

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

No linealidades en el modelo del cuarto de coche

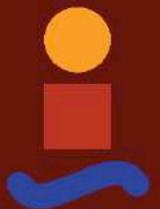
Autor: Javier Luis Cabezas Luque

Tutores: Johan Wideberg / Emilio Freire Macías

**Dep. Ingeniería y Ciencia de los Materiales  
y del Transporte**

**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**

Sevilla, 2018





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

# **No linealidades en el modelo del cuarto de coche**

Autor:

Javier Luis Cabezas Luque

Tutores:

Johan Wideberg (Profesor titular)

Emilio Freire Macías (Catedrático de Universidad)

Dep. de Ingeniería y Ciencia de los Materiales y del Transporte

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018



Trabajo Fin de Grado: No linealidades en el modelo del cuarto de coche

Autor: Javier Luis Cabezas Luque

Tutores: Johan Wideberg / Emilio Freire Macías

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El Secretario del Tribunal



# Agradecimientos

---

Se pone fin a este viaje y no puedo evitar acordarme en primer lugar de ti, Papá. Sé que tenías puestas muchas ilusiones en ver este momento y no pude llegar a tiempo. Te lo debía, te lo debo. Siempre estarás en mi corazón.

Mamá, por tus desvelos y preocupaciones, nunca escatimaste una palabra de cariño. Te quiero con toda mi alma.

A mi hermano, Manolo, la distancia no nos ha separado y te he sentido cerca más que nunca. Se que estarás muy feliz.

A ti Lourdes, has vivido de cerca con generosidad la inversión de tiempo que he dedicado a esto, y tienes una gran cuota de culpa de todo lo bueno que me ha pasado. Obviamente, no lo hubiera conseguido sin el pilar más importante de mi vida.

A mis segundos padres, Charo y Paco, gracias de corazón por todo el esfuerzo que habéis hecho y el cariño que me habéis demostrado.

Javier, eres lo más maravilloso que me ha pasado en la vida, espero que en el futuro puedas sentirte orgulloso de tu padre.

Finalmente, Johan y Emilio, os agradezco vuestra cercanía y total disposición en el desarrollo del presente trabajo. Ha sido un placer teneros como mis tutores.

*Sevilla, 2018*



El modelo de vehículo de cuarto de coche es la representación más simple de un vehículo o modelo de vehículo de masas concentradas. Se usa ampliamente en el análisis de vehículos y suspensiones, particularmente en aquellos relacionados con la dinámica de conducción, sin embargo, este modelo no es tan preciso como muchos modelos de mayor grado de libertad debido a su simplicidad y grados de libertad limitados. En el estudio que llevamos a cabo, se tuvo en cuenta los detalles de la entrada del terreno, la rigidez de la suspensión y la amortiguación de este. Los resultados indicaron claramente que estos detalles tienen efecto en la respuesta del vehículo.

El sistema de suspensión es un mecanismo que separa físicamente la carrocería del automóvil de la rueda del automóvil. La función principal del sistema de suspensión del vehículo es controlar el comportamiento transitorio de las masas suspendidas y no suspendidas del vehículo, en definitiva, minimizar la aceleración vertical transmitida al pasajero desde el suelo proporcionando un mejor confort de conducción. También es la parte más compleja del sistema de suspensión debido a su comportamiento no lineal y complejo. Por lo tanto, una buena representación del comportamiento del amortiguador y su análisis es importante en el estudio dinámico del vehículo.

Habitualmente, en el estudio de sistemas dinámicos amortiguados, éstos son considerados con un comportamiento lineal por simplicidad y porque se comprueba que los modelos así tratados tienen un comportamiento coherente y dan en general, buenos resultados. No obstante, si somos estrictos, el comportamiento real de un amortiguador no es lineal, y mediante el presente trabajo pretendemos observar qué efectos tiene su consideración sobre diferentes parámetros dinámicos en el modelo del cuarto de coche, para así acercarnos a la realidad de las sensaciones de un ocupante en su interior.



# Abstract

---

The quarter car model is the simplest representation of a vehicle or vehicle model of concentrated masses. It is widely used in vehicle and suspension analyzes, particularly those related to driving dynamics, however, this model is not as accurate as many models with a higher degree of freedom due to its simplicity and limited degrees of freedom. In the study, the details of the entrance of the road signal, the rigidity of the suspension and the damping of it were taken into account. The results clearly indicated that these details have an effect on the response of the vehicle.

The suspension system is a mechanism that physically separates the car body from the wheel of car. The main function of the vehicle suspension system is to control the transient behavior of the suspended and non-suspended masses of the vehicle, in short, to minimize the vertical acceleration transmitted to the passenger from the ground, providing better driving comfort. It is also the most complex part of the suspension system due to its non-linear and complex behavior. Therefore, a good representation of the behavior of the shock absorber and its analysis is important in the dynamic study of the vehicle.

Usually, in the study of damped dynamic systems, these are considered with a linear behavior for simplicity and because it is verified that the models thus treated have a coherent behavior and give, in general, good results. However, if we are strict, the actual behavior of a shock absorber is not linear, and through this work we intend to observe what effects its consideration has on different dynamic parameters in the model of the car room, in order to approach the reality that an occupant feel inside a vehicle.



<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>Índice</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xv</b>
<b>Notación</b>	<b>xx</b>
<b>1. Estado del arte</b>	<b>1</b>
<b>2. Sistema de suspensión de un vehículo</b>	<b>2</b>
2.1. Neumáticos	2
2.2. Resortes	3
2.3. Amortiguadores	4
<b>3. Modelo de Un Grado de Libertad</b>	<b>7</b>
3.1. Descripción del modelo lineal	7
3.1.1. Dominio del tiempo	8
3.1.2. Dominio de la frecuencia	8
3.2. Descripción del modelo no lineal	10
3.2.1. Dominio del tiempo	11
3.2.2. Dominio de la frecuencia	12
<b>4. Modelo de Dos Grados de Libertad</b>	<b>13</b>
4.1. Descripción del modelo lineal	13
4.1.1. Dominio del tiempo	13
4.1.2. Dominio de la frecuencia	14
4.2. Descripción del modelo no lineal	15
4.2.1. Dominio del tiempo	16
4.2.2. Dominio de la frecuencia	16
<b>5. Simulación Dinámica</b>	<b>17</b>
5.1. <i>Modelo de un grado de libertad lineal</i>	17
5.1.1. Dominio del tiempo	17
5.1.2. Dominio de la frecuencia	21
5.2. Modelo de un grado de libertad no lineal	22
5.2.1. Configuración Tipo I	22
5.3. Modelo de dos grados de libertad lineal	32
5.3.1. Dominio del tiempo	32
5.3.2. Dominio de la frecuencia	38
5.4. Modelo de dos grados de libertad no lineal	43
5.4.1. Configuración de tipo I	43
5.4.2. Configuración de tipo II	53

<b>6. Conclusiones</b>	<b>61</b>
6.1. Función de transferencia de $X_1$ (desplazamiento vertical del neumático)	61
6.2. Función de transferencia de $X_2$ (desplazamiento vertical del chasis)	62
6.3. Aceleración del chasis	62
6.4. Desplazamiento de la suspensión	63
6.5. Deformación del neumático	63
6.6. Futuros trabajos	64
<b>Referencias</b>	<b>65</b>
<b>Anexo</b>	<b>66</b>
1. Modelo de un grado de libertad lineal	66
2. Modelo de un grado de libertad no lineal. Tipo I. Dominio del tiempo	69
3. Modelo de un grado de libertad no lineal. Tipo I. Dominio de la frecuencia	72
4. Modelo de dos grados de libertad lineal. Dominio del tiempo	74
5. Modelo de dos grados de libertad lineal. Dominio de la frecuencia	79
6. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Tipo I. Dominio del tiempo	82
7. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Tipo I. Dominio de la frecuencia	88
8. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Tipo II. Dominio del tiempo	91
9. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Tipo II. Dominio de la frecuencia	97

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 2.1. Esquema contacto neumático- terreno

Figura 2.2. Esquema de un muelle helicoidal

Figura 2.3. Esquema de la fuerza ejercida por un muelle helicoidal

Figura 2.4. Corte longitudinal de un muelle helicoidal

Figura 2.5. Esquema de un amortiguador

Figura 3.1. Modelo de un grado de libertad de un cuarto de coche

Figura 3.2. Descomposición de fuerzas del modelo de un grado de libertad

Figura 3.3. Perfil del terreno

Figura 3.4. Fuerza de un amortiguador no lineal (configuración de tipo I)

Figura 3.5. Fuerza de un amortiguador no lineal (configuración de tipo II)

Figura 4.1. Esquema del modelo de cuarto de coche de dos grados de libertad

Figura 4.2. Descomposición de fuerzas del modelo de dos grados de libertad

Figura 4.3. Fuerza de un amortiguador no lineal (configuración de tipo I)

Figura 4.4. Fuerza de un amortiguador no lineal (configuración de tipo II)

Figura 5.1. Base de cálculo del modelo de cuarto de coche de un grado de libertad

Figura 5.2. Movimientos absoluto y relativo del chasis para  $c= 8000$  Ns/m. Dominio del tiempo

Figura 5.3. Movimientos absoluto y relativo del chasis para  $c= 4000$  Ns/m. Dominio del tiempo

Figura 5.4. Movimientos absoluto y relativo del chasis para  $c= 2000$  Ns/m. Dominio del tiempo

Figura 5.5. Movimientos absoluto y relativo del chasis para  $c= 1000$  Ns/m. Dominio del tiempo

Figura 5.6. Movimientos absoluto y relativo del chasis para  $c= 500$  Ns/m. Dominio del tiempo

Figura 5.7. Función de transferencia  $X/Y$  del modelo del cuarto de coche de un grado de libertad. Dominio de la frecuencia

Figura 5.8. Detalle de la función de transferencia del modelo de un grado de libertad

Figura 5.9. Amortiguamiento no lineal. Configuración de tipo I. Modelo de un grado de libertad.

Figura 5.10. Movimientos absoluto y relativo del chasis para  $c_c= 8000$  Ns/m. Modelo de un grado de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.11. Movimientos absoluto y relativo del chasis para  $c_c= 4000$  Ns/m. Modelo de un grado de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.12. Movimientos absoluto y relativo del chasis para  $c_c= 2000$  Ns/m. Modelo de un grado de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.13. Movimientos absoluto y relativo del chasis para  $c_c= 1000$  Ns/m. Modelo de un grado de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.14. Movimientos absoluto y relativo del chasis para  $c_c= 500$  Ns/m. Modelo de un grado de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.15. Velocidad absoluta del chasis. Régimen transitorio y permanente. Modelo de un grado de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.16. Aceleración absoluta del chasis. Régimen transitorio. Modelo de un grado de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.17. Aceleración absoluta del chasis. Régimen permanente. Modelo de un grado de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.18. Velocidad relativa del chasis. Régimen transitorio. Modelo de un grado de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.19. Velocidad relativa del chasis. Régimen permanente. Modelo de un grado de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.20. Aceleración relativa del chasis. Régimen transitorio y permanente. Modelo de un grado de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.21. Función de transferencia del modelo de un grado de libertad no lineal. Dominio de la frecuencia

Figura 5.22. Base de cálculo del modelo de dos grados de libertad

Figura 5.23. Movimientos absolutos y relativos del neumático y del chasis para  $c_c= 8000$  Ns/m. Modelo de dos grados de libertad lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.24. Movimientos absolutos y relativos del neumático y del chasis para  $c_c= 4000$  Ns/m. Modelo de dos grados de libertad lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.25. Movimientos absolutos y relativos del neumático y del chasis para  $c_c= 2000$  Ns/m. Modelo de dos grados de libertad lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.26. Movimientos absolutos y relativos del neumático y del chasis para  $c_c= 1000$  Ns/m. Modelo de dos grados de libertad lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.27. Movimientos absolutos y relativos del neumático y del chasis para  $c_c= 500$  Ns/m. Modelo de dos grados de libertad lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.28. Función de transferencia  $X_1/Y$  y dependencia de esta con  $c_1$ . Modelo de dos grados de libertad lineal. Dominio de la frecuencia

Figura 5.29. Función de transferencia  $X_2/Y$  y dependencia de esta con  $c_1$ . Modelo de dos grados de libertad lineal. Dominio de la frecuencia

Figura 5.30. Aceleración del chasis, desplazamiento de la suspensión y deformación del neumático en el dominio de la frecuencia. Modelo de dos grados de libertad lineal.

Figura 5.31. Dependencia del coeficiente  $c_1$  en la aceleración del chasis, desplazamiento de la suspensión y deformación del neumático en el dominio de la frecuencia. Modelo de dos grados de libertad lineal.

Figura 5.32. Amortiguamiento no lineal (configuración de tipo I). Modelo de dos grados de libertad.

Figura 5.33. Movimientos absolutos y relativos del neumático y del chasis para  $c_{2c}= 8000$  Ns/m. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.34. Movimientos absolutos y relativos del neumático y del chasis para  $c_{2c}= 4000$  Ns/m. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.35. Movimientos absolutos y relativos del neumático y del chasis para  $c_{2c}= 2000$  Ns/m. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.36. Movimientos absolutos y relativos del neumático y del chasis para  $c_{2c}= 1000$  Ns/m. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.37. Movimientos absolutos y relativos del neumático y del chasis para  $c_{2c}= 500$  Ns/m. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Dominio del tiempo

Figura 5.38. Velocidad absoluta del chasis. Régimen permanente. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo I. Dominio del tiempo

Figura 5.39. Aceleración absoluta del chasis. Régimen permanente. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo I. Dominio del tiempo

Figura 5.40. Velocidad relativa del chasis. Régimen permanente. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo I. Dominio del tiempo

Figura 5.41. Aceleración relativa del chasis. Régimen permanente. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo I. Dominio del tiempo

Figura 5.42. Amortiguamiento no lineal (configuración de tipo I). Modelo de dos grados de libertad.

Figura 5.43. Función de transferencia  $X_1/Y$ . Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo I. Dominio de la frecuencia

Figura 5.44. Función de transferencia  $X_2/Y$ . Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo I. Dominio de la frecuencia

Figura 5.45. Aceleración del chasis. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo I. Dominio de la frecuencia

Figura 5.46. Desplazamiento de la suspensión. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo I. Dominio de la frecuencia

Figura 5.47. Deformación del neumático. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo I. Dominio de la frecuencia

Figura 5.48. Amortiguamiento no lineal (configuración de tipo II). Modelo de dos grados de libertad.

Figura 5.49. Velocidad absoluta del chasis. Régimen permanente. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo II. Dominio del tiempo

Figura 5.50. Aceleración absoluta del chasis. Régimen permanente. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo II. Dominio del tiempo

Figura 5.51. Velocidad relativa del chasis. Régimen permanente. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo II. Dominio del tiempo

Figura 5.52. Aceleración relativa del chasis. Régimen permanente. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo II. Dominio del tiempo

Figura 5.53. Amortiguamiento no lineal (configuración de tipo II). Modelo de dos grados de libertad.

Figura 5.54. Función de transferencia  $X_1/Y$  y dependencia de ésta con la velocidad relativa entre el chasis y el neumático. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo II. Dominio de la frecuencia

Figura 5.55. Función de transferencia  $X_2/Y$  y dependencia de ésta con la velocidad relativa entre el chasis y el neumático. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo II. Dominio de la frecuencia

Figura 5.56. Aceleración del chasis y dependencia de ésta con la velocidad relativa entre el chasis y el neumático. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo II. Dominio de la frecuencia

Figura 5.57. Deformación del neumático y dependencia de ésta con la velocidad relativa entre el chasis y el neumático. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Configuración de tipo II. Dominio de la frecuencia

Figura 6.1. Comparativa de la función de transferencia  $X_1/Y$  del modelo de un grado de libertad frente al de dos grados de libertad (configuraciones tipo I y II). Dominio de la frecuencia

Figura 6.2. Comparativa de la función de transferencia  $X_2/Y$  del modelo de un grado de libertad frente al de dos grados de libertad (configuraciones tipo I y II). Dominio de la frecuencia

Figura 6.3. Comparativa de la aceleración del chasis del modelo de un grado de libertad frente al de dos grados de libertad (configuraciones tipo I y II). Dominio de la frecuencia

Figura 6.4. Comparativa del desplazamiento de la suspensión del modelo de un grado de libertad frente al de dos grados de libertad (configuraciones tipo I y II). Dominio de la frecuencia

Figura 6.5. Comparativa de la deformación del neumático del modelo de un grado de libertad frente al de dos grados de libertad (configuraciones tipo I y II). Dominio de la frecuencia

# Notación

---

$F$	Fuerza soportada por el neumático [N]
$a$	Espesor de la zona del neumático sin deformar [m]
$b$	Espesor de la zona del neumático deformada [m]
$x_i$	desplazamiento del punto $i$ [m/s]
$K$	Constante de rigidez del muelle [N/m]
$F_{\text{muelle}}$	Fuerza ejercida por el muelle [N]
$K_{\text{resorte}}$	Constante de rigidez del resorte [N/m]
$d$	Diámetro del hilo de las espiras [m]
$G$	Módulo de elasticidad transversal [N/m <sup>2</sup> ]
$D$	Diámetro medio del muelle [m]
$N$	Número medio de espiras
$c$	Coefficiente de amortiguamiento [Ns/m]
$\dot{x}$	Velocidad de desplazamiento [m/s]
$F_{\text{amort}}$	Fuerza ejercida por el amortiguador [N]
$m$	Masa [Kg]
$F_k$	Fuerza del muelle [N]
$F_c$	Fuerza del amortiguador [N]
$f(t)$	Movimiento de la base [m]
$y$	Perfil del terreno [m]
$\dot{y}$	Velocidad de desplazamiento de la base [m/s]
$\ddot{x}$	aceleración de la masa [m/s <sup>2</sup> ]
$s$	Variable compleja
$F_t$	Función de transferencia
$X$	Movimiento vertical del vehículo [m]
$Y$	Movimiento vertical de la base [m]
$\cos$	coseno
$w$	Frecuencia de excitación [rad/s]
$t$	Tiempo
$y_0$	Amplitud del perfil del terreno [m]
$l_0$	Longitud de onda del perfil del terreno [m]
$\pi$	Pi
$z$	Desplazamiento relativo [m]
$\dot{z}$	Velocidad relativa [m/s]
$ \dot{x} - \dot{y} $	Valor absoluto de la velocidad relativa [m/s]
$\leq$	Menor o igual que
$\geq$	Mayor o igual que
$x_1$	Desplazamiento del neumático [m]
$\dot{x}_1$	Velocidad del neumático [m/s]

$\ddot{x}_1$	Aceleración del neumático [ $m/s^2$ ]
$x_2$	Desplazamiento del chasis [m]
$\dot{x}_2$	Velocidad del chasis [m/s]
$\ddot{x}_2$	Aceleración del chasis [ $m/s^2$ ]
$c_1$	Coefficiente de amortiguamiento del neumático [Ns/m]
$c_2$	Coefficiente de amortiguamiento del chasis [Ns/m]
$c_{2c}$	Coefficiente de amortiguamiento del chasis a compresión [Ns/m]
$c_{2e}$	Coefficiente de amortiguamiento del chasis en extensión [Ns/m]
$X_1$	Desplazamiento vertical del neumático [m]
$X_2$	Desplazamiento vertical del chasis [m]
$F_{11}$	Función de transferencia del neumático
$F_{12}$	Función de transferencia del chasis
$m_1$	Masa del neumático [kg]
$m_2$	Masa del chasis [kg]
$v$	Velocidad de desplazamiento del coche [m/s]
$w_n$	Frecuencia natural [rad/s]
$k_1$	Coefficiente de rigidez del neumático [N/m]
$k_2$	Coefficiente de rigidez del chasis [N/m]
$X_2''$	Amplitud de la aceleración del chasis [ $m/s^2$ ]



# 1. ESTADO DEL ARTE

---

Cada vez la industria del automóvil ofrece mejoras con relación a la seguridad y confort de los ocupantes del vehículo. Los viejos modelos usados, siendo válidos, dejan paso a estudios cada vez más específicos y sofisticados de aquellos aspectos que empíricamente han funcionado bien, pero que no se ajustan del todo a la realidad. Por tanto, se buscan modelos técnica y económicamente mejores.

Nos estamos refiriendo al modelo no lineal en los dispositivos de un sistema de suspensión en este caso, pero es extrapolable a cualquier ámbito de la industria.

En el estudio de la dinámica vertical del automóvil existe bastante bibliografía, pero es habitual que solo considere aspectos lineales, por simplicidad o porque realmente una vez puesto en práctica, sus resultados son aceptables. [1][2][5][6]

Para el estudio de las no linealidades en modelos de dos grados de libertad existen varios artículos de investigación, algunos de ellos centrados en sistemas de suspensión activa, lógico teniendo en cuenta el peso cada vez mayor que la electrónica tiene en la industria. [4]

Otros estudios se centran en el efecto de histéresis del amortiguador, que es un efecto claramente no lineal [3] y en los efectos que produce un muelle con comportamiento no lineal.

No solo las no linealidades, sino el terreno, la rigidez de la suspensión y el neumático influyen en la respuesta y el tiempo de respuesta del vehículo. [7]

Sin embargo, sobre la no linealidad de los amortiguadores aplicados al modelo de cuarto de coche con suspensión pasiva, no se conocen estudios realizados para saber qué efectos tiene sobre aspectos tan importantes como el confort del ocupante, la deformación del neumático o el desplazamiento de la suspensión.

Por tanto, el cometido de este trabajo es modelar, simular y sacar conclusiones considerando el comportamiento real del amortiguador.

## 2. SISTEMA DE SUSPENSIÓN DE UN VEHÍCULO

El sistema de suspensión de un vehículo es un sistema complejo formado por muchos elementos interconectados entre sí, que tiene una enorme importancia pues de él depende primero la seguridad de los ocupantes del vehículo y segundo, la comodidad de ellos.

El estudio dinámico lo podemos resumir básicamente en tres elementos: neumáticos, resortes y amortiguadores.

### 2.1. Neumáticos

El neumático es el primer elemento de seguridad activa del vehículo ya que es el dispositivo que mantiene el contacto de éste con el terreno. Por tanto, desde el punto de vista dinámico, las fuerzas de contacto entre el suelo y el neumático son fundamentales para la estabilidad, control y guiado de los vehículos.

Este elemento puede resultar muy complejo si tenemos en cuenta que no tiene el mismo comportamiento según el estado de la superficie del terreno (temperatura, rugosidad, etc...). No obstante, podemos simplificar su modelado considerándolo como un muelle para el caso de dinámica vertical. Al tratarse de un muelle lineal, tendrá una rigidez vertical constante que se puede determinar tal y como se muestra en la fig. 2.1:

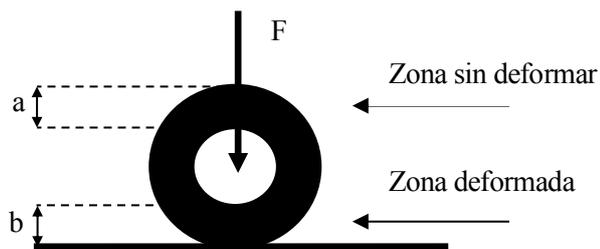


Fig. 2.1

$$K_{neumático} = \frac{F}{(a - b)} \left[ \frac{N}{m} \right]$$

$K_{neumático}$  = Rigidez vertical del neumático [N/m]

F= Fuerza soportada por el neumático [N]

a= espesor del neumático (zona indeformada)[m]

b= espesor del neumático (zona deformada) [m]

## 2.2. Resortes

En concreto los muelles helicoidales (fig. 2.2) son elementos mecánicos que se utilizan en casi todos los turismos. Tienen la ventaja de conseguir una elasticidad blanda debido al gran recorrido del resorte, todo ello sin apenas ocupar espacio ni sumar peso.

Están constituidos por un arrollamiento helicoidal de acero de diámetro variable en función del peso a soportar (10-15 mm aprox.) siendo las últimas espiras planas para facilitar el asiento sobre la base de apoyo.

No pueden transmitir esfuerzos laterales, y requieren, por tanto, en su montaje bielas de empuje lateral y transversal para la absorción de las reacciones de la rueda. Trabajan a torsión, retorciéndose proporcionalmente al esfuerzo que tienen que soportar acortando su longitud y volviendo a su posición de reposo cuando cesa el efecto que produce la deformación.

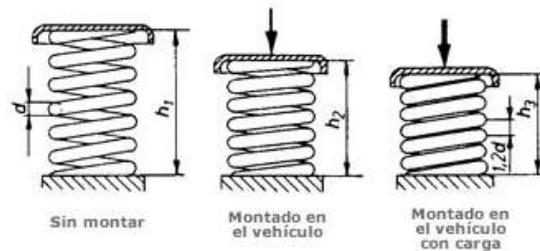


Fig. 2.2

Los resortes permiten que el vehículo y sus ocupantes perciban lo menos posible las irregularidades del firme y que los neumáticos retornen al contacto con la superficie de la carretera. Una masa no suspendida reducida proporcionará menos impacto sobre los muelles y por tanto se transmitirán acciones menores sobre el chasis, mejorando el confort. Esto unido a un alto peso suspendido (mayor inercia en contra de las acciones provenientes del suelo) proporcionará más comodidad y una tracción también mejorada del neumático. Por eso se buscan ruedas de menor peso, con llantas de aleación ligera y neumáticos de perfil bajo. [1]

Denominamos *masa suspendida* a la que se apoya sobre los resortes (motor, chasis, ocupantes, etc.), mientras que la *masa no suspendida* es aquella que no es soportada por los resortes (neumáticos, ejes, frenos, etc).

El modelo más simplificado para el elemento elástico de una suspensión es el muelle lineal (fig. 2.3), que proporciona una fuerza proporcional a su elongación.

