Aportes didácticos en el contexto del análisis, desde algunos referentes históricos

René Alejandro Londoño Cano[*]

RESUMEN

El propósito de la conferencia es compartir estrategias didácticas para la comprensión de algunos conceptos del análisis, tales como el paso al límite, derivada, integral, la idea de proceso infinito, entre otros, que surgen, de un lado, de la experiencia como docente mediante la puesta en escena de ciertos momentos históricos o períodos de evolución histórico-epistemológica, por otro lado, de la experiencia como investigador mediante la participación en algunos estudios enmarcados en teorías para la comprensión de conceptos matemáticos, que han encontrado metodologías alternativas e innovadoras para su enseñanza, basados en la visualización matemática.

[*] Universidad de Antioquia Direcciones electrónicas: rene2@une.net.co london@matematicas.udea.edu.co

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la comprensión de los conceptos matemáticos, en particular, del análisis matemático, continúa siendo objeto de interés por parte de los investigadores en educación matemática, dados múltiples factores como la alta deserción del sistema educativo, la desmotivación de los estudiantes generada por las ideas abstractas que solo pueden percibirse con el *ojo de la mente,* la idea de infinito, entre otros, que obligan a crear soluciones para la enseñanza y aprendizaje de algunos conceptos.

Algunas investigaciones en el campo de la educación matemática han reflexionado sobre este hecho y proporcionan estudios en el ámbito pedagógico, didáctico, histórico y epistemológico que posibilitan cada vez más el acceso de las matemáticas a los aprendices. Un buen ejemplo es la teoría de los obstáculos epistemológicos (Bachelard, 1938). Bachelard indica que los obstáculos epistemológicos ocurren en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica educacional. Para él, los obstáculos epistemológicos tienen dos características esenciales:

- Son un constitutivo inevitable y esencial del conocimiento para ser adquirido.
- Están basados, por lo menos en parte, en el desarrollo histórico del concepto.

Otros autores se han interesado también en los obstáculos epistemológicos. Guy Brousseau define un obstáculo epistemológico como un conocimiento que funciona bien en un cierto dominio de actividad y, por consiguiente, comienza bien establecido, pero este falla para trabajar satisfactoriamente en otros contextos donde funciona mal y lleva a contradicciones. Por eso comienza la necesidad de destruir la insuficiencia original, el conocimiento mal formado, para remplazarlo con nuevos conceptos que operan satisfactoriamente en el nuevo dominio. El rechazo y la claridad de tal obstáculo son una parte esencial del conocimiento en sí mismo. La transformación no puede ser realizada sin desestabilizar las ideas originales colocándolas en un nuevo contexto donde claramente fallan. Esto de este modo requiere un gran esfuerzo de reconstrucción cognitiva.

Se trata entonces de exhibir algunos referentes históricos de algunos conceptos del análisis en particular, que permiten la consolidación de estrategias didácticas en las aulas de clase y los laboratorios de matemáticas, con el fin de propiciar la comprensión matemática en los estudiantes.

LA IMPORTANCIA DE LOS REFERENTES HISTÓRICOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Indudablemente, la idea de infinito ha permeado todas las etapas de la evolución histórica de las matemáticas: desde el siglo V a. C. con el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables en un intento afortunado por demostrar la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con respecto al lado, pasando por el método de exhaución de Arquímedes en el siglo III a. C., la idea de *sumación continua* para calcular una distancia bajo el grafo velocidad-tiempo de Oresme en el Medioevo, los indivisibles de Cavalieri, hasta llegar a los infinitesimales de Newton. De hecho, todos los enfoques geométricos de los griegos, desde la llamada época del *horror al infinito* y el progresivo avance de las técnicas aritméticas posteriores, permiten que la idea de infinito sea aceptada y modificada por Newton y algunos de sus antecesores y predecesores, para dar paso así a lo que hoy se conoce como el análisis matemático.

