Las conjeturas y la construcción de conocimiento en clase de geometría

Leonor Camargo
lcamargo@pedagogica.edu.co

Carmen Samper
csamper@pedagogica.edu.co

Patricia Perry
pperryc@yahoo.com.mx

Óscar Molina
ojmolina@pedagogica.edu.co

Armando Echeverry
aecheverri@pedagogica.edu.co

Universidad Pedagógica Nacional

Resumen. En el cursillo *Las conjeturas y la construcción de conocimiento geométrico en clase de geometría* los asistentes deben resolver un problema empleando geometría dinámica. El proceso de solución y las conjeturas que proponen ambientan la discusión sobre dos aspectos que contribuyen a la participación autónoma, relevante y genuina (Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2008) de los estudiantes en la construcción de conocimiento: el papel del instrumento usado para resolver el problema y la mediación semiótica del profesor. El provecho didáctico que puede sacarse de estos aspectos se fundamenta en dos marcos de referencia y se ilustra con el análisis de segmentos del proceso y de las conjeturas producidas por un grupo de estudiantes de un curso de geometría plana de la Universidad Pedagógica Nacional.

Palabras clave: Conjeturas, esquemas de utilización, geometría dinámica, mediación semiótica del profesor.

1. Introducción

Nuestro grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* ha ido avanzado en la conceptualización del constructo ‘actividad demostrativa’ que fundamenta nuestros proyectos de investigación, interdependientes de una innovación curricular que se viene llevando a cabo en los cursos de la línea de geometría de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. La complejidad de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración exige el análisis de diversos fenómenos o aspectos problemáticos, algunos de los cuales hemos atendido en estudios previos, tales como el uso de herramientas de mediación, el tipo de tareas, las acciones del profesor, el tipo de argumentos producidos por los estudiantes, las problemáticas asociadas a la comprensión y uso de proposiciones condicionales (Camargo, Perry y Samper, 2005; Camargo, Samper y Perry, 2006; Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006; Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2008; Camargo, Samper, Perry, Molina y Echeverry, 2009; Camargo, Perry y Samper, 2010). En este momento, nuestro interés se concentra en dos aspectos determinantes en el aula: la participación de los estudiantes en la producción de conjeturas, específicamente los procedimientos que realizan con un instrumento de construcción, y la organización y tratamiento dado a ellas para que evolucionen hacia un teorema que se demuestra debido a la mediación semiótica del profesor. Este curso se constituye en una oportunidad para socializar los avances investigativos.

Fundamentamos los análisis sobre el uso dado a las conjeturas en clase desde dos perspectivas teóricas que ahondan en asuntos de carácter sociocultural: la *aproximación instrumental*, sugerida por Verillon y Rabardel (1995, citado en Arzarello y Paola, 2008), que nos sirve de lente con el cual explorar y explicar el uso de la geometría dinámica como un instrumento que influye en la producción de conjeturas por parte de los estudiantes; y la *mediación semiótica del profesor*, teoría utilizada por Bartolini Bussi y Mariotti (2008) para referirse al rol del profesor cuando intenta hacer evolucionar las producciones de los estudiantes, significados personales, hacia significados matemáticos, propios de la cultura matemática de referencia. Hemos previsto este curso en dos sesiones, cada una de las cuales se centra en una de las aproximaciones teóricas mencionadas.

Sesión 1

Los asistentes al curso resuelven, en parejas, usando Cabri, el siguiente problema:

Sean rayo BA y rayo BE dos rayos opuestos y BK otro rayo. Sean el rayo BG y el rayo BD bisectrices de los ángulos $\angle$ABK y $\angle$KBE. ¿Cuál debe ser la posición del rayo BK para que la medida del ángulo GBD sea máxima?

