Università di Pisa

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

Leggi zero-uno per grafi random e tecniche di amalgamazione

Candidato:
Francesco Parente

Relatore:
Prof. Alessandro Berarducci

Anno Accademico 2012–2013

Indice

Introduzione

Lo studio dei grafi random, iniziato con il fondamentale articolo di Erdős e Rényi [4], si è dimostrato un terreno di ricerca molto fertile. Il grafo random $G(n,p)$ è un grafo su n vertici ottenuto congiungendo ogni coppia di vertici indipendentemente con probabilità p. Dato un enunciato del primo ordine nel linguaggio dei grafi σ, denotiamo con $\Pr[G(n,p) \models \sigma]$ la probabilità che $G(n,p)$ soddisfi σ. Diremo allora che una successione $p\colon \mathbb{N} \to [0,1]$ soddisfa la *legge zero-uno* se per ogni enunciato σ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n,p(n)) \models \sigma]$$

esiste e vale 0 oppure 1. I risultati più significativi in questo ambito sono i due teoremi seguenti:

Teorema (Fagin [5]; Glebskii et al. [8]). *Per ogni $p \in \,]0,1[$, la successione costante $p(n) = p$ soddisfa la legge zero-uno.*

Teorema (Shelah e Spencer [11]). *Per ogni $\alpha \in \,]0,1[$ irrazionale, la successione $p(n) = n^{-\alpha}$ soddisfa la legge zero-uno.*

D'altra parte, le *tecniche di amalgamazione* hanno creato un gran numero di esempi e controesempi in teoria dei modelli. L'idea è di produrre, a partire da opportune classi di strutture finite, una "struttura limite" numerabile. La costruzione originale, dovuta a Fraïssé [6], è stata in seguito modificata e generalizzata da Hrushovski [10], ma in entrambi i casi il procedimento consiste nell'amalgamare tra loro le strutture, utilizzando questa proprietà:

Definizione. *Sia* $\mathbf{K}$ *una classe di strutture.* $\mathbf{K}$ *soddisfa la* amalgamation property *se, dati $A, B, C \in \mathbf{K}$ e due immersioni $e\colon A \to B$, $f\colon A \to C$, esistono $D \in \mathbf{K}$ e due immersioni $g\colon B \to D$, $h\colon C \to D$ tali che $ge = hf$:*

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, dashed, "g"] & \\
A \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "f"'] & & D . \\
& C \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

La novità di Hrushovski [10], rispetto a Fraïssé [6], consiste nell'introdurre una dimensione δ e amalgamare le strutture rispetto alle "immersioni forti", definite usando δ.

Nel 1997, Baldwin e Shelah uniscono queste due linee di ricerca a prima vista incorrelate; vediamo brevemente come. Fissato un numero irrazionale $\alpha \in \,]0,1[$, chiamiamo $\mathbf{K}_\alpha$ la classe dei grafi finiti G con questa proprietà: per ogni sottografo $A \subseteq G$ si ha

$$|\mathrm{v}(A)| - \alpha\,|\mathrm{e}(A)| \geq 0,$$

dove $\mathrm{v}(A)$ e $\mathrm{e}(A)$ sono rispettivamente l'insieme dei vertici e dei lati di A. Si può applicare la costruzione di Hrushovski alla classe $\mathbf{K}_\alpha$, ottenendo un grafo numerabile detto modello $\mathbf{K}_\alpha$-generico. Vale allora il seguente risultato, che dimostreremo:

Teorema (Baldwin e Shelah [1]). *La teoria del modello $\mathbf{K}_\alpha$-generico è uguale alla* teoria quasi certa *relativa alla successione $n^{-\alpha}$. In altre parole, un enunciato σ è vero nel modello $\mathbf{K}_\alpha$-generico se e solo se*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n, n^{-\alpha}) \models \sigma] = 1.$$

Motivati da questo fatto sorprendente, presenteremo le tecniche di amalgamazione di Fraïssé e Hrushovski, dimostreremo le due leggi zero-uno enunciate sopra e soprattutto metteremo in evidenza l'interazione tra questi due mondi.

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Grafi

In questa tesi il linguaggio sarà quello dei grafi, ovvero conterrà solo un simbolo di relazione binaria E. Dunque, tutte le formule che considereremo saranno $\{E\}$-formule (del prim'ordine). Un *grafo* non è altro che una $\{E\}$-struttura, ovvero una coppia $G = (\mathrm{v}(G), E^G)$, in cui $\mathrm{v}(G)$ è un insieme e $E^G \subseteq \mathrm{v}(G) \times \mathrm{v}(G)$. Nel seguito assumeremo sempre che E sia irriflessiva e simmetrica, ovvero che questi due assiomi siano soddisfatti:

$$\forall x(\neg E(x,x))$$

$$\forall x \forall y(E(x,y) \to E(y,x)).$$

Gli elementi di $\mathrm{v}(G)$ si dicono *vertici* di G. Se non ci sarà pericolo di ambiguità, confonderemo un grafo con l'insieme dei suoi vertici. Definiamo $\mathrm{e}(G) = \left\{ \{x,y\} \subseteq \mathrm{v}(G) \;\middle|\; E^G(x,y) \right\}$; gli elementi di $\mathrm{e}(G)$ si dicono *lati* di G.

Le prossime due definizioni sono standard, ma le riportiamo lo stesso vista la loro importanza.

Definizione 1.1.1. Un'*immersione* di G in H è una funzione iniettiva $f\colon \mathrm{v}(G) \to \mathrm{v}(H)$ che verifica la seguente proprietà: per ogni $x, y \in \mathrm{v}(G)$, si ha

$$E^G(x,y) \iff E^H(f(x), f(y)).$$

Un *isomorfismo* è un'immersione surgettiva. G e H sono isomorfi, in simboli $G \cong H$, se esiste un isomorfismo tra essi.

Definizione 1.1.2. Siano G e H due grafi. G è un *sottografo* di H se $\mathrm{v}(G) \subseteq \mathrm{v}(H)$ e l'inclusione $\mathrm{v}(G) \to \mathrm{v}(H)$ è un'immersione. Talvolta scriveremo impropriamente "$G \subseteq H$" intendendo "G è un sottografo di H".

La definizione 1.1.3 ci darà un modo per fare l'"unione" di due grafi.

Definizione 1.1.3. Siano A, B e C grafi. Supponiamo che $B \cap C = A$, nel senso che $\mathrm{v}(B) \cap \mathrm{v}(C) = \mathrm{v}(A)$ e B e C inducono la stessa struttura su A. Definiamo $B \otimes_A C$ il grafo che ha $\mathrm{v}(B \otimes_A C) = \mathrm{v}(B) \cup \mathrm{v}(C)$ e $E^{B \otimes_A C} = E^B \cup E^C$.

1.2 Teorie e diagrammi

Ricordiamo che una *teoria* è un insieme di enunciati, detti *assiomi*.

Definizione 1.2.1. Una teoria T è *completa* se è coerente (cioè ha un modello) e per ogni enunciato σ si ha $T \models \sigma$ oppure $T \models \neg\sigma$.

Definizione 1.2.2. Una teoria è *deduttivamente chiusa* se non ha altre conseguenze oltre ai suoi assiomi.

Se $\mathbf{K}$ è una classe[1] di grafi, la teoria di $\mathbf{K}$ è

$$\mathrm{Th}(\mathbf{K}) = \{\, \sigma \mid \text{per ogni } G \in \mathbf{K} \text{ si ha } G \models \sigma \,\}\,.$$

Nel caso particolare in cui $\mathbf{K}$ ha un solo elemento, invece di $\mathrm{Th}(\{G\})$ scriveremo più semplicemente $\mathrm{Th}(G)$. È importante osservare che, qualunque sia G, $\mathrm{Th}(G)$ è una teoria completa.

Vediamo ora la definizione di diagramma. L'idea è questa: un grafo finito è univocamente determinato dalla congiunzione degli enunciati atomici che lo descrivono.

Definizione 1.2.3. Sia G un grafo; consideriamo il linguaggio L_G ottenuto aggiungendo al linguaggio dei grafi un simbolo di costante per ogni vertice di G. Il *diagramma* di G è l'insieme degli L_G-enunciati atomici e delle negazioni di L_G-enunciati atomici che sono veri in G.

Con un esempio sarà più chiaro di cosa stiamo parlando.

Esempio 1.2.4. Sia G il grafo con $\mathrm{v}(G) = \{0, 1, 2\}$ in cui 0 è unito a 1 e 1 è unito a 2. Allora il diagramma di G è $\{(0 = 0), (1 = 1), (2 = 2), \neg(0 = 1), \neg(0 = 2), \neg(1 = 2), E(0, 1), E(1, 2), \neg E(0, 2)\}$.

Definizione 1.2.5. Se G è finito, definiamo Δ_G la congiunzione di tutti gli enunciati del diagramma di G.

1.3 Grafi random

Immaginiamo ora di costruire un grafo con vertici $\{0, \dots, n-1\}$ in questo modo: per ciascuna delle $\binom{n}{2}$ coppie di vertici lanciamo una moneta: se esce testa allora li uniamo, se esce croce no. Abbiamo ottenuto il grafo $G(n, \frac{1}{2})$. Più in generale, possiamo pensare di unire ogni coppia di vertici (indipendentemente) con probabilità $p \in [0, 1]$, ottenendo il grafo $G(n, p)$. Ora si tratta solo di tradurre tutto ciò in un contesto più formale.

Innanzitutto, fissati come prima un numero naturale n e un numero reale $p \in [0, 1]$, sia $\Omega_n = \{\, G \mid G \text{ è un grafo e } \mathrm{v}(G) = n \,\}$. Si osserva subito che $|\Omega_n| = 2^{\binom{n}{2}}$.

Definizione 1.3.1. Ω_n può essere dotato di una misura di probabilità

$$\mathbf{P}_{n,p} \colon \mathcal{P}(\Omega_n) \to [0, 1]$$

in questo modo: per $G \in \Omega_n$ poniamo

$$\mathbf{P}_{n,p}(\{G\}) = p^{|\mathrm{e}(G)|}(1-p)^{\binom{n}{2} - |\mathrm{e}(G)|}; \tag{1.1}$$

poi, per ogni evento $A \in \mathcal{P}(\Omega_n)$

$$\mathbf{P}_{n,p}(A) = \sum_{G \in A} \mathbf{P}_{n,p}(\{G\}).$$

[1] Capiterà spesso di dover considerare *classi* di grafi. Questo si può fare tranquillamente nella teoria di Bernays-Gödel. Ogni riferimento a classi e insiemi sarà quindi da intendere nel senso di questa teoria.

È abbastanza chiaro che la (1.1) è in accordo con la situazione descritta all'inizio della sezione: abbiamo infatti $\binom{n}{2}$ ripetizioni indipendenti di un esperimento che ha probabilità p di successo.