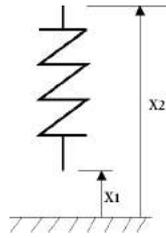


Fig. 2.3

$$F_{muelle} = -K(x_2 - x_1) [N]$$

$F_{muelle}$  = Fuerza ejercida por el muelle [N]

$K$  = constante de rigidez del muelle [N/m]

$x_i$  = desplazamiento del extremo  $i$  del muelle [m/s]

Si quisiéramos calcular la constante de rigidez del resorte, partiremos del caso más habitual de muelle helicoidal (fig. 2.4):

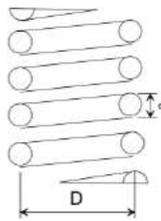


Fig. 2.4

$$K_{resorte} = \frac{d^4 G}{8D^3 N} [N/m]$$

$d$  = diámetro del hilo de las espiras [m]

$G$  = módulo de elasticidad transversal

(acero  $G = 8 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ )

$D$  = diámetro medio del muelle [m]

$N$  = número medio de espiras

### 2.3. Amortiguadores

Disipadores de energía, son los encargados de absorber las vibraciones de los elementos elásticos convirtiendo en calor la energía generada por las oscilaciones.

Hay que resaltar que los amortiguadores no soportan el peso del vehículo, su cometido principal es controlar el movimiento de la suspensión y disipar la energía que en forma de oscilaciones acumulan los resortes.

Cuando la rueda encuentra un obstáculo, el muelle se comprime o se estira, recogiendo la energía mecánica producida por el choque, energía que devuelve a continuación, por efecto de su elasticidad, rebotando sobre la carrocería. Este rebote en forma de vibración es el que tiene que frenar el amortiguador, recogiendo, en primer lugar, el efecto de compresión y luego el de reacción del muelle, actuando de freno en ambos sentidos; por esta razón reciben el nombre de los amortiguadores de doble efecto.

Por tanto, podemos resumir su función en dos:

- *Confort*: disipar la energía del movimiento vertical del vehículo para mantener estas oscilaciones dentro de unos rangos aceptables desde el punto de vista de los ocupantes.

- *Seguridad*: asegurar el contacto entre el terreno y el neumático, evitando que éste rebote y se despegue.

Como comentamos al principio del trabajo, las teorías clásicas de sistemas vibratorios utilizan casi siempre el concepto de amortiguador lineal (fuerza proporcional a la velocidad de extensión) principalmente porque este concepto proporciona ecuaciones para las cuales las soluciones pueden ser bien entendidas y documentadas, y además este modelo es aceptablemente realista. Nosotros vamos a estudiar el caso también de amortiguador no lineal para ver qué efectos tiene sobre la dinámica vertical del vehículo.

Los amortiguadores hidráulicos son los más usados y su principio se basa en el paso de un fluido por los orificios de un émbolo. El paso forzado del fluido ejerce una fuerza de disipación viscosa que se opone primero a la compresión del resorte y luego a su extensión, reduciendo de forma progresiva las oscilaciones. Esta fuerza finalmente se transforma en calor. [5]

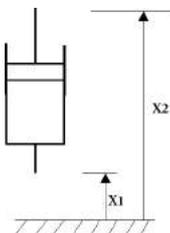


Fig. 2.5

$$F_{\text{amortiguador}} = -c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) [N]$$

$F_{\text{amortiguador}}$  = fuerza ejercida por el amortiguador [N]

$c$  = constante del amortiguador [Ns/m]

$\dot{x}_i$  = velocidad de desplazamiento del extremo  $i$  del amortiguador [m/s]

La fuerza resistente de un amortiguador depende de la velocidad con que oscila la suspensión y del número y tamaño de los orificios en el pistón. Pero en general, la modelización que se hace de un amortiguador es suponiendo una fuerza proporcional y opuesta a la velocidad de extensión o compresión entre sus extremos

(fig. 2.5). Esto hace que cuanto más rápidos son los movimientos de la suspensión, más resistencia ofrecen los amortiguadores a extenderse o comprimirse.

Los amortiguadores se construyen para que tengan comportamientos diferentes en compresión y en extensión. Por eso, lo normal es que posean válvulas diferentes para cada carrera. En los vehículos para carretera nos interesa una amortiguación más blanda para la compresión. Cuando la rueda se encuentra con un obstáculo se produce un impacto que genera enormes fuerzas compresivas en el amortiguador. Si la amortiguación no fuera blanda estos esfuerzos de compresión acortarían notablemente la vida útil del amortiguador y se transmitirían al chasis.

# 3. MODELO DE UN GRADO DE LIBERTAD

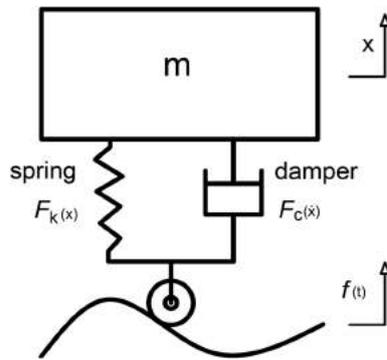


Fig. 3.1

El comportamiento del vehículo frente a diversas acciones se puede simular mediante distintos modelos.

Comenzaremos por el modelo más simple, de un grado de libertad, e iremos añadiendo complejidad de manera paulatina hasta llegar al modelo del cuarto de coche, que es un modelo de dos grados de libertad. Entre medias, iremos considerando al amortiguador como elemento lineal y lo compararemos con el caso no lineal para ver las diferencias y los condicionantes que introduce en el problema.

El estudio se hace en el dominio del tiempo y de la frecuencia, siendo este último un punto importante que nos permitirá ver cómo son las amplitudes de diferentes parámetros dinámicos en función de la frecuencia de excitación.

## 3.1. Descripción del modelo lineal

Este es el modelo más simple utilizado en análisis de la dinámica vehicular. Es útil para estudiar de forma rápida el movimiento vertical del chasis de un vehículo en respuesta a distintos perfiles de carretera. Como se ve en la ilustración de la figura 3.1, consta de la masa del vehículo (masa suspendida) y el sistema de suspensión formado por el resorte y el amortiguador. [6]

La ecuación del movimiento vertical  $x(t)$ , de la masa suspendida del vehículo será la correspondiente a un sistema de un grado de libertad con movimiento en la base.

Si consideramos que, tanto el resorte como el amortiguador son lineales, el primero provocará una fuerza proporcional al desplazamiento relativo del sistema ( $x-y$ ), y el segundo otra fuerza proporcional, pero a la velocidad relativa del vehículo, ( $\dot{x} - \dot{y}$ ). Las constantes de proporcionalidad serán  $k$  y  $c$ , constante de rigidez del muelle y constante del amortiguador. La descomposición de fuerzas la mostramos a continuación:

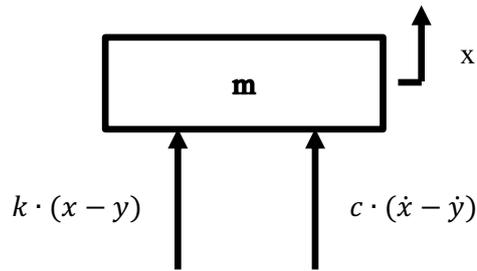


Fig. 3.2

$m$ = masa suspendida (masa del chasis) [kg]

$k$ = rigidez de la suspensión [N/m]

$c$ = coef. de amort. de la suspensión [Ns/m]

$y$ = perfil del terreno [m]

$x$ = movimiento vertical del chasis del vehículo [m]

### 3.1.1. Dominio del tiempo

Aplicando la segunda ley de Newton al sistema de la fig. 3.2: (equilibrio de fuerzas)

$$m \cdot \ddot{x} = F_{muelle} + F_{amortiguador} = k \cdot (x - y) + c \cdot (\dot{x} - \dot{y})$$

En esta ecuación no aparece el término asociado a la gravedad porque consideramos que se toma como origen de coordenadas la posición de equilibrio estática del vehículo sobre la suspensión.

En cualquier instante, la altura de la rueda será igual al valor de la variable  $y(t)$  en la posición  $x(t)$  en que se encuentre el vehículo.

Queda una ecuación diferencial de segundo orden que tenemos que integrar para conocer en el dominio del tiempo cuál es la respuesta  $x(t)$ .

### 3.1.2. Dominio de la frecuencia

Tenemos un sistema con una señal de entrada ( $Y$ = perfil del terreno) y una señal de salida ( $X$ = movimiento vertical del vehículo). Al ser el problema lineal, podemos aplicar la transformada de Laplace las dos señales.

Llamamos función de transferencia al cociente de ambas como mostramos a continuación.

$$m \cdot \ddot{x} = F_{muelle} + F_{amortiguador} = k \cdot (x - y) + c \cdot (\dot{x} - \dot{y})$$

→ Transformada de Laplace

$$\rightarrow m \cdot s^2 \cdot X = k \cdot X - k \cdot y + c \cdot s \cdot X - c \cdot s \cdot Y$$

$$\rightarrow (m \cdot s^2 + c \cdot s + k) \cdot X = (c \cdot s + k) \cdot Y$$

$$\rightarrow F_t = \frac{X}{Y} = \frac{(c \cdot s + k)}{(m \cdot s^2 + c \cdot s + k)}$$

Teniendo en cuenta que la variable 's' es una variable compleja cuyo valor es  $s = j\omega$ , y sustituyéndola en la expresión de la función de transferencia obtenemos el diagrama de Bode del sistema [1], que no es más que la representación del sistema en el dominio de la frecuencia. En nuestro caso concreto, expresa la influencia de la señal de salida para diferentes valores de la frecuencia de la señal de entrada.

El diagrama de Bode está compuesto de dos gráficas; una es aquella que representa la ganancia [dB] de la función de transferencia y otra es el desfase de la señal de salida, ambas frente a la frecuencia. Ésta última la obviaremos dado que no es el objeto de este trabajo.

Para este caso hemos ensayado el siguiente vehículo tipo al que le hemos aplicado una señal senoidal, fig. 3.3:

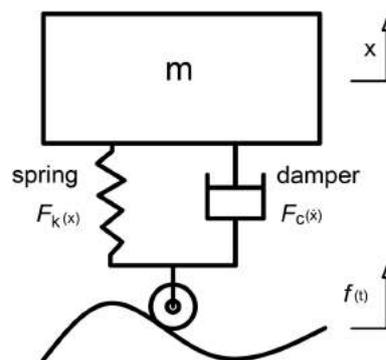


Fig. 3.3

**BASE DE CÁLCULO:**

$m$  = Masa del vehículo

$k$  = Rigidez de la suspensión

$c$  = Coef. amort. suspensión

$y_0$  = Amplitud del perfil del terreno

$l_0$  = Longitud de onda

$v$  = Velocidad de desplazamiento horizontal

$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot v}{l_0}$  . Frecuencia de excitación de la base

**PERFIL DEL TERRENO:**

$$y = y_0 \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t))$$

El perfil del terreno o movimiento de la base es la superposición de un escalón y un movimiento armónico de la misma amplitud que el escalón con una frecuencia 'w'. Podemos pensar de dos formas a la hora de interpretar la señal de entrada o perfil del terreno aplicado a nuestro sistema:

- Como un vehículo que se desplaza horizontalmente a una velocidad horizontal constante 'v'.
- Como un vehículo que horizontalmente está quieto, pero recibe una excitación vertical en la base.

En ambas la relación entre la velocidad lineal y la frecuencia es la que se establece en la fig. 3.3.

Cabe comentar también que no es conveniente perder de vista el orden de magnitud de las variables intervinientes. Hablamos de un vehículo que supongamos se moverá como máximo a unos 200 km/h. Esto supone que, dado los parámetros escogidos como base de cálculo, la frecuencia de excitación máxima será de  $w_{m\acute{a}x} \approx 12 \text{ rad/s}$ , lo cual implicará una velocidad relativa máxima  $|\dot{z}_{m\acute{a}x}| = |\dot{x} - \dot{y}| \approx 0.5 \text{ m/s}$ .

Con el valor de la velocidad relativa máxima delimitamos el rango de valores del amortiguador, pues este ofrecerá una fuerza de resistencia proporcional a ésta, por tanto, tomaremos éste valor máximo como tope en nuestros cálculos.

### 3.2. Descripción del modelo no lineal

Ahora, consideramos un comportamiento no lineal del amortiguador (los resortes seguirán siendo lineales).

¿En qué consiste dicho comportamiento? El amortiguador no se comporta de manera homogénea en toda su carrera de funcionamiento.

En el presente trabajo hemos trabajado con dos configuraciones para reflejar dicho comportamiento:

- Amortiguador con coeficiente de amortiguamiento distinto a tracción que a compresión (fig. 3.4)
- Amortiguador con comportamiento lineal en un rango de funcionamiento estrecho (usual) y coeficientes de amortiguamiento distintos para rangos de velocidades relativas más elevadas (fig. 3.5). Si el Trabajo consta de varios volúmenes, cada uno deberá llevar su propio índice, pero se debe incluir también un índice general.

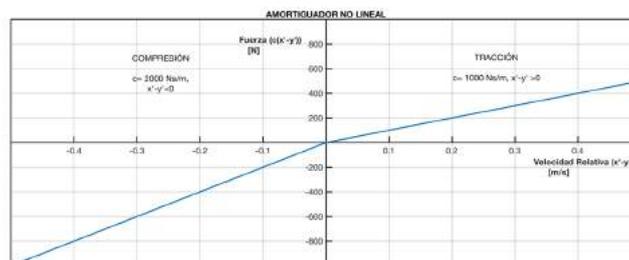


Fig. 3.4

En la figura se ve que el coeficiente de amortiguamiento es mayor a compresión que a tracción, y aunque es un comportamiento lineal a trozos, en su conjunto se considera como un comportamiento no lineal.

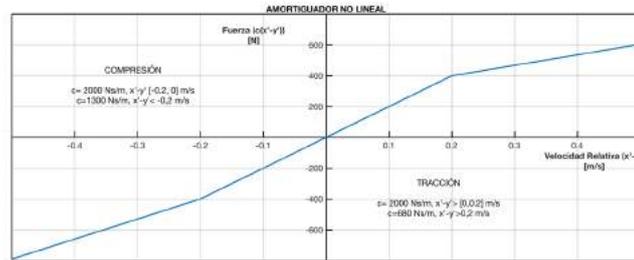


Fig. 3.5

En la figura se ve la otra configuración estudiada en el que se considera un comportamiento lineal en un tramo central (que se considera más frecuente en la marcha del vehículo) y dos tramos lineales en zonas más alejadas y agresivas dinámicamente hablando, es decir, con velocidades relativas mayores. Como en el caso anterior, se considera comportamiento no lineal en su conjunto.

En el diseño de un amortiguador hay que tener en cuenta que hay más exigencia a compresión que a tracción. Entendemos por ‘exigencia’ a que a compresión no solo la suspensión debe absorber la irregularidad del terreno, sino que debe controlar las fuerzas que se transmiten a la masa no suspendida (neumático), mientras que el amortiguamiento a tracción puede ‘relajarse’ relativamente porque solo se debe controlar el movimiento ascendente de la masa suspendida, que en cierta medida ya ejerce la gravedad.

### 3.2.1. Dominio del tiempo

Aplicando la segunda ley de Newton al sistema de la fig. 3.4 (equilibrio de fuerzas):

$$m \cdot \ddot{x} = F_{muelle} + F_{amortiguador} = k \cdot (x - y) + c \cdot (\dot{x} - \dot{y}) \quad (c = 2000 \text{ Ns/m}, x < 0 \text{ m/s})$$

$$m \cdot \ddot{x} = F_{muelle} + F_{amortiguador} = k \cdot (x - y) + c \cdot (\dot{x} - \dot{y}) \quad (c = 1000 \text{ Ns/m}, x > 0 \text{ m/s})$$

Aplicando la segunda ley de Newton al sistema de la fig. 3.5 (equilibrio de fuerzas):

$$m \cdot \ddot{x} = F_{muelle} + F_{amortiguador} = k \cdot (x - y) + c \cdot (\dot{x} - \dot{y}) \quad (c = 1300 \text{ Ns/m}, x < -0.2 \text{ m/s})$$

$$m \cdot \ddot{x} = F_{muelle} + F_{amortiguador} = k \cdot (x - y) + c \cdot (\dot{x} - \dot{y}) \quad (c = 1000 \text{ Ns/m}, x \in [-0.2, 0.2] \text{ m/s})$$

$$m \cdot \ddot{x} = F_{muelle} + F_{amortiguador} = k \cdot (x - y) + c \cdot (\dot{x} - \dot{y}) \quad (c = 680 \text{ Ns/m}, x > 0.2 \text{ m/s})$$

*Nota: Estos valores son a título informativo puesto que el objeto del estudio también es ir probando con distintos valores.*

Es decir, que hay que resolver varias ecuaciones diferenciales de segundo orden por partes. Integrándolas podemos hallar el movimiento vertical  $x(t)$  del vehículo.

### **3.2.2. Dominio de la frecuencia**

Ahora no podemos aplicar la transformada de Laplace al sistema puesto que no es lineal. Resolvemos esta situación sabiendo que, aplicada la señal de entrada al vehículo, tras un transitorio, llegamos a obtener una respuesta en régimen permanente. Si identificamos la amplitud de la señal de salida en dicho régimen, podemos obtener la función de transferencia. Todos los cálculos son realizados con Matlab®.

# 4. MODELO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

El modelo de dos grados de libertad es al que llamamos *modelo de cuarto de coche* pues en él diferenciamos la masa no suspendida (neumático) de la masa suspendida (chasis) y, aunque no deja de ser un modelo simple y simplificado de un vehículo, las ecuaciones se complican de manera importante. Tanto, que se hace necesario el uso de métodos computacionales para su cálculo. Como contraprestación, los resultados que nos ofrece son aceptables y nos dará una información más precisa de la dinámica vertical vehicular.

Podríamos hacer un modelo de tres, cuatro, etc... grados de libertad, que consistiría en estos casos, tomar a la vez que el vehículo, la estructura del cuerpo del ocupante, por ejemplo, tomando la cabeza y el tronco como otras masas del modelo, pero estos casos se salen del ámbito del trabajo y no será considerado.

## 4.1. Descripción del modelo lineal

En el modelo de la fig. 4.1 se puede observar la *masa suspendida*  $m_2$  o masa del chasis, la *masa no suspendida*  $m_1$  o masa del neumático y el sistema de suspensión del chasis formado por el resorte y el amortiguador.

En el sistema de suspensión de la masa no suspendida, pese a que se suele representar, se considera que solo tiene rigidez, es decir, que el coeficiente de amortiguamiento es cero o muy pequeño, y que como se verá posteriormente, apenas tiene influencia en los resultados.

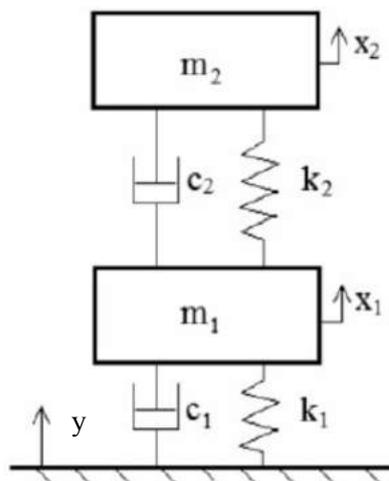


Fig. 4.1

En definitiva, se trata de conocer cómo se mueven los grados de libertad  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  teniendo en cuenta que tenemos una señal de entrada o perfil del terreno en la base y teniendo en cuenta las diferentes variantes que vamos a considerar en cuanto a configuraciones del amortiguador; lineal y no lineal.

### 4.1.1. Dominio del tiempo

Aplicando la segunda ley de Newton al sistema de la fig. 4.1: (equilibrio de fuerzas)

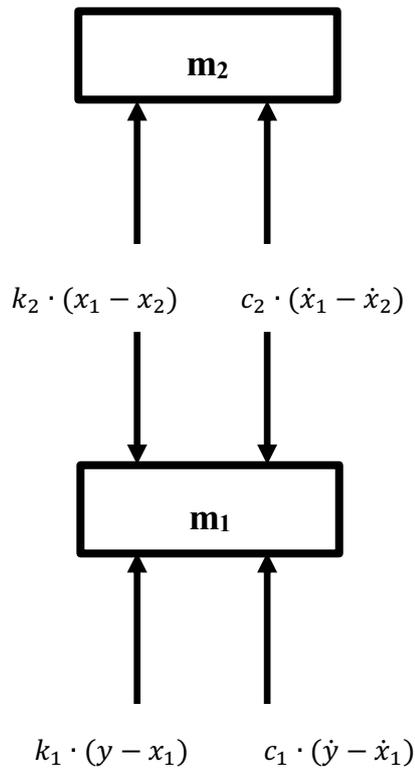


Fig. 4.2

Sistema de ecuaciones diferenciales que hay que resolver:

$$\begin{aligned}
 m_1 \cdot \ddot{x}_1 + c_2 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 \cdot (x_1 - x_2) + c_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{y}) + k_1 \cdot (x_1 - y) &= 0 \\
 m_2 \cdot \ddot{x}_2 + c_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 \cdot (x_2 - x_1) &= 0
 \end{aligned}$$

#### 4.1.2. Dominio de la frecuencia

Aquí, a diferencia del caso de un grado de libertad, tenemos una señal de entrada; el perfil del terreno y dos señales de salida; la respuesta del neumático y del vehículo [1]. No obstante, las funciones de transferencia no cambian su significado y tendremos:

$$\begin{aligned}
 F_{t1} &= \frac{X_1}{Y} \\
 F_{t2} &= \frac{X_2}{Y}
 \end{aligned}$$

En el dominio de Laplace las ecuaciones se pueden reescribir:

$$m_1 \cdot X_1 \cdot s^2 = k_1 \cdot (Y - X_1) + k_2 \cdot (X_2 - X_1) + c_1 \cdot s \cdot (Y - X_1) + c_2 \cdot s \cdot (X_2 - X_1)$$

$$m_2 \cdot X_2 \cdot s^2 = k_2 \cdot (X_1 - X_2) + c_2 \cdot s \cdot (X_1 - X_2)$$

Agrupando:

$$X_1 \cdot [m_1 \cdot s^2 + (c_1 + c_2) \cdot s + (k_1 + k_2)] = Y \cdot (c_1 \cdot s + k_1) + X_2 \cdot (c_2 \cdot s + k_2)$$

$$X_2 \cdot [m_2 \cdot s^2 + c_2 \cdot s + k_2] = X_1 \cdot (c_2 \cdot s + k_2)$$

Tras manipular las ecuaciones:

$$F_{t1}(s) = \frac{c_1 \cdot m_2 \cdot s^3 + [m_2 \cdot k_1 + c_1 \cdot c_2] \cdot s^2 + [k_2 \cdot c_1 + k_1 \cdot c_2] \cdot s + k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2 \cdot s^4 + m_2 \cdot [(c_1 + c_2) + m_1 \cdot c_2] \cdot s^3 + [m_2 \cdot (k_1 + k_2) + c_2 \cdot (c_1 + c_2) + m_1 \cdot k_2 - c_2^2 \cdot s] \cdot s^2 + [c_2 \cdot (k_1 + k_2) + k_2 \cdot (c_1 + c_2) - 2 \cdot c_2 \cdot k_2] \cdot s + [k_2 \cdot (k_1 + k_2) - k_2^2]}$$

$$F_{t2}(s) = \frac{c_1 \cdot c_2 \cdot s^2 + [k_2 \cdot c_1 + k_1 \cdot c_2] \cdot s + k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2 \cdot s^4 + m_2 \cdot [(c_1 + c_2) + m_1 \cdot c_2] \cdot s^3 + [m_2 \cdot (k_1 + k_2) + c_2 \cdot (c_1 + c_2) + m_1 \cdot k_2 - c_2^2 \cdot s] \cdot s^2 + [c_2 \cdot (k_1 + k_2) + k_2 \cdot (c_1 + c_2) - 2 \cdot c_2 \cdot k_2] \cdot s + [k_2 \cdot (k_1 + k_2) - k_2^2]}$$

Resultan como hemos podido ver dos expresiones bastante largas, que, gracias a Matlab® podemos simplificar ya que éste posee un comando que calcula el diagrama de Bode de un sistema lineal.

No se nos puede pasar por alto que un sistema de dos grados de libertad posee dos frecuencias naturales; el del neumático y el del chasis, y que el movimiento del neumático influye en el del chasis y viceversa.

## 4.2. Descripción del modelo no lineal

Análogamente al modelo de un grado de libertad, consideraremos dos configuraciones para ilustrar la no linealidad.

A la primera la llamamos de tipo I (fig. 4.3), y consiste en el comportamiento diferencial del amortiguador cuando trabaja a tracción respecto de cuando trabaja a compresión.

La segunda configuración la denominamos de tipo II (fig. 4.4) y se caracteriza por un comportamiento lineal a tracción y compresión en zonas centrales de velocidad relativa, pero que se hace no lineal cuando las velocidades son más importantes.

Podríamos también considerar al neumático con un amortiguamiento no lineal, pero como ya advertimos con anterioridad y como se verá posteriormente, apenas tendrá influencia en los resultados y solo añadiría más complejidad a las ecuaciones sin apenas aportar nada, por tanto,  $c_1 \cong 0$  Ns/m.

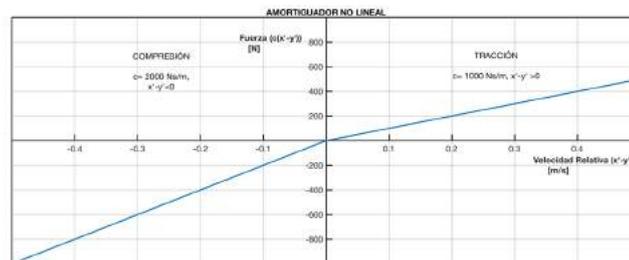


Fig. 4.3

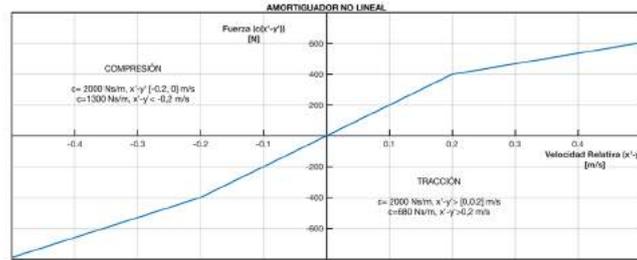


Fig. 4.4

Además, como ya sabemos, no es posible aplicar la transformada de Laplace para alcanzar resultados en el dominio de la frecuencia por ser no lineal. De nuevo, consideraremos al resorte con comportamiento lineal.