Considerando que el infinito es la idea más trascendental y poderosa en las técnicas del análisis matemático, que hace que los antiguos procesos geométricos y aritméticos artificiosos sean fácilmente computables, surge desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas una seria dificultad, la cual se formula en el sentido de que los algoritmos y las técnicas operativas usualmente encubren ciertas nociones matemáticas importantes que dificultan la comprensión del concepto en cuestión. Dicho de otra manera, las técnicas infinitesimales por sí solas, aunque permiten acceder al resultado deseado de forma óptima, desde el punto de vista didáctico, en muchas ocasiones, no vinculan los entes matemáticos puestos en escena con los procedimientos algorítmicos ejecutados.

Se logra así identificar en las prácticas educativas las aulas de clase, cómo muchos estudiantes calculan derivadas, pero no las comprenden como la pendiente de un recta tangente o una razón de cambio (de hecho muchos no comprenden la idea de recta tangente como un concepto de aproximación local); calculan integrales, pero no las comprenden como el límite de una suma de áreas infinitas o aplican el teorema fundamental del cálculo, pero no alcanzan a percibir la relación extraordinaria que exhibe entre las cuadraturas y las tangentes. Mucho más grave aún es que nuestra realidad actual evidencia cómo un gran porcentaje de los docentes de matemáticas evalúa precisamente la aplicación de los algoritmos con resultados favorables, pero estudios posteriores sobre los mismos estudiantes indican una baja comprensión de los conceptos.

Dicho lo anterior, ¿cuál podría ser la importancia que los referentes históricos tienen en las consideraciones de tipo didáctico en el análisis matemático?

Veamos algunas consideraciones al respecto:

> Los conceptos y las ideas matemáticas que se tratan en la enseñanza secundaria, son presentados a los alumnos de una forma cerrada y acabada. Se olvida que han surgido después de un largo proceso de gestación, en las que las intuiciones más fecundas con otras estériles, han configurado sus presentaciones sucesivas. A lo largo de la historia, estas ideas han sido generadas por diversos tipos de problemas, prácticos o teóricos, pertenecientes a la propia matemática o a otras disciplinas. El conocimiento de estos problemas, y el estudio de la evolución de su tratamiento y de los nuevos problemas que han generado, proporciona los fundamentos para la comprensión de las ideas y conceptos que de ellos han resultado (Nolla, 2001).

> La matemática presentada como un sistema de verdades, acabado y ordenado, sin referencia al origen y propósito de sus conceptos y teorías tiene su encanto y satisface una necesidad filosófica. Pero esta actitud introvertida en el campo de la ciencia no es adecuada para los estudiantes que buscan independencia intelectual más que adoctrinamiento. Menospreciar las aplicaciones y la intuición lleva al aislamiento y a la atrofia de la matemática (Courant & Jhon, 1974).

> Los maestros, estudiantes, y los amantes del estudio en general, que quieran comprender realmente las fuerzas y las formas de la ciencia, han de tener alguna comprensión del estado presente del conocimiento como un resultado de la evolución histórica. De hecho la reacción contra el dogmatismo en la enseñanza científica ha despertado un interés creciente hacia la historia de la ciencia. Durante las décadas recientes se han hecho grandes progresos en la investigación de las raíces históricas de la ciencia en general y de la matemática en particular (Boyer, 1949).

> [...] Este principio [biogenético], creo yo, debiera ser seguido también, al menos en sus líneas generales, en la enseñanza de la matemática lo mismo que en cualquiera otra enseñanza; se debería conducir a la juventud, teniendo en cuenta su natural capacidad y disposición, lentamente hasta llegar a las materias elevadas y, finalmente, a las formulaciones abstractas, siguiendo el mismo camino por el que la humanidad ha ascendido desde su estado primitivo a las altas cumbres del conocimiento científico [...]. Un inconveniente fundamental para la propagación de tal método de enseñanza, adecuado al alumno y verdaderamente científico es, seguramente, la falta de conocimientos históricos que se nota con sobrada frecuencia. Para combatirlo gustosamente me he detenido en consideraciones históricas [...];

> así ha podido verse cuán lentamente han ido formándose todas las ideas matemáticas, cómo han surgido en forma confusa, pudiera decirse que de procedimientos, y sólo después de un largo desarrollo han llegado a tomar la fuerza rígida y cristalizada de la exposición sistemática (Klein, 1927).