Definizione 1.3.2. Siano $n \in \omega$, $p \in [0,1]$. Per ogni enunciato σ definiamo

$$\Pr[G(n,p) \models \sigma] = \mathbf{P}_{n,p}(\{\, G \in \Omega_n \mid G \models \sigma \,\}).$$

A questo punto, data una successione $p\colon \omega \to [0,1]$, ha senso studiare il comportamento di $\Pr[G(n,p(n)) \models \sigma]$, al variare di $n \in \omega$.

Definizione 1.3.3. Una successione $p\colon \omega \to [0,1]$ soddisfa la *legge zero-uno* se per ogni enunciato σ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n,p(n)) \models \sigma]$$

esiste e vale 0 oppure 1.

La definizione 1.3.3 sarà basilare nel seguito: nei prossimi due capitoli dimostreremo due importanti leggi zero-uno, mostrando anche la loro rilevanza nel contesto della teoria dei modelli.

Definizione 1.3.4. Sia $p\colon \omega \to [0,1]$ una successione; la *teoria quasi certa* (almost sure theory) relativa a p è

$$\left\{ \sigma \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} \Pr[G(n,p(n)) \models \sigma] = 1 \right\}.$$

Indipendentemente dalla successione scelta, risulta che:

Proposizione 1.3.5. *La teoria quasi certa è deduttivamente chiusa e coerente.*

Dimostrazione. Sia σ una conseguenza della teoria, mostriamo che si ha $\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n,p(n)) \models \neg\sigma] = 0$ da cui segue subito la tesi. Per il teorema di compattezza, σ è deducibile da un numero finito di assioni $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, dunque

$$\Pr[G(n,p(n)) \models \neg\sigma] \leq \Pr[G(n,p(n)) \models \neg\sigma_1 \vee \cdots \vee \neg\sigma_k] \leq \sum_{i=1}^{k} \Pr[G(n,p(n)) \models \neg\sigma_i]$$

e quindi

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \Pr[G(n,p(n)) \models \neg\sigma] \leq \sum_{i=1}^{k} \lim_{n\to\infty} \Pr[G(n,p(n)) \models \neg\sigma_i] = \sum_{i=1}^{k} 0 = 0.$$

È facile ora vedere che la teoria quasi certa è coerente: basta prendere un qualunque σ che abbia $\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n,p(n)) \models \sigma] = 0$ (un tale enunciato esiste sicuramente, ad esempio $\exists x (x \neq x)$). Per quanto appena dimostrato, σ non può essere una conseguenza della teoria. □

Il teorema 1.3.6 mostra perché abbiamo introdotto le teorie quasi certe.

Teorema 1.3.6. *Una successione soddisfa la legge zero-uno se e solo se la sua teoria quasi certa è completa.*

Dimostrazione. Conseguenza immediata della proposizione 1.3.5. □

Capitolo 2

Amalgamazione di Fraïssé

2.1 Il limite di Fraïssé

In questa sezione vedremo un metodo per costruire, a partire da opportune classi di grafi finiti, un "grafo limite" numerabile; questa tecnica è dovuta a Fraïssé [6], ma noi seguiremo l'esposizione di Hodges [9].

Definizione 2.1.1. Sia G un grafo; $\mathrm{Age}(G)$ è la classe dei grafi finiti immergibili in G.

Diamo ora tre proprietà che saranno essenziali per garantire l'esistenza del limite.

Definizione 2.1.2. Sia $\mathbf{K}$ una classe di grafi. $\mathbf{K}$ verifica la *hereditary property* (HP) se per ogni $A \in \mathbf{K}$ e per ogni B sottografo finito di A esiste $B' \in \mathbf{K}$ tale che $B \cong B'$.

Definizione 2.1.3. Sia $\mathbf{K}$ una classe di grafi. $\mathbf{K}$ verifica la *joint embedding property* (JEP) se per ogni $A, B \in \mathbf{K}$ esiste $C \in \mathbf{K}$ in cui A e B sono immergibili:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed] & \\
& C \, . \\
B \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Definizione 2.1.4. Sia $\mathbf{K}$ una classe di grafi. $\mathbf{K}$ verifica la *amalgamation property* (AP) se, dati $A, B, C \in \mathbf{K}$ e due immersioni $e\colon A \to B$, $f\colon A \to C$, esistono $D \in \mathbf{K}$ e due immersioni $g\colon B \to D$, $h\colon C \to D$ tali che $ge = hf$:

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, dashed, "g"] & \\
A \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "f"'] & & D \, . \\
& C \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Definizione 2.1.5. Sia G un grafo.

- G si dice *ultraomogeneo* se ogni isomorfismo tra sottografi finiti di G si estende ad un automorfismo di G.
- G si dice *debolmente omogeneo* se, preso B sottografo finito di G, per ogni A sottografo di B e per ogni immersione $f\colon A \to G$ esiste un'immersione $g\colon B \to G$ che estende f.

Dalla definizione 2.1.5 è chiaro che un grafo ultraomogeneo è anche debolmente omogeneo.

Lemma 2.1.6. *Siano G e H due grafi al più numerabili e debolmente omogenei. Se* $\mathrm{Age}(G) = \mathrm{Age}(H)$, *allora per ogni A sottografo finito di G e per ogni immersione $f\colon A \to H$ esiste un isomorfismo $g\colon G \to H$ che estende f.*

Dimostrazione. La dimostrazione è un'applicazione della tecnica del back and forth. Sia A un sottografo finito di G e $f\colon A \to H$ un'immersione. Poiché G e H sono al più numerabili, possiamo scriverli come unione di catene ascendenti di sottografi finiti

$$G = \bigcup_{n<\omega} G_n$$

e

$$H = \bigcup_{n<\omega} H_n;$$

inoltre, si può fare in modo che $G_0 = A$ e $H_0 = f(A)$. Per avere la tesi, sarà sufficiente costruire ricorsivamente una successione $(f_n \mid n < \omega)$, con $f_0 = f$, in modo che per ogni n

- $f_n \subseteq f_{n+1}$.
- f_n è un isomorfismo tra sottografi finiti di G e H.
- $G_n \subseteq \mathrm{dom}(f_{2n})$ e $H_n \subseteq \mathrm{ran}(f_{2n+1})$.[1]

Chiaramente, $g = \bigcup_{n<\omega} f_n$ sarà l'isomorfismo cercato.

Supponiamo di avere f_{2n-1}; dobbiamo costruire un isomorfismo finito $f_{2n} \supseteq f_{2n-1}$ in modo tale che $G_n \subseteq \mathrm{dom}(f_{2n})$. Scegliamo innanzitutto un $m \geq n$ tale che $\mathrm{dom}(f_{2n-1}) \subseteq G_m$. Ora, per ipotesi $G_m \in \mathrm{Age}(H)$ quindi esiste un'immersione

$$g\colon G_m \to H.$$

Poiché H è debolmente omogeneo, l'immersione $f_{2n-1}g^{-1}\colon g(\mathrm{dom}(f_{2n-1})) \to H$ si estende a un'immersione

$$h\colon g(G_m) \to H;$$

definiamo allora

$$f_{2n} = hg.$$

D'altra parte, se abbiamo f_{2n} possiamo, con un ragionamento analogo a quello appena fatto, costruire $f_{2n+1} \supseteq f_{2n}$ in modo tale che $H_n \subseteq \mathrm{ran}(f_{2n+1})$. Questo completa la definizione ricorsiva, dunque abbiamo finito. □

Dal lemma 2.1.6 segue facilmente questo fatto che ci sarà utile:

[1] Con "dom(f)" e "ran(f)" indichiamo rispettivamente il dominio e l'immagine della funzione f.

Proposizione 2.1.7. *Un grafo al più numerabile è ultraomogeneo se e solo se è debolmente omogeneo.*

Dimostrazione. Basta prendere $G = H$ nel lemma 2.1.6. □

Siamo pronti per il risultato principale della sezione.

Teorema 2.1.8 (Fraïssé [6])**.** *Sia* $\mathbf{K}$ *una classe di grafi finiti, chiusa per isomorfismo, che verifica* HP*,* JEP *e* AP*. Allora esiste un grafo* G *così fatto:*

(i) G *è al più numerabile.*

(ii) $\operatorname{Age}(G) = \mathbf{K}$.

(iii) G *è* ultraomogeneo.

Tale G *è unico a meno di isomorfismo, e si dice* limite di Fraïssé *di* $\mathbf{K}$.

Dimostrazione. L'unicità del limite di Fraïssé è una conseguenza diretta del lemma 2.1.6. Dimostriamo l'esistenza.

Quello che faremo sarà innanzitutto costruire una catena ascendente $(G_n \mid n < \omega)$ di elementi di $\mathbf{K}$ con questa proprietà:

($\star$) Sia $B \in \mathbf{K}$. Per ogni $A \subseteq B$ e per ogni immersione $f\colon A \to G_n$ esiste $m > n$ e un'immersione $g\colon B \to G_m$ che estende f.

Consideriamo la classe

$$\mathbf{P} = \{\, (A, B) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K} \mid A \subseteq B \,\}\,.$$

È facile vedere che in $\mathbf{K}$ c'è una quantità al più numerabile di classi di isomorfismo, possiamo quindi scegliere un insieme numerabile $P \subset \mathbf{P}$ che includa almeno un rappresentante per ogni classe di isomorfismo. Sia inoltre

$$b\colon \omega \times \omega \to \omega$$

una bigezione tale che per ogni $x, y \in \omega$ si abbia

$$b(x, y) \geq x, \tag{2.1}$$

ad esempio $b(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$. Definiamo ora ricorsivamente la successione dei G_n. Il passo base è banale: G_0 è un qualunque elemento di $\mathbf{K}$. Al passo n-esimo, enumeriamo l'insieme delle triple (f, A, B), dove $(A, B) \in P$ e $f\colon A \to G_n$ è un'immersione, in questo modo:

$$((f_{n,k}, A_{n,k}, B_{n,k}) \mid k < \omega)\,.$$

Si avrà $n = b(i, j)$; per (2.1) $i \leq n$. Dunque $A_{i,j}$ è un sottografo di $B_{i,j}$ e abbiamo l'immersione $f_{i,j}\colon A_{i,j} \to G_n$. Possiamo allora definire G_{n+1} usando AP in questo modo:

$$\begin{tikzcd}
& B_{i,j} \arrow[dr, dashed, "g"] & \\
A_{i,j} \arrow[ur, "\subseteq"] \arrow[dr, "f_{i,j}"'] & & G_{n+1} \\
& G_n \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

e possiamo supporre, a meno di un isomorfismo, che G_n sia un sottografo di G_{n+1} e h sia l'inclusione. Riassumendo, abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & B_{i,j} \arrow[dr, "g"] & \\ A_{i,j} \arrow[ur, "\subseteq"] \arrow[dr, "f_{i,j}"'] & & G_{n+1} \\ & G_n \arrow[ur, "\subseteq"'] & \end{tikzcd}$$

e questo conclude la dimostrazione dell'esistenza di $(G_n \mid n < \omega)$ con la proprietà $(\star)$.