#### 4.2.1. Dominio del tiempo

Las ecuaciones para resolver son:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + c_2 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 \cdot (x_1 - x_2) + c_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{y}) + k_1 \cdot (x_1 - y) = 0$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + c_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

Para el caso de no linealidad del tipo de la fig. 4.3, los condicionantes serían:

$$c_2 = 1000 \frac{Ns}{m}, (x_2 - x_1) \geq 0 \text{ m/s}$$

$$c_2 = 2000 \frac{Ns}{m}, (x_2 - x_1) < 0 \text{ m/s}$$

Para el caso de no linealidad del tipo de la fig. 4.4, los condicionantes serían:

$$c_2 = 1300 \frac{Ns}{m}, (x_2 - x_1) < -0.2 \text{ m/s}$$

$$c_2 = 2000 \frac{Ns}{m}, (x_2 - x_1) \in [-0.2, 0.2] \text{ m/s}$$

$$c_2 = 680 \frac{Ns}{m}, x_2 - x_1 > 0.2 \text{ m/s}$$

*Nota: Estos valores son a título informativo puesto que el objeto del estudio también es ir probando con distintos valores.*

#### 4.2.2. Dominio de la frecuencia

Resolvemos esta situación sabiendo que, aplicada la señal de entrada al vehículo, tras un transitorio, llegamos a obtener una respuesta en régimen permanente. Si identificamos la amplitud de la señal de salida en dicho régimen, podemos obtener la función de transferencia. Todos los cálculos son realizados con Matlab®.

# 5. SIMULACIÓN DINÁMICA

El objetivo de esta sección es obtener resultados concretos de los modelos de uno y dos grados de libertad con el software Matlab®, ver sus diferencias y comprobar las implicaciones del caso no lineal.

## 5.1. Modelo de un grado de libertad lineal

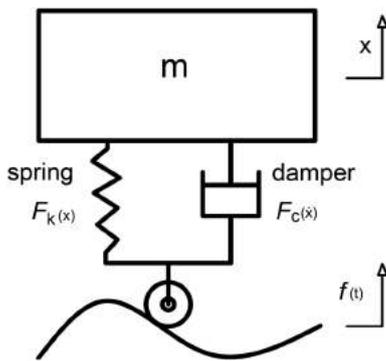


Fig. 5.1

### BASE DE CÁLCULO:

$m = 250$  kg. Masa del vehículo

$k = 100000$  N/m. Rigidez de la suspensión

$c = 8000 - 500$  Ns/m. Coef. amort. suspensión

$y_0 = 0,1$  m. Amplitud del perfil del terreno

$l_0 = 30$  m. longitud de onda

$v = 27,78$  m/s. velocidad de desplazamiento horizontal (100 km/h)

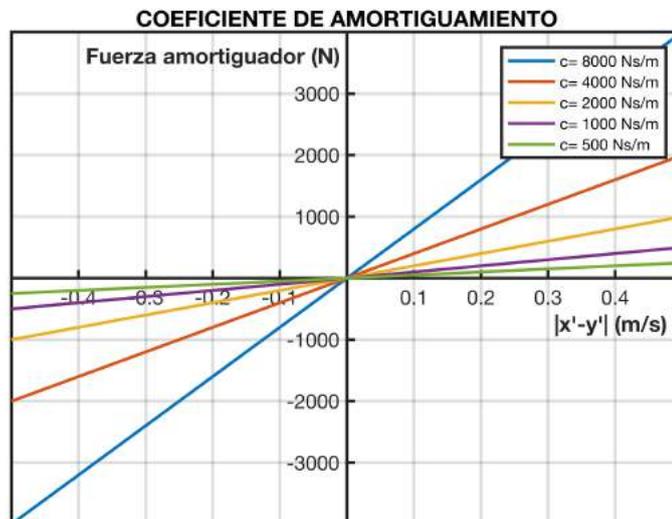
$w = \frac{2 \cdot \pi \cdot v}{l_0}$ . Frecuencia de excitación de la base

### PERFIL DEL TERRENO:

$$y = y_0 \cdot (1 - \cos(w \cdot t))$$

### 5.1.1. Dominio del tiempo

Hemos escogido unos parámetros determinados para ilustrar este caso, pero lo importante aquí es la comparación que se hace de un determinado problema para distintos valores del amortiguamiento.



*Resultados en obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c = 8000 \text{ Ns/m}$ :*

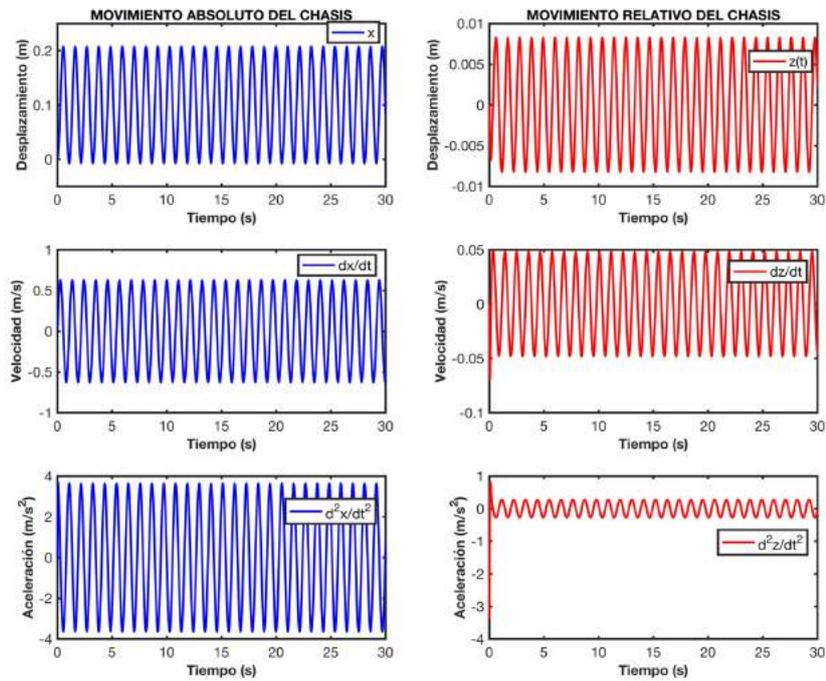


Fig. 5.2

Se trata de un valor del coeficiente de amortiguamiento muy alto. Observamos que el transitorio es muy corto, pero se puede observar en el movimiento del chasis, obteniéndose valores de aceleración de cierta enjundia, pero extremadamente corto en el tiempo.

Hemos dividido el estudio del dominio del tiempo en movimiento absoluto y movimiento relativo porque éste último es el que actúa sobre el valor de la fuerza de amortiguamiento.

Si probáramos con velocidades más altas, lo que equivaldría a decir probar con frecuencias de excitación más elevadas, veríamos gráficas cualitativamente similares.

*Resultados en obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c= 4000$  Ns/m:*

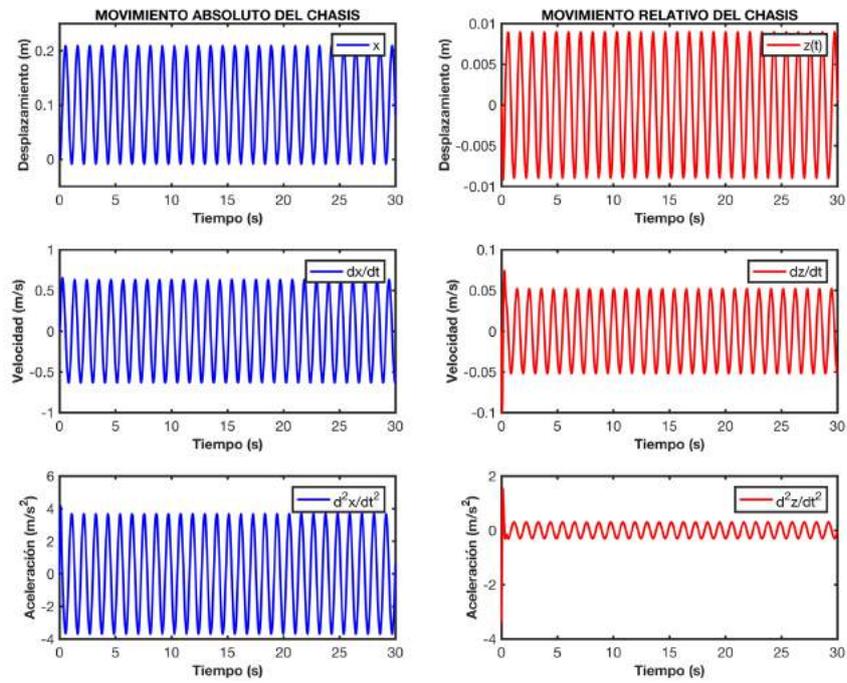


Fig. 5.3

*Resultados en obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c= 2000$  Ns/m:*

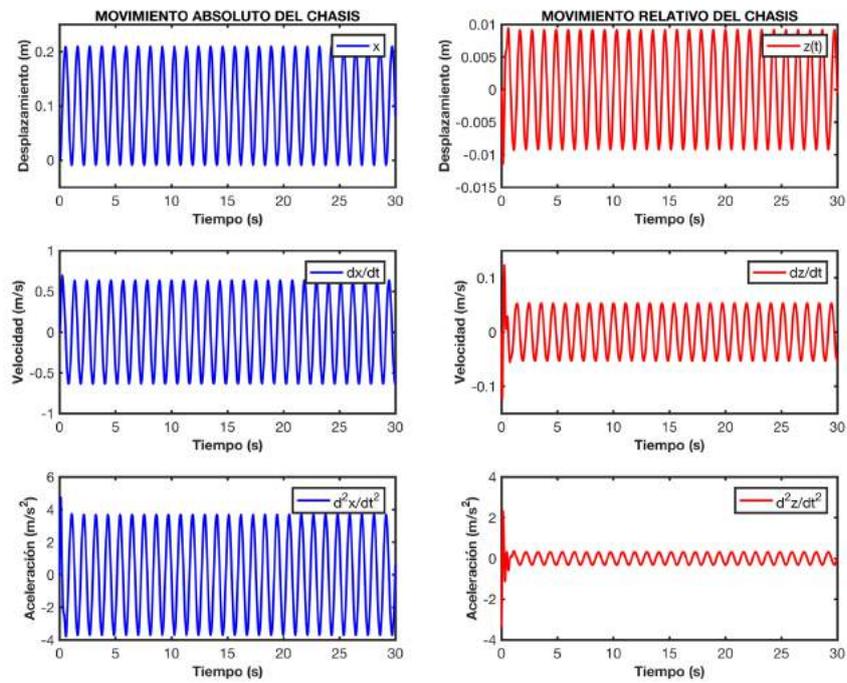


Fig. 5.4

*Resultados en obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c= 1000 \text{ Ns/m}$ :*

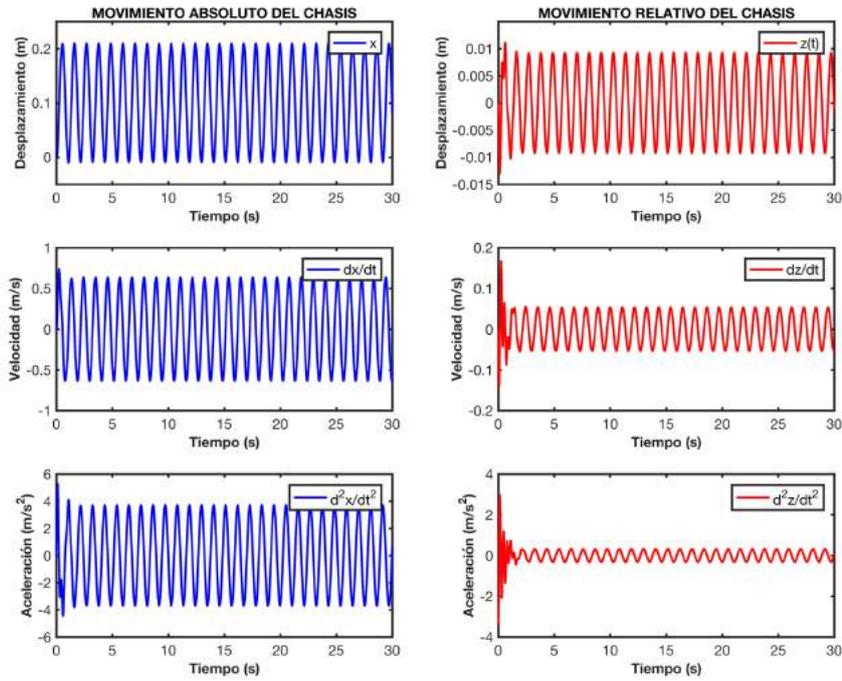


Fig. 5.5

*Resultados en obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c= 500 \text{ Ns/m}$ :*

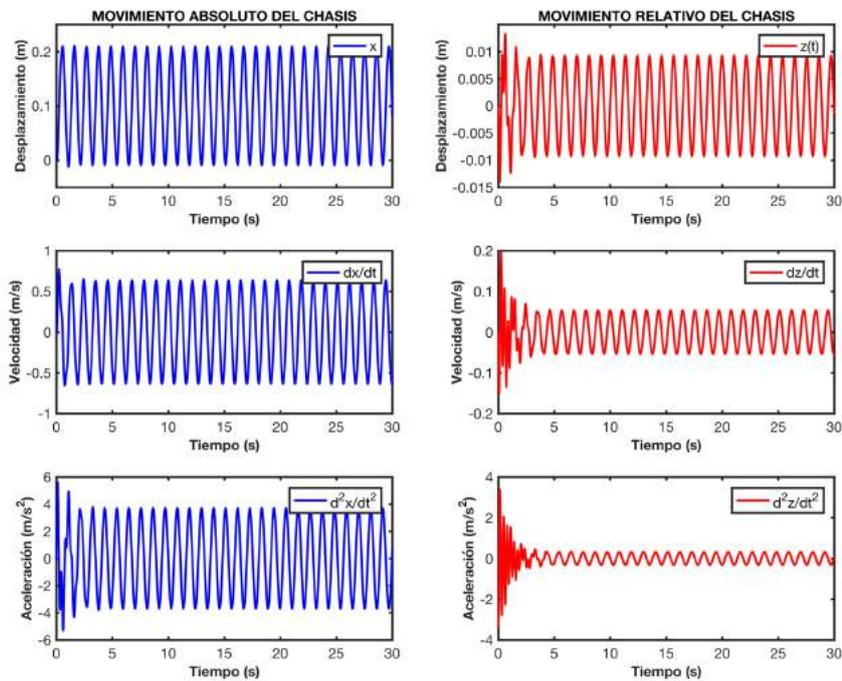


Fig. 5.6

Se observa en la figura anterior que existe un transitorio más prolongado mientras más bajo es el valor del coeficiente de amortiguamiento. Las diferencias son notables si nos fijamos en el movimiento relativo del vehículo.

### 5.1.2. Dominio de la frecuencia

Aquí se hace un barrido de frecuencias para la función de transferencia del sistema. Recordemos que la función de transferencia es:

$$\rightarrow F_t = \frac{X}{Y} = \frac{(c \cdot s + k)}{(m \cdot s^2 + c \cdot s + k)}$$

Para los valores de k y m anteriores, y realizando el estudio para valores de c= 8000- 500 Ns/m, es decir, de un amortiguamiento más duro a uno más blando, obtenemos el siguiente resultado:

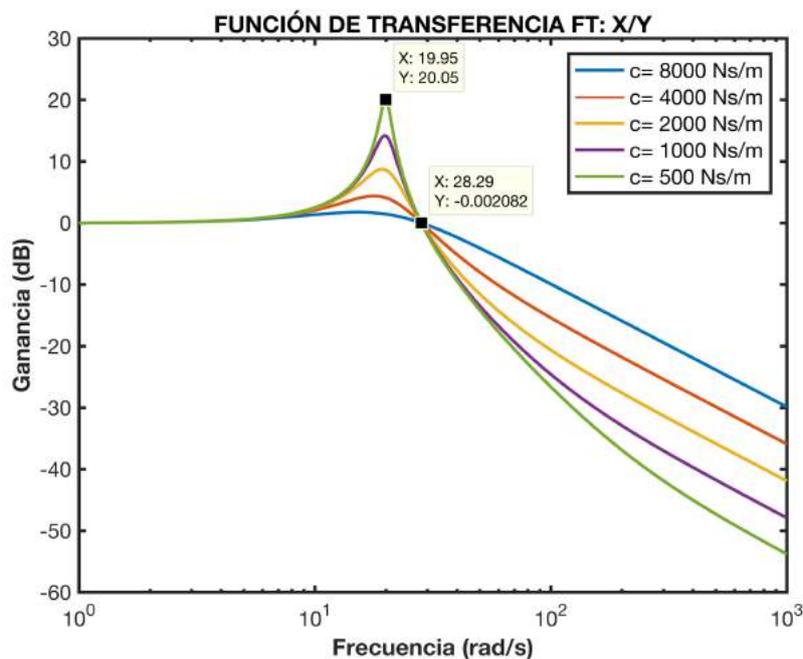


Fig. 5.7

Podemos realizar un cálculo aproximado para saber alrededor de qué valor estarán las frecuencias de resonancia

de los distintos sistemas amortiguados. El cálculo es  $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100000}{250}} = 20 \text{ rad/s}$ .

Según la fig. 5.7 vemos cómo en la zona próxima a este valor se acumulan dichas resonancias, lugar donde la amplitud en la respuesta del vehículo se incrementa. Más cuanto menor es el valor del coeficiente de amortiguamiento. Esto es lógico puesto que si no vamos al otro extremo; un valor de c elevado, por ejemplo 8000 Ns/m, (amortiguador muy duro) apenas se incrementa el valor de la amplitud del vehículo. Este caso es indeseable puesto que los ocupantes del vehículo estarían sometidos a todas las irregularidades del terreno.

El caso de amortiguador muy blando también es indeseable ya que, a pesar de que absorbe mejor las irregularidades, el desplazamiento relativo del chasis no es tolerable.

Si nos acercamos con más detalle a la zona de incremento de la amplitud, en la fig. 5.8 vemos como todas las curvas confluyen en una ganancia de 0 dB, para una frecuencia de  $\sqrt{2}w_n$  esto es lógico puesto que ahí la transmisibilidad es 1, recordemos que la ganancia en dB es  $20 \log_{10}(X/Y)$ .

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20 \frac{rad}{s}, \sqrt{2}w_n = 28,28 \text{ rad/s}, \text{ justo el punto donde intersectan todas las curvas representadas.}$$

La máxima transmisibilidad se produce para frecuencias próximas a la natural del sistema y si trazáramos una curva auxiliar que uniera todos los máximos veríamos como se haría cada vez más vertical a medida que el amortiguamiento se hace más bajo.

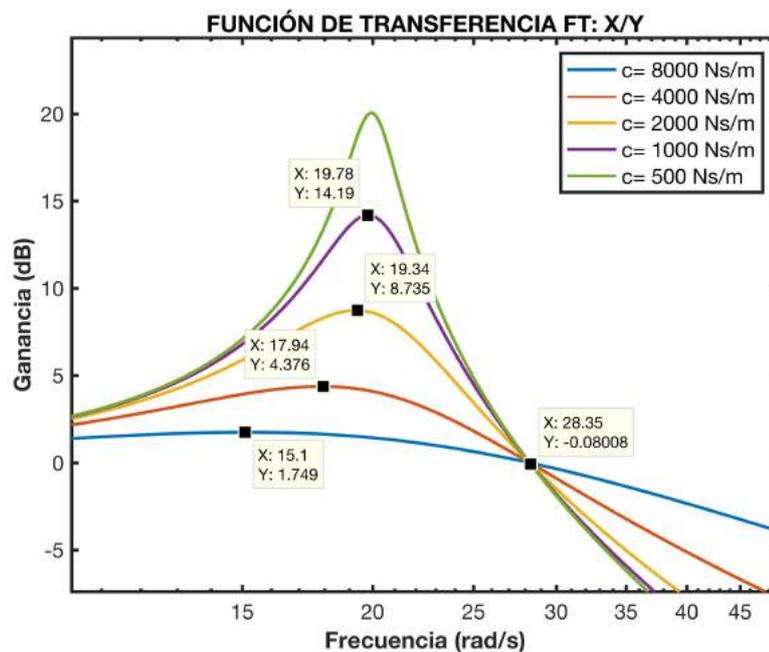


Fig. 5.8

## 5.2. Modelo de un grado de libertad no lineal

Ahora el amortiguador no opone la misma fuerza de resistencia en todo su recorrido. Estudiaremos dos tipos de amortiguadores no lineales:

### 5.2.1. Configuración Tipo I

En la fig. 5.9 se puede deducir el distinto comportamiento del amortiguador a tracción que a compresión. Tomaremos datos del coeficiente de amortiguamiento para valores de la velocidad relativa  $x'-y' < 0$  (compresión) que variarán de 8000 a 500 Ns/m y mantendremos fijo su valor para velocidades  $x'-y' > 0$  (tracción) en 2000 Ns/m. De esta forma, existirá el caso particular que, tanto a tracción como a compresión el amortiguador tenga el mismo valor, que será el caso particular de amortiguador lineal. Concretamente, un amortiguador lineal de  $c = 2000$  Ns/m.

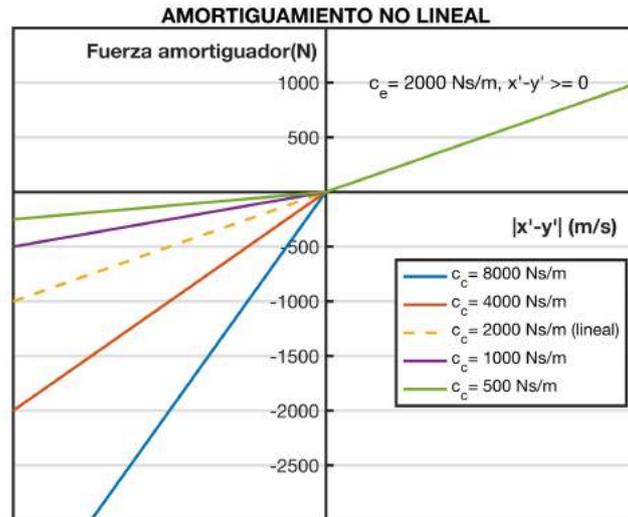


Fig. 5.9

### 5.2.1.1. Dominio del tiempo

A continuación, presentamos los resultados obtenidos para distintos valores del coeficiente de amortiguamiento cuando éste trabaja a compresión manteniendo un valor moderado de  $c_e = 2000$  Ns/m cuando la suspensión está traccionada (extension):

*Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_c = 8000 \text{ Ns/m}$ :*

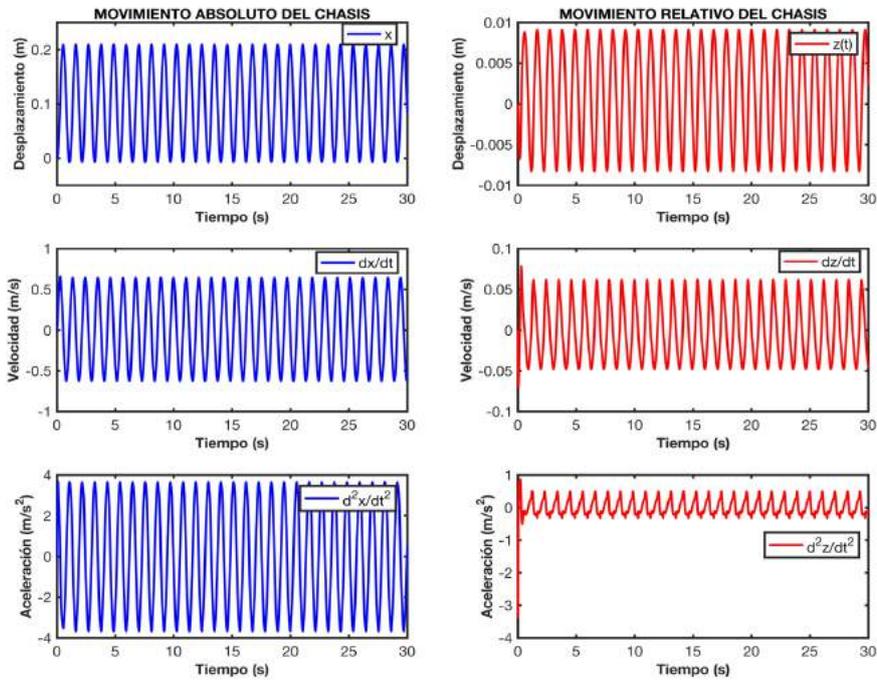


Fig. 5.10

*Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_c = 4000 \text{ Ns/m}$ :*

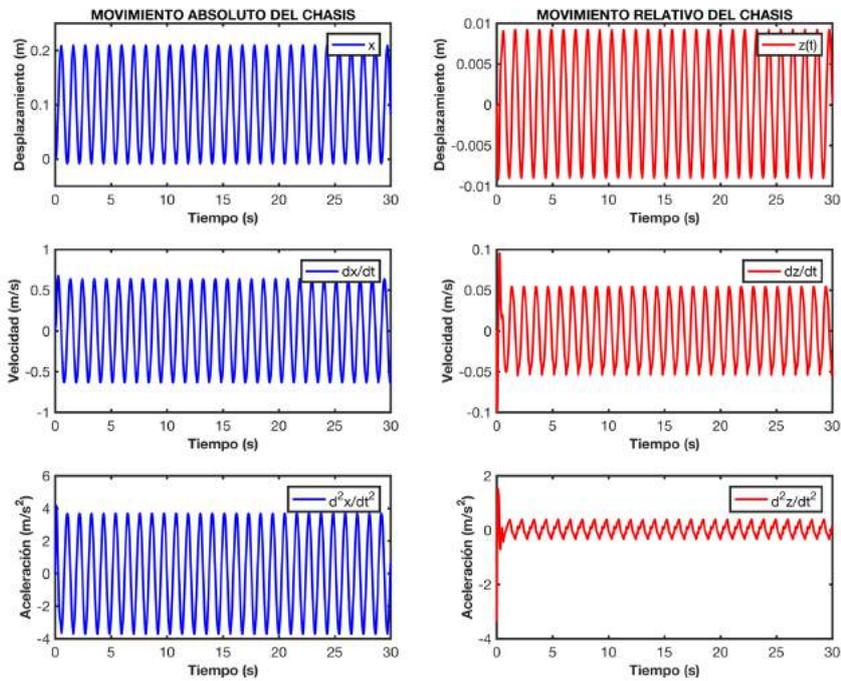


Fig. 5.11

*Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_c = 2000$  Ns/m: (caso particular lineal)*