Es evidente que las anteriores consideraciones respaldan que desde el punto de vista didáctico, la naturaleza del aprendizaje de las matemáticas, en particular para lo que nos concierne en el análisis, presenta sus formas iniciales en la intuición de los estudiantes (en la historia, en la intuición de los matemáticos) con el uso de visualizaciones matemáticas mediante gráficos, para luego pasar a la formalización; tales intuiciones pueden ser estudiadas y comprendidas en el campo de la educación matemática usando como herramienta fundamental el rastreo de referentes históricos que permitan caracterizarlas y así, finalmente, consolidarlas como aportes didácticos .

LA IMPORTANCIA DE LA VISUALIZACIÓN MATEMÁTICA

El mecanismo de la visualización matemática ha sido fundamental a través de la evolución histórica de los conceptos matemáticos, desde las formas iniciales intuitivas del concepto, y ha sido objeto de estudio en el desarrollo de varias propuestas de investigación en educación matemática, dadas las ventajas que ofrece al momento de aplicar las intervenciones en las aulas con los estudiantes, más aún cuando se trata de abrir las puertas hacia la formalización en matemáticas.

De acuerdo con Guzmán, la visualización en matemáticas no es lo mismo que lo que algunas corrientes de psicólogos llaman visualización. Para ellos la visualización es una técnica, entroncada en el análisis transaccional iniciado por Eric Berne (años cincuenta), que pretende una reestructuración de ciertos aspectos del subconsciente. Tiene mucho más que ver con componentes afectivos que con componentes propiamente cognitivos. Con la visualización matemática se pretende otra cosa. Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas en el campo de estudio (De Guzmán, 2001).

Una gran parte de la visualización usada en investigaciones en educación matemática se ha desarrollado mediante la capacidad de imaginación y representación con instrumentos convencionales como lápiz, papel, tiza o tablero. La fidelidad y exactitud de tales representaciones debe estar en función del tipo de trabajo de visualización que se requiere. No tiene objeto utilizar compás y regla cuando con un dibujo a mano suficientemente claro queda sugerido en la medida en que se quiere presentar, como es el caso en la mayor parte de los problemas del análisis matemático en los que una visualización sea suficiente. Pero es claro que, en la actualidad, se dispone de un instrumento extraordinariamente potente, el computador, cuya influencia sobre el quehacer matemático se va dejando sentir en muchos aspectos y uno de ellos es, obviamente, la visualización.

En lo que se refiere, en particular, al análisis matemático, la existencia de programas matemáticos, tales como DERIVE®, MAPLE®, MATHEMATICA®, CABRI®; GEOGEBRA®, entre otros, con capacidades de representación extraordinariamente versátiles e interactivas, aplicables en todos los campos imaginables de la matemática actual, está cambiando ya nuestra forma misma de practicar tanto las actividades de investigación como las de la interacción enseñanza-aprendizaje a todos los niveles.

LA CONSOLIDACIÓN DE ALGUNAS ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

A continuación, se describen tres estrategias didácticas, producto de trabajos de investigación para la comprensión de conceptos matemáticos (Londoño & Jurado, 2005), (Lodoño, 2011), cuyos referentes históricos atañen al Medioevo y al siglo XVII, respectivamente. En ellas, previamente a su descripción, se detalla el título, el concepto objeto de comprensión, los conceptos que son tratados de manera encubierta, el mecanismo[1], el objetivo de la intervención y, finalmente, la descripción de la estrategia.

Estrategia n.° 1

Título: La estrategia de las escaleras

Concepto: Convergencia de una serie de términos positivos

Conceptos encubiertos: Sucesión, serie, límite, suma parcial

Mecanismo: Áreas de escaleras

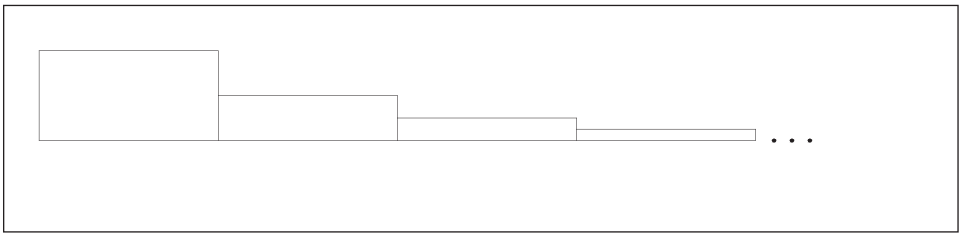
Objetivo: Comprender la convergencia de una serie de términos positivos, como una de las manifestaciones de la noción de límite, mediante la visualización geométrica de una escalera infinita.