Ora, facciamo vedere che

$$G = \bigcup_{n<\omega} G_n$$

verifica i punti (i), (ii) e (iii) del teorema. Per (i) non c'è niente da dimostrare. Riguardo a (ii), poiché **K** verifica HP ed è chiusa per isomorfismo, per ogni n si ha $\mathrm{Age}(G_n) \subseteq \mathbf{K}$, da cui $\mathrm{Age}(G) \subseteq \mathbf{K}$. Per provare l'altra inclusione, prendiamo $A \in \mathbf{K}$ e dimostriamo che $A \in \mathrm{Age}(G)$. Poiché sia A che G_0 sono in **K**, per JEP esiste $B \in \mathbf{K}$ in cui si immergono entrambi:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dashed] & \\ & B \; . \\ G_0 \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Applicando $(\star)$, possiamo estendere l'identità $G_0 \to G_0$ ad un'immersione $B \to G_n$ per un certo $n > 0$, dunque componendo le immersioni

$$A \to B \to G_n \to G$$

abbiamo che $A \in \mathrm{Age}(G)$. Ora sappiamo che $\mathrm{Age}(G) = \mathbf{K}$, quindi la proprietà $(\star)$ ci dice che G è debolmente omogeneo. Basta quindi usare la proposizione 2.1.7 per ottenere il punto (iii). $\square$

Concludiamo la sezione osservando che:

Proposizione 2.1.9. *La classe di tutti i grafi finiti è chiusa per isomorfismo e verifica* HP*,* JEP *e* AP*. Esiste dunque il suo limite di Fraïssé, lo chiamiamo R.*

Dimostrazione. La chiusura per isomorfismo e HP sono ovvie; per JEP basta considerare l'unione disgiunta. Riguardo a AP, se abbiamo delle immersioni

$$\begin{tikzcd} & B \\ A \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & C \end{tikzcd}$$

allora a meno di isomorfismo possiamo supporre che A sia un sottografo di entrambi, e e f siano inclusioni e che si abbia $\mathrm{v}(B) \cap \mathrm{v}(C) = \mathrm{v}(A)$. Le immersioni

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "\subseteq"] & \\
A \arrow[ur, "\subseteq"] \arrow[dr, "\subseteq"'] & & B \otimes_A C \\
& C \arrow[ur, "\subseteq"'] &
\end{tikzcd}$$

ci danno la tesi. □

Dunque R è un grafo numerabile e ultraomogeneo, in cui ogni grafo finito è immergibile.

2.2 Assiomi di estensione

Definizione 2.2.1 (Gaifman [7])**.** Per ogni $k > 0$ consideriamo il seguente *assioma di estensione*:

$$\forall x_1 \dots x_k \forall y_1 \dots y_k \left(\bigwedge_{1 \le i,j \le k} x_i \neq y_j \to \exists z \left(\bigwedge_{1 \le i \le k} z \neq y_i \wedge \bigwedge_{1 \le i \le k} E(z, x_i) \wedge \bigwedge_{1 \le i \le k} \neg E(z, y_i) \right) \right). \tag{2.2}$$

A parole questo significa che, presi X, Y insiemi finiti e disgiunti di vertici, possiamo trovare un vertice $z \notin X \cup Y$ adiacente a tutti i vertici di X e a nessun vertice di Y.

Chiameremo EXT la teoria formata da questi assiomi.

Proposizione 2.2.2. *R è un modello di* EXT*, ed è l'unico modello numerabile.*

Dimostrazione. Siano X, Y insiemi finiti e disgiunti di vertici di R. Consideriamo il grafo A che ha $\mathrm{v}(A) = X \cup Y \cup \{w\}$ e E^A definito in questo modo: due vertici in $X \cup Y$ sono uniti in A se e solo se lo sono in R, inoltre w è unito a tutti i vertici di X e a nessun vertice di Y. Ora, poiché A è finito, esiste un'immersione

$$f \colon A \to R.$$

Inoltre, $f \restriction_{X \cup Y}$ è un isomorfismo tra sottografi finiti di R, dunque per ultraomogeneità esiste un automorfismo

$$g \colon R \to R$$

che estende $f \restriction_{X \cup Y}$. Basta prendere allora

$$z = g^{-1} f(w).$$

Sia ora G un modello numerabile di EXT; per far vedere che $G \cong R$ sarà sufficiente mostrare che G verifica le condizioni (i), (ii) e (iii) del teorema 2.1.8: l'unicità del limite di Fraïssé ci darà la tesi. La (i) è soddisfatta per ipotesi. Per dimostrare (ii) e (iii), consideriamo questa proprietà:

(♣) Sia B un grafo finito. Per ogni $A \subseteq B$ e per ogni immersione $f \colon A \to G$ esiste un'immersione $g \colon B \to G$ che estende f.

Se vale (♣) abbiamo finito, infatti prendendo $A = \emptyset$ otteniamo la (ii); inoltre prendendo B sottografo di G otteniamo che G è debolmente omogeneo, dunque basta usare la proposizione 2.1.7 per avere (iii). Dimostriamo (♣), procedendo per induzione su $|B \setminus A|$. Il caso base è ovvio. Se $|B \setminus A| > 0$, scegliamo $w \in B \setminus A$. Consideriamo i sottoinsiemi di G

$$X = \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in A \wedge E^B(x, w) \right\}$$

e

$$Y = \left\{ f(y) \;\middle|\; y \in A \wedge \neg E^B(y, w) \right\}.$$

Poiché G è un modello di EXT, esiste $z \in G \setminus f(A)$ adiacente a tutti i vertici di X e a nessun vertice di Y. Posto $f' = f \cup \{(w, z)\}$, per ipotesi induttiva esiste un'immersione $g \colon B \to G$ che estende f', quindi anche f. □

Corollario 2.2.3. *La teoria degli assiomi di estensione è completa.*

Dimostrazione. Per la proposizione 2.2.2 EXT è coerente. Supponiamo per assurdo che esista un enunciato σ tale che EXT $\not\models \sigma$ e EXT $\not\models \neg\sigma$. Questo vuol dire che le teorie $T_1 = \mathrm{EXT} \cup \{\sigma\}$ e $T_2 = \mathrm{EXT} \cup \{\neg\sigma\}$ sono coerenti, quindi (osservando che EXT non ha modelli finiti) hanno due modelli numerabili, li chiamiamo G_1 e G_2 rispettivamente.[2] Per la proposizione 2.2.2, $G_1 \cong G_2$, ma questo è assurdo perché $G_1 \models \sigma$ e $G_2 \models \neg\sigma$. □

2.3 La legge zero-uno di Fagin

Torniamo ad occuparci dei grafi random. Fissiamo $p \in \,]0, 1[$ e, ricordando la definizione 1.3.4, chiamiamo T la teoria quasi certa relativa alla successione costante $p(n) = p$.

Proposizione 2.3.1. *Se σ è un assioma di estensione, allora* $\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n, p) \models \sigma] = 1$.

Dimostrazione. Sia σ l'assioma (2.2); consideriamo la sua negazione $\neg\sigma$. Dati due insiemi disgiunti di vertici, ciascuno con k elementi, la probabilità che non ci sia un vertice z unito a tutti i vertici del primo insieme e a nessun vertice del secondo è

$$\left(1 - p^k(1 - p)^k\right)^{n-2k}.$$

D'altra parte, ci sono

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$$

modi per scegliere due sottoinsiemi disgiunti con k elementi ciascuno. Quindi,

$$\Pr[G(n, p) \models \neg\sigma] \leq \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\left(1 - p^k(1 - p)^k\right)^{n-2k}.$$

A questo punto, dato che

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\left(1 - p^k(1 - p)^k\right)^{n-2k} = 0, \tag{2.3}$$

abbiamo la tesi. □

[2] L'esistenza di modelli al più numerabili è un risultato base della teoria dei modelli. Si veda, ad esempio, Hodges [9].

Il seguente è uno dei due teoremi fondamentali di questa tesi.

Teorema 2.3.2. $T = \mathrm{Th}(R)$.

Dimostrazione. Sia σ un enunciato tale che $R \models \neg\sigma$; dimostriamo che σ non sta in T. Per la proposizione 2.2.2 R è un modello di EXT, quindi EXT $\not\models \sigma$. Poiché (per il corollario 2.2.3) EXT è una teoria completa, si ha EXT $\models \neg\sigma$. Usando la proposizione 2.3.1, possiamo concludere che $\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n,p) \models \neg\sigma] = 1$.

Viceversa, sia σ un enunciato che non sta in T; dimostriamo che $R \models \neg\sigma$. Il corollario 2.2.3 e la proposizione 2.3.1 ci dicono che T è completa, quindi $\neg\sigma$ deve essere in T. Da questo, per la parte già dimostrata, segue che $R \models \neg\sigma$. □

In particolare, dalla completezza di T (e dal teorema 1.3.6) otteniamo il seguente risultato, che enunciamo esplicitamente data la sua importanza.

Teorema 2.3.3 (Fagin [5]; Glebskii et al. [8])**.** *Per ogni $p \in\,]0,1[$, la successione costante $p(n) = p$ soddisfa la legge zero-uno.*

Osservazione 2.3.4. Cosa succede invece se $p = 0$ oppure $p = 1$? La dimostrazione che abbiamo dato non è più valida: in (2.3) abbiamo usato in modo essenziale il fatto che $p \in\,]0,1[$. Ciononostante, la legge zero-uno continua a valere, e quindi in definitiva vale per ogni $p \in [0,1]$. Dimostriamola allora per $p = 1$ (l'altro caso è analogo). Consideriamo la teoria formata dal seguente schema di assiomi, per $k > 0$:

$$\exists x_1 \ldots x_k \left(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \right),$$

più l'assioma

$$\forall x \forall y (E(x,y)).$$

Con gli stessi metodi che abbiamo usato per EXT, si vede facilmente che questa teoria è completa; inoltre è chiaro che per ogni suo assioma σ si ha $\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n,1) \models \sigma] = 1$. Dunque, come prima, la teoria quasi certa è completa e abbiamo la legge zero-uno.

Capitolo 3

Amalgamazione di Hrushovski

3.1 Il modello generico

In questa sezione introduciamo l'amalgamazione di Hrushovski, seguendo l'approccio di Baldwin e Shi [2].