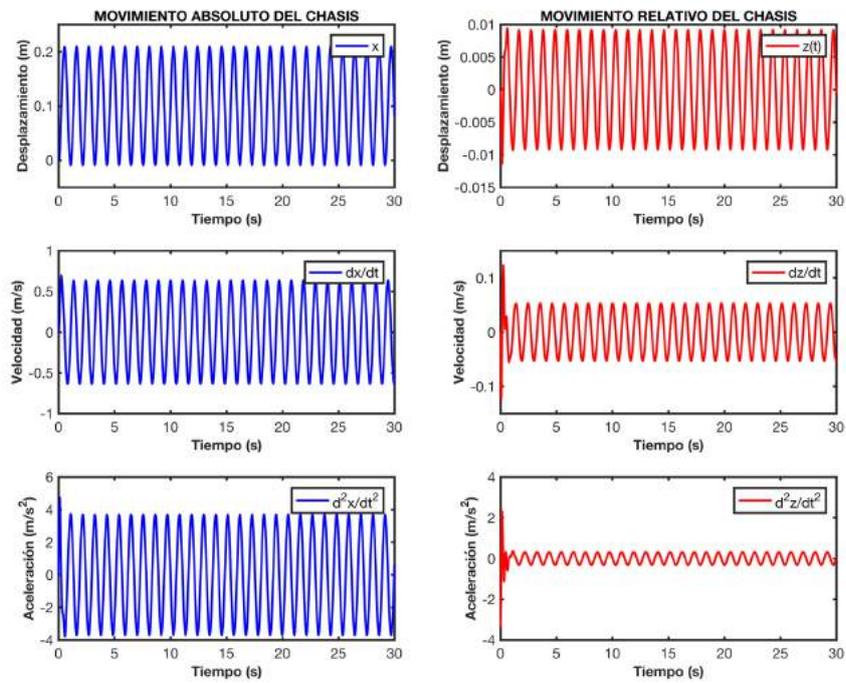


Fig. 5.12

*Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_c = 1000$  Ns/m:*

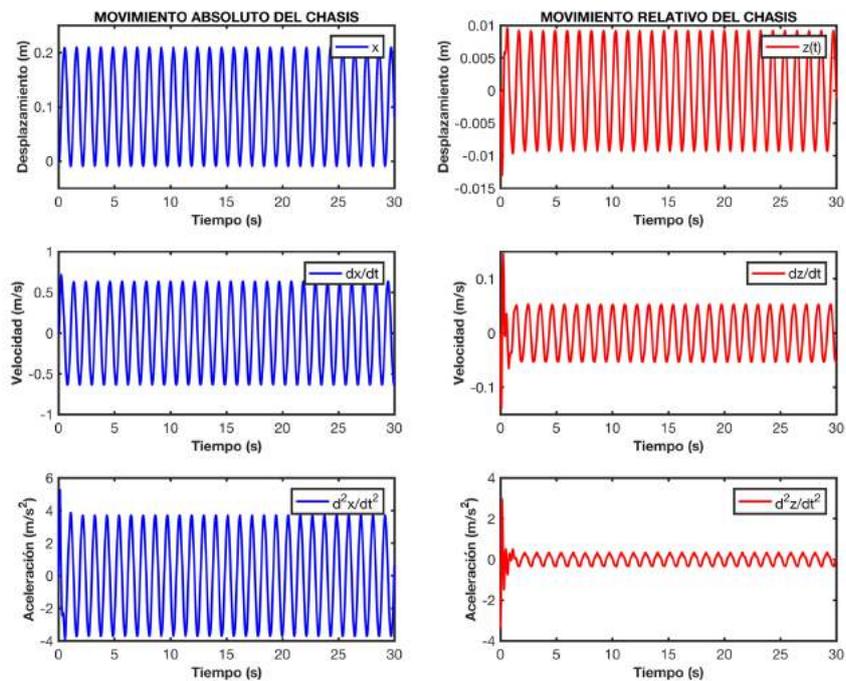


Fig. 5.13

Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_c = 500 \text{ Ns/m}$ :

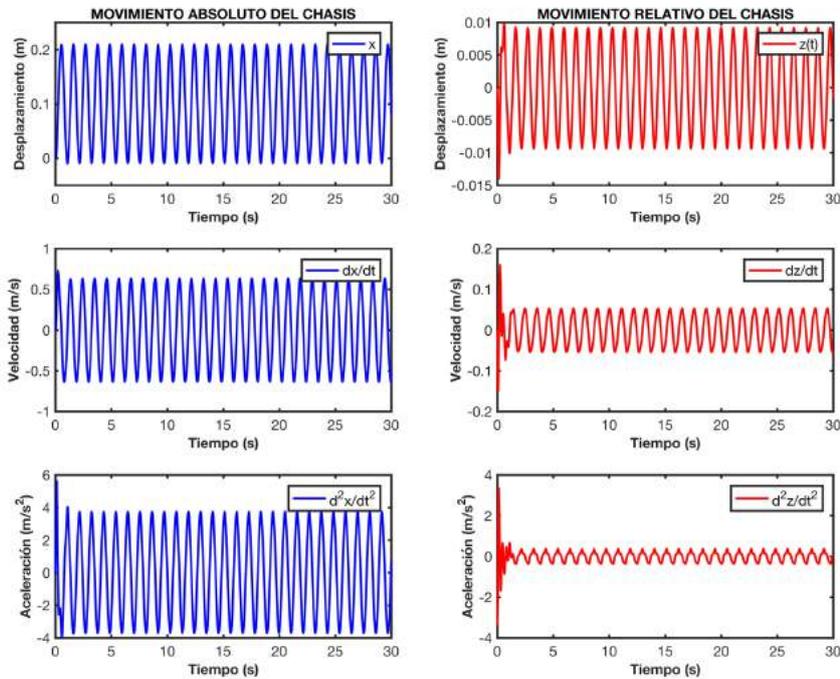


Fig. 5.14

Al igual que como pasaba para el caso lineal, vemos como el transitorio se hace más largo cuanto menor es el coeficiente de amortiguamiento, aunque en términos relativos es despreciable. También se observa que cuando la suspensión es más blanda, las aceleraciones relativas del chasis son menores en régimen permanente, lo que a priori redundaría en la comodidad de los ocupantes del vehículo.

Hasta ahora hemos visto los resultados de cada uno de los parámetros cinemáticos por separado, detengámonos ahora en aquellos más importantes mostrando en un mismo gráfico cómo varían en función del coeficiente  $c_c$ :

- Velocidad absoluta  $dx/dt$ :

En la fig. 5.15 están representadas los regímenes transitorio y permanente de la velocidad absoluta vertical del chasis.

Las diferencias son muy pequeñas en el régimen transitorio y aún más, casi imperceptibles, en el régimen permanente, pero podemos decir que en el movimiento de compresión de la suspensión, el valor mínimo se produce para la suspensión más dura, sin embargo, para el movimiento de tracción, la suspensión más dura es la que obtiene un valor máximo más elevado, como es lógico.

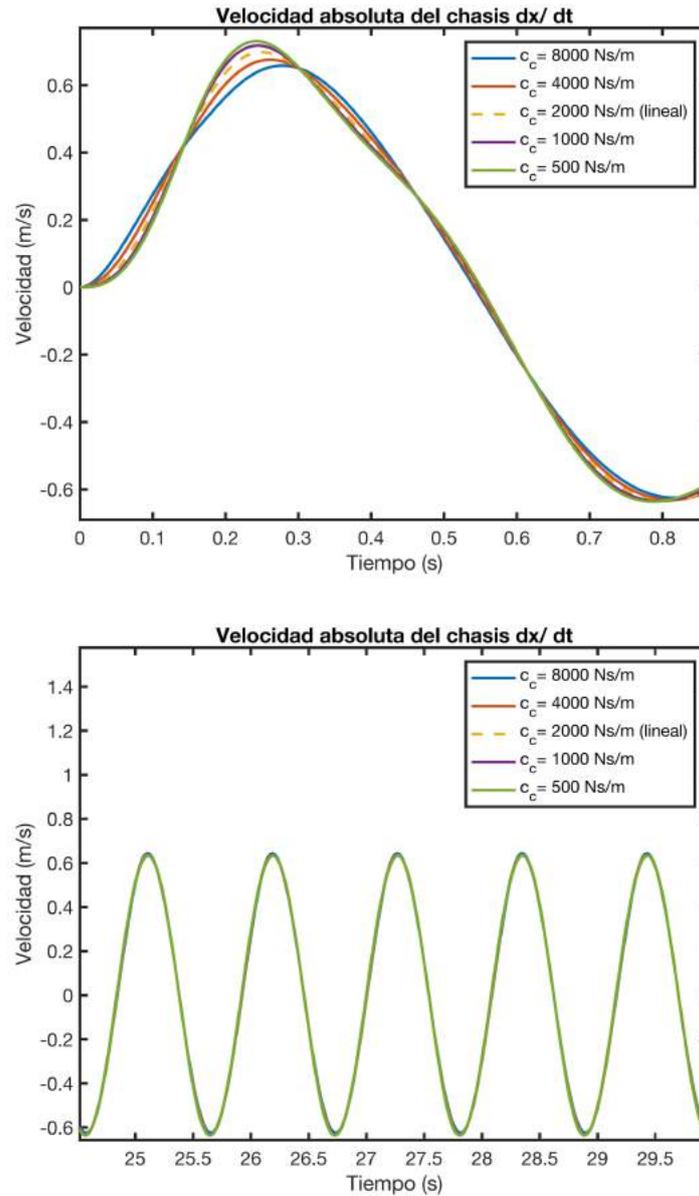


Fig. 5.15

- Aceleración absoluta  $d^2x/dt^2$ :

Aquí nos detenemos porque nos parece interesante ilustrar los distintos transitorios que se producen para los distintos valores de  $c_c$  (fig. 5.16). Vemos como el valor de  $c$  más bajo oscila más que aquella suspensión con valor de  $c$  más alta.

Con respecto al modelo lineal vemos como tiene un comportamiento medio ponderado respecto a los demás.

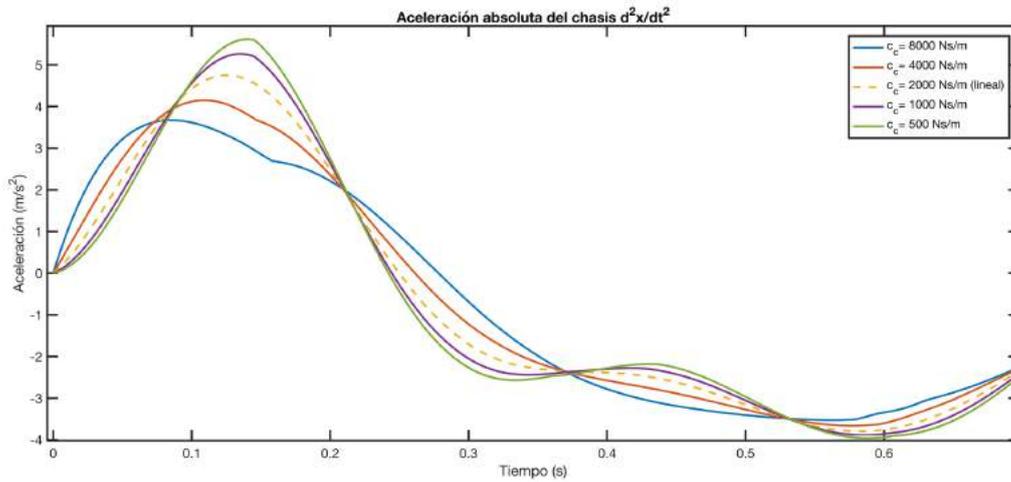


Fig. 5.16

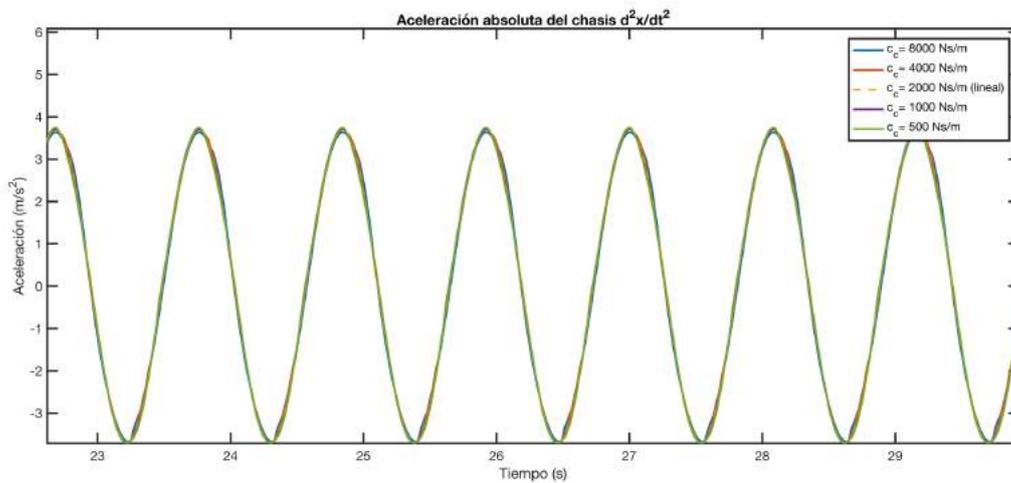


Fig. 5.17

En régimen permanente las diferencias son muy pequeñas, pero podemos ver la influencia del coeficiente de amortiguamiento. Cuanto mayor es el valor de  $c$ , menor es el valor absoluto de la amplitud de este parámetro, pero para el valor de  $c=4000$  Ns/m la amplitud de la deceleración es la mayor, y desde luego llama la atención que no sea el amortiguador con el coeficiente más bajo quien tenga este comportamiento, aunque cabe insistir en que la diferencia es muy pequeña, del orden de  $0,01$   $m/s^2$ .

- Velocidad relativa  $dz/dt$ :

Este parámetro es bastante importante teniendo en cuenta que es el que determina la fuerza que ejerce el amortiguador sobre el neumático.

En la fig. 5.18 vemos el régimen transitorio y de nuevo, el valor más bajo de  $c$  se muestra como el más inestable en los primeros instantes.

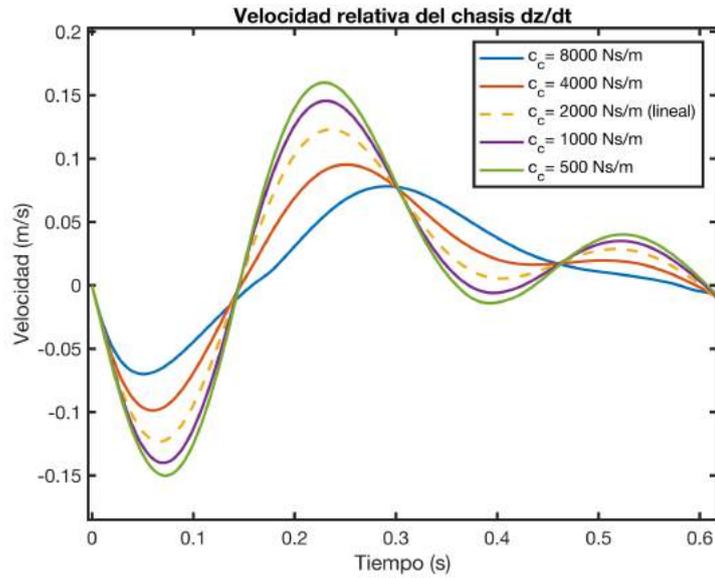


Fig. 5.18

La fig. 5.19 muestra el detalle del régimen permanente en el que cabe destacar cierta inestabilidad para el valor de  $c = 4000$  Ns/m. Destaca que para el valor de  $c = 8000$  Ns/m se produce el valor máximo en valor absoluto de la velocidad relativa.

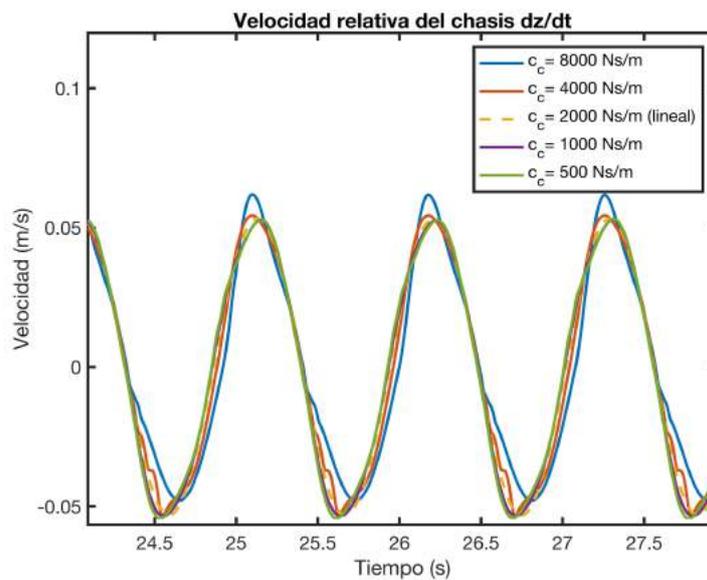


Fig. 5.19

- Aceleración relativa  $d^2z/dt^2$ :

Este parámetro influye sobre el confort de los ocupantes del vehículo. El transitorio y el permanente se muestran en la fig. 5.20.

Como era de esperar, los valores de aceleración relativa son más caóticos pero muestran las inestabilidades para la suspensión más dura, el resto de valores del coeficiente de amortiguamiento se

muestran de manera similar entre ellos, aunque es el de valor  $c = 2000 \text{ Ns/m}$  el que menos oscilaciones presenta. Recordemos que este sería el caso particular de amortiguamiento lineal, puesto que el valor de  $c = 2000 \text{ Ns/m}$  es el valor común para valores de velocidad relativa de tracción.

Podemos concluir que un amortiguamiento no lineal presenta más oscilaciones en cuanto a su aceleración relativa, parámetro importante de cara al confort de los ocupantes.

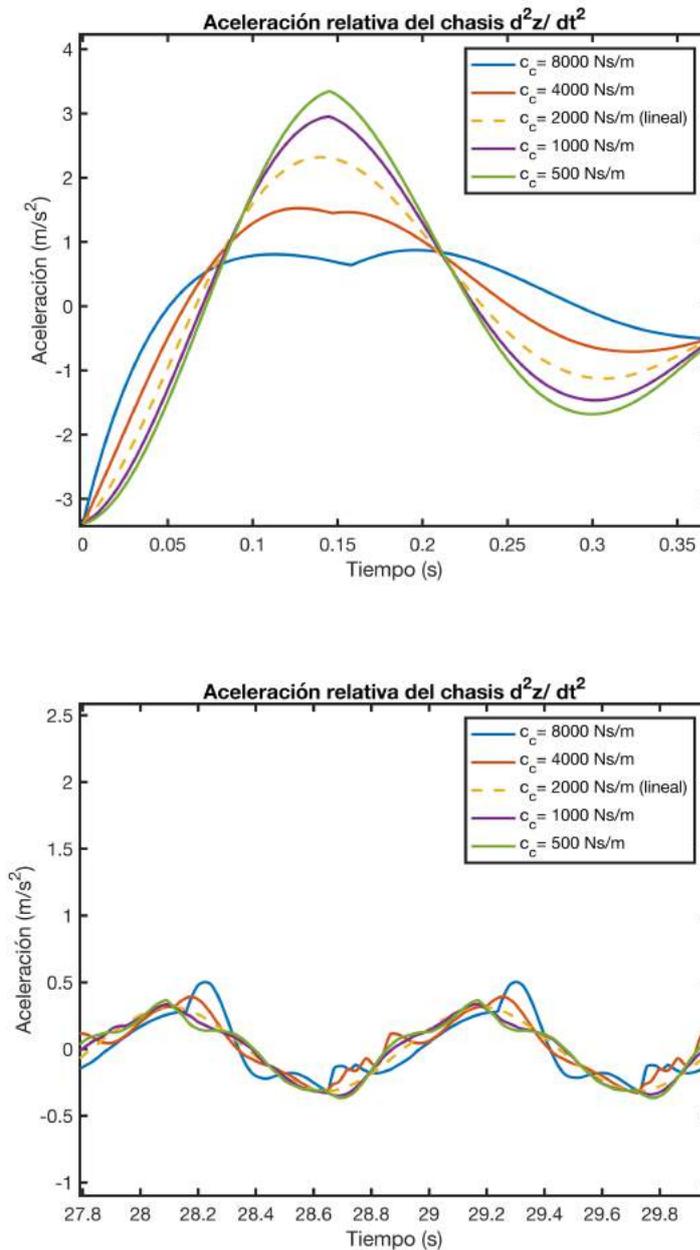


Fig. 5.20

### 5.2.1.2. Dominio de la frecuencia

La función de transferencia del sistema es la misma que para el caso lineal, la única diferencia es que no podemos aplicar transformada de Lapace para realizar los cálculos. Recurrimos a Matlab® para calcular los datos de las amplitudes de las señales de entrada y salida en régimen permanente y aplicarlos a dicha función.

A la vista de la fig. 5.21, podemos concluir que, al igual que para el caso lineal, se observa una clara amplificación del movimiento vertical de salida cuanto más bajo es el coeficiente de amortiguamiento.

Se observa también una zona de inestabilidad para altas frecuencias, fuera de rango del caso práctico de nuestro vehículo, que hace imprevisible su tendencia, pero al estar fuera del ámbito del trabajo, lo obviaremos y solo lo dejamos indicado.

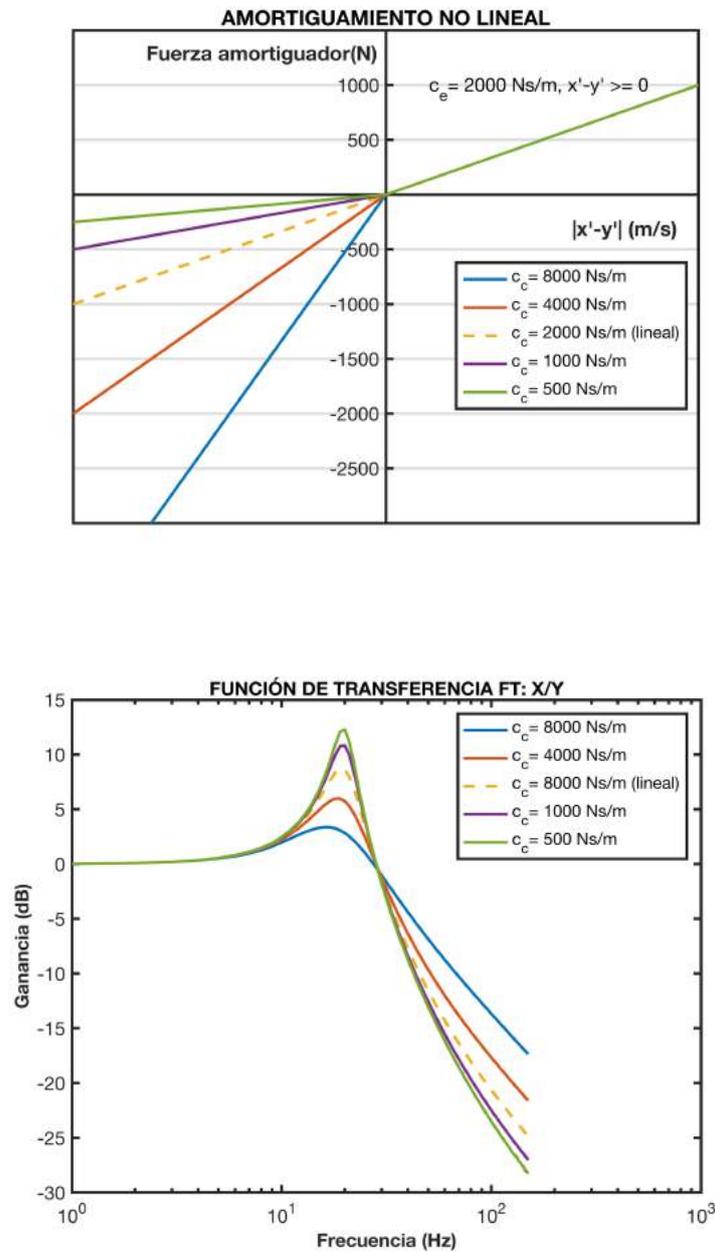


Fig. 5.21

### 5.3. Modelo de dos grados de libertad lineal

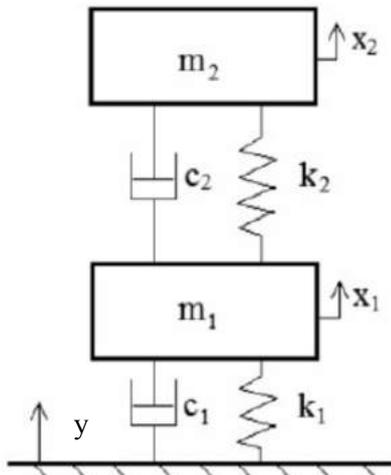


Fig. 5.22

#### BASE DE CÁLCULO:

$m_1 = 50$  kg. Masa no suspendida (neumático)

$m_2 = 250$  kg. Masa suspendida (chasis)

$k_1 = 220000$  N/m. Coef. rigidez del neumático

$k_2 = 26000$  N/m. Coef. rigidez chasis

$c_1 = 0$  Ns/m. Coef. de amortiguamiento del neumático

$c_2 = 8000 - 500$  Ns/m. Coef. de amortiguamiento del chasis

$y_0 = 0,1$  m. Amplitud del perfil del terreno

$l_0 = 30$  m. Longitud de onda

$v = 27,78$  m/s. Velocidad de desplazamiento horizontal (100 km/h)

$w = \frac{2 \cdot \pi \cdot v}{y_0}$ . Frecuencia de excitación de la base

#### PERFIL DEL TERRENO:

$y = y_0 \cdot (1 - \cos(w \cdot t))$

#### 5.3.1. Dominio del tiempo

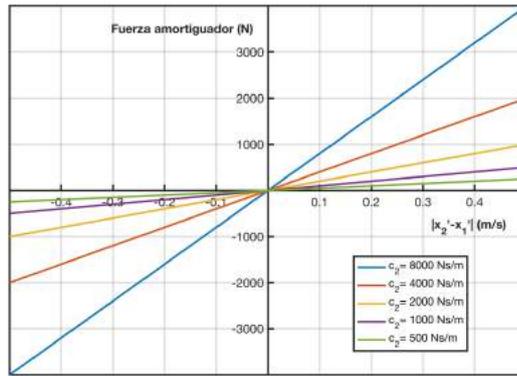
Como diferencias principales con respecto al modelo de un grado de libertad tenemos que, en lugar de una masa, la del vehículo, tenemos dos; la del neumático y la del chasis y en lugar de un sistema de suspensión resorte- amortiguador, tenemos dos; uno para el neumático y otro para el chasis.

