

MEDICIÓN, ESTIMACIÓN Y APROXIMACIÓN: Genésis de la noción de límite en la educación básica

Gloria García
Celly Serrano
Hernán Díaz

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Introducción

Con este trabajo, queremos explicar, en primer lugar, el origen del interés especial de los autores por la noción de aproximación, como un aspecto epistemológico fuerte de la matemática y su relación con el cálculo. Este interés tiene sus raíces en la preocupación del grupo por las dificultades y los frecuentes fracasos que presentan los estudiantes universitarios, específicamente los estudiantes para profesores de matemáticas, cuando se enfrentan al aprendizaje del cálculo diferencial.

Para abordar la problemática en primer lugar damos cuenta del porqué consideramos a la aproximación como noción fundamental del cálculo y porqué es fundamental en las matemáticas. En segundo lugar describimos, a manera de resumen, nuestra propuesta de trabajo con las ideas más importantes que la articulan.

La aproximación una noción fundamental en el cálculo diferencial

El cálculo como eslabón del análisis, es un dominio cuyas entidades de base, números reales, función límite, y sus técnicas, son bastantes complejas por sí mismas. Al respecto diferentes investigaciones (Cornu 1991, Sierpinska, 1985, Artigue 1993), muestran las dificultades fuertes y persistentes que encuentran los estudiantes en el aprendizaje del cálculo. Del análisis de estos resultados se deduce que tienen orígenes diversos pero se implican y refuerzan mutuamente constituyendo una red compleja difícil de organizar en categorías independientes (Artigue, 1998).

Un resumen apretado de la dificultades categorizadas por Artigue permite señalar que se encuentran ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos del cam-

po conceptual del cálculo, números reales, funciones y sucesiones, límite, a sus técnicas y a la ruptura necesaria entre los modos característicos del pensamiento algebraico. (Artigue, 1998).

Con base en estos resultados sin lugar a dudas se puede afirmar que al cálculo se puede llegar después de consumir un largo proceso el cual se caracterice por la construcción de un nicho ecológico donde el estudiante desarrolle prácticas significativas y prototípicas de los modos de pensamiento y de las técnicas que fundamentan el campo.

La historia de gestación de las nociones básicas del cálculo muestra como los problemas constitutivos de su gestación como campo conceptual se encuentran en torno a los problemas de variación y aproximación. La medición del cambio relativo en intervalos grandes a la medición del cambio relativo en un instante involucra procesos de aproximaciones sucesivas, procesos infinitos, puesto que se requiere que dos cambios cercanos al punto donde se quiere medir el cambio instantáneo sean los suficientemente próximos. El comportamiento tendencial del proceso de aproximación mide el cambio instantáneo. El proceso comienza a preparar de manera significativa la concepción de límite como proceso.

Aún la representación geométrica para medir el cambio instantáneo, a través de la pendiente de la familia de secantes, se logra a través de un proceso de aproximación para reemplazar en las proximidades del punto de contacto a la curva la secante por una tangente. Por su parte el valor de la derivada en un punto cualquiera de una función se obtiene al aproximarla a la función lineal determinada por el punto y cuya pendiente es el valor de la derivada en el punto. En consecuencia, las expresiones analíticas que expresan los conceptos de límite y derivada representan procesos de aproximación.

Pero la aproximación no solo se encuentra involucrada en los conceptos de límite y derivada, es parte consustancial de otro de los objetos asociados al cálculo, los números reales. Para nadie es desconocido que un número real es a veces descrito por una secuencia infinita a_n de aproximaciones, en el cual el valor de a es dado por el valor a_n , con un considerable grado de precisión si se escoge el índice n suficientemente grande. La lista de valores a_n encierra un margen de error, el cual es controlado por el tamaño de n , en tanto si este se toma suficientemente grande las diferencias entre a y a_n , son cada vez menores, es decir cada vez están más cerca el uno del otro.

La aproximación, noción fundamental de las matemáticas

Cantoral (1997), señala que la noción de aproximación es consustancial a las matemáticas, y que se encuentra impresa en los pliegues más ocultos de la naturaleza de sus métodos. En dominios aritméticos como el algoritmo de la división y la extracción de raíces (cuadradas, cúbicas) se pueden catalogar como procesos de aproximación. De igual manera en el álgebra, la búsqueda de soluciones de ecuaciones no lineales exige recurrir a métodos de aproximaciones. En la geometría, el cálculo de áreas de superficies y de volúmenes de sólidos utiliza métodos de aproximación (integral). La medición de magnitudes, exige el uso de procesos de aproximación mediatizados por los instrumentos.

De otro lado, la necesidad de modelar matemáticamente fenómenos de las ciencias conllevó a la exigencia de crear métodos para buscar soluciones a problemas que no podían ser resueltos por métodos analíticos exactos. Esta necesidad surgió en el reconocimiento de que la mayoría de los problemas de las ciencias no pueden ser modelados por ecuaciones analíticas lineales, lo que dió lugar a la creación de métodos numéricos sistemáticos. La noción fuerte que subyace en estos métodos es la de aproximación, estos métodos encuentran su fundamento conceptual en el área del análisis denominada Análisis Numérico.