Definizione 3.1.1. Sia $\mathbf{K}$ una classe di grafi, e M un grafo. Diremo che $\mathbf{K}$ *è cofinale in* M se per ogni A sottografo finito di M esiste $B \in \mathbf{K}$ tale che $A \subseteq B \subseteq M$. Definiamo $\overline{\mathbf{K}}$ la classe dei grafi in cui $\mathbf{K}$ è cofinale.

Osservazione 3.1.2. Dalla definizione 3.1.1 è chiaro che $\mathbf{K} \subseteq \overline{\mathbf{K}}$ e che $\overline{\mathbf{K}} = \overline{\overline{\mathbf{K}}}$.

Concentriamoci ora su classi $\mathbf{K}$ dotate di una relazione binaria $\leq$. Innanzitutto chiariamo cosa si intende in questo caso con "chiusura per isomorfismo".

Definizione 3.1.3. $(\mathbf{K}, \leq)$ è *chiusa per isomorfismo* se sono verificate queste condizioni:

(i) Se $A \in \mathbf{K}$ e $A \cong B$, allora $B \in \mathbf{K}$

(ii) Se $A, B \in \mathbf{K}$ e $A \subseteq B$, allora per ogni isomorfismo $f \colon B \to C$ si ha $A \leq B$ se e solo se $f(A) \leq C$.

Proseguiamo con altre semplici proprietà.

Definizione 3.1.4. Data $(\mathbf{K}, \leq)$ definiamo le seguenti proprietà, in cui A, B e C indicano elementi di $\mathbf{K}$ e i vari "per ogni" sono impliciti.

(A1) $A \leq A$.

(A2) Se $A \leq B$, allora $A \subseteq B$.

(A3) Se $A \leq B \leq C$, allora $A \leq C$.

(A4) Se $A \leq C$ e $A \subseteq B \subseteq C$, allora $A \leq B$.

(A5) $\emptyset \in \mathbf{K}$ e $\emptyset \leq A$.

Osservazione 3.1.5. Se $(\mathbf{K}, \leq)$ verifica A4, la relazione $\leq$ si può estendere in modo naturale: per ogni A in $\mathbf{K}$ e per ogni $M \in \overline{\mathbf{K}}$ definiamo

$$A \leq M \overset{\text{def.}}{\iff} A \subseteq M \text{ e per ogni } B \in \mathbf{K} \text{ con } A \subseteq B \subseteq M \text{ si ha } A \leq B.$$

Come nella sezione 2.1, anche qui l'amalgamazione gioca un ruolo fondamentale. La differenza è che qui considereremo "immersioni forti" determinate dalla relazione $\leq$.

Definizione 3.1.6. Data $(\mathbf{K}, \leq)$, un'immersione $f\colon A \to B$ è un'*immersione forte* se $f(A) \leq B$.

A questo punto, la definizione 2.1.4 può essere riformulata in questo modo:

Definizione 3.1.7. $(\mathbf{K}, \leq)$ verifica la *amalgamation property* (AP) se, dati $A, B, C \in \mathbf{K}$ e due immersioni forti $e\colon A \to B$, $f\colon A \to C$, esistono $D \in \mathbf{K}$ e due immersioni forti $g\colon B \to D$, $h\colon C \to D$ tali che $ge = hf$:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dashed, "g"] & \\ A \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "f"'] & & D . \\ & C \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Avendo definito tutte le proprietà che ci servono, possiamo passare al teorema principale.

Teorema 3.1.8. *Sia* $(\mathbf{K}, \leq)$ *una classe di grafi finiti, chiusa per isomorfismo, che verifica* A1, . . . , A5 *e* AP. *Allora esiste un grafo* M *così fatto:*

(i) $\mathbf{K}$ *è cofinale in* M.

(ii) Per ogni $A, B \in \mathbf{K}$, *se* $A \leq M$ *e* $A \leq B$ *allora esiste un'immersione forte* $f\colon B \to M$ *tale che* $f\restriction_A$ *è l'identità.*

(iii) Esiste una catena numerabile $A_0 \leq A_1 \leq \dots$ *in* $\mathbf{K}$ *tale che* $M = \bigcup_{n<\omega} A_n$.

Tale M *è unico a meno di isomorfismo, e si dice* modello $(\mathbf{K}, \leq)$-generico.

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto analoga a quella del teorema 2.1.8, quindi la omettiamo. □

La classe $(\mathbf{K}_\alpha, \leq_\alpha)$

Fissiamo, per tutto il resto del capitolo, un numero irrazionale $\alpha \in \,]0, 1[$.

Definizione 3.1.9. Se A è un grafo finito, definiamo la *dimensione*

$$\delta_\alpha(A) = |\mathrm{v}(A)| - \alpha\, |\mathrm{e}(A)|\,.$$

A partire da δ_α, si può definire la classe $(\mathbf{K}_\alpha, \leq_\alpha)$ di cui ci occuperemo.

Definizione 3.1.10. Sia

$$\mathbf{K}_\alpha = \{\, A \text{ grafi finiti} \mid \text{per ogni } B \subseteq A \text{ si ha } \delta_\alpha(B) \geq 0 \,\}\,.$$

Su $\mathbf{K}_\alpha$ definiamo una relazione binaria $\leq_\alpha$ in questo modo: per ogni $A, B \in \mathbf{K}_\alpha$

$$A \leq_\alpha B \overset{\text{def.}}{\iff} A \subseteq B \text{ e per ogni } C \text{ con } A \subseteq C \subseteq B \text{ si ha } \delta_\alpha(A) \leq \delta_\alpha(C).$$

Quando $A \leq_\alpha B$, si dice che A è un *sottografo forte* di B.

Il resto della sezione è dedicato a dimostrare che $(\mathbf{K}_\alpha, \leq_\alpha)$ verifica le ipotesi del teorema 3.1.8. Ci servono prima di tutto due lemmi, che saranno utili anche in altri casi.

Lemma 3.1.11. *Siano $A, B, C \in \mathbf{K}_\alpha$. Se $A \leq_\alpha B$ e $C \subseteq B$, allora $A \cap C \leq_\alpha C$.*

Dimostrazione. Dimostriamo intanto che $\delta_\alpha(A \cap C) \leq \delta_\alpha(C)$. Poiché $A \subseteq A \cup C \subseteq B$, si ha per ipotesi $\delta_\alpha(A) \leq \delta_\alpha(A \cup C)$. Allora

$$0 \leq \delta_\alpha(A \cup C) - \delta_\alpha(A) = |\mathrm{v}(C)| - |\mathrm{v}(A \cap C)| - \alpha(|\mathrm{e}(A \cup C)| - |\mathrm{e}(A)|).$$

D'altra parte, si ha ovviamente $|\mathrm{e}(A)| + |\mathrm{e}(C)| \leq |\mathrm{e}(A \cup C)| + |\mathrm{e}(A \cap C)|$ e quindi

$$0 \leq |\mathrm{v}(C)| - |\mathrm{v}(A \cap C)| - \alpha(|\mathrm{e}(C)| - |\mathrm{e}(A \cap C)|) = \delta_\alpha(C) - \delta_\alpha(A \cap C),$$

come volevamo.

A questo punto è facile dimostrare che $A \cap C \leq_\alpha C$. Infatti, se $A \cap C \subseteq D \subseteq C$ allora, per la parte già dimostrata, $\delta_\alpha(A \cap D) \leq \delta_\alpha(D)$; dato che $A \cap D = A \cap C$, abbiamo la tesi. □

Lemma 3.1.12. *Siano $A, B, C \in \mathbf{K}_\alpha$. Se $B \cap C = A$ e $A \leq_\alpha B$, allora $B \otimes_A C \in \mathbf{K}_\alpha$ e $C \leq B \otimes_A C$.*

Dimostrazione. Sia D un sottografo di $B \otimes_A C$; dobbiamo mostrare che $\delta_\alpha(D) \geq 0$. Una semplice verifica mostra che

$$|\mathrm{e}(D)| = |\mathrm{e}(D \cap B)| + |\mathrm{e}(D \cap C)| - |\mathrm{e}(D \cap A)|.$$

D'altra parte, dato che $A \leq_\alpha B$, dal lemma 3.1.11 segue che

$$\delta_\alpha(D \cap A) \leq \delta_\alpha(D \cap B)$$

e quindi, ricapitolando, abbiamo

$$\delta_\alpha(D) = \delta_\alpha(D \cap B) + \delta_\alpha(D \cap C) - \delta_\alpha(D \cap A) \geq \delta_\alpha(D \cap C) \geq 0. \tag{3.1}$$

Sia ora $C \subseteq D \subseteq B \otimes_A C$. Poiché $D \cap C = C$, la (3.1) ci dice che $\delta_\alpha(D) \geq \delta_\alpha(C)$, dunque possiamo concludere che $C \leq B \otimes_A C$. □

Proposizione 3.1.13. $(\mathbf{K}_\alpha, \leq_\alpha)$ *è chiusa per isomorfismo e verifica* A1, …, A5 *e* AP. *Esiste dunque il modello $(\mathbf{K}_\alpha, \leq_\alpha)$-generico, lo chiamiamo M_α.*

Dimostrazione. L'unica cosa che richiede una dimostrazione non ovvia è AP. Se abbiamo delle immersioni forti

$$\begin{tikzcd} & B \\ A \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & C \end{tikzcd}$$

allora a meno di isomorfismo possiamo supporre che $B \cap C = A$ e che e e f siano inclusioni. Grazie al lemma 3.1.12 abbiamo le immersioni forti

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "\subseteq"] & \\
A \arrow[ur, "\subseteq"] \arrow[dr, "\subseteq"'] & & B \otimes_A C \\
& C \arrow[ur, "\subseteq"'] &
\end{tikzcd}$$

che ci danno la tesi. □

3.2 Modelli semigenerici

In questa sezione ci occupiamo dei "modelli semigenerici", l'idea chiave di Baldwin e Shelah [1].

L'operatore di chiusura

Definizione 3.2.1. Se $A, B \in \mathbf{K}_\alpha$,

$$A \preceq_\alpha B \overset{\text{def.}}{\iff} A \subseteq B \text{ e non esiste } C \text{ tale che } A \subseteq C <_\alpha B.$$

Quando $A \preceq_\alpha B$, si dice che B è un'*estensione intrinseca* di A.

Vediamo subito alcune proprietà della relazione $\preceq_\alpha$.

Lemma 3.2.2. *Siano $A, B, C \in \mathbf{K}_\alpha$.*

(i) $A \preceq_\alpha A$.

(ii) Se $A \preceq_\alpha B$ *allora* $A \subseteq B$.

(iii) Se $A \preceq_\alpha B \preceq_\alpha C$ *allora* $A \preceq_\alpha C$.