Una vez resuelto el problema, se socializan los diferentes procedimientos de construcción de la figura con la que se representa el enunciado y se reconstruyen algunos procedimientos para identificar diferencias. Luego, se exponen fragmentos de una clase realizada con estudiantes de licenciatura en matemática, en la que se propuso a parejas de estudiantes el mismo problema, y se presenta a los asistentes el análisis de la aproximación instrumental realizado por el grupo de investigación. Se centra la atención en el provecho que se puede sacar de las producciones de los estudiantes para la construcción de conocimiento. Se espera que los asistentes puedan reconocer su actuación y la interpreten a la luz del análisis. Posteriormente, se presenta el fundamento teórico del análisis y se recogen las conjeturas propuestas por los asistentes. En los párrafos siguientes incluimos una síntesis del marco teórico que fundamenta los análisis.

De acuerdo con la aproximación instrumental, todo aprendizaje está mediado por *artefactos*. Entendemos el término "artefacto", en el sentido expresado por Rabardel (en Bartolini Bussi y Mariotti, 2008) como cualquier objeto material o simbólico, tal como un utensilio de cocina, una herramienta para afilar un cuchillo, un texto escrito que se somete a la crítica o un discurso oral para argumentar a favor de algo, creado por el hombre con fines específicos. Desde nuestro punto de vista, los artefactos, como producto de la actividad humana, son tangibles y tienen existencia física independiente de la situación que les dio origen. Por ello, pese a que Bartolini Bussi y Mariotti (2008) incluyen los gestos como ejemplos de artefactos, nosotros preferimos no considerarlos como tal.

Para que un artefacto sea útil en la generación de conocimiento, éste debe constituirse, para quien aprende, en un instrumento. Entendemos el término "instrumento" como el artefacto junto con *esquemas de uso,* es decir acciones usadas regularmente para resolver una tarea. De acuerdo con Rabardel (1995) hacer del artefacto un instrumento no es un asunto inmediato pues requiere la articulación de dos procesos, en una evolución que se denomina *génesis instrumental*. Tales procesos son: (i) de instrumentalización, o reconocimiento progresivo de las posibilidades y limitaciones del artefacto *per se* y de sus diferentes componentes; y (ii) de instrumentación, o surgimiento y desarrollo de esquemas de uso. Por ejemplo, cuando los estudiantes usan el arrastre para mover objetos de una construcción en busca de invariantes, es posible identificar dos tipos de acciones, cada una de las cuales obedece a uno de los procesos: (i) de reconocimiento de las posibilidades que tiene el arrastre de ciertos objetos cuando caen en cuenta que los objetos se mueven en el universo en el cual fueron creados (como un punto construido en un rayo); (ii) de acción para analizar si un objeto se comporta de la misma manera al arrastrarlo (ubicándolo en posiciones extremas, mirando unos pocos casos o haciendo un barrido por todo el campo de posibilidades).

Rabardel (1995) considera importante señalar que en el proceso de génesis instrumental el artefacto puede resultar siendo utilizado con fines distintos a aquellos para los que fue creado. En ese sentido, un esquema de uso puede corresponderse o no con esquemas previstos en el diseño del artefacto, se puede enseñar y está sujeto a las experiencias de las personas. Por ejemplo, el software *Excel* puede considerarse como artefacto que fue desarrollado como hoja de cálculo para apoyar tareas en el sector financiero, pero se utiliza en la enseñanza de procedimientos de generalización aritmética. De lo anterior se concluye que el instrumento es una construcción individual puesto que el sujeto elabora sus propios esquemas al usar un artefacto en una tarea particular.

Nuestro interés en la teoría de la acción instrumentada radica en que los esquemas de uso pueden verse como indicios de la actividad matemática que llevan a cabo los estudiantes cuando resuelven problemas, apoyados en Cabri, y proponen conjeturas a partir del trabajo realizado. Nos proveen información sobre las experiencias personales y contextualizadas (por la tarea y por el uso del instrumento) con las que los estudiantes dan significado al enunciado del problema y a los objetos involucrados en la situación y proponen una estrategia para resolver el problema. El producto de los esquemas de uso son signos, en este caso, figuras geométricas y enunciados de la forma "si… entonces…", que capturan (encapsulan) las acciones instrumentadas y las ideas producidas a partir de éstas. Estos signos evidencian los significados personales con los cuales se lleva a cabo la mediación semiótica del profesor y nos remiten a nuestro segundo referente conceptual.

