pondientes, es decir, como magnitudes directamente proporcionales. Igualmente nos sorprende el hecho de no considerar la idea de constante de proporcionalidad para magnitudes directamente proporcionales, sino exclusivamente para las inversamente proporcionales; este hecho imposibilita considerar al número *p* como la constante de proporcionalidad que describe la relación entre las dos magnitudes relativas a la circunferencia reseñadas anteriormente, o tal vez, como operador multiplicativo.

Un cuarto aspecto que no queremos dejar de reseñar, así sea brevemente, es el papel utilitario que cumple la idea de operador multiplicativo. Éste es usado para la solución de algunos (muy pocos) problemas de regla de tres y de tanto por ciento, pero en ningún momento se establece una relación conceptual con las magnitudes directa o inversamente proporcionales; relación que tal vez podría llegar a darse con los conceptos de razón y producto constante entre magnitudes correspondientes.

Finalmente, un quinto aspecto que pudimos identificar es el tratamiento marginal de la función lineal y de la función afín. Muestra de ello es: la falta de nexos de las propiedades de la función lineal (aditividad y homogeneidad) con las demás temáticas abordadas en el capítulo; o, la inutilidad de las gráficas de las magnitudes directamente proporcionales en la solución de problemas de «aplicaciones» de la proporcionalidad.

# ESTUDIO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN LA EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA

Gloria García
Celly Serrano
José M. Salamanca
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

## Por qué desarrollar pensamiento variacional

Una de las nociones básicas para desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes de la educación basica es el estudio del cambio y su medición. Pero la comprensión y desarrollo de lo que significa una propuesta como la descrita en los lineamientos curriculares (Área Matemáticas del MEN 1997) exige anotar las diferencias radicales que presupone el giro de organizar un currículo por tareas, contenidos o enfoque de sistemas al pensamiento matemático con las especificidades propuestas en dicho documento.

La diferencia radica en distinguir que la organización curricular por contenidos o sistemas (números....,) hace referencia al movimiento de los productos: teorías, hechos, algoritmos, teorema, axiomas....etc, que son reconocidos como legítimos por la comunidad matemática.

Por su parte, el pensamiento matemático hace referencia a todas las prácticas que se realizan en una cultura con las matemáticas, como las actividades de contar, medir, representaciones artísticas, inferir, modelar, que realiza una comunidad y por tanto hacen parte de las representaciones culturales de una comunidad. Estas prácticas son, entonces, prácticas sociales, por lo tanto el pensamiento matemático no refiere exclusivamente "las matemáticas como saber disciplinario" sino que incluye las prácticas sociales con matemáticas (Chevellard, 1997) y por lo tanto penetra el conjunto de usos de las matemáticas; infiltra la infinidad de espacios en los que el saber matemático es pertinente y se observa su manipulación (Chevelard, p.174,1997). Esta práctica se encuentra en sitios como la empresas, oficinas, laboratorios, en donde los agentes que realizan prácticas en sitios especializados quizá no sean matemáticos pero sin embargo funcionan en su desempeño con las matemáticas.

Con estos argumentos sobre el pensamiento matemático, se puede entender que el pensamiento variacional, se encuentra en practicas de la vida cotidiana de un ciudadano, es herramienta necesaria en la toma de decisiones permite comprender el mundo circundante que cada vez se nos muestra como un mundo cambiante.

En el terreno específico del saber matemático, el estudio de la variación y el cambio, son los ejes rectores desde los cuales se desprenden las ideas, nociones, conceptos de una de las áreas más importantes de la matemática como es el cálculo.

Una apretada síntesis de su evolución como área en la matemática muestra que su génesis fue la necesidad de resolver problemas como los del movimiento de los astros, del flujo de los líquidos, del movimiento de cuerpos impulsados, desde los cuales surgió la necesidad de medir los cambios y los tipos de cambio, la noción de variable, la función.

Este nacer del cálculo estuvo asociado al desarrollo de la era industrial (siglos XVI y XVII) y a los desarrollos tecnológicos que trajo consigo esta era.
Los conceptos de derivada y límite como conceptos centrales del cálculo, si bien son presentados formalmente en el currículo correspondiente a la educación media, pueden iniciar su construcción desde la educación basica.

## Elementos básicos de la variación

Los escenarios de variación se caracterizan porque en ellos se puede identificar dos estados, uno inicial ($E_1$) y uno final ( $E_f$). Las características que diferencian estos estados son esencialmente distintas.

El transcurso del tiempo juega un papel fundamental para diferenciar los estados, esta dependencia implícita convierte el enunciado en un enunciado funcional, porque se crea una relación entre cantidades y una magnitud como el tiempo. Por ejemplo, en el proceso de registro de crecimiento de una planta, descrito en la siguiente tabla:

| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | $M_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 10 | 20 | 22 | 27 | 35 |

M = meses A = altura

Se evidencian cinco estados iniciales correspondientes a:

$M_! = 10$ , $M_2 = 20$, $M_3 = 22$
$M_4 = 27$, $M_5 = 35$

Y aparentemente 4 estados finales:

$M_{f1} = 20$ $M_{f2} = 22$
$M_{f3} = 27$ $M_{f4} = 35$

Pero igualmente identifica los siguientes estados finales:

$M_1 = 10$y $M_f = 22$
$M_1 = 10$y $M_f = 27$

Es el transcurrir del tiempo el que define las diferencias.