Por tanto, presentamos un modelo más detallado pero que es el más simple que nos permite diferenciar la dinámica del sistema de rodadura con respecto al habitáculo donde se sitúan los ocupantes del vehículo.

Ya comentamos que el coeficiente de amortiguamiento de la masa no suspendida (neumático) es muy pequeño, que su influencia apenas es perceptible y por eso vamos a tomar un valor cero. El neumático básicamente ofrece rigidez de deformación.

Por lo demás, el estudio que haremos es el mismo en relación con el modelo de un grado de libertad; en base a unos parámetros fijados, estudiar la influencia del amortiguador no lineal respecto al lineal, haciendo variar el coeficiente  $c_2$ .

A continuación, presentamos los resultados para distintos valores de  $c_2$ :



*Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_2 = 8000$  Ns/m:*

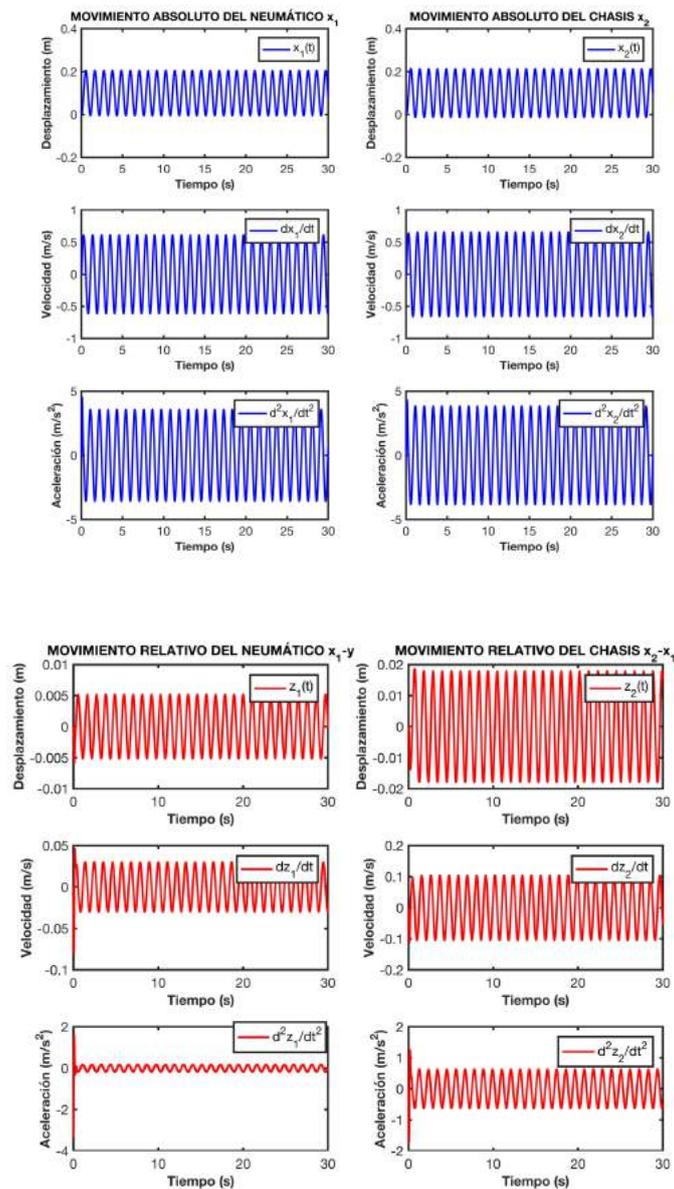


Fig. 5.23

Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_2 = 4000 \text{ Ns/m}$ :

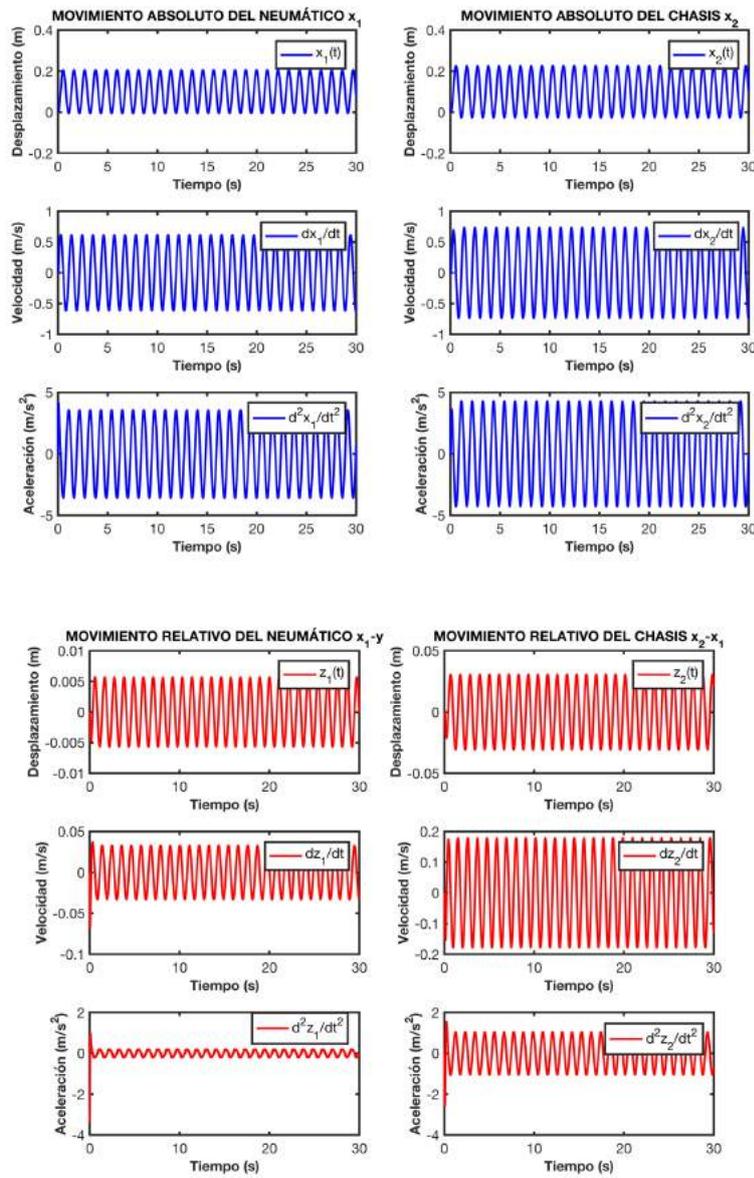


Fig. 5.24

*Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_2=2000$  Ns/m: (Caso lineal)*

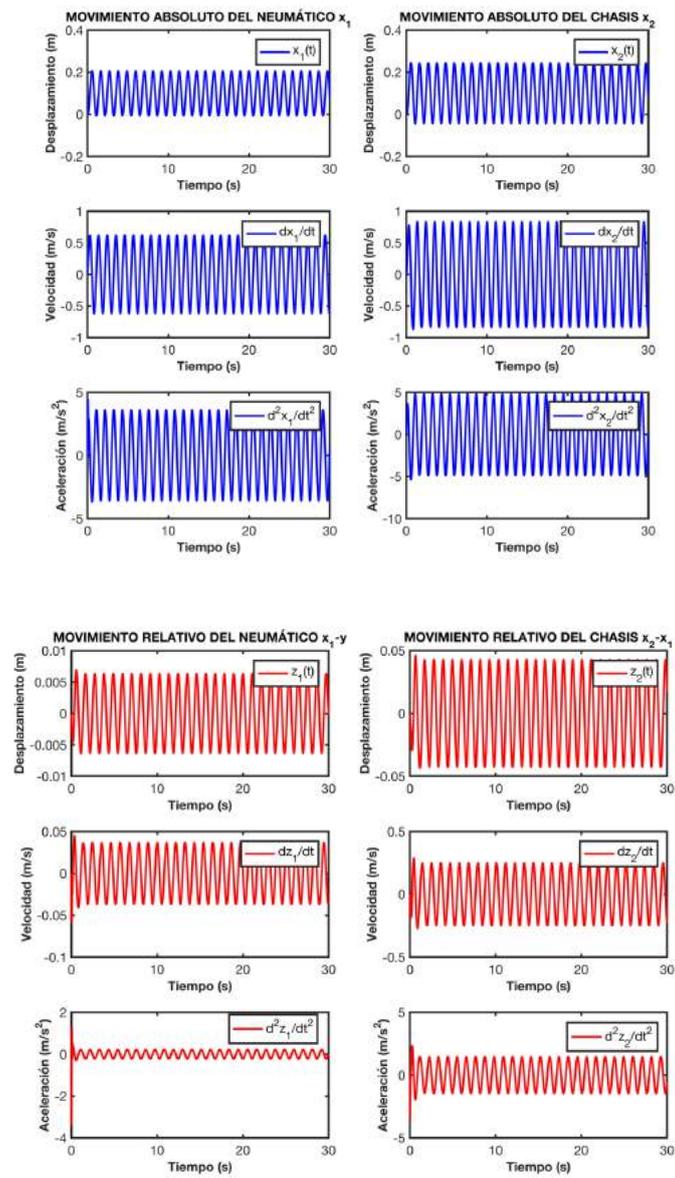


Fig. 5.25

Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_2 = 1000 \text{ Ns/m}$ :

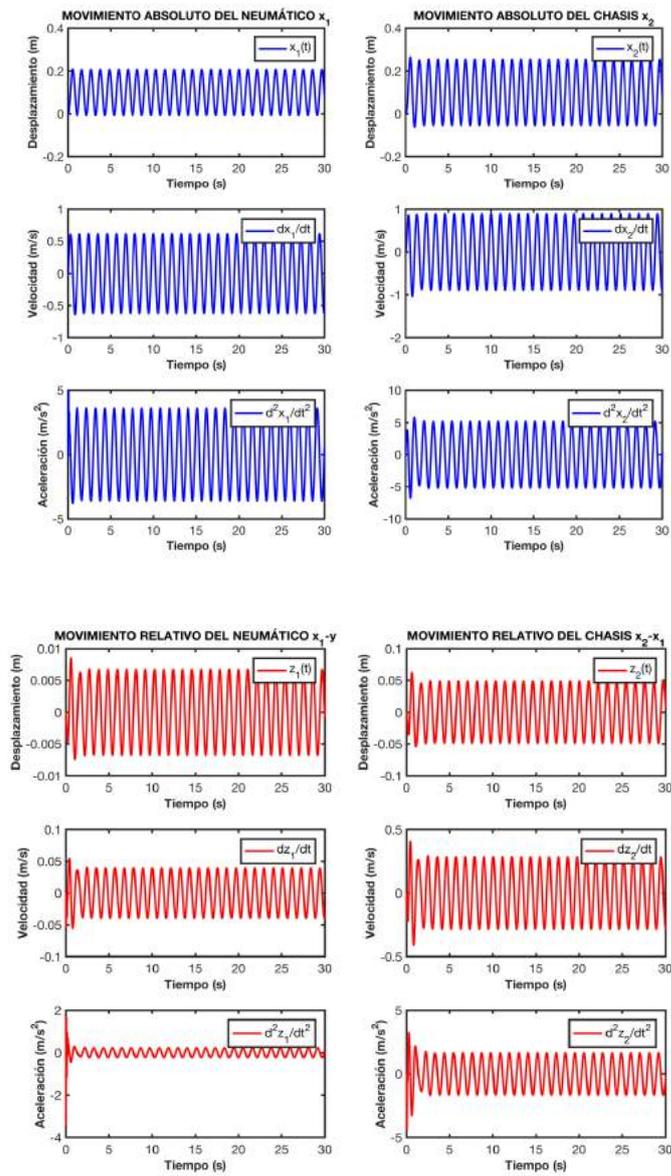


Fig. 5.26

*Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_2= 500$  Ns/m:*

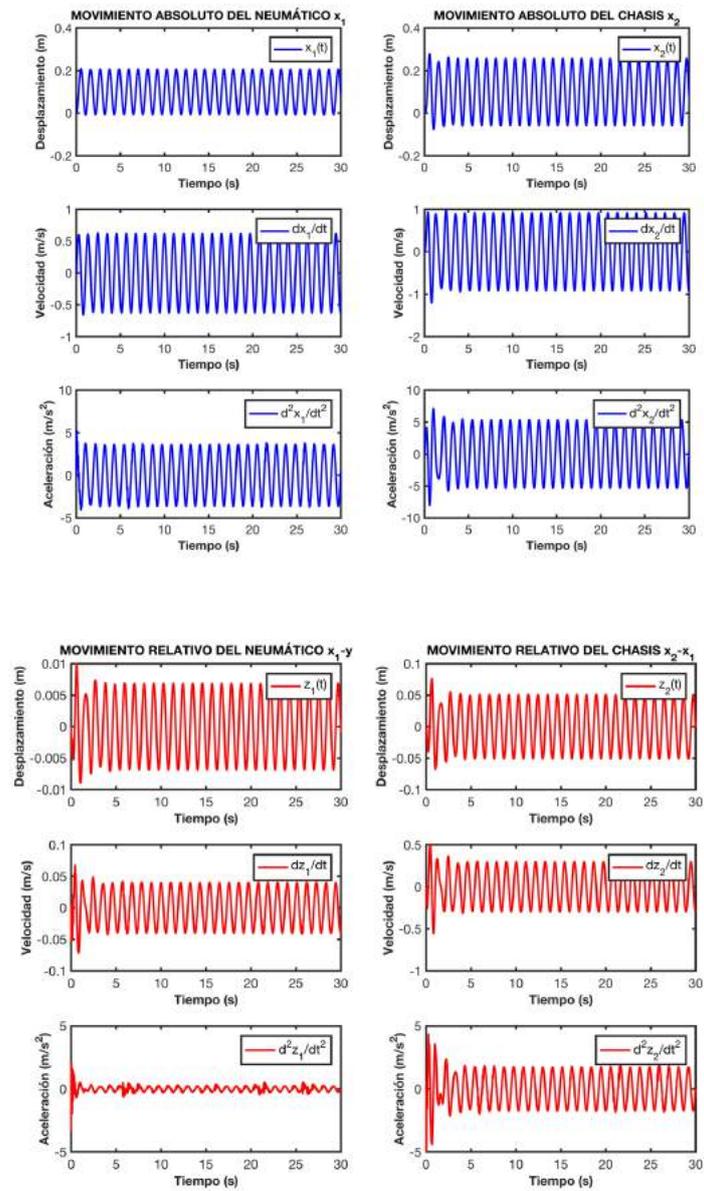


Fig. 5.27

### 5.3.2. Dominio de la frecuencia

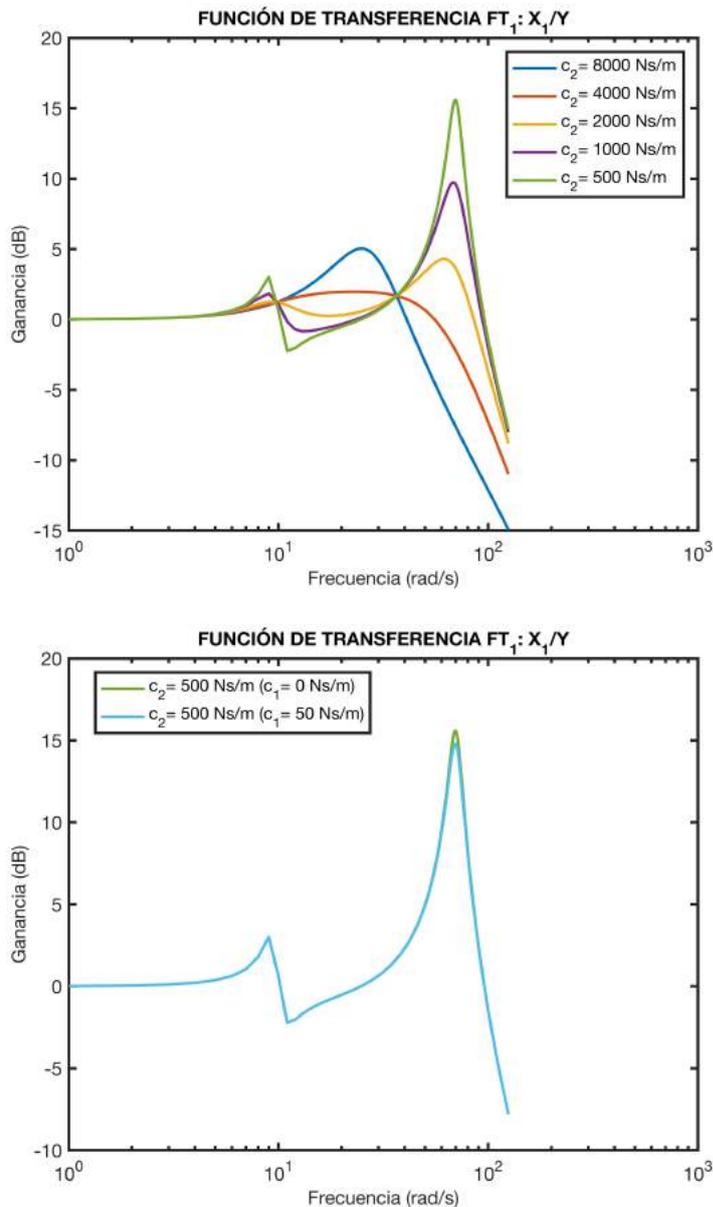


Fig. 5.28

Viendo en el dominio de la frecuencia (fig. 5.28), se observan los dos modos de vibración correspondientes al chasis y al neumático, la frecuencia a la que el chasis aumenta significativamente su amplitud es alrededor de su frecuencia natural y se produce antes que el neumático.

Las diferencias de amplitudes para distintos coeficientes de amortiguamiento  $c_2$  son más evidentes para frecuencias próximas a la vibración del neumático que del chasis, pero en esencia es lo mismo, mayores amplitudes cuanto menor es dicho coeficiente. Esto es lógico porque la función de transferencia es la relacionada con la amplitud del desplazamiento del neumático.

En el gráfico de la figura de la derecha se ve la influencia del coeficiente de amortiguamiento del neumático  $c_1$  en la función de transferencia  $FT_1$ , que es inapreciable a frecuencias próximas a la natural del chasis, y muy pequeña a frecuencias cercanas a la frecuencia natural del neumático. A veces, se modela el neumático como un sistema masa-muelle-amortiguador con valores bajos de  $c$ , pero como vemos en este parámetro y en los siguientes, podemos despreciar este coeficiente.

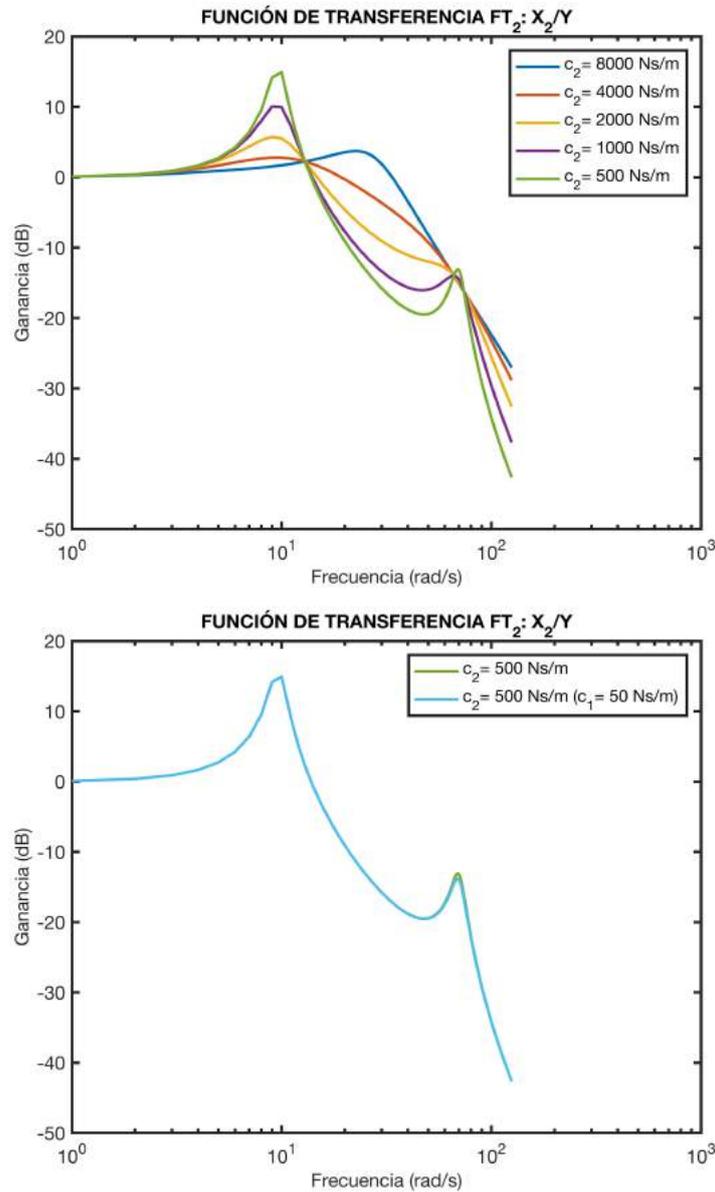


Fig. 5.29

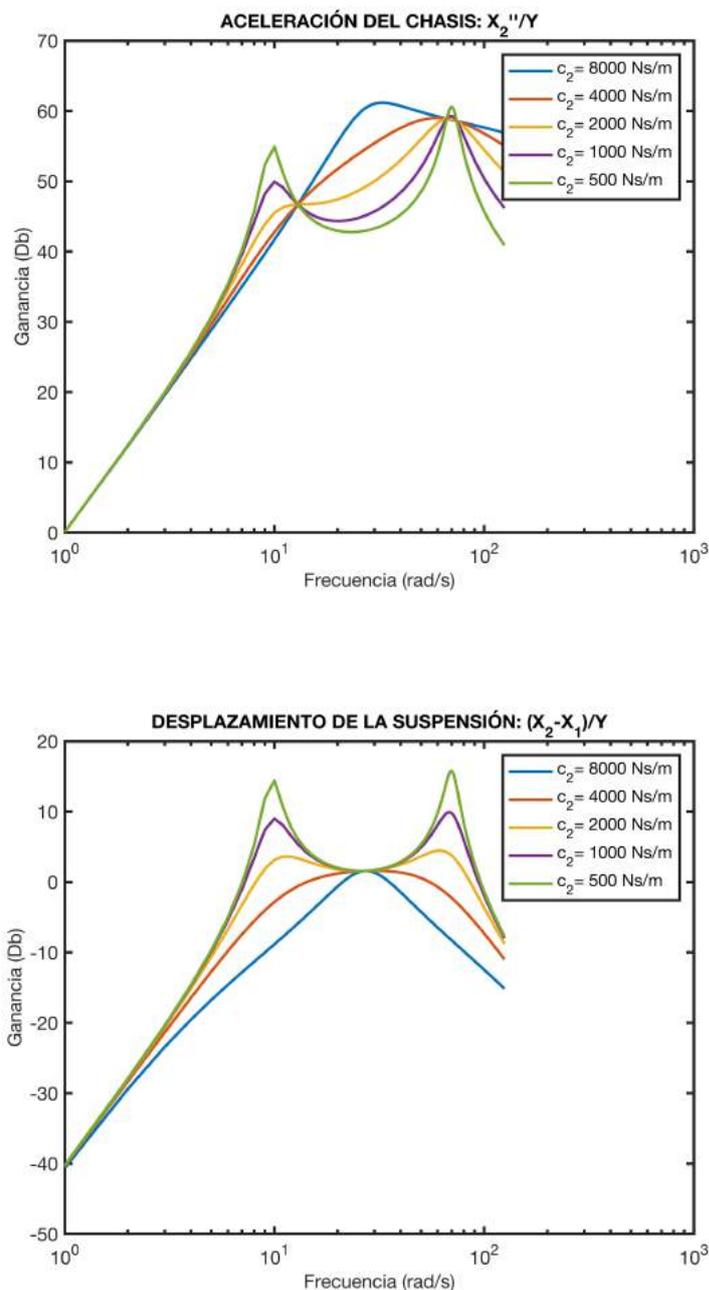
De nuevo, observamos cómo influye el coeficiente  $c_2$  en este caso en la función de transferencia relacionada con la amplitud del desplazamiento  $x_2$  del chasis. Como era de esperar, las mayores ganancias se producen para el chasis y para valores bajos de  $c_2$ .

De nuevo, la influencia de  $c_1$  es casi nula en la función de transferencia.

A continuación se detalla la influencia del coeficiente  $c_2$  sobre la aceleración del chasis, el desplazamiento de la suspensión y la deformación del neumático.