(iv) Se $A \preceq_\alpha C$ *e* $A \subseteq B \subseteq C$ *allora* $B \preceq_\alpha C$.

(v) $\emptyset \preceq_\alpha A$ *se e solo se* $A = \emptyset$.

Dimostrazione. La dimostrazione è un facile esercizio, che omettiamo. □

Definizione 3.2.3. Sia $M \in \overline{\mathbf{K}_\alpha}$ e A un sottografo di M. Per ogni $m \in \omega$ definiamo la m-chiusura di A in M

$$\mathrm{cl}^m_M(A) = \bigcup \{\, B \subseteq M \mid A \preceq_\alpha B \text{ e } |B \setminus A| < m \,\}.$$

Le proprietà di base dell'operatore di chiusura sono queste:

Lemma 3.2.4. *Per ogni* $m \in \omega$

(i) $\mathrm{cl}^m_M(\emptyset) = \emptyset$.

(ii) $A \preceq_\alpha \mathrm{cl}^m_M(A)$.

(iii) Se $A \subseteq B \subseteq C$ *e* $\mathrm{cl}^m_C(A) \subseteq B$ *allora* $\mathrm{cl}^m_C(A) = \mathrm{cl}^m_B(A)$.

Dimostrazione. Anche questa dimostrazione è piuttosto semplice, la saltiamo. □

Ora il nostro obiettivo è dimostrare la seguente proposizione, che non è affatto scontata.

Proposizione 3.2.5. *Per ogni* $M \in \overline{\mathbf{K}_\alpha}$*,* A *sottografo di* M *e* $m, n \in \omega$*, esiste* $l \in \omega$ *tale che* $\mathrm{cl}^m_M(\mathrm{cl}^n_M(A)) \subseteq \mathrm{cl}^l_M(A)$.

Porteremo a termine la dimostrazione dopo un paio di lemmi. Segnaliamo che verranno entrambi utilizzati anche in seguito.

L'idea del prossimo lemma 3.2.6 è limitare, in modo uniforme rispetto a M, il numero delle possibili estensioni di un'immersione $A \to M$.

Lemma 3.2.6. *Esiste una funzione* $s\colon \omega \times \omega \to \omega$ *tale che, per ogni* $M \in \overline{\mathbf{K}_\alpha}$ *e* $A \preceq_\alpha B$*, se* $f\colon A \to M$ *è un'immersione e* $B_1, \dots, B_k \subseteq M$ *sono immagini distinte di estensioni di* f *a* B*, allora* $k \leq s(|\mathrm{v}(A)|, |\mathrm{v}(B)|)$.

Dimostrazione. Definiamo $\epsilon\colon \omega \to]0, +\infty[$, ponendo

$$\epsilon(x) = \min \left\{ e\alpha - v \;\middle|\; (e, v) \in \omega^2,\ v \leq x,\ v - e\alpha < 0 \right\}.$$

Si può verificare che

$$s(x, y) = \frac{x}{\epsilon(|y - x|)}$$

è la funzione che cerchiamo.[1] □

Lemma 3.2.7. *Esiste una funzione* $t\colon \omega \times \omega \to \omega$ *tale che, presi comunque* $M \in \overline{\mathbf{K}_\alpha}$*,* $A \subseteq M$ *e* $m \in \omega$*, si ha*

$$|\mathrm{cl}^m_M(A)| \leq t(|\mathrm{v}(A)|, m).$$

Dimostrazione. Conseguenza diretta della definizione 3.2.3 e del lemma 3.2.6. □

Dimostrazione della proposizione 3.2.5. Sia t la funzione data dal lemma 3.2.7. Dimostriamo che

$$l = m + t(|\mathrm{v}(A)|, n)$$

funziona. Sia $a \in \mathrm{cl}^m_M(\mathrm{cl}^n_M(A))$, dunque esiste un B tale che $a \in B$, $\mathrm{cl}^n_M(A) \preceq_\alpha B \subseteq M$ e $|B \setminus \mathrm{cl}^n_M(A)| < m$. Poiché $A \preceq_\alpha \mathrm{cl}^n_M(A)$, si ha

$$A \preceq_\alpha B \subseteq M.$$

Inoltre, si ha chiaramente

$$|B \setminus A| < m + t(|\mathrm{v}(A)|, n) = l;$$

concludiamo quindi che $a \in \mathrm{cl}^l_M(A)$. □

[1] Rimandiamo a Baldwin e Shi [2, Lemma 3.22] per una verifica più dettagliata.

I modelli $(\mathbf{K}_\alpha, \leq_\alpha)$-semigenerici

Finiti i preliminari, diamo la definizione vera e propria.

Definizione 3.2.8. Un grafo numerabile M è un *modello* $(\mathbf{K}_\alpha, \leq_\alpha)$*-semigenerico* se:

(i) $\mathbf{K}_\alpha$ è cofinale in M.

(ii) Per ogni $A, B \in \mathbf{K}_\alpha$ con $A \leq_\alpha B$, per ogni $m \in \omega$ e per ogni immersione $f \colon A \to M$ esiste un'immersione $g \colon B \to M$ con queste proprietà:

  (a) $f \subseteq g$.
  (b) $\mathrm{cl}^m_M(g(B)) = \mathrm{cl}^m_M(f(A)) \cup g(B)$.
  (c) $\mathrm{cl}^m_M(f(A)) \cup g(B) \cong \mathrm{cl}^m_M(f(A)) \otimes_{f(A)} g(B)$.

Esistono modelli $(\mathbf{K}_\alpha, \leq_\alpha)$-semigenerici? Grazie alla proposizione 3.2.9, la risposta è sì.

Proposizione 3.2.9. *M_α è un modello $(\mathbf{K}_\alpha, \leq_\alpha)$-semigenerico.*

Dimostrazione. Usando il lemma 3.1.12, la dimostrazione si riduce a una semplice verifica. □

Completezza della teoria dei modelli semigenerici

Teorema 3.2.10. *Per ogni formula $\phi(x_1, \ldots, x_r)$ esiste $l_\phi \in \omega$ tale che: per ogni M, M' semigenerici e per ogni $\boldsymbol{a} \in M^r$, $\boldsymbol{a'} \in M'^r$, se esiste un isomorfismo $\mathrm{cl}^{l_\phi}_M(\{a_1, \ldots, a_r\}) \cong \mathrm{cl}^{l_\phi}_{M'}(\{a'_1, \ldots, a'_r\})$ che per ogni i manda a_i in a'_i, allora*

$$M \models \phi(\boldsymbol{a}) \iff M' \models \phi(\boldsymbol{a'}).$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla complessità di ϕ. L'unico caso che richiede una dimostrazione è quello in cui $\phi(\boldsymbol{x})$ è della forma $\exists y \psi(\boldsymbol{x}, y)$.

Scegliamo l_ϕ come segue. Prendiamo $p_1 \in \omega$ in modo che, per ogni $N \in \overline{\mathbf{K}_\alpha}$ e per ogni $\boldsymbol{c} \in N^{r+1}$, si abbia $\left|\mathrm{cl}^{l_\psi}_N(\{c_1, \ldots, c_{r+1}\})\right| < p_1$; un tale p_1 esiste sicuramente grazie al lemma 3.2.7. Definiamo $p = \max\{p_1, l_\psi\}$. Per ogni $N \in \overline{\mathbf{K}_\alpha}$ e $\boldsymbol{a} \in N^r$, definiamo ricorsivamente una successione $\left(A^N_i(\boldsymbol{a}) \mid 0 \leq i \leq p\right)$:

$$\begin{cases} A^N_0(\boldsymbol{a}) = \{a_1, \ldots, a_r\} \\ A^N_{i+i}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{cl}^p_N\left(A^N_i(\boldsymbol{a})\right) \end{cases}.$$

Allora, applicando la proposizione 3.2.5, scegliamo l_ϕ con questa proprietà: per ogni semigenerico N e per ogni $\boldsymbol{a} \in N^r$ si ha

$$A^N_p(\boldsymbol{a}) \subseteq \mathrm{cl}^{l_\phi}_N(\{a_1, \ldots, a_r\}). \tag{3.2}$$

Resta da far vedere che l_ϕ scelto in questo modo soddisfa il teorema. Presi M, M' semigenerici, $\boldsymbol{a} \in M^r$, $\boldsymbol{a'} \in M'^r$ e un isomorfismo

$$f \colon \mathrm{cl}^{l_\phi}_M(\{a_1, \ldots, a_r\}) \to \mathrm{cl}^{l_\phi}_{M'}(\{a'_1, \ldots, a'_r\})$$

con $f(a_i) = a'_i$, dimostriamo che se $M \models \phi(\boldsymbol{a})$ allora $M' \models \phi(\boldsymbol{a'})$; l'altra implicazione sarà del tutto analoga. Poiché $M \models \phi(\boldsymbol{a})$, esiste un $b \in M$ tale che $M \models \psi(\boldsymbol{a}, b)$. Affermo che esistono $b' \in M'$ e un isomorfismo $g \colon \mathrm{cl}^{l_\psi}_M(\{a_1, \ldots, a_r, b\}) \to \mathrm{cl}^{l_\psi}_{M'}(\{a'_1, \ldots, a'_r, b'\})$ con $g(a_i) = a'_i$ e

$g(b) = b'$. È chiaro che, una volta provata l'affermazione, basterà applicare l'ipotesi induttiva per avere la tesi.

Dimostriamo l'affermazione. Per ogni $0 \leq i \leq p$, ricordando (3.2), abbiamo $f\big(A_i^M(\boldsymbol{a})\big) = A_i^{M'}(\boldsymbol{a'})$. Osserviamo inoltre che deve esistere $0 \leq j < p$ tale che

$$\big(A_{j+1}^M(\boldsymbol{a}) \setminus A_j^M(\boldsymbol{a})\big) \cap \Big(\mathrm{cl}_M^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\}) \setminus \{a_1, \ldots, a_r, b\}\Big) = \emptyset;$$

poiché $\Big|\mathrm{cl}_M^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\}) \setminus A_j^M(\boldsymbol{a})\Big| < p_1 \leq p$, questo implica

$$A_j^M(\boldsymbol{a}) \leq_\alpha A_j^M(\boldsymbol{a}) \cup \mathrm{cl}_M^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\}).$$

Dato che M' è semigenerico, esiste un'immersione $g\colon A_j^M(\boldsymbol{a}) \cup \mathrm{cl}_M^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\}) \to M'$ che estende f e verifica queste proprietà:

(a) $\mathrm{cl}_{M'}^p\Big(A_j^{M'}(\boldsymbol{a'}) \cup g\Big(\mathrm{cl}_M^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\})\Big)\Big) = A_{j+1}^{M'}(\boldsymbol{a'}) \cup g\Big(\mathrm{cl}_M^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\})\Big)$.