Sesión 2

La segunda sesión del curso se dedica a abordar cómo puede el profesor aprovechar las producciones de los estudiantes, mediando la participación de ellos con sus producciones en la construcción de conocimiento. Inicialmente se socializan las conjeturas producidas por los asistentes, y se agrupan y organizan teniendo en cuenta su cercanía a la conjetura expresada en los términos que acostumbra la comunidad de matemáticos. Luego, se presentan conjeturas propuestas por estudiantes de licenciatura en matemáticas esperando que los asistentes puedan reconocer su propia conjetura como similar a una de éstas. Después, se presenta a los asistentes un pequeño video de una clase en la que una profesora discute las conjeturas con sus estudiantes y lleva a cabo la mediación semiótica. Se analiza el proceso de mediación semiótica del profesor aprovechando el potencial semiótico de los signos generados por los estudiantes, a partir de los esquemas de uso cuando resuelven un problema con el apoyo de Cabri, y se discute con los asistentes en qué acciones se centra la mediación. Finalmente se presenta a los estudiantes el fundamento teórico de los análisis realizados. En los párrafos siguientes sintetizamos el fundamento conceptual con el que analizamos la mediación semiótica.

En el contexto en que estamos ubicados, los signos son entidades que encapsulan la experiencia de los individuos, hacen parte de su cultura y, en últimas, transcienden a los individuos constituyéndose en un referente para construir significados matemáticos. En ese sentido, se dice que los signos se consideran entidades que representan algo para alguien. Radford (2000) puntualiza que los signos son entidades de doble vida por cuanto (i) reflejan el proceso cognitivo interno y (ii) son herramientas de la mente para hacer tareas particulares.

En todo caso, según Mariotti (2009) la característica principal de los signos derivados del uso de un artefacto es su fuerte vínculo con las acciones que se realizan con él. Su importancia para la mediación semiótica estriba en que, tan pronto adquieren una forma de representación externa, se pueden compartir socialmente y pueden evolucionar hacia signos matemáticos propios de un marco teórico de referencia. Así que conservan una fuerte referencia a los esquemas de uso del artefacto y a las ideas producidas a partir de éstos.

La mediación semiótica del profesor se basa en el provecho que éste puede sacar de los signos producidos por las parejas de estudiantes para fomentar la relación entre los alumnos y el conocimiento matemático. Según Mariotti (2009), probablemente, en el curso de la resolución de problemas los estudiantes pueden generar tres tipos de signos:

Signos del artefacto que son signos estrechamente relacionados con la experiencia del sujeto en el uso del artefacto y sus significados son personales y subjetivos. Generalmente hacen referencia a las acciones llevadas a cabo con el artefacto pues emergen de la actividad con él. Están muy relacionados con la expresión “signos situados” usada por Noss y Hoyles (1996, citado en Bartolini Bussi y Mariotti, 2008) para referirse a las ideas matemáticas que construyen los estudiantes al hacer configuraciones en un escenario particular, el cual da forma a las ideas que son expresadas. Aunque puede suceder en una clase, que al trabajar con un artefacto, no emerjan significados compartidos, la referencia directa a la experiencia común puede asegurar la posibilidad de la negociación como un significado compartido en la comunidad de la clase.

Signos matemáticos asociados al contexto matemático que guardan alguna relación con el universo teórico que corporeiza el artefacto. Ellos están relacionados a los significados matemáticos compartidos en la clase y se expresan de acuerdo a los estándares compartidos por la comunidad. Son parte de la herencia cultural y constituyen la meta de la mediación semiótica orquestada por el profesor.

Signos pivote tienen un carácter bidireccional pues relacionan la experiencia del sujeto con el artefacto con el dominio matemático, a través de un proceso complejo en el profesor construye una cadena semiótica que relaciona los signos del artefacto con los signos matemáticos. La característica principal de estos signos es su polisemia, es decir, que ellos pueden referirse tanto a la actividad con el artefacto (a las acciones instrumentadas) pero también al lenguaje natural y al dominio matemático. Por eso favorece el tránsito entre los signos del artefacto y los signos matemáticos.