Se observa de nuevo que valores bajos de  $c_2$  implican mayores amplitudes, en este caso de la aceleración del chasis, pero depende del régimen al que estemos trabajando porque si el vehículo funciona a frecuencias comprendidas entre las dos frecuencias naturales, sería la mejor elección, pues obtendríamos el valor más bajo de aceleración, y por tanto el más alto de confort.

Por esto, es importante saber cuál va a ser el rango de frecuencias de funcionamiento para nuestro vehículo, y en caso de ignorarlo, escoger el valor medio, que en este caso presenta un comportamiento aceptable para una amplia horquilla.



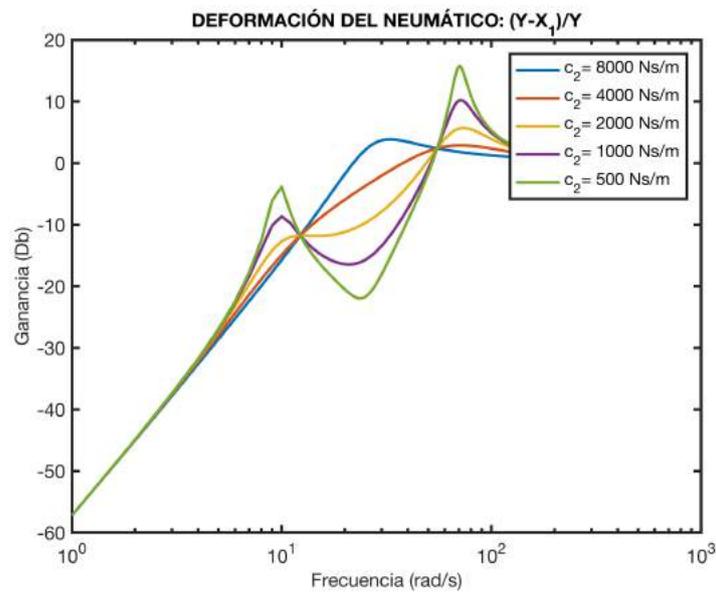
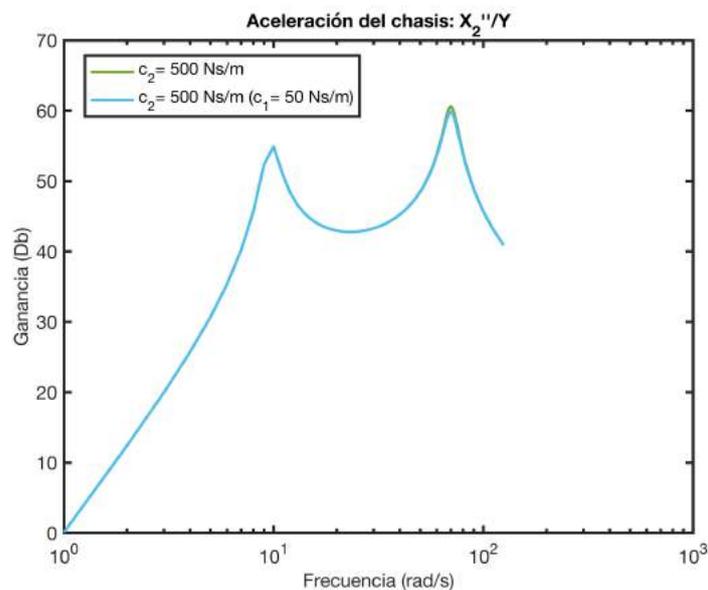


Fig. 5.30

La mayor deformación del neumático se produce para valores bajos de  $c_2$  cuando la frecuencia de trabajo está próxima a la frecuencia natural del chasis o del neumático (mucho mayor en esta última), pero de nuevo se cumple que, para frecuencias entre ambas, es el amortiguamiento con  $c_2$  más alto el que presenta mayores amplitudes.

En la siguiente figura mostramos la influencia de  $c_1$  en los últimos tres parámetros. Su influencia se confirma que es despreciable. Tan solo en la deformación del neumático se atisba un comportamiento algo distinto, pero poco importante.



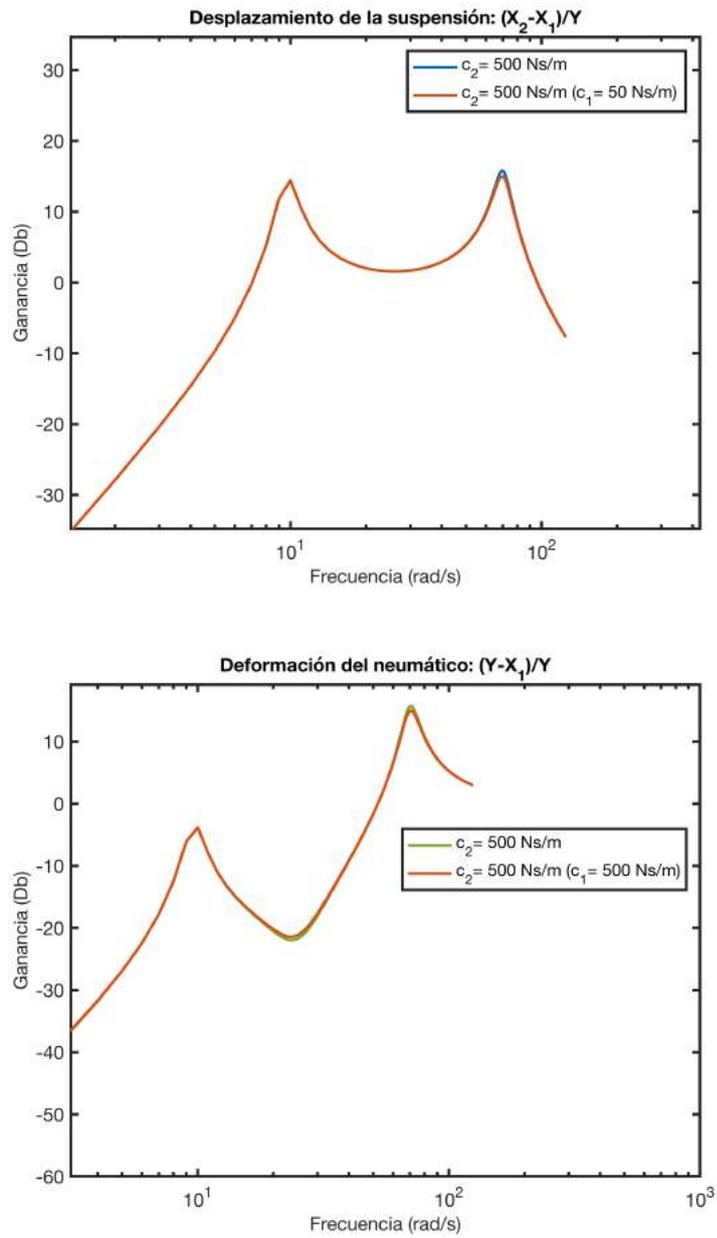


Fig. 5.31

## 5.4. Modelo de dos grados de libertad no lineal

Ahora el amortiguador no opone la misma fuerza de resistencia en todo su recorrido.

### 5.4.1. Configuración de tipo I

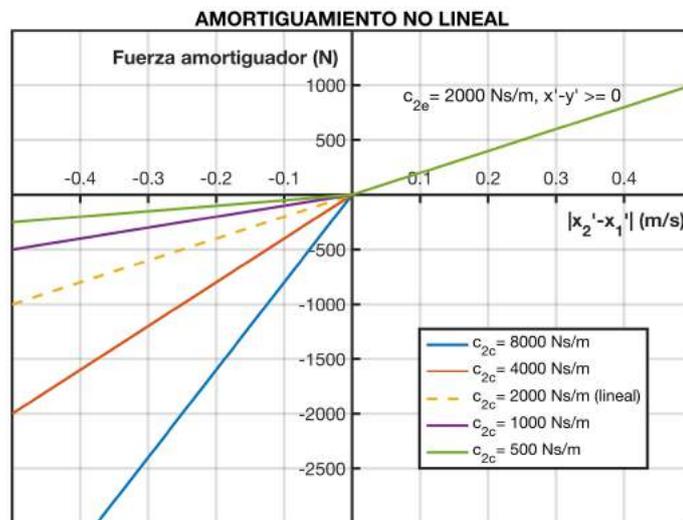


Fig. 5.32

Hemos llamado configuración tipo I al amortiguador mostrado en la gráfica de la fig. 5.32. En ella se detalla el distinto comportamiento del amortiguador a tracción que a compresión.

Tomaremos datos del coeficiente de amortiguamiento para valores de la velocidad relativa  $x'_2 - x'_1 < 0$  (compresión) que variarán de 8000 a 500 Ns/m y mantendremos fijo su valor para velocidades  $x'_2 - x'_1 > 0$  (tracción) en 2000 Ns/m. De tal forma, que existirá el caso particular que, tanto a tracción como a compresión tendrán el mismo valor, que será el caso particular de amortiguador lineal.

5.4.1.1. Dominio del tiempo

*Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_{2c} = 8000 \text{ Ns/m}$ :*

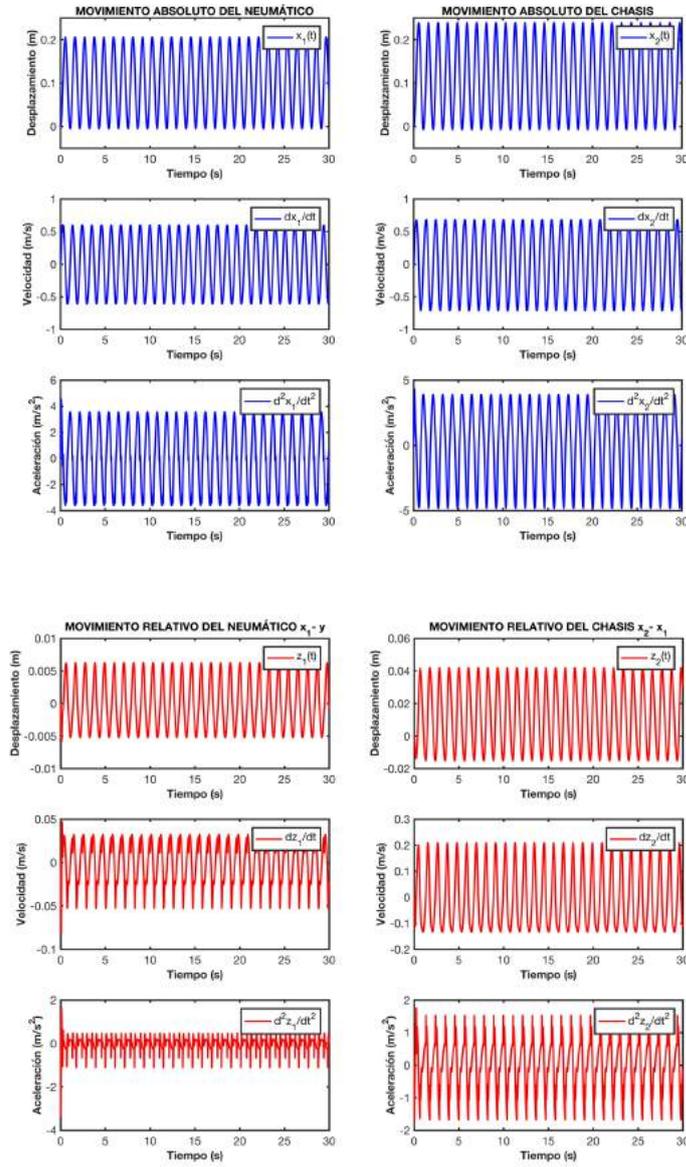


Fig. 5.33

*Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_{2c} = 4000 \text{ Ns/m}$ :*

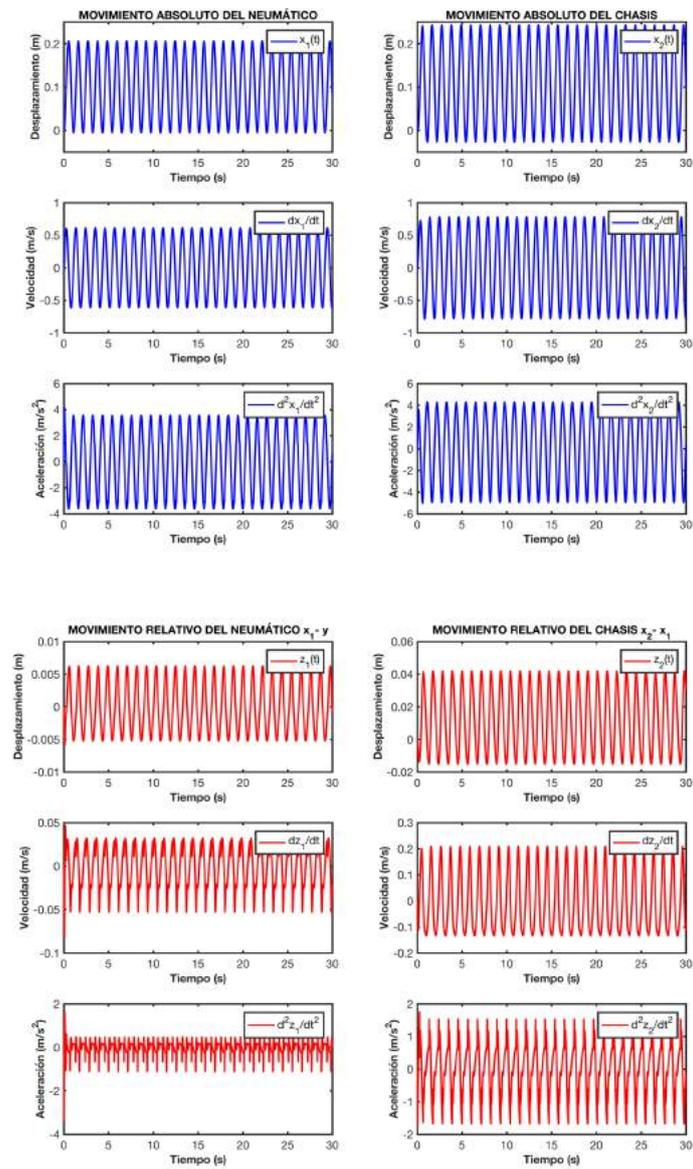


Fig. 5.34

*Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_{2c} = 2000 \text{ Ns/m}$ : (caso lineal)*

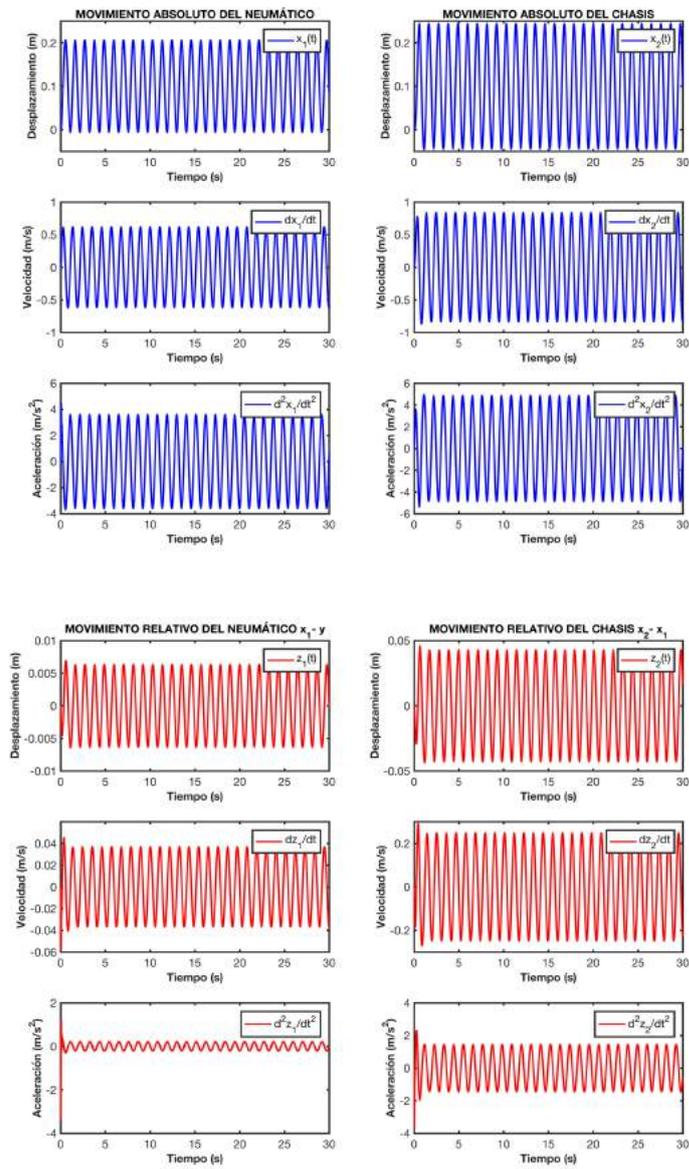


Fig. 5.35

*Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_{2c} = 1000 \text{ Ns/m}$ :*

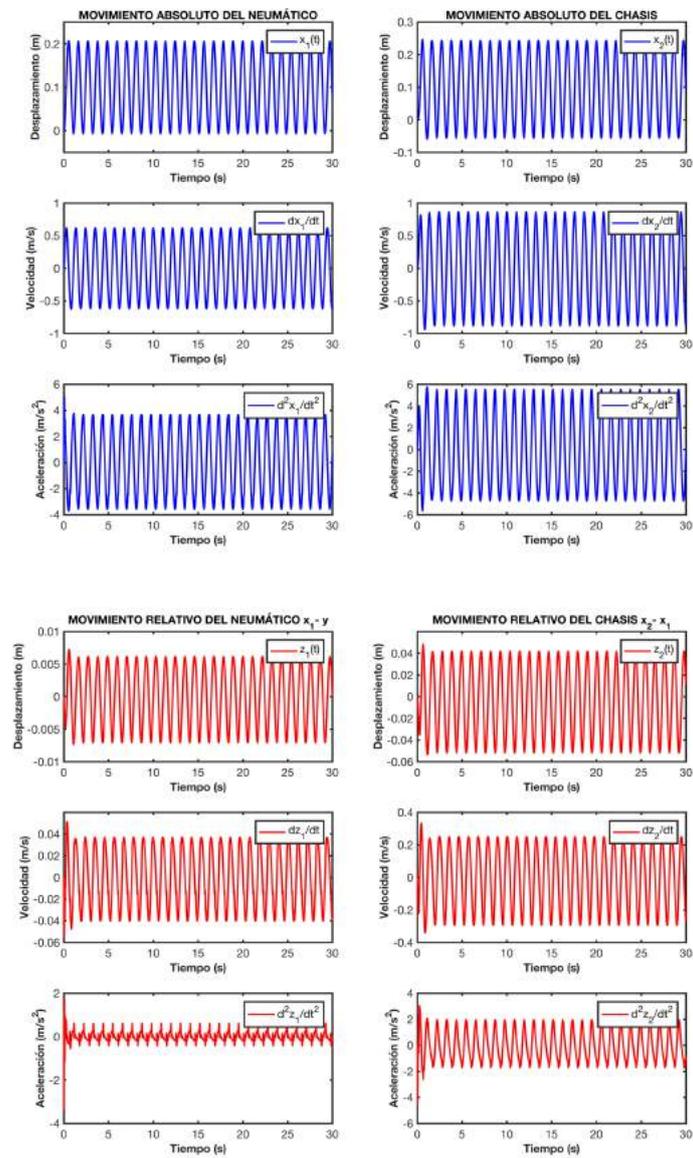


Fig. 5.36

*Resultados obtenidos para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $c_{2c} = 500 \text{ Ns/m}$ :*

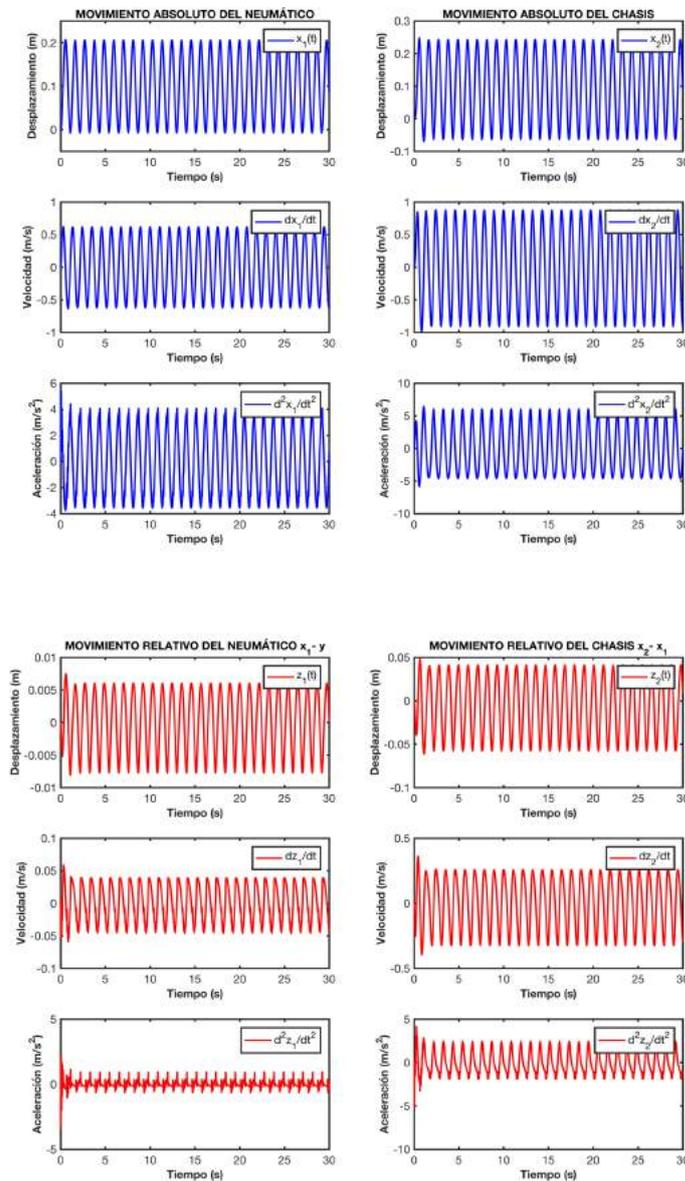


Fig. 5.37

Al igual que como pasaba para el caso lineal, vemos como el transitorio se hace más largo, aunque en términos relativos es despreciable, cuanto menor es el coeficiente de amortiguamiento. También se observa que cuando la suspensión es más blanda, las aceleraciones relativas del chasis son menores en régimen permanente, lo que a priori redundaría en la comodidad de los ocupantes del vehículo.

Veamos con más detalles el resto de los parámetros:

- Velocidad absoluta del chasis  $dx_2/dt$ :

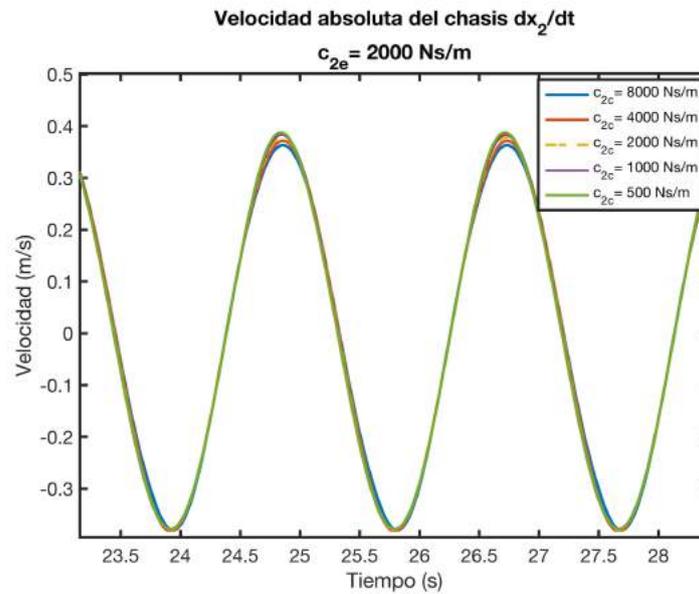


Fig. 5.38

Los valores son similares para todo el rango de valores de  $c_{2c}$ , algo mayores cuanto mayor es dicho coeficiente. Por tanto, el valor del coeficiente de amortiguamiento tiene poca influencia en la velocidad absoluta del chasis.

- Aceleración absoluta del chasis  $d^2x_2/dt^2$ :

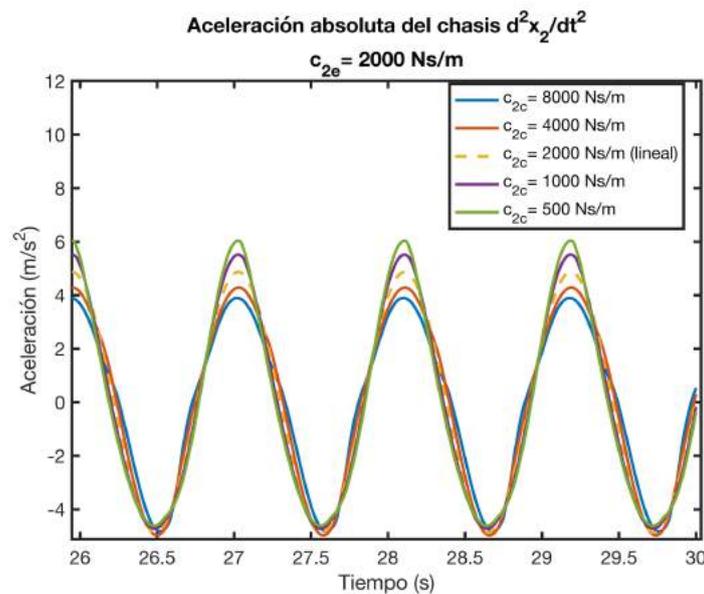


Fig. 5.39

Aquí se observan ya diferencias apreciables, y se ve claramente que cuanto menor es  $c_{2c}$ , mayor es la amplitud de la aceleración absoluta del chasis. Estas aceleraciones son mayores en extensión debido a que  $c_{2c} > c_{2e}$ .