De todas las posibles manifestaciones de la noción de límite, se ha elegido

[1] El mecanismo, hace referencia a la visualización matemática que se construye, a partir de la estrategia didáctica.

el concepto de convergencia de una serie de términos positivos, visualizada bidimensionalmente como el área de una superficie geométrica, asociando la noción de término de una serie al área de una superficie y la noción de suma de una serie al área total de la figura geométrica (si la tiene, en el sentido de la definición de convergencia), desarrollando el mecanismo de sumar áreas y comprobar si el área existe mediante escaleras.

La visualización elegida y el mecanismo utilizado están inspirados en un problema propuesto por Sherman y Barcellos (1996), que muestra la manera en la que "Oresme, alrededor del año 1360, sumó la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}$ mediante el esquema de la escalera sin fin que se muestra a continuación:



En esta escalera cada escalón tiene 1 unidad de ancho y duplica la altura del escalón inmediatamente a su derecha. Al observar la escalera de dos formas se pretende demostrar que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots$". Antes de proceder a analizar el problema y generalizar algunos resultados, se definirán algunos términos necesarios que permitirán crear un lenguaje adecuado para alcanzar el objetivo de esta investigación.

Se llamará **escalera** a la disposición de rectángulos de izquierda a derecha, de forma tal que cada rectángulo tenga igual base y esté uno contiguo al otro en forma horizontal. Si cada rectángulo tiene mayor altura que el inmediatamente anterior se denominará **escalera creciente**; si se compone de infinitos rectángulos, **escalera infinita creciente**. Si, por el contrario, cada rectángulo tiene menor altura que el inmediatamente anterior, se denominará **escalera decreciente**; si se compone de infinitos rectángulos, **escalera infinita decreciente**. Asimismo, se llamará **área de una escalera** a la suma de las áreas de los rectángulos que la conforman.

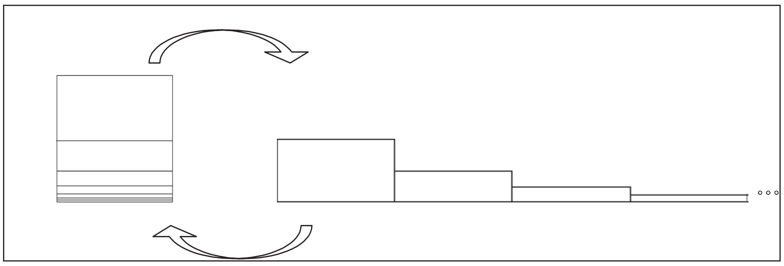
Un concepto implícito en el mecanismo es el de razón. La **razón de una escalera** será el cociente entre las áreas de un rectángulo y el inmediatamente anterior. Por ejemplo, se dirá que la escalera usada por Oresme en el problema anterior es de razón $\frac{1}{2}$.

También el término de escalera aparece en el libro *Proofs without words* de Roger B. Nelson, con las cuales se realizan muchas demostraciones para la convergencia o divergencia de series infinitas. En otros libros de cálculo como el de Leithold, Stewart o Edwards y Penney, las escaleras son usadas para realizar algunas demostraciones de series, aunque usan la expresión de disposición de rectángulos y no la de escalera.

Las escaleras tienen características interesantes, especialmente si se tiene en cuenta la forma de su construcción y la conexión que tienen con los conceptos de superficie y área. Entendiendo como superficie lo que se refiere a la forma y área lo que se refiere a la cantidad de superficie encerrada, ¿tendrán todas las escaleras infinitas una superficie finita?, ¿tendrán todas las escaleras infinitas área finita? Para el cálculo del área de una escalera (cuando el área exista) se requiere del diseño de un mecanismo para sumar infinitas cantidades, lo cual arrojará un resultado finito o no, dependiendo de la forma en que la escalera fue construida. En el proceso de comprensión que se lleva a cabo, el estudiante se moverá en el contexto de escaleras y no de series, haciendo mucho más inteligible y sencilla la obtención y la demostración de resultados, en lo que a series de términos positivos se refiere.

