^{i S_{tot}[\psi]}}, \quad (53)$$

dove  $\psi$  rappresenta l'insieme dei campi  $A_\mu, B, C, \bar{C}$ , mentre  $J^\mu$  è la sorgente classica. In generale si ha  $Z[J] = \exp(i Z_c[J])$ , dove  $Z_c[J]$  è dato dalla somma dei diagrammi di Feynman connessi [13]. Siccome l'azione (30) è quadratica nei campi, c'è un solo diagramma connesso che contiene un propagatore per il campo  $A_\mu$ . Pertanto si ottiene:

$$Z[J] = e^{i Z_c[J]} = e^{-\frac{i}{2} \int d^3z \int d^3w J^\alpha(z) \left[ \frac{1}{(4\pi)^2 k} \epsilon_{\alpha\beta\rho} \frac{(z-w)^\rho}{|z-w|^2} \right] J^\beta(w)}. \quad (54)$$

Una verifica diretta del risultato (54) è data dal calcolo della funzione di correlazione a due punti. Si trova infatti

$$\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle = (-i)^2 \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J^\mu(x) \delta J^\nu(y)} \Big|_{J=0} = \frac{i}{(4\pi)^2 k} \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{(x-y)^\rho}{|x-y|^3}, \quad (55)$$

in accordo con l'espressione (49). È interessante notare che per calcolare le funzioni di correlazione per la curvatura  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , non è necessario introdurre un termine di gauge-fixing nella lagrangiana. Infatti, il funzionale generatore per le funzioni di correlazione di  $F_{\mu\nu}$  è definito da

$$G[\eta] = \left\langle e^{i \int A \wedge d\eta} \right\rangle = \frac{\int DA e^{iS[A]} e^{i \int A \wedge d\eta}}{\int DA e^{iS[A]}}, \quad (56)$$

dove la sorgente classica  $\eta$  è una 1-forma differenziale globalmente definita in  $\mathbb{R}^3$ , mentre  $S[A]$  è l'azione (1) senza gauge-fixing. Verificare che l'espressione (56) rappresenta proprio il funzionale generatore per la curvatura è immediato, ed è sufficiente notare che vale:

$$\frac{\delta}{\delta \eta_\mu(x)} \int A \wedge d\eta = \frac{\delta}{\delta \eta_\mu(x)} \int \eta \wedge dA = \frac{\delta}{\delta \eta_\mu(x)} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \eta_\mu \partial_\nu A_\rho = \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho(x), \quad (57)$$

da cui

$$\frac{1}{2^n} \langle \epsilon^{\mu_1 \nu_1 \rho_1} F_{\nu_1 \rho_1}(x_1) \dots \epsilon^{\mu_n \nu_n \rho_n} F_{\nu_n \rho_n}(x_n) \rangle = (-i)^n \frac{\delta^n G[\eta]}{\delta \eta_{\mu_1}(x_1) \dots \delta \eta_{\mu_n}(x_n)} \Big|_{\eta=0}. \quad (58)$$

L'espressione (56) può essere risolta con un opportuno cambio di variabili che elimina il termine lineare nei campi all'esponente. Per fare questo introduciamo la 1-forma  $\tilde{A}$  definita da:

$$A(x) = -\frac{1}{4\pi k} \eta(x) + \tilde{A}(x). \quad (59)$$

Sostituendo l'espressione (59) nella (56), l'esponente diventa

$$\begin{aligned} & 2\pi k \int A \wedge dA + \int A \wedge d\eta \\ &= 2\pi k \int [\tilde{A} \wedge d\tilde{A} + \left(\frac{1}{4\pi k}\right)^2 \eta \wedge d\eta - \frac{1}{2\pi k} \tilde{A} \wedge d\eta] + \int [\tilde{A} \wedge d\eta - \frac{1}{4\pi k} \eta \wedge d\eta] \\ &= S[\tilde{A}] - \frac{1}{8\pi k} \int \eta \wedge d\eta, \end{aligned} \quad (60)$$

dove si è usata la proprietà  $\int \eta \wedge d\tilde{A} = -\int d\tilde{A} \wedge \eta = \int \tilde{A} \wedge d\eta$ . Dato che  $\eta$  rappresenta una sorgente esterna, abbiamo  $DA = D(\tilde{A} + cte) = D\tilde{A}$ , per cui la misura  $DA$  nell'integrale funzionale può essere sostituita con  $D\tilde{A}$ . Questo fattorizza il numeratore dell'espressione (56), ed otteniamo:

$$G[\eta] = e^{iG_c[\eta]} = \frac{\int D\tilde{A} e^{iS[\tilde{A}]} e^{-\frac{i}{8\pi k} \int \eta \wedge d\eta}}{\int DA e^{iS[A]}} = e^{-\frac{i}{8\pi k} \int \eta \wedge d\eta}. \quad (61)$$

Il funzionale  $G[\eta]$  ha diverse interessanti proprietà che dipendono dalla natura topologica della teoria. Il termine di sorgente  $\exp(i \int A \wedge d\eta) = \exp(i \int \eta \wedge dA)$  è invariante di gauge e covariante generale; questo rende automaticamente  $\langle \exp(i \int A \wedge d\eta) \rangle$  un invariante topologico. Allo stesso modo, se aggiungiamo alla sorgente classica  $\eta$  una 1-forma esatta  $\eta \rightarrow \eta + d\Theta$  otteniamo  $G[\eta] = G[\eta + d\Theta]$ . Questo significa che il funzionale generatore  $G[\eta]$  è gauge invariante. A differenza del funzionale  $Z_c[J]$ ,  $G_c[\eta]$  è locale, e coincide (a meno di una costante moltiplicativa) con l'azione di  $CS$  stessa:

$$G_c[\eta] = -\frac{1}{8\pi k} \int \eta \wedge d\eta. \quad (62)$$

Secondo l'equazione del moto (6), la curvatura on-shell è nulla. La proprietà  $dA = 0$ , tuttavia, non viene soddisfatta esattamente quando la curvatura entra nelle funzioni di correlazione. Per dimostrarlo, consideriamo la funzione di correlazione a due punti

$$\frac{1}{4} \left\langle \epsilon^{\mu\sigma\rho} F_{\sigma\rho}(x_1) \epsilon^{\nu\gamma\lambda} F_{\gamma\lambda}(x_2) \right\rangle = -\frac{\delta^2 e^{-\frac{i}{8\pi k} \int \eta(y) \wedge d\eta(y)}}{\delta\eta_\mu(x_1) \delta\eta_\nu(x_2)} \Big|_{\eta=0}. \quad (63)$$

Sviluppando il termine a destra dell'espressione (63) si trova subito:

$$\frac{1}{4} \left\langle \epsilon^{\mu\sigma\rho} F_{\sigma\rho}(x_1) \epsilon^{\nu\gamma\lambda} F_{\gamma\lambda}(x_2) \right\rangle = i \left( \frac{1}{4\pi k} \right) \epsilon^{\mu\alpha\beta} \delta_\beta^\nu \partial_\alpha^{x_1} \delta(x_1 - x_2). \quad (64)$$

Il risultato (64) può essere ottenuto anche a partire dalla funzione di correlazione  $\langle AA \dots A \rangle$ . Vale infatti

$$(-i)^n \frac{\delta^n G[\eta]}{\delta\eta_{\mu_1}(x_1) \dots \delta\eta_{\mu_n}(x_n)} \Big|_{\eta=0} = (-i)^n \epsilon^{\mu_1\nu_1\rho_1} \partial_{\nu_1}^{x_1} \dots \epsilon^{\mu_n\nu_n\rho_n} \partial_{\nu_n}^{x_n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J^{\rho_1}(x_1) \dots \delta J^{\rho_n}(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (65)$$

Verifichiamo direttamente la relazione (65) nel caso a due punti. A partire dall'espressione (55) otteniamo

$$\frac{1}{4} \left\langle \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}(x_1) \epsilon^{\nu\tau\varrho} F_{\tau\varrho}(x_2) \right\rangle = \epsilon^{\mu\sigma\rho} \epsilon^{\nu\gamma\lambda} \partial_\sigma^{x_1} \partial_\gamma^{x_2} \langle A_\rho(x_1) A_\lambda(x_2) \rangle. \quad (66)$$

Lasciando agire nel membro a destra della (66) l'operatore  $\epsilon^{\mu\sigma\rho} \partial_\sigma^{x_1}$ , e tenendo conto del valore (49) del propagatore otteniamo

$$\epsilon^{\nu\gamma\lambda}\partial_\gamma^{x_2}\left[\frac{i}{4\pi k}\delta(x_1-x_2)\delta_\lambda^\mu-\partial_{x_1}^\mu\left(\frac{i}{(4\pi)^2k}\frac{(x_1-x_2)_\lambda}{|x_1-x_2|}\right)\right]. \quad (67)$$

Poiché  $(x_1-x_2)_\lambda/|x_1-x_2|^3=-\partial_\lambda^{x_2}(1/|x_1-x_2|)$  questo termine si annulla lasciando agire  $\epsilon^{\nu\gamma\lambda}\partial_\gamma^{x_2}$ , e ritroviamo il risultato (64). Il motivo per cui l'espressione (64) non si annulla, nonostante on shell  $dA=0$ , è un fatto generale, e dipende dalla presenza dell'ordinamento temporale nei valori medi. Vale infatti [14]

$$\frac{1}{4}\left\langle\epsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}(x_1)\epsilon^{\nu\tau\rho}F_{\tau\rho}(x_2)\right\rangle=\epsilon^{\mu\sigma\rho}\epsilon^{\nu\gamma\lambda}\partial_\sigma^{x_1}\partial_\gamma^{x_2}\left\langle 0\left|T\left(\hat{A}_\rho(x_1)\hat{A}_\lambda(x_2)\right)\right|0\right\rangle, \quad (68)$$

dove  $\hat{A}_\mu$  sono gli operatori di campo agenti sullo spazio di Fock, mentre  $T$  è l'operazione di ordinamento temporale.

Un'ulteriore verifica si ottiene consideriamo una versione leggermente modificata della classica equazione di Schwinger-Dyson. Nella teoria di  $CS$ , la variazione dell'azione rispetto al campo  $A$  è proporzionale alla curvatura  $dA$ . Questo rende possibile riottenere il risultato (64) senza passare per il funzionale  $G[\eta]$ . Si ha infatti:

$$\begin{aligned} 4\pi k\left\langle\epsilon^{\mu\sigma\rho}\partial_\sigma A_\rho(x)\epsilon^{\nu\gamma\lambda}\partial_\gamma A_\lambda(y)\right\rangle &= \left\langle\frac{\delta S[A]}{\delta A_\mu(x)}\epsilon^{\nu\gamma\lambda}\partial_\gamma A_\lambda(y)\right\rangle = \frac{\int DAe^{iS[A]}\frac{\delta S[A]}{\delta A_\mu(x)}\epsilon^{\nu\gamma\lambda}\partial_\gamma A_\lambda(y)}{\int DAe^{iS[A]}} \\ &= (-i)\frac{\int DA\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}(e^{iS[A]})\epsilon^{\nu\gamma\lambda}\partial_\gamma A_\lambda(y)}{\int DAe^{iS[A]}} = i\epsilon^{\nu\gamma\lambda}\frac{\int DAe^{iS[A]}\frac{\delta\partial_\gamma A_\lambda(y)}{\delta A_\mu(x)}}{\int DAe^{iS[A]}} = i\epsilon^{\nu\gamma\lambda}\partial_\gamma\delta_\lambda^\mu\delta(x-y). \end{aligned} \quad (69)$$

Anche con questo ultimo metodo, il calcolo delle funzioni  $\langle dAdA\dots dA\rangle$  risulta più semplice rispetto ad una classica teoria di gauge, e riotteniamo il risultato distribuzionale (64).

Il funzionale generatore  $G[\eta]$  può essere visto come il valore di aspettazione  $\langle\exp(i\int A\wedge d\eta)\rangle$  per  $\eta$  fissato. Questo, lo vedremo, è un oggetto strettamente legato ai valori di aspettazione degli operatori di Wilson.

### 3.3 Operatori di Wilson

Nelle teorie di gauge le osservabili sono connesse a valori di aspettazione normalizzati del tipo

$$\langle F[A]\rangle = Z_0^{-1}\int DA\dots e^{iS_{tot}[A,\dots]}F[A], \quad (70)$$

dove  $F[A]$  è una funzione gauge-invariante dei campi originali della teoria, mentre  $Z_0$  è la normalizzazione. Nel caso in cui  $F[A]$  non dipenda dalla metrica,  $\langle F[A]\rangle$  rappresenta un invariante topologico. Siamo interessati a questo tipo di osservabili.

La più semplice funzione di  $A_\mu$  invariante di gauge è l'integrale della 1-forma  $A$  su un cammino chiuso ed orientato  $C$  in  $\mathbb{R}^3$ :

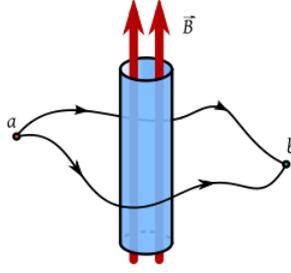


Figura 10: Esperimento di Ahranov-Bohm. Da [34].

$$\oint_C A_\mu(x) dx^\mu = \oint_C A. \quad (71)$$

A partire dall'integrale (71) possiamo ottenere, esponenziando, l'olonomia:

$$W(C) = e^{i \oint_C A}. \quad (72)$$

L'espressione (72) è anche chiamata loop di Wilson e soddisfa ancora (per costruzione) le proprietà di gauge invarianza e indipendenza dalla metrica. Poiché  $W(C)$  dipende unicamente dalla connessione di gauge  $A$ , il suo significato è lo stesso in ogni teoria di gauge (con gruppo  $U(1)$ ); analizziamo alcune sue caratteristiche.

Cosideriamo un cammino  $\Gamma_{xy}$  congiungente due punti  $x, y \in \mathbb{R}^3$ . Sotto le trasformazioni di gauge  $A_\mu^\Lambda(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$  si ha

$$\left( \exp \left( i \int_{\Gamma_{xy}} A_\mu(z) dz^\mu \right) \right)^\Lambda \equiv W[\Gamma_{xy}]^\Lambda = e^{i\Lambda(y)} W[\Gamma_{xy}] e^{-i\Lambda(x)}, \quad (73)$$

dove  $W[\Gamma]$  è l'olonomia associata al cammino  $\Gamma$ . L'espressione (73) mostra che il fattore di fase abeliano  $W[\Gamma]$  non è invariante sotto trasformazioni di gauge. L'olonomia diventa invariante solo quando  $x = y$ ; nel qual caso ritroviamo il loop di Wilson. Sia  $\hat{n}^\mu(x)$  il versore unitario del cammino  $\Gamma_{xy}$  definito nel punto iniziale  $x \in \Gamma_{xy}$ ; vale

$$\hat{n}^\mu(x) \cdot [\partial_\mu + iA_\mu(x)] W[\Gamma_{xy}] = \hat{n}^\mu(x) \cdot D_\mu(x) W[\Gamma_{xy}] = 0. \quad (74)$$

La derivata covariante  $D_\mu(x)$  calcolata lungo il percorso  $\Gamma_{xy}$  annulla l'olonomia  $W[\Gamma_{xy}]$ . In effetti il significato dell'olonomia è quello di trasporto parallelo da  $x$  a  $y$ . La differenza di fase  $W[\Gamma_{xy}]$  tra due diversi punti  $x, y$  dipende dal particolare cammino aperto  $\Gamma_{xy}$  su cui si effettua il trasporto parallelo. Questo risultato dipende esplicitamente da  $\Gamma$  tranne nel caso in cui  $A_\mu$  sia una pura libertà di gauge ( $F_{\mu\nu} = 0$ ). Se  $F_{\mu\nu} = 0$ , infatti,  $W[\Gamma_{xy}]$  è una funzione dei soli estremi  $x, y$ . A questo proposito, può essere utile richiamare un esempio di meccanica quantistica.

Nella teoria quantistica è possibile misurare le differenze di fase di certe funzioni d'onda mediante interferenza. In questo tipo di esperimenti (ad esempio quello di Ahronov-Bohm) la curvatura non è nulla ovunque ed è possibile interpretare lo spazio come non semplicemente connesso. Più precisamente possiamo assumere che la porzione di spazio in cui la curvatura non è nulla rappresenti un limite invalicabile. In questo esperimento la differenza di fase coincide con il trasporto parallelo (olonomia) attorno ad un percorso chiuso omotopicamente non banale (cioè non contraibile ad un punto). Questo è schematicamente mostrato in figura (10).

Nella teoria di  $CS$ , l'operatore di Wilson (72) rappresenta il trasporto parallelo calcolato sul percorso chiuso  $C$ . Differentemente dall'elettrodinamica classica, la teoria di  $CS$  è topologica; grazie a questa caratteristica  $\langle W(C) \rangle$  dipenderà unicamente dalla topologia del nodo. In generale, possiamo immaginare che valori di aspettazione su percorsi differenti

$$\langle W(C_1) W(C_2) \dots W(C_n) \rangle \quad (75)$$

siano legati a qualche proprietà topologica del link orientato  $\mathcal{L} = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ . Inoltre, come vedremo, in presenza di un link la curvatura non è ovunque nulla [5], ma è concentrata su  $\mathcal{L}$ . Ciascuna componente  $C_i$  appartiene allo spazio non semplicemente connesso  $\mathbb{R}^3 - (\mathcal{L} - C_i)$ , e  $W(C_i)$  può essere interpretato come l'olonomia associata ad una particella carica in un esperimento tipo  $AB$ . Un ultimo aspetto interessante riguarda la possibilità di ricostruire la connessione di gauge a partire dall'insieme di tutti i loop di Wilson [15]. In altre parole, al variare del nodo  $C$ , l'espressione (72) rappresenta un insieme completo di osservabili gauge invarianti. Concentriamoci quindi sul calcolo di valori di aspettazione del tipo (75), ed assumiamo che i loop di Wilson siano le osservabili interessanti da calcolare.

Gli elementi di  $U(1)$  sono dati da  $U(1) = \{\exp(i2\pi\xi)\}$  con  $0 \leq \xi < 1$ . Le rappresentazioni irriducibili sono date da  $\{\exp(i2\pi n\xi)\}$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Siccome  $\exp(i\oint_C A) \in U(1)$  tutte le rappresentazioni irriducibili dell'olonomia sono date da

$$W(C) = e^{i2\pi q \oint_C A}, \quad (76)$$

dove  $q \in \mathbb{Z}$  viene chiamato colore. In generale è possibile associare a ciascuna componente di un link  $\mathcal{L}$  un diverso colore. D'ora in avanti, un link di questo tipo verrà chiamato "colorato".

### 3.4 Integrale di Gauss

Come si è visto, le osservabili della teoria di campo di  $CS$  sono costruite in termini dell'olonomia  $\exp(2\pi i \oint_C A)$ , dove  $\oint_C A$  denota l'integrale della connessione  $A$  lungo il cammino chiuso ed orientato  $C$ . Nelle teorie di campo quantistiche ordinarie che descrivono interazioni tra particelle, i valori di aspettazione  $G(x_1, \dots, x_n) = \langle \phi(x_1), \dots, \phi(x_n) \rangle$  assumono valori distribuzionali. Per questo motivo, soltanto se  $f(x_1, \dots, x_n)$  è una funzione test l'integrale

$$\int d^4x_1 \dots d^4x_n G(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) \quad (77)$$

è generalmente ben definito. Allo stesso modo, il funzionale generatore delle funzioni di correlazione  $\langle \exp i \int d^4x \phi(x) J(x) \rangle$  è ben definito quando la sorgente classica  $J(x)$  è una funzione test. Nella teoria di  $CS$  i valori di aspettazione dell'olonomia  $\langle \exp(2\pi i \oint_C A) \rangle$  assomigliano a  $\langle \exp i \int d^4x \phi(x) J(x) \rangle$ , ma al posto della sorgente classica non c'è una funzione test. In effetti la connessione è integrata lungo un cammino chiuso di dimensione 1. Se volessimo riscrivere  $\langle \exp(2\pi i \oint_C A) \rangle$  come un integrale su tutto lo spazio  $\mathbb{R}^3$  dovremmo utilizzare una sorgente distribuzionale. Una sorgente di questo tipo potrebbe creare divergenze nelle teorie di campo ordinarie, ma nella  $CS$  questo non accade. Per dimostrarlo consideriamo il seguente valore di aspettazione

$$\left\langle \oint_{C_1} A \oint_{C_2} A \right\rangle = \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} d^3x d^3y A_\mu(x) J_1^\mu(x) A_\nu(y) J_2^\nu(y) \right\rangle, \quad (78)$$

dove  $J_{1/2}$  sono opportune forme distribuzionali (correnti), mentre  $C_1, C_2$  sono due differenti nodi. L'espressione (78) rappresenta l'analogo dell'integrale (77), ma a differenza di quest'ultimo  $J_{1/2}^\mu$  non sono funzioni test. Utilizzando il valore del propagatore (49) si trova subito:

$$\left\langle \oint_{C_1} A_\mu(x) dx^\mu \oint_{C_2} A_\nu(y) dy^\nu \right\rangle = \frac{i}{(4\pi)^2 k} \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{(x-y)^\rho}{|x-y|^3}. \quad (79)$$

L'integrale (79) può essere risolto esplicitamente, senza preoccuparci di specificare la parametrizzazione dei nodi  $C_1, C_2$ . Per fare questo possiamo utilizzare il teorema di Stokes, e riscrivere l'integrale di linea su  $x$  come integrale di superficie

$$\oint_{C_2} dy^\nu \int_{\Sigma_{C_1}} d\sigma^\lambda \epsilon_{\lambda\alpha\beta} \partial_\alpha^x \epsilon^{\beta\nu\rho} \frac{(x-y)_\rho}{|x-y|^3}, \quad (80)$$

dove  $\Sigma_{C_1}$  è la superficie orientata (superficie di Seifert) con bordo  $C_1$ :  $\partial\Sigma_{C_1} = C_1$ . Sviluppando i simboli di Levi-Civita  $\epsilon_{\beta\lambda\alpha} \epsilon^{\beta\nu\rho} = \delta_\lambda^\nu \delta_\alpha^\rho - \delta_\alpha^\nu \delta_\lambda^\rho$  ci riduciamo a:

$$\oint_{C_2} dy^\nu \int_{\Sigma_{C_1}} d\sigma_\nu \partial_\alpha^x \frac{(x-y)^\alpha}{|x-y|^3} - \oint_{C_2} dy^\nu \int d\sigma^\lambda \partial_\nu^x \frac{(x-y)_\lambda}{|x-y|^3}. \quad (81)$$

Il teorema di Stokes non vale se  $y \in \Sigma_{C_1}$ , per cui il termine

$$\partial_\alpha \frac{(x-y)^\alpha}{|x-y|^3} = 4\pi \delta(x-y) \quad (82)$$

non contribuisce e può essere omissis. Ciò che rimane dell'espressione (81) è l'ultimo termine, dove è possibile sostituire la derivata parziale  $\partial_\nu^x \rightarrow -\partial_\nu^y$ . Questo è conveniente, in quanto

$$\Omega(y) = \int_{\Sigma_{C_1}} d\sigma^\lambda \frac{(\hat{x}-\hat{y})_\lambda}{|x-y|^2} \quad (83)$$

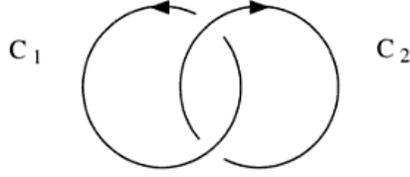


Figura 11: Nodi con  $\chi(C_1, C_2) = +1$ . Da [7].

rappresenta l'angolo solido con cui  $\Sigma_{C_1}$  è visto da  $y$ . Alla fine è possibile riscrivere l'espressione (81) come

$$\oint_{C_2} dy^\nu \partial_\nu^y \Omega(y). \quad (84)$$

Risolviamo l'integrale (84) in due casi particolari.

Se i nodi  $C_1, C_2$  sono disgiunti è sempre possibile non far intersecare  $C_2$  con  $\Sigma_{C_1}$ , e l'integrazione è estesa a tutti i punti  $y \in C_2$ . Con queste ipotesi, l'integrale (84) è quindi nullo. Un caso più interessante si ha quando  $C_2$  interseca  $\Sigma_{C_1}$  in un punto soltanto (sia esso  $p$ ). Sappiamo, per il teorema di Stokes, che il punto  $p$  deve essere escluso dall'integrazione. Il valore dell'integrale (84) coincide allora con la differenza del limite destro/sinistro

$$\oint_{C_2} dy^\nu \partial_\nu^y \Omega(y) = \lim_{y_1, y_2 \rightarrow p^+, p^-} [\Omega(y_1) - \Omega(y_2)]. \quad (85)$$

L'angolo solido visto da  $p^+$  è (in modulo) la metà di quello solido totale, e vale  $\pm 2\pi$  (il segno dipende dall'orientazione). Allo stesso modo, l'angolo solido visto da  $p^-$  sarà  $\mp 2\pi$ . Alla fine, se il nodo  $C_2$  interseca la superficie  $\Sigma_{C_1}$  in un punto soltanto, l'integrale (80) dà come risultato  $\pm 4\pi$ . In generale, l'espressione (80) coincide numero di volte con cui il nodo  $C_2$  interseca la superficie  $\Sigma_{C_1}$  in unità di angolo solido. Poiché nodo e superficie sono orientati, intersezioni entranti o uscenti avranno segno opposto. Con la normalizzazione  $4\pi$  (il valore dell'intero angolo solido) l'integrale

$$\chi(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{(x-y)^\rho}{|x-y|^3}, \quad (86)$$

assume valori interi ed è chiamato integrale di Gauss [16]. La grandezza  $\chi(C_1, C_2)$ , che abbiamo già introdotto nel capitolo (2), rappresenta un invariante topologico, e coincide con il numero di avvolgimenti del nodo  $C_1$  rispetto a  $C_2$  (o viceversa). Un esempio è mostrato in Figura (11), dove sono rappresentati due unknot. Alla fine, il valore di aspettazione (78) è proporzionale all'integrale di Gauss [7]

$$\left\langle \oint_{C_1} A \oint_{C_2} A \right\rangle = \frac{i}{4\pi k} \chi(C_1, C_2), \quad (87)$$



Figura 12: Framing per l'unknot. Da [7].

per cui non ci sono ambiguità o divergenze.

In conclusione, l'integrale  $\oint_C A$  non dà problemi di divergenza se calcolato nelle funzioni di correlazione. Questo significa che  $\oint_C A$  può essere visto come un operatore ben definito. Allo stesso modo, valori di aspettazione relativi a diversi cammini  $\langle \oint_{C_1} A \dots \oint_{C_n} A \rangle$  saranno ancora unici e ben definiti.

### 3.5 Autoallacciamento e Framing

È naturale chiedersi cosa accade all'integrale di Gauss se  $C_1 = C_2$ . Anche a livello intuitivo,  $\chi(C, C)$  non è ben definito perché dovrebbe rappresentare il numero di volte con cui un nodo si avvolge su sé stesso. Introduciamo una parametrizzazione per il nodo  $C$   $\{x_\mu(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ , e riscriviamo l'integrale (86) per  $C_1 = C_2 \equiv C$ :

$$\chi(C, C) = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 ds \int_0^1 dt \epsilon_{\mu\nu\rho} \dot{x}^\mu(s) \dot{x}^\nu(t) \frac{(x(s) - x(t))^\rho}{|x(s) - x(t)|^3}. \quad (88)$$

A prima vista può sorgere il dubbio che per  $t = s$  l'integrale diverga. Tuttavia, questo non accade e può essere visto espandendo  $x(t)$  attorno a  $t = s$ . Si trova infatti [17]

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} \dot{x}^\mu(s) \dot{x}^\nu(t) \frac{(x(s) - x(t))^\rho}{|x(s) - x(t)|^3} = -\frac{1}{6} |s - t| \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{\dot{x}^\mu(s) \ddot{x}^\nu(s) \ddot{x}^\rho(s)}{|\dot{x}(s)|^3} + \mathcal{O}(|s - t|^2), \quad (89)$$

per cui l'integrando per  $t = s$  si annulla. La grandezza  $\chi(C, C)$  è chiamata cotorsione di  $C$  ed è ben definita e finita, ma dipende dalla metrica e non è invariante sotto deformazioni di  $C$ ; quindi  $\chi(C, C)$  non è un invariante topologico [18]. Per dare un significato topologico al valore  $\langle \oint_C A \oint_C A \rangle$  occorre introdurre un framing per il nodo  $C$ . Vediamolo nel dettaglio.

Utilizzando la parametrizzazione appena introdotta, il singolo integrale diventa

$$\oint_C A = \int_0^1 dt \dot{x}^\mu A_\mu(x(t)). \quad (90)$$

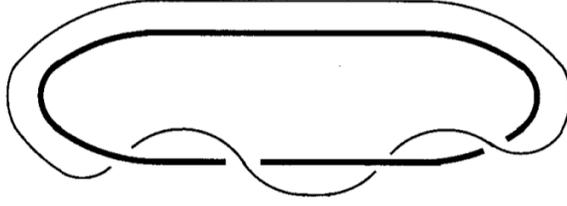


Figura 13: Un secondo esempio di framing per l'unknot. Da [8].

Nello sviluppo di Taylor dell'operatore di Wilson  $W(C)$  compaiono gli integrali (90) ad ogni potenza. Per quanto riguarda l'integrale doppio, la prima cosa che viene in mente è definire:

$$\left( \oint_C A \right)_{naive}^2 = \int_0^1 ds \dot{x}^\nu(s) A_\nu(x(s)) \int_0^1 dt \dot{x}^\mu(t) A_\mu(x(t)). \quad (91)$$

Purtroppo, abbiamo visto che la scelta (91) non preserva la covarianza generale della teoria in quanto  $\langle (\oint_C A)_{naive}^2 \rangle$  non è un invariante topologico. L'integrale  $(\oint_C A)^2$  ha bisogno di diversa prescrizione che mantenga la struttura geometrica del modello. Questo è possibile applicando una procedura di *framing* al nodo  $C$ . Questa procedura consiste nel calcolare l'integrale doppio (91) su nodi leggermente diversi, facendo poi tendere la differenza a zero. Esplicitamente, possiamo descrivere il nodo  $C_f$  con framing con  $y^\mu(t) = x^\mu(t) + \varepsilon n^\mu(t)$  dove  $t \in [0, 1]$ , mentre  $n^\mu(t)$  è scelto in modo tale da essere ortogonale a  $C$  ( $\dot{x}^\mu(t) n_\mu(t) = 0$ ) e normalizzato  $n^2 = 1$ . Definiamo quindi:

$$\left( \oint_C A \right)_{fremato}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 ds \dot{x}^\mu(s) A_\mu(x(s)) \int_0^1 dt (\dot{x}^\nu(t) + \varepsilon \dot{n}^\nu(t)) A_\nu(x(t) + \varepsilon n(t)), \quad (92)$$

con la convenzione di effettuare il limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  dopo le contrazioni di Wick. Due particolari esempi di framing per l'unknot sono mostrati nelle figure (12) e (13), e sono rappresentati dalla linea sottile che "circonda" il nodo originale. A livello classico non c'è alcuna differenza tra l'espressione (92) e la (91). Per quanto riguarda i valori di aspettazione, invece, la differenza è profonda in quanto

$$\left\langle \left( \oint_C A \right)_{fremato}^2 \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{4\pi k} \chi(C, C_f) = \frac{i}{4\pi k} \chi(C, C_f) \quad (93)$$

è un invariante topologico. Come si è visto nel paragrafo (2.2), un nodo con framing può essere reinterpretato come un nastro  $\Sigma$ , i cui bordi sono specificati da  $\partial\Sigma = \{C, C_f\}$ . Dal punto di vista topologico, un nodo si distingue da un nastro per la presenza di una variabile aggiuntiva  $T(\Sigma)$ , detta di twist. Questa variabile coincide precisamente con il numero di autoallacciamento  $T(\Sigma) = \chi(C, C_f)$ .

La procedura framing può essere generalizzata ed estesa ad un prodotto arbitrario di integrali  $\oint_C A$ . Consideriamo dunque:

$$\left(\oint_C A\right)^n \rightarrow \left(\oint_C A\right)_{fremato}^n. \quad (94)$$

È possibile definire il prodotto fremato come il prodotto di  $n$  integrali calcolati su cammini leggermente modificati, in modo simile a quanto già visto. Si ha quindi:

$$\left(\oint_C A\right)_{fremato}^n = \lim_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \rightarrow 0} \int_0^1 ds_1 \dot{x}_1^\mu(s_1) A_\mu(x_1(s_1)) \dots \int_0^1 ds_n \dot{x}_n^\nu(s_n) A_\nu(x_n(s_n)), \quad (95)$$

dove

$$x_j^\mu(s_j) = x^\mu(s_j) + \varepsilon_j n^\mu(s_j). \quad (96)$$

Ciascun nodo  $C_{f_j}$  è parametrizzato da  $x_j(s_j)$  e differisce dal nodo originale  $C$  per il termine  $\varepsilon_j n^\mu(s_j)$ . Il vettore  $n^\mu$ , come al solito, caratterizza il tipo di framing ed è scelto in modo tale da essere ortogonale a  $C$  e normalizzato  $n^2 = 1$ . I valori  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_j, \varepsilon_j > 0\}$  devono essere scelti diversi tra loro  $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ , in modo da avere  $n$  nodi distinti. Il limite  $\{\varepsilon\} \rightarrow 0$ , infine, viene fatto alla fine del calcolo. Con queste ipotesi  $\chi(C_{f_i}, C_{f_j})$  risulta ben definito, ed è lo stesso per ogni combinazione  $i \neq j$ .

### 3.6 Calcolo delle Osservabili I

Siamo interessati a calcolare il valore d'aspettazione dell'operatore di Wilson associato ad un link colorato  $\mathcal{L} = \{C_1, \dots, C_n\}$

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle = \left\langle e^{i2\pi q_1 \oint_{C_1} A} \dots e^{i2\pi q_n \oint_{C_n} A} \right\rangle. \quad (97)$$

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che è necessaria una procedura di framing per preservare le proprietà topologiche di  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle$ . Dal punto di vista della teoria di campo, questo coincide con la definizione degli operatori composti associati ai loop di Wilson. Infatti, nello sviluppo di Taylor di  $W(\mathcal{L})$  compaiono anche prodotti di integrali sullo stesso cammino. Tali prodotti corrispondono ad operatori composti e devono essere definiti. Questa è una proprietà generale [13] delle teorie quantistiche, dove la conoscenza delle funzioni di correlazione  $\langle A(x_1) A(x_2) \dots A(x_n) \rangle$  non è sufficiente a determinare  $\langle A^{h_1}(x_1) \dots A^{h_n}(x_n) \rangle$  con  $h_i \in \mathbb{N}$ .

Iniziamo a calcolare il valore di aspettazione del loop di Wilson in un caso particolare; ossia un link con una sola componente  $\mathcal{L} = C$  :

$$\langle W(C) \rangle. \quad (98)$$

Con un abuso di notazione, continueremo ad indicare il valore di aspettazione con  $\langle W(C) \rangle$ . In realtà, la teoria di  $CS$  descrive invarianti soltanto per nodi fremati; dovremmo quindi scrivere  $\langle W(C, C_f) \rangle$ .

Dalla definizione (76), sviluppando con Taylor, possiamo riscrivere  $\langle W(C) \rangle$  come:

$$\langle W(C) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i q)^n}{n!} \left\langle \left( \oint_C A \right)_{fremato}^n \right\rangle. \quad (99)$$

Fissato il framing, possiamo concentrarci sul valore di aspettazione del prodotto di integrali

$$\left\langle \left( \oint_C A \right)_{fremato}^n \right\rangle. \quad (100)$$

Ciascuna contrazione di Wick, una volta integrata (vedi espressione (87)), produce un risultato proporzionale a  $\chi(C_{f_i}, C_{f_j})$ . Con la scelta (95) questi valori sono tutti uguali tra loro, per cui il valore dell'espressione (100) può essere determinato in modo combinatorico. In altre parole, è possibile ignorare momentaneamente le integrazioni e considerare:

$$\left\langle \left( \oint_C A \right)_{fremato}^n \right\rangle \sim \langle A_1 A_2 \dots A_n \rangle. \quad (101)$$

Nel termine a destra dell'espressione (101) tutte le contrazioni di Wick sono uguali, ed è possibile porre subito  $n = 2p$  in quanto il contributo per  $n$  dispari è nullo. La combinatoria si determina immediatamente notando che vale:

$$\langle A_1 A_2 \dots A_{2p} \rangle = (2p-1) \langle A_1 A_2 \rangle \langle A_3 \dots A_{2p} \rangle = (2p-1)!! \langle A_1 A_2 \rangle^p. \quad (102)$$

Alla fine

$$\left\langle \left( \oint_C A \right)_{fremato}^{2p} \right\rangle = (2p-1)!! \left\langle \oint_{C_{f_1}} A \oint_{C_{f_2}} A \right\rangle^p. \quad (103)$$

Utilizzando la relazione (103) nella (99), e tenendo conto della proprietà  $(2p-1)!!/2p! = 1/2^p p!$  troviamo

$$\langle W(C) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2\pi q)^{2p}}{2^p p!} \left\langle \oint_C A_\mu dx^\mu \oint_{C_f} A_\nu dy^\nu \right\rangle^p, \quad (104)$$

dove si è usato il fatto che  $\chi(C_{f_1}, C_{f_2}) = \chi(C, C_f)$  con  $C_f$  uno qualsiasi dei vari  $C_{f_i}$ . Allo stesso modo, il limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  è riferito al  $C_f$  scelto. Utilizzando il risultato (93), e notando che la somma nell'espressione (104) coincide ancora con lo sviluppo di un esponenziale troviamo infine [7]:

$$\langle W(C) \rangle = e^{-i\left(\frac{\pi}{2k}\right)q^2\chi(C, C_f)}. \quad (105)$$

Il risultato (105) dipende dal numero di autoallacciamento, per cui è un invariante del link  $\{C, C_f\}$  sotto isotopia ambiente. Alternativamente, possiamo interpretare  $\langle W(C) \rangle$  come un invariante (sotto isotopia ambiente) per nastri, con  $\chi(C, C_f)$  il twist del nastro.

Adesso possiamo occuparci di  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle$ , dove  $W(\mathcal{L})$  è l'operatore di Wilson per un generico link fremato  $\mathcal{L}$

$$W(\mathcal{L}) = e^{i2\pi q_1 \oint_{C_1} A} e^{i2\pi q_2 \oint_{C_2} A} \dots e^{i2\pi q_n \oint_{C_n} A}. \quad (106)$$

Per fissare le idee possiamo considerare un link di due sole componenti  $\mathcal{L} = C_1 \cup C_2$ . Questo non cambierà la sostanza dei calcoli e la generalizzazione ad un link qualunque sarà immediata. Sviluppando ciascun esponenziale dell'espressione (106), ed applicando la procedura di framing (95) a ciascun termine, ci ritroveremo a dover effettuare contrazioni del tipo

$$\left\langle \left( \oint_{C_1} A + \oint_{C_2} A \right)_{fremato}^n \right\rangle. \quad (107)$$

Nel valore d'aspettazione (107) sono presenti sia le contrazioni di Wick da integrarsi sullo stesso percorso ( $C_1$  o  $C_2$ ), sia quelle da integrarsi su  $C_1$  e  $C_2$  date dai prodotti misti. La combinatoria è la medesima già vista nella (102) salvo un fattore 2 nelle contrazioni miste. Alla fine, il risultato può essere risommato come nell'espressione (105), ed otteniamo

$$\langle W(C_1 \cup C_2) \rangle = e^{-i\left(\frac{\pi}{2k}\right)[q_1^2\chi(C_1, C_{1f}) + q_2^2\chi(C_2, C_{2f}) + 2q_1q_2\chi(C_1, C_2)]}. \quad (108)$$

Per un link generico  $\mathcal{L}$  troviamo all'esponente di  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle$  tutte le possibili combinazioni di  $\chi(C_i, C_{jf})$  con  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . In maniera compatta possiamo scrivere [7]:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle = e^{-i\left(\frac{\pi}{2k}\right)\sum_i \sum_j q_i \mathbb{L}_{ij} q_j} \quad (109)$$

dove  $\mathbb{L}_{ij}$  è la *matrice di allacciamento*, ed è definita da

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \chi(C_1, C_{1f}) & \chi(C_1, C_2) & \cdots & \chi(C_1, C_n) \\ \chi(C_1, C_2) & \chi(C_2, C_{2f}) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \chi(C_1, C_n) & \cdots & \cdots & \chi(C_n, C_{nf}) \end{pmatrix}. \quad (110)$$

La covarianza generale della soluzione esatta (109) è manifesta, e la matrice (110) contiene elementi fuori diagonale indipendenti dalla scelta del framing (infatti  $\chi(C_{if}, C_{jf}) = \chi(C_i, C_j)$  se  $i \neq j$ ). In altre parole, il valore di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle$  non è banale e dà come risultato un invariante topologico tipico della teoria dei nodi fremati.

Se consideriamo, al posto di  $\mathbb{R}^3$ , la sfera  $S^3$  il risultato finale è dato ancora dall'espressione (109). Questo può essere intuito con questo ragionamento. Lo spazio  $\mathbb{R}^3$  è omeomorfo ad  $S^3$  meno un punto:  $\mathbb{R}^3 \sim S^3 - \{\infty\}$ . D'altra parte, le proprietà topologiche dei nodi sono le stesse sia in  $S^3 - \{\infty\}$  che in  $S^3$  visto che è sempre possibile "sciogliere" un nodo da un punto. Alla fine, visto che le proprietà topologiche dei nodi in  $S^3$  ed  $\mathbb{R}^3$  sono le stesse segue [7]

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3}, \quad (111)$$

in quanto  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle$  dipende dalle sole proprietà topologiche di  $\mathcal{L}$ . L'espressione (111), lo vedremo, permetterà di implementare la chirurgia per il calcolo dei valori di aspettazione in qualsiasi varietà  $\mathcal{M}$  (chiusa, orientabile e connessa).

### 3.7 Calcolo delle Osservabili II

Con considerazioni di natura topologica, si è visto che vale  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3} = \langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathbb{R}^3}$ . Se volessimo calcolare esplicitamente  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3}$ , una possibilità potrebbe essere quella di ripetere la procedura di *BRS* in  $S^3$ . In generale, visto che lo spazio  $S^3$  è chiuso, non ci aspettiamo di ritrovare gli stessi valori dei propagatori determinati in  $\mathbb{R}^3$ . Questo suggerisce che possa esistere una qualche semplificazione nei calcoli.

In effetti, la procedura di gauge-fixing, calcolo dei propagatori, e approccio perturbativo non sono indispensabili per il calcolo di  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle$ . Dimostriamolo.

L'integrale di una 1-forma  $A$  lungo un nodo orientato  $C \subset S^3$  può essere riscritta come

$$\oint_C A = \int_{S^3} A \wedge J_C, \quad (112)$$

dove la corrente  $J_C$  è una 2-forma distribuzionale con supporto su  $C$ . In  $S^3$ , ogni nodo  $C$  può essere visto come il bordo di una superficie di Seifert  $\Sigma_C$ , per cui la corrente  $J_C$  è una forma esatta  $J_C = d\eta_C$ . Alla fine, possiamo riscrivere l'operatore di Wilson come

$$W(C) = e^{i2\pi q \int_{S^3} A \wedge d\eta_C}, \quad (113)$$

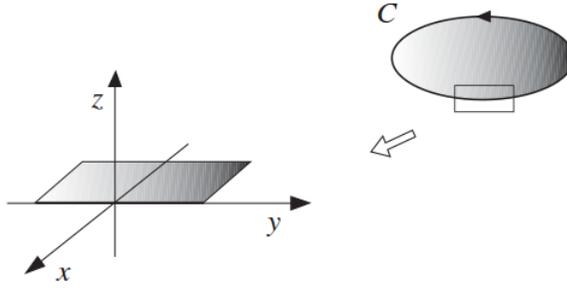


Figura 14: Rappresentazione locale di un nodo  $C$ . Da [12].

dove la 1-forma  $\eta_C$  ha supporto su  $\Sigma_C$ . Come esempio, possiamo considerare l'unknot  $C$  mostrato in figura (14). La 1 forma  $\eta_C$  ha supporto sulla superficie di Seifert  $\Sigma_C$ , e localmente è data da

$$\eta_C = \delta(z) \theta(-x) dz, \quad (114)$$

dove  $(x, y, z)$  sono le coordinate locali. Dato che  $J_C = \delta(z) \delta(x) dz \wedge dx$ , l'integrale di volume  $\int A \wedge J_C$  coincide proprio con l'integrale di linea calcolato sulla relativa porzione di nodo.

Se siamo interessati ad un link  $\mathcal{L} = \{C_1, \dots, C_n\}$  la generalizzazione è immediata; possiamo definire infatti

$$\eta_{\mathcal{L}} = \sum_i^n q_i \eta_i, \quad (115)$$

dove  $q_i, \eta_i$  sono rispettivamente colore e 1-forma associate alla componente  $i$ -esima del link. Alla fine

$$W(\mathcal{L}) = e^{i2\pi \int_{S^3} A \wedge d\eta_{\mathcal{L}}}. \quad (116)$$

Il loop di Wilson, in questa forma, ha un aspetto familiare e coincide con il termine di sorgente utilizzato per definire il funzionale generatore (56). Il funzionale  $G[\eta]$ , lo abbiamo visto, non necessita di una procedura di gauge fixing per essere calcolato. Sostituendo  $\eta \rightarrow 2\pi\eta_{\mathcal{L}}$  nella soluzione generale (61) troviamo subito

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3} = e^{-i(\frac{\pi}{2k}) \int_{S^3} \eta_{\mathcal{L}} \wedge d\eta_{\mathcal{L}}}. \quad (117)$$

Il risultato (117) coincide con la soluzione (109) determinata in  $\mathbb{R}^3$ . Vale infatti [19]

$$\int_{S^3} \eta_i \wedge d\eta_j = \int_{S^3} \eta_j \wedge d\eta_i = \chi(C_i, C_j) \quad i \neq j, \quad (118)$$

in quanto  $\eta_i \wedge d\eta_j$  è una 3-forma di intersezione e conta quante volte il nodo  $C_2$  interseca la superficie di Seifert  $\Sigma_{C_1}$ . Naturalmente, l'espressione (117) continua ad essere valida anche in  $\mathbb{R}^3$ , in quanto ogni nodo è ancora il bordo di una superficie di Seifert.