En el momento actual, el hacer matemático se enriquece con la incorporación de una herramienta como el computador, lo que implica reconocer que se vuelve a otorgar un gran valor a las exploraciones numéricas. Además, este hacer cuestiona el valor que se le ha asignado a la de-

mostración como único criterio de validez para organizar a la matemática como cuerpo axiomático y coloca de presente la importancia de la prueba elaborada con base en argumentos numéricos que actúan a manera de demostración.

Este nuevo hacer matemático posee características propias que contravierten los haceres tradicionales con que se han identificado a las matemáticas. En este hacer, el objeto matemático se genera mediante un proceso local, desde el cual se constituye paso a paso el objeto. La construcción se sucede por reglas algorítmicas que actúan desde lo local para alcanzar la globalidad; las reglas actúan sobre signos carentes en principio de significado o referencial (Lorenzo, 1997), lo único que se exige de estas reglas es que sean comprensibles. Estas características del hacer computacional pone en cuestión dialécticas epistemológicas fuertes sobre cuestiones relativas al carácter exclusivamente demostrativo del conocimiento matemático. Una noción fuerte al interior de este hace lo constituye la aproximación.

En sí mismo, la aceptación de métodos de aproximación como parte consustancial de los métodos matemáticos enfrenta un obstáculo epistemológico fuerte cuando se ha estructurado a través del aprendizaje de las matemáticas, una concepción de conocimiento matemático como garante de la exactitud.

Los argumentos anteriores nos han llevado a establecer los siguientes interrogantes: ¿Es posible construir vías de acceso cognoscitivas, temprana y didácticamente a la aproximación en los estudiantes de la educación Básica?, ¿Cuáles son las situaciones de la enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en la educación básica en las que es pertinente trabajar con técnicas de aproximación?.

Elementos conceptuales, técnicos y registros de representación de la aproximación

Los métodos de aproximación se caracterizan por ser métodos iterativos y/o recursivos, es decir su fundamento es una secuencia finita de reglas operativas en las cuales se repiten un número dado de pasos tomando como sus datos de entrada aquellos obtenidos por el mismo para encontrar el siguiente dato (Cantoral, Reséndiz, 1997). La búsqueda de la exactitud en procesos de aproximación genera procesos infinitos; estos, se tornan finitos al

decidir mediante un juicio cuando han de parar. La validez de este juicio reside en definir qué cantidad de cifras significativas se requieren o qué cantidades se definen como despreciables. La solución que emerge de tornar finito un proceso infinito es sólo una aproximación al posible valor verdadero, puesto que se presenta un *truncamiento* del proceso infinito. Aparece el error como otras de los elementos conceptuales asociados a la aproximación.

Los valores obtenidos como solución, con los métodos de aproximación, generan una lista de números, casi siempre reales, con un orden definido que pueden considerarse sucesiones en donde cada término es una aproximación al valor verdadero. Las técnicas de aproximación se pueden clasificar en cerradas y abiertas: son cerradas aquellas técnicas que usan intervalos y generan aproximaciones convergentes. Se llaman abiertas o de intervalo porque se necesita establecer dos valores iniciales que encajonan el valor verdadero que se busca, el encajonamiento es iterativo y recursivo. Los registros de representación pueden ser: sólo expresiones numéricas, (cálculo de las raíces y de cocientes), registros gráficos y analíticos. Las técnicas más conocidas son la bisección y la regla falsa.

Las técnicas abiertas se basan en formulas y fundamentalmente se utilizan para calcular las raíces de ecuaciones polinómicas no lineales o trascendentes. Se basan en fórmulas que requieren de un solo valor de x o de un par de valores que no necesariamente contienen a la raíz. Algunas veces el proceso diverge del valor verdadero, pero cuando convergen lo hacen más rápidamente que las técnicas cerradas.

De estas técnicas las más conocidas son: iteración de punto fijo, Newton- Raphson y método de la secante. Los registros que utilizan estas técnicas combinan registros analíticos, geométricos y numéricos.

Las técnicas de aproximación, medición y estimación, cuándo

En este apartado, tal como lo enunciamos al inicio, destacaremos los aspectos esenciales que determinan las posibilidades de introducir tempranamente en la educación básica la aproximación. Estas orientaciones sólo pretender ofrecer a los profesores los referentes necesarios para

diseñar unidades didácticas en función de las prácticas institucionales y las características de los alumnos.

Tal como hemos señalado, el primer referente para introducir la aproximación en los diseños curriculares de la educación Básica esta asociado a la concepción epistemológica del conocimiento matemático que sustenta el diseño. Ya es completamente aceptado por la comunidad de educadores matemáticos las implicaciones entre concepciones epistemológicas de las matemáticas y los diseños curriculares. En particular la concepción que ronda en nuestra educación de la matemática como ciencia de la exactitud, de la objetividad, se convierte en un obstáculo epistemológico para eventualmente aceptar a la aproximación como un núcleo epistémico del currículo.