El ámbito histórico ha mostrado que el razonamiento acerca de procesos infinitos cuyo resultado puede ser finito, presenta grandes dificultades para su comprensión. Sin embargo, la representación geométrica bidimensional de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$, visualizada inicialmente como un rectángulo, dividido a su vez en varios rectángulos y luego como una escalera, le permitirá conjeturar al entrevistado, con mayor facilidad, que la suma de las áreas de infinitos rectángulos produce área finita.

La figura muestra dos disposiciones de rectángulos: un rectángulo dividido en varios rectángulos (y la posibilidad de que sea infinitamente divisible) y una escalera infinita decreciente. En ambas, cada rectángulo que la conforma tiene la mitad de la altura del inmediatamente anterior. El entrevistado no tendrá dificultad en afirmar que ambas disposiciones tienen área y podrá aseverar que es la misma. Si se le presenta la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ tendrá dificultades para afirmar que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$, aún más, si solo se le presenta la escalera infinita decreciente, tendrá dificultades para hacer la misma afirmación.



Estrategia n.° 2

Título: La estrategia del doble plano de Barrow

Concepto: La relación inversa entre cuadraturas y tangentes (TFC)[2]

Conceptos encubiertos: Pendiente, tangente, derivada, integral

Mecanismo: Doble semi-plano cartesiano simétrico

Objetivo: Comprender la relación inversa entre cuadraturas y tangentes, mediante la interpretación geométrica de las pendientes y ordenadas de una función en un punto, y el área bajo la curva de la función derivada en un intervalo, para dar paso a la formalización del TFC.

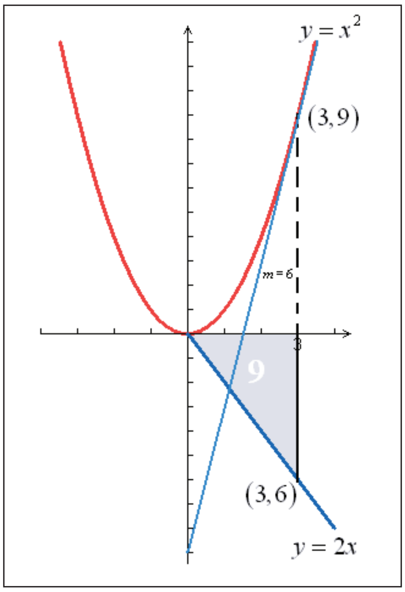
Es una estrategia visual-geométrica inspirada en los trabajos geométricos de Barrow para el TFC, la cual consiste en un *doble semiplano cartesiano simétrico,* esto es, dos semiplanos cartesianos con un eje x común y, encima y debajo de este, dos semi-ejes y positivos con un mismo origen, lo cual implica que ambos semi-ejes quedan sobre una misma recta y solo contengan a los cuadrantes I y II.

En el semiplano superior se grafican las funciones y en el semiplano inferior se grafican las respectivas derivadas.

Esta visualización exige el empleo de figuras simétricas con respecto a un eje (para graficar las derivadas en el semiplano inferior), sin embargo, facilita observar la relación entre las pendientes en la función y las ordenadas en la derivada, al igual que el área bajo la derivada y las ordenadas en la función (El TFC).

La visualización está restringida inicialmente solo para funciones positivas, dada la naturaleza de la construcción inicial expuesta por el ingenioso Isaac Barrow.

[2] TFC abrevia Teorema Fundamental del Cálculo.