Può essere utile vedere più in dettaglio l'integrale  $\int \eta_i \wedge d\eta_j$ , e verificare che effettivamente dà lo stesso risultato dell'integrale di Gauss. Per fare questo consideriamo due nodi  $C_1, C_2 \subset S^3$  e le rispettive 1-forme distribuzionali  $\eta_{C_1}, \eta_{C_2}$ . Sfruttando la proprietà (112) otteniamo subito:

$$\int_{S^3} \eta_{C_1} \wedge d\eta_{C_2} = \oint_{C_2} \eta_{C_1}. \quad (119)$$

La 1-forma  $\eta_{C_1}$  ha supporto sulla superficie di Seifert  $\Sigma_{C_1}$  con bordo  $\partial\Sigma_{C_1} = C_1$ . In modo simile a quanto visto per l'espressione locale (114), la 1-forma distribuzionale  $\eta_{C_1}$  è una delta di Dirac concentrata sulla superficie  $\Sigma_{C_1}$ . Se  $C_2$  non interseca mai  $\Sigma_{C_1}$ , l'integrale (119) è nullo in quanto l'integrando è zero sul dominio d'integrazione. Viceversa, se  $C_2$  interseca la superficie  $\Sigma_{C_1}$ , ciascun punto  $p_i \in C_2 \cap \Sigma_{C_1}$  contribuisce all'integrale  $\oint_{C_2} \eta_{C_1}$  a causa della delta di Dirac definita su  $\Sigma_{C_1}$ . Poichè  $C_2$  e  $\Sigma_{C_1}$  sono rispettivamente nodi e superfici orientate, intersezioni entranti/uscenti hanno segni opposti. In altre parole:

$$\oint_{C_2} \eta_{C_1} = \sum_{p_i} \epsilon(p_i), \quad (120)$$

dove  $\epsilon(p_i) = \pm 1$  dipende da come fissiamo le orientazioni di  $C_1$  e  $C_2$ . La somma nell'espressione (120) coincide con il numero di allacciamento  $\chi(C_1, C_2)$ , per cui l'integrale  $\int \eta_{C_1} \wedge d\eta_{C_2}$  dà lo stesso valore dell'integrale di Gauss, ed ha la giusta normalizzazione. Si noti, tuttavia, come integrale di Gauss e forma d'intersezione (118) siano integrali differenti. In effetti, nell'integrale di Gauss, il numero di allacciamento viene ottenuto come limite di opportuni angoli solidi, e contribuiscono all'integrale tutti i punti di  $C_j$  e  $\Sigma_{C_i}$  (o viceversa) esclusi quelli  $p \in C_i \cap \Sigma_{C_j}$ . Nell'integrale (118), invece, soltanto i punti  $p \in C_i \cap \Sigma_{C_j}$  contribuiscono all'integrazione; in altre parole non è possibile riscrivere  $\int \eta_i \wedge d\eta_j$  come un integrale di Gauss.

Torniamo all'espressione (117). Utilizzando il risultato (118), e tenendo conto che i termini  $\int \eta_i \wedge d\eta_i$  necessitano una procedura di framing per essere definiti otteniamo subito:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3} = \exp \left( -i \left( \frac{2\pi}{4k} \right) \sum_i \sum_j q_i \mathbb{L}_{ij} q_j \right), \quad (121)$$

che coincide con il risultato noto. Il coefficiente  $\pi/2k$  è stato sostituito con  $2\pi/4k$  per mettere in evidenza le proprietà di periodicità che analizzeremo più avanti. Vediamo, infine, come la curvatura non si annulli in presenza di un link. L'equazione del moto in presenza di un nodo  $C$  diventa

$$\epsilon^{\gamma\nu\rho} F_{\nu\rho}(x) = -\frac{q}{k} \epsilon^{\gamma\alpha\beta} \partial_\alpha \eta_\beta^C. \quad (122)$$

Poiché la 2-forma  $d\eta_C = \partial_\beta \eta_C^\alpha dx_\beta \wedge dx_\alpha$  è concentrata sul nodo  $C$ , la curvatura sul nodo non è nulla. Questo ricorda l'effetto di  $AB$ , dove la curvatura è nulla ovunque tranne una porzione di spazio dove non possono accedere gli elettroni. Allo stesso modo, nella teoria di  $CS$ , la curvatura è concentrata sul link  $\mathcal{L}$  e le componenti non possono intersecarsi. Per questo motivo i valori di aspettazione sono invarianti sotto isotopia ambiente ma non sotto omotopia. Una trasformazione di omotopia, infatti, può deformare i nodi intersecandone le componenti.

### 3.8 Proprietà delle Osservabili

Riassumiamo brevemente i risultati del capitolo precedente. Le proprietà topologiche dei link in  $\mathbb{R}^3$  e  $S^3$  coincidono, ed il valore di aspettazione per il generico loop di Wilson  $W(\mathcal{L})$  è dato da:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3} = \exp \left( -i \left( \frac{2\pi}{4k} \right) \sum_i \sum_j q_i \mathbb{L}_{ij} q_j \right). \quad (123)$$

Gli elementi fuori diagonale della matrice  $\mathbb{L}$  sono associati al link  $\mathcal{L}$ , e coincidono con il numero di avvolgimenti tra le diverse componenti  $\{C_1, \dots, C_n\}$  del link:

$$\mathbb{L}_{ij} = \chi(C_i, C_j) = \chi(C_j, C_i), \text{ per } i \neq j. \quad (124)$$

Gli elementi diagonali  $\mathbb{L}_{ii}$  coincidono con il numero di avvolgimenti della componente  $C_i$  con il proprio framing:

$$\mathbb{L}_{ii} = \chi(C_i, C_{if}) = \chi(C_{if}, C_i). \quad (125)$$

La matrice  $\mathbb{L}$  è un invariante topologico del link fremato  $\mathcal{L}$ ; infatti ciascun elemento  $\chi(C_i, C_j)$  è un invariante di isotopia ambiente anche per  $i = j$ . Alla fine,  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle$  non dipende dalle deformazioni continue di  $\mathcal{L}$ . Come si è visto nel capitolo (2) è sempre possibile descrivere un link fremato mediante diagrammi nell'ambito dell'isotopia regolare. Questo equivale a rimpiazzare ciascuna componente fremata  $C_i$  di  $\mathcal{L}$  con un nastro, che possiamo denotare col medesimo simbolo  $C_i$ . In questo modo  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle$  è invariante sotto isotopia ambiente del link di nastri  $\mathcal{L}$ , mentre  $\chi(C_i, C_i)$  coincide con il twist del nastro  $i$ -esimo.

Analizziamo alcune simmetrie di  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle$ . Assumiamo che la generica componente  $C_j$  del link  $\mathcal{L}$  abbia colore  $|q_j| > 1$ . Dall'espressione (123) segue che se a  $C_j$  sostituiamo  $|q_j|$  componenti parallele  $\{\tilde{C}_j^1, \dots, \tilde{C}_j^{q_j}\}$  con colore  $q = 1$  ciascuna, il valore di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle$  non cambia. In generale, ogni componente  $C_i$  con colore  $|q_i| > 1$  può essere rimpiazzata con una unione di  $|q_i|$  copie parallele. Possiamo indicare con  $\tilde{\mathcal{L}}$  il link così modificato. Alla fine

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle = \langle W(\tilde{\mathcal{L}}) \rangle. \quad (126)$$

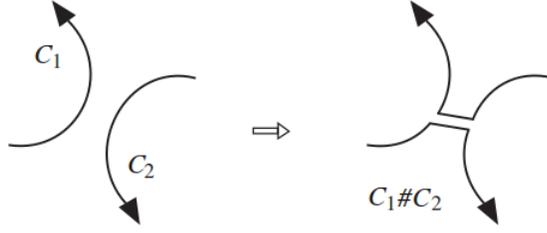


Figura 15: Somma dei nodi  $C_1, C_2$ . Da [10].

Il link  $\tilde{\mathcal{L}}$  è chiamato satellite simpliciale di  $\mathcal{L}$ .

Consideriamo adesso la somma di due nodi. Siano  $C_1, C_2$  due componenti del link  $\mathcal{L}$  con lo stesso colore  $q$ . Agendo come mostrato in figura (15) otteniamo il nodo  $C_1\#C_2$  (con colore  $q$ ), che possiamo definire come la somma di  $C_1$  e  $C_2$ . In generale  $C_1$  e  $C_2$  possono essere legati tra loro in modo non banale, ma la loro somma risulta sempre ben definita. In particolare, se  $C_j$  è una qualsiasi componente di  $\mathcal{L}$  (con  $j \neq 1, 2$ ) il numero di avvolgimento soddisfa:

$$\chi(C_1\#C_2, C_j) = \chi(C_1, C_j) + \chi(C_2, C_j). \quad (127)$$

Il framing  $(C_1\#C_2)_f$  del nodo  $C_1\#C_2$  è definito come la somma dei framing  $C_{1f}\#C_{2f}$ . Dalla relazione (127) si ottiene

$$\chi\left((C_1\#C_2)_f, C_1\#C_2\right) = \chi(C_{1f}, C_1) + \chi(C_{2f}, C_2) + 2\chi(C_2, C_1). \quad (128)$$

Nel valore di aspettazione (123), i nodi  $C_1, C_2$  entrano nel termine

$$\chi(C_1, C_{1f}) + \chi(C_2, C_{2f}) + 2\chi(C_1, C_2) + 2\sum_{j=3}^n [\chi(C_1, C_j) + \chi(C_2, C_j)], \quad (129)$$

per cui confrontando con le espressioni (127) e (128) si ottiene

$$\langle W(C_1, C_2, \dots, C_n) \rangle_{S^3} = \langle W(C_1\#C_2, \dots, C_n) \rangle_{S^3}. \quad (130)$$

In generale è possibile sommare a due a due tutte le componenti di  $\mathcal{L}$  con lo stesso colore. Questa proprietà può essere combinata con la (126). Se sostituiamo ad  $\mathcal{L}$  il suo satellite simpliciale  $\tilde{\mathcal{L}}$ , tutte le componenti avranno lo stesso colore ( $q_i = 1 \forall i$ ). In questo modo è possibile sommare tutte le componenti di  $\tilde{\mathcal{L}}$  sino ad ottenere un singolo nodo  $\mathcal{L}^\#$ . Il risultato finale  $\mathcal{L}^\#$  dipende da come scegliamo di sommare le varie componenti, ed in ogni caso vale

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3} = \langle W(\tilde{\mathcal{L}}) \rangle_{S^3} = \langle W(\mathcal{L}^\#) \rangle_{S^3} \quad \forall \mathcal{L} \subset S^3. \quad (131)$$

Alla fine, qualsiasi sia il link colorato di partenza  $\mathcal{L}$ , è sempre possibile sostituirlo con un singolo nodo equivalente  $\mathcal{L}^\#$  con colore  $q = 1$ , ed il risultato  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle$  non cambia. Vale infatti per costruzione:

$$\sum_i \sum_j q_i \mathbb{L}_{ij} q_j = \chi(\mathcal{L}^\#, \mathcal{L}^\#). \quad (132)$$

Analizziamo un'ultima simmetria dei valori di aspettazione. La matrice di allacciamento  $\mathbb{L}_{ij}$  assume valori interi, per cui il risultato (123) è invariante sotto una trasformazione  $q_j \rightarrow q_j + 2k$ . Se la costante  $k$  è intera, lo spazio dei colori può essere identificato con  $\mathbb{Z}_{2k}$  e il numero di colori distinguibili è  $2k$ ; in altre parole ogni operatore di Wilson è caratterizzato da un colore che appartiene a  $\mathbb{Z}_{2k}$ . D'ora in avanti richiediamo che  $k$  sia intero:

$$k \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad \textit{d'ora in avanti}. \quad (133)$$

Naturalmente, la condizione (133) non è vincolante per il calcolo dei valori d'aspettazione in  $\mathbb{R}^3$  o  $S^3$ . Viceversa sarà cruciale per l'estensione della teoria a differenti 3-varietà  $\mathcal{M}$ .

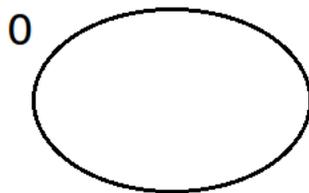


Figura 16: Esempio di nodo chirurgico. La varietà associata è  $\mathcal{M} = S^2 \times S^1$ .

## 4 Chirurgia su 3-Varietà $\mathcal{M}$

### 4.1 Chirurgia di Dehn in $S^3$

Una  $n$ -varietà  $\mathcal{M}$  è uno spazio topologico a  $n$  dimensioni in cui ciascun punto  $x \in \mathcal{M}$  ha un intorno omeomorfo allo spazio euclideo  $n$ -dimensionale. Se ogni successione di Cauchy in  $\mathcal{M}$  è convergente, la varietà si dice *compatta*. D'ora in avanti saremo interessati principalmente a varietà compatte e prive di bordo ( $\partial\mathcal{M} = \emptyset$ ); varietà di questo tipo sono dette *chiuse*.

In generale, ogni varietà  $\mathcal{M}$  può essere vista come come unione di un certo numero di componenti incollate tra loro identificando i bordi in modo opportuno. Fissate le componenti, ed incollando quest'ultime in modo differente si possono ottenere varietà differenti:  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}'$ ...ecc. L'insieme delle tecniche che permettono di ottenere le une dalle altre prendono il nome di *chirurgia*. In questo capitolo, ci occuperemo di un particolare esempio di chirurgia su 3-varietà, introdotta da M. Dehn, che permette di ottenere qualsiasi 3-varietà chiusa, connessa ed orientata a partire dalla sfera  $S^3$ . Dato un nodo  $Z \subset S^3$ , la chirurgia di Dehn consiste in tre punti fondamentali [11]:

1. rimuovere l'interno  $\overset{\circ}{N}$  di un intorno tubolare  $N$  del nodo  $Z$  da  $S^3$ ;
2. considerare  $S^3 - \overset{\circ}{N}$  ed  $N$  come spazi separati, dove i bordi (distinti)  $\partial(S^3 - \overset{\circ}{N})$  e  $\partial N$  sono tori;
3. incollare  $S^3 - \overset{\circ}{N}$  e  $N$  identificando i punti dei loro bordi  $\partial N$ ,  $\partial(S^3 - \overset{\circ}{N})$  tramite un omeomorfismo  $h : \partial N \rightarrow \partial(S^3 - \overset{\circ}{N})$ .

Il nodo  $Z$ , e l'omeomorfismo  $h$  specificano completamente le istruzioni di chirurgia, e la 3-varietà risultante può essere indicata con:

$$\mathcal{M} = \left( S^3 - \overset{\circ}{N} \right) \bigcup_h N. \quad (134)$$

In generale, ogni 3-varietà chiusa, orientabile e connessa ammette una descrizione in termini di chirurgia di Dehn a partire da  $S^3$  [11].

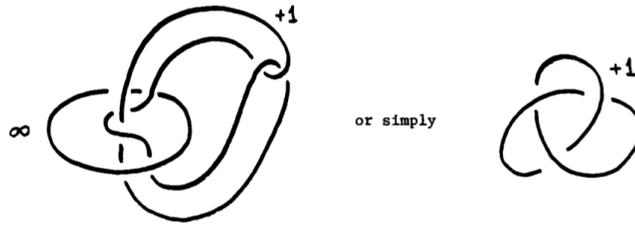


Figura 17: Esempio di prima mossa di Rolfsen. Da [11].

L'omeomorfismo  $h$  manda un meridiano  $\mu$  di  $N$ , in una curva (nodo torico)  $h(\mu)$ , la cui classe di omotopia  $[h] \in \pi_1(\partial N)$  è data da:

$$[h(\mu)] = a \cdot [\mu] + b \cdot [\lambda], \quad (135)$$

dove, al solito, i generatori  $\mu$  e  $\lambda$  sono rispettivamente meridiano e longitudine nella base di Rolfsen in  $\partial N$ . La varietà risultante, fissato il nodo  $Z$ , dipende (a meno di omeomorfismi) soltanto dalla classe di omotopia  $[h(\mu)]$ . Come si è visto, i coefficienti interi  $a$ ,  $b$  devono essere primi tra loro; per questo motivo possiamo considerare unicamente il rapporto

$$r = \frac{a}{b}, \quad (136)$$

che prende il nome di *coefficiente di chirurgia*. Se  $b = 0$ , essendo  $h$  un omeomorfismo, abbiamo necessariamente  $a = \pm 1$ , ed il coefficiente di chirurgia viene denotato con  $r = \infty$ . Se  $r = \infty$ ,  $h(\mu)$  è uguale (a meno di isotopia ambiente) al meridiano stesso, e la varietà  $\mathcal{M}$  definita dall'espressione (134) coincide con quella di partenza, ossia<sup>5</sup>  $S^3$ . Per questo motivo, un nodo  $Z$  di chirurgia con coefficiente  $\infty$  corrisponde all'identità.

In generale, possiamo “tagliare” ed “incollare” un certo numero di tori solidi in  $S^3$ ; questo corrisponde ad un link di chirurgia  $\mathcal{L}_s \subset S^3$ , dove a ciascuna componente  $\{\mathcal{L}_i\}$  è associato un proprio coefficiente  $r_i$ . Per fare un esempio concreto possiamo considerare la 3-varietà  $S^2 \times S^1$ . In questo caso, la presentazione di chirurgia è data semplicemente da un unknot con coefficiente di chirurgia 0, come mostrato in figura (16). Altri esempi di 3-varietà costruite “chirurgicamente” sono mostrati nel dettaglio in appendice (8.1).

A link di chirurgia differenti non necessariamente corrispondono varietà differenti; in generale due varietà sono omeomorfe se e solo se i rispettivi link di chirurgia sono legati tra loro da una sequenza finita di mosse di Rolfsen [11]. La prima mossa, rappresentata in figura (17), è la seguente:

- Se  $\mathcal{L}$  è un link di chirurgia, a questo possiamo togliere (o aggiungere) componenti con coefficiente di chirurgia  $r = \infty$ .

<sup>5</sup>Se  $h(\mu)$  manda meridiani in meridiani,  $h$  è equivalente all'identità, e lo spazio risultante è tutto  $S^3$ .

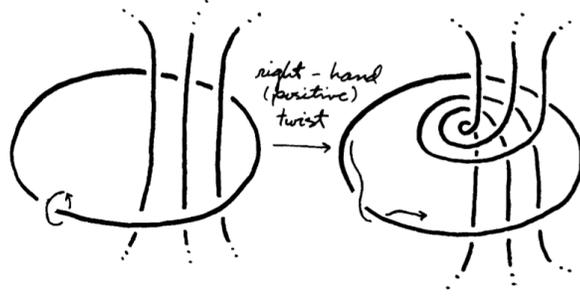


Figura 18: Esempio di seconda mossa di Rolfsen. Da [11].

Questa mossa è intuitiva; ogni componente con  $r = \infty$ , infatti, corrisponde all'identità e può essere aggiunta o tolta. Le mosse di Rolfsen di secondo tipo sono più complesse, e coinvolgono opportuni twist. Siano  $(\mathcal{L}_s, r) = \{\mathcal{L}_1, r_1, \dots, \mathcal{L}_m, r_m\}$  delle istruzioni di chirurgia con  $\mathcal{L}_1 = U$ . Le componenti  $\mathcal{L}_i$  con  $i \neq 1$ , vivono nel toro solido complemento di  $\mathcal{L}_1$ , che possiamo denotare con  $\nu_1 = S^1 \times D^2$ . Se consideriamo un twist meridiano di  $\nu_1$   $\tau_{\pm} : \mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{L}'_i$  (come mostrato in figura (18)), soltanto le componenti  $i \neq 1$  saranno modificate. D'altra parte, cambieranno pure i coefficienti di chirurgia di tutte le componenti,  $\mathcal{L}_1$  compresa. Concentriamoci sulla componente  $\mathcal{L}_1$ . Utilizzando l'espressione (26) vediamo che un twist meridiano modifica la classe di omotopia come:

$$\tau_{\pm} : [\mathcal{L}_1] = b \cdot [\lambda] + a \cdot [\mu] \rightarrow (b \pm a) \cdot [\lambda] + a \cdot [\mu], \quad (137)$$

dove abbiamo usato il fatto che un twist meridiano su  $\nu_1$  equivale ad un twist longitudinale in un intorno tubolare di  $\mathcal{L}_1$ . Il coefficiente di chirurgia  $r_1$ , diventa perciò:

$$\tau_{\pm} : r_1 = \frac{a}{b} \rightarrow r'_1 = \frac{a}{b \pm a} = \frac{1}{\frac{1}{r_1} \pm 1}. \quad (138)$$

Per quanto riguarda le componenti  $i \neq 1$ , i nuovi coefficienti di chirurgia, dipendono da come queste ultime sono disposte in  $\nu_1$ . Si può dimostrare [11] che i nuovi coefficienti  $r_i$  dipendono unicamente da  $|\chi(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_i)|$ ; esplicitamente:

$$\tau_{\pm} : r_i \rightarrow r'_i = r_i \pm |\chi(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_i)|^2. \quad (139)$$

Utilizzando le notazioni appena definite, possiamo introdurre le mosse di Rolfsen di secondo tipo:

- Se  $(U, r_1, \dots, \mathcal{L}_m, r_m)$  sono delle istruzioni di chirurgia, è possibile twistare il complemento di  $U$  ed assegnare nuovi coefficienti di chirurgia, dati dalle espressioni (138) e (139).

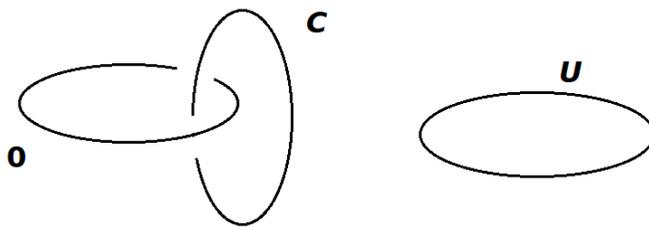


Figura 19: Due esempi di nodi in  $\mathcal{M} = S^2 \times S^1$ .

Poiché tutte le presentazioni di chirurgia che differiscono le une dalle altre per una serie finita di mosse di Rolfsen sono relative a varietà omeomorfe, possiamo chiederci se esiste una qualche forma “canonica” di presentazione. La risposta è affermativa ed è inclusa nell’enunciato del teorema fondamentale [11, 20]:

- **Teorema Fondamentale di Lickorish.** Ogni 3-varietà  $\mathcal{M}$  chiusa, orientabile, e connessa può essere ottenuta mediante chirurgia in  $S^3$ . È sempre possibile, inoltre, trovare una presentazione di chirurgia in cui tutti i coefficienti di chirurgia sono  $\pm 1$ , e ciascuna componente del link di chirurgia è un unknot.

## 4.2 Chirurgia Elementare e Link Reali in $\mathcal{M}$

Il teorema di Lickorish garantisce che qualsiasi varietà  $\mathcal{M}$  (chiusa, connessa, orientabile), può essere ottenuta da una opportuna combinazione di “operazioni chirurgiche” elementari. Queste operazioni, che sono descritte dagli unknot  $U$  in  $S^3$  con coefficiente di chirurgia  $\pm 1$ , possiamo denotarle con  $S_+ = \{U, +1\}$ ,  $S_- = \{U, -1\}$ . L’effetto prodotto da ciascuna operazione è noto, e può essere determinato direttamente dalle mosse di Rolfsen. Per fare questo consideriamo un generico link di chirurgia  $\mathcal{L}_s$  ridotto, tramite mosse di Rolfsen, alla forma “canonica” di Lickorish. Focalizziamoci su la generica  $i$ -esima componente  $S_+^i = \{U^i, +1\}$  ( $S_-^i = \{U^i, -1\}$ ), ed eseguiamo un twist levogiro (destrogiro) nel rispettivo toro solido  $\nu_i$  complemento di  $U^i$ . Dall’espressione (138), vediamo che il nuovo coefficiente di chirurgia diventa  $r_i \Rightarrow \infty$ , e la componente può essere rimossa. In conclusione, l’operazione chirurgica elementare può essere così riassunta:

- L’operazione chirurgica elementare  $S_+$  ( $S_-$ ) associata all’unknot  $U$  è equivalente a quella di un twist meridiano levogiro (destrogiro) del toro solido complemento di  $U$  in  $S^3$ .

Oltre alla forma canonica di Lickorish, siamo interessati ad un’altra presentazione, detta “onesta”. Nella presentazione “onesta” tutti i coefficienti di chirurgia  $\{r_i\}$  sono interi, mentre le componenti  $\{\mathcal{L}_i\}$  non sono necessariamente unknot. Questo tipo di presentazione è possibile per ogni varietà  $\mathcal{M}$ , ed è particolarmente utile in diverse circostanze [11]. Vediamone il motivo.

Se i coefficienti di chirurgia sono degli interi, questi specificano una longitudine in ogni intorno tubolare che ha numero di allacciamento pari all’intero in questione. Per definizione una longitudine è un framing, quindi possiamo reinterpretare un link di chirurgia come un link con framing. L’analogo delle mosse di Rolfsen, nella presentazione “onesta”, è rappresentato dalle *mosse di Kirby*. Le mosse di Kirby sono un sottoinsieme di mosse di Rolfsen, e si applicano soltanto quando i nuovi coefficienti (138) sono interi. In altre parole “connettono” solo presentazioni “oneste”. Dato che i coefficienti iniziali sono interi per ipotesi, l’unica possibilità è rappresentata dal togliere tramite

opportuni twist componenti unknot con coefficienti di chirurgia (o framing)  $\pm 1$ . Alla fine, dato che ciascuna varietà  $\mathcal{M}$  ammette una presentazione “onesta”, due varietà saranno omeomorfe se e solo se le relative presentazioni “oneste” sono legate da una sequenza finita di mosse di Kirby [11].

La presentazione onesta è comoda perché è possibile trattare i link di chirurgia come link dotati di framing.

A questo punto è necessario specificare come rappresentare un link “reale” fremato  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$  usando la chirurgia di Dehn. Se  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ , questo può essere rappresentato da un link  $\mathcal{L}' \subset S^3$  dato dall'unione di due link:  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_s$ , dove  $\mathcal{L}_s$  è un link di chirurgia associato ad  $\mathcal{M}$ , mentre  $\mathcal{L}_0$  vive nel complemento di  $\mathcal{L}_s$  ed è equivalente (sotto isotopia ambiente) ad  $\mathcal{L}$  in  $\mathcal{M}$ . In altre parole, il modo in cui  $\mathcal{L}_0$  è legato a  $\mathcal{L}_s$  mostra come, effettivamente,  $\mathcal{L}$  è disposto in  $\mathcal{M}$ . Al solito, dato che  $\mathcal{L}' \subset S^3$  possiamo specificarlo tramite diagramma, che si ottiene proiettando  $\mathcal{L}'$  su di un piano, avendo cura di distinguere “sopra” e “sotto” negli incroci.

Per fissare le idee è utile mostrare un esempio concreto. Consideriamo un nodo “reale”  $U$  definito in  $\mathcal{M} = S^1 \times S^2$ . Lo spazio  $\mathcal{M} = S^1 \times S^2$  (vedi appendice (8.1)), può essere rappresentato da un unknot di chirurgia ( $U_s$ ), con coefficiente di chirurgia  $r = 0$ . Se  $U$  è un unknot in  $S^1 \times S^2$ , questo è rappresentabile per mezzo di due unknot  $\{U, U_s\}$  in  $S^3$  disgiunti tra loro. Questo nodo è mostrato in figura (19). L'unknot reale  $U$ , dal punto di vista dell'omotopia è banale, infatti la mappa  $U : S^1 \rightarrow S^1 \times S^2$  è contraibile per omotopia ad un punto. Sempre in figura (19), abbiamo rappresentato un altro nodo  $C \subset S^1 \times S^2$ ; in questo caso  $C$  non è un unknot poiché non è omotopicamente contraibile ad un punto.

Sappiamo che un link  $\mathcal{L}$  non è invariato sotto generici omeomorfismi, mentre la chirurgia provvede a descrivere 3-varietà a meno di omeomorfismi. Può sorgere il dubbio che i link  $\mathcal{L}$  in  $\mathcal{M}$ , descritti tramite chirurgia, conducano a qualche sorta di ambiguità. Fortunatamente, rappresentando i link fremati in questo modo, non sorge nessuna ambiguità, e possiamo dimostrarlo come segue. Una varietà  $\mathcal{M}$  risulta completamente specificata dal link di chirurgia  $\mathcal{L}_s$ , e dalle classi di omotopia  $[h_i(\mu)] = (a_i, b_i)$  degli omeomorfismi associati a ciascuna componente di  $\mathcal{L}_s$ . Consideriamo, quindi, dei nuovi omeomorfismi  $h'_i$ , caratterizzati dalla medesima classe di omotopia di  $h_i$ :  $[h'_i(\mu)] = (a_i, b_i)$ .

L'auto-omeomorfismo  $\tau_i$  su  $\partial N_i$ , definito da  $\tau_i = h_i^{-1} \cdot h'_i$ , manda, per costruzione, meridiani in meridiani; per questo motivo  $\tau_i$  non può esser altro che un twist meridiano su  $\partial N_i$ , e quindi su  $N_i$ .

Il link fremato  $\mathcal{L}$ , in generale, è rappresentato da  $\mathcal{L}_0 \subset \left( S^3 - \sum_i \overset{\circ}{N}_i \right)$ , per cui non viene modificato (a meno di isotopia ambiente) da  $\tau_i$ .

### 4.3 Chirugia e Teoria di Chern-Simons

Siamo interessati ad estendere la teoria di  $CS$  ad una generica 3-varietà  $\mathcal{M}$  chiusa ed orientata. L'approccio classico consiste nel definire i campi, l'azione, e l'integrazione funzionale (o gli operatori campo) su  $\mathcal{M}$ . In generale, questo metodo è valido per ogni teoria di campo.

Dato che la teoria di  $CS$  in  $S^3$  è topologica, è del tutto naturale richiedere che questa proprietà venga mantenuta anche in  $\mathcal{M}$ . Vogliamo inoltre concentrarci sui valori di aspettazione dei loop di Wilson  $W(\mathcal{L})$ , dove  $\mathcal{L}$  è un link fremato definito in  $\mathcal{M}$ . Se richiediamo che siano soddisfatte queste proprietà, possiamo anche fare a meno di specificare i campi e l'azione. Esistono diversi elementi che suggeriscono questa possibilità.

La chirurgia di Dehn permette di ottenere qualsiasi varietà  $\mathcal{M}$  (chiusa ed orientata) rimuovendo ed incollando un certo numero di tori solidi. Alla fine, la descrizione di  $\mathcal{M}$  si riduce ad un'applicazione delle teoria dei nodi in  $S^3$ . D'altra parte, la teoria di  $CS$  la sappiamo risolvere esattamente in

$S^3$ , ed i valori di aspettazione coincidono con invarianti di isotopia ambiente tipici della teoria dei nodi. Questo aspetto indica che sia sufficiente determinare le relazioni che devono sussistere tra le istruzioni di chirurgia astratte e le relative regole nella teoria di campo. Vediamo nel dettaglio cosa significa.

Per definizione, il valore di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$ , è dato da un certo integrale funzionale normalizzato:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{\int_{\mathcal{M}} DA e^{iS[A]} W(\mathcal{L})}{\int_{\mathcal{M}} DA e^{iS[A]}}, \quad (140)$$

dove  $A$  sono i campi, mentre  $S[A]$  è l'azione di  $CS$  definita in  $\mathcal{M}$ . Per ipotesi non vogliamo considerare separatamente numeratore e denominatore dell'espressione (140), ma vogliamo limitarci alle simmetrie di  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$ . Il punto fondamentale è che il valore di aspettazione (140) è un invariante di isotopia ambiente del link fremato  $\mathcal{L}$ , per cui possiamo deformare il link con continuità senza modificare  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$ .

Dal punto di vista chirurgico, possiamo rappresentare lo stesso link  $\mathcal{L}$  come  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_s$ , dove  $\mathcal{L}_s$  è il link di chirurgia, mentre  $\mathcal{L}_0$  è equivalente ad  $\mathcal{L}$  in  $\mathcal{M}$ . Sappiamo che non esiste una presentazione unica; è possibile infatti eseguire una serie di mosse di Rolfsen (o Kirby) per determinare un'altra presentazione della stessa varietà. Si è visto inoltre che queste stesse mosse non modificano il link  $\mathcal{L}_0$  (e quindi  $\mathcal{L}$ ) a meno di isotopia ambiente. Dato che tutte le presentazioni sono equivalenti, possiamo sfruttare il teorema fondamentale di Lickorish, e concentrarci su una presentazione contenente soltanto operazioni chirurgiche elementari:  $S_{\pm}$ . Ciascuna operazione elementare ha un significato preciso, e consiste nel rimuovere da  $S^3$  un intorno tubolare di un unknot  $U$  e ricolloarlo identificando un meridiano con una longitudine che ha numero di avvolgimento  $\pm 1$  rispetto ad  $U$ .

L'azione dell'operazione  $S_{\pm}$  può essere intesa come un generatore di una trasformazione di simmetria, ed è data da un twist  $\tau_{\mp}$  del toro solido complemento di  $U$  in  $S^3$ . Dato che  $S_{\pm}$  connette  $S^3$  con  $S^3$ , e dato che la teoria di  $CS$  è nota in  $S^3$ , è sufficiente determinare come agiscono le operazioni fondamentali sui valori di aspettazione in  $S^3$ . In questo modo è possibile determinare  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$  mediante un calcolo in  $S^3$ .

#### 4.4 Operatori di Chirurgia

Dato che è sempre possibile ricordarci ad una presentazione canonica, limitiamoci per il momento alle operazioni chirurgiche elementari  $S_{\pm}$ . Sappiamo che  $S_+$  ( $S_-$ ) può essere interpretato come un generatore elementare di twist  $\tau_-$  ( $\tau_+$ ) sul toro solido complemento di  $U$  in  $S^3$ . Sia  $\mathcal{L}$  un link fremato nel complemento di  $U$  in  $S^3$ , ed indichiamo l'azione delle operazioni elementari nel seguente modo:

$$S_{\pm} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^{(\mp)}, \quad (141)$$

dove  $\mathcal{L}^{(\mp)}$  è il risultante di un twist levogiro ( $-$ ) o destrogiro ( $+$ ) su  $\mathcal{L} \subset S^3 - U$ . In generale, sotto  $S_{\pm}$ , pure i valori di aspettazione delle osservabili di  $CS$  in  $S^3$  vengono modificati, in quanto  $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}^{(\mp)}$ . Si ha quindi:

$$S_{\pm} : \langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3} \rightarrow \langle W(\mathcal{L}^{(\mp)}) \rangle_{S^3}. \quad (142)$$

Vogliamo introdurre delle grandezze  $\hat{S}_\pm$  che rappresentino, nella teoria di  $CS$ , gli operatori elementari di chirurgia  $S_\pm$ , e che agiscano come mostrato dall'espressione (142). Per fare questo è necessario prestare attenzione, e ricordare che il valore di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3}$ , è opportunamente normalizzato come:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3} = \frac{\int DAe^{iS[A]} W(\mathcal{L})}{\int DAe^{iS[A]}}. \quad (143)$$

Gli “operatori”  $\hat{S}_\pm$  sono associati ai generatori di twist, per cui modificano entrambi gli integrali funzionali compresa la normalizzazione. Per definizione si ha

$$\langle W(\mathcal{L}^{(\mp)}) \rangle_{S^3} = \frac{\int DAe^{iS[A]} W(\mathcal{L}) \hat{S}_\pm}{\int DAe^{iS[A]} \hat{S}_\pm} = \frac{\int DAe^{iS[A]} W(\mathcal{L}) \hat{S}_\pm / \int DAe^{iS[A]}}{\int DAe^{iS[A]} \hat{S}_\pm / \int DAe^{iS[A]}}, \quad (144)$$

da cui:

$$\langle W(\mathcal{L}^{(\mp)}) \rangle_{S^3} = \frac{\langle W(\mathcal{L}) \hat{S}_\pm \rangle_{S^3}}{\langle \hat{S}_\pm \rangle_{S^3}}. \quad (145)$$

Il significato del denominatore dell'espressione (145) è quello di una grandezza completamente indipendente dal link fremato  $\mathcal{L}$ . Questa grandezza, come vedremo, è legata alla varietà.

Gli operatori  $\hat{S}_\pm$  sono associati ai link elementari di chirurgia; nel nostro caso gli unknot. Dato che i nuovi valori di aspettazione coincidono con  $\langle W(\mathcal{L}^{(\mp)}) \rangle_{S^3}$ , gli operatori  $\hat{S}_\pm$  connettono osservabili gauge-invarianti tra loro; per questo motivo devono essere essi stessi gauge invarianti. In altre parole  $\hat{S}_\pm$  non possono essere altro che una opportuna combinazione di operatori di Wilson.

Nel paragrafo (3.8) si è visto che è possibile sostituire ad  $\mathcal{L}$  un singolo nodo, detto equivalente. Senza perdere in generalità, possiamo scegliere come nodo equivalente un unknot. Consideriamo dunque:

$$W(\mathcal{L}) \rightarrow W(C, n), \quad (146)$$

dove  $C$  è il cuore del complemento di  $U$ , mentre  $n$  è il colore. Il framing del nodo  $C$  può essere scelto arbitrariamente, e non entrerà nei successivi calcoli. Allo stesso modo, gli operatori  $\hat{S}_\pm$  possono essere riscritti come un opportuna combinazione di operatori di Wilson. Se la costante  $k$  è intera, i valori di aspettazione diventano periodici nel colore, ed è possibile riscrivere  $\hat{S}_\pm$  come una somma finita:

$$\hat{S}_\pm = \sum_{j=0}^{2k-1} \phi_\pm(j) W(U, j). \quad (147)$$

Consideriamo il valore di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}^{(\pm)}) \rangle_{S^3}$ . Dalla soluzione generale (121), è facile vedere che il valore di aspettazione associato a un link twistato può essere riscritto come:

$$\langle W(\mathcal{L}^{(\pm)}) \rangle_{S^3} = q^{\pm n^2} \langle W(C, n) \rangle_{S^3}, \quad (148)$$

dove si è definito  $q = \exp(-i(2\pi)/4k)$ , e si è sfruttata la relazione (146). Dalla definizione (145) otteniamo poi

$$\begin{aligned} & \langle \hat{S}^{\mp} \rangle_{S^3} q^{\pm n^2} \langle W(C, n) \rangle_{S^3} \\ &= \sum_{j=0}^{2k-1} \phi_{\mp}(j) \langle W(U, j) W(C, n) \rangle_{S^3}, \end{aligned} \quad (149)$$

o equivalentemente

$$\sum_{j=0}^{2k-1} \phi_{\pm}(j) \langle W(H(j, n)) \rangle_{S^3} = \langle \hat{S}^{\pm} \rangle_{S^3} q^{\mp n^2} \langle W(C, n) \rangle_{S^3}, \quad (150)$$

dove  $H(j, n)$  è l'Hopf link ( $H = U \cup C$ ) con colore delle componenti  $j$  ed  $n$ . Dalla soluzione in  $S^3$  (121) troviamo poi:

$$\langle W(H(j, n)) \rangle_{S^3} = q^{j^2 \chi(U, U_f) + 2nj} \langle W(C, n) \rangle_{S^3}. \quad (151)$$

Combinando tra loro le espressioni (150) e (151), otteniamo:

$$\sum_{j=0}^{2k-1} \phi_{\pm}(j) q^{j^2 \chi(U, U_f) + 2nj} = \langle \hat{S}^{\pm} \rangle_{S^3} q^{\mp n^2}. \quad (152)$$

Come si è visto nel paragrafo precedente, è sempre possibile scegliere una presentazione di chirurgia “onesta”. In questo tipo di presentazione, i coefficienti di chirurgia sono interi, e definiscono un framing. Conviene scegliere<sup>6</sup> come framing di  $U$  proprio il framing “naturale”, ossia:

$$\chi(U, U_f) = \pm 1. \quad (153)$$

Con la scelta (153) l'espressione (152) diventa:

---

<sup>6</sup>Il risultato, tuttavia, non dipende da come fissiamo il framing. La nostra è unicamente una scelta conveniente per i calcoli.

$$\sum_{j=0}^{2k-1} \phi_{\pm}(j) q^{\pm j^2 + 2nj} = \langle \hat{S}^{\pm} \rangle_{S^3} q^{\mp n^2}. \quad (154)$$

L'operatore  $\hat{S}^{\pm}$  è definito a meno di una costante  $\hat{S}^{\pm} \sim c^{\pm} \hat{S}^{\pm}$ . Il risultato finale  $\langle W(\mathcal{L}^{(\pm)}) \rangle$ , infatti, non dipende da questa costante in quanto nell'espressione (145) il numero  $c$  fattorizza. Grazie a questa arbitrarietà, è possibile risolvere l'equazione (154) utilizzando la somma di Gauss

$$\sum_{j=0}^{2k-1} \exp \left\{ - \left( \frac{2\pi i}{4k} \right) [\pm j^2 + 2nj] \right\} = e^{(\mp) i \frac{\pi}{4} \sqrt{2k}} \exp \left\{ - \left( \frac{2\pi i}{4k} \right) (\mp) n^2 \right\}, \quad (155)$$

da cui se ne deduce  $\phi_{\pm}(j) = 1/\sqrt{2k}$ . Utilizzando questo risultato nello sviluppo (147) troviamo finalmente [7]:

$$\hat{S}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{j=0}^{2k-1} W(U, j). \quad (156)$$

Alla fine, a meno di una costante moltiplicativa, l'operatore  $\hat{S}^{\pm}$  è dato semplicemente dalla somma sui colori degli operatori di Wilson associati all'unknot. Con questa scelta di normalizzazione, si ha inoltre [7]:

$$\langle \hat{S}^{\pm} \rangle_{S^3} = e^{\mp i \frac{\pi}{4}}. \quad (157)$$

Sia  $\mathcal{L}_s = \{U^1, \dots, U^p; r_1, \dots, r_p\}$  un link di chirurgia canonico che descrive la varietà  $\mathcal{M}$ . Visto che ciascun coefficiente  $r_i$  è semplicemente  $\pm 1$ , è possibile riscrivere il link di chirurgia in modo compatto:  $\mathcal{L}_s = \{S_1^{\pm}, \dots, S_p^{\pm}\}$ . Le istruzioni contenute in  $\mathcal{L}_s$  sono note, e corrispondono a  $p$  twist da effettuarsi nei vari complementi degli unknot. Dato che sappiamo rappresentare nella teoria di campo ciascuna operazione elementare  $S^{\pm}$ , possiamo introdurre l'operatore  $\hat{S}(\mathcal{L}_s)$  che rappresenta l'intera chirurgia. Esplicitamente:

$$\hat{S}(\mathcal{L}_s) = \prod_{i=1}^p \hat{S}_i^{\pm}. \quad (158)$$

Sia  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$  il link fretrato di cui vogliamo calcolare il valore di aspettazione. Dal punto di vista chirurgico questo nodo può essere descritto da  $\mathcal{L}_0$ , ed è definito nel complemento di  $\mathcal{L}_s$  in  $S^3$ . Come si è visto, il link  $\mathcal{L}_0$  rappresenta la classe di isotopia ambiente di  $\mathcal{L}$ , per cui non ci sono ambiguità ed è possibile utilizzare lo stesso simbolo  $\mathcal{L}$  per indicarli entrambi.

Il valore di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$  rappresenta un invariante di isotopia ambiente del link  $\mathcal{L}$  in  $\mathcal{M}$ . Questo stesso valore può essere calcolato in  $S^3$  utilizzando la chirurgia. Definiamo dunque [7]:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3}}{\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \rangle_{S^3}}. \quad (159)$$

La scelta (159) è consistente, per costruzione, con la naturale estensione della teoria di  $CS$  in  $\mathcal{M}$ . In effetti, l'espressione (159) è stata costruita *ad hoc* per essere invariante sotto isotopia ambiente del link  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ , mentre l'effetto del link di chirurgia  $\mathcal{L}_s$  su  $\mathcal{L} \subset S^3$  è mimato dall'operatore  $\hat{S}(\mathcal{L}_s)$  che agisce direttamente su  $\mathcal{L} \subset S^3$  all'interno dei valori di aspettazione in  $S^3$ . Le simmetrie sono così vincolanti che non ci sono ambiguità nel definire la soluzione combinatorica della teoria in  $\mathcal{M}$ . Alcune verifiche dirette sull'espressione (159) confermano una serie di proprietà attese. In primo luogo, se  $\mathcal{M} = S^3$  ritroviamo il risultato classico. In secondo luogo, se  $\mathcal{L}$  appartiene ad una 3-palla  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ , gli operatori  $\hat{S}(\mathcal{L}_s)$  non agiscono su  $\mathcal{L}$ . Questo può essere verificato direttamente notando che  $\mathcal{L}$  è sempre rappresentabile come un link disgiunto dalle componenti chirurgiche. Dato che  $\mathcal{L}$  ed  $\mathcal{L}_s$  sono disgiunti, il numeratore dell'espressione (159) fattorizza  $\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3} = \langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \rangle_{S^3} \langle W(\mathcal{L}_s) \rangle_{S^3}$ , ed otteniamo:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3}, \quad \text{se } \mathcal{L} \subset \mathcal{B}. \quad (160)$$

La proprietà (160) è una caratteristica attesa, in quanto il link  $\mathcal{L}$  è tutto definito in una 3-palla in  $\mathcal{M}$ , e dal punto di vista topologico è come se fosse definito in  $S^3$  o  $\mathbb{R}^3$ .

Spesso è più comodo rappresentare una varietà tramite una presentazione "onesta", in cui i coefficienti di chirurgia  $r_i$  sono degli interi, e ciascuna componente  $\mathcal{L}_s^i$  di  $\mathcal{L}_s$  non è necessariamente un unknot. In questo caso, lo sviluppo generale (158), non è più valido in quanto contiene soltanto gli operatori elementari  $\hat{S}^\pm$ . È conveniente introdurre un operatore di chirurgia definito per ogni presentazione onesta. Con la scelta di framing definita dalla relazione  $\chi(\mathcal{L}_s^i, \mathcal{L}_{sf}^i) = r_i$ , che è l'analogo della (153), l'operatore di chirurgia  $\hat{S}(\mathcal{L}_s^i, r_i)$  associato alla  $i$ -esima componente di  $\mathcal{L}_s$  diventa [7]

$$\hat{S}(\mathcal{L}_s^i, r_i) = \frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{j=0}^{2k-1} W(\mathcal{L}_s^i, j), \quad (161)$$

da cui

$$\hat{S}(\mathcal{L}_s) = \prod_{i=1}^p \hat{S}(\mathcal{L}_s^i, r_i), \quad (162)$$

dove  $W(\mathcal{L}_s^i, j)$  è l'operatore di Wilson associato alla componente  $i$ -esima con colore  $j$ . Naturalmente, se la presentazione onesta è quella canonica, ritroviamo lo sviluppo (156). Per dimostrare che lo sviluppo (161) è corretto, è sufficiente mostrare che il valore d'aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$  calcolato con gli operatori (161) è invariante sotto mosse di Kirby. Verifichiamolo.