- Velocidad relativa del chasis  $dz_2/dt$ :

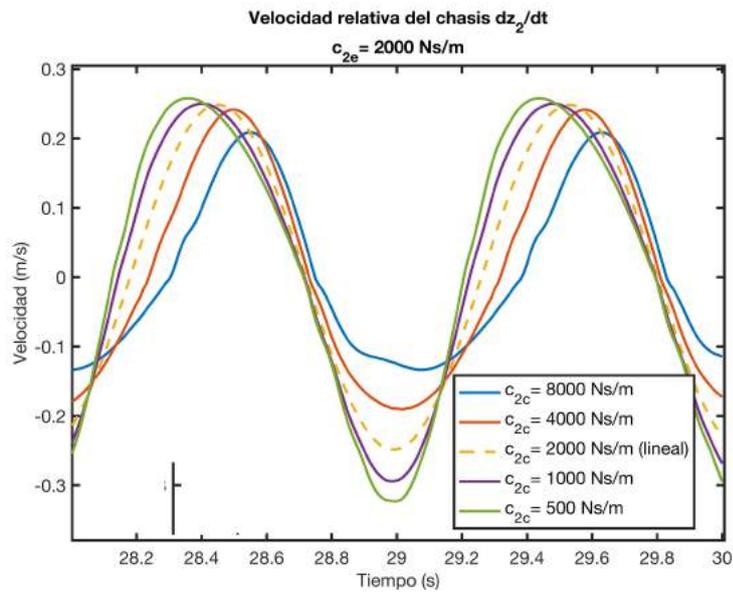


Fig. 5.40

De igual manera, las velocidades relativas en extensión tienen unas amplitudes casi similares ( $c_{2e} = 2000 \text{ Ns/m}$ ) mientras que a compresión el amortiguador alcanza velocidades más elevadas cuanto menor es  $c_{2c}$ .

- Aceleración relativa del chasis  $d^2z_2/dt^2$ :

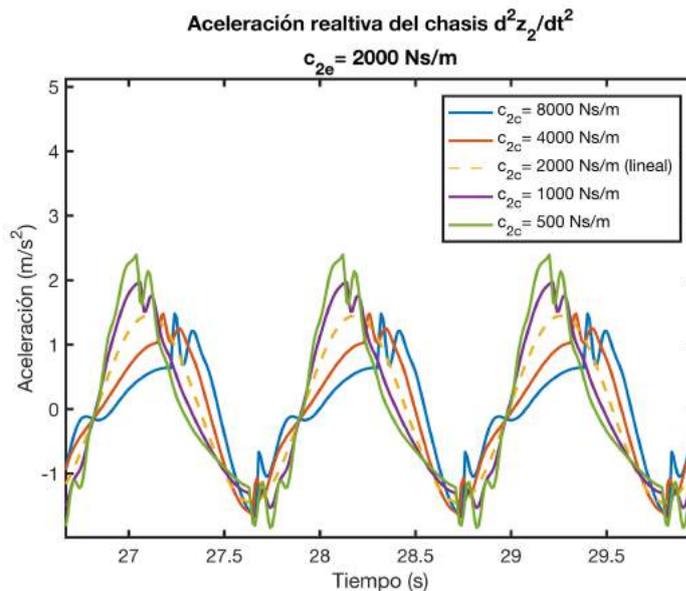


Fig. 5.41

Aquí los valores se muestran algo más caóticos. En torno al caso lineal ( $c_{2c} = 2000 \text{ Ns/m}$ ) se agrupan los demás, con pequeñas oscilaciones de pequeña cuantía debido a los efectos no lineales, y que muestran como en compresión los valores se muestran en términos relativos similares, mientras que encontramos aceleraciones en extensión algo mayores cuanto menor es el coeficiente  $c_{2c}$ .

### 5.4.1.2. Dominio de la frecuencia

La función de transferencia del sistema es la misma que para el caso lineal, la única diferencia es que no podemos aplicar transformada de Lapace para realizar los cálculos. Recurrimos a Matlab® para calcular los datos de las amplitudes de las señales de entrada y salida en régimen permanente y aplicarlos a dicha función.

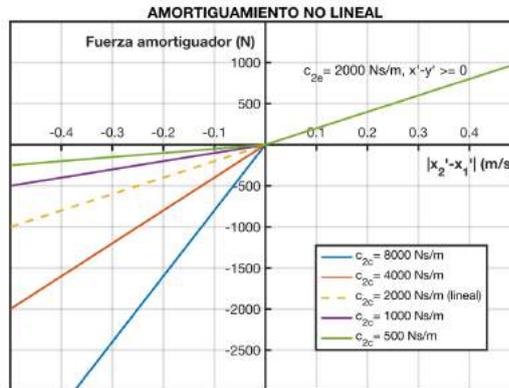


Fig. 5.42

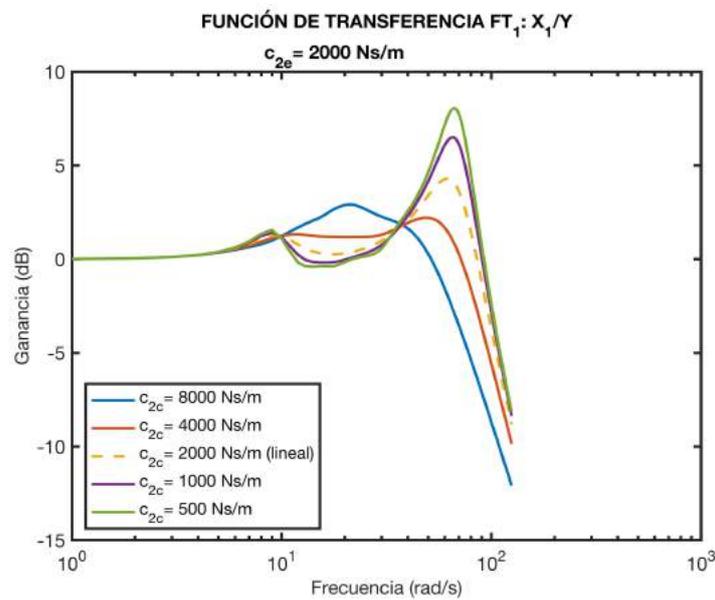


Fig. 5.43

Se puede ver que para valores de  $c_2$  medios- bajos, el comportamiento es similar hasta un valor aproximado de 80 rad/s, de ahí en adelante se acrecentan las diferencias entre los distintos valores de  $c_2$ . Para valores de  $c_2$  medio- altos, las diferencias se hacen patentes.

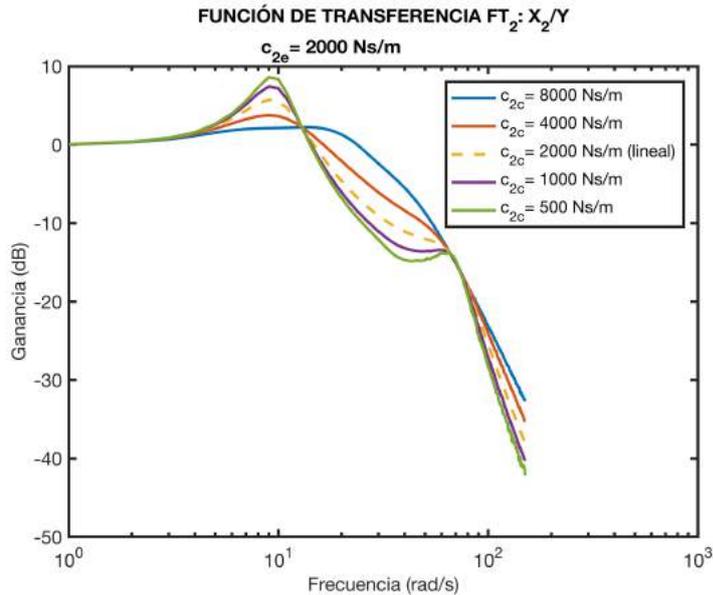


Fig. 5.44

Se vuelve a ver en la gráfica anterior las diferencias entre amortiguadores blandos y duros, siendo los primeros los que más variabilidad tienen en el espectro de frecuencias considerado.

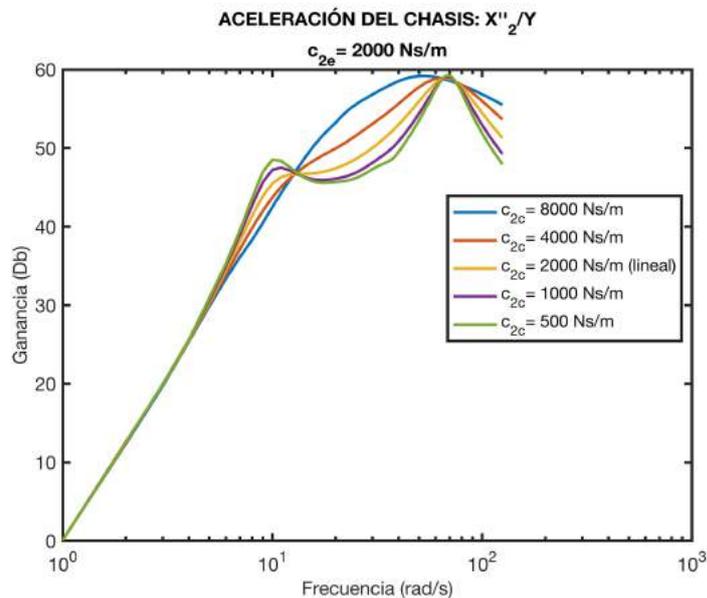


Fig. 5.45

El caso de la aceleración del chasis es contrario al anterior, las ganancias son mayores cuanto menor es  $c_2$  para frecuencias en torno a su frecuencia natural y a la del neumático, pero no muy pronunciadas, por lo menos en este último caso.

Al contrario, entre ambas frecuencias señaladas, las ganancias son superiores cuanto mayor es  $c_2$ .

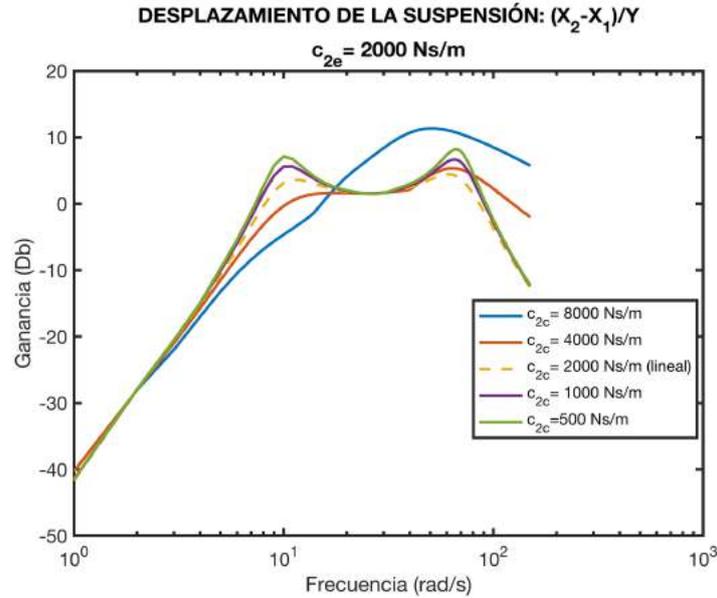


Fig. 5.46

En cuanto al desplazamiento de la suspensión, curva creciente en un primer tramo sin diferencias significativas entre valores de  $c_{2c}$ , y a partir de 4 rad/s divergencia en cuanto a comportamiento de los distintos valores. Siempre mayores ganancias de  $c_{2c}$  más bajo excepto para frecuencias superiores a 11 rad/s, que es la configuración más dura la que provoca mayores desplazamientos del sistema de suspensión.

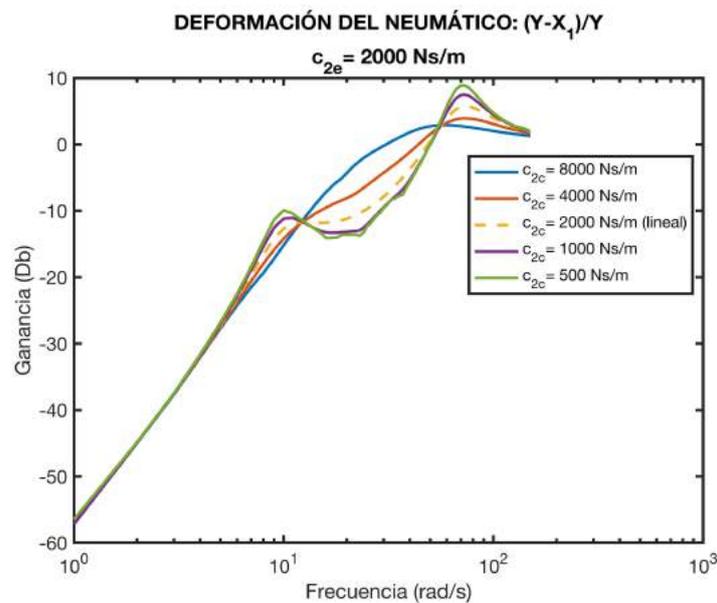


Fig. 5.47

Como se puede ver, pocas diferencias a frecuencias bajas, mayores en frecuencias intermedias y diferencias moderadas en frecuencias en torno a la frecuencia natural del neumático.

### 5.4.2. Configuración de tipo II

En esta ocasión, el comportamiento del amortiguador es el mismo a tracción que a compresión en una zona central correspondiente a valores medio- bajos de velocidades relativas del sistema chasis- neumático (es la zona

más frecuente de funcionamiento), y para valores altos de velocidades relativas tendremos otro comportamiento caracterizado por una pendiente fuerza/ velocidad relativa menor a la central.

En otras palabras, esta configuración propone un comportamiento de la suspensión más o menos “dura” para valores normales de circulación en los que la exigencia no es alta, y otra más blanda capaz de absorber mayores irregularidades cuando el terreno se pone más difícil. La mejor forma de ilustrar la idea que queremos transmitir es viendo el siguiente gráfico.

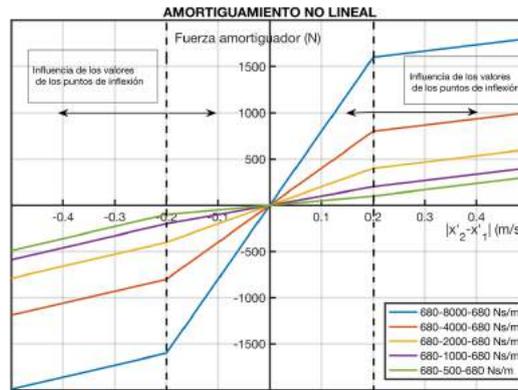


Fig. 5.48

#### 5.4.2.1. Dominio del tiempo

- Velocidad absoluta del chasis  $dx_2/dt$ :

Como se ve en la figura de abajo, menores valores de amortiguamiento provocan mayores amplitudes de la velocidad absoluta del chasis.

Se observa que para  $c_2=8000$  y  $4000$  Ns/m, el amortiguador tiene una dureza tal que no permite rebasar el límite de velocidad relativa y por tanto solo trabajarán en la zona lineal.

No ocurrirá lo mismo para los tres valores más bajos; se sobrepasará el valor límite de velocidad relativa de  $0.2$  m/s y se comportarán de manera no lineal, alternando  $c_2$  el valor de la zona central con la zona de los extremos.

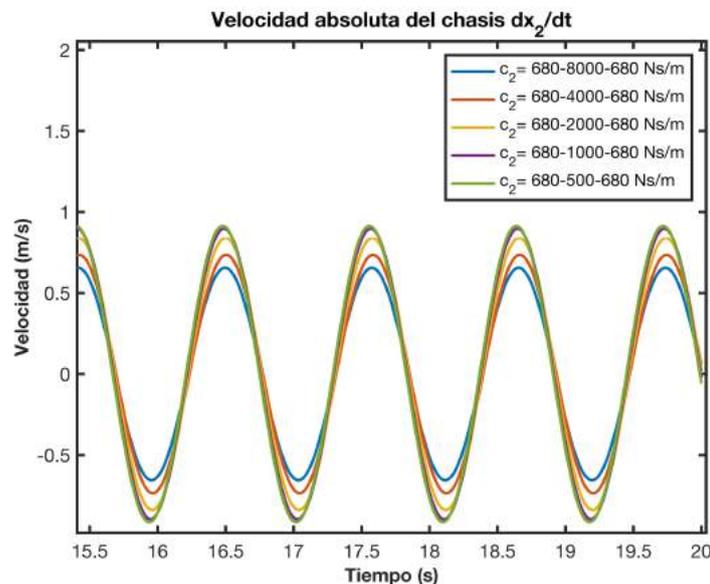


Fig. 5.49

- Aceleración absoluta del chasis  $d^2x_2/dt^2$ :

Aquí se ve como las aceleraciones son del mismo orden que en el caso asimétrico (configuración de tipo I), aunque algo mayores en el movimiento de compresión y algo menores en el de extensión. Obtenemos aceleraciones mayores cuanto más blando es el amortiguador  $y$ , al contrario, menores aceleraciones cuanto más duro es el valor de  $c_2$ . No olvidemos que las aceleraciones redundarán en el confort de los ocupantes.

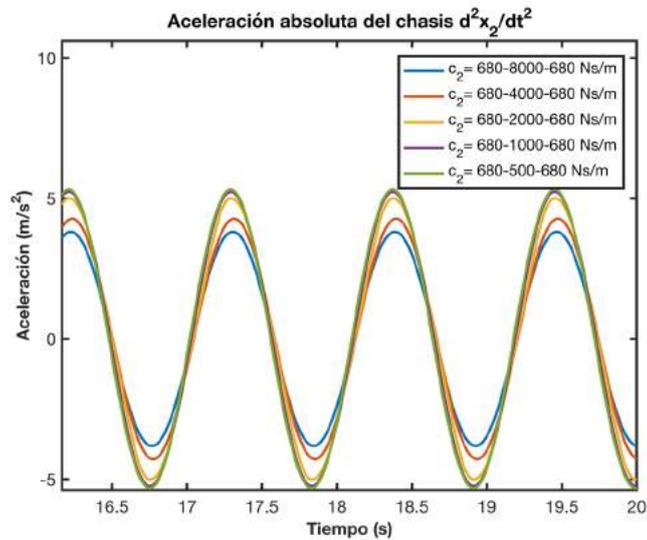


Fig. 5.50

- Velocidad relativa del chasis  $dz_2/dt$ :

Con respecto a la configuración de tipo I o asimétrica, obviamente las velocidades no cambian sustancialmente, mayores cuanto menor es el coeficiente  $c_2$ , pero se observan que aquellos valores del coeficiente de amortiguamiento que solo trabajan en la zona lineal; recordemos  $c_2=8000$  y  $4000$   $Ns/m$ , disminuyen significativamente su velocidad relativa en extensión, manteniéndose en compresión, esto es lógico puesto que en la configuración de tipo I, a compresión para estos dos valores comentados, el amortiguamiento tiene el mismo comportamiento que en la configuración de tipo II.

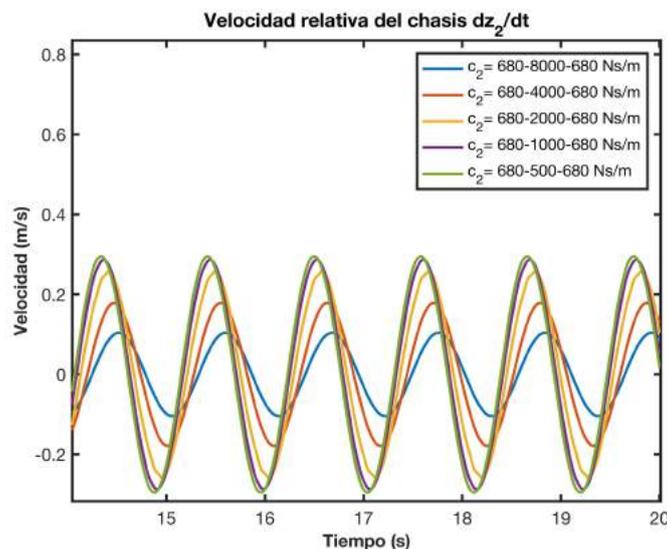


Fig. 5.51

- Aceleración relativa del chasis  $d^2z_2/dt^2$ :

Aquí se puede comprobar las inestabilidades que provoca las no linealidades para los tres casos de amortiguador más blandos ( $c_2= 2000-1000-500$  Ns/m) frente a la estabilidad de los otros dos más duros y que se comportan de manera lineal ( $c_2= 8000- 4000$  Ns/m).

Las tendencias son, como siempre, mayores valores cuanto menor es  $c_2$ , pero con la particularidad de que en esta configuración de tipo II se obtienen menores aceleraciones en valor absoluto que para el amortiguador de tipo I.

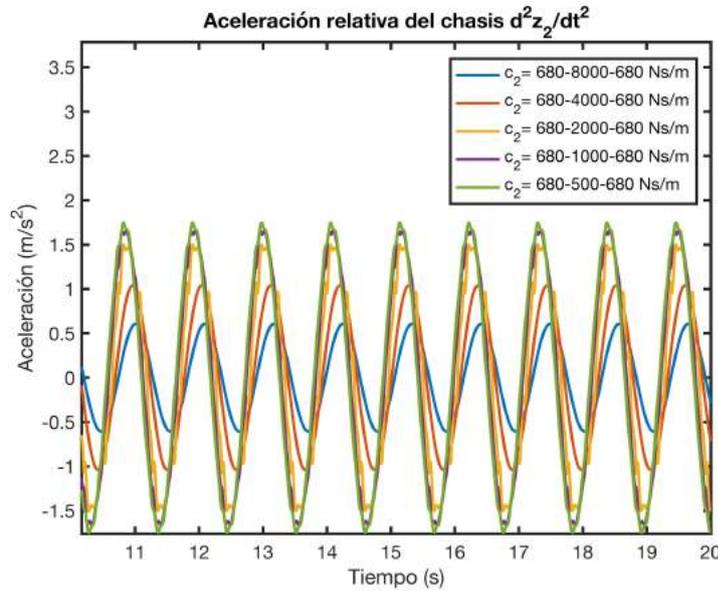


Fig. 5.52

### 5.4.2.2. Dominio de la frecuencia

En este caso vamos a ver, no solo cómo son las funciones de transferencia, sino qué influencia tiene sobre ellas la amplitud de la zona central de funcionamiento. Recordemos de nuevo el gráfico de la configuración del amortiguador, con una zona central lineal simétrica, pero que rompe dicha linealidad en cuanto sobrepasa un determinado valor de la velocidad relativa.

Veremos también la influencia para distintos valores de la amplitud de la zona central de velocidades relativas.

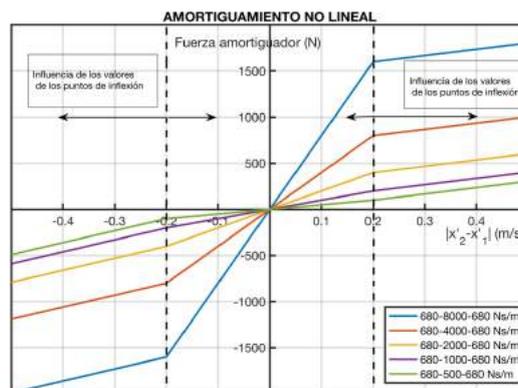


Fig. 5.53

Se observa un ligero aumento de la ganancia del neumático cuanto menor es el coeficiente  $c_2$ ; mayores para valores cercanos a la frecuencia natural del chasis y mucho más pequeñas para valores próximos a la frecuencia natural del neumático. Lo misma conclusión extraemos para distintos valores de las velocidades relativas, aunque siendo rigurosos, la influencia es aún menor.

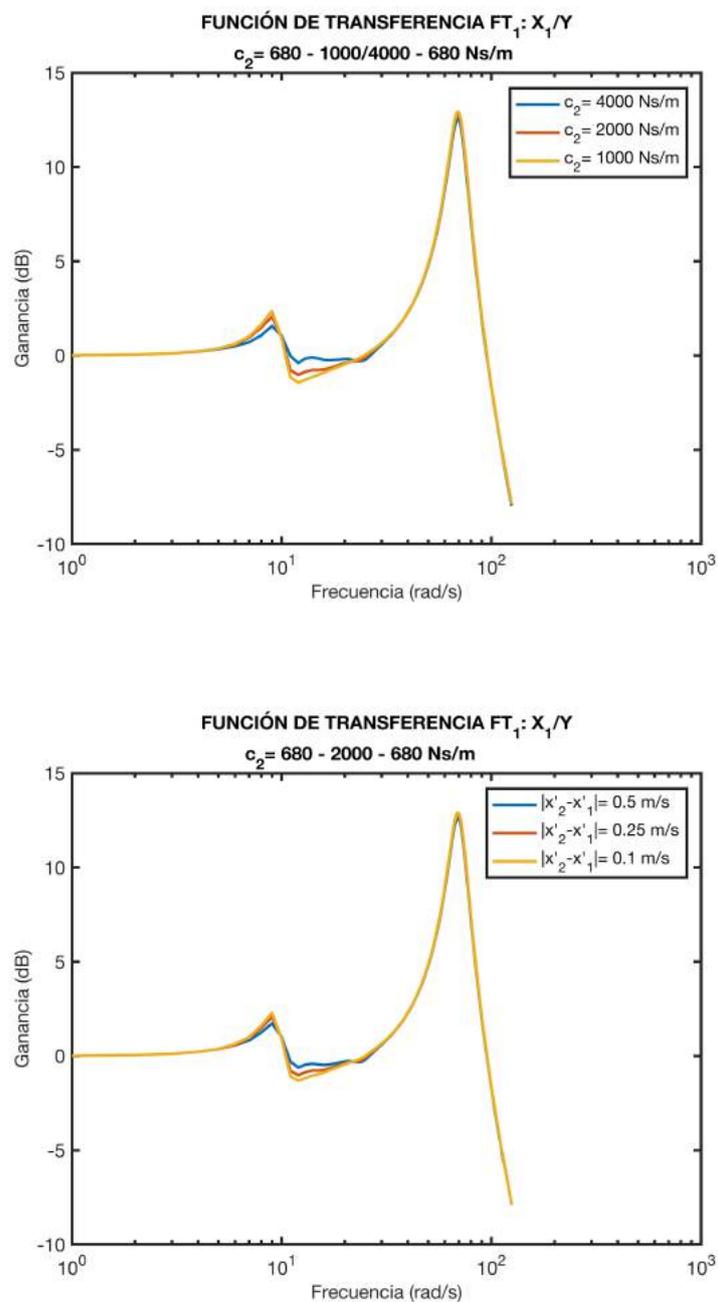


Fig. 5.54

Para el caso de la función de transferencia relacionada con la amplitud de desplazamiento del chásis, de nuevo se observa un ligero aumento de la ganancia de este cuanto menor es el coeficiente  $c_2$ , pero no ocurre así para valores próximos a la frecuencia natural del neumático, en el que a mayor valor de  $c_2$ , mayor amplitud, aunque sean diferencias muy pequeñas.