(b) $A_{j+1}^{M'}(\boldsymbol{a'}) \cup g\Big(\mathrm{cl}_M^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\})\Big) \cong A_{j+1}^{M'}(\boldsymbol{a'}) \otimes_{A_j^{M'}(\boldsymbol{a'})} g\Big(\mathrm{cl}_M^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\})\Big)$.

Scelto $b' = g(b)$, resta solo da far vedere che $g\Big(\mathrm{cl}_M^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\})\Big) = \mathrm{cl}_{M'}^{l_\psi}(\{a'_1, \ldots, a'_r, b'\})$. Poniamo per comodità $B = A_j^M(\boldsymbol{a}) \cup \mathrm{cl}_M^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\})$. Per il punto (iii) del lemma 3.2.4, si ha $\mathrm{cl}_M^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\}) = \mathrm{cl}_B^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\})$. Quindi

$$g\Big(\mathrm{cl}_M^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\})\Big) = g\Big(\mathrm{cl}_B^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\})\Big) = \mathrm{cl}_{g(B)}^{l_\psi}(\{a'_1, \ldots, a'_r, b'\});$$

dunque, basterà dimostrare che $\mathrm{cl}_{M'}^{l_\psi}(\{a'_1, \ldots, a'_r, b'\}) \subseteq g(B)$ e poi applicare nuovamente il punto (iii) del lemma 3.2.4. Si ha

$$\mathrm{cl}_{M'}^{l_\psi}(\{a'_1, \ldots, a'_r, b'\}) \subseteq \mathrm{cl}_{M'}^{p}(\{a'_1, \ldots, a'_r, b'\}) \subseteq \mathrm{cl}_{M'}^{p}\Big(A_j^{M'}(\boldsymbol{a'}) \cup g\Big(\mathrm{cl}_M^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\})\Big)\Big)$$

e quest'ultimo, per (a), è uguale a $C = A_{j+1}^{M'}(\boldsymbol{a'}) \cup g\Big(\mathrm{cl}_M^{l_\psi}(\{a_1, \ldots, a_r, b\})\Big)$; ne segue come prima che $\mathrm{cl}_{M'}^{l_\psi}(\{a'_1, \ldots, a'_r, b'\}) = \mathrm{cl}_C^{l_\psi}(\{a'_1, \ldots, a'_r, b'\})$. Usando (b), si vede facilmente che g^{-1} preserva la relazione $\preceq_\alpha$; da questo deduciamo che $\mathrm{cl}_C^{l_\psi}(\{a'_1, \ldots, a'_r, b'\}) \subseteq g(B)$, concludendo la dimostrazione. $\square$

Corollario 3.2.11. *La teoria dei modelli* $(\mathbf{K}_\alpha, \leq_\alpha)$*-semigenerici è completa.*

Dimostrazione. Innanzitutto, per la proposizione 3.2.9, è una teoria coerente. Prendiamo un enunciato σ e due semigenerici M e M'. Per il teorema 3.2.10, esiste l_σ tale che se $\mathrm{cl}_M^{l_\sigma}(\emptyset) \cong \mathrm{cl}_{M'}^{l_\sigma}(\emptyset)$ allora $M \models \sigma \iff M' \models \sigma$. Basta ora osservare che, per il punto (i) del lemma 3.2.4, si ha $\mathrm{cl}_M^{l_\sigma}(\emptyset) = \mathrm{cl}_{M'}^{l_\sigma}(\emptyset) = \emptyset$. $\square$

Gli assiomi $\phi_{A,B,C}^m$

Vediamo ora uno schema di assiomi che assiomatizza (nel senso del lemma 3.2.13) la classe dei modelli semigenerici. Questo ci tornerà utile nella sezione 3.3.

Definizione 3.2.12. Supponiamo fissata una corrispondenza, che rispetta le inclusioni, tra le enumerazioni dei grafi finiti A, B, C, D e i vettori di variabili $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}$.

1. Per ogni $A, D \in \mathbf{K}_\alpha$ e $m \in \omega$, definiamo

$$A \preceq_\alpha^m D \overset{\text{def.}}{\iff} A \subseteq D \text{ e per ogni } d \in D \backslash A \text{ esiste } B \text{ con } A \cup \{d\} \subseteq B,\ A \preceq_\alpha B \text{ e } |B \backslash A| < m.$$

2. Per ogni $A \in \mathbf{K}_\alpha$, definiamo $\mathcal{D}_A^m = \{\, D \in \mathbf{K}_\alpha \mid A \preceq_\alpha^m D \,\}$.

3. Per ogni $C \in \mathcal{D}_A^m$, definiamo

$$\mathcal{D}_{A,C}^m = \{\, D \in \mathcal{D}_A^m \mid D \text{ non è immergibile in } C \,\}.$$

4. Sia $A \in \mathbf{K}_\alpha$ enumerato da $(a_i \mid 1 \leq i \leq n)$. Consideriamo (si veda la definizione 1.2.5) l'enunciato Δ_A. Se $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, chiameremo $\Delta_A(\boldsymbol{x})$ la formula ottenuta a partire da Δ_A sostituendo, per ogni i, la variabile x_i al posto della costante a_i.

5. Per ogni $C \in \mathcal{D}_A^m$, $\theta_{A,C}^m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ è la formula

$$\Delta_A(\boldsymbol{x}) \wedge \Delta_C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \wedge \forall \boldsymbol{w} \left(\bigwedge_{D \in \mathcal{D}_{A,C}^m} \neg \Delta_D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) \right).$$

6. Per ogni $A \leq_\alpha B$, $m \in \omega$ e $C \in \mathcal{D}_A^m$, $\phi_{A,B,C}^m$ è l'enunciato

$$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{z} \left(\left(\Delta_A(\boldsymbol{x}) \wedge \theta_{A,C}^m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right) \rightarrow \left(\Delta_{C \otimes_A B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \wedge \theta_{B, C \otimes_A B}^m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \right) \right).$$

Lemma 3.2.13. *Per $M \in \overline{\mathbf{K}_\alpha}$ sono equivalenti:*

- *M è un modello $(\mathbf{K}_\alpha, \leq_\alpha)$-semigenerico.*
- *Per ogni $A \leq_\alpha B$, per ogni $m \in \omega$ e per ogni $C \in \mathcal{D}_A^m$ si ha $M \models \phi_{A,B,C}^m$.*

Dimostrazione. Una volta capita la definizione 3.2.12, non c'è niente da dimostrare: infatti, i grafi $A \leq_\alpha B$ soddisfano il punto (ii) della definizione 3.2.8 se e solo se $M \models \phi_{A,B,C}^m$ con $C \cong \mathrm{cl}_M^m(A)$. □

3.3 La legge zero-uno di Shelah e Spencer

Torniamo ad occuparci dei grafi random. Ricordando la definizione 1.3.4, chiamiamo T^α la teoria quasi certa relativa alla successione $p(n) = n^{-\alpha}$.

Modelli semigenerici e grafi random

Iniziamo definendo le varie nozioni che incontreremo.

Definizione 3.3.1. Fissiamo $A \subseteq B$ e una funzione iniettiva $f\colon \mathrm{v}(A) \to n$.

1. Sia $G \in \Omega_n$. Una funzione iniettiva $g\colon \mathrm{v}(B) \to n$ è un *omomorfismo su A in G* se estende f e verifica questa proprietà: per ogni $x \in \mathrm{v}(B)$ e $y \in \mathrm{v}(B) \setminus \mathrm{v}(A)$, se $E^B(x, y)$ allora $E^G(g(x), g(y))$.

2. Per ogni $G \in \Omega_n$ e $W \subseteq n$, definiamo
$$N_G(f, A, B, W) = |\{\, g\colon \mathrm{v}(B) \to W \mid g \text{ è un omomorfismo su } A \text{ in } G \,\}|\,.$$

3. $Y_f(c_1)$ è l'evento formato da tutti i grafi $G \in \Omega_n$ tali che
$$n^{\delta_\alpha(B)-\delta_\alpha(A)} \log(n)^{|\mathrm{v}(A)|-|\mathrm{v}(B)|-1} < N_G(f, A, B, n) < c_1 n^{\delta_\alpha(B)-\delta_\alpha(A)}.$$

4. Per ogni $S \subseteq n$ tale che $S \cap \mathrm{ran}(f) = \emptyset$ e $|S| = |\mathrm{v}(B)| - |\mathrm{v}(A)|$, scegliamo una bigezione $g_S\colon \mathrm{v}(B) \to S \cup \mathrm{ran}(f)$ che estende f.[2]

5. Per ogni S come nel punto precedente, definiamo la variabile aleatoria $X_{f,S}\colon \Omega_n \to \{0, 1\}$ ponendo per ogni $G \in \Omega_n$
$$X_{f,S}(G) = \begin{cases} 1 & \text{se } g_S \text{ è un omomorfismo su } A \text{ in } G \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Infine, per $W \subseteq n$ qualunque, definiamo la variabile aleatoria
$$X_{f,W} = \sum \{\, X_{f,S} \mid S \subseteq W \,\}\,.$$

Il collegamento tra la dimensione δ_α e i grafi random è dato dal lemma 3.3.2.

Lemma 3.3.2. *Per ogni $A \subseteq B$, per ogni $f\colon \mathrm{v}(A) \to n$ iniettiva e per ogni $W \subseteq n$, se n è sufficientemente grande si ha*
$$E[X_{f,W}] = \binom{|W| - |\mathrm{v}(A)|}{|W| - |\mathrm{v}(B)|} n^{\alpha(|\mathrm{e}(A)|-|\mathrm{e}(B)|)}.$$

Dimostrazione. Per ciascun $S \subseteq W$ tale che $S \cap \mathrm{ran}(f) = \emptyset$ e $|S| = |\mathrm{v}(B)| - |\mathrm{v}(A)|$, abbiamo
$$E[X_{f,S}] = p(n)^{|\mathrm{e}(B)|-|\mathrm{e}(A)|} = n^{\alpha(|\mathrm{e}(A)|-|\mathrm{e}(B)|)}.$$

Poiché di insiemi S così fatti ce ne sono $\binom{|W|-|\mathrm{v}(A)|}{|W|-|\mathrm{v}(B)|}$, possiamo concludere facilmente che
$$E[X_{f,W}] = E\left[\sum_S X_{f,S}\right] = \sum_S E[X_{f,S}] = \sum_S n^{\alpha(|\mathrm{e}(A)|-|\mathrm{e}(B)|)} = \binom{|W| - |\mathrm{v}(A)|}{|W| - |\mathrm{v}(B)|} n^{\alpha(\mathrm{e}(A)-\mathrm{e}(B))}.$$
□

Il nostro prossimo obiettivo è la proposizione 3.3.4. Premettiamo una definizione.