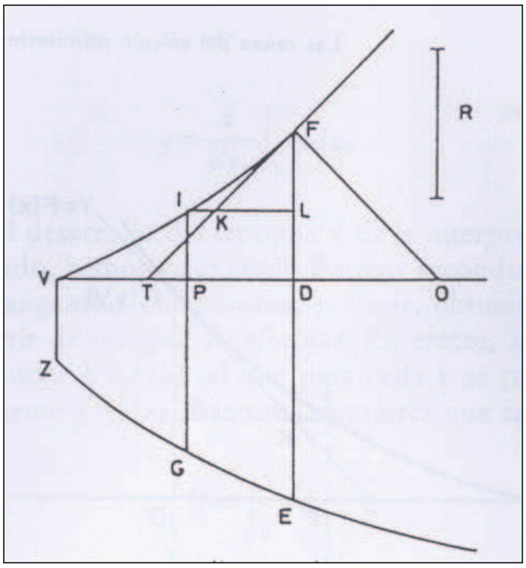


Desde el punto de vista histórico, después de los trabajos sobre cuadraturas y tangentes de Oresme en el Medioevo y los posteriores de Wallis, Fermat, Torricelli, entre otros, la situación era propicia para la unión de las técnicas acerca de *tangentes* y áreas. Sin lugar a dudas, fue Isaac Barrow (1630-1677), quien fuera profesor de Isaac Newton (1642-1727) en Cambridge, el matemático que con mayor precisión formuló el problema de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes. Ya en su *Lectura I* enuncia el principio de Oresme y Galileo, y en su *Lectura X* enuncia y demuestra, con un razonamiento impecable, una relación importante entre cuadraturas y tangentes.

Con referencia a la figura de la página siguiente, Barrow describe (Edwards J. T., 1982):

Sea ZGE una curva cuyo eje es VD. Consideremos las ordenadas $(VZ,\quad PG,\quad DE)$ perpendiculares al eje y continuamente creciendo desde la coordenada inicial VZ; sea VIF una línea tal que si una línea recta EDF es trazada perpendicular al eje VD y cortando a las curvas en los puntos EIF, el rectángulo determinado por DF y una longitud dada R es igual al espacio interceptado $VDEZ$; sea un punto T en el eje VD tal que $DE : DF = R : DT$ y unimos (T con F). Entonces TF cortará a la curva (la cual es la tangente a curva[3]).

3 La tangente *TF* era concebida como la tangente a una circunferencia y no en términos del



Tomemos un punto I en la curva VIF (primeros del lado de F hacia V) y, a través de él, tracemos IG paralelo a VZ e IL paralelo a VD, cortando las líneas dadas como se muestra en la misma Figura; entonces, $LF : LK = DF : DT = DE : R$, es decir, $RxLF = LKxDE$.

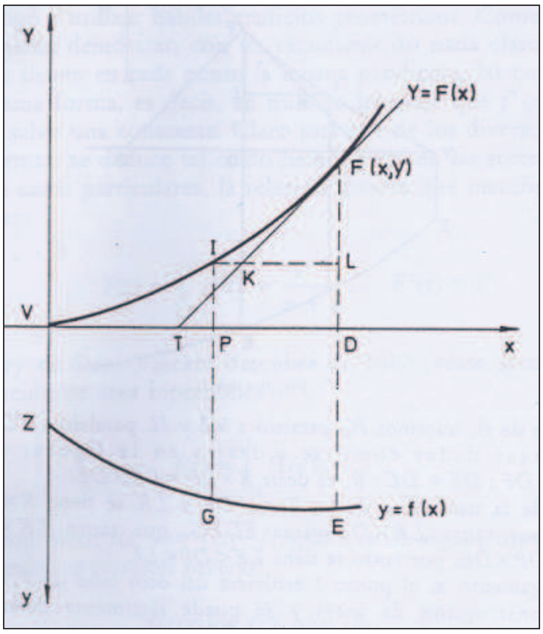
Pero de la naturaleza de las líneas DF y LK se tiene $RxLF = \text{área} \quad PDEG$, por tanto $LKxDE = \text{área} \quad PDEG$, por tanto $LKxDE = \text{área}PDEG < DPxDE$, por tanto se tiene $LK < DP < LI$.

Análogamente, si el punto I estuviera del otro lado de F, se haría la misma construcción de antes y se puede fácilmente demostrar que $LK > DP > LI$.

De aquí se deduce que es bastante claro que toda la línea TKF permanece en o debajo de la curva $VIFI$.

