

## Enfoques para el estudio didáctico de conceptos del Cálculo

*Eric Hernández Sastoque\**

*Lucía Zapata Cardona\*\**

### RESUMEN

En este artículo se presentan algunas reflexiones sobre resultados de investigaciones relacionadas con la comprensión de conceptos del cálculo presentes en la Educación Secundaria y Universitaria, como parte del avance de la configuración del estado del arte de una investigación doctoral en Educación Matemática. Las reflexiones presentadas se enmarcan en trabajos adelantados en programas de investigación sobre los

procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el análisis matemático, bajo diferentes enfoques epistemológicos como el cognitivo y sociocultural, y aproximaciones como la onto-semiótica. En cuanto a la metodología utilizada, se trata de una revisión documental para establecer descripciones, análisis o conclusiones.

**Palabras clave:** cálculo, epistemología, procesos cognitivos, sociocultural, comprensión.

---

\* Universidad del Magdalena/Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: ehernandezs@unimagdalena.edu.co

\*\* Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: luzapata@ayura.udea.edu.co

## PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Con respecto a la formación matemática de los jóvenes que estudian los últimos años de la Educación Secundaria o inician sus estudios universitarios es de gran importancia atender, desde los aportes en el área de la investigación educativa, los temas relacionados con las aproximaciones a la comprensión de los conceptos que involucra el análisis matemático, en particular los conceptos correspondientes al cálculo que estén presentes en la transición de la Educación Secundaria a la universitaria, más aún, cuando en el ámbito de la educación matemática se tiene que tanto algunos docentes universitarios como de la educación secundaria muestran preocupación por el fenómeno relacionado con el elevado número de estudiantes de primer año de estudios universitarios que reprueban los cursos de Cálculo. Para el caso de los que aprueban dichos cursos, la inquietud se centra en las dificultades que se presentan en la comprensión, aplicación o profundización de los conceptos involucrados en estos cursos durante el desarrollo de la carrera universitaria.

Por otra parte, el estudio de los conceptos relacionados con el análisis matemático ha ocupado a los investigadores en educación matemática alrededor de treinta años bajo diferentes enfoques epistemológicos; así, visto desde la investigación educativa, se aprecia la diversidad de paradigmas existentes que muestran que la investigación está lejos de ser un campo unificado, y que si bien esto contribuye a la riqueza del mismo, de igual forma dificulta el uso y síntesis de resultados de investigación (Artigue, 2003). Por lo tanto, se considera pertinente presentar algunas características generales de teorías o aproximaciones a la comprensión de conceptos propios del cálculo, con el propósito de contribuir al reconocimiento de diversos enfoques en esta temática. Este ejercicio puede conducir al enriquecimiento del debate sobre marcos referenciales en investigaciones en el área de la educación matemática, que le apuesten al tratamiento del aprendizaje del cálculo, y con ello abordar problemáticas educativas en las escuelas y universidades.

Se espera que a través de la presentación de algunas reflexiones sobre el aporte de investigaciones desarrolladas bajo enfoques cognitivista, aproximaciones “sociocultural” o enfoque onto-semiótico, podamos analizar, sin pretensiones de exhaustividad, algunos elementos diferenciadores o característicos que permitan una mejor explicación de los fenómenos relacionados con el aprendizaje de conceptos del cálculo.

## MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Enfoque cognitivo. Las investigaciones de tipo cognitivo centran su principal atención en el individuo; se presentan en un primer momento investigaciones sobre el aprendizaje del alumno y, al considerar aspectos relacionados con el profesor, se extiende el objeto de investigación a procesos de enseñanza-aprendizaje considerando propiedades del alumno o del profesor como representaciones, valores, etc. Este tipo de estudios es cuestionado por el hecho de que la tradición psicologista no tiene suficientemente en cuenta el aspecto social (Font, 2002).

Este enfoque cognitivo está presente en muchas investigaciones de la educación Matemática interesadas en los esquemas mentales de los alumnos o de los profesores. Entre las líneas de investigación que se destacan dentro de este enfoque están: pensamiento matemático avanzado y la teoría de los campos conceptuales. A continuación consideraremos algunos elementos explicativos sobre la línea de pensamiento matemático avanzado.

Esta línea de investigación se genera alrededor de 1985 en el seno del congreso Psicología de la Educación Matemática (PME por sus siglas en inglés Psychology of Mathematics Education), cuando se forma un grupo de trabajo cuyo objetivo era estudiar la naturaleza del llamado pensamiento matemático avanzado, y en particular, profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Tall, 1991). Entre estos procesos se encuentran la abstracción, la representación, la visualización y la conceptualización de naturaleza más psicológica que otros procesos cognitivos de naturaleza matemática como definir y demostrar, que también están presentes.

Ahora, en la práctica docente es común observar diferencias entre los conceptos formulados por las matemáticas y las interpretaciones que los estudiantes hacen de ellos. Para ello, Tall y Vinner (1981) definieron lo que se llamó *concept image* (imagen conceptual) como toda la estructura asociada al concepto, que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática, la cual es lo que evocamos cuando escuchamos o vemos el nombre de un concepto, en vez de el *concept definition* (definición del concepto) (Vinner, 1991). Vinner considera la existencia de dos lugares diferentes en nuestra estructura cognitiva: uno para *concept definition* y el otro para *concept image*, donde puede haber interacción entre los dos, aunque se pueden formar de manera independiente.