Consideriamo una mossa elementare di Kirby. Sia  $\mathcal{L}_s = \{U_s, \mathcal{L}_s^2, \dots, \mathcal{L}_s^p\}$ , dove  $U_s$  è un unknot con coefficiente di chirurgia  $r = \pm 1$ . Nel toro solido  $\nu_1$  complemento di  $U_s$  in  $S^3$  è definito sia il



Figura 20: Nodo  $C$  non contraibile in  $S^2 \times S^1$ .

link fremato  $\mathcal{L}$ , che le rimanenti componenti  $\mathcal{L}_s^2, \dots, \mathcal{L}_s^p$  di  $\mathcal{L}_s$ . In accordo con le mosse di Kirby, possiamo eliminare  $U_s$  attraverso un twist  $\tau_{\mp}$  su  $\nu_1$ . L'effetto del twist è quello di modificare l'intero link (fremato e di chirurgia) definito in  $S^3 - U_s$ . In particolare, i framing delle componenti chirurgiche vengono modificati secondo la relazione (139). D'altra parte, l'operatore (162) contiene per ipotesi un termine elementare  $\hat{S}_1^{\pm}$ . Lasciando agire  $\hat{S}_1^{\pm}$  nel numeratore dell'espressione (159) troviamo facilmente:

$$\left\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) W(\mathcal{L}) \right\rangle_{S^2} = e^{\pm i \frac{\pi}{4}} \left\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s^{(\pm)} - \{U_s\}) W(\mathcal{L}^{(\pm)}) \right\rangle_{S^3}, \quad (163)$$

dove  $\mathcal{L}^{(\pm)}$ ,  $\mathcal{L}_s^{(\pm)}$  sono i link (reale e di chirurgia) dopo l'effetto di un twist, mentre  $-\{U_s\}$  significa rimuovere la componente  $U_s$ . Similmente, per il denominatore troviamo:

$$\left\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \right\rangle_{S^3} = e^{\pm i \frac{\pi}{4}} \left\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s^{(\pm)} - \{U_s\}) \right\rangle_{S^3}. \quad (164)$$

Le espressioni (163) e (164) mostrano che numeratore e denominatore dell'espressione (159) non sono separatamente invarianti sotto mosse di Kirby a causa della presenza della fase  $\exp(\mp i\pi/4)$ . Tuttavia, queste fasi si cancellano tra numeratore e denominatore. Per questo motivo, il valore d'aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$  calcolato secondo l'espressione (159) è invariante sotto mosse di Kirby.

#### 4.4.1 Esempi di Calcolo

Può essere utile vedere rapidamente qualche calcolo esplicito di valore d'aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$ . In generale, data la presentazione chirurgica del link  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$  il calcolo è comunque immediato. Un semplice esempio è rappresentato in figura (20), dove è mostrato un nodo  $C$  (con colore  $c$ ) non contraibile in  $S^2 \times S^1$ . Calcoliamo dunque  $\langle W(C) \rangle_{S^2 \times S^1}$ . Il primo passo consiste nello scrivere la matrice di allacciamento totale associata a  $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}_s$ . Si ha subito:

$$\mathbb{L}_{tot} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \chi(C, C_f) \end{pmatrix}, \quad (165)$$

dove abbiamo usato il fatto che il coefficiente di chirurgia è zero. Dai risultati noti in  $S^3$  (121), dall'espressione (159), e dal valore (165) troviamo poi:

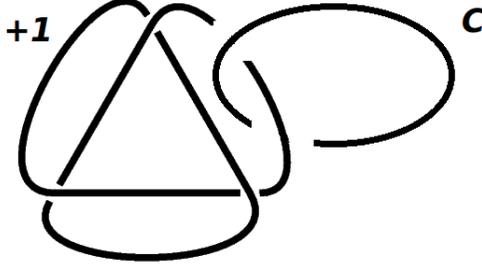


Figura 21: Nodo  $C$  nella sfera di Poincaré  $\mathcal{P}$ .

$$\langle W(C) \rangle_{S^2 \times S^1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{j=0}^{2k-1} e^{-i\frac{2\pi}{4k} [2jc + c^2 \chi(C, C_f)]}}{\frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{j=0}^{2k-1} 1} = \frac{1}{2k} e^{-i\frac{2\pi}{4k} c^2 \chi(C, C_f)} \sum_{j=0}^{2k-1} e^{-i\frac{\pi}{k} cj}. \quad (166)$$

La somma nell'espressione (166) è una serie geometrica, e vale:

$$\sum_{j=0}^{2k-1} e^{-i\frac{\pi}{k} cj} = \frac{1 - e^{-i2\pi c}}{1 - e^{-i\frac{\pi}{k} c}} = \begin{cases} 0 & \text{se } c \neq 0 \pmod{2k}, \\ 2k & \text{se } c = 0 \pmod{2k}. \end{cases} \quad (167)$$

Alla fine:

$$\langle W(C) \rangle_{S^2 \times S^1} = \langle W(C) \rangle_{S^3} \delta_{c, 2kn} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (168)$$

A differenza dei valori di aspettazione in  $S^3$ , quelli in  $S^2 \times S^1$  possono anche annullarsi. Consideriamo un secondo esempio, e calcoliamo il valore di aspettazione di un nodo  $C$  definito nella sfera di Poincaré. Una presentazione onesta della sfera  $\mathcal{P}$  di Poincaré è data dal nodo trifoglio con coefficiente di chirurgia  $r = +1$ . In figura (21) è mostrato il nodo  $C \subset \mathcal{P}$  con colore  $c$  di cui vogliamo calcolare il valore d'aspettazione  $\langle W(C) \rangle_{\mathcal{P}}$ . La matrice di allacciamento totale associata a  $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}_s$  è data da:

$$\mathbb{L}_{tot} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \chi(C, C_f) \end{pmatrix}. \quad (169)$$

Dall'espressione (159), e dalla matrice (169) troviamo subito:

$$\langle W(C) \rangle_{\mathcal{P}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{j=0}^{2k-1} e^{-i\frac{2\pi}{4k}[j^2+2jc+c^2\chi(C,C_f)]}}{\frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{j=0}^{2k-1} e^{-i\frac{2\pi}{4k}j^2}} = e^{-i\frac{2\pi}{4k}[c^2(\chi(C,C_f)-1)]} \frac{\sum_{j=0}^{2k-1} e^{-i\frac{2\pi}{4k}[j+c]^2}}{\sum_{j=0}^{2k-1} e^{-i\frac{2\pi}{4k}j^2}}, \quad (170)$$

da cui

$$\langle W(C) \rangle_{\mathcal{P}} = e^{-i\frac{2\pi}{4k}[c^2(\chi(C,C_f)-1)]}. \quad (171)$$

Il risultato (171) coincide con il valore di aspettazione di un nodo  $C \subset S^3$  con colore  $c$  e autoallacciamento  $(\chi(C, C_f) - 1)$ .

La sfera di Poincaré è una sfera di omologia, ed il numero di autoallacciamento di un qualsiasi nodo  $C \subset \mathcal{P}$  è sempre ben definito. Il numero di autoallacciamento  $\chi(C, C_f)$ , che viene specificato attraverso la presentazione di chirurgia, è definito in  $S^3$ . Dato che l'azione di un qualsiasi link di chirurgia può essere vista come un sequenza di twist, non ci aspettiamo che il numero di autoallacciamento  $\chi_{\mathcal{P}}(C, C_f)$  in  $\mathcal{P}$  coincida con  $\chi(C, C_f)$ . Per il nodo  $C \subset \mathcal{P}$  in figura (21) si può dimostrare<sup>7</sup> che vale

$$\chi_{\mathcal{P}}(C, C_f) = \chi(C, C_f) - 1, \quad (172)$$

per cui

$$\langle W(C) \rangle_{\mathcal{P}} = e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right)c^2\chi_{\mathcal{P}}(C,C_f)} \quad (173)$$

L'espressione (173), in realtà, è valida in generale per qualsiasi nodo  $C \subset \mathcal{P}$ . Allo stesso modo, se  $\mathcal{L} = \{C_1, \dots, C_n\} \subset \mathcal{P}$  è un link arbitrario si trova:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{P}} = \exp \left( -i \left( \frac{2\pi}{4k} \right) \sum_i \sum_j c_i \mathbb{L}_{ij}^{\mathcal{P}} c_j \right), \quad (174)$$

dove  $\mathbb{L}_{ij}^{\mathcal{P}} = \chi_{\mathcal{P}}(C_i, C_{jf})$  è la matrice di allacciamento in  $\mathcal{P}$ . Alla fine, i valori di aspettazione in  $\mathcal{P}$  sono analoghi a quanto già visto in  $S^3$  ed  $\mathbb{R}^3$ . Nel capitolo (7), dedicato a calcoli ed esempi, sono mostrati i valori di aspettazione in varietà più complicate.

---

<sup>7</sup>In appendice (8.2) sono date le istruzioni per calcolare (quando sono ben definiti) i numeri di allacciamento nella varietà.

## 4.5 Invariante Abeliano di Reshetikhin–Turaev

Se due presentazioni di chirurgia sono legate tra loro da una sequenza finita di mosse di Rolfsen, queste descrivono varietà tra loro omeomorfe. Per questo motivo, due presentazioni di questo tipo sono dette equivalenti. L'insieme di tutte le possibili istruzioni di chirurgia può essere decomposto nelle classi di equivalenza, e una funzione definita su queste classi di equivalenza corrisponde ad un *invariante di 3-varietà*. Una funzione di tali classi di equivalenza è semplicemente una funzione delle istruzioni di chirurgia che è invariante per mosse di Rolfsen (oppure per mosse di Kirby se ci limitiamo a presentazioni “oneste”).

Il valore di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$ , secondo la definizione (159), può essere calcolato in  $S^3$ , ed è definito sia sulle classi di equivalenza di  $\mathcal{M}$  che su quelle di  $\mathcal{L}$  (isotopia ambiente). Oltre ai valori di aspettazione associati ai link, diventano interessanti anche gli invarianti associati alla sola varietà. Un potenziale candidato a diventare invariante di  $\mathcal{M}$  è rappresentato dal valore di aspettazione dell'operatore di chirurgia:

$$\left\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \right\rangle_{S^3}. \quad (175)$$

Consideriamo una presentazione “onesta” di  $\mathcal{M}$  e verifichiamo come si comporta la grandezza (175) sotto mosse di Kirby. Al solito, supponiamo che una componente di  $\mathcal{L}_s$ , ad esempio la prima, sia un unknot  $U_s$  con coefficiente  $r_1 = \pm 1$ . Come si è visto nel paragrafo precedente si ha

$$\text{mossa di Kirby} : \left\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \right\rangle_{S^3} \rightarrow e^{\mp i \frac{\pi}{4}} \left\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s^{(\mp)} - \{U_s\}) \right\rangle_{S^3}, \quad (176)$$

per cui  $\left\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \right\rangle_{S^3}$  non è invariante sotto Kirby a causa della fase  $\exp(\mp i\pi/4)$ . Per ripristinare l'invarianza sotto Kirby risulta utile introdurre la segnatura  $\sigma(\mathcal{L}_s)$  della matrice  $\mathbb{L}_{ij} = \chi(\mathcal{L}_i^s, \mathcal{L}_{jf}^s)$ , che è definita come la differenza tra il numero di autovalori positivi e quelli negativi. Con una verifica diretta è possibile notare che vale [21]

$$\sigma(\mathcal{L}_s^{(\mp)}) = \sigma(\mathcal{L}_s) \pm 1, \quad (177)$$

per cui

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}) = e^{i\pi \frac{\sigma(\mathcal{L}_s)}{4}} \left\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \right\rangle_{S^3} \quad (178)$$

è invariante sotto mosse di Kirby per costruzione. A differenza dei valori di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$ , l'invariante  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$  dipende soltanto dal link di chirurgia, e corrisponde ad un qualche invariante dalla varietà  $\mathcal{M}$ . Dalle definizioni (178), (161), e dal risultato (121), possiamo riscrivere  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$  in forma esplicita come [7]:

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}) = (2k)^{-\frac{m}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma(\mathcal{L}_s)} \sum_{q_1=0}^{2k-1} \sum_{q_2=0}^{2k-1} \dots \sum_{q_m=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right) \sum_{ij=1}^m q_1 \mathbb{L}_{ij} q_j}, \quad (179)$$

dove  $m$  è il numero di componenti del link di chirurgia. La grandezza  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$  è chiamata invariante abeliano di Reshetikhin-Turaev (*RT*) [21]. Questo invariante è stato costruito mediante una combinazione di valori d'aspettazione della sfera  $S^3$  che è invariante sotto mosse di Rolfsen. In altre parole  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$  non dipende dalla teoria di campo di *CS*. Anche i valori di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$ , calcolati secondo l'espressione (159), sono stati determinati imponendo l'invarianza sotto mosse di Rolfsen. Per questo motivo, possiamo indicare questo metodo combinatorico di calcolo dei valori d'aspettazione come "alla Reshetikhin-Turaev".

Nel loro articolo [23], H. Murakami, T. Oktsuki e M. Okada, mostrano le condizioni affinché due 3-varietà  $\mathcal{M}$  ed  $\mathcal{M}'$  abbiano lo stesso invariante  $\mathcal{I}(\mathcal{M}) = \mathcal{I}(\mathcal{M}')$ . In particolare, se  $\mathcal{M}$  ed  $\mathcal{M}'$  hanno lo stesso primo numero di Betti, ed una stessa opportuna forma quadratica, allora  $\mathcal{I}(\mathcal{M}) = \mathcal{I}(\mathcal{M}')$ . Nel caso di spazi lenticolari  $\mathcal{M} = L_{a,b}$ , si può dimostrare<sup>8</sup> inoltre che il valore assoluto  $|\mathcal{I}(L_{a,b})|$  dipende solo dal gruppo fondamentale  $\pi_1(L_{a,b})$ .

Confrontando le espressioni (159) e (140) è naturale aspettarsi

$$\frac{\int_{\mathcal{M}} DA e^{iS[A]} W(\mathcal{L})}{\int_{\mathcal{M}} DA e^{iS[A]}} = \frac{\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3}}{\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \rangle_{S^3}}. \quad (180)$$

Osservando la relazione (180) è possibile intuire che  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$  possa essere ottenuto, a meno di coefficienti, direttamente mediante integrazione funzionale. Lo scopo dei prossimi capitoli sarà quello di definire, secondo l'approccio fisico dell'integrale funzionale, la teoria di *CS* in  $\mathcal{M}$ . Confronteremo poi i risultati funzionali con quelli combinatorici di *RT*.

---

<sup>8</sup>Per la dimostrazione, si veda il capitolo (7).

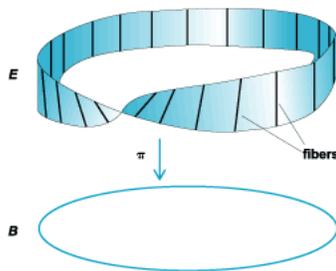


Figura 22: Un fibrato non banale: il nastro di Möbius. Da [35].

## 5 Connessione su 3-Varietà $\mathcal{M}$

### 5.1 Fibrato Principale

Vogliamo studiare la teoria di  $CS$  in  $\mathcal{M}$  seguendo l'approccio tipico delle teorie di campo. Come punto di partenza conviene discutere i campi della teoria; fatto ciò definiremo l'azione e le regole per l'integrazione funzionale. Questo è conveniente, in quanto i campi in  $\mathcal{M}$  si differenziano sensibilmente da quelli studiati in  $\mathbb{R}^3$ . Il motivo è legato all'invarianza di gauge; vogliamo che sia mantenuta in  $\mathcal{M}$ . In generale, i campi di una teoria di pura gauge in  $\mathcal{M}$  sono rappresentati dalla connessione di gauge  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{M}$ . Come vedremo,  $\mathcal{A}$  non coincide affatto con delle 1-forme differenziali come in  $\mathbb{R}^3$  (o  $S^3$ ).

Prima di descrivere la connessione di gauge in una 3-varietà  $\mathcal{M}$ , è utile richiamare alcuni concetti legati alla definizione di fibrato e fibrato principale [24].

Un fibrato è uno spazio che localmente assomiglia ad un certo prodotto cartesiano, ma globalmente può avere una struttura topologica più complessa. Consideriamo quindi la seguente funzione continua e suriettiva tra spazi topologici

$$\pi : E \rightarrow B, \quad (181)$$

dove  $B$  è detta base, mentre  $E$  spazio totale. Localmente,  $E$  è omeomorfo al prodotto cartesiano  $U \times F$ , dove  $U$  è un aperto di  $B$ , e l'equazione (181) assume la forma

$$\pi : U \times F \rightarrow U. \quad (182)$$

Per questo motivo la mappa  $\pi$  è chiamata proiezione. Lo spazio  $F$ , infine, è chiamato fibra. Se lo spazio totale coincide con il prodotto  $E = B \times F$  ovunque,  $E$  è detto banale; in questo caso  $\pi$  proietta semplicemente sul primo fattore di  $E$ .

Per fissare le idee, è utile considerare il classico esempio rappresentato dal nastro di Möbius (visibile in figura (22)). La base è rappresentata da un cerchio unitario  $B = S^1$ , mentre la fibra dal segmento  $F = [0, 1]$ . Un intorno  $I_p \in B$  del punto  $p \in B$  è dato da un arco. Localmente il nastro di Möbius è dato proprio dal prodotto  $I_p \times [0, 1]$ ; tuttavia  $E \neq S^1 \times [0, 1]$  (non è infatti una corona circolare). Questo è uno degli esempi più semplici di fibrato non banale. Una definizione più precisa di fibrato è data da

- **Fibrato.** Un fibrato consiste in un insieme  $(E, B, \pi, F)$  dove  $E, B, F$  sono spazi topologici, mentre  $\pi : E \rightarrow B$  è una funzione continua suriettiva che soddisfa la condizione di banalità locale (182). lo spazio  $B$  è detto base,  $E$  spazio totale e  $F$  fibra. Possiamo assumere che  $B$  sia connesso. Per soddisfare la condizione di banalità locale è richiesto che per ogni punto  $x \in E$  esista un intorno  $U \subset B$  di  $\pi(x)$  tale che  $\pi^{-1}(U)$  sia omeomorfo al prodotto cartesiano  $U \times F$ .

Per ipotesi sappiamo che esiste un omeomorfismo, che possiamo indicare con  $\phi$ , tale che

$$\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F. \quad (183)$$

Al variare dei possibili  $x_i \in E$ , possiamo considerare i vari intorni  $U_i \in B$  di  $\pi(x_i)$ . L'insieme di tutti i set  $\{U_i, \phi_i\}$  è detto banalizzazione locale del fibrato. Alla struttura di fibrato è possibile aggiungere un gruppo topologico  $G$ , ad esempio un gruppo di Lie. Possiamo immaginare che  $G$  agisca con continuità (azione di gruppo) sulla fibra  $F$  da destra. Senza perdere in generalità assumiamo che  $G$  agisca come un omeomorfismo su  $F$ .

Il  $G$ -atlante del fibrato  $(E, B, \pi, F)$  è dato dalla collezione  $\{U_i, \phi_i\}$ , ed in ogni sovrapposizione

$$\phi_i \phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F, \quad (184)$$

vale

$$\phi_i \phi_j^{-1}(x, \xi) \rightarrow (x, \xi t_{ij}(x)), \quad (185)$$

dove  $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  è detta funzione di transizione. Il gruppo  $G$  è detto gruppo di struttura, e corrisponde al gruppo di gauge in fisica. Le funzioni di transizione soddisfano inoltre le seguenti condizioni

$$\begin{cases} t_{ii}(x) = 1 \\ t_{ij}(x) = t_{ji}^{-1}(x) \\ t_{ik}(x) = t_{ij}(x) t_{jk}(x) \end{cases} \quad (186)$$

Un'ultima condizione riguarda le intersezioni triple  $U_i \cap U_j \cap U_k$ , dove le funzioni di transizione devono soddisfare una condizione di cociclo  $t_{ij}(x) t_{jk}(x) t_{ki}(x) = 1$ .

Definiamo, adesso, il fibrato principale

- **Fibrato Principale.** Un  $G$ -fibrato principale, dove  $G$  denota un gruppo topologico, è un fibrato  $(E, B, \pi, F)$  con una azione di gruppo continua  $E \times G \rightarrow E$  agente sulle fibre. Il gruppo deve inoltre essere omeomorfo alle fibre stesse  $F \simeq G$ .

Poiché  $F \simeq G$ , le orbite dell'azione del gruppo coincidono con le fibre stesse, e il gruppo quoziente  $E/G$  è omeomorfo allo spazio di base  $B$ . È da sottolineare, infine, il fatto che non esiste un elemento neutro canonico delle fibre.

## 5.2 Aspetti Generali della Connessione in $\mathcal{M}$

Un ricoprimento di uno spazio topologico  $B$  è una famiglia  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}$  di sottoinsiemi di  $B$  tali che  $B = \bigcup_a \mathcal{U}_a$ ; se tutti i  $\mathcal{U}_a$  sono aperti allora il ricoprimento è aperto. Un ricoprimento è localmente finito se ogni  $p \in B$  ha un intorno  $U \subseteq B$  tale che  $U \cap \mathcal{U}_a \neq \emptyset$  solo per un numero finito di indici  $a$ . Se il ricoprimento è aperto, localmente finito, e ciascun  $\mathcal{U}_a$  è contraibile, si parla di “buon ricoprimento”.

Siamo interessati al caso in cui lo spazio topologico  $B$  è una 3-varietà chiusa ed orientata. Sia quindi  $\mathcal{M}$  la generica 3-varietà chiusa ed orientata dove vogliamo definire la teoria di  $CS$ . Il primo passo consiste nel considerare un buon ricoprimento  $\{\mathcal{U}_a\}$  di  $\mathcal{M}$ . Ciascun sottoinsieme  $\mathcal{U}_a$  può essere immaginato come una palla, per cui l'azione di  $CS$  in  $\mathcal{U}_a$  sappiamo come è definita. A livello globale, invece,  $\mathcal{M}$  può essere non banale.

Sia  $v^a = v^a_\mu(x) dx^\mu$  una 1-forma differenziale definita localmente in  $\mathcal{U}_a$ ; questa rappresenta la usuale connessione di gauge della teoria di  $CS$  (definita in  $\mathcal{U}_a$ ). Dato che  $\mathcal{U}$  è un buon ricoprimento, ciascuna intersezione  $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b$  non nulla è ancora una palla. In queste intersezioni, le connessioni di gauge  $v^a$ ,  $v^b$  potranno differire al massimo per la derivata esterna di una 0-forma. Questo è necessario affinché la curvatura sia ben definita; in altre parole si deve avere  $F^a - F^b = d(v^a - v^b) = 0$  in  $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b$ . Si ha quindi:

$$v^a - v^b = d\lambda^{ab} \quad \text{in } \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b, \quad (187)$$

dove  $\lambda^{ab}$  è una 0-forma definita nell'intersezione. In generale, saranno presenti in  $\mathcal{U}$  anche intersezioni triple; consideriamo quindi una intersezione  $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b \cap \mathcal{U}_c$  non nulla. Intuitivamente, questa intersezione è circondata da 3 intersezioni doppie, nelle quali valgono le condizioni (187). Utilizzando la proprietà (187), è immediato verificare che le 0-forme soddisfano

$$d\lambda^{ab} + d\lambda^{bc} + d\lambda^{ca} = 0, \quad (188)$$

da cui

$$\lambda^{ab} + \lambda^{bc} + \lambda^{ca} \equiv n^{abc}, \quad (189)$$

dove  $n^{abc}$  è una 0-forma chiusa (un numero) definita nelle intersezioni triple. Fissare la connessione di gauge su tutto  $\mathcal{M}$  significa specificare l'insieme di grandezze  $v^a, \lambda^{ab}, n^{abc}$  definite rispettivamente in ogni aperto  $\mathcal{U}_a$ , nelle intersezioni doppie  $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b \neq \emptyset$ , ed in quelle triple  $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b \cap \mathcal{U}_c \neq \emptyset$ . In modo compatto possiamo scrivere

$$\mathcal{A} = \text{connessione su } \mathcal{M} = (v^a, \lambda^{ab}, n^{abc}). \quad (190)$$

La presentazione (190) è nota come rappresentazione di Čech-de Rham. Poiché vogliamo inglobare la connessione definita su  $\mathcal{M}$  in una struttura di fibrato principale, occorre specificare alcune ambiguità

delle funzioni  $\lambda^{ab}(x)$ . A partire dalle condizioni (187) possiamo ottenere le seguenti espressioni generali per le funzioni  $\lambda(x)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad d\lambda^{ij} = d\lambda^{ik} + d\lambda^{kj} \quad i \neq j \neq k \\ (b) \quad d(\lambda^{ij} + \lambda^{ji}) = 0 \quad i \neq j. \end{array} \right. \quad (191)$$

Dall'espressione (b) vediamo che  $\lambda^{ij}$  può differire da  $-\lambda^{ji}$  al massimo per una costante. La scelta più naturale è quella di porre  $\lambda^{ij}(x) = -\lambda^{ji}(x)$ ; in questo modo le eventuali intersezioni quaduple  $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b \cap \mathcal{U}_c \cap \mathcal{U}_d \neq 0$  vengono specificate attraverso la relazione  $n^{abc} + n^{cda} = n^{dab} + n^{bcd}$ . Inoltre, i numeri  $n^{abc}$  diventano completamente antisimmetrici per lo scambio di indici. In modo simile, dalla relazione (a), notiamo che  $\lambda^{ij}(x) = \lambda^{ik}(x) + \lambda^{kj}(x) + k^{ijk}$ , dove  $k^{ijk}$  è una costante. Assumiamo che  $k^{ijk} \in \mathbb{Z}$ . Alla fine, queste condizioni possono essere riassunte da

$$\left\{ \begin{array}{l} n^{abc} = -n^{bac} = n^{bca} \in \mathbb{Z}, \\ \lambda^{ab}(x) = -\lambda^{ba}(x). \end{array} \right. \quad (192)$$

Introduciamo adesso le funzioni

$$g_{ab}(x) = e^{i2\pi\lambda_{ab}(x)}. \quad (193)$$

È facile vedere che con la scelta (192), le funzioni  $g_{ab}(x)$  soddisfano

$$g_{ab}(x) = g_{ba}^{-1}(x), \quad g_{aa}(x) = 1, \quad g_{ab}(x) = g_{ac}(x)g_{ca}(x), \quad (194)$$

ed in ogni intersezione  $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b \cap \mathcal{U}_c \neq 0$  è verificata la condizione cociclica

$$g_{ab}g_{bc}g_{ca} = 1. \quad (195)$$

Le funzioni  $g_{ab} : \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b \rightarrow U(1)$  sono dette di transizione, e sono un caso particolare delle funzioni  $t_{ij}$  introdotte nell'equazione (185). Vediamo brevemente come descrivere la connessione utilizzando la nozione di fibrato principale [25, 26].

Sia  $(P, \mathcal{M}, U(1), \pi)$  un fibrato principale, dove  $P$  è lo spazio totale,  $\mathcal{M}$  la base,  $G = U(1)$  il gruppo di Lie e  $\pi$  la proiezione.

Siano  $q \in P$ ,  $x = \pi(q) \in \mathcal{M}$ ,  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Poiché sia lo spazio di base, che il gruppo di Lie sono strutture differenziabili, anche lo spazio totale è differenziabile, per cui possiamo considerare lo spazio tangente  $T_qP \forall q \in P$ . Un sottospazio di  $T_qP$  è dato da quei vettori che sono tangenti alle fibre passanti per  $q$ . Questo sottospazio è chiamato sottospazio verticale di  $q$ , ed è indicato con  $V_qP$ . Allo stesso modo il sottospazio orizzontale è definito da

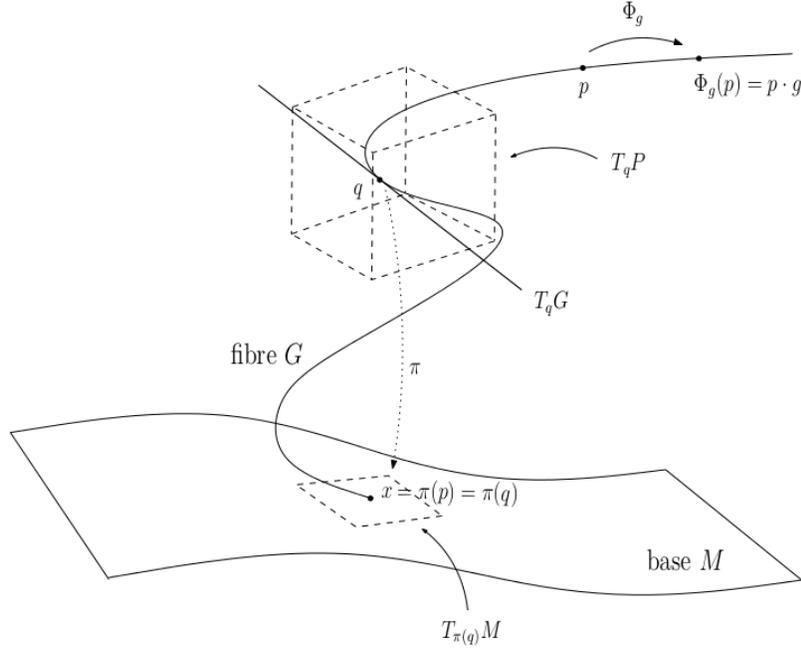


Figura 23: Rappresentazione locale del fibrato. Da [25].

$$T_q P = V_q P \oplus H_q P. \quad (196)$$

Denotiamo l'azione del gruppo con  $\phi : P \times U(1) \rightarrow P$ . Se  $g \in U(1)$ ,  $p \in P$ , possiamo indicare l'azione con  $\phi_g(p) = p \cdot g$ , dove per definizione  $p \cdot g = (x, b) \cdot g \equiv (x, bg)$ . Possiamo immaginare che l'azione del gruppo muova il punto  $p$  lungo le fibre. Localmente, possiamo rappresentare questa situazione come mostrato in figura (23).

La relazione (196) non fissa univocamente lo spazio tangente orizzontale  $H_q P$ . Richiediamo che questo sottospazio sia invariante sotto l'azione del gruppo.

Se  $g \in G$ , possiamo considerare  $q \rightarrow q' = q \cdot g$ , da cui  $H_{q'} P = H_{q \cdot g} P$ . Vale quindi

$$H_{q \cdot g} P = R_g H_q P \quad \forall q \in P, g \in G, \quad (197)$$

dove  $R_g H_q P$  denota l'azione su  $H_q P$  della mappa lineare indotta da  $q' = q \cdot g$ . In altre parole  $R_g$  "spinge"  $H_q P \subset T_q P$  lungo le fibre. Dato che abbiamo specificato i sottospazi di  $T_q P$ , possiamo introdurre il concetto di trasporto parallelo, ed una connessione su  $P$ .

Sia  $q(t) \subset P$  una curva con la proprietà di avere il vettore tangente "orizzontale" in ogni punto, ossia  $\dot{q}(t) \subset H_{q(t)} P$ . Proiettando con  $\pi$  otteniamo una curva  $\pi(q(t)) \subset \mathcal{M}$  nello spazio di base. Inversamente, fissata la curva  $\gamma(t) \subset \mathcal{M}$ , e fissato un punto  $q \in \pi^{-1}(\gamma(t))$  a  $t$  dato, possiamo ritrovare l'unica curva  $q(t) = \pi^{-1}(\gamma)$  tale che  $\dot{q}(t) \subset H_{q(t)} P$ .

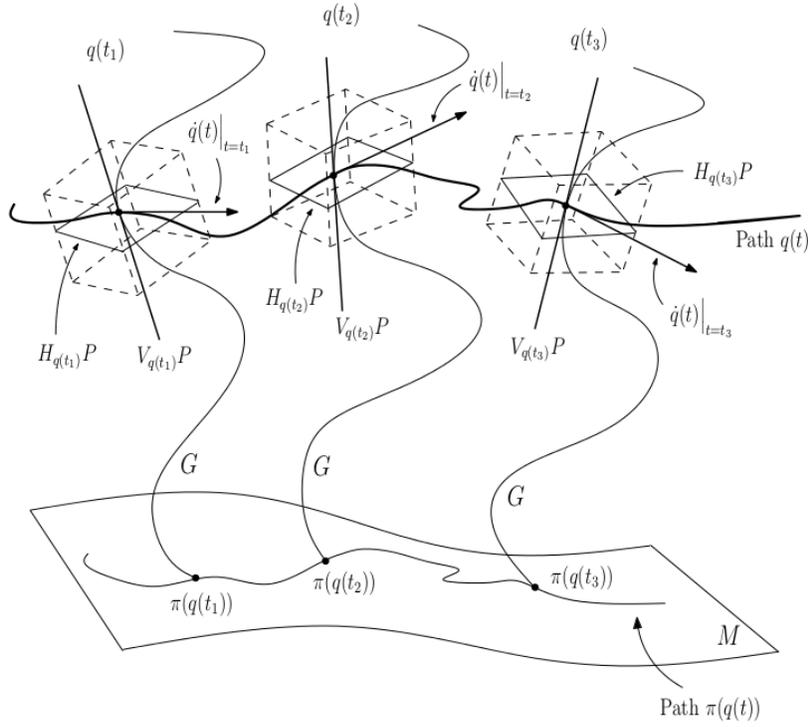


Figura 24: Trasporto parallelo delle fibre. Da [25].

Il trasporto parallelo delle fibre lungo  $\gamma \subset \mathcal{M}$ , è definito dall'insieme di tutte le curve "orizzontali" su  $P$ . Queste curve, che sono univoche, si determinano a partire da ciascun punto  $p \in \pi^{-1}(\gamma(t))$  per un  $t$  fissato. Schematicamente, lo spostamento parallelo è mostrato in figura (24).

La connessione in  $P$  è data da una opportuna 1-forma  $\omega \in T^*P$ , dove  $T^*P$  è lo spazio cotangente di  $P$ . Inoltre,  $\omega$  ha valori nell'algebra di Lie del gruppo  $G = U(1)$ . Utilizzando le coordinate locali di  $P$ , date da  $(x, g)$ ,  $x \in \mathcal{M}$ ,  $g \in G$ , e proiettando sui sottospazi (orizzontale-verticale) si ha

$$\omega = g^{-1}dg + v \quad (198)$$

dove  $v = v_\mu(x) dx^\mu$  è il campo di gauge locale, mentre  $g^{-1}dg$  è la connessione legata alla fibra. Fissato un aperto  $\mathcal{U}^a \subset \mathcal{M}$ , sappiamo che vale  $P \simeq \mathcal{U}^a \times U(1)$ , con  $\pi : P \rightarrow \mathcal{U}^a$ . Allo stesso modo, possiamo considerare la naturale estensione  $\pi^*$  che proietta gli spazi tangenti, e soddisfa  $V_qP = \text{Ker}(\pi^*)$ . Localmente viene quindi proiettata soltanto la connessione  $v^a$ .

Le funzioni di transizione (193) sono invece fissate dall'insieme  $\varphi^a : \pi^{-1}(\mathcal{U}^a) \rightarrow \mathcal{U}^a \times F$ , dove  $\varphi^a$  è un omeomorfismo (esiste per definizione di  $P$ ).

Il significato di  $g^{-1}dg$ , invece, è quello di connessione per il trasporto parallelo lungo le fibre.

In generale, se consideriamo un nodo  $C$  in  $\mathcal{M}$ , è facile vedere che una relativa curva orizzontale  $\Gamma = \pi^{-1}(C) \subset P$  ( $\dot{\Gamma} \in H_\Gamma P$ ) potrebbe non essere chiusa. Fissato  $x \in C$ , possiamo scegliere  $q_{in} \in \pi^{-1}(x)$  e costruire la curva orizzontale  $\Gamma$  passante per  $q_{in}$ . In generale, si avrà  $q_{fin} \in \Gamma$  tale che  $\pi(q_{fin}) = \pi(q_{in}) = x$ . Per definizione  $q_{fin} - q_{in} \in U(1)$ , e rappresenta il trasporto parallelo lungo il percorso  $C \subset \mathcal{M}$ . Questa differenza non è altro che l'olonomia calcolata sul nodo  $C \subset \mathcal{M}$ .

In generale, fissare la connessione (190) su  $\mathcal{M}$  equivale a determinare il fibrato principale con connessione  $(P, \mathcal{M}, U(1), \pi, \omega)$ . In teorie di gauge, occorre considerare le orbite di gauge della connessione ovvero le classi di equivalenza della connessione modulo trasformazioni di gauge. Per descrivere le orbite di gauge abeliane è conveniente utilizzare le classi di Deligne-Beilinson.

### 5.3 Classi di Deligne-Beilinson [27]

Sia  $\mathcal{M}$  una  $n$ -varietà chiusa ed orientata. Immaginiamo di aver fissato un buon ricoprimento  $\mathcal{U}$  di  $\mathcal{M}$ . Una cocatena di Čech di grado  $k$  con valori nel gruppo  $G = U(1)$  è una collezione di elementi  $c_{\alpha_0 \dots \alpha_k}$  di  $G$  definiti in ciascuna intersezione  $\mathcal{U}_{\alpha_0 \dots \alpha_k}$  non nulla di  $\mathcal{U}_\alpha$ . Questi elementi devono essere completamente antisimmetrici negli indici, e nulli nelle intersezioni vuote. Per definizione una cocatena di Čech di grado  $k = -1$  è una funzione costante da  $\mathcal{M}$  a  $G$ .

Il differenziale  $\delta$  di Čech mappa  $(k-1)$  cocatene in  $k$  cocatene con la proprietà di nilpotenza  $\delta^2 = 0$ . Quando  $\delta$  agisce su una  $-1$  cocatena vale  $(\delta c)_{\alpha_0} = c$ ; agisce quindi come una restrizione in ogni  $\mathcal{U}_{\alpha_0} \neq 0$ . Per  $k \geq 1$ , se  $c_{\alpha_0 \dots \alpha_{k-1}}$  è una  $(k-1)$  cocatena e  $\mathcal{U}_{\alpha_0 \dots \alpha_k} \neq 0$  si ha

$$(\delta c)_{\alpha_0 \dots \alpha_k} = \sum_{i=0}^k (-1)^i c_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_k}, \quad (199)$$

dove con  $\hat{\phantom{x}}$  si intende un indice aggiunto. Gli elementi nel nucleo di  $\delta$  sono detti cocicli di Čech, mentre quelli nell'immagine sono i cobordi di Čech. Siamo interessati al caso in cui  $c_{\alpha_0 \dots \alpha_k}$  siano delle  $l$ -forme differenziali definite su  $\mathcal{U}_{\alpha_0 \dots \alpha_k}$ ; in questo caso si parla di cocatene di Čech-de Rham di grado  $(k, l)$ . Al solito,  $\delta$  agisce come una restrizione della  $l$ -forma se  $k = -1$ , mentre negli altri casi la definizione (199) resta valida eccetto un fattore moltiplicativo  $(-1)^{l+1}$  nel membro a destra. Possiamo denotare lo spazio di queste forme con  $\check{C}^{(k)}(\mathcal{U}, \Omega^l(\mathcal{M}))$ , dove  $\Omega^l(\mathcal{M})$  è lo spazio delle  $l$ -forme differenziali in  $\mathcal{M}$ . Molto spesso, dato che ricoprimento e varietà sono fissate è conveniente utilizzare la notazione compatta  $\Omega^{(k,l)}(\mathbb{R})$  per indicare  $\check{C}^{(k)}(\mathcal{U}, \Omega^l(\mathcal{M}))$ .

Convenzionalmente, una cocatena con coefficienti costanti in un sottogruppo  $G \subset \mathbb{R}$ , è dotata di  $l = -1$  forme differenziali, per cui possiamo introdurre  $\Omega^{(k,-1)}(G)$ . La derivata esterna  $d$  mappa elementi di  $\Omega^{(k,l)}(\mathbb{R})$  in  $\Omega^{(k,l+1)}(\mathbb{R})$ . È possibile estendere  $d$  a  $-1$  forme definendola come la funzione che manda un elemento di  $G \subset \mathbb{R}$  nella corrispondente funzione costante. D'ora in avanti indicheremo con  $\tilde{d}$  la derivata esterna estesa anche a  $l = -1$ . Come per il differenziale  $\delta$  si ha  $d^2 = 0$ , e vale  $d\tilde{d} + \tilde{d}d = 0$  con il coefficiente  $(-1)^{l+1}$  introdotto.

Sia  $0 \leq p \leq n$  un intero, dove  $n$  è la dimensione di  $\mathcal{M}$ . Possiamo considerare

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^{(0,-1)}(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tilde{d}} & \Omega^{(0,0)}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\tilde{d}} & \dots & \xrightarrow{\tilde{d}} & \Omega^{(0,p-1)}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & & & \downarrow \delta & & \\ \Omega^{(1,-1)}(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tilde{d}} & \Omega^{(1,0)}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\tilde{d}} & \dots & \xrightarrow{\tilde{d}} & \Omega^{(1,p-1)}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & & & \downarrow \delta & & \\ \Omega^{(2,-1)}(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tilde{d}} & \Omega^{(2,0)}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\tilde{d}} & \dots & \xrightarrow{\tilde{d}} & \Omega^{(2,p-1)}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & & & \downarrow \delta & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \end{array} \quad (200)$$

Le colonne sono date dal complesso di Čech, mentre le righe prendono il nome di complesso di Deligne di grado  $p$ . A partire dal doppio complesso (200) possiamo costruire un complesso diagonale. Lo spazio  $C_p^q$  delle cocatene di Deligne-Beilinson è definito da

$$C_p^q = \begin{cases} \Omega^{(q,-1)}(\mathbb{Z}) + \sum_{k=1}^q \Omega^{(q-k,k-1)}(\mathbb{R}) & \text{per } 0 \leq q < p \\ \Omega^{(p,-1)}(\mathbb{Z}) + \sum_{k=1}^p \Omega^{(p-k,k-1)}(\mathbb{R}) & \text{per } q = p \\ \Omega^{(q,-1)}(\mathbb{Z}) + \sum_{k=1}^q \Omega^{(q-k,k-1)}(\mathbb{R}) & \text{per } q > p \end{cases} \quad (201)$$

Gli elementi di questi spazi sono rappresentati dalle seguenti sequenze:

$$\omega = \left( \omega^{(0,q-1)}, \dots, \omega^{(q,-1)} \right), \quad \omega = \left( \omega^{(0,p-1)}, \dots, \omega^{(p,-1)} \right), \quad \omega = \left( \omega^{(q-p,p-1)}, \dots, \omega^{(q,-1)} \right), \quad (202)$$

dove gli ultimi elementi sono interi. Poniamo  $\mathcal{C}_p = C_p^0 \oplus C_p^1 \oplus \dots$ . Introduciamo l'operatore  $D \equiv \tilde{d} + \delta$ , che mappa  $C_p^q$  in  $C_p^{q+1}$  con la proprietà  $D^2 = 0$ . Possiamo quindi definire il complesso  $(\mathcal{C}_p, D)$  di Deligne-Beilinson, dove gli elementi di  $\mathcal{C}_p$  sono proprio le cocatene di  $DB$ . Definiamo infine  $Z_p^q = \left\{ Ker D : C_p^q \rightarrow C_p^{q+1} \right\}$ , che prende il nome di cociclo di  $DB$ .

Introduciamo  $H_D^q(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$  come il set delle classi di equivalenza dei cocicli di  $DB$  definiti dalla sequenza  $(\omega^{(0,q)}, \dots, \omega^{(q,0)}, \omega^{(q+1,-1)})$ , dove  $\omega^{(p,q-p)}$  è una  $(q-p)$  forma differenziale nell'intersezione di grado  $p$  di un buon ricoprimento di  $\mathcal{M}$ . Come si è visto  $\omega^{(q+1,-1)}$  è un intero, mentre per definizione vale

$$\delta \omega^{(p-1,q-p+1)} + \tilde{d} \omega^{(p,q-p)} = 0. \quad (203)$$

Il gruppo di coomologia di grado  $q$  indicato con  $H_D^q(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$  è detto di Deligne, e può essere descritto come il termine centrale delle seguente sequenza esatta [28, 29]

$$0 \rightarrow \Omega^q(\mathcal{M}) / \Omega_{\mathbb{Z}}^q(\mathcal{M}) \rightarrow H_D^q(\mathcal{M}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{M}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0, \quad (204)$$

dove  $\Omega^q(\mathcal{M})$  è lo spazio delle  $q$ -forme su  $\mathcal{M}$ ,  $\Omega_{\mathbb{Z}}^q(\mathcal{M})$  lo spazio delle  $q$ -forme chiuse a periodo intero su  $\mathcal{M}$ , e  $H^{q+1}(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$  è il  $(q+1)^{th}$  gruppo di coomologia di  $\mathcal{M}$ . Dalla sequenza (204) possiamo interpretare  $H_D^q(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$  come un fibrato, in cui la base è  $H^{q+1}(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$  e le fibre sono date da  $\Omega^q(\mathcal{M}) / \Omega_{\mathbb{Z}}^q(\mathcal{M})$ .

Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto la connessione  $\mathcal{A}$  in una 3-varietà  $\mathcal{M}$ . Si è visto che può essere descritta in termini di 1-forme in  $\mathcal{U}_a$ , 0-forme in  $\mathcal{U}_{ab}$ , e interi in  $\mathcal{U}_{abc}$ . Questo tipo di grandezze trova una naturale descrizione nei cocicli di  $DB$ . Verifichiamolo.

Consideriamo il gruppo  $H_D^q(\mathcal{M})$  per  $q = 1$ , con  $\mathcal{M}$  una 3-varietà ( $n = 3$ ). La connessione in  $\mathcal{M}$ , lo abbiamo visto, è data da

$$\mathcal{A} \leftrightarrow (v, \lambda, n) \in \check{C}^{(0)}(\mathcal{U}, \Omega^1(\mathcal{M})) \times \check{C}^{(1)}(\mathcal{U}, \Omega^0(\mathcal{M})) \times \check{C}^{(2)}(\mathcal{U}, \mathbb{Z}), \quad (205)$$

per cui il differenziale di Čech soddisfa

$$\left\{ \begin{array}{l} (\delta v)_{ab} = v^a - v^b = \tilde{d}\lambda^{ab}, \\ (\delta \lambda)_{abc} = \lambda^{ab} + \lambda^{bc} + \lambda^{ca} = \tilde{d}n^{abc} = n^{abc}, \\ (\delta n)_{abcd} = n^{abc} - n^{abd} + n^{acd} - n^{cde} = 0, \end{array} \right. \quad (206)$$

ed è in accordo con la relazione (203). La sequenza (206) definisce un cociclo di  $DB$ , per cui esiste una certa classe di  $H_D^1(\mathcal{M})$  associata a  $\mathcal{A}$ , che possiamo indicare con  $[\mathcal{A}] \in H_D^1(\mathcal{M})$ . Prima di scrivere esplicitamente l'azione di  $CS$  in  $\mathcal{M}$  è utile chiarire un ultimo aspetto.