Resultados análogos se obtienen si las ordenadas VZ, PG y DE decrecen continuamente; la misma conclusión se obtiene mediante un argumento similar; solo una particularidad ocurre, a saber: en este caso, al contrario que en el otro, la curva VIF es cóncava respecto al eje VD.

Cálculo Infinitesimal actual (no como concepto de aproximación local).



Corolario. Obsérvese que $DExDT = RxDF = área \quad VDEZ$."

Veamos ciertas conclusiones fundamentales que podemos inferir del resultado de Barrow. Dada una curva $y = f(x)$, donde f es una función creciente y orientada hacia abajo, como lo muestra la siguiente figura, se construye una curva $Y = F(x)$ con la condición de que la ordenada genérica $Y = DF$ representa el área determinada por la curva $y = f(x)$ y las ordenadas $F(o) = VZ$ y $f(x) = DE$, es decir: $Y = \int_0^x ydx.$ [4]

Para construir la tangente a la curva $Y = F(x)$ en el punto $F(x,Y)$, Barrow, partiendo del punto $D = (x,o)$, elige sobre el eje x el punto T, tal que se tenga la relación $DT = \frac{Y}{y} = \frac{DF}{DE}$, y demuestra que la recta TF es la tangente. Ahora bien, como se tiene $\frac{DF}{DT} = DE = y$, el resultado es equivalente a $\frac{dY}{dx} = y$, es decir, $y = \frac{d}{dx}\int_0^x ydx.$ [5]

A través del desarrollo del teorema y de la interpretación que del mismo se ha dado, hemos visto cómo Barrow reconduce el problema inverso de la tangente a cuadraturas, es decir, obtiene *integrales indefinidas* a partir de

[4] Notación usada en la actualidad.

[5] Notación usada en la actualidad.

integrales definidas. En efecto, si se quiere determinar una curva $Y = F(x)$ tal que para cada x se conoce la dirección de la tangente $y = f(x)$, Barrow demuestra que tal curva es $Y = \int_0^x ydx$, ya que tomando el punto T de modo que $DT = \frac{Y}{y}$, TF es la tangente a la curva $y = f(x)$, que como se sabe es única. Lo que no resuelve Barrow es el problema de obtener *integrales definidas* a partir de *integrales indefinidas*, es decir, no resuelve cuadraturas por medio del teorema de inversión, a base de expresarlas en términos de antiderivadas, que es la aplicación esencial del teorema fundamental del cálculo.

Además, el enfoque de Barrow es estrictamente geométrico (Bobadilla, 2008) y solo asegura y prueba que la recta TF es tangente a la curva $Y = F(x)$ en el sentido clásico griego de *la línea recta que toca en un único punto a la curva.* De manera que Barrow, autoimponiéndose un estático lenguaje geométrico, aborta la visión clara y práctica de la interrelación entre los problemas de cuadraturas y tangentes, que en el ámbito cinemático tan claramente aparecían como inversos. Al no sustituir el ente geométrico tangente por el correspondiente ente analítico (derivada), Barrow cercena la posibilidad de generalización y algoritmización que encerraba su magnífico teorema. Barrow descubre un hecho fundamental que vincula las cuadraturas con las tangentes, pero no alcanza a calibrar la trascendental importancia que tiene.

Claro está que Barrow no había reducido a un algoritmo universalmente válido su método de tangentes, y es evidente que la importancia del carácter recíproco de la derivación y la integración queda puesta de manifiesto solo cuando se dispone de un método general para la obtención analítica de las derivadas o geométricamente para construir tangentes. De haber sido así, Barrow hubiera sido el descubridor del cálculo.

Pero fue finalmente Isaac Newton, quien advirtió el inmenso alcance de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes. Cuando llegó a Cambridge en 1661, y durante los años 1665 y 1666, pasados en la granja de su familia para evitar la plaga, fue capaz de sustraerse del purismo geométrico euclidiano de su maestro, desplegando toda la instrumentalización analítica necesaria para reconvertir y desarrollar las ideas geométricas de Barrow, dando a luz un algoritmo automático para la resolución de los problemas de cuadraturas y tangentes: *el teorema fundamental del cálculo* (Stein S. , 1995).