El papel del profesor consiste en convertirse en *mediador cultural*, que buscar favorecer, por medio de la mediación semiótica la evolución de signos del artefacto hacia signos matemáticos. Para ello, diseña estrategias para establecer un puente entre las perspectivas individuales y las sociales y actúa en el nivel cognitivo y metacognitivo propiciando la evolución de los signos hasta que los estudiantes se percaten del estatus matemático de éstos.

De acuerdo con Bartolini Bussi y Mariotti (2008) consideramos que el proceso de mediación semiótica es complejo y requiere, además de reconocer el papel de los signos que se producen en una clase, identificar si son producto o medio en la construcción de conocimiento y enfocarse en la articulación que puede establecerse entre artefactos y signos desde una perspectiva educativa. Las autoras antes mencionadas proponen dos preguntas que deben guiar el proceso de mediación en una clase: ¿cómo hacer que los estudiantes tomen consciencia de los significados que surgen del uso de un artefacto? y ¿cómo hacer que tales significados se relaciones explícitamente con las matemáticas?

Desde el punto de vista investigativo, Bartolini Bussi y Mariotti (2008) proponen unas categorías para reconocer la mediación semiótica y/o para favorecerla. Sugieren analizar tanto la producción individual como la producción colectiva de signos en secuencias de actividades que comienzan con las actividades que desarrollan los estudiantes con el artefacto, continúan con las actividades en las que se pide la producción individual de signos y terminan con las actividades colectivas en las cuales el profesor se responsabiliza de hacer evolucionar los signos. En el último caso, se pide focalizar en ciertos aspectos del uso del artefacto y en pedir una síntesis del proceso seguido. Nosotros hemos previsto que la mediación semiótica, relacionada con la producción de conjeturas en la actividad demostrativa, se puede evidenciar en la gestión que realiza el profesor en torno a dos tipos de asuntos: aquellos que pretenden favorecer la práctica discursiva de las matemáticas y los que buscan la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes, que están relacionados con: (i) la conceptualización de los objetos y las relaciones geométricas, (ii) el significado de una condicional, (iii) la comprensión del problema que los estudiantes deben resolver y la conjetura que da solución al mismo (iv) el teorema al que se quiere llegar y (v) la formación de las nociones de definición, postulado y teorema.

Según Martín Acosta (comunicación personal) en el caso de signos que se distancian de manera sustancial de los signos matemáticos, la mediación del profesor puede consistir en desencapsular las acciones y observaciones realizadas por los alumnos, para cuestionar entonces los esquemas de utilización, permitiendo un proceso empírico de invalidación por contraejemplo. En cualquier caso, el proceso de mediación semiótica del profesor se apoya en la experiencia vivida por los estudiantes, en sus propias observaciones y formulaciones, para darles sentido a los enunciados matemáticos de la teoría de referencia.

Referencias bibliográficas

- Arzarello, F. y Paola, D. (2008). How to choose the independent variable? En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Latorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX (vol. 2, pp. 88-98). México: Cinvestav-UMSNH.
- Bartolini Bussi, M.G. y Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom. En L.D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (segunda ed., cap. 28, pp. 746-783). Nueva York: Routledge.
- Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2005). La demostración en clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico? *Educación Matemática*, 17(3), 53-76.
- Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas* (volumen especial, pp. 371-383).
- Camargo, L., Samper, C., Perry, P., Molina, Ó. y Echeverry, A. (2009). Use of dragging as organizar for conjecture validation. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 257-264). Thessaloniki, Grecia: PME.

- Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M.F. Pinto, T.F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 179-209). Belo Horizonte, Brasil: PME.
- Mariotti, M.A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM Mathematics Education,* 41, 427-440.
- Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación del profesor de matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. y Molina, Ó. (2008). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para la formación inicial de profesores. Libro electrónico del XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza de las Matemáticas: "Innovando la enseñanza de las matemáticas", Toluca, México, Universidad Autónoma del Estado de México.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 237-268.

Volver al índice
Cursos