Definizione 3.3.3. Fissati $A \subseteq B$, definiamo in Ω_n l'evento
$$V(c_1) = \bigcap \{\, Y_f(c_1) \mid f\colon \mathrm{v}(A) \to n \text{ iniettiva} \,\}\,.$$

Più esplicitamente, G sta in $Y_f(c_1)$ se e solo se per ogni funzione iniettiva $f\colon \mathrm{v}(A) \to n$ si ha
$$n^{\delta_\alpha(B)-\delta_\alpha(A)} \log(n)^{|\mathrm{v}(A)|-|\mathrm{v}(B)|-1} < N_G(f, A, B, n) < c_1 n^{\delta_\alpha(B)-\delta_\alpha(A)}.$$

[2]Ovviamente, S e g_S così fatti esisteranno se e solo se $|B| \leq n$.

Proposizione 3.3.4. *Se $A \leq_\alpha B$, allora esiste c_1 tale che*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{n,n^{-\alpha}}(V(c_1)) = 1.$$

Questa dimostrazione richiederà una sequenza di definizioni e lemmi.

Definizione 3.3.5. Diremo che B è un'*estensione primitiva* di A se $A \leq_\alpha B$ e per ogni C con $A \subset C \subset B$ si ha $C \nleq_\alpha B$.

Osservazione 3.3.6. Può essere utile riformulare la definizione 3.3.5 in termini della dimensione δ_α. Se $A \subseteq B$, allora B è un'estensione primitiva di A se e solo se $\delta_\alpha(A) < \delta_\alpha(B)$ e per ogni C con $A \subset C \subseteq B$ si ha $\delta_\alpha(B) \leq \delta_\alpha(C)$.

Lemma 3.3.7. *Sia B un'estensione primitiva di A. Esiste $s > 0$ tale che, posto*

$$m_s = \left[s n^{\alpha \frac{|\mathrm{e}(B)|-|\mathrm{e}(A)|}{|\mathrm{v}(B)|-|\mathrm{v}(A)|}} \right], \tag{3.3}$$

per ogni n sufficientemente grande e per ogni $f\colon \mathrm{v}(A) \to n$ iniettiva, se $|W| = m_s$ allora

$$\mathbf{P}_{n,n^{-\alpha}}(\{\, G \in \Omega_n \mid X_{f,W}(G) = 0 \,\}) < \frac{1}{2}.$$

Dimostrazione. A meno di modificare s, possiamo supporre $W \cap \mathrm{ran}(f) = \emptyset$. La strategia della dimostrazione è questa: maggiorare opportunamente la varianza di $X_{f,W}$ e poi applicare la disuguaglianza di Chebyshev.

Osserviamo innanzitutto che, poiché le $X_{f,S}$ sono funzioni indicatrici, abbiamo $\sum_S \mathrm{Var}(X_{f,S}) \leq E[X_{f,W}]$. Dunque

$$\mathrm{Var}(X_{f,W}) = \sum_S \mathrm{Var}(X_{f,S}) + \sum_{S\neq T} \mathrm{Cov}(X_{f,S}, X_{f,T}) \leq E[X_{f,W}] + \sum_{j=0}^{v} \sum_{|(S\cap T)\setminus A|=j} \mathrm{Cov}(X_{f,S}, X_{f,T}),$$

dove abbiamo posto per comodità $v = |\mathrm{v}(B)| - |\mathrm{v}(A)|$. Nel caso $j = 0$, $S \cap T = \emptyset$ implica che $X_{f,S}$ e $X_{f,T}$ sono indipendenti, quindi $\mathrm{Cov}(X_{f,S}, X_{f,T}) = 0$. D'altra parte, si ha in generale $\mathrm{Cov}(X_{f,S}, X_{f,T}) \leq E[X_{f,S}X_{f,T}]$. Quindi, riassumendo, abbiamo dimostrato che

$$\mathrm{Var}(X_{f,W}) \leq E[X_{f,W}] + \sum_{j=1}^{v} \sum_{|(S\cap T)\setminus A|=j} E[X_{f,S}X_{f,T}]. \tag{3.4}$$

Grazie al lemma 3.3.2, possiamo maggiorare facilmente $E[X_{f,W}]$. Infatti

$$E[X_{f,W}] = \binom{m_s}{v} n^{\alpha(|\mathrm{e}(A)|-|\mathrm{e}(B)|)} \leq \frac{s^v}{v!}. \tag{3.5}$$

Fissiamo ora $1 \leq j \leq v$ e S, T con $|(S \cap T) \setminus A| = j$: vogliamo maggiorare $E[X_{f,S}X_{f,T}]$. Definiamo $C = {g_S}^{-1}(S \cap T)$, cosicché $|\mathrm{v}(C)| = j$. Un facile calcolo mostra che

$$E[X_{f,S}X_{f,T}] \leq n^{\alpha(|\mathrm{e}(A\cup C)|-|\mathrm{e}(A)|-2(|\mathrm{e}(B)|-|\mathrm{e}(A)|))};$$

inoltre, usando il fatto che B è un'estensione primitiva di A (e l'osservazione 3.3.6), si vede che $v(|\mathrm{e}(A \cup C)| - |\mathrm{e}(A)|) \leq j(|\mathrm{e}(B)| - |\mathrm{e}(A)|)$. Otteniamo quindi per ogni j

$$\sum_{|(S\cap T)\setminus A|=j} E[X_{f,S}X_{f,T}] \leq {m_s}^{2v-j} n^{\alpha\left(j\frac{|\mathrm{e}(B)|-|\mathrm{e}(A)|}{v}-2(|\mathrm{e}(B)|-|\mathrm{e}(A)|)\right)} \leq s^{2v-j}$$

e, infine,

$$\sum_{j=1}^{v} \sum_{|(S\cap T)\setminus A|=j} E[X_{f,S}X_{f,T}] \leq \sum_{j=1}^{v} s^{2v-j} \leq vs^{2v-1}. \tag{3.6}$$

Possiamo concludere la dimostrazione. Usando (3.4), (3.5) e (3.6), e osservando che $E[X_{f,W}]$ è un polinomio di grado v in s, concludiamo che

$$\mathrm{Var}(X_{f,W}) \leq \frac{s^v}{v!} + vs^{2v-1} < \frac{E[X_{f,W}]^2}{2}$$

per s abbastanza grande. Applicando la disuguaglianza di Chebyshev,

$$\mathbf{P}_{n,n^{-\alpha}}(\{ G \in \Omega_n \mid X_{f,W}(G) = 0 \}) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_{f,W})}{E[X_{f,W}]^2} < \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Lo scopo del prossimo lemma 3.3.9 è modificare la scelta di W per maggiorare in modo più efficace la probabilità che $X_{f,W} = 0$.

Definizione 3.3.8. Fissiamo B estensione primitiva di A e $W \subseteq n$. Sia s dato dal lemma 3.3.7 e m_s dato da (3.3); poniamo

$$w_k = [1 + km_s \log(n)]. \tag{3.7}$$

Diremo che W è *k-appropriato* se $|W| = w_k$.

Lemma 3.3.9. *Sia B un'estensione primitiva di A. Esiste $k > 0$ tale che, per ogni n sufficientemente grande e per ogni $f\colon \mathrm{v}(A) \to n$ iniettiva, se W è k-appropriato allora*

$$\mathbf{P}_{n,n^{-\alpha}}(\{ G \in \Omega_n \mid X_{f,W}(G) = 0 \}) < \frac{n^{-|\mathrm{v}(A)|-1}}{2}.$$

Dimostrazione. Supponiamo che W contenga $[k\log(n)]$ sottoinsiemi disgiunti W_i, ciascuno di cardinalità m_s. Se $X_{f,W}(G) = 0$, allora per ogni i si ha chiaramente $X_{f,W_i}(G) = 0$; inoltre gli eventi $\{ G \in \Omega_n \mid X_{f,W_i}(G) = 0 \}$ sono indipendenti e, per il lemma 3.3.7, hanno tutti probabilità minore di $\frac{1}{2}$. Da questo segue

$$\mathbf{P}_{n,n^{-\alpha}}(\{ G \in \Omega_n \mid X_{f,W}(G) = 0 \}) \leq 2^{-[k\log(n)]} < \frac{n^{-|\mathrm{v}(A)|-1}}{2}$$

per n, k abbastanza grandi. $\square$

Per non appesantire troppo le notazioni, introduciamo una comoda abbreviazione che useremo nelle prossime due dimostrazioni.

Definizione 3.3.10. Diremo che una proprietà σ vale a.a.s. (da *asymptotically almost surely*) se $\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n, n^{-\alpha}) \models \sigma] = 1$

Siamo pronti per completare la dimostrazione.

Dimostrazione della proposizione 3.3.4. Se B non è un'estensione primitiva di A, il risultato è vero per una semplice induzione su $|\mathrm{v}(B)| - |\mathrm{v}(A)|$; supponiamo allora che B sia un'estensione primitiva di A. La dimostrazione di questo caso è divisa in due parti, corrispondenti alle due disuguaglianze da dimostrare.

Sia k dato dal lemma 3.3.9. Per ogni $f\colon \mathrm{v}(A) \to n$, consideriamo la variabile aleatoria $Z_f\colon \Omega_n \to \omega$ definita da

$$Z_f(G) = |\{ W \subseteq n \mid W \text{ è } k\text{-appropriato e } X_{f,W}(G) = 0 \}| ;$$

notiamo subito che $E[Z_f] < \binom{n}{w_k} n^{-|\mathrm{v}(A)|-1}$. Quindi, usando la disuguaglianza di Markov,

$$\mathbf{P}_{n,n^{-\alpha}}\left(\left\{ G \in \Omega_n \;\middle|\; Z_f(G) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{w_k} \right\}\right) \leq \frac{2E[Z_f]}{\binom{n}{w_k}} < 2n^{-|\mathrm{v}(A)|-1}.$$

Dato che ci sono $n^{|\mathrm{v}(A)|}$ possibili scelte per f, ne segue che a.a.s. per ogni f si ha

$$|\{ W \mid X_{f,W}(G) = 0 \}| \leq \frac{1}{2}\binom{n}{w_k}.$$

Ora, per ogni g estensione di f a B ci sono al più $\binom{n+|\mathrm{v}(A)|-|\mathrm{v}(B)|}{n-w_k}$ k-appropriati W tali che $g(\mathrm{v}(B)\backslash\mathrm{v}(A)) \subseteq W$. Dunque complessivamente il numero di insiemi k-appropriati che contengono un'estensione di f è minore di $N_G(f,A,B,n)\binom{n+|\mathrm{v}(A)|-|\mathrm{v}(B)|}{n-w_k}$; d'altra parte, per quanto visto sopra, questo numero dev'essere anche maggiore di $\frac{1}{2}\binom{n}{w_k}$. Allora a.a.s. per ogni f abbiamo

$$N_G(f,A,B,n)\binom{n+|\mathrm{v}(A)|-|\mathrm{v}(B)|}{n-w_k} \geq \frac{1}{2}\binom{n}{w_k},$$

ma da questo segue facilmente che

$$N_G(f,A,B,n) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{n}{w_k}\right)^{|\mathrm{v}(B)|-|\mathrm{v}(A)|} > n^{\delta_\alpha(B)-\delta_\alpha(A)}(2ks\log(n))^{|\mathrm{v}(A)|-|\mathrm{v}(B)|},$$

concludendo la prima parte della dimostrazione.