Fissato un fibrato principale  $\mathcal{P} = (P, \mathcal{M}, U(1), \pi)$ , un ricoprimento  $\mathcal{U}$ , e la connessione  $\mathcal{A}$ , la sequenza  $(v, \lambda, n)$  è fissata. Naturalmente, una trasformazione di gauge locale della connessione dà luogo ad una diversa sequenza  $(v', \lambda', n')$ . Poiché siamo interessati a studiare una teoria invariante di gauge, vogliamo capire come una trasformazione del genere è implementata nel nuovo formalismo dei cocicli.

Due triplette  $(\mathcal{P}, \mathcal{U}, \mathcal{A})$ ,  $(\mathcal{P}', \mathcal{U}, \mathcal{A}')$  sono dette  $U(1)$ -equivalenti se esiste un  $U(1)$ -omeomorfismo  $\Phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  tale che  $\mathcal{A}' = \Phi_* \mathcal{A}$ . Osservando la relazione (184), vediamo che questo omeomorfismo trasforma le funzioni di transizione come

$$g'_{ab} = h_a^{-1} \cdot g_{ab} \cdot h_b, \quad (207)$$

dove  $h_a = \exp(i2\pi q_a)$  con  $q_a$  una funzione definita in ogni  $\mathcal{U}_a$ . In altre parole  $q \in \check{C}^{(0)}(\mathcal{U}, \Omega^0(\mathcal{M}))$ . Dalla relazione (193) si ha  $\lambda^{ab'} = \lambda^{ab} + q^a - q^b$ , per cui

$$v'^a = v^a + dq^a, \quad (208)$$

e  $v'$  trasforma come una trasformazione di gauge. Alla fine, il set legato alla tripletta equivalente è dato da  $(v + dq, \lambda + \delta q, n)$ . In generale, esiste inoltre una certa ambiguità nelle funzioni di transizione indipendente dalle usuali trasformazioni di gauge. Possiamo infatti sostituire  $q_a \rightarrow q_a + m_a$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) senza modificare le funzioni di transizione (e quindi il fibrato). Intuitivamente, questa operazione coincide con l'assegnazione di nuovi numeri (interi) nelle intersezioni doppie, e non modifica la connessione. Queste trasformazioni sono chiamate *grandi trasformazioni di gauge*. Formalmente, possiamo considerare sequenze che differiscono l'una da l'altra per

$$\Delta = (dq, \delta q + \tilde{d}m, \delta m), \quad (209)$$

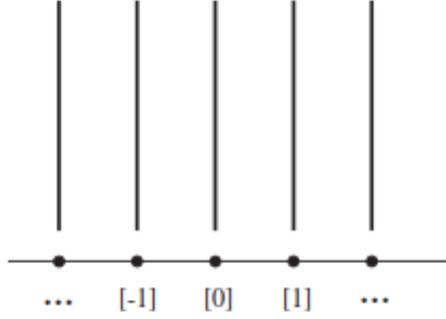


Figura 25: Presentazione del fibrato di Deligne-Beilinson. Da [12].

dove  $q \in \check{C}^{(0)}(\mathcal{U}, \Omega^0(\mathcal{M}))$ , mentre  $m \in \check{C}^{(0)}(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ . Poiché  $\Delta \subset B_p^q = \left\{ \text{Imm } D : C_p^{q-1} \rightarrow C_p^q \right\}$ ,  $\Delta$  non modifica le classi di coomologia di  $DB$  associata a  $(v, \lambda, n)$ . In altre parole  $\Delta$  è associato ad un elemento banale delle classi di  $DB$ , ed equivale ad aggiungere  $\Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$  alla connessione  $\mathcal{A}$ . Per quanto riguarda le classi di  $DB$  abbiamo quindi:

$$[\mathcal{A}] \xrightarrow{\text{gauge}} [\mathcal{A}]. \quad (210)$$

Alla fine la classe di coomologia di  $(v, \lambda, n)$  è associata canonicamente a tutte le possibili triplette  $(\mathcal{P}, \mathcal{U}, \mathcal{A})$   $U(1)$ -equivalenti.

#### 5.4 Presentazione della Connessione in $\mathcal{M}$

La classe di  $DB$  associata alla connessione  $\mathcal{A}$  verrà denotata con  $[\mathcal{A}] \in H_D^1(\mathcal{M})$ , dove  $H_D^1(\mathcal{M})$  è il gruppo di coomologia di  $DB$  di grado 1 su  $\mathcal{M}$ . Sappiamo che  $H_D^1(\mathcal{M})$  può essere descritto come il termine centrale della seguente sequenza esatta

$$0 \rightarrow \Omega^1(\mathcal{M}) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M}) \rightarrow H_D^1(\mathcal{M}) \rightarrow H^2(\mathcal{M}, \mathbb{Z}) \approx H_1(\mathcal{M}) \rightarrow 0, \quad (211)$$

dove  $H_1(\mathcal{M})$  è il primo gruppo di omologia di  $\mathcal{M}$  (vedi appendice (8.1)). Dalla sequenza (211) vediamo che è possibile interpretare  $H_D^1(\mathcal{M})$  come un fibrato su  $H_1(\mathcal{M})$ , dove le fibre hanno una struttura isomorfa a  $\Omega^1(\mathcal{M}) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$ . In generale, ciascuna classe può essere scritta come una 1-forma  $A \in \Omega^1(\mathcal{M}) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$  globalmente definita su  $\mathcal{M}$  più un origine  $\hat{A}_\gamma$ . L'origine non è canonica e dipende dall'elemento  $\gamma \in H_1(\mathcal{M})$  su cui è proiettata la fibra. Alla fine [10]

$$[\mathcal{A}] = \hat{A}_\gamma + A. \quad (212)$$

La presentazione (212) dipende unicamente dalla struttura del fibrato, ed è valida per qualunque varietà  $\mathcal{M}$ . Può essere utile vedere come è possibile scegliere un origine  $\hat{A}_\gamma$  con qualche esempio concreto.

In generale, il primo gruppo di omologia può essere scritto come [11]

$$H_1(\mathcal{M}) = F(\mathcal{M}) \oplus T(\mathcal{M}), \quad (213)$$

dove  $F(\mathcal{M}) = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$  è detta parte abeliana liberamente generata, mentre  $T(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_n}$  è detta torsione. Gli interi  $p_1 \dots p_n$  sono univocamente determinati se richiediamo che  $p_i$  divida  $p_{i+1}$ .

Iniziamo a considerare le sfere le omologia, che possiamo denotare con  $\mathcal{M} = \mathcal{S}$ . Questo rappresenta il caso più semplice, in quanto per definizione  $H_1(\mathcal{S}) = 0$ . Il questo caso, il fibrato coincide con la fibra, per cui  $H_D^1(\mathcal{S}) \simeq \Omega^1(\mathcal{S}) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{S})$ . Un esempio rappresentativo di questo tipo di spazi è dato proprio da  $S^3$ . Poiché ogni mappa da  $S^1$  in  $S^3$  è contraibile, per il lemma di Poincaré ogni 1-forma chiusa è esatta, ed abbiamo  $\Omega_{\mathbb{Z}}^1(S^3) = d\Omega_{\mathbb{Z}}^0(S^3)$ . Alla fine  $H_D^1(S^3)$  contiene le 1-forme definite su  $S^3$  modulo le 1-forme esatte  $\omega$  che soddisfano  $\int_{S^3} \omega = 0$ . In generale, per le sfere di omologia si ha

$$[\mathcal{A}] = A, \quad (214)$$

dove  $A \in \Omega^1(\mathcal{S}) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{S})$ .

Se il gruppo di omologia non è banale, la presentazione della connessione diventa più complicata. Il più semplice esempio di  $H_1(\mathcal{M})$  non banale e liberamente generato è dato da  $H_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}$ . Per fissare le idee conviene scegliere una varietà che soddisfa questa condizione; il risultato sarà comunque valido in generale.

Consideriamo  $\mathcal{M} = S^2 \times S^1$ , per la quale  $H_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$ . È possibile rappresentare  $S^2 \times S^1$  come una regione in  $\mathbb{R}^3$  delimitata da due sfere concentriche, con la convenzione di identificare i punti delle due superfici con le stesse coordinate angolari. Questo è mostrato in figura (26), dove  $G_0$  è il cammino chiuso ed orientato associato al generatore di  $H_1(S^2 \times S^1)$ .

Dato che la base è data da  $\mathbb{Z}$ , il fibrato ha la struttura a pettine mostrata in figura (25), e ciascun elemento di ciascuna fibra corrisponde ad una classe di  $DB$ . In particolare, la connessione  $\mathcal{A}$  in  $H_D^1(S^2 \times S^1)$  è descritta da infinite fibre inequivalenti, ciascuna isomorfa a  $\Omega^1(S^2 \times S^1) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(S^2 \times S^1)$ . Convenzionalmente, la fibra sopra  $[0]$  può essere identificata con  $\Omega^1(S^2 \times S^1) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(S^2 \times S^1)$ . Le rimanenti fibre  $[n]$   $n \in \mathbb{Z}$ , con  $n \neq 0$ , non hanno un'origine canonica e possono essere scritte come un elemento di  $\Omega^1(S^2 \times S^1) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(S^2 \times S^1)$  più l'origine. Fissare un'origine significa fissare una sezione

$$s : \mathbb{Z} \rightarrow H_D^1(S^2 \times S^1), \quad (215)$$

con la convenzione  $s(0) = [0]$ . La scelta più naturale ricade su  $[10]$

$$n \rightarrow s(n) \equiv n[\gamma_0], \quad (216)$$

dove  $[\gamma_0] \in H_D^1(S^2 \times S^1)$  è la classe di  $DB$  distribuzionale<sup>9</sup> associata al nodo  $G_0$ . Similmente a quanto visto per la connessione,  $[\gamma_0]$  ha una presentazione di Čech-de Rham data da

---

<sup>9</sup>Le classi distribuzionali verranno specificate nel prossimo capitolo. Per adesso è possibile immaginare che queste classi siano canonicamente associate ai nodi in una varietà.

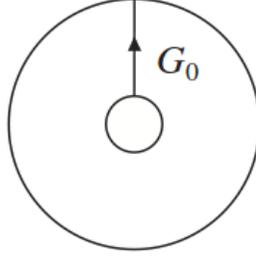


Figura 26: Varietà  $\mathcal{M} = S^2 \times S^1$ . Da [12].

$$[\gamma_0] \leftrightarrow (V^a, \Lambda^{ab}, N^{abc}). \quad (217)$$

Poiché il nodo  $G_0$  è associato al generatore di omologia, le componenti  $\Lambda^{ab}$ ,  $N^{abc}$  non sono banali. Alla fine, se  $\mathcal{M} = S^2 \times S^1$  le classi di  $DB$  sono date da [10]

$$[\mathcal{A}] = n[\gamma_0] + A \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (218)$$

dove  $A \in \Omega^1(S^2 \times S^1) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(S^2 \times S^1)$ . Per qualsiasi altra varietà che soddisfa  $H_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}$ , la presentazione (218) resta ancora valida. In generale  $A \in \Omega^1(\mathcal{M}) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$ , mentre  $[\gamma_0] \in H_D^1(\mathcal{M})$  è la classe di  $DB$  distribuzionale associata al nodo  $G_0$  generatore di  $H_1(\mathcal{M})$ .

Consideriamo adesso un altro esempio di  $H_1(\mathcal{M})$  abeliano liberamente generato, ossia con  $H_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ . Sia  $\Sigma_g$  una superficie di Riemann chiusa di genere  $g \geq 1$ . Le varietà definite da  $\mathcal{M} = S^1 \times \Sigma_g$  soddisfano  $H_1(S^1 \times \Sigma_g) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ , ed il numero di generatori del gruppo è dato da  $2g + 1$ . Per questa categoria di varietà, la presentazione della connessione è del tutto simile a quanto già visto. Il fibrato  $H_D^1(S^1 \times \Sigma_g)$  ha base data da  $\mathbb{Z}^{2g+1}$ , mentre ciascuna fibra è isomorfa a  $\Omega^1(S^1 \times \Sigma_g) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(S^1 \times \Sigma_g)$ . Siano  $\{G_0, \dots, G_{2g}\}$  i nodi orientati generatori di  $H_1(S^1 \times \Sigma_g)$ . Per ogni  $i = 0, 1, \dots, 2g$  introduciamo  $[\gamma_i] \in H_D^1(S^1 \times \Sigma_g)$ , ossia la classe di  $DB$  distribuzionale associata a  $G_i$ .

Gli elementi della base possiamo indicarli con

$$\vec{n} \equiv (n_0, n_1, \dots, n_{2g}), \quad (219)$$

e l'origine delle fibre può essere fissata con la sezione

$$\vec{n} \rightarrow s(\vec{n}) = [n\gamma] \equiv \vec{n} \cdot [\vec{\gamma}] = \sum_{i=0}^{2g} n_i [\gamma_i]. \quad (220)$$

Alla fine, se  $\mathcal{M} = S^1 \times \Sigma_g$ , le classi  $[\mathcal{A}] \in H_D^1(\mathcal{M})$  possono essere scritte come

$$[\mathcal{A}] = [n\gamma] + A \quad n \in \mathbb{Z}^{2g+1}, \quad (221)$$

dove  $A \in \Omega^1(S^1 \times \Sigma_g) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(S^1 \times \Sigma_g)$ .

Prima di dare l'espressione generale, consideriamo uno spazio con torsione. Gli spazi lenticolari  $L_{a,b}$  sono caratterizzati da due interi  $a, b$  coprimi che soddisfano  $1 \leq b < a$ , in cui vale  $H_1(L_{a,b}) = \mathbb{Z}_a$ . Se  $G_0$  è il nodo orientato generatore di  $H_1(L_{a,b})$ , e  $[\gamma_0]$  è la classe di  $DB$  distribuzionale associata a  $G_0$ , possiamo scrivere le classi  $[\mathcal{A}]$  come

$$[\mathcal{A}] = n[\gamma_0] + A \quad n = 0, 1, \dots, a-1, \quad (222)$$

dove, al solito,  $A \in \Omega^1(L_{a,b}) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(L_{a,b})$ . La differenza sostanziale, rispetto ai casi liberamente generati, è data dal fatto che la base negli spazi di pura torsione è finita. Questo implica un numero finito di fibre nel fibrato (211).

Sia adesso  $\mathcal{M}$  generico, con gruppo di omologia

$$H_1(\mathcal{M}) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_m}}_m. \quad (223)$$

I generatori di  $H_1(\mathcal{M})$  sono associati a  $n + m$  differenti percorsi chiusi e orientati (nodi), che possiamo indicare con  $\{G_1, \dots, G_n, G_{n+1}, \dots, G_{n+m}\}$ . Per ogni  $i = 1, 2, \dots, n + m$  introduciamo  $[\gamma_i] \in H_D^1(\mathcal{M})$ , che come al solito denota la classe di  $DB$  distribuzionale associata al nodo orientato  $G_i$ . Gli elementi della base possiamo indicarli con

$$\vec{h} = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1}, \dots, h_{n+m}) \in (\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}_{p_1}, \dots, \mathbb{Z}_{p_m}), \quad (224)$$

e l'origine di ciascuna fibra può essere fissata con

$$\vec{h} \rightarrow s(\vec{h}) = [h\gamma] \equiv \vec{h} \cdot [\vec{\gamma}] = \sum_{i=1}^{n+m} h_i [\gamma_i]. \quad (225)$$

Infine, ciascuna classe di  $DB$  potrà essere scritta come [10]

$$[\mathcal{A}] = [h\gamma] + A, \quad (226)$$

dove la 1-forma  $A \in \Omega^1(\mathcal{M}) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$  è globalmente definita su tutta la varietà.

## 6 Teoria di Chern-Simons in $\mathcal{M}$

### 6.1 Azione di $CS$ in $\mathcal{M}$

Le principali caratteristiche della teoria di  $CS$  in  $S^3$  sono la covarianza in senso generale, e l'invarianza di gauge (più precisamente è una teoria di pura gauge). Se vogliamo estendere questa teoria ad una 3-varietà  $\mathcal{M}$  chiusa ed orientata, dobbiamo specificare in che senso questa estensione deve essere realizzata. Nel nostro caso vogliamo che la teoria di  $CS$  in  $\mathcal{M}$  sia ancora topologica ed invariante di gauge. Inoltre, vogliamo che le osservabili siano rappresentate dall'olonomia calcolata su nodi (o link) in  $\mathcal{M}$ . Può essere utile notare come la naturale scelta

$$S = 2\pi k \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge d\omega, \quad (227)$$

dove  $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ , non soddisfi le condizioni richieste. In particolare, la teoria di campo con azione (227) non è una teoria di pura gauge, in quanto i campi  $\omega$  non coincidono con la connessione. La connessione, a livello globale, non è data semplicemente da 1-forme differenziali, ma da un insieme di grandezze  $\mathcal{A} \leftrightarrow (v^a, \lambda^{ab}, n^{abc})$ . Queste grandezze trovano una naturale descrizione in termini di classi di  $DB$ ; vogliamo quindi esprimere l'azione in termini di  $[\mathcal{A}]$ .

Consideriamo due sequenze di  $DB$  su 3-varietà, che possiamo indicare con  $\omega = (\omega^{(0,1)}, \omega^{(1,0)}, \omega^{(2,-1)})$ ,  $\eta = (\eta^{(0,1)}, \eta^{(1,0)}, \eta^{(2,-1)})$ . Come sappiamo  $[\omega], [\eta] \in H_D^1(\mathcal{M})$ , per cui possiamo pensare a  $\omega, \eta$  come ai campi della teoria di  $CS$  (quindi connessione o forme distribuzionali<sup>10</sup>).

A partire da  $H_D^1(\mathcal{M})$  possiamo definire [27] la mappa bilineare

$$* : H_D^1(\mathcal{M}) \otimes H_D^1(\mathcal{M}) \rightarrow H_D^3(\mathcal{M}), \quad (228)$$

che definisce il prodotto di  $DB$ :

$$[\omega] * [\eta] \in H_D^3(\mathcal{M}). \quad (229)$$

Il prodotto di  $DB$  è costruito tramite l'operatore  $\cup$  che agisce su tutte le possibili combinazioni degli elementi delle sequenze

$$\omega * \eta = \left( \omega^{(0,1)} \cup \eta^{(0,1)}, \dots, \omega^{(0,1)} \cup \eta^{(2,-1)}, \dots, \omega^{(2,-1)} \cup \eta^{(2,-1)} \right), \quad (230)$$

secondo la definizione [11, 19, 30]

---

<sup>10</sup>La distinzione tra classi di  $DB$  distribuzionali e standard è inessenziale in questo paragrafo, e verrà specificata più avanti.

$$\omega^{(a,b)} \cup \eta^{(c,d)} = \begin{cases} \omega^{(a,b)} \wedge \eta^{(c,d)} & \text{se } b = -1 \\ \omega^{(a,b)} \wedge d\eta^{(c,d)} & \text{se } d = 1 \text{ e } b > -1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (231)$$

Con una verifica diretta è possibile vedere che  $\omega * \eta$  definisce un elemento di  $H_D^3(\mathcal{M})$ . Sappiamo che una trasformazione  $\omega/\eta \rightarrow \omega/\eta + \Delta$ , con  $\Delta$  è definito dall'espressione (209), non modifica le classi  $[\omega] * [\eta]$ . Questo significa che sotto una trasformazione di gauge (sia standard che “grande”) si ha

$$[\omega] * [\eta] \xrightarrow{\text{gauge}} [\omega] * [\eta]. \quad (232)$$

A questo punto, possiamo introdurre l'azione di  $CS$  in  $\mathcal{M}$  come [12]

$$S_{CS}[\mathcal{A}] = 2\pi k \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\mathcal{A}], \quad (233)$$

dove  $k \neq 0 \in \mathbb{Z}$ . Dato che  $[\mathcal{A}] * [\mathcal{A}]$  è definito modulo  $\Omega_{\mathbb{Z}}^3(\mathcal{M})$ , si trova subito

$$S_{CS}[\mathcal{A}] \quad \text{definita mod. } (2\pi n) \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (234)$$

per cui  $\exp(iS_{CS}[\mathcal{A}])$  è ben definita, ed è invariante di gauge come richiesto. Inoltre, il fibrato di  $H_D^3(\mathcal{M})$  è banale, e vale semplicemente  $H_D^3(\mathcal{M}) \simeq \Omega^3(\mathcal{M})/\Omega_{\mathbb{Z}}^3(\mathcal{M}) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ; questo garantisce la covarianza in senso generale di  $\int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\mathcal{A}]$ .

Naturalmente, se  $\mathcal{M} = S^3$ , si ritrova la classica definizione (1). Per verificarlo è sufficiente utilizzare la proprietà (214), ricordando che per le 1-forme globalmente definite in  $\mathcal{M}$  la presentazione di Čech-de Rham è data da  $A \leftrightarrow (A^a, 0, 0)$ . Dalla definizione (231) si ottiene dunque

$$\int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\mathcal{A}] \rightarrow \sum_a \int_{S^3} A^a \wedge dA^a = \int_{S^3} A \wedge dA, \quad (235)$$

dove  $A \in \Omega^1(S^3)/\Omega_{\mathbb{Z}}^1(S^3)$ . In generale, il prodotto- $*$  non è dato semplicemente dal wedge per derivata esterna. Se indichiamo la presentazione di Čech-de Rham della connessione con  $\mathcal{A} \leftrightarrow (v^a, \lambda^{ab}, n^{abc})$ , utilizzando le proprietà (231) otteniamo

$$[\mathcal{A}] * [\mathcal{A}] \sim v \wedge dv + \lambda \wedge dv + n \wedge v + n \wedge \lambda + n \wedge n, \quad (236)$$

dove il primo termine coincide con la lagrangiana “classica” definita localmente. In generale, possiamo sempre determinare un ricoprimento poliedrale di  $\mathcal{M}$  compatibile con un buon ricoprimento

$\mathcal{U} = \{\mathcal{U}^a\}$ . Se  $M^a \subset \mathcal{U}^a$ ,  $S^{ab}$ ,  $l^{abc}$ ,  $p^{abcd}$  sono rispettivamente poliedri, superfici, linee, e spigoli di contatto, l'azione di  $CS$  è data da

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\mathcal{A}] &= \sum_a \int_{M^a} v^a \wedge dv^a + \frac{1}{2} \sum_{a,b} \int_{S^{ab}} \lambda^{ab} \wedge dv^a \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{a,b,c} \int_{l^{abc}} n^{abc} \wedge v^a + \frac{1}{6} \sum_{a,b,c,d} \int_{p^{abcd}} n^{abcd} \wedge \lambda^{cd}. \end{aligned} \quad (237)$$

Lo sviluppo (237) specifica l'azione di  $CS$  secondo la presentazione di Čech-de Rham, ed è utile per capire come ciascun termine contribuisce all'invarianza di gauge. Dal punto di vista operativo, invece, lo sviluppo (237) non è essenziale al fine dei calcoli. Come vedremo, sarà possibile sommare direttamente sulle classi  $[\mathcal{A}] = [h\gamma] + A$  senza dover specificare nessun ricoprimento poliedrico. In altri termini, possiamo limitarci alla forma

$$\int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\mathcal{A}] = \sum_h \int_{\mathcal{M}} (A * A + 2 [h\gamma] * A + [h\gamma] * [h\gamma]), \quad (238)$$

dove si è sfruttata la bilinearità del prodotto- $*$ .

## 6.2 Classi Distribuzionali di Deligne-Beilinson

Nella presentazione della connessione abbiamo introdotto, senza specificarle, le classi distribuzionali di  $DB$ . Queste classi di equivalenza si costruiscono a partire da sequenze con componenti distribuzionali. Nel nostro caso, è sufficiente considerare sequenze del tipo  $\eta = (\eta^{(0,1)}, \eta^{(1,0)}, \eta^{(2,-1)})$ , dove i termini distribuzionali  $\eta^{(0,1)}, \dots, \eta^{(2,-1)}$  soddisfano le medesime equazioni discendenti dei cocicli standard.

Formalmente, è possibile estendere  $H_D^q(\mathcal{M})$  ad un gruppo di coomologia più grande che include le forme distribuzionali; questo gruppo verrà denotato con  $\tilde{H}_D^q(\mathcal{M})$ . Il prodotto di  $DB$  si estende [12] in maniera naturale a

$$* : H_D^1(\mathcal{M}) \otimes \tilde{H}_D^1 \rightarrow \tilde{H}_D^3(\mathcal{M}), \quad (239)$$

conservando le proprietà viste in precedenza. Si può dimostrare [12, 27] che è possibile associare ad ogni nodo  $C \subset \mathcal{M}$  una classe distribuzionale canonica  $[\eta_C] \in \tilde{H}_D^1(\mathcal{M})$  che soddisfa

$$\oint_C [\omega] = \int_{\mathcal{M}} [\omega] * [\eta_C] \quad \text{mod } \mathbb{Z}, \quad (240)$$

dove  $[\omega] \in H_D^1(\mathcal{M})$ . Differentemente da quanto avviene in  $S^3$ , in una varietà  $\mathcal{M}$  generica, non tutti i nodi sono il bordo di una superficie di Seifert [12]. Infatti, se il nodo ha omologia non banale non possiede una superficie di Seifert (è sufficiente osservare il nodo  $G_0$  in Figura (26)). Per questo motivo la classe  $[\eta_C]$  ha una differente interpretazione rispetto alle 1-forme  $\eta_C$  definite nel paragrafo (3.7). Comunque sia, la classe  $[\eta_C]$  è ben definita per qualsiasi 3-varietà  $\mathcal{M}$  e per qualsiasi nodo.

Come si è visto per la connessione, è possibile esprimere  $[\eta_C]$  in termini di presentazione di Čech-de Rham. In generale si ha

$$[\eta_C] \leftrightarrow \left( V_C^a, \Lambda_C^{ab}, N_C^{abc} \right), \quad (241)$$

dove  $dV_C^a$  è la restrizione nell'aperto  $\mathcal{U}^a$  della 2-corrente del nodo  $C$ . Se il nodo è tutto contenuto in una palla, le componenti  $\Lambda, N$  sono nulle e  $V_C^a$  ha supporto su una superficie di Seifert. Viceversa, se il nodo non è contraibile, le componenti  $\Lambda, N$  non sono banali, e l'integrale (240) ammette uno sviluppo simile a quello dell'azione (237). Queste classi distribuzionali, come si è visto, entrano nella presentazione della connessione. Oltre a questo, diventano utili per esprimere le osservabili della teoria.

Nella teoria di  $CS$  un set completo di osservabili è dato dai loop di Wilson. Se  $C$  è un nodo in  $\mathcal{M}$ , il loop  $W(C)$  rappresenta il trasporto parallelo (olonomia) lungo  $C$  nelle varie rappresentazioni. Se la connessione  $[\mathcal{A}]$  è nota, il trasporto parallelo è ben definito in qualsiasi 3-varietà  $\mathcal{M}$  e vale

$$W(C) = \exp \left( i2\pi q \oint_C [\mathcal{A}] \right) = \exp \left( i2\pi q \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\eta_C] \right), \quad (242)$$

dove  $q \in \mathbb{Z}$  è il colore. Al solito, l'invarianza di gauge di  $W(C)$  è assicurata dalla proprietà (232). Se siamo in presenza di un link  $\mathcal{L} = \{C_1, \dots, C_n\}$  è sufficiente sostituire

$$q [\eta_C] \rightarrow \sum_{i=1}^n q_i [\eta_i] \equiv [\eta_{\mathcal{L}}], \quad (243)$$

in modo simile a quanto visto nel paragrafo (3.7). D'ora in avanti, a seconda dei casi, utilizzeremo indistintamente le due forme dell'operatore di Wilson (242).

Oltre al prodotto (239), siamo interessati ai prodotti tra forme distribuzionali:

$$* : \tilde{H}_D^1(\mathcal{M}) \otimes \tilde{H}_D^1 \rightarrow \tilde{H}_D^3(\mathcal{M}). \quad (244)$$

Se  $[\eta_1], [\eta_2]$  sono le classi distribuzionali di  $DB$  associate ai nodi non intersecanti  $C_1 \neq C_2 \in \mathcal{M}$ , il loro prodotto è ben definito e vale

$$[\eta_1] * [\eta_2] \in \Omega_{\mathbb{Z}}^3(\mathcal{M}). \quad (245)$$

In altre parole  $[\eta_1] * [\eta_2]$  è un elemento banale dal punto di vista di  $DB$ . La proprietà (245) vale in generale, e può essere dedotta in modo semplice per qualche caso.

Consideriamo due nodi  $C_1, C_2 \subset \mathcal{U}^a$  definiti nello stesso aperto di  $\mathcal{M}$ . In questo caso il significato del prodotto  $[\eta_1] * [\eta_2]$  è quello di numero di allacciamento. Per verificarlo, è sufficiente notare che

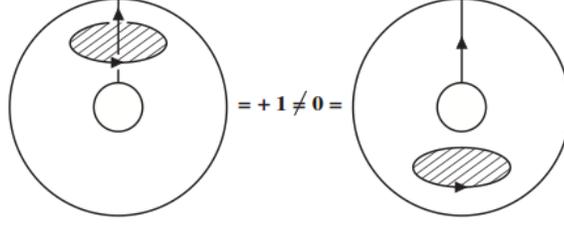


Figura 27: Il numero di avvolgimento in  $S^2 \times S^1$  può essere non ben definito. Da [12].

le classi  $[\eta_1], [\eta_2]$  sono globalmente definite in  $\mathcal{M}$ , per cui la presentazione di Čech-de Rham è data da  $[\eta_{1/2}] = (V_{1/2}^a, 0, 0)$ . Dalla definizione di prodotto- $*$  si ottiene infine:

$$\int_{\mathcal{M}} [\eta_1] * [\eta_2] = \int_{\mathcal{U}^a} V_1^a \wedge dV_2^a = \chi(C_1, C_2), \quad (246)$$

dove  $\chi(C_1, C_2)$  è il numero di allacciamento già studiato in  $\mathbb{R}^3$  ed  $S^3$ . Un'ulteriore possibilità è data da  $C_1 \subset \mathcal{U}^a, C_2 \subset \mathcal{U}^b$ , ossia nodi definiti in aperti differenti. I nodi  $C_1, C_2$  sono entrambi contraibili, ed i rispettivi aperti non si intersecano:  $\mathcal{U}^a \cap \mathcal{U}^b = 0$ . In questo caso, tuttavia, è sempre possibile collegare gli aperti  $\mathcal{U}^a, \mathcal{U}^b$  in modo che i nodi siano definiti in uno stesso aperto. Fatto ciò ritroviamo la forma (246) con  $\chi(C_1, C_2) = 0$ . Una situazione più complicata si ha quando un nodo, ad esempio  $C_1$ , è contraibile, mentre l'altro non è omologicamente banale. Dato che  $[\eta_1] = (V_1^a, 0, 0)$ , per definizione di prodotto- $*$  ritroviamo una forma d'intersezione:  $\int_{\mathcal{M}} [\eta_1] * [\eta_2] = \int_{\mathcal{M}} V_1^a \wedge dV_2^a$ . Questo integrale conta il numero di volte con cui  $C_2$  interseca la superficie di Seifert  $\Sigma_1$  definita da  $C_1 = \partial\Sigma_1$ . Tuttavia, benché questo numero sia chiaramente un intero, non rappresenta il numero di allacciamento. In effetti, per generiche 3-varietà  $\mathcal{M}$ , il numero di avvolgimento tra due nodi potrebbe non essere ben definito (non è un invariante di isotopia ambiente). Un esempio è mostrato in figura (27), dove è rappresentato un nodo contraibile ed il nodo generatore di  $H_1(S^2 \times S^1)$ . Questo genere di ambiguità, che dipendono dal gruppo di omologia non banale, non saranno presenti nei valori di aspettazione.

In generale, l'espressione (245) non è una forma d'intersezione, e l'integrale  $\int_{\mathcal{M}} [\eta_1] * [\eta_2]$  non coincide affatto con il numero di avvolgimento. Comunque sia è un intero, per cui rappresenta un elemento banale dal punto di  $DB$ .

L'ultimo aspetto da chiarire riguarda il valore di  $[\eta_C] * [\eta_C]$ . Per nodi contraibili  $[\eta_C] * [\eta_C] = \int_{\mathcal{U}^a} V_C^a \wedge dV_C^a$ , per cui l'integrale contiene delle ambiguità dal punto di vista topologico. Come sappiamo, queste ambiguità possono essere eliminate con una procedura di framing. Nel caso generale, possiamo sempre [12] scegliere un particolare framing che elimini le (eventuali) ambiguità del prodotto  $[\eta_C] * [\eta_C]$  in modo tale che valga

$$[\eta_C] * [\eta_C] \equiv [\eta_C] * [\eta_{C_f}] \in \Omega_{\mathbb{Z}}^3(\mathcal{M}). \quad (247)$$

Naturalmente, l'integrale dell'espressione (247) non coincide con  $\chi(C, C_f)$  se il nodo non è banale.

### 6.3 Integrale Funzionale e Regole di Calcolo

L'azione (233) permette di estendere la teoria di  $CS$  a qualsiasi 3-varietà  $\mathcal{M}$  chiusa ed orientata. La possibilità di considerare differenti 3-varietà suggerisce l'esistenza di grandezze interessanti non legate ai loop di Wilson. Per discutere questo punto, iniziamo a considerare la funzione di partizione non normalizzata

$$Z(\mathcal{M}) \equiv \int D[\mathcal{A}] e^{iS_{CS}[\mathcal{A}]}, \quad (248)$$

dove  $S_{CS}[\mathcal{A}]$  è l'azione (233), mentre la somma sulle classi  $\int D[\mathcal{A}]$  rappresenta la misura d'integrazione. Poiché l'azione  $S_{CS}$  è quadratica nei campi, l'integrale funzionale è invariante [31] per traslazioni, ed è possibile utilizzare la presentazione (238) per riscrivere la funzione di partizione (248) come

$$Z(\mathcal{M}) = \sum_h \int DA e^{i2\pi k \int_{\mathcal{M}} (A * A + 2[h\gamma] * A + [h\gamma] * [h\gamma])}, \quad (249)$$

dove la somma è da effettuarsi su

$$\sum_h = \sum_{h_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=-\infty}^{\infty} \sum_{h_{n+1}=0}^{p_1-1} \cdots \sum_{h_m=0}^{p_m-1}. \quad (250)$$

Alla fine, grazie all'invarianza per traslazione, la scelta della sezione (225) non gioca nessun ruolo nel calcolo dell'integrale funzionale; infatti l'integrazione è di tipo standard, con  $\int DA$  effettuato su  $A \in \Omega^1(\mathcal{M})/\Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$ .

Per dare un significato a  $Z(\mathcal{M})$  occorre introdurre una normalizzazione  $N_0(\mathcal{M})$ , in modo che  $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = Z(\mathcal{M})/N_0(\mathcal{M})$  sia un invariante di  $\mathcal{M}$  ben definito. La scelta di  $N_0(\mathcal{M})$  non è univoca *a priori*, ma deve soddisfare due requisiti fondamentali. Il primo è che  $Z(\mathcal{M})/N_0(\mathcal{M})$  sia finito, il secondo è che  $N_0(\mathcal{M})$  dipenda dalla sola topologia di  $\mathcal{M}$  e sia invariante di gauge. Una possibilità è la seguente [10]:

$$N_0(\mathcal{M}) = \int DA e^{i2\pi k \int_{\mathcal{M}} A * A}, \quad (251)$$

dove, come al solito,  $A \in \Omega^1(\mathcal{M})/\Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$ . Si noti che l'integrale funzionale (251) coincide con il termine della somma (249) corrispondente all'elemento neutro di  $H_1(\mathcal{M})$ . Definiamo dunque la funzione di partizione normalizzata come [10]

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) \equiv \sum_h \frac{\int DA e^{i2\pi k \int_{\mathcal{M}} (A * A + 2A * [h\gamma] + [h\gamma] * [h\gamma])}}{\int DA e^{i2\pi k \int_{\mathcal{M}} A * A}}. \quad (252)$$

Con la scelta (251), per le sfere di omologia si ha  $\mathcal{Z}(S) = 1$ . In generale  $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) \neq 1$ , ed il risultato dipende dalla particolare varietà  $\mathcal{M}$  considerata (non solo da  $H_1(\mathcal{M})$ ).

Oltre alla funzione di partizione, siamo interessati ai valori di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$ , dove  $W(\mathcal{L})$  è l'operatore di Wilson definito dall'espressione (242). In accordo con l'usuale definizione di valore di aspettazione abbiamo

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} \equiv \frac{\int D[\mathcal{A}] \exp \{i2\pi k \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\mathcal{A}]\} \exp \{i2\pi \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\eta_{\mathcal{L}}]\}}{\int D[\mathcal{A}] \exp \{i2\pi k \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\mathcal{A}]\}}, \quad (253)$$

dove  $[\eta_{\mathcal{L}}]$  è la classe distribuzionale associata al link  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ . Al solito  $\int D[\mathcal{A}]$  può essere sostituito con  $\int DA$  grazie all'invarianza per traslazione. Per alcune 3-varietà, il denominatore dell'espressione (253) può annullarsi. Questa situazione, che può creare qualche ambiguità, si risolve introducendo

$$\langle\langle W(\mathcal{L}) \rangle\rangle_{\mathcal{M}} \equiv N_0^{-1}(\mathcal{M}) \sum_h \int DA e^{i2\pi k \int_{\mathcal{M}} (A * A + 2[h\gamma] * A + [h\gamma] * [h\gamma])} e^{i2\pi \int_{\mathcal{M}} (A * [\eta_{\mathcal{L}}] + [h\gamma] * [\eta_{\mathcal{L}}])}. \quad (254)$$

Il valore (254), come verrà mostrato in seguito, è sempre ben definito. Dividendo per  $N_0(\mathcal{M})$  numeratore e denominatore dell'espressione (253), si ottiene

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{M}) \langle\langle W(\mathcal{L}) \rangle\rangle_{\mathcal{M}}, \quad (255)$$

che non contiene ambiguità se la funzione di partizione non è nulla.

Per semplificare il calcolo delle espressioni (252) e (255) può essere utile discutere nel dettaglio alcune proprietà dei vari termini all'esponente.

La 1-forma  $A \in \Omega^1(\mathcal{M}) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$  è globalmente definita in  $\mathcal{M}$ , e la relativa presentazione di Čech-de Rham è data da  $A \leftrightarrow (A^a, 0, 0)$ . In particolare, questo implica

$$\int_{\mathcal{M}} A * A = \sum_a \int_{\mathcal{M}} A^a \wedge dA^a = \int_{\mathcal{M}} A \wedge dA, \quad (256)$$

ovvero il prodotto- $*$  di  $DB$  coincide con  $\wedge d$  come in  $S^3$ . Consideriamo adesso il termine  $\int_{\mathcal{M}} A * [h\gamma]$ , dove  $[h\gamma] = h_i [\gamma_i]$  con  $h_i$  interi fissati. Per ipotesi ciascuna curva  $\gamma_i$  è associata ad un generatore del gruppo di omologia, e  $[\gamma_i]$  ne rappresenta la relativa classe di  $DB$  distribuzionale. Poiché ciascuna curva  $\gamma_i$  non è banale, le classi di  $DB$  hanno presentazione di Čech-de Rham data da  $[\gamma_i] \leftrightarrow (V_{\gamma_i}^a, \Lambda_{\gamma_i}^{ab}, N_{\gamma_i}^{abc})$ , con  $\Lambda, N$  non nulli. Tuttavia, i termini  $\Lambda, N$  definiti rispettivamente nelle intersezioni doppie e triple, non entrano in  $\int_{\mathcal{M}} A * [h\gamma]$ . Vale infatti

$$\int_{\mathcal{M}} A * [h\gamma] = h_i \sum_a \int_{\mathcal{M}} A^a \wedge dV_{\gamma_i}^a. \quad (257)$$

Nell'espressione generale (238) compare inoltre il termine  $\int_{\mathcal{M}} [h\gamma] * [h\gamma]$ . Dalla definizione (225), vediamo che  $[h\gamma]$  è una classe distribuzionale associata ad una combinazione di generatori del gruppo di omologia. Fissato l'insieme di interi  $h$ ,  $[h\gamma]$  è legato ad un particolare elemento del gruppo di

omologia. Dal punto di vista dei rappresentanti, possiamo associare questo elemento ad un unico percorso. Questo percorso non è altro che la somma “#” dei nodi associati ai generatori<sup>11</sup>. Ad esempio, se  $\vec{h} = (1, 3, 0, \dots, 0)$  vale

$$\gamma = \gamma_1 \# \gamma_2 \# \gamma_2 \# \gamma_2, \quad (258)$$

dove la somma sugli stessi nodi è da intendersi su copie parallele. Dalla proprietà (247) otteniamo quindi

$$\int_{\mathcal{M}} [h\gamma] * [h\gamma] = 0 \quad \text{mod } \mathbb{Z}, \quad (259)$$

per cui il termine (259) può essere omesso dallo sviluppo (238) dell’azione. Allo stesso modo, il termine

$$\int_{\mathcal{M}} [h\gamma] * [\eta_{\mathcal{L}}] = 0 \quad \text{mod } \mathbb{Z} \quad (260)$$

è banale, e può essere rimosso dall’espressione (254).

Un ultimo aspetto interessante dei valori (255), riguarda la periodicità nel colore. Grazie all’invarianza per traslazione dell’integrale funzionale, possiamo aggiungere alla connessione una configurazione costante, ad esempio una classe distribuzionale. Consideriamo una sostituzione  $[\mathcal{A}] \rightarrow [\mathcal{A}] + [\eta_i]$ , dove  $[\eta_i]$  è la classe distribuzionale associata alla  $i$ -esima componente di  $\mathcal{L}$ . L’esponente dell’espressione (254) diventa quindi:

$$2\pi k \int_{\mathcal{M}} A * A + 4\pi k \int_{\mathcal{M}} A * [h\gamma] + 2\pi \int_{\mathcal{M}} A * [\eta_{\mathcal{L}}] + 4\pi k \int_{\mathcal{M}} A * [\eta_i], \quad (261)$$

dove si sono sfruttate le semplificazioni (259) e (260). Alla fine, la sostituzione  $[\mathcal{A}] \rightarrow [\mathcal{A}] + [\eta_i]$  modifica l’esponente per un termine  $4\pi k \int_{\mathcal{M}} A * [\eta_i]$ , che equivale a modificare il colore della  $i$ -esima componente secondo  $q_i \rightarrow q_i + 2k$ . In conclusione, il valore di aspettazione non cambia se modifichiamo il colore di una qualsiasi componente di un multiplo di  $2k$ . Esplicitamente:

$$\left\langle \prod_i W(C_i, q_i) \right\rangle_{\mathcal{M}} = \left\langle \prod_i W(C_i, q_i + 2n_i k) \right\rangle_{\mathcal{M}} \quad \forall n_i \in \mathbb{Z}. \quad (262)$$

In particolare, tutte le componenti con colore  $\pm 2k, \pm 4k \dots$  possono essere rimosse. Questa proprietà, come sappiamo, è valida anche in  $S^3$  se  $k \neq 0 \in \mathbb{Z}$ .

---

<sup>11</sup>Si veda l’appendice (8.2) per i dettagli.

## 6.4 Varietà $\mathcal{M}$ di pura Torsione

### 6.4.1 Funzione di Partizione

Concentriamoci su varietà di pura torsione (cioè  $H_1(\mathcal{M}) = T(\mathcal{M})$ ). Poiché la generalizzazione non sarà del tutto immediata, conviene iniziare con il caso  $H_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}_p$  con  $p > 1$ ; ossia un unico generatore per il gruppo di omologia. Per fissare le idee, possiamo pensare a  $\mathcal{M} = L_{p,q}$ , dove  $L_{p,q}$  sono spazi lenticolari<sup>12</sup>.