Por otra parte, para el análisis teórico de un concepto, el grupo de investigación dirigido por Ed Dubinsky propuso un modelo cognitivo que describe las construcciones mentales específicas que un estudiante podría elaborar con el fin de desarrollar su comprensión de un concepto. Este análisis teórico se denominó descomposición genética del concepto, para lo cual se considera que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente construidos, para formar acciones; luego, las acciones se interiorizan para formar procesos, los cuales se encapsulan para formar objetos. Entonces, los objetos pueden ser des-encapsulados hacia los procesos y finalmente las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas. Esta teoría se conoce en inglés como APOS (Action, Process, Object, Schema) (Azcárate & Camacho, 2003).

Aproximaciones de tipo sociocultural. La investigación en educación matemática durante los últimos años ha tomado interés sobre el contexto social de la clase de matemáticas, para lo cual, el rótulo de socio-cultural se usa para denotar epistemologías que ven al individuo como situado dentro de culturas y contextos sociales. Es así como el conocimiento es considerado conocimiento cultural y por lo tanto socialmente construido, potencialmente cambiante y regulado socialmente. Lo que implica tomar distancia de un conocimiento a priori y construido individualmente (Sierpiska & Lerman, 1996). En los enfoques socioculturales el conocimiento es producido por sujetos concretos, los cuales se identifican como un sujeto que piensa y siente dentro de un trasfondo cultural, en oposición a la concepción burguesa-liberal del sujeto constructivista caracterizado por un poder de autodeterminación y cuyos proyectos y significados emanan del propio sujeto (Radford, 2011).

Una de las aproximaciones desarrolladas bajo este enfoque es la teoría de la actividad, en la cual se toma el hecho de que a través de herramientas culturales se mediatizan la sociedad y la cultura; por lo tanto, las acciones del individuo en una actividad involucran cognición, cultura y afecto, motivadas por la perspectiva del individuo. Otra aproximación importante que promueve una visión socio-cultural es el interaccionismo, para el cual, el aprendizaje no es el intento de la mente individual de adaptarse a un entorno, sino se presenta como una interacción con la cultura de la clase, la cual también se ve afectada en su constitución. En este sentido, los significados están constituidos en interacciones y no son generados por construcciones de mentes individuales ni son atributos de una mente colectiva de una sociedad. Algunos de los problemas centrales para la Educación Matemática, desde el interaccionismo son: ¿Cómo se constituyen interactivamente los significados matemáticos

en las diferentes culturas de la clase de matemática?, ¿Cómo se estabilizan estos significados?, ¿Cómo son estos significados y cómo dependen del tipo de cultura de la clase en que evolucionan? (Sierpinska & Lerman, 1996).

Por último, desde esta misma perspectiva sociocultural, se presenta la teoría de la objetivación (to), la cual plantea que las didácticas disciplinares y particularmente la didáctica de las matemáticas deben ocuparse tanto del saber como del ser, y no limitarse solamente a la difusión de saberes disciplinares. Es así como el aprender se asume no como un simple adquirir de conocimientos sino como un proceso formativo y trans-formativo del ser, del sujeto que aprende, con un reconocimiento de responsabilidades no solo de las que le atañen en lo personal sino en su compromiso en una cadena histórica del ser, donde está inmersa la realización de los otros seres. La TO desarrolla dos constructos teóricos interrelacionados, denominados objetivación y subjetivación, para teorizar la evolución de formas culturales de pensamiento y ser. Las objetivaciones son procesos sociales, donde el estudiante dota de significados a los objetos culturales matemáticos y de la lógica cultural de estos, alcanzando una comprensión crítica. Las subjetivaciones son procesos intersubjetivos, donde el estudiante se reconoce y es reconocido como miembro de una comunidad sociocultural, a través de su participación en prácticas sociales. Entre las preguntas de investigación desde la TO, se plantean las que se refieren a dar cuenta de los procesos de objetivación y subjetivación (Radford, 2011).

Enfoque onto-semiótico (EOS). Este enfoque se presenta como una perspectiva sistémica e interdisciplinaria para enfrentar la complejidad de la educación matemática como campo de investigación, la cual podría ayudar a superar algunas limitaciones para el análisis de la cognición e instrucción matemática. La formulación de nociones clave para el EOS como: práctica matemática, objeto matemático, función semiótica, entre otras, permitiría una articulación coherente con otros marcos teóricos, como el constructivismo social, el enfoque socioepistemológico, el enfoque etno-matemático y el sociocultural (Godino, Batanero, & Font, 2007).

## CONCLUSIONES

En educación matemática hay una riqueza de problemas de investigación que pueden surgir para estudiar el aprendizaje y enseñanza del cálculo; esta riqueza va acompañada de una variedad de aproximaciones que divergen en sus enfoques epistemológicos. Sin embargo, actualmente existen estudios y programas de investigación que abordan algunos de estos problemas inten-

tando explicar los fenómenos involucrados a través de constructos teóricos con cierta articulación de diversos enfoques. Por lo tanto, es conveniente estudiar diferentes enfoques teóricos presentes en una disciplina en crecimiento y fortalecimiento como la educación matemática, lo cual permitirá identificar los marcos de referencia más adecuados a las características y condiciones del problema de investigación de interés.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X No. 2, 117–134.
- Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X No. 2, 135–149.
- Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de la Matemáticas. *Revista EMA*, 7 No.2, 127–170.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic approach to research in Mathematics Education. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1–2), 127–135.
- Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la Didáctica de las Matemáticas. In J. Vallès, D. Álvarez & R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docent intervenció, innovació, investigació Girona (Spain): Documenta Universitaria*.
- Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827–876). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall D. y Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151–169.
- Vinner, S. (1991). The role of denitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.