Occupiamoci ora dell'altra disuguaglianza. Poiché B è un'estensione primitiva di A, per ogni $b \in \mathrm{v}(B) \setminus \mathrm{v}(A)$ si ha $A \cup \{b\} \preceq_\alpha B$. Quindi, usando il lemma 3.2.6, possiamo scegliere K in modo che per ogni $y \leq n$ ci siano al più K estensioni g di f tali che $g(b) = y$. L'immagine di ogni estensione può intersecare al massimo $K\,|\mathrm{v}(B)|^2$ altre estensioni, quindi abbiamo

$$x = \frac{N_G(f,A,B,n)}{K\,|\mathrm{v}(B)|^2 + 1}$$

estensioni disgiunte. D'altra parte osserviamo che, per un'opportuna costante $c < 1$, ci sono al più

$$c\frac{n^{|\mathrm{v}(A)|+x(|\mathrm{v}(B)|-|\mathrm{v}(A)|)}}{x!}$$

coppie formate da una funzione $f\colon\ \mathrm{v}(A) \to n$ e da un insieme $\{g_1,\dots,g_s\}$ di estensioni disgiunte. Per ogni i, la probablità che g_i sia un omomorfismo su A in G è $n^{\alpha(|\mathrm{e}(A)|-|\mathrm{e}(B)|)}$, quindi la probabilità di avere una coppia con una funzione e s omomorfismi è minore di

$$\frac{n^{|\mathrm{v}(A)|+x(|\mathrm{v}(B)|-|\mathrm{v}(A)|)}}{x!} n^{x\alpha(|\mathrm{e}(A)|-|\mathrm{e}(B)|)}. \tag{3.8}$$

Ricordiamo che, per la formula di Stirling, si ha

$$x! > \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{1}{12(x+1)}};$$

ne segue che se $x \geq 3n^{\delta_\alpha(B)-\delta_\alpha(A)}$ allora (3.8) tende a zero quando $n \to \infty$. Quindi si ha a.a.s. $x \leq 3n^{\delta_\alpha(B)-\delta_\alpha(A)}$ e

$$N_G(f,A,B,n) \leq 3(K\,|\mathrm{v}(B)|^2 + 1)n^{\delta_\alpha(B)-\delta_\alpha(A)},$$

come volevamo. □

Con la proposizione 3.3.4 a nostra disposizione, possiamo dimostrare un importante risultato.

Teorema 3.3.11. *Per ogni assioma* $\phi^m_{A,B,C}$ *si ha* $\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n, n^{-\alpha}) \models \phi^m_{A,B,C}] = 1$.

Dimostrazione. Fissiamo $A \leq_\alpha B$, $m \in \omega$ e $C \in \mathcal{D}^m_A$. Per ogni $f\colon \mathrm{v}(C) \to n$ e per ogni g omomorfismo su A in G, diremo che (G, g) fallisce come testimone per C e f se succede una di queste tre cose:

(i) g non è un'immersione.

(ii) $\mathrm{cl}^m_G(g(B)) \neq g(B) \cup f(C)$.

(iii) $g(B) \cup f(C) \ncong g(B) \otimes_{f(A)} f(C)$.

Dobbiamo dunque dimostrare che a.a.s. per ogni f esiste almeno un'estensione g che non fallisce; per fare ciò maggioreremo, in ciascuno dei tre casi, il numero di estensioni che falliscono.

Ricordando il lemma 3.1.12, notiamo che $C \leq_\alpha B \otimes_A C$ e $\delta_\alpha(B \otimes_A C) = \delta_\alpha(B) + \delta_\alpha(C) - \delta_\alpha(A)$; per la proposizione 3.3.4 si ha quindi a.a.s.

$$N_G(f, C, B \otimes_A C, n) > n^{\delta_\alpha(B) - \delta_\alpha(A)} \log(n)^{|\mathrm{v}(A)| - |\mathrm{v}(B)| - 1}.$$

Per quanto riguarda i punti (i) e (iii), se E è un qualunque grafo che ha gli stessi vertici di $C \otimes_A B$ ma ha lati in più, per la proposizione 3.3.4 abbiamo a.a.s.

$$N_G(f, C, E, n) < c_1 n^{\delta_\alpha(E) - \delta_\alpha(A)} < n^{\delta_\alpha(B \otimes_A C) - \delta_\alpha(A)} \log(n)^{|\mathrm{v}(A)| - |\mathrm{v}(B)| - 1}.$$

Per quanto riguarda il punto (ii), prendiamo $D \in \mathcal{D}^m_{B,C}$. Se $C \not\leq_\alpha D \cup B$ allora per il lemma 3.2.6 $N_G(f, C, D \cup B, n)$ è minore di una costante K. Se invece $C \leq_\alpha D \cup B$, allora osserviamo che $\delta_\alpha(D \cup B) < \delta_\alpha(B \cup C)$ e concludiamo, di nuovo grazie alla proposizione 3.3.4, che a.a.s.

$$N_G(f, C, D \cup B, n) < c_1 n^{\delta_\alpha(D \cup B) - \delta_\alpha(C)} < n^{\delta_\alpha(B \cup C) - \delta_\alpha(C)} \log(n)^{|\mathrm{v}(A)| - |\mathrm{v}(B)| - 1}.$$

Ora, è chiaro che (a meno di isomorfismo) il numero dei C per cui esiste (G, g) che fallisce come testimone non dipende da n: sarà minore di un certo L che dipende solo da $|\mathrm{v}(A)|$, $|\mathrm{v}(B)|$ e m. Ma allora il numero di tutte le possibili (G, g) che falliscono è minore di

$$L n^{\delta_\alpha(B \otimes_A C) - \delta_\alpha(A)} \log(n)^{|\mathrm{v}(A)| - |\mathrm{v}(B)| - 1}.$$

In conclusione, la probabilità che esista un f tale che tutte le sue estensioni falliscono tende a 0, dunque la probabilità che per ogni f ci sia almeno un'estensione che testimoni la semigenericità tende a 1, e questo ci dà la tesi. $\square$

Il teorema di Baldwin e Shelah

Siamo finalmente arrivati a destinazione:

Teorema 3.3.12 (Baldwin e Shelah [1])**.** $T^\alpha = \mathrm{Th}(M_\alpha)$.

Dimostrazione. Sia σ un enunciato tale che $M_\alpha \models \neg\sigma$; dimostriamo che σ non sta in T^α. Grazie alla proposizione 3.2.9 sappiamo che M_α è semigenerico, quindi per il corollario 3.2.11 $\neg\sigma$ deve essere vera in ogni modello semigenerico. Usando il teorema 3.3.11, possiamo concludere che $\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n, n^{-\alpha}) \models \neg\sigma] = 1$.

Viceversa, sia σ un enunciato che non sta in T^α; dimostriamo che $M_\alpha \models \neg\sigma$. Il corollario 3.2.11 e il teorema 3.3.11 ci dicono che T^α è completa, quindi $\neg\sigma$ deve essere in T^α. Da questo, per la parte già dimostrata, segue che $M_\alpha \models \neg\sigma$. $\square$

In particolare, dalla completezza di T^α (e dal teorema 1.3.6) otteniamo il seguente risultato, che enunciamo esplicitamente data la sua importanza.

Teorema 3.3.13 (Shelah e Spencer [11]). *Per ogni $\alpha \in \,]0,1[$ irrazionale, la successione $p(n) = n^{-\alpha}$ soddisfa la legge zero-uno.*

Finora non abbiamo detto nulla sul caso in cui α è un numero razionale, e comunque non diremo molto. Ci limitiamo a enunciare un esempio, tratto da Spencer [12, p. 103]; la dimostrazione non è elementare e fa uso dei metodi sviluppati in [4].

Esempio 3.3.14. Sia K_7 il grafo completo su 7 vertici, cioè $\mathrm{v}(K_7) = 7$ e $|\mathrm{e}(K_7)| = \binom{7}{2}$. Sia inoltre σ la proprietà "non avere un sottografo isomorfo a K_7". Risulta che

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n, n^{-\frac{1}{3}}) \models \sigma] = e^{-\frac{1}{7!}},$$

quindi la successione $p(n) = n^{-\frac{1}{3}}$ non soddisfa la legge zero-uno.

Per una trattazione completa del caso razionale, rimandiamo all'esauriente tesi di dottorato di Brody [3].

Bibliografia

[1] John T. Baldwin e Saharon Shelah. «Randomness and Semigenericity». In: *Transactions of the American Mathematical Society* 349.4 (1997), pp. 1359–1376.

[2] John T. Baldwin e Niandong Shi. «Stable Generic Structures». In: *Annals of Pure and Applied Logic* 79.1 (1996), pp. 1–35.

[3] Justin Brody. «On the Model Theory of Random Graphs». Tesi di dott. University of Maryland, 2009.

[4] P. Erdős e A. Rényi. «On the Evolution of Random Graphs». In: *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences.* A 5 (1960), pp. 17–61.

[5] Ronald Fagin. «Probabilities on Finite Models». In: *The Journal of Symbolic Logic* 41.1 (1976), pp. 50–58.

[6] Roland Fraïssé. «Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres». In: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure.* 3ª ser. 71.4 (1954), pp. 363–388.

[7] Haim Gaifman. «Concerning Measures in First Order Calculi». In: *Israel Journal of Mathematics* 2.1 (1964), pp. 1–18.

[8] Yu. V. Glebskii et al. «Range and Degree of Realizability of Formulas in the Restricted Predicate Calculus». In: *Kibernetika* 5.2 (1969), pp. 17–27.

[9] Wilfrid Hodges. *Model Theory.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 42. Cambridge University Press, 1993.

[10] Ehud Hrushovski. «A Stable $\aleph_0$-categorical Pseudoplane». Preprint. 1988.

[11] Saharon Shelah e Joel Spencer. «Zero-One Laws for Sparse Random Graphs». In: *Journal of the American Mathematical Society* 1.1 (1988), pp. 97–115.

[12] Joel Spencer. *The Strange Logic of Random Graphs.* Algorithms and Combinatorics 22. Springer, 2001.