Sia  $\gamma$  la curva associata al generatore di omologia; a partire da  $\gamma$  possiamo considerare le somme  $\gamma\#\gamma, \gamma\#\gamma\#\gamma, \dots$ . Poiché  $H_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}_p$ , la somma

$$\underbrace{\gamma\#\gamma\#\dots\#\gamma}_p, \quad (263)$$

rappresenta una curva omologicamente banale in  $\mathcal{M}$ , ossia contraibile. Per definizione di  $[\gamma]$  vale

$$\int_{L_{p,q}} A * [\gamma] = \oint_{\gamma} A, \quad (264)$$

per cui  $\int_{L_{p,q}} A * [\gamma]$  coincide con un integrale di linea calcolato su  $\gamma$ . Si è visto che la somma “#” di  $p$  copie del nodo  $\gamma$  dà un nodo banale, che possiamo denotare con  $\Gamma$ . Dato che  $\Gamma$  appartiene ad una 3-palla in  $L_{p,q}$ , è sempre possibile trovare una superficie di Seifert  $\Sigma_\Gamma$  tale che  $\Gamma = \partial\Sigma_\Gamma$ . Per questo motivo, la classe distribuzionale di  $DB$  associata a  $\Gamma$  è una corrente globalmente ben definita in  $\mathcal{M}$ . Se indichiamo questa classe con  $[\Gamma] \leftrightarrow (\eta_\Gamma^a, 0, 0)$ , possiamo riscrivere l’integrale (264) attraverso la relazione

$$\oint_{\gamma} A = \int_{L_{p,q}} A * [\gamma] = \int_{L_{p,q}} A * [V_\gamma] = \frac{1}{p} \oint_{\Gamma} A, \quad (265)$$

dove  $[V_\gamma] = [1/p]\Gamma$ . Tenendo conto di quest’ultima relazione, l’espressione di  $\mathcal{Z}(L_{p,q})$  diventa:

$$\mathcal{Z}(L_{p,q}) = \sum_{h=0}^{p-1} \frac{\int DA e^{i2\pi k \int A * A} e^{i2\pi k \left(\frac{2h}{p}\right) \oint_{\Gamma} A}}{\int D e^{i2\pi k \int A * A}}, \quad (266)$$

dove si è rimosso il termine (259). In modo simile a quanto già visto nel paragrafo (3.2), il termine lineare nei campi all’esponente può essere eliminato con un cambio di variabile. Per fare questo introduciamo la 1-forma  $\tilde{A}$  definita da

$$A(x) = -\frac{1}{2k} [\Gamma(x)] + \tilde{A}(x). \quad (267)$$

Sostituendo l’espressione (267) nella (266), e notando che  $\oint_{\Gamma} A = \int_{\mathcal{M}} A * [\Gamma]$  troviamo

<sup>12</sup>Una descrizione di questi spazi è data in appendice (8.1).

$$2\pi k \int_{L_{p,q}} A * A + 2\pi \left( \frac{2kh}{p} \right) \oint_{\Gamma} A = 2\pi k \int_{L_{p,q}} \tilde{A} * \tilde{A} - 2\pi k \left( \frac{h}{p} \right)^2 \int_{L_{pq}} [\Gamma] * [\Gamma], \quad (268)$$

dove si è sfruttata la bilinearità del prodotto-\*. Dato che l'integrale funzionale è invariante per traslazioni, si ha  $D\tilde{A} = DA$ , per cui numeratore e denominatore fattorizzano e rimane

$$\mathcal{Z}(L_{p,q}) = \sum_{h=0}^{p-1} e^{-i2\pi k \left( \frac{h}{p} \right)^2} \int_{L_{p,q}} \eta_{\Gamma} \wedge d\eta_{\Gamma}. \quad (269)$$

Il punto cruciale è che la 3-forma  $\eta_{\Gamma} \wedge d\eta_{\Gamma}$  è di intersezione, per cui l'integrale  $\int_{L_{a,b}} \eta_{\Gamma} \wedge d\eta_{\Gamma} = \chi_{L_{a,b}}(\Gamma, \Gamma_f)$  coincide con il numero di autoallacciamento di  $\Gamma$  in  $L_{a,b}$ . Dato che  $\Gamma$  è definito in una 3-palla in  $L_{a,b}$ , il valore  $\chi_{L_{a,b}}(\Gamma, \Gamma_f)$  non è ambiguo e rappresenta un invariante di isotopia ambiente per il nodo. Ci sono due aspetti da chiarire. Il primo è che  $\chi_{L_{a,b}}(\Gamma, \Gamma_f)$  dipende esplicitamente dal particolare framing scelto per  $\Gamma$ . Il secondo è che questo valore di autoallacciamento è calcolato rispetto ad  $L_{a,b}$  e non rispetto ad  $S^3$  come al solito. Una strategia per determinare  $\chi_{L_{a,b}}(\Gamma, \Gamma_f)$  consiste nel fissare un qualsiasi framing per  $\Gamma \subset S^3$  nella relativa presentazione chirurgica in  $S^3$ . A partire da questa presentazione possiamo poi determinare l'autoallacciamento in  $L_{a,b}$ . I dettagli per questo tipo di calcoli sono mostrati in appendice (8.2). Alla fine, comunque si scelga il framing di  $\Gamma \subset S^3$  otteniamo

$$\int_{L_{p,q}} \eta_{\Gamma} \wedge d\eta_{\Gamma} = \chi_{L_{p,q}}(\Gamma, \Gamma_f) \stackrel{p^2}{=} -pq, \quad (270)$$

dove il simbolo  $\stackrel{p^2}{=}$  denota l'uguaglianza modulo  $p^2$ . Sostituendo il valore (270) nell'espressione (269) troviamo:

$$\mathcal{Z}(L_{p,q}) = \sum_{h=0}^{p-1} e^{i2\pi k \left( \frac{q}{p} \right) h^2}. \quad (271)$$

Il risultato (271), come deve essere, non dipende da come scegliamo il framing per i nodi rappresentanti del gruppo di omologia. Per questo motivo, sceglieremo convenzionalmente un framing banale per tutti i nodi associati ad  $H_1(\mathcal{M})$ , dove per banale si intende autoallacciamento nullo nella relativa presentazione chirurgica in  $S^3$ . Naturalmente questo non è obbligatorio, ma semplificherà alcuni calcoli che affronteremo più avanti.

Il risultato (271) può essere riottenuto in modo differente, senza passare per il cambio di variabile (267). Vediamo come è possibile.

Sia  $\mathcal{M}$  una 3-varietà con  $H_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}_p$  (non necessariamente uno spazio lenticolare), e  $\gamma$  il nodo associato al generatore di  $H_1(\mathcal{M})$ . Sappiamo che negli integrali  $\int_{\gamma} A = \int_{\mathcal{M}} A * [\gamma]$  possiamo sostituire  $[\gamma]$  con una 1-forma globalmente ben definita

$$[\gamma] \rightarrow [V_\gamma] = \left[ \frac{1}{p} \Gamma \right], \quad (272)$$

dove  $[\Gamma] \leftrightarrow (\eta_\Gamma^a, 0, 0)$  è la classe associata alla curva banale  $\Gamma = p\gamma$ . A partire da  $[V_\gamma]$  possiamo introdurre la classe  $[\chi_\gamma]$  definita da

$$[\chi_\gamma] = [\gamma] - [V_\gamma]. \quad (273)$$

Poiché  $\int_{\mathcal{M}} A * [\gamma] = \int_{\mathcal{M}} A * [V_\gamma]$ , il prodotto di  $[\chi_\gamma]$  con qualsiasi classe definita globalmente è nullo (modulo  $\Omega_{\mathbb{Z}}^3(\mathcal{M})$ ). In particolare possiamo considerare

$$0 \stackrel{\mathbb{Z}}{=} \int_{\mathcal{M}} [\gamma] * [\gamma] = \int_{\mathcal{M}} \left[ \frac{1}{p} \Gamma \right] * \left[ \frac{1}{p} \Gamma \right] + \int_{\mathcal{M}} [\chi_\gamma] * [\chi_\gamma], \quad (274)$$

dove si sono usate le proprietà (272), (273) e la condizione (259). Il simbolo  $\stackrel{\mathbb{Z}}{=}$ , che useremo d'ora in avanti, denota l'uguaglianza modulo intero.

La curva  $\Gamma$  è banale, ed è il bordo di una superficie di Seifert:  $\Gamma = \partial\Sigma_\Gamma$ . Vale quindi

$$\int_{\mathcal{M}} [\chi_\gamma] * [\chi_\gamma] = - \int_{\mathcal{M}} \left[ \frac{1}{p} \Gamma \right] * \left[ \frac{1}{p} \Gamma \right] \stackrel{\mathbb{Z}}{=} - \frac{1}{p^2} \chi_{\mathcal{M}}(\Gamma, \Gamma_f), \quad (275)$$

dove  $\chi_{\mathcal{M}}(\Gamma, \Gamma_f)$ , al solito, è il numero di autoallacciamento di  $\Gamma$  in  $\mathcal{M}$ . Questo numero è ben definito, e le istruzioni per calcolarlo sono date in appendice (8.2).

Se la 3-varietà  $\mathcal{M}$  è di pura torsione possiamo scegliere una differente origine per le classi di connessione  $[\mathcal{A}] = A + h[\gamma]$ . In effetti, notando che  $[\gamma]$  ha una parte globalmente ben definita ( $V_\gamma$ ), possiamo rappresentare ciascuna classe  $[\mathcal{A}]$  come

$$[\mathcal{A}] = A + h[\chi_\gamma] \quad h = 0, \dots, p-1, \quad (276)$$

dove  $A \in \Omega^1(\mathcal{M})/\Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$ . Con la scelta (276), l'azione fattorizza immediatamente, e diventa

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\mathcal{A}] &= \int_{\mathcal{M}} (A * A + 2h[\chi_\gamma] * A + h^2[\chi_\gamma] * [\chi_\gamma]) \\ &= - \left( \frac{h}{p} \right)^2 \chi_{\mathcal{M}}(\Gamma, \Gamma_f) + \int_{\mathcal{M}} A * A. \end{aligned} \quad (277)$$

Naturalmente, il risultato (277) coincide con l'espressione (268) se lo spazio  $\mathcal{M}$  è lenticolare. Affrontiamo adesso il caso generale di una 3-varietà  $\mathcal{M}$  di pura torsione. Siano  $[\gamma_i]$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ , le classi di *DB* distribuzionali associate ai generatori del gruppo di omologia  $H_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_n}$ . È conveniente utilizzare il metodo appena discusso, ed introdurre le classi

$$[V_i] = \left[ \frac{1}{p_i} \Gamma_i \right], \quad (278)$$

dove  $\Gamma_i = p_i \gamma_i$  sono nodi omologicamente banali. La presentazione di Čech-de Rham della classe  $[\Gamma_i]$  è specificata da  $[\Gamma_i] \leftrightarrow (\eta_{\Gamma_i}^a, 0, 0)$ , dove  $\eta_{\Gamma_i}$  ha supporto su una superficie di Seifert  $\Sigma_i$  con bordo  $\Gamma_i = \partial \Sigma_i$ . In modo analogo a quanto visto in precedenza, introduciamo le classi  $[\chi_i]$  definite da

$$[\chi_i] = [\gamma_i] - [V_{\gamma_i}], \quad (279)$$

che soddisfano:

$$\int_{\mathcal{M}} [\chi_i] * [\chi_j] \stackrel{\mathbb{Z}}{=} -\frac{1}{p_i p_j} \chi_{\mathcal{M}}(\Gamma_i, \Gamma_{jf}). \quad (280)$$

Per gli spazi con torsione, è sempre possibile sostituire le classi  $[\gamma_i] \rightarrow [V_i]$  negli integrali del tipo  $\int_{\gamma_i} A = \int_{\mathcal{M}} A * [\gamma_i]$ . Questo significa che è possibile includere nell'integrazione in  $A \in \Omega^1(\mathcal{M})/\Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$  tutte le classi  $[V_i]$ . In altre parole, possiamo rappresentare le classi  $[\mathcal{A}]$  come

$$[\mathcal{A}] = A + h_i [\chi_i] \quad h_i = 0, 1, \dots, p_i - 1. \quad (281)$$

con la scelta (281) l'azione fattorizza, ed otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\mathcal{A}] &= \int_{\mathcal{M}} (A * A + 2h_i [\chi_i] * A + h_i h_j [\chi_i] * [\chi_j]) \\ &= -\left( \frac{h_i h_j}{p_i p_j} \right) \chi(\Gamma_i, \Gamma_{jf}) + \int_{\mathcal{M}} A * A. \end{aligned} \quad (282)$$

L'espressione generale di  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$  può essere scritta in modo compatto introducendo la notazione

$$\chi_{\mathcal{M}}(\Gamma_i, \Gamma_{jf}) \stackrel{\mathbb{Z}}{=} -p_i p_j Q_{ij}, \quad (283)$$

dove  $Q$  è una forma quadratica di torsione. Dalla definizione (252), e tenendo conto della semplificazione (259) otteniamo poi [10]:

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \sum_{h_1=0}^{p_1-1} \dots \sum_{h_n=0}^{p_n-1} e^{i2\pi k \sum_i \sum_j h_i Q_{ij} h_j}. \quad (284)$$

Alla fine, la funzione di partizione dipende dalla forma quadratica di torsione. In generale  $Q$  non dipende unicamente dal gruppo di omologia, per cui  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$  può distinguere tra varietà col medesimo gruppo di omologia.

Tramite chirurgia avevamo determinato l'invariante  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$  di  $RT$ , definito dall'espressione (179), che riportiamo di seguito:

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}) = (2k)^{-\frac{m}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma(\mathcal{L}_s)} \sum_{q_1=0}^{2k-1} \sum_{q_2=0}^{2k-1} \dots \sum_{q_m=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right) \sum_{ij=1}^m q_1 \mathbb{L}_{ij} q_j}. \quad (285)$$

Dal punto di vista della teoria di  $CS$ , l'invariante (285) era legato alla normalizzazione del valore d'aspettazione calcolato secondo  $RT$ . La funzione di partizione  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$  rappresenta l'analogo di  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ , con la differenza che l'integrazione funzionale è fatta direttamente su  $\mathcal{M}$ . È necessario verificare se (e come) queste grandezze sono legate tra loro. Quello che ci aspettiamo è  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$  coincida con  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$  a meno di un coefficiente.

La somma che appare nell'espressione (285) può essere trasformata utilizzando la formula di reciprocità di Deloup-Turaev ( $DT$ ). Nell'articolo [32] di  $DT$ , è discussa una forma bilineare simmetrica su un reticolo  $W$ . Questa forma bilineare, nella formula (285), corrisponde alla matrice di allacciamento del link di chirurgia  $\mathbb{L}$ . Allo stesso modo, la somma sul reticolo reciproco  $W^*$  corrisponde alla somma sugli elementi di  $H_1(\mathcal{M})$  dell'espressione (284). In conclusione, in accordo col teorema 1 dell'articolo si trova [10]:

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = (p_1 p_2 \dots p_n)^{\frac{1}{2}} \mathcal{I}(\mathcal{M}). \quad (286)$$

A meno di un coefficiente gli invarianti coincidono, come atteso. Il coefficiente è esso stesso invariante della varietà, ed è legato al prodotto dei numeri di torsione. Questo risultato mostra come sia possibile ottenere invarianti per 3-varietà direttamente dall'integrale funzionale di Feynman.

#### 6.4.2 Presentazione dei Link $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$

Siamo interessati a calcolare il valore di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$ , dove  $\mathcal{L} = \{C_1, \dots, C_n\} \subset \mathcal{M}$  è un generico link colorato e con framing. Dall'espressione generale (255), vediamo che il link  $\mathcal{L}$  entra nella definizione di valore d'aspettazione attraverso la relativa classe di  $DB$  distribuzionale  $[\eta_{\mathcal{L}}]$ . Come sappiamo

$$[\eta_{\mathcal{L}}] = \sum_{i=1}^n q_i [\eta_i], \quad (287)$$

dove  $q_i \in \mathbb{Z}$  è il colore, mentre la classe  $[\eta_i]$  è associata alla componente  $i$ -esima di  $\mathcal{L}$  e soddisfa  $\oint_{C_i} [\mathcal{A}] = \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\eta_i]$ .

Per confrontare gli invarianti ottenuti con l'integrale funzionale e gli invarianti di  $RT$ , è conveniente utilizzare una presentazione di chirurgia della varietà  $\mathcal{M}$ . Allo stesso modo,  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$  può essere specificato attraverso la relativa presentazione chirurgica  $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}_s \subset S^3$ , dove  $\mathcal{L}_s$  è il link di chirurgia.

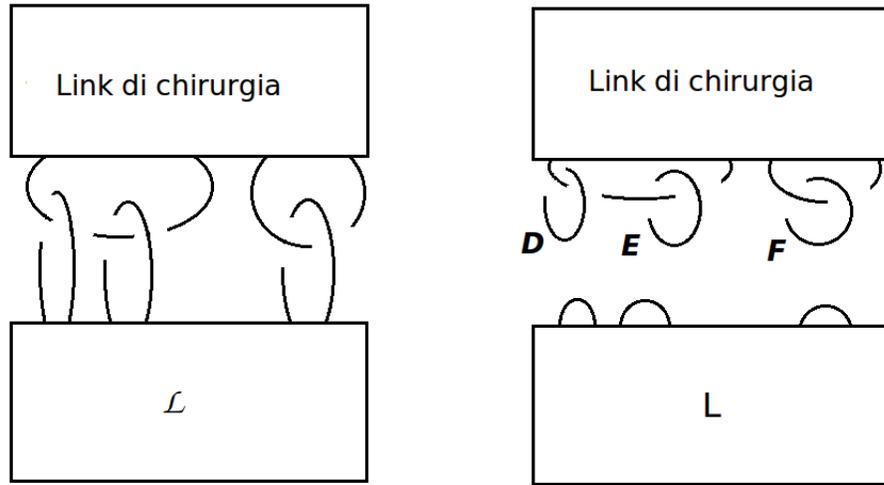


Figura 28: Convenzione di decomposizione del link fremato  $\mathcal{L}$ .

In generale, nella presentazione di chirurgia, un certo numero di componenti di  $\mathcal{L} \subset S^3$  possono allacciarsi al link di chirurgia  $\mathcal{L}_s$ . Questa situazione è schematizzata a sinistra in figura (28). Nella teoria di  $CS$  abeliana, il valore  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$  non cambia se esprimiamo  $\mathcal{L}$  come una somma “#” di nodi [10, 12]. Possiamo sfruttare questa proprietà per decomporre  $\mathcal{L}$  in modo conveniente. Sempre in figura (28), è mostrata la convenzione che useremo per decomporre un qualsiasi link  $\mathcal{L}$ . Alla fine, possiamo sempre sostituire  $\mathcal{L}$  con:

$$\mathcal{L} \rightarrow L \# D \# E \# F \# \dots \quad (288)$$

Vale poi:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \langle W(L) W(D) W(E) W(F) \dots \rangle_{\mathcal{M}} \quad (289)$$

Il link  $L \subset S^3$ , per costruzione, è slacciato da  $\mathcal{L}_s \subset S^3$ , ed ha lo stesso numero di componenti del link originale  $\mathcal{L}$ . Per convenzione,  $\mathcal{L}$  viene decomposto in modo tale che le rimanenti componenti  $D, E, F \dots \subset S^3$  abbiano tutte framing banale (nella loro presentazione in  $S^3$ ). Se ne deduce:

- Il link  $L = \{L_1, \dots, L_n\} \subset \mathcal{M}$  è omologicamente banale, ed è definito in una 3-palla  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ . Inoltre, i valori di autoallacciamento di  $L$  sono gli stessi sia nella presentazione di chirurgia che rispetto ad  $\mathcal{M}$ . Esplicitamente  $\chi_{\mathcal{M}}(L_i, L_{jf}) = \chi_{S^3}(L_i, L_{jf}) \forall i, j = 1, \dots, n$ .

La classe distribuzionale di  $DB$  associata a  $L \subset \mathcal{M}$  è globalmente ben definita, e possiamo denotarla con  $[\eta_L] \leftrightarrow (\eta_L^a, 0, 0)$ .

Le rimanenti componenti  $D, E, F \dots \subset S^3$  della decomposizione (288) sono più complicate da trattare. In effetti, queste componenti si allacciano al link di chirurgia  $\mathcal{L}_s \subset S^3$  per costruzione, per

cui possono avere classe di omologia non banale. Convienne utilizzare ancora l'invarianza dei valori di aspettazione sotto la somma “#” delle componenti del link. Consideriamo dunque i satelliti simpliciali delle varie componenti, e definiamo la somma di tutte le componenti dei satelliti:

$$\tilde{\gamma} \equiv \tilde{D} \# \tilde{E} \# \tilde{F} \# \dots \quad (290)$$

La curva  $\tilde{\gamma}$ , che può essere semplicemente rappresentata nel diagramma, ha colore  $q = 1$  e framing banale  $\chi_{S^3}(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_f) = 0$ . Inoltre, nella presentazione di chirurgia,  $\tilde{\gamma} \subset S^3$  è disgiunta dal link  $L$ . Dal punto di vista della classe di omologia ci sono due possibilità:

1. La curva  $\tilde{\gamma} \equiv \tilde{0}$  ha classe di omologia banale. Inoltre  $\tilde{0} \subset \mathcal{M}$  è disgiunta da  $L \subset \mathcal{B}$  ed ha framing banale in  $S^3$  (ma non necessariamente banale in  $\mathcal{M}$ ).
2. La curva  $\tilde{\gamma}$  ha classe di omologia non banale. Per questo motivo, è possibile associare canonicamente  $\tilde{\gamma}$  ad un elemento di  $H_1(\mathcal{M})$ .

Iniziamo a discutere il caso (1). La curva  $\tilde{0}$ , a seconda dei casi, può essere allacciata oppure non allacciata al link di chirurgia  $\mathcal{L}_s$ ; comunque sia è disgiunta da  $L$  per costruzione. La classe distribuzionale di  $DB$  associata ad  $\tilde{0}$  è globalmente ben definita, e possiamo denotarla con  $[\tilde{0}] = (\eta_{\tilde{0}}^g, 0, 0)$ . In particolare vale:

$$\int_{\mathcal{M}} [\tilde{0}] * [\tilde{0}] = \int_{\mathcal{M}} \eta_{\tilde{0}} \wedge d\eta_{\tilde{0}} = \chi_{\mathcal{M}}(\tilde{0}, \tilde{0}_f), \quad (291)$$

dove  $\chi_{\mathcal{M}}(\tilde{0}, \tilde{0}_f)$  è l'autoallacciamento di  $\tilde{0}$  in  $\mathcal{M}$ . Poiché  $\chi_{S^3}(\tilde{0}, \tilde{0}_f) = 0$ , l'autoallacciamento in  $\mathcal{M}$  è fissato; tuttavia  $\chi_{\mathcal{M}}(\tilde{0}, \tilde{0}_f)$  non necessariamente è nullo in quanto  $\tilde{0}$  potrebbe allacciarsi ad  $\mathcal{L}_s$ . Questo è un fatto generale ed è legato all'effetto del link di chirurgia sulle componenti dei link reali. In altre parole, anche quando l'autoallacciamento è ben definito in  $\mathcal{M}$  non sempre coincide con l'autoallacciamento nella presentazione di chirurgia. Come mostrato in appendice (8.2), dato che  $\chi_{S^3}(\tilde{0}, \tilde{0}_f) = 0$  si trova:

$$\chi_{\mathcal{M}}(\tilde{0}, \tilde{0}_f) = -\chi_{S^3}(\mathcal{L}_s^\#, \mathcal{L}_{sf}^\#), \quad (292)$$

dove  $\mathcal{L}_{sf}^\# \sim \tilde{0}$  (isotopia ambiente), ed è ottenuto sommando opportunamente le varie componenti del framing di una presentazione onesta di  $\mathcal{L}_s$ .

Analizziamo adesso il caso (2). Come sappiamo, è possibile associare una curva  $\gamma_i$  a ciascun generatore  $v_i$  del gruppo  $H_1(\mathcal{M})$ . Convenzionalmente, il framing di ogni curva  $\gamma_i$  è banale nella relativa presentazione in  $S^3$ . In altre parole è possibile esprimere  $\tilde{\gamma}$  come una opportuna somma “#” di curve  $\gamma_i$  più (eventualmente) una curva di tipo  $\tilde{0}$ . In generale, se  $\tilde{\gamma}$  ha classe di omologia  $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots)$  nella base  $\{v_i\}$  di  $H_1(\mathcal{M})$  si ha:

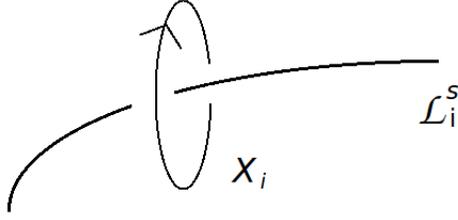


Figura 29: Generatore di  $H_1(S^3 - \mathcal{L}_i^s)$ .

$$\tilde{\gamma} = \tilde{0} \# \sum_{\#i} \underbrace{\gamma_i \# \gamma_i \# \dots \# \gamma_i}_{\mathcal{H}_i} \quad (293)$$

oppure in forma compatta:

$$\tilde{\gamma} = \tilde{0} + \sum_{i=1}^m \mathcal{H}_i \gamma_i. \quad (294)$$

La somma (294) è estesa al numero totale  $m$  di generatori del gruppo di omologia  $H_1(\mathcal{M})$ , mentre gli interi  $\mathcal{H}_i$  sono definiti modulo  $p_i$ , dove  $p_i$  sono i numeri di torsione. I coefficienti  $\mathcal{H}_i$  possono essere determinati (anche graficamente) una volta fissate le curve  $\gamma_i$ . Al solito, i dettagli su come calcolare  $H_1(\mathcal{M})$  e come associare ai relativi generatori le curve  $\gamma_i$ , sono discussi nei paragrafi (8.1) e (8.2). Di seguito vediamo invece come ottenere concretamente gli  $\mathcal{H}_i$ .

Il gruppo  $H_1(\mathcal{M})$  può essere determinato direttamente a partire dalla matrice di allacciamento  $\mathbb{L}_s$  associata al link di chirurgia  $\mathcal{L}_s$  in una presentazione onesta. Esplicitamente:

$$H_1(\mathcal{M}) = \{x_1, \dots, x_w \mid \mathbb{L}_{1j}^s x_j = 0, \dots, \mathbb{L}_{wj}^s x_j = 0\}, \quad (295)$$

dove gli elementi  $x_i$  possiamo associarli a dei piccoli unknot allacciati alla componente  $\mathcal{L}_i^s$ , e rappresentano i generatori di  $H_1(S^3 - \mathcal{L}_i^s)$ . In figura (29) è mostrato come raffigurare  $x_i$ . I generatori  $\{v_i\}$  di  $H_1(\mathcal{M})$  sono dati da una opportuna combinazione lineare dei generatori  $\{x_i\}$ :

$$\gamma_i \sim v_i = \sum_{k=1}^w B_{ik} x_k \quad i = 1, \dots, m, \quad (296)$$

dove  $B_{ik}$  sono interi. I generatori  $\{v_i\}$  non sono univoci, ma sono fissati una volta fissati gli interi  $B_{ik}$ . Le curve  $\gamma_i$  sono canonicamente associate agli elementi  $v_i$ , e si ottengono interpretando l'espressione (296) come una somma “#” degli unknot associati a  $x_i$ . Dato che  $\tilde{\gamma}$  è sempre scrivibile come una somma “#” di nodi nella base  $\{x_i\}$  di  $H_1(S^3 - \mathcal{L}_i^s)$ , possiamo determinare la classe di omologia  $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots)$  di  $\tilde{\gamma}$  nella base  $\{v_i\}$  utilizzando le relazioni (296).

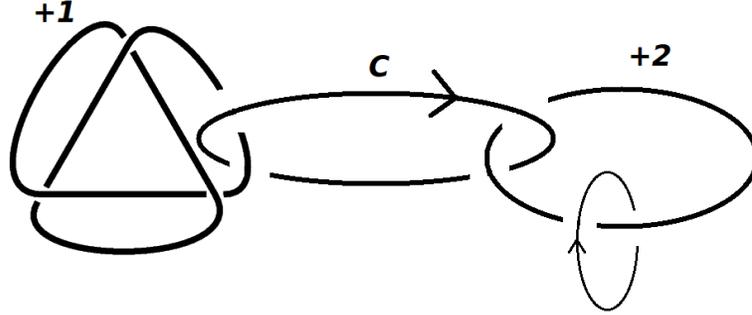


Figura 30: Nodo  $C \subset \mathcal{P}\#L_{2,1}$  nella presentazione chirurgica.

Può capitare che  $\tilde{\gamma}$  non sia legata da isotopia ambiente alla curva  $\sum_i \mathcal{H}_i \gamma_i$ ; definiamo dunque:

$$\tilde{0} = \tilde{\gamma} \# \left( -\sum_{i=1}^m \mathcal{H}_i \gamma_i \right), \quad (297)$$

dove la curva  $\tilde{0}$  ha omologia banale ed è slacciata da  $L$  per costruzione. In altri termini è una curva analoga a quella discussa nel punto (1). Dall'espressione (297) otteniamo poi lo sviluppo (294) valido per qualsiasi curva  $\tilde{\gamma}$ .

In conclusione, qualsiasi sia la curva  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$  di partenza, è sempre possibile sostituirla, nella presentazione in  $S^3$ , con:

$$\mathcal{L} \cup \mathcal{L}_s \rightarrow \begin{cases} \mathcal{L} \text{ si allaccia a } \mathcal{L}_s \rightarrow \begin{cases} \mathcal{L} \text{ è omologicamente banale} \rightarrow \mathcal{L} = L \# \tilde{0} \\ \mathcal{L} \text{ non è omologicamente banale} \rightarrow \mathcal{L} = L \# \tilde{0} \# \sum_{i=1}^m \mathcal{H}_i \gamma_i \end{cases} \\ \mathcal{L} \text{ non si allaccia a } \mathcal{L}_s \rightarrow \mathcal{L} = L \end{cases} \quad (298)$$

Allo stesso modo, la classe distribuzionale  $[\eta_{\mathcal{L}}]$  associata a  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$  può essere sostituita a seconda dei casi con:

$$[\eta_{\mathcal{L}}] \rightarrow [\eta_L] + [\tilde{0}] + \sum_{i=1}^m \mathcal{H}_i [\gamma_i]. \quad (299)$$

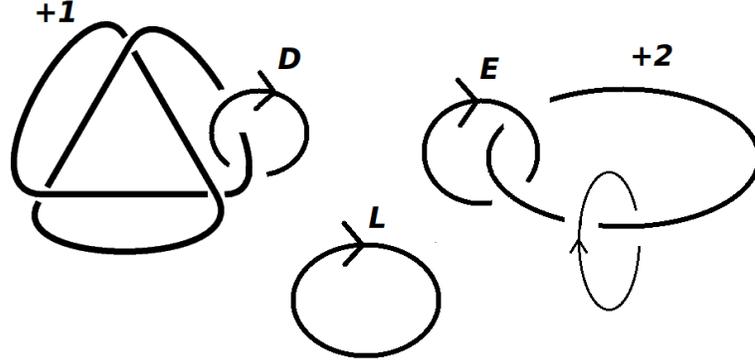


Figura 31: Decomposizione di  $C \subset L_{2,1}\#\mathcal{P}$ .

La sostituzione (299) entra in modo naturale nel valore di aspettazione (255) in quanto  $L$  ed  $\tilde{0}$  sono omologicamente banali, mentre la somma sulle classi  $[\gamma_i]$  può essere trattata in modo simile a quanto visto nella funzione di partizione  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ .

Per fissare le idee, consideriamo un esempio concreto di decomposizione. In figura (30) è mostrato un nodo  $C \subset \mathcal{P}\#L_{2,1}$  con colore  $c$  e autoallacciamento  $\chi_{S^3}(C, C_f) = a$ . La varietà  $\mathcal{M} = L_{2,1}\#\mathcal{P}$  è la somma connessa di  $L_{2,1}$  e della sfera di Poincaré  $\mathcal{P}$ , ed il relativo link di chirurgia è dato un unknot con coefficiente di chirurgia 2 più il trifoglio  $T$  con coefficiente 1. Come curva  $\gamma_1$  (associata all'unico generatore del gruppo di omologia  $H_1(L_{2,1}\#\mathcal{P}) = \mathbb{Z}_2$ ) si è scelto la curva sottile mostrata in figura (30). La decomposizione di  $C \subset \mathcal{P}\#L_{2,1}$  secondo l'espressione (288) è mostrata in figura (31). I nodi  $D, E \subset S^3$  hanno framing banale e colore  $c$ . Questo significa che i relativi satelliti simpliciali  $\tilde{D}, \tilde{E}$  sono costituiti da  $c$  copie parallele di  $D$  ed  $E$  rispettivamente. Dalla figura è facile vedere che  $\tilde{D}$  ha classe di omologia banale, mentre  $\tilde{E}$  ha classe di omologia  $+c \cdot v_1$ . La curva  $\tilde{\gamma} = \tilde{D}\#\tilde{E}$  è definita dalla somma di tutte le componenti dei satelliti simpliciali ed è già decomposta secondo la relazione (294) in quanto  $\tilde{D}$  ha omologia banale. Si ha subito:

$$[\eta_C] \rightarrow [\eta_L] + [\tilde{0}] + c \cdot [\gamma_1], \quad (300)$$

dove  $\tilde{0} = \sum \tilde{D}$  è la somma di tutte le componenti del satellite simpliciale  $\tilde{D}$ . La curva  $\tilde{0}$  ha colore  $q = 1$  e framing banale in  $S^3$ . Per determinare l'autoallacciamento  $\chi_{L_{2,1}\#\mathcal{P}}(\tilde{0}, \tilde{0}_f)$  è necessario osservare la figura ed utilizzare la relazione (292). Dato che ciascuna componente di  $\tilde{D}$  ha numero di allacciamento +1 con il trifoglio  $T$ , ogni componente è proprio equivalente (per isotopia ambiente) al framing di  $T$ . Si ha dunque  $\tilde{0} \sim c \cdot T_f$ , e quindi

$$\chi_{L_{2,1}\#\mathcal{P}}(\tilde{0}, \tilde{0}_f) = -\chi_{S^3}(c \cdot T, c \cdot T_f) = -c^2 \chi_{S^3}(T, T_f) = -c^2 \quad (301)$$

Altri esempi di decomposizione esplicita saranno presentati nel capitolo (7).

### 6.4.3 Valori di Aspettazione

Consideriamo un generico link orientato, colorato e con framing  $\mathcal{L} = \{C_1, \dots, C_m\} \subset \mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M}$  una 3-varietà di pura torsione. Il valore di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$ , definito dall'espressione (255), può essere riscritto come:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{M}) N_0^{-1}(\mathcal{M}) \sum_h \int DA e^{i2\pi k \int_{\mathcal{M}} (A * A + 2[h\gamma] * A)} e^{i2\pi \int_{\mathcal{M}} A * [\eta_{\mathcal{L}}]}, \quad (302)$$

dove si sono usate le relazioni  $[h\gamma] * [h\gamma] \stackrel{\mathbb{Z}}{=} 0$ ,  $[h\gamma] * [\eta_{\mathcal{L}}] \stackrel{\mathbb{Z}}{=} 0$ . Alternativamente, utilizzando la presentazione (281) della connessione, è possibile riscrivere  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$  in una forma equivalente (valida solo se la varietà è di pura torsione). Esplicitamente:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{M}) N_0^{-1}(\mathcal{M}) \sum_h \int DA e^{i2\pi k \int_{\mathcal{M}} (A * A + h_i h_j [\chi_i] * [\chi_j])} e^{i2\pi \int_{\mathcal{M}} (A + h_i [\chi_i]) * [\eta_{\mathcal{L}}]}. \quad (303)$$

Naturalmente, non c'è nessuna differenza tra l'espressione (302) e la (303) in quanto l'origine delle fibre  $\hat{A}_\gamma$  nella presentazione della connessione  $[A] = A + \hat{A}_\gamma$  non è univoca. Per ragioni di semplicità d'esposizione conviene considerare la forma (303).

La classe di *DB* distribuzionale associata ad  $\mathcal{L}$  è denotata con  $[\eta_{\mathcal{L}}]$ , e può essere espressa come

$$[\eta_{\mathcal{L}}] = [\eta_L] + [\tilde{0}] + \sum_{i=1}^n \mathcal{H}_i [\gamma_i], \quad (304)$$

dove si è usata la decomposizione (299) appena discussa.

È utile procedere per gradi prima di dare la soluzione generale  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$ . Sia  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$  tutto definito in una 3 palla  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ . In altre parole, la classe di omologia di qualsiasi componente di  $\mathcal{L}$  è banale. Secondo la scomposizione (288),  $\mathcal{L}$  coincide semplicemente con  $L$ , per cui  $[\eta_{\mathcal{L}}] = [\eta_L]$ . La classe  $[\eta_L]$  è sempre globalmente ben definita, ed ha presentazione  $[\eta_L] \leftrightarrow (\eta_L^g, 0, 0)$ . Tenendo conto della relazioni (282) e (283), l'esponente dell'espressione (303) diventa

$$\begin{aligned} & 2\pi k \int_{\mathcal{M}} (A * A + h_i h_j [\chi_i] * [\chi_j]) + 2\pi \int_{\mathcal{M}} (A + h_i [\chi_i]) * [\eta_L] \\ & = 2\pi k \int_{\mathcal{M}} A * A + \int_{\mathcal{M}} A * [\eta_L] + 2\pi k h_i h_j Q_{ij} \end{aligned} \quad (305)$$

da cui

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{B} \subset \mathcal{M}} = N_0^{-1}(\mathcal{M}) \int DA e^{i2\pi k \int_{\mathcal{M}} A * A} e^{i2\pi \int_{\mathcal{M}} A * [\eta_L]}, \quad (306)$$

dove si sono sfruttate le proprietà  $[\eta_L] * [\chi_i] \stackrel{\mathbb{Z}}{=} 0$  e  $\int_{\mathcal{M}} [\chi_i] * [\chi_j] = Q_{ij}$ , ed infine la fattorizzazione  $\mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{M}) \mathcal{Z}(\mathcal{M}) = 1$ .

L'espressione (306) può essere risolta con un cambio di variabile, in modo simile a quanto visto in precedenza. In particolare, si introduce la 1-forma  $\tilde{A} \in \Omega^1(\mathcal{M})/\Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$  definita da

$$A = -\frac{1}{2k} [\eta_L] + \tilde{A}. \quad (307)$$

Sostituendo l'espressione (307) nella (306), e ricordando che l'integrale funzionale è invariante per traslazioni si trova facilmente:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{B} \subset \mathcal{M}} = e^{-i(\frac{\pi}{2k}) \int_{\mathcal{M}} [\eta_L] * [\eta_L]}. \quad (308)$$

L'integrale  $\int_{\mathcal{M}} [\eta_L] * [\eta_L] = \int_{\mathcal{M}} \eta_L \wedge d\eta_L$  è una forma di intersezione ben definita, per cui otteniamo subito

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{B} \subset \mathcal{M}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} = e^{-i(\frac{2\pi}{4k}) \sum_{ij} q_i \mathbb{L}_{ij} q_j}, \quad (309)$$

dove  $\mathbb{L}_{ij} = \chi_{\mathcal{M}}(C_i, C_{jf}) = \chi_{S^3}(C_i, C_{jf})$ , e coincide con l'usuale numero di avvolgimento calcolato rispetto ad  $S^3$ . Alla fine, se il link  $\mathcal{L}$  è tutto definito in una palla, il valore di aspettazione coincide con quello in  $S^3$ . Questo è un risultato atteso, dato la teoria di  $CS$  in  $\mathcal{M}$  coincide localmente con quella definita in  $S^3$ . In modo del tutto simile possiamo affrontare il caso di  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$  omologicamente banale. La classe distribuzionale  $[\eta_{\mathcal{L}}]$ , in questo caso, può essere scritta come  $[\eta_{\mathcal{L}}] = [\eta_L] + [\tilde{0}]$ , dove la curva  $\tilde{0}$  è presente solo nel caso in cui  $\mathcal{L}$  si allaccia a  $\mathcal{L}_s$  nella relativa presentazione di chirurgia. La curva  $\tilde{0}$  ha colore  $q = 1$  e autoallacciamento nullo in  $S^3$ ; inoltre ha classe di omologia banale per cui la relativa classe di distribuzione ha presentazione  $[\tilde{0}] \leftrightarrow (\eta_0^a, 0, 0)$ . Tenendo conto che  $L$  ed  $\tilde{0}$  sono disgiunti per costruzione, sfruttando il risultato (308) troviamo subito:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} \langle W(\tilde{0}) \rangle_{\mathcal{M}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} e^{-i(\frac{2\pi}{4k}) \chi_{\mathcal{M}}(\tilde{0}, \tilde{0}_f)}, \quad (310)$$

dove  $\chi_{\mathcal{M}}(\tilde{0}, \tilde{0}_f)$  non è nullo se  $\tilde{0}$  è allacciata ad  $\mathcal{L}_s$ .

In generale, il link  $\mathcal{L}$  non è omologicamente banale, e la relativa classe distribuzionale è specificata dall'intera espressione  $[\eta_{\mathcal{L}}] = [\eta_L] + [\tilde{0}] + \sum_i \mathcal{H}_i[\gamma_i]$ . Sostituendo questa espressione nel valore d'aspettazione (303), l'esponente diventa:

$$\begin{aligned} & 2\pi k \int_{\mathcal{M}} (A * A + h_i h_j [\chi_i] * [\chi_j]) + 2\pi \int_{\mathcal{M}} [\eta_{\mathcal{L}}] * (A + h_i [\chi_i]) \\ &= 2\pi k \int_{\mathcal{M}} (A * A + h_i h_j [\chi_i] * [\chi_j]) + 2\pi \int_{\mathcal{M}} (([\eta_L] + [\tilde{0}]) * A + \mathcal{H}_j[\gamma_j] * A + \mathcal{H}_j h_i [\gamma_j] * [\chi_i]) \\ &= 2\pi k \int_{\mathcal{M}} (A * A + h_i h_j [\chi_i] * [\chi_j]) + 2\pi \int_{\mathcal{M}} (([\eta_L] + [\tilde{0}] + \mathcal{H}_j[V_j]) * A + \mathcal{H}_j h_i [\chi_j] * [\chi_i]) \\ &= 2\pi k \left( h_i + \frac{\mathcal{H}_i}{2k} \right) \left( h_j + \frac{\mathcal{H}_j}{2k} \right) Q_{ij} + 2\pi k \int_{\mathcal{M}} \tilde{A} * \tilde{A} - \left( \frac{2\pi}{4k} \right) \int_{\mathcal{M}} ([\eta_L] * [\eta_L] + [\tilde{0}] * [\tilde{0}]), \end{aligned} \quad (311)$$

dove si sono usate una serie di proprietà. In primo luogo, per definizione  $[\gamma_i] = [V_i] + [\chi_i]$ , dove la classe  $[V_i]$  è globalmente ben definita ed è specificata dall'espressione (278). Poiché  $A \in \Omega^1(\mathcal{M})/\Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$  è globalmente ben definita, negli integrali  $\int_{\mathcal{M}} A * [\gamma_i]$  possiamo sostituire:

$$\int_{\mathcal{M}} A * [\gamma_i] = \int_{\mathcal{M}} A * [V_i]. \quad (312)$$

Similmente si ha

$$\int_{\mathcal{M}} [\gamma_i] * [\chi_j] = \int_{\mathcal{M}} [V_i] * [\chi_j]. \quad (313)$$

Inoltre, si è usata la relazione

$$\int_{\mathcal{M}} [\chi_i] * [\chi_j] = - \int_{\mathcal{M}} [V_i] * [V_j] \stackrel{\mathbb{Z}}{=} Q_{ij}, \quad (314)$$

e si è ripetuto il cambio di variabile (307) con  $A = -1/2k ([\eta_L] + [\tilde{0}] + \mathcal{H}_j [V_j]) + \tilde{A}$  ricordando che  $\tilde{0}$  ed  $L$  sono disgiunti. Tenendo conto che  $L$  e  $\tilde{0}$  sono link omologicamente banali, ed utilizzando lo sviluppo (311) nella definizione (303), troviamo infine

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} \langle W(\tilde{0}) \rangle_{\mathcal{M}} \langle \mathcal{H} \rangle_{\mathcal{M}}, \quad (315)$$

dove il valor medio  $\langle \mathcal{H} \rangle_{\mathcal{M}}$  non è banale in generale, ed è dato da

$$\langle \mathcal{H} \rangle_{\mathcal{M}} = \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{M}) \sum_{h_1=0}^{p_1-1} \dots \sum_{h_n=0}^{p_n-1} e^{i2\pi k \sum_{ij} \binom{h_i + \frac{\mathcal{H}_i}{2k}}{ij}} Q_{ij} \binom{h_j + \frac{\mathcal{H}_j}{2k}}{ij}. \quad (316)$$

Si noti come  $\langle \mathcal{H} \rangle_{\mathcal{M}}$  dipenda unicamente dalla classe di omologia di  $\tilde{\gamma}$  in  $\mathcal{M}$ . Nel caso in cui  $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) \neq 0$ , il valore di aspettazione per il generico link  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$  è dato da:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} \langle W(\tilde{0}) \rangle_{\mathcal{M}} \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{M}) \sum_{h_1=0}^{p_1-1} \dots \sum_{h_n=0}^{p_n-1} e^{i2\pi k \sum_{ij} \binom{h_i + \frac{\mathcal{H}_i}{2k}}{ij}} Q_{ij} \binom{h_j + \frac{\mathcal{H}_j}{2k}}{ij}. \quad (317)$$

Il valore (317) soddisfa una serie di proprietà attese. La prima è l'invarianza per una sostituzione  $q_i \rightarrow q_i + 2kn$ , dove  $n \in \mathbb{Z}$ . Dalla definizione (290) vediamo che questa sostituzione ha come effetto

quello aggiungere  $2kn$  copie parallele di alcuni dei satelliti simpliciali  $\tilde{D}, \tilde{E}, \tilde{F} \dots$ ; più precisamente di quelli derivanti dalla componente  $i$ -esima di  $\mathcal{L}$ . Questo equivale a modificare  $\mathcal{H}_j$  come  $\mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j + m_j 2k$ , dove  $m_j \in \mathbb{Z}$  è un opportuno intero. La sostituzione  $\mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j + m_j 2k$ , nell'espressione (317) non fa altro che traslare gli estremi delle sommatorie. D'altra parte  $Q_{ij}$  è un razionale definito modulo interi, mentre l'esponenziale è definito modulo le classi di equivalenza fissate dai numeri di torsione. Per questo motivo  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$  è periodico nel colore, come atteso. Inoltre, per quanto detto, l'esponenziale è anche invariante per una sostituzione del tipo  $h_i \rightarrow h_i + m_i p_i$ .

Un ultimo aspetto interessante riguarda la non espandibilità in potenze di  $\sim 1/k$ ; infatti l'esponente ha termini proporzionali a  $k$  e termini che non ne dipendono. In altre parole, il risultato non può essere ottenuto con uno sviluppo perturbativo standard che equivale ad uno sviluppo di  $1/k$ .

Verifichiamo adesso se il risultato funzionale (317) è in accordo con il valore d'aspettazione (159) calcolato secondo *RT*. Esplicitamente abbiamo:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{\sum_{q_1=0}^{2k-1} \dots \sum_{q_m=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right) \sum_{ij} \tilde{q}_i \mathbb{L}_{ij}^{tot} \tilde{q}_j}}{\sum_{q_1=0}^{2k-1} \dots \sum_{q_m=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right) \sum_{ij} q_i \mathbb{L}_{ij} q_j}}, \quad (318)$$

dove  $\mathbb{L}$  è la matrice di allacciamento associata a  $\mathcal{L}_s \subset S^3$ , mentre  $\mathbb{L}^{tot}$  è associata a  $\mathcal{L}_s \cup \mathcal{L} \subset S^3$ . I coefficienti interi  $\tilde{q}_i$  coincidono con  $q_i$  se  $0 < i \leq m$ , mentre per  $i > m$  coincidono con il colore  $c_i$  della componente  $i$ -esima del link  $\mathcal{L} \subset S^3$ . Per  $i, j > m$  la somma all'esponente dell'espressione (318) non entra nella somma su i vari  $q_j$ , per cui può essere isolata. Questo termine non è altro che  $\langle W(L) \rangle_{S^3}$ . Otteniamo perciò:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} \cdot \frac{\sum_{q_1=0}^{2k-1} \dots \sum_{q_m=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right) \left[ \sum_{i,j \leq m} q_i \mathbb{L}_{ij} q_j + 2 \sum_{i \leq m, j > m} q_i \mathbb{L}_{ij}^{tot} c_j \right]}}{\sum_{q_1=0}^{2k-1} \dots \sum_{q_m=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right) \sum_{ij \leq m} q_i \mathbb{L}_{ij} q_j}}. \quad (319)$$

Dimostrare l'equivalenza dei risultati (317) e (319) non è immediato e conviene procedere per gradi. In modo simile a quanto fatto per il valore l'aspettazione funzionale (317), calcoleremo il valore (319) per  $\mathcal{L}$  definito in una 3-palla, per  $\mathcal{L}$  omologicamente banale, e per  $\mathcal{L}$  omologicamente non banale.