La aproximación se inscribe en la concepción de las matemáticas como una construcción humana, concepción donde la invención de sus objetos se logra a través de la negociación social y favorece la aceptación de la falibilidad. Desde este enfoque es posible modificar los tratamientos tradicionales con que se ha presentado la enseñanza de la medida de magnitudes, privilegiando la exactitud aún en la medición que se efectúa con instrumentos y en la medición indirecta, áreas, volúmenes. Por el contrario, es posible diseñar situaciones de aprendizaje en las cuales se discuta, se argumente sobre los resultados obtenidos de un proceso de medición, el carácter aproximativo de diferentes mediciones, los posibles errores, y la exactitud.

Los procesos algorítmicos iterativos, se presentan tempranamente en la educación primaria, con el algoritmo de la división, puede acercar a los estudiantes a procesos de aproximación por exceso y por defecto. De igual manera, el cálculo de raíces no exactas debe ser también una actividad de aprendizaje.

En Geometría la relación entre área y perímetro de figuras cuyos lados crecen o decrecen de acuerdo a una regla (*... la longitud de un lado es la mitad del anterior...*) generan sucesiones de aproximación.

El aprendizaje de sistemas notacionales numéricos como los decimales es un buen pretexto para construir procesos de aproximación a los números reales.

En álgebra la solución de ecuaciones no lineales es un buen motivo para introducir las técnicas de aproximación.

Cómo

Tal como le enunciamos en párrafos anteriores, la introducción de la aproximación en el currículo exige establecer la conexión entre las matemáticas y las ciencias experimentales en donde la modelación de situaciones problemáticas de las ciencias sea uno de los fundamentos.

La calculadora (numérica y gráfica), ya sea usada como instrumentos de exploración, en el sentido de que permite discutir sobre cuestiones como la exactitud, la precisión, el error de notaciones decimales; o cuando se usa para ver algo nuevo, es decir, construir aproximaciones; o para establecer las relaciones estructurales de una cierta fenomenología (ajuste de curvas) se constituye en la herramienta básica para el tratamiento de la aproximación en la educación básica. Hay que propiciar la aceptación de la argumentación y las inferencias inductivas que los estudiantes realizan informalmente como criterio de validación que estructuran la prueba en la construcción paso a paso del objeto matemático.

Referencias bibliográficas

- ARTIGUE, M: (1998) Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental ¿ qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares ?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* No 1 CLAME THOMSON Editores.
- CANTORAL, R., RESÉNDIZ, E. (1997) *Aproximaciones sucesivas y sucesiones*. Cuadernos Didácticos. VOL I. Grupo Editorial Iberoamérica.
- DAVIS, P, HERSH, R. (1997) *Experiencia matemática*. Ed Labor.
- LORENZO JAVIER DE (1993) La razón constructiva matemática y sus haceres. *Mathesis. Filosofía e Historia de las matemáticas*. VOL IX. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México.
- MORENO, L. (1996) Geometría Fractal y un nuevo diseño curricular. CINVESTAV-IPN
- MORENO, L. (1996) Una perspectiva sobre la demostración. . CINVESTAV-IPN
- MONCHON, S. (1994) *Quiero aprender Cálculo*. Grupo Editorial Iberoamericano.
- VEGA, L. (1993) ¿ Pruebas o demostraciones ?. Problemas en torno a la idea matemática de demostración matemática *Mathesis. Filosofía e Historia de las matemáticas* . VOL IX. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México.

UNA MIRADA A LA PROPORCIONALIDAD EN LOS TEXTOS ESCOLARES DE MATEMÁTICAS

Edgar Alberto Guacaneme Suárez
«una empresa docente»
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Como lo reseñan diversas investigaciones, el libro de texto de matemáticas, concebido como instrumento asociado a la comunicación de saberes matemáticos, es el recurso mayoritariamente usado por los profesores. Específicamente, el TIMSS (Tercer Estudio Internacional en Ciencias y Matemáticas) muestra que el texto es utilizado para decidir qué temas enseñar y cómo enseñarlos, así como para determinar cuáles ejercicios y problemas solucionar. Esta posición privilegiada del texto, conduce indudablemente al reconocimiento de la necesidad de convertirlo en *objeto de estudio didáctico*, y, en consecuencia, de aprendizaje didáctico.

Una vez reconocido el texto escolar como vital objeto de estudio, es necesario admitir la existencia de múltiples

actividades de indagación en torno del mismo; éstas involucran aspectos tan generales como el papel que el texto escolar de matemáticas juega al interior de un currículo, o, aspectos tan particulares como la cantidad y variedad de representaciones de un mismo concepto utilizadas en su comunicación. De entre las múltiples actividades de indagación en torno del texto escolar de matemáticas, hemos seleccionado para el desarrollo del taller una de ellas. Ésta tiene que ver con el estudio de la estructura temática de las unidades que abordan temas matemáticos relativos a la proporcionalidad.

Para estudiar dicha estructura, hemos construido una estrategia que permite, cuando menos, lograr una visión general de los contenidos implicados en una unidad te-