Estrategia n.° 3

Título: La estrategia de la brocha

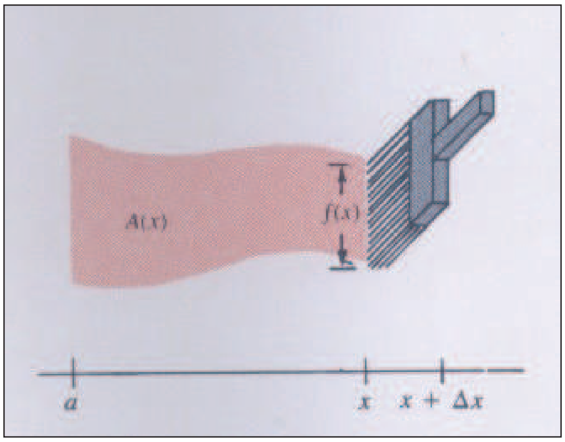
Concepto: El primer TFC

Conceptos encubiertos: Función acumulación, derivada, integral

Mecanismo: El teorema de la brocha

Objetivo: Comprender el aspecto geométrico de la derivada y la integral como operadores inversos.

Se destaca el "teorema de la brocha" como una estrategia visual-geométrica que permite establecer la relación que puede existir entre un área barrida y una longitud (valor de la función). Los textos que exponen esta estrategia son los de (Purcell & Varberg, 2007), (Stein S. , 1995) y (Edwards & D, 2008).



Al respecto, Stein señala:

El primer TFC debe tener sentido para cualquiera que haya pintado una pared con una brocha. Cuanto más ancha sea la brocha, mayor es la longitud del área que se puede cubrir. Supóngase que la brocha se mantiene como se muestra en la Figura y que se desplaza una distancia Δx. El área barrida es aproximadamente "el ancho de la brocha por Δx". Sea $f(x)$ el ancho de la brocha (a medida que se presiona la brocha, $f(x)$ puede aumentar). Luego, $\Delta A \approx f(x)\Delta x$, o bien, $\frac{\Delta A}{\Delta x} \approx f(x)$. Y si $\Delta x \to 0$, se obtiene $\frac{dA(x)}{dx} = f(x)$.

Puesto que $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, se tiene $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$, que es el Primer TFC (Judith Grabiner llama a esto el "teorema del limpiaparabrisas).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bachelard, G. (1938). *la formation de l'esprit scientifique.* Paris: Editions J.

Bobadilla, M. (2008). El teorema Fundamental del Cálculo: Una perspectiva histórica. *Unicauca CIENCIA , 12*, 63-79.

Boyer, C. (1949). *Histroy of the Calculus and its conceptual development.* New York: Dover.

Courant, R., & Jhon, F. (1974). *Introducción al cálculo y al análisis matemático.* México: Limusa.

De Guzmán, M. (2001). *El rincón de la pizarra: Ensayos de visualización en análisis matemático, elementos básicos del análisis.* Madrid: Pirámide.

Edwards, H., & D, P. (2008). *Cálculo con trascendentes tempranas* (7 ed.). México: Pearson, Prentice Hall.

Edwards, J. T. (1982). *The Historical Development of the Calculus.* New York.

Klein. (1927). *Matemática elemental desde un punto de vista superior* (Vol. I). Madrid: Biblioteca Matemática.

Londoño, R. (2011). *la relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de pirie y Kieren.* Tesis de doctorado, Medellín.

Londoño, R., & Jurado, F. (2005). Diseño de entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie, vía áreas de figuras planas. Medellín.

Nolla, R. (2001). Recuperado el Febrero de 2011, de http://www.xtec.es/sgfp/llicencies/200001/resums/molla.htm

Purcell, E., & Varberg, R. (2007). *Cálculo.* México: Pearson Education.

Stein, S. (1995). *Cálculo y geometría analítica* (5 ed., Vol. 1). Bogotá, Colombia: Mc Graw Hill Interamericana S.A.

Stein, S., & Barcellos, A. (1996). *Cálculo y geomtería analítica.* México: Mc Graw Hill.