Consideriamo un link  $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$  definito in una 3-palla  $\mathcal{B}$ . Come sappiamo, nella relativa presentazione chirurgica,  $\mathcal{L}$  non si allaccia ad  $\mathcal{L}_s$ : in altre parole  $\mathcal{L} = L$ . Dato che l'acciamento con  $\mathcal{L}_s$  è nullo, anche il termine  $\sum_{ij} q_i \mathbb{L}_{ij}^{tot} c_j = 0$  è nullo; questo fattorizza immediatamente numeratore e denominatore dell'espressione (319), e troviamo

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{B} \subset \mathcal{M}} = \langle W(L) \rangle_{S^3}. \quad (320)$$

Il risultato (320) è in accordo con il risultato funzionale (317).

Analizziamo adesso il caso di  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$  omologicamente banale. Come sappiamo, possiamo decomporre il link  $\mathcal{L}$  come  $\mathcal{L} = L \# \tilde{0}$ , dove  $L \subset \mathcal{B}$  è definito in una 3-palla, mentre il nodo  $\tilde{0}$  con colore  $c = 1$  ha framing banale rispetto ad  $S^3$  e può essere allacciato ad  $\mathcal{L}_s$  nella presentazione di chirurgia. Con queste ipotesi, l'esponente dell'espressione (319) diventa:

$$-i \left( \frac{2\pi}{4k} \right) \left[ \sum_{i,j \leq m} q_i \mathbb{L}_{ij} q_j + 2 \sum_{j \leq m} q_j \mathbb{L}_j^{tot} \right] \quad (321)$$

Dato che  $\tilde{0}$  può essere allacciato al link di chirurgia, gli elementi di  $\mathbb{L}_j^{tot}$  potrebbero non essere tutti nulli. In ogni caso, come dimostrato in appendice (8.2) vale la relazione:

$$\chi_{\mathcal{M}}(\tilde{0}, \tilde{0}_f) + \sum_{k \leq m} \sum_{k' \leq m} \mathbb{L}_k^{tot} \mathbb{L}_{k'}^{tot} \mathbb{L}_{k'}^{-1} = 0. \quad (322)$$

Combinando le espressioni (321) e (322) possiamo riscrivere l'esponente dell'espressione (319) come:

$$-i \left( \frac{2\pi}{4k} \right) \chi_{\mathcal{M}}(\tilde{0}, \tilde{0}_f) - i \left( \frac{2\pi}{4k} \right) \left[ \sum_{i,j,k \leq m} (q_i + \mathbb{L}_i^{tot} \mathbb{L}_{ki}^{-1}) \mathbb{L}_{ij} (q_j + \mathbb{L}_j^{tot} \mathbb{L}_{kj}^{-1}) \right]. \quad (323)$$

Dato che  $\sum_k \mathbb{L}_i^{tot} \mathbb{L}_{ki}^{-1}$  sono interi e le somme su  $q_i$  coprono tutte le classi inequivalenti (modulo  $2k$ ), è possibile rinominare  $q_i + \sum_k \mathbb{L}_i^{tot} \mathbb{L}_{ki}^{-1} \rightarrow q_i$ , ed otteniamo subito:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} \cdot e^{-i \left( \frac{2\pi}{4k} \right) \chi_{\mathcal{M}}(\tilde{0}, \tilde{0}_f)} \cdot \frac{\sum_{q_1=0}^{2k-1} \dots \sum_{q_m=0}^{2k-1} e^{-i \left( \frac{2\pi}{4k} \right) \sum_{i,j \leq m} q_i \mathbb{L}_{ij} q_j}}{\sum_{q_1=0}^{2k-1} \dots \sum_{q_m=0}^{2k-1} e^{-i \left( \frac{2\pi}{4k} \right) \sum_{i,j \leq m} q_i \mathbb{L}_{ij} q_j}}, \quad (324)$$

da cui

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} \cdot e^{-i \left( \frac{2\pi}{4k} \right) \chi_{\mathcal{M}}(\tilde{0}, \tilde{0}_f)} = \langle W(L) \rangle_{S^3} \langle W(\tilde{0}) \rangle_{\mathcal{M}}. \quad (325)$$

Il risultato (325) è ancora in accordo con il valore d'aspettazione funzionale (317).

L'ultimo caso è quello di  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$  omologicamente non banale. Senza perdere in generalità, assumiamo momentaneamente che non sia presente una componente  $\tilde{0}$  nella decomposizione di  $\mathcal{L}$ ; questo semplificherà la trattazione.

Numeratore e denominatore dell'espressione (319) possono essere trasformati usando la formula di reciprocità di Deloup-Turaev [32] in modo simile a quanto fatto per l'invariante  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ . La forma bilineare simmetrica sul reticolo  $W$  dell'articolo [32], corrisponde alla forma bilineare definita dalla matrice di allacciamento  $\mathbb{L}$  associata a  $\mathcal{L}_s$ . Si noti che la forma bilineare è associata ad  $\mathbb{L}$  e non ad  $\mathbb{L}^{tot}$ . Similmente, la somma sugli elementi del reticolo reciproco  $W^*$  è rappresentata, nel nostro

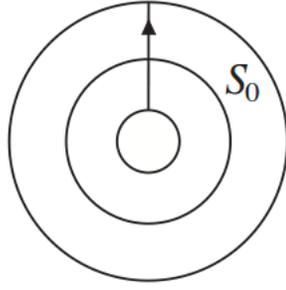


Figura 32: La superficie  $S_0$  è chiusa, ma non è un bordo:  $S_0 \neq \partial X$ . Da [12].

caso, dalla somma sugli elementi del gruppo di omologia  $H_1(\mathcal{M})$ . Infine, l'elemento  $\psi$  del reticolo  $W$  è rappresentato da  $\psi_i = \sum_j \mathbb{L}_{ij}^{tot}(c_j/2k)$ . Nella base  $\{v_i\}$  dei generatori di  $H_1(\mathcal{M})$ , l'elemento  $\psi_i$  possiamo riscriverlo come  $\psi_i = \sum_j H_{ij}(c_j/2k)$ , dove  $H_{ij}$  è la classe di omologia della componente  $j$ -esima di  $\mathcal{L}$  rispetto all' $i$ -esimo generatore di  $H_1(\mathcal{M})$ . In altre parole, ritroviamo i coefficienti  $\mathcal{H}_i$ :  $\sum_j H_{ij}(c_j/2k) = (\mathcal{H}_i/2k)$ . Alla fine, in accordo col teorema 1 dell'articolo di  $DT$ , troviamo che le espressioni (319) e (317) coincidono. Naturalmente, se è presente una componente  $\tilde{0}$  nella decomposizione di  $\mathcal{L}$  le espressioni (317) e (319) coincidono ancora. L'unico accorgimento da tener presente è che l'elemento  $\psi_i = \sum_j \mathbb{L}_{ij}^{tot}(c_j/2k)$  non è interamente esprimibile nella base  $\{v_i\}$  in quanto  $\tilde{0}$  ha omologia banale. È sufficiente quindi isolare un termine tipo (321) e ripetere i passaggi già visti.

## 6.5 Varietà $\mathcal{M}$ Prive di Torsione

### 6.5.1 Funzione di Partizione

Una varietà  $\mathcal{M}$  priva di torsione, per definizione, ha gruppo di omologia liberamente generato:  $H_1(\mathcal{M}) = F(\mathcal{M})$ . Similmente a quanto fatto per gli spazi di pura torsione, conviene considerare inizialmente  $H_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}$ , ossia un unico generatore del gruppo di omologia. Un esempio di spazio che soddisfa questa condizione, come sappiamo, è dato da  $\mathcal{M} = S^2 \times S^1$ . Concentriamoci quindi su questa 3-varietà.

Sia  $G_0$  la curva associata al generatore del gruppo di omologia. Per costruzione  $G_0$  non è contraibile e si allaccia una volta lungo  $S^1$ . A partire da  $G_0$  possiamo considerare le somme

$$\Gamma = \underbrace{G_0 \# G_0 \# \dots \# G_0}_p, \quad (326)$$

che si allacciano  $p$  volte lungo la direzione  $S^1$ . A differenza di quanto avviene per gli spazi con torsione, qualsiasi sia l'intero ( $\geq 1$ )  $p$ ,  $\Gamma$  non sarà mai contraibile.

Introduciamo  $[\Gamma]$ , ossia la classe distribuzionale di  $DB$  associata a  $\Gamma$ . Per definizione di  $[\Gamma]$  si ha

$$\oint_{\Gamma} A = \int_{\mathcal{M}} A * [\Gamma], \quad (327)$$

dove  $A \in \Omega^1(\mathcal{M})/\Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$ . In questo tipo di integrali, non possiamo sostituire a  $[\Gamma]$  una classe globalmente ben definita; in altre parole non possiamo calcolare  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$  con il medesimo approccio utilizzato per gli spazi con torsione. Sono necessarie nuove osservazioni.

Se il gruppo di omologia contiene una parte liberamente generata, sono presenti nella connessione dei modi zero. Questi sono rappresentati da 1-forme differenziali chiuse ma non esatte, ed introducono un'ulteriore invarianza in  $\exp(iS_{CS}[A])$  che non è legata alle trasformazioni di gauge. In  $S^2 \times S^1$  possiamo considerare la superficie  $S_0$ , rappresentata in figura (32). Sia  $A^0$  la 1-forma globalmente definita in  $\mathcal{M}$  con supporto su  $S_0$ . Dato che la superficie orientata  $S_0$  è chiusa,  $dA^0 = 0$ , tuttavia  $S_0$  non è un bordo per cui  $A^0 \neq dY$ . Ricapitolando  $A^0 \in \Omega^1(S^2 \times S^1)$  tale che  $dA^0 = 0$ , ma  $A^0 \neq dY$  per ogni  $Y \in \Omega^0(S^2 \times S^1)$ . Possiamo normalizzare  $A^0$  come:

$$\oint_{G_0} A^0 = \int_{S^2 \times S^1} A^0 * [G_0] = 1. \quad (328)$$

L'integrale di  $A^0$  lungo  $G_0$  misura l'intersezione del nodo  $G_0$  con la superficie  $S_0$ . L'orientazione di  $S^0$  è fissata dall'espressione (328), con  $G_0$  orientato come in figura (32). Con la normalizzazione (328), la 1-forma  $A^0$  diventa a periodo intero, per cui possiamo specificarla con  $A^0 \in \Omega_{\mathbb{Z}}^1(S^2 \times S^1)$ . Dal punto di vista di  $DB$ , la classe associata a  $A^0$  è banale. Sia  $\omega^0 \in \Omega^1(S^2 \times S^1)/\Omega_{\mathbb{Z}}^1(S^2 \times S^1)$  il modo zero associato con  $A^0$  che è rappresentato da

$$\omega^0 \leftrightarrow (tA^{0a}, 0, 0), \quad (329)$$

dove  $0 \leq t < 1$ . A partire da  $\omega^0$  possiamo decomporre  $A \in \Omega^1(S^2 \times S^1)/\Omega_{\mathbb{Z}}^1(S^2 \times S^1)$  come

$$A = \omega^0 + \tilde{A}, \quad (330)$$

dove  $\tilde{A} \in \Omega^1(S^2 \times S^1)/\Omega_{\mathbb{Z}}^1(S^2 \times S^1)$  non contiene modi zero per costruzione, ovvero  $\oint_{G_0} \tilde{A} = 0$ . Dalla relazione (328), e tenendo conto che  $\tilde{A}$  è ortogonale a  $\omega^0$  otteniamo:

$$\int_{S^2 \times S^1} A * [G_0] = \int_{S^2 \times S^1} \omega^0 * [G_0] + \int_{S^2 \times S^1} \tilde{A} * [G_0] = \int_{S^2 \times S^1} \omega^0 * [G_0] = t. \quad (331)$$

Più in generale, se consideriamo la curva  $\Gamma$  specificata dall'espressione (326), si ha

$$\oint_{\Gamma} A = \int_{S^2 \times S^1} A * [\Gamma] = pt, \quad (332)$$

dove  $0 \leq t < 1$ . A questo punto siamo in grado di calcolare la funzione di partizione, che nel caso di  $\mathcal{M} = S^2 \times S^1$  è definita da:

$$\mathcal{Z}(S^2 \times S^1) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{\int DA e^{i2\pi k \int_{S^2 \times S^1} (A * A + 2h[G_0] * A)}}{\int DA e^{i2\pi k \int_{S^2 \times S^1} A * A}}. \quad (333)$$

Riscrivendo  $A$  secondo la decomposizione (330), e tenendo conto che  $\int DA = \int D\tilde{A} \int D\omega^0 = \int_0^1 dt \int D\tilde{A}$  otteniamo subito:

$$\mathcal{Z}(S^2 \times S^1) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{\int_0^1 dt \int D\tilde{A} e^{i2\pi k \int_{S^2 \times S^1} (\tilde{A} * \tilde{A} + 2\tilde{A} * \omega^0 + \omega^0 * \omega^0)} e^{i2\pi k(2ht)}}{\int_0^1 dt \int D\tilde{A} e^{i2\pi k \int_{S^2 \times S^1} (\tilde{A} * \tilde{A} + 2\tilde{A} * \omega^0 + \omega^0 * \omega^0)}}, \quad (334)$$

dove abbiamo usato la proprietà (331). I termini all'esponente contenenti  $\omega^0$  possono essere rimossi in quanto  $d\omega^0 = 0$ . Esplicitamente

$$\int_{S^2 \times S^1} \tilde{A} * \omega^0 = \int_{S^2 \times S^1} \tilde{A} \wedge d\omega^0 \stackrel{\mathbb{Z}}{=} 0, \quad (335)$$

$$\int_{S^2 \times S^1} \omega^0 * \omega^0 = \int_{S^2 \times S^1} \omega^0 \wedge d\omega^0 \stackrel{\mathbb{Z}}{=} 0, \quad (336)$$

dove si è usato il fatto che  $\omega^0$  è globalmente definita. Dalle relazioni (335) e (336), otteniamo che numeratore e denominatore di  $\mathcal{Z}(S^1 \times S^2)$  fattorizzano, e rimane:

$$\mathcal{Z}(S^2 \times S^1) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 dt e^{i2\pi k(2ht)}. \quad (337)$$

Notando che  $\sum_h \exp(i2\pi k(2ht))$  è un pettine di Dirac, possiamo riscrivere l'espressione (337) come una somma infinita di delta di Dirac:

$$\mathcal{Z}(S^2 \times S^1) = \int_0^1 dt \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(2kt - m) \stackrel{0 \leq t < 1}{=} \int_0^1 dt \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{1}{2k} \delta\left(t - \frac{m}{2k}\right) = \frac{1}{2k} \sum_{m=0}^{2k-1} 1 = 1 \quad (338)$$

Alla fine, se  $\mathcal{M} = S^2 \times S^1$ , la funzione di partizione coincide con quella delle sfere di omologia:  $\mathcal{Z}(S^2 \times S^1) = 1$ .

Adesso possiamo affrontare il caso di una generica 3-varietà  $\mathcal{M}$  (chiusa ed orientata) con gruppo di omologia liberamente generato. Siano  $[\gamma_i]$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$  le classi di  $DB$  distribuzionali associate ai generatori del gruppo di omologia  $H_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ . In generale, il secondo gruppo di omologia non è banale, ed ha lo stesso un numero di generatori della parte liberamente generata di  $H_1(\mathcal{M})$ . In questo caso  $H_2(\mathcal{M}) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ , e ciascuno degli  $n$  generatori può essere associato ad una superficie chiusa orientata bidimensionale  $S_i \subset \mathcal{M}$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ . Possiamo denotare con  $A_i^0$  la classe di  $DB$  globalmente definita in  $\mathcal{M}$  con supporto su  $S_i$  normalizzata come:

$$\oint_{\gamma_i} A_j^0 = \int_{\mathcal{M}} A_j^0 * [\gamma_i] = \delta_{ij}. \quad (339)$$

Dato che le superfici  $S_i$  sono chiuse  $dA_i^0 = 0$ , tuttavia  $S^i$  non sono dei bordi, per cui  $A_i^0 \neq dY_i$  per ogni  $Y_i \in \Omega^0(\mathcal{M})/\Omega_{\mathbb{Z}}^0(\mathcal{M})$ . A partire da  $A_i^0 \leftrightarrow (A_i^{0a}, 0, 0)$  possiamo introdurre le classi di  $DB$  associate ai modi zero della connessione. Definiamo dunque:

$$\omega_i^0 \leftrightarrow (t_i A_i^{0a}, 0, 0) \quad 0 \leq t_i < 1, \quad (340)$$

dove si è usato il fatto che le classi di  $DB$  sono definite a meno di  $\Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$ . La presentazione della connessione, lo sappiamo, è data da  $[\mathcal{A}] = A + [h\gamma]$ , dove  $A \in \Omega^1(\mathcal{M})/\Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$ , mentre  $[h\gamma] = h_i [\gamma_i]$  specifica l'origine delle fibre. Come si è visto per il caso  $\mathcal{M} = S^2 \times S^1$ , è conveniente separare da  $A$  i modi zero, e riscrivere le classi della connessione  $[\mathcal{A}]$  come:

$$[\mathcal{A}] = \tilde{A} + \omega_1^0 + \dots + \omega_n^0 + h_i [\gamma_i] \quad h_i \in \mathbb{Z} \text{ con } i = 1, \dots, n. \quad (341)$$

Sostituendo lo sviluppo (341) nell'azione  $2\pi k \int [\mathcal{A}] * [\mathcal{A}]$  troviamo subito:

$$\begin{aligned} 2\pi k \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\mathcal{A}] &= 2\pi k \int_{\mathcal{M}} (A * A + 2h_i A * [\gamma_i]) \\ &= 2\pi k \int_{\mathcal{M}} \tilde{A} * \tilde{A} + 4\pi k \int_{\mathcal{M}} \tilde{A} * 2\omega_j + 2\pi k \int_{\mathcal{M}} \omega_j^0 * \omega_k^0 + 2\pi k (2h_i t_j \delta_{ij}) \\ &= 2\pi k \int_{\mathcal{M}} \tilde{A} * \tilde{A} + 2\pi k (2h_i t_i), \end{aligned} \quad (342)$$

dove si è usato la relazione (339) e la proprietà  $d\omega_j^0 = 0$ . La funzione di partizione  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$  può essere calcolata semplicemente a partire dall'azione scritta nella forma (342). Abbiamo infatti:

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{h_n=-\infty}^{+\infty} \frac{\int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_n \int D\tilde{A} e^{i2\pi k \int_{\mathcal{M}} \tilde{A} * \tilde{A}} e^{i2\pi k (2h_1 t_1 + \dots + 2h_n t_n)}}{\int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_n \int D\tilde{A} e^{i2\pi k \int_{\mathcal{M}} \tilde{A} * \tilde{A}}}, \quad (343)$$

da cui

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{h_n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_n e^{i2\pi k (2h_1 t_1 + \dots + 2h_n t_n)}. \quad (344)$$

Notando che ciascun  $\sum_{h_i} \exp(i2\pi k (2h_i t_i))$  è un pettine di Dirac, e generalizzando i passaggi mostrati nell'espressione (338) si trova:

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = 1 \quad \text{se } H_1(\mathcal{M}) = F(\mathcal{M}). \quad (345)$$

Similmente a quanto visto nel caso di pura torsione, l'invariante (345) è legato all'invariante abeliano di  $RT$  tramite un coefficiente invariante, che coincide semplicemente con  $\mathcal{I}^{-1}(\mathcal{M})$ . Per questo motivo,  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$  non è particolarmente interessante se non c'è torsione nella varietà. D'altra parte, se  $\mathcal{M}$  è liberamente generato, l'invariante  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$  diventa esso stesso meno ricco di informazioni rispetto al caso di torsione. Per convincersene possiamo sfruttare la seguente proprietà: gli spazi  $\mathcal{M}$  con  $H_1(\mathcal{M}) = F(\mathcal{M})$  ammettono sempre una presentazione di chirurgia in cui tutti i coefficienti di chirurgia sono zero, ed il numero di allacciamento tra le varie componenti è ancora zero<sup>13</sup>. Con una presentazione di questo tipo, il calcolo  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ , diventa immediato, e si ha:

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}) = (2k)^{-\frac{n}{2}} \sum_{q_1=0}^{2k-1} \dots \sum_{q_n=0}^{2k-1} 1 = (2k)^{\frac{n}{2}}. \quad (346)$$

Alla fine, per questo tipo di varietà:

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = (2k)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{I}(\mathcal{M}). \quad (347)$$

Da un certo punto di vista, l'espressione (347) è del tutto analoga alla (286), ed i numeri di torsione vengono rimpiazzati da

$$p_i \rightarrow \frac{1}{2k}. \quad (348)$$

### 6.5.2 Valori di Aspettazione

Nel caso di  $\mathcal{M}$  liberamente generato, è possibile calcolare i valori d'aspettazione sfruttando l'invarianza della misura funzionale dovuta ai modi zero della connessione. Come al solito, possiamo considerare inizialmente la varietà  $\mathcal{M} = S^2 \times S^1$  e generalizzare in un secondo momento.

Sia  $A^0 \in \Omega_{\mathbb{Z}}(S^2 \times S^1)$  il modo zero specificato dalla normalizzazione (328). A partire da  $A^0$ , possiamo considerare la seguente sostituzione nell'azione:

$$S_{CS}([\mathcal{A}]) \rightarrow S_{CS}\left([\mathcal{A}] + \left(\frac{m}{2k}\right) A^0\right), \quad (349)$$

dove  $m = 0, 1, \dots, 2k - 1$  è un intero. Dalla presentazione  $[\mathcal{A}] = A + n[G_0]$ , otteniamo subito

$$\begin{aligned} S_{CS}\left([\mathcal{A}] + \left(\frac{m}{2k}\right) A^0\right) &= 2\pi k \int_{S^2 \times S^1} \left(A + n[G_0] + \left(\frac{m}{2k}\right) A^0\right) * \left(A + n[G_0] + \left(\frac{m}{2k}\right) A^0\right) \\ &= S_{CS}[\mathcal{A}] + 2\pi m \int_{S^2 \times S^1} A * A^0 + 2\pi n m \int_{S^2 \times S^1} A^0 * [G_0] + \pi \left(\frac{m^2}{2k}\right) \int_{S^2 \times S^1} A^0 * A^0, \end{aligned} \quad (350)$$

---

<sup>13</sup>Si veda l'appendice (8.1).

dove si è usata la proprietà  $\int_{\mathcal{M}} A * A^0 = \int_{\mathcal{M}} A^0 * A$ . Tenendo conto che  $A^0$  è globalmente definita, e che  $dA^0 = 0$ , otteniamo:

$$\int_{S^2 \times S^1} A * A^0 = \int_{S^2 \times S^1} A \wedge dA^0 = 0, \quad (351)$$

$$\int_{S^2 \times S^1} A^0 * A^0 = \int_{S^2 \times S^1} A^0 \wedge dA^0 = 0. \quad (352)$$

Nello sviluppo (350) compare infine l'integrale

$$2\pi n m \int_{S^2 \times S^2} A^0 * [G_0] = 2\pi n m \oint_{G_0} A^0 = 2\pi n m, \quad (353)$$

dove si è usato la definizione (328). Alla fine [12]

$$\exp(iS_{CS}([\mathcal{A}])) = \exp\left(iS_{CS}\left([\mathcal{A}] + \frac{m}{2k}A^0\right)\right), \quad m = 0, 1, \dots, 2k - 1. \quad (354)$$

La proprietà (354) non è legata alle trasformazioni di gauge, in quanto non esiste una funzione  $Y \in \Omega^0(S^2 \times S^1) / \Omega_{\mathbb{Z}}^0(S^2 \times S^1)$  tale che  $A^0 = dY$ .

Consideriamo il generico link  $\mathcal{L} = \{C_1, \dots, C_n\} \subset S^2 \times S^1$ , rispetto al quale vogliamo determinare  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle$ . Le componenti che si avvolgono una o più volte lungo  $S^1$  intersecano necessariamente la superficie  $S^0$ . Poiché  $S^0$  è orientata, l'integrale

$$M(\mathcal{L}) = \oint_{\mathcal{L}} A^0 = \int_{S^2 \times S^1} A^0 * [\eta_{\mathcal{L}}] \quad (355)$$

conta il numero di avvolgimenti di  $\mathcal{L}$  lungo  $S^1$  (dato dal contributo di ciascuna componente pesata con il relativo colore). Se tutte le componenti sono definite in una palla  $M(\mathcal{L}) = 0$ , infatti il contributo entrante/uscente da  $S^0$  è lo stesso. Il valore di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^2 \times S^1}$  è definito da

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^2 \times S^1} = \mathcal{Z}^{-1}(S^2 \times S^1) N_0^{-1}(S^2 \times S^1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int DA e^{i2\pi k \int_{\mathcal{M}} (A * A + 2n[G_0] * A)} e^{i2\pi \int_{\mathcal{M}} A * [\eta_{\mathcal{L}}]}, \quad (356)$$

dove il significato dei simboli è quello usuale. In particolare, l'espressione (356) è sempre ben definita e coincide con  $\langle \langle W(\mathcal{L}) \rangle \rangle_{S^2 \times S^1}$ . Sfruttando l'invarianza traslazionale dell'integrale funzionale, e la proprietà (354), possiamo riscrivere l'espressione (356) come:

$$\begin{aligned}
\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^2 \times S^1} &= N_0^{-1} \frac{1}{2k} \sum_{m=0}^{2k-1} \int D([\mathcal{A}] + \frac{m}{2k} A^0) e^{iS_{CS}([\mathcal{A}] + \frac{m}{2k} A^0)} e^{i2\pi \int_{S^2 \times S^1} ([\mathcal{A}] + \frac{m}{2k} A^0) * [\eta_{\mathcal{L}}]} \\
&= N_0^{-1} \int D[\mathcal{A}] e^{iS_{CS}([\mathcal{A}])} e^{i2\pi \int_{S^2 \times S^1} [\mathcal{A}] * [\eta_{\mathcal{L}]}} \frac{1}{2k} \sum_{m=0}^{2k-1} e^{i2\pi \int_{S^2 \times S^1} \frac{m}{2k} A^0 * [\eta_{\mathcal{L}]}} \\
&= \langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^2 \times S^1} \frac{1}{2k} \sum_{m=0}^{2k-1} e^{i(\frac{\pi m}{k}) \int_{S^2 \times S^1} A^0 * [\eta_{\mathcal{L}]}].
\end{aligned} \tag{357}$$

L'espressione (357) può essere semplificata sfruttando la relazione (355). Alla fine, possiamo riscrivere il valore di aspettazione nella seguente conveniente forma [12]:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^2 \times S^1} = \langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^2 \times S^1} \frac{1}{2k} \sum_{m=0}^{2k-1} e^{i(\frac{\pi m}{k}) M(\mathcal{L})}. \tag{358}$$

La serie geometrica che appare nell'espressione (358) può essere calcolata esplicitamente, e vale:

$$\frac{1}{2k} \sum_{m=0}^{2k-1} e^{im(\frac{\pi}{k}) M(\mathcal{L})} = \frac{1}{2k} \frac{1 - e^{i2\pi M(\mathcal{L})}}{1 - e^{i(\frac{\pi}{k}) M(\mathcal{L})}} = \begin{cases} 1 & \text{se } M(\mathcal{L}) \stackrel{2k}{\equiv} 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}. \tag{359}$$

Confrontando il risultato (359), con l'espressione (358) se ne deduce che per  $M(\mathcal{L}) \not\equiv 0 \pmod{2k}$ , il valore di  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^2 \times S^1}$  è identicamente nullo. Questo semplifica i calcoli, e permette di limitarci unicamente al caso  $M(\mathcal{L}) \equiv 0 \pmod{2k}$ .

Naturalmente, il risultato (359) è consistente con l'espressione (358); infatti, la somma (359) non può dare altro che 1 oppure 0.

Se  $M(\mathcal{L}) = 0$ , il link  $\mathcal{L}$  è omologicamente banale, e può essere definito tutto in una palla. Con queste ipotesi, il valore di aspettazione (356) può essere risolto in modo analogo a quanto visto in  $S^3$ . Al solito, si introduce la 1-forma  $\tilde{A} \in \Omega^1(S^2 \times S^1) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(S^2 \times S^1)$  definita da  $A = -1/2k[\eta_{\mathcal{L}}] + \tilde{A}$ , e la sostituiamo nell'integrale (356). Tenendo conto dell'invarianza per traslazione, e della proprietà

$$2\pi k \int_{S^1 \times S^2} \left( 2n [G_0] * \left( -\frac{1}{2k} \right) [\eta_{\mathcal{L}}] \right) = 2\pi n \int_{S^2 \times S^1} \Omega_{\mathbb{Z}}^3(S^2 \times S^1) = 2\pi (\text{intero}), \tag{360}$$

troviamo subito

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^2 \times S^1} = \exp \left( -i \left( \frac{2\pi}{4k} \right) \int_{S^2 \times S^1} [\eta_{\mathcal{L}}] * [\eta_{\mathcal{L}}] \right). \tag{361}$$

Il link  $\mathcal{L}$ , per ipotesi, è tutto contenuto in una palla  $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ , per cui  $[\eta_{\mathcal{L}}]$  ha presentazione  $[\eta_{\mathcal{L}}] \leftrightarrow (\eta_{\mathcal{L}}^a, 0, 0)$ , ed abbiamo:

$$\int_{S^2 \times S^1} [\eta_{\mathcal{L}}] * [\eta_{\mathcal{L}}] = \int_{\mathcal{B}} \eta_{\mathcal{L}}^a \wedge d\eta_{\mathcal{L}}^a = \sum_{ij} q_i q_j \mathbb{L}_{ij}. \quad (362)$$

Alla fine, il risultato (361), è equivalente al valore di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3}$ .

Se  $M(\mathcal{L}) = \pm 2k, \pm 4k \dots$  è ancora possibile calcolare esplicitamente  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^2 \times S^1}$ . In effetti ritroviamo ancora il risultato (361). Per dimostrarlo, è sufficiente ricordare la periodicità nel colore dei valori di aspettazione. In particolare, se  $M(\mathcal{L}) = 2kp$ , con  $p \neq 0 \in \mathbb{Z}$ , possiamo modificare il colore di una componente non contraibile secondo  $q \rightarrow q - 2kp$ . In questo modo  $M(\mathcal{L}) = 0$ , e ci si riconduce al caso precedente.

Alla fine, se  $\mathcal{M} = S^2 \times S^1$ , il valore di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^2 \times S^1}$  è dato da [12]:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^2 \times S^1} = \begin{cases} \langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3} & \text{se } M(\mathcal{L}) \stackrel{2k}{=} 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (363)$$

Un'ultima osservazione sul risultato (363) riguarda le eventuali ambiguità del caso  $M(\mathcal{L}) = 2kp$ , con  $p \neq 0 \in \mathbb{Z}$ . In particolare, sappiamo che il numero di allacciamento tra componenti non contraibili e contraibili potrebbe non essere ben definito. Se  $p \neq 0$  le componenti non contraibili esistono, ma possono essere tutte rimosse dato che la loro somma “#” è (per ipotesi) un nodo con colore  $2kp$ . Per questo motivo, se  $M(\mathcal{L}^\#) = 2kp$ , il valore  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3}$  è comunque ben definito. Il caso generale può essere affrontato in modo simile.

Consideriamo un generico link  $\mathcal{L} = \{C_1, \dots, C_m\} \subset \mathcal{M}$ , dove  $\mathcal{M}$  è una 3-varietà con gruppo di omologia liberamente generato:  $H_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ . Come si è visto nel paragrafo precedente, possiamo definire delle 1-forme  $A_j^0$ , con  $j = 1, \dots, n$ , che soddisfano l'espressione (339). Le forme  $A_j^0 \in \Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$  appartengono ai modi zero della connessione, ed introducono una invarianza nella misura funzionale non legata alle trasformazioni di gauge. Si ha infatti

$$S_{CS}[\mathcal{A}] = S_{CS}\left([\mathcal{A}] + \left(\frac{m}{2k}\right) A_j^0\right), \quad (364)$$

dove  $m = 0, 1, \dots, 2k - 1$ . Tenendo conto della proprietà (364), e ripetendo i passaggi già visti nell'espressione (357) otteniamo

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} \cdot \frac{1}{2k} \sum_{m=0}^{2k-1} e^{i\pi \left(\frac{m}{k}\right) M_1(\mathcal{L})} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2k} \sum_{m=0}^{2k-1} e^{i\pi \left(\frac{m}{k}\right) M_n(\mathcal{L})}, \quad (365)$$

dove

$$M_j(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{M}} A_j^0 * [\eta_{\mathcal{L}}]. \quad (366)$$

L'integrale (366), al solito, misura l'intersezione delle componenti colorate di  $\mathcal{L}$  con la superficie  $S_j$ . Le serie geometriche che appaiono nel valore d'aspettazione (365), sono tutte dello stesso tipo, ed il risultato è dato dall'espressione (359). In particolare, ciascuna serie geometrica si annulla se  $M_j(\mathcal{L}) \not\equiv 0 \pmod{2k}$ , altrimenti dà 1. Inoltre, grazie alla periodicità nel colore dei valori di aspettazione, è sempre possibile ricondurci unicamente al caso  $M_j(\mathcal{L}) = 0 \forall j$ . Se  $M_j(\mathcal{L}) = 0 \forall j$ , significa che il link  $\mathcal{L}$  è omologicamente banale, ed è definito in una 3-palla di  $\mathcal{M}$ . Alla fine [12]:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \begin{cases} \langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3} & \text{se } M_j(\mathcal{L}) \stackrel{2k}{=} 0 \forall j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (367)$$

A differenza di quanto visto per le varietà di pura torsione, è immediato verificare che il risultato (367) è in accordo con quanto determinato tramite  $RT$ . Il valore  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$ , calcolato secondo la formula (159), può essere riscritto come:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} \cdot \frac{\sum_{q_1=0}^{2k-1} \dots \sum_{q_m=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right) \left[ \sum_{i,j \leq m} q_i \mathbb{L}_{ij} q_j + \sum_{i \leq m, j > m} q_i \mathbb{L}_{ij}^{tot} c_j \right]}}{\sum_{q_1=0}^{2k-1} \dots \sum_{q_m=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right) \sum_{ij} q_i \mathbb{L}_{ij} q_j}}, \quad (368)$$

dove  $\mathbb{L}$  è la matrice di allacciamento associata a  $\mathcal{L}_s \subset S^3$ , mentre  $\mathbb{L}^{tot}$  è associata a  $\mathcal{L}_s \cup \mathcal{L} \subset S^3$ . Gli interi  $c_j$  rappresentano il colore associato alla  $j$ -esima componente di  $\mathcal{L}$ . Il link  $L$  è omologicamente banale, e coincide semplicemente con  $\mathcal{L}$  se il link di partenza è anch'esso omologicamente banale. Dato che  $H_1(\mathcal{M}) = F(\mathcal{M})$ , è sempre possibile trovare una presentazione chirurgica in cui  $\mathbb{L}$  è tutta nulla ed il numero di componenti di  $\mathcal{L}_s$  coincide con il numero di generatori di  $H_1(\mathcal{M})$ . Si ha subito:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} \cdot (2k)^{-n} \sum_{q_1=0}^{2k-1} e^{-i\frac{\pi}{k} q_1 \sum_j \mathbb{L}_{1j}^{tot} c_j} \dots \sum_{q_n=0}^{2k-1} e^{-i\frac{\pi}{k} q_n \sum_j \mathbb{L}_{nj}^{tot} c_j}. \quad (369)$$

Consideriamo, ad esempio, il termine  $\sum_j \mathbb{L}_{1j}^{tot} c_j$ . Questa somma è data dai numeri di allacciamento del link  $\mathcal{L}$  con la prima componente del link di chirurgia  $\mathcal{L}_s$  pesata con i colori. D'altra parte, poiché ad ogni componente di  $\mathcal{L}_s$  è associato un generatore del gruppo di omologia, ciascun elemento non nullo di  $\mathbb{L}_{1j}^{tot}$  implica una classe di omologia non banale di  $\mathcal{L}$  rispetto al 1° generatore di  $H_1(\mathcal{M})$ . In altre parole  $\sum_j \mathbb{L}_{1j}^{tot} c_j = M_1(\mathcal{L})$ , e similmente per gli altri termini. Ritroviamo quindi l'espressione "funzionale" (365). Il nodo  $L$ , infine, coincide semplicemente con  $\mathcal{L}$  quando il valore d'aspettazione non è nullo.

## 6.6 Generiche 3-Varietà $\mathcal{M}$

In generale, una 3-varietà  $\mathcal{M}$  ha gruppo di omologia dato da  $H_1(\mathcal{M}) = F(\mathcal{M}) \oplus T(\mathcal{M})$ . Nei paragrafi precedenti abbiamo affrontato separatamente i casi  $H_1(\mathcal{M}) = F(\mathcal{M})$ ,  $H_1(\mathcal{M}) = T(\mathcal{M})$ .

Quanto si è visto è sufficiente per affrontare il caso generale senza bisogno di introdurre nuovi concetti. Consideriamo:

$$H_1(\mathcal{M}) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_m}}_m. \quad (370)$$

Per ogni  $i = 1, \dots, n, \dots, n + m$ , introduciamo la classe di *DB* distribuzionale  $[\gamma_i]$  associata al generatore  $i$ -esimo di  $H_1(\mathcal{M})$ . Per fissare le idee supponiamo che  $[\gamma_i]$  siano ordinate come mostrato nella relazione (370). Le prime  $n$  curve  $\gamma_i$  soddisfano

$$\oint_{\gamma_i} A_j^0 = \int_{\mathcal{M}} A_j^0 * [\gamma_i] = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n., \quad (371)$$

dove  $A_j^0 \in \Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$  ha supporto sulla superficie bidimensionale chiusa  $S_j \subset \mathcal{M}$  associata al  $j$ -esimo generatore di  $H_2(\mathcal{M})$ . In modo analogo a quanto visto nei paragrafi precedenti, possiamo separare i modi zero dalla presentazione della connessione. Esplicitamente:

$$[\mathcal{A}] = \tilde{A} + \omega_1^0 + \dots + \omega_n^0 + h_i [\gamma_i], \quad (372)$$

dove le 1-forme  $\omega_j^0$  sono definite dalla decomposizione (340), mentre gli interi  $h_i$  prendono valore su:

$$\begin{cases} h_i \in \mathbb{Z} & \text{per } i = 1, \dots, n, \\ h_i = 0, 1, \dots, p_i - 1 & \text{per } i = n + 1, \dots, m + n. \end{cases} \quad (373)$$

Sostituendo lo sviluppo (372) nell'azione, ed utilizzando la proprietà (342) troviamo immediatamente

$$2\pi k \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\mathcal{A}] = 2\pi k \int_{\mathcal{M}} \left( \tilde{A} * \tilde{A} + 2h_j \tilde{A} * [\gamma_j] \right) + 2\pi k (2h_i t_i), \quad (374)$$

dove  $i = 1, \dots, n$ , mentre  $j = n + 1, \dots, m + n$ . D'altra parte, se escludiamo il termine  $2\pi k (2h_i t_i)$ , il termine a destra dall'espressione (374) coincide con l'azione associata ad una varietà di pura torsione. In effetti  $[\gamma_j]$  sono le classi distribuzionali associate a  $T(\mathcal{M})$ , mentre  $\tilde{A} \in \Omega^1(\mathcal{M}) / \Omega_{\mathbb{Z}}^1(\mathcal{M})$  è globalmente definita e non contiene (per costruzione) modi zero. Dalla proprietà generale (282) otteniamo quindi:

$$2\pi k \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{A}] * [\mathcal{A}] = 2\pi k \int_{\mathcal{M}} \tilde{A} * \tilde{A} + 2\pi k (h_j Q_{jk} h_k + 2h_i t_i). \quad (375)$$

Se vogliamo calcolare la funzione di partizione  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$  possiamo utilizzare le relazioni (344) e (345) da cui otteniamo immediatamente:

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = 1 \cdot \sum_{h_{n+1}=0}^{p_1-1} \dots \sum_{h_{n+m}=0}^{p_m-1} e^{i2\pi k \sum_{j^k} h_j Q_{jk} h_k} \quad j, k = n+1, \dots, m+m. \quad (376)$$

Alla fine, la funzione di partizione dipende solo dalla forma quadratica di torsione e non tiene conto se la varietà ha gruppo di omologia  $H_1(\mathcal{M})$  con una parte liberamente generata. Quindi, se  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{M}'$  sono due varietà con la medesima forma quadratica di torsione si ha:

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathcal{Z}(\mathcal{M}'). \quad (377)$$

D'altra parte, abbiamo visto come l'invariante abeliano  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$  di  $RT$  sia legato alla funzione di partizione  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ . In particolare se  $H_1(\mathcal{M}) = F(\mathcal{M})$  abbiamo  $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = (1/2k)^{n/2} \mathcal{I}(\mathcal{M})$ , mentre se  $H_1(\mathcal{M}) = T(\mathcal{M})$  si ha  $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = (p_1 p_2 \dots)^{1/2} \mathcal{I}(\mathcal{M})$ . Nel caso generale, possiamo vedere  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$  come il prodotto di due funzioni di partizione:  $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathcal{Z}_1 \cdot \mathcal{Z}_2$ . Il termine  $\mathcal{Z}_1 = 1$  è la funzione di partizione associata alla parte liberamente generata di  $\mathcal{M}$ , mentre  $\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}(\mathcal{M})$  è associata alla parte di torsione di  $\mathcal{M}$ . Otteniamo perciò:

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}) = (p_1 p_2 \dots p_m)^{-\frac{1}{2}} (2k)^{\frac{n}{2}} \mathcal{Z}(\mathcal{M}). \quad (378)$$

Dato che  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$  e  $(p_1 p_2 \dots p_m)$  sono fissati dalla forma quadratica di torsione, se ne deduce che  $\mathcal{I}(\mathcal{M}) = \mathcal{I}(\mathcal{M}')$  quando  $Q_{ij}(\mathcal{M}) = Q_{ij}(\mathcal{M}')$ , ed il numero di generatori della parte libera di  $H_1$  coincide. Il numero  $n$  di generatori di  $F(\mathcal{M})$  è chiamato anche primo numero di Betti. Questo risultato è in accordo con l'articolo [23] di H. Murakami, T. Oktsuki e M. Okada.

Anche i valori di aspettazione posso essere calcolati sfruttando alcune delle proprietà già viste. Consideriamo un generico link colorato  $\mathcal{L} = \{C_1, \dots, C_l\} \subset \mathcal{M}$ . Dato che la misura funzionale definita dall'azione (375) ha una invarianza legata ai modi zero, è possibile usare la relazione (365) e riscrivere  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$  come:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \begin{cases} \langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} & \text{se } M_j(\mathcal{L}) \stackrel{2k}{=} 0 \quad \forall j, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (379)$$

dove il significato di  $M_j(\mathcal{L})$  è quello usuale. Dato che i valori di aspettazione sono periodici con periodo  $2k$  nel colore, è sempre possibile ridurci al caso  $M_j(\mathcal{L}) = 0 \quad \forall j$  per calcolare  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$ . A differenza del caso liberamente generato, se il link non interseca mai le superfici  $S_j$ , il valore  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$  non coincide semplicemente con  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3}$  poiché  $\mathcal{L}$  può avere omologia non banale rispetto ai generatori di torsione. Vale perciò:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \begin{cases} \langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} \langle W(\tilde{0}) \rangle_{\mathcal{M}} \langle \mathcal{H} \rangle_{\mathcal{M}} & \text{se } M_j(\mathcal{L}) \stackrel{2k}{=} 0 \quad \forall j, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (380)$$

dove i termini  $\langle W(L) \rangle_{S^3} \langle W(\tilde{0}) \rangle_{\mathcal{M}} \langle \mathcal{H} \rangle_{\mathcal{M}}$  sono specificati dall'espressione (317). Naturalmente, l'espressione (380) è in accordo con il risultato combinatorico di  $RT$ . Per dimostrarlo è sufficiente utilizzare l'equivalenza dei risultati combinatorici e funzionali per i casi distinti  $H_1(\mathcal{M}) = F(\mathcal{M})$  e  $H_1(\mathcal{M}) = T(\mathcal{M})$ .

## 7 Esempi di Calcolo

### 7.1 Forme Quadratiche di Torsione

I valori di aspettazione e la funzione di partizione diventano più interessanti da calcolare quando la varietà  $\mathcal{M}$  ha una parte di torsione. Per questo possiamo considerare unicamente varietà  $\mathcal{M}$  con  $H_1(\mathcal{M}) = T(\mathcal{M})$ .

Come prima cosa è utile vedere qualche calcolo esplicito di  $Q_{ij}$ , ossia la forma quadratica di torsione. Le istruzioni per calcolarla sono date in appendice (8.2) e si applicano direttamente ad ogni presentazione onesta di  $\mathcal{M}$ .

Il primo esempio che consideriamo sono gli spazi lenticolari  $L_{p,q}$ , descritti in appendice (8.1). La varietà  $L_{p,q}$  ammette una presentazione di chirurgia (non onesta) data dall'unknot  $U \subset S^3$  con coefficiente di chirurgia  $r = p/q$ . Gli interi  $p, q$  possono sempre essere scelti positivi e primi tra loro, e soddisfano  $1 \leq q < p$ . Il gruppo di omologia coincide con quello fondamentale, e vale  $\pi_1(L_{p,q}) = H_1(L_{p,q}) = \mathbb{Z}_p$ . Per questa classe di varietà, la matrice  $Q_{ij}$  ha un solo elemento razionale, e possiamo fare a meno di determinare una presentazione onesta di  $L_{p,q}$ . Utilizziamo direttamente la definizione

$$\chi_{S^3}(\Gamma, \Gamma_f) = p^2 Q, \quad (381)$$

dove  $\Gamma = p\gamma$  è una curva contraibile, con  $\gamma$  la curva associata al generatore di  $H_1(L_{p,q})$ . Sia  $N$  l'intorno tubolare di  $U$ , e  $\mu \in \partial N$  un meridiano. Come sappiamo, la curva  $\Gamma$  in  $S^3$  è un nodo torico, ed è l'immagine del meridiano attraverso l'omeomorfismo che specifica la chirurgia:  $\Gamma = h(\mu) \in S^3 - U$ . Allo stesso modo  $\Gamma_f = h(\mu')$ , dove  $\mu'$  è un altro meridiano definito su  $\partial N$ . Dato che l'omeomorfismo  $h$  manda meridiani in  $p$  volte meridiani e  $q$  volte longitudini si ha chiaramente  $\chi_{S^3}(\Gamma, \Gamma_f) = pq$ , da cui

$$Q(L_{p,q}) = \frac{q}{p}. \quad (382)$$

Naturalmente, è possibile riottenere il risultato (382) partendo da una presentazione onesta di  $L_{p,q}$  sfruttando le istruzioni generali descritte in appendice (8.2).