La cuantificación de la variación se da a través de la diferencia:

$E_1 - E_f$

Esta descripción de la variación la relaciona con el estudio de la estructura de problemas aditivos, donde se produce variación. Bien es sabido que la resolución de estos problemas se ha clasificado en estructuras de cambio, combinación, comparación e igualación.

Particularmente para el estudio de la variación nos situamos en los problemas con estructura de cambio colocando el acento en aspectos como semántica, escenario, formatos de enunciado e incluimos la clasificación que Bruno y Martinon (1997) han identificado como funcional semántica.

Una descripción apretada de la estructura de estos problemas se presenta a continuación:

| Estructura de Cambio | Estructura de Variación |
|---|---|
| A.<br>Juan tiene \$20<br>y le regalan<br>\$15 | B.<br>En la mañana al salir de su casa<br>Juan tiene \$10. En la noche<br>llega a su casa con \$15 |

Estos problemas participan de la estructura de cambios porque en ambos se identifica un estado inicial y un estado final.

En el primero se efectúa una acción (regalan) que permite anticipar que la pregunta cuantifica el estado final resultado de la acción. Por su parte el problema B permite deducir una ganancia, un aumento; en un tiempo transcurrido explícitamente, mañana, en la noche. Esta acción

también permite anticipar una pregunta en ese sentido: ¿En cuánto aumentó el dinero que tenía Juan? o ¿Aumentó el dinero que tiene Juan al terminar el día?
Las expresiones numéricas que traducen estas situaciones respectivamente son:

A. \$10 + \$15 = B. \$15 - \$10 =

La respuesta a la expresión B cuantifica el cambio, \$5

Obsérvese que en uno u otro caso las expresiones semánticas son congruentes, puesto que ambas tienen el mismo sentido, aumento.
Bruno y Martinón señalan que en la elaboración de situaciones de variación, derivadas de problemas aditivos de cambio uno de los aspectos centrales es el de establecer expresiones semánticas equivalentes de cambio con expresiones semánticas de variación. Por ejemplo a:

| Expresiones de cambio | Expresiones de variación |
|---|---|
| Ganar | Aumentar |
| Regalar | |
| Perder | Disminuir |

Otro de los aspectos que consideramos necesario introducir en el estudio de la variación es conjugar en la presentación de los problemas diferentes representaciones, pictográficas icónicas tabulares, además del verbal.
Los escenarios, también son otro aspecto, puesto que estos permiten establecer la diversidad de las conexiones de las matemáticas con otras áreas del currículo.

## Cómo articular un eje curricular

Proponemos como eje curricular para el estudio de la variación en la educación primaria, un eje que integre la variación aditiva o absoluta, cuantificada por la diferencia con la variación proporcional.

Con el estudio de esta última variación se inicia la aproximación de los estudiantes a la dependencia y al estudio de relaciones funcionales. Esta última se realiza a través de representaciones tabulares y porque no gráficas tipo cartesiano, restringidas al primer cuadrante del sistema cartesiano.

Particularmente el estudio de situaciones o proyectos donde los estudiantes deban registrar información cuantitativamente en tablas se constituye en una de las fuentes de aprendizaje para iniciar la aproximación de los estudiantes a modelos funcionales

## Papel del profesor

La enseñanza que busque desarrollar el pensamiento variacional requiere un determinado enfoque por parte del profesor.

En primer lugar, el estudio de la variación no puede adoptarse en la enseñanza como un tema separado que se puede trabajar en una unidad didáctica.
Tal como lo hemos descrito, su estudio se encuentra inserto en un eje curricular el que a su vez está estrechamente relacionado con la resolución de problemas aditivos y multiplicativos.

En segundo lugar su desarrollo exige una atmósfera de clase, en donde las situaciones problema que presenta el profesor, animen a los estudiantes a explorar, cuestionar, verificar y razonar. Pero además, el ambiente debe brindar la oportunidad a los estudiantes de estudiar la variación de acuerdo a sus conocimientos previos, a su propia experiencia.

En tercer lugar se debe propiciar la construcción social del significado de la variación, por tanto, el dialogo, la escucha de argumentos es determinante para este desarrollo del pensamiento.

Así mismo la lectura y escritura de diferentes formas de solución es también parte esencial de este ambiente, puesto que a través de ellas el estudiante procede a cuestiones más fuertes del estudio de la variación como es el inicio de la construcción de la variable, y el estudio de patrones de variación.

## Referencias bibliográficas

Bruno A., Martinon A. (1997). *Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos*. En: Educación Matemática. Vol. 9.

Chevelard, I. (1997). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. Psicología, cognición y educación. AIQUE

García Gloria, Serrano Celly. (1999). *La comprensión de la proporcionalidad una perspectiva social y cultural*. Cuadernos de Matemática Educativa. Nº 3. Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

Ministerio de Educación Nacional. (1997). *Pensamiento variacional*. Lineamientos curriculares. Area Matemáticas.