Consideriamo adesso qualche esempio di 3-varietà  $\mathcal{M}$  con due generatori del gruppo  $H_1(\mathcal{M})$ . Può essere utile introdurre una sorta di "generatore di esempi" che permetta di determinare rapidamente alcune varietà di tipo cercato. Concentriamoci su una classe di varietà  $\mathcal{M}$  che corrispondono, nella presentazione di chirurgia, al link di chirurgia  $\mathcal{L}_s = \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3\}$  con matrice di allacciamento:

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -1 \end{pmatrix}. \quad (383)$$

Il link  $\mathcal{L}_s$  specifica univocamente la varietà  $\mathcal{M}$  a meno di mosse di Kirby. Viceversa, la matrice  $\mathbb{L}$  non specifica univocamente il link  $\mathcal{L}_s$ ; conseguentemente la varietà  $\mathcal{M}$  non è fissata da  $\mathbb{L}$ . Tuttavia, i valori di aspettazione, e la funzione di partizione nella teoria di  $CS$  dipendono solo da  $\mathbb{L}$ , quindi

possiamo fare a meno di specificare  $\mathcal{L}_s$  attraverso il relativo diagramma e considerare unicamente la matrici di allacciamento.

Dato che vogliamo limitarci a varierà  $\mathcal{M}$  di pura torsione, vediamo alcune combinazioni di interi  $(a, b, c, d, e)$  che fissano gruppi di omologia specifici.

Siano  $\{G_1, G_2, G_3\}$  i generatori del gruppo di omologia di  $S^3 - \mathcal{L}_s$ . Il gruppo  $H_1(\mathcal{M})$  è specificato dalla relazioni  $\sum_j \mathbb{L}_{ij} G_j = 0$ , che possiamo riscrivere come:

$$\begin{cases} aG_1 + bG_2 + cG_3 = 0, \\ bG_1 + dG_2 + eG_3 = 0, \\ G_3 = cG_1 + eG_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (c^2 + a) G_1 + (ce + b) G_2 = 0, \\ (b + ce) G_1 + (e^2 + d) G_2 = 0, \\ G_3 = cG_1 + eG_2. \end{cases} \quad (384)$$

Al variare degli interi  $(a, b, c, d, e)$  si ottengono differenti gruppi  $H_1(\mathcal{M})$ , e le espressioni (384) ne fissano una presentazione. È conveniente fissare la condizione

$$(a + c^2) = -(b + ce) \neq 0, \quad (385)$$

che combinata con le espressioni (384) dà:

$$\begin{cases} (a + c^2) (G_1 - G_2) = 0, \\ (d + e^2 - a - c^2) G_2 = 0, \\ G_3 = cG_1 + eG_2, \end{cases} \quad (386)$$

Se  $(a + c^2)$  è un multiplo di  $(d + e^2 - a - c^2) \neq 1$  (o viceversa), la varietà  $\mathcal{M}$  ha due generatori del gruppo di omologia, ed  $H_1(\mathcal{M})$  è univocamente determinato. Concentriamoci su alcune varietà di questo tipo.

In questo caso, il gruppo di omologia è dato da  $H_1(\mathcal{M}) = T(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}_{(a+c^2)} \oplus \mathbb{Z}_{(d+e^2-a-c^2)}$ , dove i generatori sono dati da:

$$\begin{cases} v_1 = G_1 - G_2 & \text{generatore di } \mathbb{Z}_{(a+c^2)}, \\ v_2 = G_2 & \text{generatore di } \mathbb{Z}_{(d+e^2-a-c^2)}. \end{cases} \quad (387)$$

Per fissare le idee è utile ricordare che ai generatori  $\{v_1, v_2\}$  vengono associate le curve  $\gamma_1, \gamma_2$ , le cui classi distribuzionali di  $DB$   $[\gamma_1], [\gamma_2]$  compaiono nell'integrazione funzionale.

Scegliamo adesso una 3-varietà specifica, ad esempio con gruppo di omologia  $H_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{10}$ . Sia  $\mathcal{M}_{2,10}$  la 3-varietà specificata dal link mostrato in figura (33). La relativa matrice di allacciamento è data da:

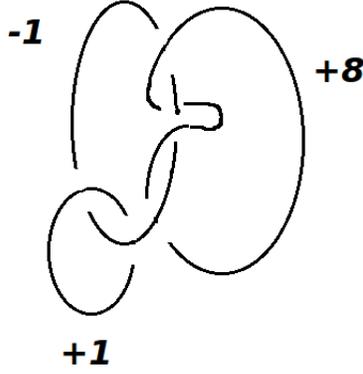


Figura 33: Presentazione chirurgica della varietà  $\mathcal{M}_{2,10}$ .

$$\mathbb{L}(\mathcal{M}_{2,10}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (388)$$

Dato che  $(a + c^2) = 2$ ,  $(b + ce) = -2$ ,  $(d + e^2) = 12$ , la condizione (385) è soddisfatta ed abbiamo  $H_1(\mathcal{M}_{2,10}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{10}$ . A differenza del caso  $L_{p,q}$ , è conveniente determinare la forma quadratica  $Q_{ij}$  associata a  $\mathcal{M}_{2,10}$  secondo la procedura generale. Per fare questo è necessario determinare la matrice inversa  $\mathbb{L}^{-1}$ , che vale:

$$\mathbb{L}^{-1}(\mathcal{M}_{2,10}) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}. \quad (389)$$

Allo stesso modo, è necessario determinare la matrice  $B_{ij}$ , definita da  $v_i = \sum_j B_{ij} G_j$ . Una verifica immediata dà:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (390)$$

La forma quadratica  $Q_{ij}$  è definita da:

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 B_{ik} B_{jl} \mathbb{L}_{kl}^{-1}. \quad (391)$$

Dalle espressioni (390) e (389) troviamo infine:

$$Q(\mathcal{M}_{2,10}) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (392)$$

In questo caso, la matrice  $Q$  che rappresenta forma quadratica nella base (387) è diagonale; questo renderà più semplici alcune verifiche su  $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_{2,10})$ . Un ulteriore esempio è dato dall'insieme di tutte le varietà  $\mathcal{M}_{4,8}$ , il cui link di chirurgia ha matrice di allacciamento:

$$\mathbb{L}(\mathcal{M}_{4,8}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (393)$$

Dato che  $(a + c^2) = 4$ ,  $(b + ce) = -4$ ,  $(d + e^2) = 12$ , troviamo subito  $H_1(\mathcal{M}_{4,8}) = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$ . La matrice inversa  $\mathbb{L}^{-1}(\mathcal{M}_{4,8})$  è data da

$$\mathbb{L}^{-1}(\mathcal{M}_{4,8}) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad (394)$$

da cui si ricava

$$Q(\mathcal{M}_{4,8}) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (395)$$

Di seguito riportiamo qualche altro esempio, con la convenzione di indicare il gruppo di omologia attraverso i pedici in  $\mathcal{M}_{x,y}$ , con  $x < y$ . Vale:

$$\mathbb{L}(\mathcal{M}_{6,12}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 9 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q(\mathcal{M}_{2,6}) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (396)$$

$$\mathbb{L}(\mathcal{M}'_{6,12}) = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -7 & 17 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q(\mathcal{M}_{2,6}) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (397)$$

$$\mathbb{L}(\mathcal{M}_{7,21}) = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 3 \\ -10 & 27 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q(\mathcal{M}_{7,21}) = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (398)$$

È interessante notare come la matrice  $Q$  abbia la stessa struttura per tutti i casi, e pare dipendere unicamente dal gruppo di omologia. In particolare

$$Q(\mathcal{M}_{x,y}) = \frac{1}{y} \begin{pmatrix} \frac{y}{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (399)$$

Questo fatto non è vero in generale, ed è sufficiente osservare il risultato (382) per convincersene. Il motivo per cui l'espressione (399) dipende solo da  $H_1(\mathcal{M})$  è legato dalla particolare scelta della matrice di allacciamento che abbiamo fatto. Più precisamente, abbiamo considerato unicamente varietà con  $H_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}_x \oplus \mathbb{Z}_y$ , in cui il relativo link di chirurgia ha solo 3 componenti, con  $\mathbb{L}$  che soddisfa determinati requisiti. In generale, esistono varietà con  $H_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}_x \oplus \mathbb{Z}_y$  per le quali  $\mathcal{L}_s$  ha una matrice di allacciamento diversa da quella considerata.

Per mostrare questo aspetto consideriamo un ultimo esempio, ossia una somma connessa di due spazi lenticolari. Scegliamo  $\mathcal{M} = L_{3,2} \# L_{6,1}$ . Come sappiamo, lo spazio  $L_{6,1}$  può essere rappresentato da un unknot  $U_1$  con coefficiente di chirurgia  $r_1 = 6$ , mentre  $L_{3,2}$  da un unknot  $U_2$  con coefficiente  $r_2 = 3/2$ . La varietà totale  $\mathcal{M}$  è rappresentabile tramite gli unknot  $U_1, U_2$  disgiunti, ossia con  $\chi(U_1, U_2) = 0$ . È facile vedere che una presentazione onesta di  $L_{3,2}$  è data da un Hopf link  $H_2 = \{C_1, C_2\}$  con coefficiente di chirurgia uguale a 2 per entrambi i nodi. In conclusione, la matrice di allacciamento del link  $\mathcal{L}_s$  di chirurgia è data da:

$$\mathbb{L}(L_{6,1} \# L_{3,2}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \quad (400)$$

La matrice (400) non è riconducibile alla (383), per cui è necessario individuare i generatori del gruppo di omologia. Ripetendo i passaggi (384), ed utilizzando le medesime notazioni, troviamo facilmente:

$$\begin{cases} 2G_1 + G_2 = 0, \\ G_1 + 2G_2 = 0, \\ 6G_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3G_2 = 0, \\ G_1 = -2G_2, \\ 6G_3 = 0. \end{cases}, \quad (401)$$

Il gruppo di omologia, come atteso, è dato da  $H_1(L_{6,1} \# L_{3,2}) = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6$  mentre come generatori possiamo scegliere i seguenti:

$$\begin{cases} v_1 = G_2 & \text{generatore di } \mathbb{Z}_3, \\ v_2 = G_3 & \text{generatore di } \mathbb{Z}_6. \end{cases} \quad (402)$$

Al solito, se vogliamo determinare  $Q(L_{6,1} \# L_{3,2})$  è necessario calcolare l'inverso della matrice di allacciamento. Esplicitamente:

$$\mathbb{L}^{-1}(L_{6,1} \# L_{3,2}) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (403)$$

Nella base (402) si trova infine:

$$Q(L_{6,1} \# L_{3,2}) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad (404)$$

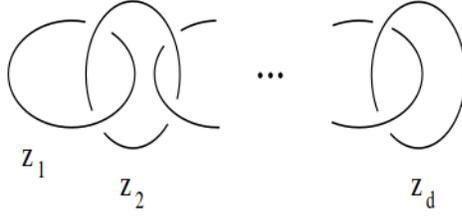


Figura 34: Presentazione onesta per spazi lenticolari. Da [33].

che è in accordo con il risultato generale (382).

## 7.2 Funzione di Partizione

In generale, è sempre possibile [11, 33] determinare una presentazione onesta di  $L_{p,q}$  utilizzando la decomposizione in frazione continua del rapporto  $p/q$

$$\frac{p}{q} = z_d - \frac{1}{z_{d-1} - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{z_1}}}, \quad (405)$$

dove gli elementi  $\{z_1, z_2, \dots, z_d\}$  sono interi positivi. Il link di chirurgia  $\mathcal{L}_s$ , che corrisponde alla presentazione onesta di  $L_{p,q}$ , è dato da una catena di  $d$  elementi, ed è mostrato in figura (34). Gli interi  $\{z_1, z_2, \dots, z_d\}$  sono i nuovi coefficienti di chirurgia. La funzione di partizione  $\mathcal{Z}(L_{p,q})$  si trova immediatamente a partire dalla definizione (284) e dal risultato (382), e vale

$$\mathcal{Z}(L_{p,q}) = \sum_{h=0}^{p-1} e^{i2\pi kh^2 \left(\frac{q}{p}\right)}. \quad (406)$$

D'altra parte, l'invariante abeliano di Reshetikhin-Turaev  $\mathcal{I}_k(L_{p,q})$  si calcola direttamente a partire dal link di chirurgia illustrato in figura (34). Usando la definizione (179) troviamo subito

$$\mathcal{I}_k(L_{p,q}) = (2k)^{-d/2} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma(\mathcal{L}_s)} \prod_{j=1}^d \sum_{q_j=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right)[z_j q_j^2 + 2q_j q_{j+1}]}, \quad (407)$$

dove si è usato la proprietà  $\sum_{ij} q_i \mathbb{L}_{ij} q_j = z_1 q_1^2 + 2q_1 q_2 + z_2 q_2^2 + \dots + 2q_{d-1} q_d + z_d q_d^2$ , con la convenzione di porre  $q_{d+1} = 0$ . Secondo l'espressione (286), funzione di partizione ed invariante abeliano di  $RT$  sono legati dalla relazione

$$\mathcal{Z}(L_{p,q}) = (p)^{1/2} \mathcal{I}(L_{p,q}). \quad (408)$$

Per dimostrare la relazione (408) è conveniente partire dall'espressione (407) e calcolare le varie somme su  $\{q_i\}$  l'una dopo l'altra. Iniziamo dalla somma su  $q_1$ , che contribuisce con

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{q_1=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right)[z_1 q_1^2 + 2q_1 q_2]}. \quad (409)$$

Il termine  $\mathcal{I}_1$  può essere riscritto utilizzando la formula di reciprocità di Gauss:

$$\sum_{n=0}^{|c|-1} e^{-i\frac{\pi}{c}(an^2+bn)} = \sqrt{|c/a|} e^{-i\frac{\pi}{4ac}(|ac|-b^2)} \sum_{n=0}^{|a|-1} e^{i\frac{\pi}{a}(cn^2+bn)}, \quad (410)$$

che è valida per interi  $a, b, c$  tali che  $ac \neq 0$  con  $ac + b = \text{pari}$ . Confrontando  $\mathcal{I}_1$  con la formula (410) troviamo:

$$\mathcal{I}_1 = \left(\frac{2k}{z_1}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2kz_1}q_2^2} \sum_{n_1=0}^{z_1-1} e^{i\frac{\pi}{z_1}(2kn_1^2+q_2n_1)} = (2k)^{\frac{1}{2}} (z_1)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{n_1=0}^{z_1-1} e^{i\left(\frac{\pi}{2kz_1}\right)(2kn_1+q_2)^2}. \quad (411)$$

La somma su  $q_2$ , che denoteremo con  $\mathcal{I}_2$ , va calcolata tenendo conto sia del contributo (411) che di quello dato dall'espressione (407). Esplicitamente:

$$\mathcal{I}_2 = (2k)^{\frac{1}{2}} (z_1)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{n_1=0}^{z_1-1} \sum_{q_2=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{\pi}{2k}\right)[z_2 q_2^2 + 2q_2 q_3]} e^{i\left(\frac{\pi}{2kz_1}\right)(2kn_1+q_2)^2}. \quad (412)$$

L'espressione (412) può essere rimaneggiata ed espressa come un'unica somma. Per fare questo è necessario notare che nel termine  $\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2k}\right)[z_2 q_2^2 + 2q_2 q_3]\right)$  è possibile sostituire  $q_2 \rightarrow q_2 + 2kn_1$ ; infatti una simile sostituzione non modifica l'esponenziale. Con questa sostituzione, l'esponenziale dell'espressione (412) diventa:

$$\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2k}\right)\left[\left(z_2 - \frac{1}{z_1}\right)(2kn_1 + q_2)^2 + 2q_3(2kn_1 + q_2)\right]\right). \quad (413)$$

La somma su  $n_1$  e  $q_2$  equivale ad una singola somma su  $\tilde{q}_2 = (2kn_1 + q_2)$  estesa da 0 sino a  $2kz_1 - 1$ . Ossia:

$$\mathcal{I}_2 = (2k)^{\frac{1}{2}} (z_1)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{\tilde{q}_2=0}^{2kz_1-1} e^{-i\left(\frac{\pi}{2k}\right)\left[\left(z_2 - \frac{1}{z_1}\right)\tilde{q}_2^2 + 2q_3\tilde{q}_2\right]}. \quad (414)$$

Utilizzando la formula di reciprocità di Gauss su  $\mathcal{I}_2$ , e notando che  $c = 2kz_1$ ,  $a = z_2 z_1 - 1$  troviamo poi

$$\mathcal{I}_2 = (2k) (z_2 z_1 - 1)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}} \sum_{n_1=0}^{z_2 z_1 - 2} e^{i \left( \frac{\pi}{2k z_1} \right) (z_1 / (z_1 z_2 - 1)) [2k n_2 + q_3]^2}. \quad (415)$$

Per determinare  $\mathcal{I}_3, \mathcal{I}_4, \dots, \mathcal{I}_d$  si procede allo stesso modo. Dato che l'espressione (415) è ancora della forma (411), possiamo determinare  $\mathcal{I}_d$  per induzione. Utilizzando la proprietà (405) troviamo infine:

$$\mathcal{I}_d = (2k)^{\frac{d}{2}} e^{-id \frac{\pi}{4}} p^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{p-1} e^{i \left( \frac{\pi}{2kp} \right) q [2kn]^2} \quad (416)$$

Per come abbiamo definito  $\mathcal{I}_d$ , è necessario moltiplicare quest'ultimo per  $(2k)^{-\frac{d}{2}} e^{i\pi\sigma(\mathcal{L}_s)/4}$  per ottenere l'invariante abeliano di Reshetikhin-Turaev  $\mathcal{I}_k(L_{p,q})$ . Tenendo conto che gli elementi di  $\mathbb{L}(\mathcal{L}_s)$  sono tutti positivi, la segnatura vale semplicemente  $\sigma(\mathcal{L}_s) = d$ , ed otteniamo:

$$\mathcal{I}(L_{p,q}) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=0}^{p-1} e^{i2\pi k n^2 \frac{q}{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \mathcal{Z}(L_{p,q}). \quad (417)$$

Il risultato (417) è in accordo con quanto atteso, vedi equazione (408).

Consideriamo adesso un'altra varietà, ad esempio la varietà  $\mathcal{M}_{2,10}$  descritta dal link di chirurgia  $\mathcal{L}_s$  mostrato in figura (33), con matrice di allacciamento (388). Più in generale possiamo pensare ad  $\mathcal{M}_{2,10}$  come ad una qualsiasi 3-varietà fissata il cui link di chirurgia ha matrice di allacciamento (388). Dalla definizione (284), e dalla forma esplicita di  $Q$  calcolata in precedenza (espressione (392)), troviamo subito la funzione di partizione:

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}_{2,10}) = \sum_{h_1=0}^1 \sum_{h_2=0}^9 e^{i2\pi k (5h_1^2 + h_2^2)/10}. \quad (418)$$

Dato che  $Q$  è diagonale, è immediato verificare che  $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_{2,10})$  è invariante per una sostituzione  $h_1 \rightarrow h_1 + 2p$ , dove  $p \in \mathbb{N}$ . Questa è una proprietà attesa.

Allo stesso modo, a partire da  $\mathbb{L}$ , possiamo calcolare l'invariante abeliano di Reshetikhin-Turaev  $\mathcal{I}_k(\mathcal{M}_{2,10})$ , che è dato da:

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}_{2,10}) = (2k)^{-\frac{3}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{q_1=0}^{2k-1} \sum_{q_2=0}^{2k-12k-1} \sum_{q_3=0} e^{-i \left( \frac{2\pi}{4k} \right) [q_1^2 + 8q_2^2 - q_3^2 + 2q_1 q_3 - 4q_2 q_3]}. \quad (419)$$

Per dimostrare che  $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_{2,10}) = (2 \cdot 10)^{1/2} \mathcal{I}(\mathcal{M}_{2,10})$ , utilizziamo ancora la formula di reciprocità di Gauss. Comparando l'espressione (410) con la (419) otteniamo subito:

$$\sum_{q_3=0}^{2k-1} e^{-i \frac{\pi}{2k} (-q_3^2 + (2q_1 - 4q_2)q_3)} = \sqrt{2k} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i \frac{\pi}{8k} (2q_1 - 4q_2)^2}, \quad (420)$$

da cui

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}_{2,10}) = (2k)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{2k} e^{i\frac{\pi}{2}} \sum_{q_1=0}^{2k-12k-1} \sum_{q_2=0} e^{-i\frac{\pi}{2k}(2q_1^2+12q_2^2-4q_1q_2)}. \quad (421)$$

Allo stesso modo, la somma su  $q_1$  dell'espressione (421) diventa

$$\sum_{q_1=0}^{2k-1} e^{-i\frac{\pi}{2k}(2q_1^2-4q_2q_1)} = \sqrt{2k/2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{+i\frac{\pi}{2k}(2q_2^2)} \sum_{n=0}^1 e^{i\frac{\pi}{2}(2kn^2-4q_2n)}, \quad (422)$$

che sostituita nella (421) dà:

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}_{2,10}) = (2k)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{2k} \sqrt{2k/2} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^1 e^{i\frac{\pi}{2}(2kn^2)} \sum_{q_2=0}^{2k-1} e^{-i\frac{\pi}{2k}(10q_2^2+4nkq_2)}. \quad (423)$$

Usando ancora la formula di reciprocità otteniamo

$$\sum_{q_2=0}^{2k-1} e^{-i\frac{\pi}{2k}(10q_2^2+4nkq_2)} = \sqrt{2k/10} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{10}(2n^2k)} \sum_{m=0}^9 e^{i\frac{\pi}{10}(2km^2+4nkm)}, \quad (424)$$

ed infine:

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}_{2,10}) = \frac{1}{\sqrt{20}} \sum_{n=0}^1 \sum_{m=0}^9 e^{i2\pi k(6n^2+m^2+2nm)/10}. \quad (425)$$

L'esponente della (425) può essere rimaneggiato notando che è possibile isolare un quadrato:

$$(6n^2 + m^2 + 2nm) = \left(5n^2 + (n+m)^2\right). \quad (426)$$

Dato che il termine  $(n+m)^2$  è definito modulo 10, e la somma su  $m$  copre tutte le classi inequivalenti, è possibile rinominare  $h_2 = n+m$ , dove la somma è estesa a  $h_2 = 0, 1, \dots, 9$ . Allo stesso modo, ponendo  $h_1 = n$ , con  $h_1 = 0, 1$  possiamo riscrivere la somma (425) in modo più familiare:

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}_{2,10}) = \frac{1}{\sqrt{20}} \sum_{h_1=0}^1 \sum_{h_2=0}^9 e^{i2\pi k(5h_1^2+h_2^2)/10} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10}} \mathcal{Z}(\mathcal{M}_{2,10}), \quad (427)$$

da cui

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}_{2,10}) = \sqrt{2 \cdot 10} \mathcal{I}(\mathcal{M}_{2,10}). \quad (428)$$

Il risultato (428) è in accordo con la proprietà generale (286).

### 7.3 Calcolo di $|\mathcal{Z}(\mathcal{M})|$

Si è visto che la forma quadratica di torsione, e conseguentemente la funzione di partizione, non dipendono unicamente dal gruppo di fondamentale della varietà. Tuttavia, almeno nel caso di spazi lenticolari, il valore assoluto  $|\mathcal{Z}(L_{p,q})|$  dipende solo dal gruppo fondamentale  $\pi_1(L_{p,q}) = H_1(L_{p,q}) = \mathbb{Z}_p$ . Per dimostrarlo è sufficiente mostrare che  $|\mathcal{Z}(L_{p,q})|$  non dipende dall'intero  $q$ . Dall'espressione (406) di  $\mathcal{Z}(L_{p,q})$  è facile ottenere il modulo quadro, che vale:

$$|\mathcal{Z}(L_{p,q})|^2 = \sum_{h,l=0}^{p-1} e^{i2\pi k \left(\frac{q}{p}\right) (h^2 - l^2)} = \sum_{h,l=0}^{p-1} e^{i2\pi k \left(\frac{q}{p}\right) (h+l)(h-l)}. \quad (429)$$

È conveniente effettuare il cambio di variabile  $w = h - l$ ; in questo modo l'esponente diventa  $(i2\pi(q/p)) [w^2 + 2lw]$ , e la somma su  $l$  può essere risolta (è una serie geometrica). Definiamo dunque:

$$\mathcal{J} = \sum_{l=0}^{p-1} \left( e^{i2\pi \left(\frac{q}{p}\right) 2w} \right)^l. \quad (430)$$

Risulta comodo introdurre il simbolo di Kronecker periodico (con periodo  $p$ )  $\delta_p(2kqw)$ , che soddisfa

$$\delta_p(2kqw) = \begin{cases} 1 & 2kqw = 0 \pmod{p}, \\ 0 & 2kqw \neq 0 \pmod{p}. \end{cases} \quad (431)$$

Abbiamo quindi:

$$\mathcal{J} = p \delta_p(2kqw) \quad (432)$$

La serie geometrica  $\mathcal{J}$  dà contributo nullo alla sommatoria (429) tranne nel caso in cui  $2kqw = 0$  modulo  $p$ . In questi casi, infatti, dà contributo  $p$ . Alla fine, possiamo riscrivere  $|\mathcal{Z}(L_{p,q})|^2$  nella forma compatta:

$$|\mathcal{Z}(L_{p,q})|^2 = p \sum_{w=0}^{p-1} e^{i2\pi k \left(\frac{q}{p}\right) w^2} \delta_p(2kqw). \quad (433)$$

Siano  $\tilde{w}$  i valori di  $w$  che soddisfano la condizione  $2kq\tilde{w} \stackrel{p}{=} 0$ . Come sappiamo, le quantità  $k$ ,  $q$ ,  $w$ , sono tutte intere, e ciascuna ha determinate proprietà. Più precisamente  $k \neq 0$  è arbitraria,

$w = 0, 1, \dots, p-1$ , mentre  $1 \leq q < p$  con  $p, q$  primi tra loro. Dato che  $p$  e  $q$  sono primi tra loro, le soluzioni di  $2kq\tilde{w} \stackrel{p}{\equiv} 0$  dipendono solo da  $k$  e  $p$ .

Vediamo adesso di determinare esplicitamente  $\tilde{w}$ . Essenzialmente, per risolvere  $2kq\tilde{w} \stackrel{p}{\equiv} 0$ , possiamo distinguere due casi:

$$\begin{cases} (a) & k \text{ e } p \text{ primi tra loro,} \\ (b) & k \text{ e } p \text{ divisibili tra loro.} \end{cases} \quad (434)$$

I casi (a) e (b), a loro volta, si dividono in altri sotto-casi da discutere singolarmente. Conviene iniziare dal caso (a), ossia  $k$  e  $p$  primi tra loro. Se  $p$  è dispari, necessariamente  $\tilde{w} = 0$ , mentre se  $p$  è pari troviamo  $\tilde{w} = 0, p/2$ . Con queste soluzioni, l'esponente dell'espressione (433) diventa:

$$\text{caso (a): } 2\pi k \left(\frac{q}{p}\right) \tilde{w}^2 \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \tilde{w} = 0, \\ \frac{\pi}{2} k q p^{\tilde{w}=2n} \pi k q n = \pi \cdot (\text{dispari}) \cdot n & \text{se } \tilde{w} = \frac{p}{2}, \end{cases} \quad (435)$$

dove si è usato il fatto che per  $p$  pari necessariamente  $k$  e  $q$  sono dispari. Segue subito:

$$\text{caso (a): } |\mathcal{Z}(L_{p,q})|^2 = \begin{cases} p & \text{se } p \text{ è dispari,} \\ 2p & \text{se } p = 2n \text{ con } n \text{ pari,} \\ 0 & \text{se } p = 2n \text{ con } n \text{ dispari.} \end{cases} \quad (436)$$

Nel caso (a), quindi, il valore assoluto  $|\mathcal{Z}(L_{p,q})|$  non dipende dall'intero  $q$ .

Il caso (b) è leggermente più complicato. Sia  $g > 1$  il massimo comun divisore di  $k$  e  $p$ . Introduciamo l'intero  $\beta$  che soddisfa  $p = g\beta$ . Se  $\beta$  è dispari le soluzioni sono date da  $\tilde{w} = 0, \beta, \dots, (g-1)\beta$ ; abbiamo perciò  $g$  soluzioni. Viceversa, se  $\beta$  è pari si ha per soluzione  $\tilde{w} = 0, \beta/2, \beta, \dots, ((g-1)/2)/\beta$ ; in totale si hanno quindi  $2g$  soluzioni. Sostituendo i valori di  $\tilde{w}$  nell'esponente dell'espressione (433) si trova

$$\text{caso (b): } 2\pi k \left(\frac{q}{p}\right) \tilde{w}^2 \rightarrow \begin{cases} 2\pi k \left(\frac{q}{g}\right) n^2 \beta = 2\pi \cdot (\text{int}) & \text{se } \tilde{w} = n\beta \quad n = 0, \dots, g-1, \\ \frac{\pi}{2} k \left(\frac{q}{g}\right) n^2 \beta^{\beta=2m} \pi \cdot (\text{dispari}) \cdot n^2 \cdot m & \text{se } \tilde{w} = \frac{n}{2}\beta \quad n = 0, \dots, g-1 \end{cases} \quad (437)$$

dove si è usato il fatto che per  $\beta$  pari (ovvero  $p = g\beta$  pari) necessariamente  $q$  è dispari. Allo stesso modo, dato che  $g$  è il massimo comun divisore tra  $k$  e  $p$  necessariamente  $k/g$  è dispari se  $p$  è pari. Similmente a quanto visto per il caso (a), l'esponente non dipende dall'intero  $q$ . Il valore assoluto  $|\mathcal{Z}(L_{p,q})|$  risulta poi essere:

$$\text{caso (b): } |\mathcal{Z}(L_{p,q})|^2 = \begin{cases} p \cdot g & \text{se } \beta \text{ è dispari,} \\ 2p \cdot g & \text{se } \beta = 2m \text{ con } m \text{ pari,} \\ 0 & \text{se } \beta = 2m \text{ con } m \text{ dispari.} \end{cases} \quad (438)$$

I risultati (436) e (438) mostrano che il valore assoluto  $|\mathcal{Z}(L_{p,q})|$  dipende solo dal gruppo fondamentale.

## 7.4 Valori di Aspettazione

Vogliamo calcolare qualche valore di aspettazione, a partire da nodi definiti negli spazi lenticolari  $L_{p,q}$ . Consideriamo il nodo  $C$  (con framing arbitrario) e colore  $c$  rappresentato in figura (35). Vogliamo determinare il valore

$$\langle W(C) \rangle_{L_{p,q}} \quad (439)$$

utilizzando sia la chirurgia che il metodo funzionale. Iniziamo utilizzando il risultato (317) derivato dall'integrazione funzionale. Sia  $\gamma$  la curva associata al generatore  $v$  del gruppo  $H_1(L_{p,q})$ . Questa è rappresentabile come un piccolo cerchio allacciato al nodo di chirurgia  $U$ , ed è equivalente (sotto isotopia ambiente) a  $C$ . Con le orientazioni mostrate in figura (35), il nodo reale  $C$  ha classe di omologia  $+1 \cdot v$ . Come sappiamo, è necessario esprimere  $C$  come somma “#” di due opportuni nodi:  $C = L \# \tilde{\gamma}$ . Questa decomposizione è fissata dal gruppo di omologia di  $C$ , ed è specificata dalle espressioni (288) e (290). In particolare, poiché  $C$  ha classe di omologia  $+1 \cdot v$ , colore  $c$ , ed è legata da isotopia ambiente a  $\gamma$ , abbiamo semplicemente:

$$\tilde{\gamma} = \underbrace{\gamma \# \gamma \# \dots \# \gamma}_c = +c \cdot \gamma. \quad (440)$$

Il nodo  $L$ , per costruzione, è un unknot slacciato dal nodo di chirurgia  $U$  ed ha il medesimo framing del nodo di partenza  $C$ . Utilizzando la soluzione (317), e tenendo conto che  $\tilde{\gamma} = +c\gamma$  (ossia  $\mathcal{H}_1 = c$ ) troviamo subito:

$$\langle W(C) \rangle_{L_{p,q}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} \mathcal{Z}^{-1}(L_{p,q}) \sum_{h=0}^{p-1} e^{i2\pi k(h + \frac{c}{2k})^2 \frac{q}{p}}. \quad (441)$$

In generale, una volta specificato un qualsiasi link  $\mathcal{L} \subset L_{p,q}$  è immediato trovare graficamente la relativa decomposizione (288), e quindi il suo valore di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{L_{p,q}}$ . Vediamo adesso qual'è il risultato del valore  $\langle W(C) \rangle_{L_{p,q}}$  ottenuto mediante il metodo di  $RT$ . Dall'espressione (159) si ha



Figura 35: Nodo  $C$  nello spazio  $L_{p,q}$ . Il nodo sottile rappresenta il generatore  $\gamma$ .

$$\langle W(C) \rangle_{L_{p,q}} = \frac{\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) W(C) \rangle_{S^3}}{\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \rangle_{S^3}}, \quad (442)$$

dove  $\hat{S}(\mathcal{L}_s)$  è l'operatore di chirurgia (158) associato al link  $\mathcal{L}_s$  di chirurgia. Il link  $\mathcal{L}_s$ , che specifica una presentazione onesta di  $L_{a,b}$ , è quello mostrato in figura (34). Utilizzando la relazione (286), e la definizione dell'invariante  $\mathcal{I}(L_{p,q})$ , è possibile riscrivere  $\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \rangle_{S^3}$  in una forma più conveniente data da:

$$\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \rangle_{S^3} = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma(\mathcal{L}_s)} \mathcal{I}(L_{p,q}) = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma(\mathcal{L}_s)} (p)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{Z}(L_{p,q}). \quad (443)$$

D'altra parte, sviluppando esplicitamente il numeratore dell'espressione (442) troviamo:

$$\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) W(C) \rangle_{S^3} = \langle W(L) \rangle_{S^3} (2k)^{-\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \sum_{q_j=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right)[z_j q_j^2 + 2q_j q_{j+1}]}, \quad (444)$$

dove  $q_{d+1} = c$ . In effetti, il nodo  $C$  può essere rappresentato in figura (34) semplicemente aggiungendo un anello alla catena. Questo implica che il colore  $q_{d+1}$  è quello del nodo reale, mentre il termine  $\exp(-i(2\pi/4k)c^2\chi(C, C_f))$  può essere isolato dalla somma. Questo termine non è altro che  $\langle W(L) \rangle_{S^3}$ .

L'espressione (444) può essere risolta in modo del tutto analogo a quanto visto per  $\mathcal{I}_d$ . Osservando i passaggi (415) e (416) vediamo che la presenza del termine  $q_{d+1} = c$ , modifica il valore del prodotto di somme come:

$$\prod_{j=1}^d \sum_{q_j=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right)[z_j q_j^2 + 2q_j q_{j+1}]} = (2k)^{\frac{d}{2}} e^{-d\frac{\pi}{4}p} p^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{p-1} e^{i\left(\frac{\pi}{2kp}\right)q[2kn+c]^2}. \quad (445)$$

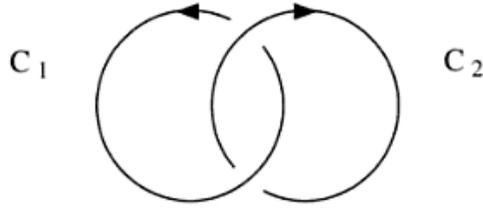


Figura 36: Hopf link  $L$  in  $S^3$ . Da [12].

I coefficienti  $(2k)^{\frac{d}{2}} e^{-d\pi/4} p^{-1/2}$  non entrano nel valore di aspettazione (442) in quanto fattorizzano tutti. Riscrivendo la somma dell'espressione (445) come

$$e^{i\left(\frac{\pi}{2kp}\right)q[2kn+c]^2} = e^{i2\pi k\left(n+\frac{c}{2k}\right)^2 \frac{q}{p}}, \quad (446)$$

e notando che coincide con quella dell'espressione (441) si trova infine

$$\langle W(C) \rangle_{L_{p,q}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} \mathcal{Z}^{-1}(L_{p,q}) \sum_{n=0}^{p-1} e^{i2\pi k\left(n+\frac{c}{2k}\right)^2 \frac{q}{p}}, \quad (447)$$

che coincide con il risultato “funzionale” (441).

Consideriamo adesso un secondo esempio, e calcoliamo il valore di aspettazione di un link colorato  $\mathcal{L} = \{C_1, C_2\}$  definito in  $\mathcal{M}_{2,10}$ , dove la varietà  $\mathcal{M}_{2,10}$  è quella specificata dal link di chirurgia mostrato in figura (33). Il colore delle componenti  $C_1$  e  $C_2$  è rispettivamente  $c_1$  e  $c_2$ . Per specificare il link reale  $\mathcal{L}$ , possiamo anche fare a meno di rappresentare il suo diagramma chirurgico, in quanto è sufficiente fissare la matrice di allacciamento totale associata a  $\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}_s \cup \mathcal{L}$  in  $S^3$ . Ordiniamo le componenti del link totale come  $\mathcal{L}_{tot} = \{\mathcal{L}_{s1}, \mathcal{L}_{s2}, \mathcal{L}_{s3}, C_1, C_2\}$ , in modo che gli elementi di  $\mathbb{L}_{ij}^{tot} = \chi_{S^3}(\mathcal{L}_i^{tot}, \mathcal{L}_j^{tot})$  associati alle componenti  $\{C_1, C_2\}$  siano nelle ultime due righe e colonne decomposizione. Sia dunque:

$$\mathbb{L}_{tot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \quad (448)$$

Utilizziamo la notazione dei paragrafi precedenti, per cui  $v_1$  è il generatore di  $\mathbb{Z}_2$ , mentre  $v_2$  è il generatore di  $\mathbb{Z}_{10}$ . Al solito, possiamo associare ai generatori  $\{v_1, v_2\}$  le curve  $\gamma_1, \gamma_2$ , le cui classi di  $DB$   $[\gamma_1], [\gamma_2]$  sono proprio quelle che troviamo nell'integrale funzionale. In termini di generatori del gruppo di omologia di  $S^3 - \mathcal{L}_s$  sappiamo che vale  $v_1 = G_1 - G_2$ ,  $v_2 = G_2$ , dove  $G_1, G_2$  sono dei cerchi semplici definiti nel complemento di  $\mathcal{L}_s$  tali che  $\chi(G_i, \mathcal{L}_{sj})_{S^3} = \delta_{ij}$ . Conviene quindi riscrivere la matrice (448) nella seguente forma:

$$\mathbb{L}_{tot} = \begin{pmatrix} \mathbb{L}(\mathcal{L}_s) & 0 \\ 0 & \mathbb{L}(L) \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (449)$$

Dall'espressione (449) vediamo che la componente  $C_1$  è omologicamente banale ed è slacciata da  $\mathcal{L}_s$ . La componente  $C_2$ , invece, ha classe di omologia  $+3 \cdot v_1 + 5 \cdot v_2$ . Osservando l'espressione (449) della matrice di allacciamento totale è facile riscrivere  $\mathcal{L}$  secondo l'usuale decomposizione  $\mathcal{L} = L \# \tilde{\gamma}$ . In particolare, la componente  $L$  è slacciata da  $\mathcal{L}_s$ , ed è mostrata in figura (36). Al solito, la componente  $L$  è definita in una 3-palla  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ . La curva  $\tilde{\gamma}$ , invece, può essere interamente scritta come somma di curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Tenendo conto che il colore di  $C_2$  è  $c_2$ , otteniamo subito:

$$\tilde{\gamma} = 3c_2\gamma_1 \# 5c_2\gamma_2. \quad (450)$$

Per quanto riguarda le classi di  $DB$  distribuzionali, si ha poi:

$$[\tilde{\gamma}] = 3c_2[\gamma_1] + 5c_2[\gamma_2] = \mathcal{H}_1[\gamma_1] + \mathcal{H}_2[\gamma_1], \quad (451)$$

dove i coefficienti  $\mathcal{H}_1 = 3c_2$ ,  $\mathcal{H}_2 = 5c_2$  fissano la classe di omologia di  $\tilde{\gamma}$ , e conseguentemente il valore d'aspettazione  $\langle \mathcal{H} \rangle_{\mathcal{M}}$ . Avendo determinato tutti gli elementi che entrano nell'espressione funzionale  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}_{2,10}}$ , possiamo scrivere il valore d'aspettazione esplicitamente:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}_{2,10}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{M}_{2,10}) \sum_{h_1=0}^1 \sum_{h_2=0}^9 e^{i2\pi k \left[ 5 \left( h_1 + \frac{3c_2}{2k} \right)^2 + \left( h_2 + \frac{5c_2}{2k} \right)^2 \right] / 10}. \quad (452)$$

Riotteniamo il valore (452) utilizzando l'espressione di  $RT$ . Sappiamo che vale

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}_{2,10}} = \frac{\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) W(\mathcal{L}) \rangle_{S^3}}{\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \rangle_{S^3}}, \quad (453)$$

dove il denominatore è possibile riscriverlo come:

$$\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) \rangle_{S^3} = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma(\mathcal{L}_s)} \mathcal{I}(\mathcal{M}_{2,10}) = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma(\mathcal{L}_s)} (2 \cdot 10)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{Z}(\mathcal{M}_{2,10}). \quad (454)$$

Usando la definizione (158) di operatore di chirurgia riscriviamo il numeratore dell'espressione (453) come:

$$\left\langle \hat{S}(\mathcal{L}_s) W(\mathcal{L}) \right\rangle_{S^3} = \langle W(L) \rangle_{S^3} (2k)^{-\frac{3}{2}} \sum_{q_1=0}^{2k-1} \sum_{q_2=0}^{2k-1} \sum_{q_3=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right)[q_1^2+8q_2^2-q_3^2+2q_1q_3-4q_2q_3+6q_1c_2+4q_2c_2]}, \quad (455)$$

dove si è usata la matrice di allacciamento totale (448). Per non complicare eccessivamente le formule, possiamo concentrarci unicamente sulla somme tralasciando momentaneamente i coefficienti  $\langle W(L) \rangle_{S^3} (2k)^{-\frac{3}{2}}$ . Utilizzando la formula di reciprocità di Gauss sulla somma in  $q_3$  otteniamo:

$$\sqrt{2k} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{q_1=0}^{2k-1} \sum_{q_2=0}^{2k-1} e^{-i\left(\frac{2\pi}{4k}\right)[2q_1^2+12q_2^2-4q_2q_1+6q_1c_2+4q_2c_2]}, \quad (456)$$

dove si è sfruttato il risultato noto (420). Allo stesso modo, la somma su  $q_1$  diventa:

$$\sum_{q_1=0}^{2k-1} e^{-i\frac{\pi}{2k}(2q_1^2+(6c_2-4q_2)q_1)} = \sqrt{2k/2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2k}(2q_2^2)} e^{i\frac{\pi}{4}(9c_2^2)} e^{-i\frac{\pi}{2k}(6c_2q_2)} \sum_{n=0}^1 e^{i\frac{\pi}{2}(2kn^2+(6c_2-4q_2)n)}, \quad (457)$$

che sostituita nell'espressione (456) dà:

$$\sqrt{2k} \sqrt{2k/2} e^{i\frac{\pi}{4}(9c_2^2)} \sum_{n=0}^1 e^{i\frac{\pi}{2}(2kn^2+6c_2n)} \sum_{q_2=0}^{2k-1} e^{-i\frac{\pi}{2k}(10q_2^2+4knq_2+6c_2q_2+4c_2q_2)}. \quad (458)$$

Usando ancora la formula di reciprocità troviamo

$$\sum_{q_2=0}^{2k-1} e^{-i\frac{\pi}{2k}(10q_2^2+(4kn+10c_2)q_2)} = \sqrt{2k/10} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{10}(2n^2k)} e^{i\frac{\pi}{8k}(10c_2^2)} e^{i\frac{\pi}{10}(10nc_2)} \sum_{m=0}^9 e^{i\frac{\pi}{10}(2km^2+4knm+10c_2m)}, \quad (459)$$

ed infine:

$$\sqrt{2k} \sqrt{2k/2} \sqrt{2k/10} e^{i\frac{\pi}{4}(9c_2^2)} e^{i\frac{\pi}{4}(5c_2^2)} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^1 \sum_{m=0}^9 e^{i2\pi k(6n^2+m^2+2nm+10mc_2/2k+16nc_2/2k)/10}. \quad (460)$$

L'esponente nella somma dell'espressione (460) può essere riscritto nei seguenti termini:

$$2\pi k \left( 5n^2 + (n+m)^2 + \frac{10}{2k}(n+m)c_2 + \frac{6}{2k}nc_2 \right) / 10. \quad (461)$$

Introduciamo adesso il seguente cambio di variabile:

$$h_2 = n + m, \quad h_1 = n, \quad (462)$$

dove  $h_1 = 0, 1$ , mentre  $h_2 = 0, 1, \dots, 9$ . Utilizzando le variabili appena definite possiamo riscrivere l'espressione (460) come:

$$(2k)^{\frac{3}{2}} (2 \cdot 10)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{h_1=0}^1 \sum_{h_1=0}^9 e^{i2\pi k \left( 5 \left( h_1 + \frac{3c_2}{2k} \right)^2 + \left( h_2 + \frac{5c_2}{2k} \right)^2 \right) / 10}, \quad (463)$$

dove si è usata la proprietà

$$e^{i2\pi k \left( \frac{10}{2k} h_2 c_2 \right) / 10} = e^{i2\pi k \left( \frac{30}{2k} h_2 c_2 \right) / 10}. \quad (464)$$

Alla fine, combinando i risultati (454), (455), (463), e notando che  $\sigma(\mathcal{L}_s) = +1$  troviamo finalmente:

$$\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}_{2,10}} = \langle W(L) \rangle_{S^3} \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{M}_{2,10}) \sum_{h_1=0}^1 \sum_{h_2=0}^9 e^{i2\pi k \left( 5 \left( h_1 + \frac{3c_2}{2k} \right)^2 + \left( h_2 + \frac{5c_2}{2k} \right)^2 \right) / 10}, \quad (465)$$

che coincide con il risultato “funzionale” (452).

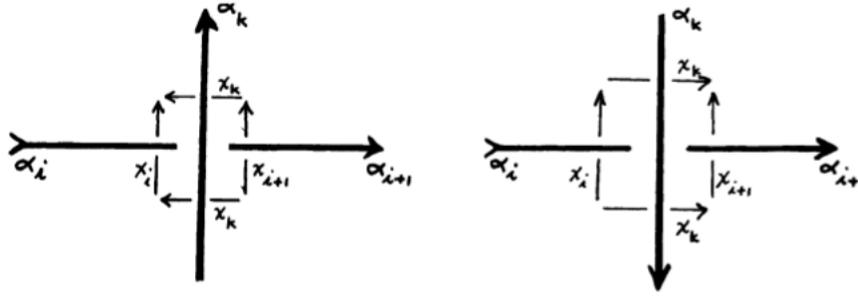


Figura 37: Incroci possibili in un diagramma. Da [11].

## 8 Appendice

### 8.1 Primo Gruppo di Omologia $H_1(\mathcal{M})$ e Link di Chirurgia

Il gruppo fondamentale è un gruppo associato ad ogni spazio topologico. Fissato un punto  $x_0 \in \mathcal{M}$ , e dei cammini chiusi passanti per  $x_0$ , il gruppo fondamentale dà informazioni su quali cammini possono essere deformati con continuità (omotopicamente) l'uno nell'altro.

Consideriamo lo spazio definito dal complemento  $S^3 - \mathcal{L}$  di un link  $\mathcal{L}$ . Il gruppo fondamentale di  $S^3 - \mathcal{L}$  viene denotato con  $\pi_1(S^3 - \mathcal{L})$ , e prende il nome di gruppo di  $\mathcal{L}$ . Un modo semplice per determinare una presentazione di  $\pi_1(S^3 - \mathcal{L})$  consiste nel metodo grafico proposto da Wirtinger [11].

Sia  $K$  un nodo orientato in  $S^3$  (la generalizzazione ad un link è del tutto naturale). Consideriamo il suo diagramma, che possiamo immaginare formato da una serie finita di archi  $\{\alpha_i\}$  con  $i = 1, \dots, n$ . Ogni arco  $\alpha_i$  è connesso, per costruzione, all'arco  $\alpha_{i\pm 1}$  (modulo  $n$ ) tramite un arco  $\beta$  passante al di sotto di un'altra sezione del nodo, e per questo non rappresentato nel diagramma. Immaginiamo il punto  $x_0$  posizionato da qualche parte al di fuori del piano del diagramma, ad esempio in corrispondenza degli occhi dell'osservatore. Per ogni arco  $\alpha_i$  si introducono delle frecce  $x_i$  passanti sotto l'arco corrispondente, ed orientate convenzionalmente verso sinistra rispetto alla direzione dell'arco. Queste frecce rappresentano i cammini chiusi passanti per  $x_0$ . Ogni incrocio (o cross) del diagramma di  $K$ , implica una relazione che sussiste tra i vari  $x_i$ . Dato che gli incroci possono essere di due tipi (vedi figura(37)), abbiamo due diverse possibili relazioni, date da:

$$\mathcal{R}_i : x_j x_i = x_{i+1} x_j, \quad (466)$$

$$\mathcal{R}_i : x_i x_j = x_j x_{i+1}. \quad (467)$$

In totale esistono  $n$  relazioni, tante quanti sono gli archi del diagramma di  $K$ . Il gruppo  $\pi_1(S^3 - K)$  è generato dalle classi di omotopia dei percorsi  $x_i$ , e si può scrivere come:

$$\pi_1(S^3 - K) = \{x_1, \dots, x_n \mid \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n\}. \quad (468)$$

In generale, il gruppo  $\pi_1(S^3 - K)$  non è liberamente generato e non è abeliano per  $n \neq 1$ . Nel caso in cui  $K$  non sia un nodo ma un link  $\mathcal{L}$ , la presentazione (468) continua a valere, ed  $n$  rappresenta il numero di archi dell'intero diagramma.

A partire dal gruppo di  $\mathcal{L}$ , è possibile determinare  $\pi_1(\mathcal{M})$ , dove  $\mathcal{M}$  è la 3-varietà ottenuta tramite chirurgia da  $\mathcal{L}$ . Come sappiamo, fissato il link di chirurgia  $\mathcal{L}$ , e le classi di omotopia  $[h_i(\mu_i)]$ , la varietà  $\mathcal{M}$  risulta essere specificata. Se vogliamo determinare  $\pi_1(\mathcal{M})$ , è necessario aggiungere alla presentazione (468) nuove relazioni dipendenti dagli omeomorfismi  $h_i$ . Queste nuove relazioni sono date dalle classi di omotopia  $Y_i = [h_i(\mu_i)] = 1$ , scritte rispetto ai generatori di  $\pi_1(S^3 - \mathcal{L})$ . Alla fine otteniamo:

$$\pi_1(\mathcal{M}) = \{x_1, \dots, x_n \mid \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n, Y_i = 1\}. \quad (469)$$

L'espressione (469) rappresenta un utile strumento per conoscere, a chirurgia fissata, alcune proprietà della varietà risultante. Oltre al gruppo fondamentale, risulta interessante anche il primo gruppo di omologia  $H_1(\mathcal{M})$ , che si ottiene dalla presentazione (469) abelianizzando i generatori. In generale si ha:

$$H_1(\mathcal{M}) = F(\mathcal{M}) \otimes T(\mathcal{M}), \quad (470)$$

dove  $F(\mathcal{M}) = \mathbb{Z} \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}$  è detta parte abeliana liberamente generata, mentre  $T(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}_{p_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}_{p_n}$  è detta torsione. Gli interi  $p_1, \dots, p_n$  sono detti numeri di torsione, e sono univocamente determinati se richiediamo che  $p_{i+1}$  divida  $p_i$ .

Vediamo adesso una serie di esempi esplici. Iniziamo considerando l'esempio più semplice, ossia un singolo nodo unknot ( $\mathcal{L} = U$ ) con coefficiente di chirurgia  $r = a/b$ , (compreso  $r = \infty$ ). Il gruppo delle classi di equivalenza delle mappe da  $S^1 \rightarrow (S^3 - U)$  è dato semplicemente da:

$$\pi_1(S^3 - U) = \{x_1 \mid -\} \sim \mathbb{Z}. \quad (471)$$

Il gruppo dell'unknot è quindi liberamente generato, e coincide con il gruppo di omologia. Come sappiamo, alla presentazione (471) è necessario aggiungere le classi  $Y_i = 1$  (in questo caso, essendoci una sola componente, la classe è una soltanto). La relazione dovuta alla chirurgia, per  $r = a/b$ , è data da  $x_1^a = 1$ . La varietà  $\mathcal{M}$  ottenuta per chirurgia dall'unknot  $U_{a/b}$  ha quindi gruppo fondamentale:

$$\pi_1(\mathcal{M}_u) = H_1(\mathcal{M}_u) = \{x_1 \mid x_1^a = 1\} = \begin{cases} \sim \mathbb{Z} & a = 0 \\ \sim \mathbb{Z}_a & a \neq 0, \pm 1 \\ = 0 & a = \pm 1 \end{cases} \quad (472)$$

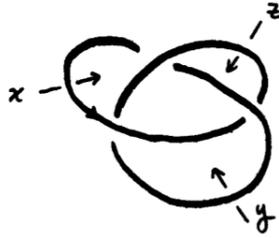


Figura 38: Nodo trifoglio. Da [11].

Le 3-varietà  $\mathcal{M}_u$  così ottenute contengono un toro solido, e la chiusura dei loro complementi sono ancora dei tori solidi (per costruzione). Queste varietà sono chiamate *spazi lenticolari*, e sono denotate con  $L_{a,b}$ . Gli spazi lenticolari privi di torsione sono dei casi particolari, e vengono indicati in modo diverso. In particolare vale [11]:

$$\begin{cases} L_{0,\pm 1} \cong S^2 \times S^1 \\ L_{\pm 1,b} \cong S^3 \end{cases}, \quad (473)$$

dove  $H_1(S^3) = 0$ ,  $H_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$ . Per gli spazi lenticolari vale inoltre

$$L_{a,b} \simeq L_{a,-b} \simeq L_{-a,b} \simeq L_{-a,-b} \simeq L_{a,b+ka} \simeq L_{a,kab}, \quad (474)$$

dove  $k$  è un intero. Per questo motivo possiamo limitarci a  $0 < b < a$  con  $a, b$  primi tra loro. In generale, qualsiasi link di chirurgia  $\mathcal{L}$  riducibile tramite mosse di Rolfsen a  $U_{a/b}$  darà  $\mathcal{M} = L_{a,b}$ , il cui gruppo di omologia è dato da:

$$H_1(L_{a,b}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_a & a \neq 0, 1 \\ \mathbb{Z} & a = 0 \\ 0 & a = 1 \end{cases} \quad (475)$$

Un secondo esempio di 3-varietà arriva dal nodo trifoglio, visibile in figura (38). Con il metodo di Wirtinger troviamo facilmente le tre relazioni del gruppo del nodo, date da:

$$\begin{cases} xz = zy, \\ yx = xz, \\ yx = zy. \end{cases} \quad (476)$$

Una qualsiasi delle 3 relazioni (476) può essere eliminata, in quanto combinazione lineare delle altre 2. Questo è un fatto generale. Nella presentazione (468), infatti, è sempre possibile eliminare una delle

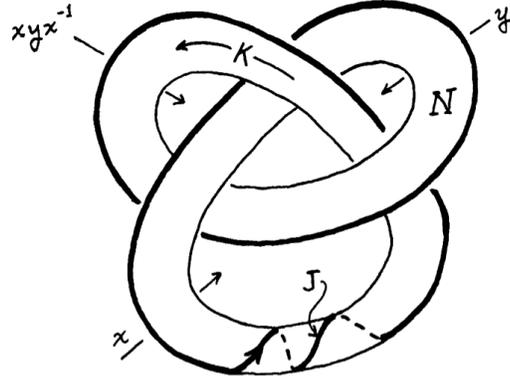


Figura 39: Trifoglio con coefficiente di chirurgia  $r=1$ . Da [11].

relazioni, in quanto  $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$  sono complessivamente ridondanti. Dalle relazioni (476) possiamo quindi omettere l'ultima, e ricavare dalla seconda  $z = x^{-1}yx$ . Sostituendo poi, il generatore  $z$  nella prima delle (476), otteniamo il gruppo del trifoglio:

$$\pi_1(S^3 - T) = \{x, y \mid xyx = yxy\}. \quad (477)$$

La presentazione (477), a differenza del caso precedente, rappresenta un gruppo non abeliano, per cui non coincide con il gruppo di omologia. È conveniente riscrivere la presentazione (477) in una forma leggermente diversa. Ponendo  $g = xy$  si trova facilmente:

$$\pi_1(S^3 - T) = \{x, g \mid (gx)^2 = g^3\}. \quad (478)$$

Promuoviamo il trifoglio a link di chirurgia, con coefficiente  $r = 1$ . La classe  $Y = 1$  può essere scritta osservando direttamente la figura (39). Quello che si trova è  $yx(xy x^{-1})x^{-2} = 1 \Rightarrow yx^2y = x^3$ . Utilizzando la variabile  $g = xy$ , possiamo riscrivere la relazione aggiuntiva come  $x^{-1}g x g = x^3$ , da cui otteniamo  $(gx)^2 = x^5$ . Il gruppo fondamentale della varietà  $\mathcal{M}$  descritta dal trifoglio con  $r = 1$  è quindi:

$$\pi_1(\mathcal{M}_{t_1}) = \{x, g \mid (gx)^2 = g^3 = x^5\}. \quad (479)$$

Questa varietà, comunemente denotata con  $\mathcal{P}$ , prende il nome di varietà di Poincaré. Il gruppo  $\pi_1(\mathcal{P})$  è isomorfo [11] al gruppo icoesaedrico binario, e diventa banale sotto abelianizzazione; si ha infatti  $H_1(\mathcal{P}) = 0$ . Quella di Poincaré è una sfera di omologia, ma non di omotopia, per questo motivo  $\mathcal{P} \neq S^3$ . In maniera del tutto simile possiamo considerare il trifoglio con coefficiente di chirurgia intero  $r = a$ . È facile vedere che la relazione  $Y = 1$  può essere scritta come  $yx^2yx^{-1}x^{(a-3)} = 1$ , da cui si ricava  $(gx)^2 = x^{(6-a)}$ . Il caso  $a = 6$  è particolare, abbiamo infatti:

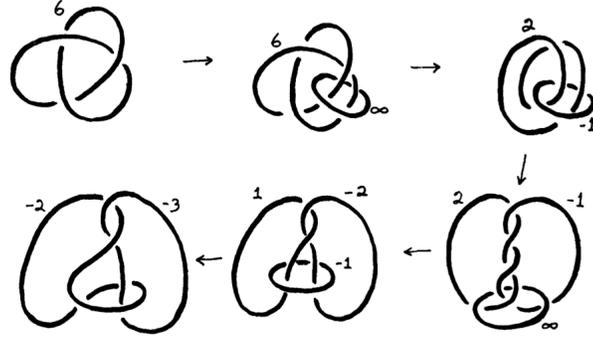


Figura 40: Mosse di Rolfsen su trifoglio. Da [11].

$$\pi_1(\mathcal{M}_{t_6}) = \{x, g \mid (gx)^2 = g^3 = 1\} = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_6. \quad (480)$$

Abelianizzando la presentazione (480) otteniamo  $g = x^2$ , da cui:

$$H_1(\mathcal{M}_{t_6}) = \{x \mid x^6 = 1\} = \mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3. \quad (481)$$

Lo spazio  $\mathcal{M}_{t_6}$ , ha gruppo di omologia  $H_1(\mathcal{M}_{t_6}) = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$ , ma non è una varietà diversa da quelle viste sino ad adesso. In effetti  $\mathcal{M}_{t_6} = L_{2,1} \# L_{3,1}$ , ossia la somma connessa di due spazi lenticolari. Per dimostrare questa affermazione, non possiamo basarci unicamente sul gruppo di omologia, ma è necessario mostrare che una opportuna sequenza di mosse di Rolfsen è in grado di sciogliere il nodo. La sequenza di mosse è mostrata in figura (40), ed il risultato finale sono due unktot disgiunti con coefficienti di chirurgia  $r = -2$ ,  $r = -3$ , che corrispondono a  $L_{2,1} \# L_{3,1}$ .

Consideriamo una 3-varietà priva di torsione differente da quelle visto sino ad ora  $(S^3, S^2 \times S^1, \mathcal{P})$ . Il link di partenza è quello di Borromeo, visibile in figura (41). Le sei relazioni si determinano, come al solito, utilizzando il metodo di Wirtinger. Un'occhiata ai cross permette di ricavare subito:

$$\begin{cases} d^{-1}bab^{-1} = 1, \\ fdc^{-1}d^{-1} = 1, \\ efb^{-1}f^{-1} = 1, \\ fac^{-1}a^{-1} = 1, \\ ecb^{-1}c^{-1} = 1, \\ dea^{-1}e^{-1} = 1, \end{cases} \quad (482)$$

dove i generatori sono quelli riportati in figura, mentre una relazione (ad esempio l'ultima) può essere omessa. Dopo aver ricavato  $d = bab^{-1}$ ,  $f = aca^{-1}$ ,  $e = cbc^{-1}$  e sostituito troviamo:

$$\begin{cases} aca^{-1}bab^{-1}c^{-1}ba^{-1}b^{-1} = 1, \\ cbc^{-1}aca^{-1}b^{-1}ac^{-1}a^{-1} = 1. \end{cases} \quad (483)$$

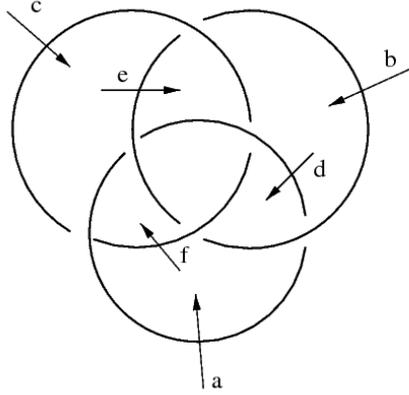


Figura 41: Link di Borromeo.

Le relazioni (483), possono essere scritte in modo compatto introducendo il commutatore. Se  $g, h$  sono due generatori, il commutatore è definito come  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ . Alla fine:

$$\pi_1(S^3 - B) = \{a, b, c \mid [c^{-1}, [b^{-1}, a]] = [b, [c, a^{-1}]]\}. \quad (484)$$

Se i coefficienti di chirurgia delle tre componenti del link di Borromeo sono tutti nulli  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ , le relazioni aggiuntive sono semplicemente  $cf^{-1} = 1$ ,  $ad^{-1} = 1$ ,  $be^{-1} = 1$ . Questo implica  $[a, b] = 1$ ,  $[c, a] = 1$ ,  $[b, c] = 1$ , ossia tutti i generatori commutano tra loro. La varietà  $\mathcal{M}_b$  ha gruppo fondamentale abeliano, dato da tre generatori liberi:

$$\pi_1(\mathcal{M}_b) = \{a, b, c \mid -\} = H_1(\mathcal{M}_b) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}. \quad (485)$$

Si può dimostrare [11] che  $\mathcal{M}_b = S^1 \times S^1 \times S^1$ .

Molto spesso, saremo interessati soltanto al gruppo di omologia  $H_1(\mathcal{M})$ . In questo caso possiamo anche fare a meno di calcolare il gruppo del nodo. Osservando le presentazioni (466) e (467), è facile convincerci che una volta abelianizzati i generatori, ciascuna componente di  $\mathcal{L}$  contribuirà a  $H_1(S^3 - \mathcal{L})$  con un singolo generatore, per cui possiamo utilizzare la presentazione

$$H_1(\mathcal{M}) = \{x_1, \dots, x_n \mid Y_i = 1\}. \quad (486)$$

Ciascun elemento  $x_i$ , come mostrato in figura (42), rappresenta un piccolo cerchio generatore di  $H_1(S^3 - \mathcal{L}_i)$ , mentre le relazioni  $Y_i = 1$  sono le classi di omologia  $Y_i = [h_i(\mu_i)]$  scritte rispetto ai generatori di  $H_1(S^3 - \mathcal{L}_i)$ . Si noti che è possibile utilizzare anche l'usuale somma come operazione binaria del gruppo. In questo caso, l'elemento neutro è dato da zero, per cui le relazioni  $Y_i = 1$  diventano  $Y_i = 0$ .

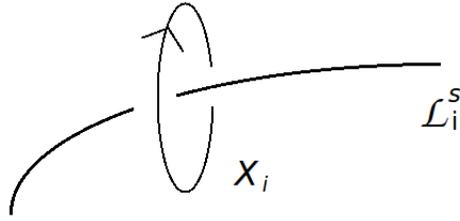


Figura 42: Generatore di  $H_1(S^3 - \mathcal{L}_i)$ .

Consideriamo una varietà  $\mathcal{M}$  con gruppo di omologia liberamente generato e con  $n$  generatori. Immaginiamo di specificare  $\mathcal{M}$  tramite un link di chirurgia con  $m > n$  componenti. Osservando l'espressione (486), e tenendo conto che  $H_1(\mathcal{M})$  è liberamente generato, vediamo che soltanto  $n$  opportune combinazioni dei generatori di  $H_1(S^3 - \mathcal{L}_i)$  diverranno generatori di  $H_1(\mathcal{M})$ . Questo significa che  $(m - n)$  differenti combinazioni di  $Y_i = 1$  sono ridondanti, e possono essere rimosse. Dal punto di vista chirurgico, significa eliminare  $(m - n)$  componenti di  $\mathcal{L}$  tramite mosse di Rolfsen. Alla fine, possiamo sempre giungere ad una presentazione chirurgica in cui il link di chirurgia ha proprio  $n$  componenti. A questo punto, utilizzando ancora il fatto che  $H_1(\mathcal{M})$  è liberamente generato, è facile vedere che ciascuna relazione  $Y_i = 1$  è separatamente banale. Questo implica che tutti i coefficienti di chirurgia siano nulli, e il numero di allacciamento tra le varie componenti di  $\mathcal{L}$  è nullo. Tenendo conto che un coefficiente di chirurgia nullo specifica un framing banale, possiamo scrivere la matrice di allacciamento di  $\mathcal{L}$  come:

$$\mathbb{L}(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (487)$$

Naturalmente, una matrice di allacciamento nulla non implica un link banale. È sufficiente osservare il link di Borromeo per convincersene.

Determiniamo infine qualche presentazione di chirurgia per cui  $H_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q$ , con  $p, q$  tali che  $q/p$ . Consideriamo il link mostrato in figura (43), dove sono mostrati i generatori del gruppo di omologia. Se i coefficienti di chirurgia sono  $r_a = x, r_c = y$ , per il gruppo di omologia si ha:

$$H_1(\mathcal{M}_{x,y}) = \{a, c \mid a^x c^2 = 1, c^y a^2 = 1\} \quad (488)$$

Per diverse combinazioni di  $x, y$  si ottengono risultati differenti. Proviamone alcune. Una combinazione interessante si ha per i valori  $x = 2$ , e  $y = 2n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), che sostituiti nella presentazione (488) danno  $(ac)^2 = 1, c^{2(n-1)} = 1$ . Si ha quindi:

$$H_1(\mathcal{M}_{2,2n}) = \{a, c \mid (ac)^2 = 1, c^{2(n-1)} = 1\} \quad (489)$$

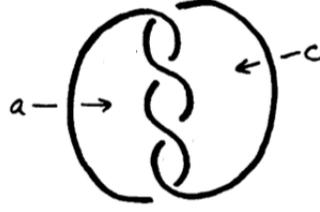


Figura 43: Link  $g=2$ . Da [11].

Se  $n = 1$  otteniamo un singolo generatore, con  $H_1(\mathcal{M}_{2,2}) = \mathbb{Z}_2$ . Per gli altri casi il gruppo di omologia è di quelli cercati, con  $H_1(\mathcal{M}_{2,2n}) = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{2(n-1)}$ . Sempre per  $x = 2$ , affrontiamo il caso  $y = (2n + 1)$ . La relazione  $a^2 = c^{-2}$  è ancora valida, per cui sostituendo in  $c^y a^2 = 1$  otteniamo subito  $c^{2n-1} = 1$ . Alla fine otteniamo:

$$H_1(\mathcal{M}_{2,2n+1}) = \{a, c \mid (ac)^2 = 1, c^{(2n-1)} = 1\}. \quad (490)$$

Tolto il caso  $n = 1$ , il gruppo di omologia è dato da  $H_1(\mathcal{M}_{2,2n+1}) = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{(2n-1)}$ , e non risulta essere ben definito, in quanto  $(2n - 1)/2 \notin \mathbb{Z}$ . Per verificarlo direttamente possiamo utilizzare l'identità  $a^{-2} = c^2 \Rightarrow c^{(2n+1)} = a^{-2n}c$ . Sostituendo in  $c^{(2n+1)}a^2 = 1$  otteniamo  $ca^{2(1-n)} = 1$ , da cui  $c^2 = a^{4(n-1)}$ . Alla fine, per  $n \neq 1$ :

$$H_1(\mathcal{M}_{2,2n+1}) = \{a \mid a^{(4n-2)} = 1\} = \mathbb{Z}_{(4n-2)} \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_{(2n-1)}. \quad (491)$$

Il link rappresentato in figura (43) è un caso particolare di una classe più ampia. Consideriamo un link  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ , in cui le componenti siano degli unknot "twistati" tra loro  $g > 1$  volte (per  $g = 1$  si avrebbe l'Hopf link,  $g = 2$  è quello rappresentato in figura (43)... ecc). Sia inoltre  $r_1 = g$ , dove  $r_1$  è il coefficiente di chirurgia di  $\mathcal{L}_1$ , mentre  $r_2 = y$  ( $y \in \mathbb{Z}$ ). Posti  $a, c$  i generatori del gruppo di omologia del link, per  $H_1(\mathcal{M})$  si ha:

$$H_1(\mathcal{M}_{g,y}) = \{a, c \mid (ac)^g = 1, c^y a^g = 1\}. \quad (492)$$

Il caso interessante è quello in cui  $y = ng$ , dove  $n \in \mathbb{Z} - \{1\}$ . Dall'espressione (492) si ottiene subito  $c^{ng} = a^{-ng}$  da cui  $a^{g(n-1)} = 1$ . In conclusione, questa classe di nodi fornisce una presentazione chirurgica di particolari varietà, con gruppo di omologia:

$$H_1(\mathcal{M}_{g,ng}) = \{a, c \mid (ac)^g = 1, a^{g(n-1)} = 1\} = \mathbb{Z}_g \otimes \mathbb{Z}_{g(n-1)}. \quad (493)$$

## 8.2 Forma Quadratica di Torsione

Sia  $\mathcal{M}$  una 3-varietà chiusa ed orientata di pura torsione ( $H_1(\mathcal{M}) = T(\mathcal{M})$ ). Come sappiamo, è sempre possibile rappresentare  $\mathcal{M}$  tramite una presentazione di chirurgia  $(\mathcal{L}_s, r) = \{\mathcal{L}_1, r_1, \dots, \mathcal{L}_m, r_m\}$  con coefficienti di chirurgia interi.

Se vogliamo determinare il gruppo di omologia  $H_1(\mathcal{M})$  a partire dalle istruzioni  $(\mathcal{L}_s, r)$  è sufficiente considerare:

$$H_1(\mathcal{M}) = \{x_1, \dots, x_m \mid Y_1 = 0, \dots, Y_m = 0\}, \quad (494)$$

dove  $x_i$  rappresenta un percorso chiuso (un cerchio) generatore di  $H_1(S^3 - \mathcal{L}_i)$ , mentre  $Y_i = h_i(\mu_i)$  sono gli omeomorfismi che specificano la chirurgia. Per ipotesi, i coefficienti di chirurgia sono degli interi, per cui ciascun  $Y_i$  definisce un framing di  $\mathcal{L}_i$ . Per questo motivo è possibile esprimere le condizioni  $Y_i = 0$  in termini di matrice di allacciamento  $\mathbb{L}_{ij} = \chi(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_{jf})$ , dove il numero di avvolgimento è definito in  $S^3$ . Più precisamente, in termini di generatori  $x_j$  vale il seguente sviluppo:

$$Y_i = [\mathcal{L}_{if}] = \sum_{j=1}^m \mathbb{L}_{ij} x_j \quad i = 1, \dots, m. \quad (495)$$

I generatori  $\{v_i\}$  di  $H_1(\mathcal{M})$  sono dati da una opportuna combinazione lineare dei generatori  $\{x_i\}$ :

$$v_i = \sum_{k=1}^m B_{ik} x_k \quad i = 1, \dots, w, \quad (496)$$

dove  $B_{ik}$  sono interi, mentre  $w \leq m$ . Infine, un generico elemento di  $\gamma \in H_1(\mathcal{M})$  può essere scritto come

$$\gamma = \sum_{i=1}^w h_i v_i, \quad (497)$$

dove  $h_i$  è un intero. Dato che la varietà  $\mathcal{M}$  è di pura torsione, ciascun intero  $h_i$  può assumere i valori  $h_i = 0, \dots, p_i - 1$ , dove  $p_i$  sono i numeri di torsione (convenzionalmente  $p_{i+1}$  divide  $p_i$ ). Combinando la relazione (497) con la (496) otteniamo che ciascun elemento  $\gamma \in H_1(\mathcal{M})$  è dato da

$$\gamma = \sum_{i=1}^w \sum_{k=1}^m h_i B_{ik} x_k. \quad (498)$$

L'elemento  $\gamma \in H_1(\mathcal{M})$  può essere associato ad un nodo con framing, che indicheremo con lo stesso simbolo:  $\gamma \subset S^3 - \mathcal{L}_s$ . Per stabilire una corrispondenza tra gli elementi del gruppo e i nodi, occorre specificare una legge di composizione. La scelta più naturale ricade sulla somma “#” definita nel paragrafo (3.8). Se  $\gamma_1 \neq \gamma_2 \in H_1(\mathcal{M})$ , le operazioni  $\gamma_1 \pm \gamma_2 \in H_1(\mathcal{M})$  corrispondono a

$$\gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \# \gamma_2, \quad (499)$$

$$\gamma_1 - \gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \# (-\gamma_2), \quad (500)$$

dove  $(-\gamma_2)$  ha orientazione inversa rispetto alla curva  $\gamma_2$ . Allo stesso modo, se la somma nel gruppo è fatta tra elementi identici si ha

$$\gamma + \gamma \rightarrow \gamma \# \gamma, \quad (501)$$

dove  $\gamma \# \gamma$  è fatto su copie parallele. Le somme “#” sono definite per nodi con lo stesso colore. Poichè il colore non compare affatto nella presentazione di  $H_1(\mathcal{M})$ , possiamo scegliere colore “1” per ogni nodo  $\gamma$ ; in questo modo le operazioni (499), (500) e (501) sono tutte ben definite. I nodi sono definiti con framing, per cui è necessario specificare il numero di autoallacciamento dei nodi sommati. Come si è visto nel paragrafo (3.8), il framing  $(\gamma_1 \# \gamma_2)_f$  è dato da  $\gamma_{1f} \# \gamma_{2f}$  ed il numero di autoallacciamento (in  $S^3$ ) soddisfa

$$\chi\left((\gamma_1 \# \gamma_2)_f, \gamma_1 \# \gamma_2\right) = \chi(\gamma_1, \gamma_{1f}) + \chi(\gamma_2, \gamma_{2f}) + 2\chi(\gamma_1, \gamma_2). \quad (502)$$

Se  $\gamma_2 \rightarrow (-\gamma_2)$  l’ultimo termine dell’espressione (502) cambia segno. Il framing dei nodi non può essere scelto arbitrariamente; vogliamo infatti che l’elemento  $0 = \gamma - \gamma \in H_1(\mathcal{M})$  trovi la sua corrispondenza in  $\gamma \# (-\gamma)$ . I nodi  $0 \equiv \gamma \# (-\gamma)$  sono omologicamente banali per costruzione, e hanno framing  $\chi(0, 0_f) = 2\chi(\gamma, \gamma_f)$ . D’altra parte, se 0 è un nodo che rappresenta lo zero, necessariamente deve avere framing banale. Infatti, se sommiamo (o sottriamo) 0 a qualsiasi altro nodo, il framing del nodo di partenza non può variare. Dalla relazione  $\chi(0, 0_f) = 2\chi(\gamma, \gamma_f) = 0$  se ne deduce che tutti i nodi  $\gamma$  con cui descriviamo gli elementi  $\gamma \in H_1(\mathcal{M})$  hanno framing banale (autoallacciamento nullo). In particolare, la relazione (498) può essere reinterpretata come una somma “#” sui nodi generatori  $x_i$ , che soddisfano:

$$\chi(x_i, x_{if}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (503)$$

Nel calcolo della funzione di partizione  $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ , o più in generale dei valori di aspettazione  $\langle W(\mathcal{L}) \rangle_{\mathcal{M}}$ , siamo interessati ai numeri di allacciamento di nodi contraibili. Tuttavia, i numeri di allacciamento vanno specificati in  $\mathcal{M}$ , e non in  $S^3$ . Vediamo quindi come sono relazionati.

Consideriamo una componente del link di chirurgia  $\mathcal{L}_i$  con coefficiente intero  $r_i$ . Se  $N_i$  è un intorno tubolare di  $\mathcal{L}_i$ , due meridiani qualsiasi  $\mu_i, \mu_{if} \in \partial N_i$  rappresentano l’uno il framing canonico dell’altro. L’immagine del meridiano  $h_i(\mu_{if})$  definisce ancora un framing del nodo  $h_i(\mu_i)$ , ma non canonico. Vale infatti:

$$\chi(h_i(\mu_i), h_i(\mu_{if}))_{S^3} = \chi(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_{if})_{S^3} = r_i. \quad (504)$$

Il numero di allacciamento (504) può essere valutato in  $\mathcal{M}$  notando che i nodi  $h_i(\mu_i)$ ,  $h_i(\mu_{if})$  sono legati a  $\mu_i$ ,  $\mu_{if}$  da isotopia ambiente. D'altra parte i meridiani  $\mu_i$ ,  $\mu_{if}$  possono essere trasportati dentro  $N_i \subset \mathcal{M}$ , dove risultano essere due unknot disgiunti definiti in una stessa 3-palla. Si ha quindi:

$$\chi(h_i(\mu_i), h_i(\mu_{if}))_{\mathcal{M}} = \chi(\mu_i, \mu_{if})_{\mathcal{M}} = 0. \quad (505)$$

Sappiamo che i nodi  $\gamma$  rappresentanti del gruppo  $H_1(\mathcal{M})$  hanno tutti framing banale in  $S^3$ . Questo significa che se  $\gamma \subset S^3 - \mathcal{L}$  è legato da isotopia ambiente a  $h_i(\mu_{if})$  vale [10]:

$$\chi(\gamma, \gamma_f)_{S^3} = 0 \rightarrow \chi(\gamma, \gamma_f)_{\mathcal{M}} = -r_i \quad \text{se } \gamma \sim h_i(\mu_i). \quad (506)$$

In generale, siamo interessati a calcolare i numeri di autoallacciamento di nodi  $\gamma \subset S^3 - \mathcal{L}$  contraibili con framing banale in  $S^3$ . Il fatto che  $\gamma$  sia banale garantisce che sia legato da isotopia ambiente ad un certo nodo  $\mathcal{L}^\#$  ottenuto sommando le varie componenti  $\mathcal{L}_{if}$  del link di chirurgia  $\mathcal{L}$ . Alla fine, per ogni nodo  $\gamma$  rappresentante di  $H_1(\mathcal{M})$  si ha [10]

$$\chi(\gamma, \gamma_f)_{\mathcal{M}} = -\chi(\mathcal{L}^\#, \mathcal{L}_f^\#)_{S^3} \quad \gamma \text{ contraibili}. \quad (507)$$

I nodi a cui siamo interessati sono quelli banali definiti da  $\Gamma_i = p_i v_i$ . Dalla sviluppo (496), possiamo riscrivere questi nodi come:

$$\Gamma_i = \sum_{k=1}^m p_i B_{ik} x_k \quad i = 1, \dots, w. \quad (508)$$

Dalla relazione (495), invertendola, troviamo

$$p_i x_k = \sum_{j=1}^m p_i \mathbb{L}_{kj}^{-1} \mathcal{L}_{jf}, \quad (509)$$

da cui:

$$\Gamma_i \sim \mathcal{L}_{if}^\# = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m B_{ik} p_i \mathbb{L}_{kj}^{-1} \mathcal{L}_{jf} \quad (510)$$

La forma (510) è precisamente quella cercata; è infatti una somma di componenti del framing del link di chirurgia. Il numero di allacciamento  $\chi(\mathcal{L}_i^\#, \mathcal{L}_{lf}^\#)_{S^3}$  può essere ricavato direttamente dall'espressione (510) e vale:

$$\chi(\mathcal{L}_i^\#, \mathcal{L}_{lf}^\#)_{S^3} = p_i p_l \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k'=1}^m \sum_{j'=1}^m B_{ik} B_{lk'} \mathbb{L}_{kj}^{-1} \mathbb{L}_{k'j'}^{-1} \mathbb{L}_{jj'} \quad (511)$$

Sommando su  $j, j'$  troviamo infine:

$$\chi(\mathcal{L}_i^\#, \mathcal{L}_{lf}^\#)_{S^3} = p_i p_l \sum_{k=1}^m \sum_{k'=1}^m B_{ik} B_{lk'} \mathbb{L}_{k'k}^{-1} \equiv p_i p_l Q_{il}, \quad (512)$$

dove  $Q_{il}$  prede il nome di forma quadratica di torsione. Il numero di allacciamento in  $\mathcal{M}$  si trova immediatamente dalla proprietà (507), e vale [10]

$$\chi(\Gamma_i, \Gamma_{lf})_{\mathcal{M}} = -p_i p_l Q_{il}. \quad (513)$$

In generale, la matrice  $Q_{il}$  non è diagonale, per cui il numero di allacciamento tra componenti diverse non è nulla.

Un ultimo aspetto da considerare riguarda la possibilità di scegliere un framing arbitrario per i nodi  $\gamma \subset S^3 - \mathcal{L}_s$ . La richiesta di rappresentare la struttura di gruppo di  $H_1(\mathcal{M})$  mediante le somme “#” di nodi con framing è comoda ma non obbligatoria. In effetti, è possibile dimostrare che per una scelta arbitraria di framing si ottiene:

$$\chi(\Gamma_i, \Gamma_{jf})_{\mathcal{M}} \rightarrow \chi(\Gamma_i, \Gamma_{jf})_{\mathcal{M}} - n_{ij} p_i p_j, \quad (514)$$

dove  $n_{ij} \in \mathbb{Z}$ . Dato che la funzione di partizione, ed i valori di aspettazione dipendono da  $\exp(\sim i2\pi k \chi(\Gamma_i, \Gamma_{jf}) / p_i p_j)$ , la sostituzione (514) non li modifica. In conclusione, la matrice a coefficienti razionali  $Q_{ij}$  è definita modulo intero.

Oltre al numero di autoallacciamento dei nodi  $\Gamma_i$ , siamo interessati a calcolare l'autoallacciamento dei nodi denominati  $\tilde{0}$ . Questi nodi sono simili al nodo “zero”  $0 = \gamma \# (-\gamma)$ ; infatti sono omologicamente banali in  $\mathcal{M}$ , hanno framing banale in  $S^3$  e colore  $q = 1$ . A differenza del nodo  $0 = \gamma \# (-\gamma)$ , un nodo  $\tilde{0}$  può anche allacciarsi al link di chirurgia  $\mathcal{L}$ , per cui il valore di autoallacciamento in  $\mathcal{M}$  potrebbe non essere nullo:  $\chi_{\mathcal{M}}(\tilde{0}, \tilde{0}_f) \neq 0$ .

Sia  $\mathbb{L}_k^{tot} = \chi(\mathcal{L}_k, \tilde{0})$  la matrice di allacciamento tra il link di chirurgia ed il nodo  $\tilde{0}$ . Nella base  $\{x_k\}$  dei generatori di  $H_1(S^3 - \mathcal{L}_k)$  si trova subito:

$$\tilde{0} = \sum_{i=1}^m \mathbb{L}_k^{tot} x_k. \quad (515)$$

Dalla relazione (495), invertendola, troviamo poi:

$$\tilde{0} \sim \mathcal{L}_f^\# = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \mathbb{I}_k^{tot} \mathbb{I}_{kj}^{-1} \mathcal{L}_{jf}. \quad (516)$$

Il numero di autoallacciamento  $\chi_{S^3}(\mathcal{L}^\#, \mathcal{L}_f^\#)$  può essere ricavato direttamente dall'espressione (516) e vale

$$\chi_{S^3}(\mathcal{L}^\#, \mathcal{L}_f^\#) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k'=1}^m \sum_{j'=1}^m \mathbb{I}_k^{tot} \mathbb{I}_{k'}^{tot} \mathbb{I}_{kj}^{-1} \mathbb{I}_{k'j'}^{-1} \mathbb{I}_{jj'}. \quad (517)$$

Sommando su  $j, j'$ , ed utilizzando la proprietà (507) troviamo infine:

$$\chi_{\mathcal{M}}(\tilde{0}, \tilde{0}_f) = - \sum_{k=1}^m \sum_{k'=1}^m \mathbb{I}_k^{tot} \mathbb{I}_{k'}^{tot} \mathbb{I}_{k'k}^{-1}. \quad (518)$$

## Ringraziamenti

Desidero ringraziare innanzitutto il mio relatore, il Prof. Guadagnini. Lo ringrazio soprattutto per la grande passione trasmessa, per le lunghe discussioni e per la costante disponibilità; ho imparato veramente molto durante questo periodo, e non solo sulla teoria di Chern-Simons.

Chi scrive, e chi lo conosce lo sa bene, non è solito pronunciare spesso la parola “grazie”. Stavolta, però, uno strappo alla regola è d’obbligo. La verità è che non sarei mai potuto giungere a questo traguardo senza l’aiuto di persone veramente speciali. Parlo di loro, dei miei genitori, ai quali questa tesi è dedicata. È inutile che stia qui ad elencare tutto ciò che mi hanno insegnato e tutto ciò che ho imparato da loro; grazie di cuore mamma e babbo.

Un pensiero speciale va poi a mia *mamma*; no, sto scherzando, è solo una scusa per farla commuovere ancora di più.

Un pensiero speciale, stavolta davvero, va a mia sorella Martina, alias *Martolina*, anche se non ha potuto partecipare attivamente alla stesura di questo lavoro a causa di una rara e non ben specificata “*alergia a las ecuaciones*”.

Ringrazio anche i miei nonni, in particolare “*Mangino*”, da sempre mio massimo sostenitore. Anche se è difficile convincerlo che non studio “*fisica molicolare*”, è la persona che più di ogni altra ha creduto in me.

Come non citare anche i miei amici, che mi hanno aiutato, magari a loro insaputa, con più di qualche bella serata passata insieme.

Menzione d’onore va infine alla mia gatta Miaolona, non tanto per la compagnia, quanto per l’aver risparmiato dalla furia distruttiva portatile e penne USB. Questa non è poca cosa considerando che ha sbranato qualsiasi essere vivente (e non) nel raggio di qualche Km da casa.

*Hic sunt leones*

Qualcuno, in tempi non sospetti, mi disse: “i ringraziamenti devono essere lunghi almeno una pagina!”. Beh, forse non aveva tutti i torti, ma cos’altro (o chi altro) dovrei aggiungere? Dato che non so proprio cosa scrivere, non mi resta che parlare un po’ di chi mi ha suggerito questa idea, ossia *Sara* (F&H). Comunque sia non devo (dévo o dèvo?!) sforzarmi troppo; dopotutto questa pagina è quasi completa!

Vediamo cosa scrivere...ehm.... magari qualcosa di romantico, al limite in inglese....ecco ci sono!

*“I am honored to b...”*

Decisamente meglio non proseguire! Il leone (affamato) potrebbe sbranarmi!

Con la speranza che nessuno colga i vari indizi, veniamo al vero motivo di queste righe apparentemente nonsense.

Il motivo è un grazie speciale a Sara. Grazie per tutto quanto, per la tua fiducia, la tua pazienza, la tua determinazione, le emozioni che mi fai provare, il tuo amore e soprattutto perché mi sopporti. Grazie anche per tutti i bellissimoi momenti trascorsi insieme, per quelli passati, quelli presenti e, soprattutto, quelli futuri. Non è facile stare con uno che si dimentica tutte le ricorrenze da (credo) 5 anni. Grazie di cuore amore mio, ti amo.

## Riferimenti bibliografici

- [1] V. I. Arnold and b. A. Kestin, Topological methods in hydrodynamics, Springer, New York, 1998.
- [2] F. Ferrari, The statistical mechanics of topological polymers: a field theorist point of view, Ann. Phys. (Leipzig) 11 (2002) 4, 255– 290.
- [3] F.H.C. Crick: Proc. Natl. Acad. Sciences, USA, 73 (1971) 2639.
- [4] E. Witten, Nucl. Phys. B311 (1988) 46.
- [5] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, Commun. Math. Phys. 121,351-399 (1989).
- [6] N. Maggiore, E. Guadagnini, S. Sorella, Supersymmetry of the Three-Dimensional Einstein-Hilbert Gravity in the Landau Gauge, Physics Letters B,vol. 247,pp 543,tot. pag 6, 1990
- [7] Guadagnini E., The link Invariants of the Chern-Simons field theory. New development in topological quantum field theory, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.
- [8] E. Guadagnini, M. Martellini and M. Mintchev, Phys. Lett . B 227 (1989) 111.
- [9] E. Guadagnini, Functional integration and abelian link invariants, "Chern-Simons Theory: 20 years after" (AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Volume 50, 2011), 65-82, ISBN-10: 08218-5353-8 (2011), edited by J.E. Anderson, H. Boden, A. Hahn and B. Himpel, arXiv:1001.4645.
- [10] E. Guadagnini and F. Thuillier, Three-manifold invariant from functional integration, arXiv: 1301.6407v1 [math-ph]
- [11] Rolfsen D., Knot and links, Mathematics Lectures Series, no. 7, Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif., 1976.
- [12] E. Guadagnini and F. Thuillier, SIGMA 4 (2008) 078, arXiv: 0801.1445.
- [13] C. Itzykson and J.B. Zuber, Quantum field theory, Dover Publications, New York, 2005.
- [14] E. Guadagnini, Field operators in topological quantum theories, J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011), 415404, 12 pages, ArXiv:1109.1384.
- [15] R. Giles, Reconstruction of gauge potentials from Wilson loops, Phys. Rev. D; (United States); Journal Volume: 24:8, 1981.
- [16] W. K. Buhler, Gauss -A biographical study, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [17] G. Calugaranu, Czechoslovak Math. J. 11 (1961) 588.
- [18] G. Calugaranu, Revue de Math. Peres et Appl. (Bucarest) 4 (1959) 5.
- [19] R. Bott and L. W. Tu, Differential forms in algebraic topology, graduate text in mathematics, Vol. 82, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

- [20] W. B. R. Lickorish, A representation of orientable combinatorial 3-manifolds, *Ann. Math.* 76 (1962) 531-540.
- [21] H. R. Morton and P. M. Strickland, Satellites and Surgery Invariants, in *Knot 90*, edit. A. Kawauchi, Walter de Gruyter, Berlin 1992.
- [22] N. Y. Reshetikhin and V. G. Turaev, Ribbon Graphs and their invariants derived from quantum groups, *Commun. Math. Phys.* 127 (1990) 1-26.
- [23] H. Murakami, T. Ohtsuki and M. Okada, Osaka, *J. Math.* 29 (1992) 545.
- [24] Norman Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, 1951.
- [25] R. Way, Introduction to connections on principal fibre bundles, Report, University of Surrey.
- [26] C. Nash and S. Sen, *Topology and geometry for physicist*, Academic Press, INC, London 1987.
- [27] M. Bauer, G. Girardi, R. Stora and F. Thuillier, A class of topological action, *JHEP* 050 8 (2005), 027.
- [28] P. Deligne, Théorie de Hodge II, *IHES Pub. Math.* (1971), no. 40, 5–57.
- [29] A. Beilinson, Higher regulators and values of L-functions, *J. Soviet Math.* 30 (1985), 2036—2070
- [30] A. Beilinson, Notes on absolute Hodge cohomology, Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II, *Contemp. Math.*, 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [31] D. Elworthy and A. Truman, Feynman maps, Cameron-Martin formulae and anharmonic oscillators, *Ann. Inst. Henri Poincaré Phys. Théor.* 41 (1984) 115.
- [32] F. Deloup and V. Turaev, *Journal of Pure and Applied Algebra* 208 (2007) 153.
- [33] E. Guadagnini and L. Pilo, Three-manifold invariants and their relation with the fundamental group, *Communications in Mathematical Physics*, vol. 192, pp 47, tot.pag 0, 1998.
- [34] Immagine ottenibile su: [http://spie.org/Images/Graphics/Newsroom/Imported-2012/004497/004497\\_10\\_fig2.jpg](http://spie.org/Images/Graphics/Newsroom/Imported-2012/004497/004497_10_fig2.jpg)
- [35] Immagine ottenibile su: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:AharonovBohmEffect.svg>
- [36] Immagine ottinibile su: <http://content.answcdn.com/main/content/img/McGrawHill/Encyclopedia/images/CE255700FG0010.gif>