Algo análogo ocurre en la influencia de la amplitud de las velocidades relativas.

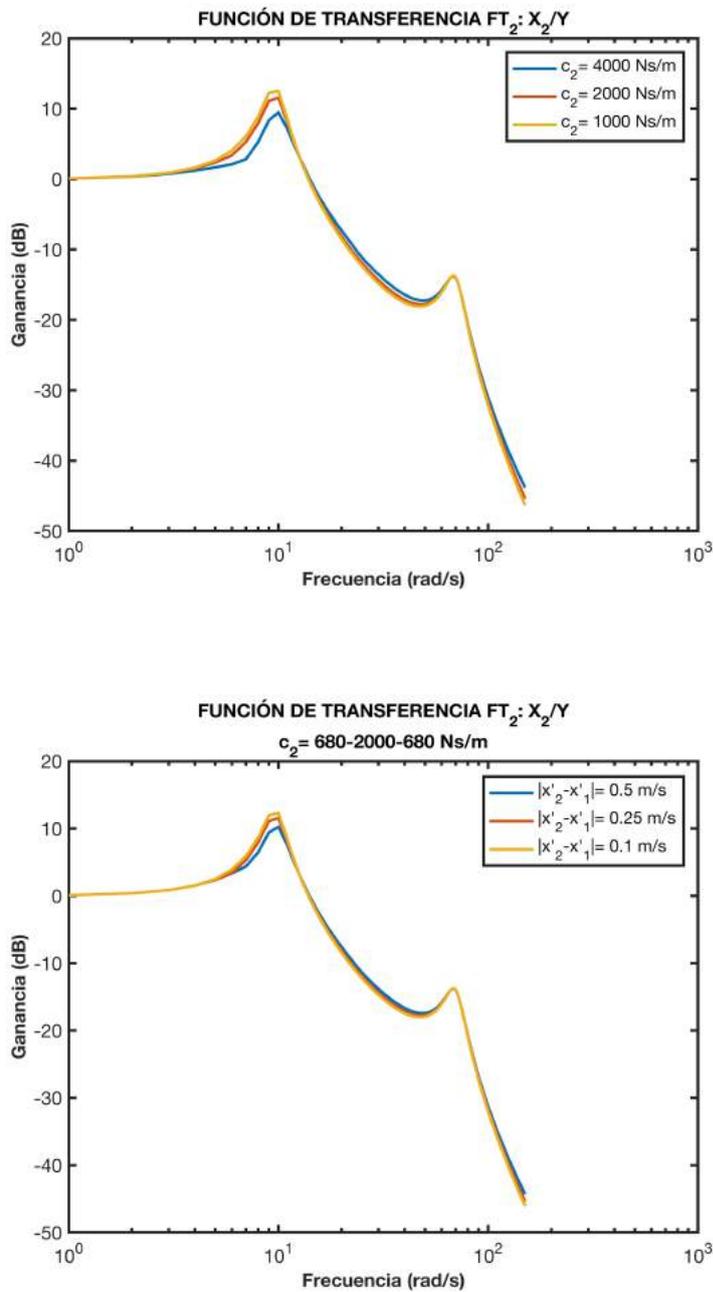


Fig. 5.55

Para la aceleración del chasis, igualmente se ve que la influencia sobre el chasis es mayor que para el neumático la elección que hagamos del coeficiente  $c_2$ , al igual que para distintos valores de puntos de inflexión de velocidades relativas.

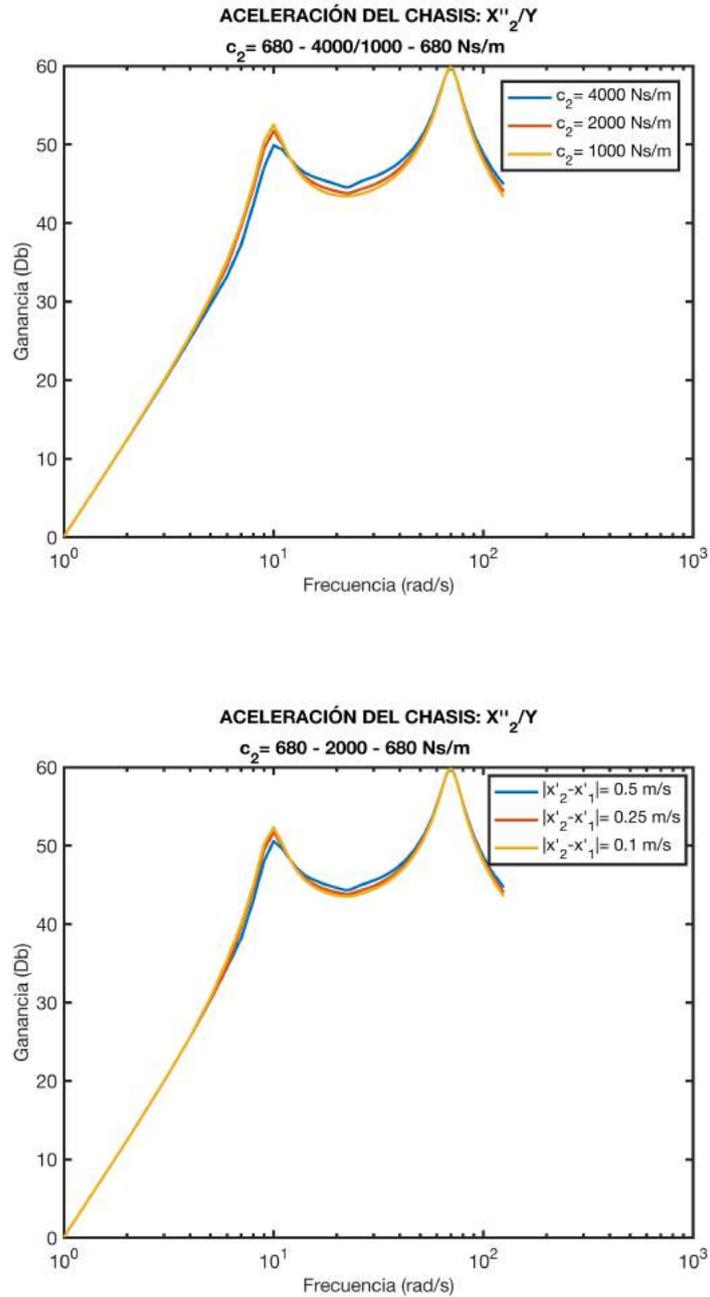


Fig. 5.56

Y para el resto de los parámetros las pautas de comportamiento son similares, como se muestran en las siguientes gráficos:

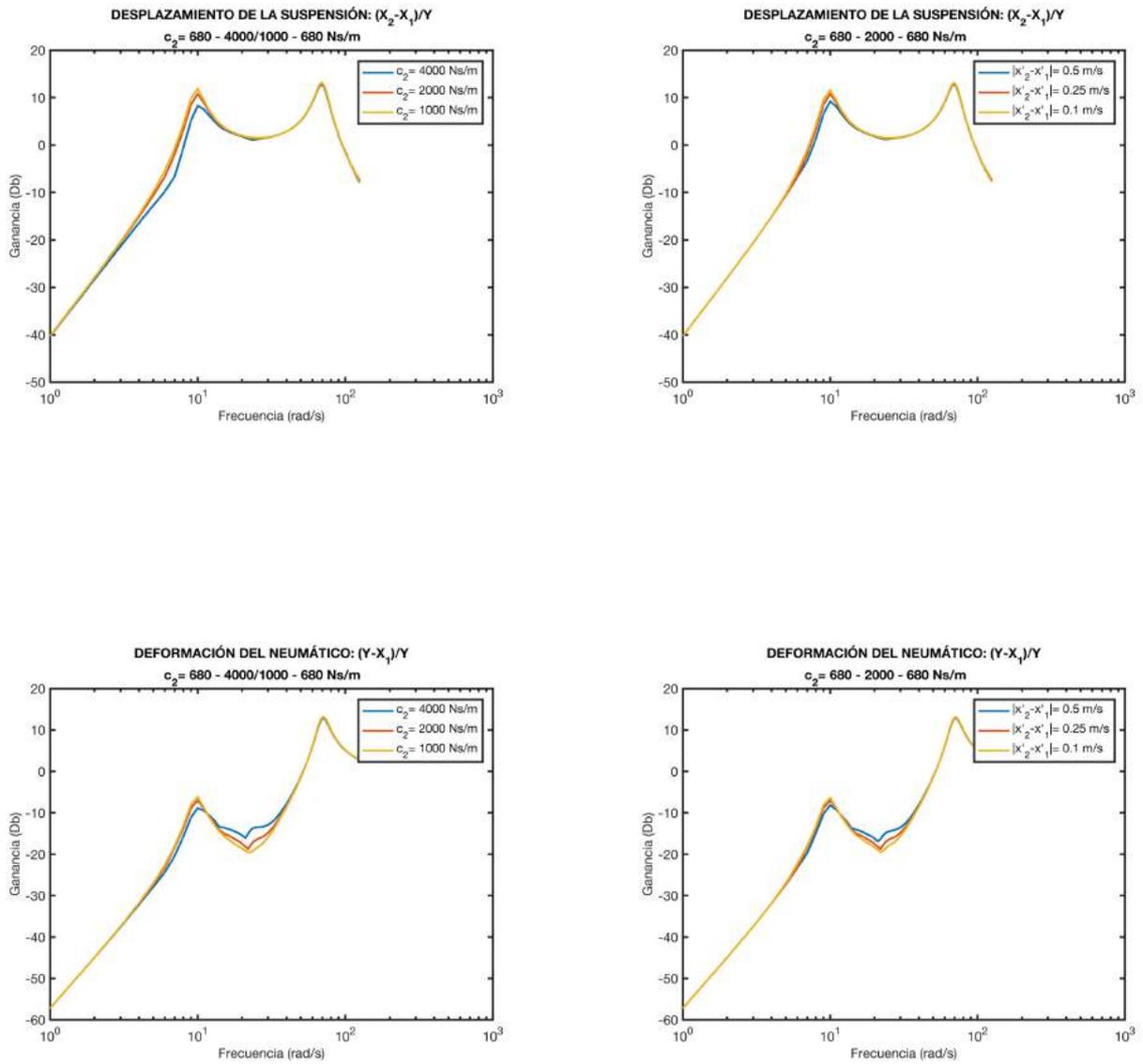


Fig. 5.57

# 6. CONCLUSIONES

---

Como comentamos al principio de este trabajo, es frecuente considerar el comportamiento de un sistema amortiguado siempre igual indistintamente de si está a tracción o a compresión, sean cuales sean las sollicitaciones que sobre él se producen. También señalamos que, si bien su consideración da relativo buenos resultados, convendría adoptar una actitud crítica y saber que, en esencia, el amortiguador es no lineal. Como este, existen otros muchos dispositivos mecánicos cuyo comportamiento no son lineales.

Centrándonos en el amortiguador y después de haber mostrado los resultados del modelo de cuarto de coche para los casos lineal y no lineal, concluimos cuáles son las implicaciones de adoptar una u otra hipótesis de partida.

Antes de nada y como conclusión de partida es que el modelo lineal es más sencillo y por tanto, su relación beneficio/ coste es mucho mayor que el modelo no lineal.

Y si somos más específicos, el resto de las conclusiones son las siguientes:

Hemos partido de la base de un vehículo que circula por un terreno sinusoidal y se ha considerado:

- Caso lineal. Coeficientes de amortiguamiento idéntico en todo el recorrido del sistema de suspensión.
- Caso no lineal. Coeficiente de amortiguamiento a compresión distinto del coeficiente de amortiguamiento a tracción (le hemos llamado configuración de tipo I).
- Caso no lineal. Coeficiente de amortiguamiento idéntico en una zona central considerada de normal funcionamiento y distinto para un valor determinado a compresión y a tracción (le hemos llamado configuración de tipo II).

## 6.1. Función de transferencia de $X_1$ (desplazamiento vertical del neumático)

Considerando el caso lineal resultan mayores amplitudes del movimiento vertical del neumático a las frecuencias próximas a las naturales tanto del chasis como del neumático. La gráfica del movimiento considerando efectos no lineales es por así decirlo, más plana, lo cual implica menores desplazamientos del neumático.

Y dentro de la no linealidad, la mayor influencia de los distintos coeficientes de amortiguamiento es para el caso de configuración de tipo I, que de tipo II.

Estimamos que se produce una sobreponderación si consideramos el problema lineal.

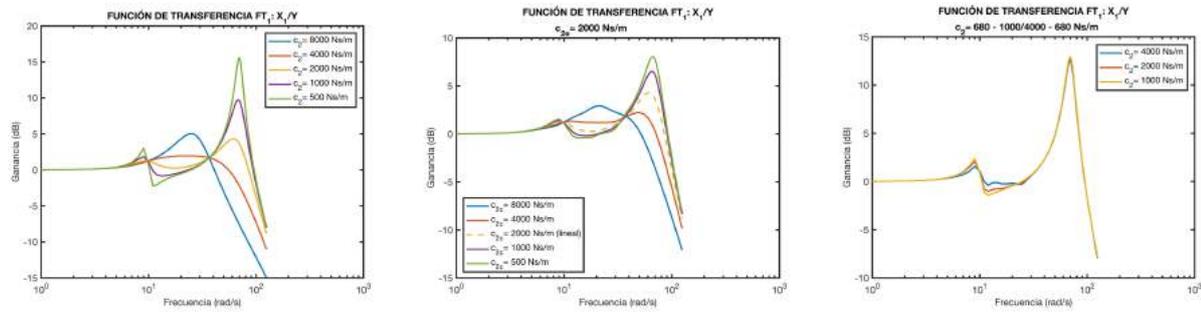


Fig. 6.1

### 6.2. Función de transferencia de $X_2$ (desplazamiento vertical del chasis)

De nuevo, la consideración de linealidad en el amortiguador nos dará mayores desplazamientos del chasis, del orden de casi el doble en caso de frecuencias próximas a su frecuencia natural.

Para frecuencias próximas a la frecuencia natural del neumático, la consideración de linealidad nos dará menores ganancias para los dos valores de  $c_2$  más bajos, similar para  $c_2 = 2000$  Ns/m, y mayores ganancias para los dos valores más altos de  $c_2$ .

En el caso de la configuración de tipo II, las ganancias son sensiblemente superiores que para el caso de configuración tipo I.

Sobreponderaríamos los desplazamientos en zonas próximas a las “frecuencias de resonancia” considerando linealidad y habría que estudiar cada caso en cualquier otro rango de frecuencias.

Sobreponderación relativa.

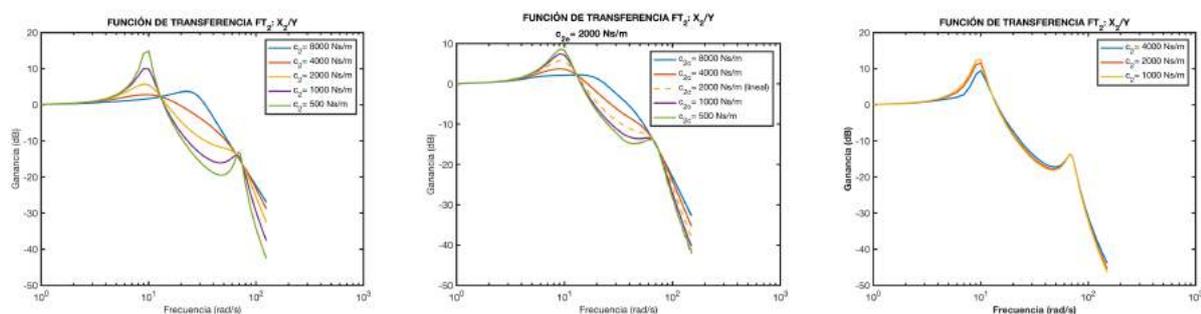


Fig. 6.2

### 6.3. Aceleración del chasis

De nuevo, menores aceleraciones en el chasis se producen al considerar el comportamiento no lineal al mismo tiempo que se suavizan dentro de la no linealidad, las diferencias entre un amortiguador más duro de otro más blando. Para valores entre las dos frecuencias naturales, habría que estudiar cada caso; los dos valores más bajos de  $c_2$  infravalorarían el caso no lineal y los dos valores más altos lo sobreponderarían.

Resultan ligeramente mayores las aceleraciones en la configuración de tipo II.

Se repite en este parámetro el caso de sobreponderación la consideración de problema lineal.

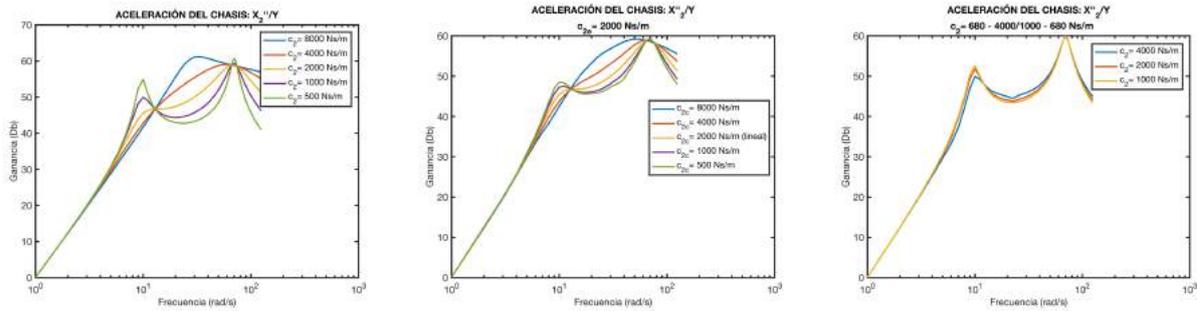


Fig. 6.3

### 6.4. Desplazamiento de la suspensión

El caso lineal nos da unos desplazamientos mucho mayores que el no lineal, destacando el caso de  $c_2 = 8000$  Ns/m, es decir la consideración de amortiguador más duro, en el que en caso lineal, una vez sobrepasada la frecuencia natural del chasis, infrapondera sus amplitudes.

La configuración de tipo I ofrece menores desplazamientos que la de tipo II.

Estamos en un caso de sobreponderación, con la excepción de valores de  $c_2$  muy altos.

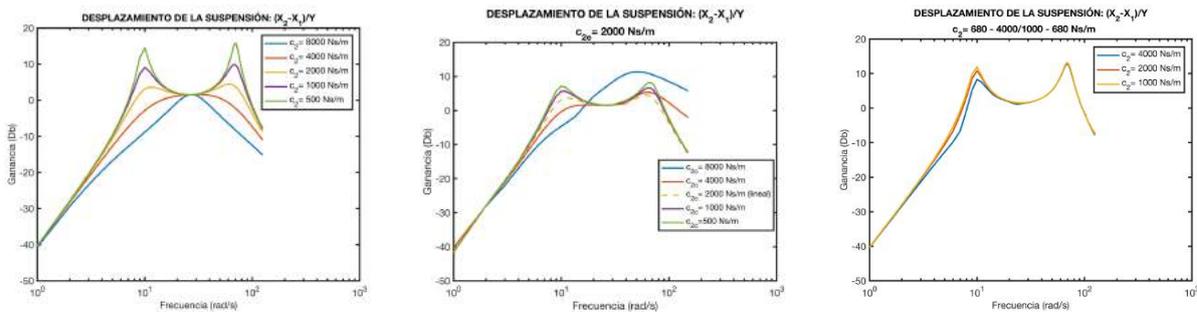


Fig. 6.4

### 6.5. Deformación del neumático

Cualitativamente, el análisis es el mismo que para el caso de la aceleración del chasis, mayores amplitudes para el caso lineal, y menores diferencias entre los distintos valores de  $c_2$  en caso no lineal. Una vez sobrepasada la frecuencia de excitación del chasis, dependerá; mayores amplitudes en el caso lineal y valores de  $c_2$  altos, y menores para valores bajos.

De nuevo, mayores deformaciones para la configuración de tipo II que para la de tipo I.

Sobreponderación relativa.

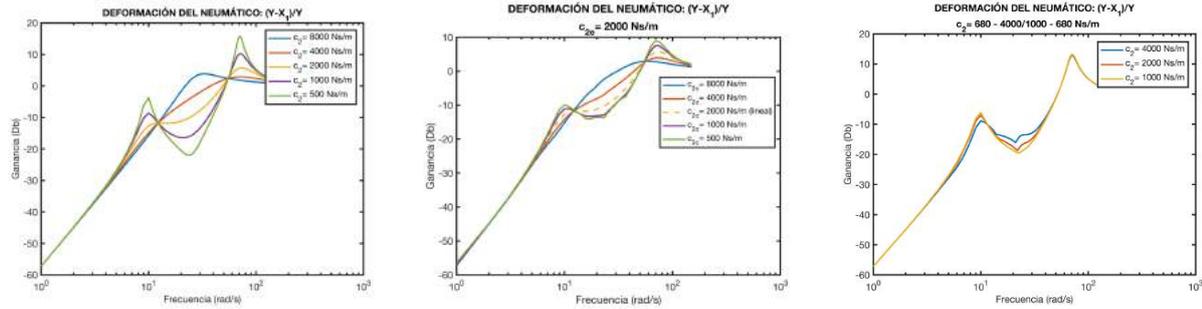


Fig. 6.5

En principio, la configuración de tipo I se muestra algo mejor que la II, pero solo para un terreno regular como es el que estamos considerando. La configuración de tipo II se comporta como un amortiguamiento más blando para circunstancias donde la velocidad relativa chasis- neumático rebasan una determinada velocidad crítica y esto es una ventaja grande. Esto es, una vez encontrada alguna irregularidad brusca, será capaz de absorberla transmitiendo unas aceleraciones menores que en el caso de tener un amortiguador más duro.

### 6.6. Futuros trabajos

Dado que el trabajo se ha centrado en un terreno regular, sinusoidal, podríamos proponer que se estudiaran los efectos de las no linealidades para otros tipos de terreno.

Por otro lado, también sería interesante estudiar el tiempo de respuesta del vehículo ante una irregularidad, para ver el parámetros como por ejemplo, el tiempo de disipación de las aceleraciones verticales del chasis.

# REFERENCIAS

---

- [1] Centro Politécnico Superior, "Criterios de diseño de Vehículos". Monografía
- [2] Department of Applied Mechanics Chalmers University of Technology, "Lecture Notes for Vehicle Dynamics MMF062". Monografía.
- [3] Adrian Simms and David Crolla, "The influence of damper properties on vehicle dynamic behaviour". Research Article
- [4] Lang, H., "Automotive dampers at high stroking frequency". University of Michigan. Ph. D. thesis.
- [5] Gillespie, T.D. 1992. Fundamentals of vehicle dynamics
- [6] Viviana Meruane, "Vibraciones Mecánicas". Monografía
- [7] Soong MF, Ramli R, Saifizul A, "Between simplicity and accuracy: Effect of adding modeling details on quarter vehicle model accuracy". Research Article

## 1. Modelo de un grado de libertad lineal

```

global m k c w_ex y0

m = 250;           % masa del veh culo
k = 100000;       % rigidez de la suspensión en N/m
c = 500;          % coeficiente de amortiguamiento de la suspensión N*s/m
y0 = 0.1;         % amplitud de la onda en m
v = 1.0*27.78;   % velocidad de desplazamiento en m/s (100km/h)
l0 = 30;          % longitud de onda en m
w_ex = 2*pi*v/l0; % frecuencia de excitación en la base

t_ex = 0:0.001:30; % vector de tiempos

%%% PERFIL DE EXCITACIÓN %%%

% Perfil de excitación y(t) o perfil de la carretera %

y = y0*(1-cos(w_ex*t_ex));

% Primera derivada de la excitación y'(t) o velocidad de desplazamiento de la
base en m/s %

yp =y0*w_ex*sin(w_ex*t_ex);

% Segunda derivada de la excitación y''(t) o aceleraci n de desplazamiento de
la base en m/s^2 %

ypp = y0*w_ex.^2*cos(w_ex*t_ex);

figure(1)
plot(t_ex,y);
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
axis([0 30 0 1]);
title('Movimiento de la base del vehículo: y(t)','FontSize',12,...
      'FontWeight','bold');

% figure(2)
% plot(t_ex,yp);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad de desplazamiento (m/s)','FontWeight','bold');
% axis([0 5 -1.5 1.5]);
% title('Velocidad del movimiento de la base del vehículo: y'(t)',...
%       'FontSize',12,'FontWeight','bold');
%
% figure(3)
% plot(t_ex,ypp);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Aceleraci n de desplazamiento (m/s^2)','FontWeight','bold');
% axis([0 5 -40 40]);
% title('Aceleraci n del movimiento de la base del vehículo: y''(t)',...
%       'FontSize',12,'FontWeight','bold');

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento absoluto %
% EcuaciÛn del movimiento: %
%  $mx''+c(x'-y')+k(x-y)=0$  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Inicialmente, el vehìculo se encuentra en reposo:  $x(0)=x'(0)=0$ .
% Hay que resolver una E.D.O de segundo orden  $x''=(-1/m)*(cx'+kx-cy'-ky)$ ,
% que hay que integrar.

pos_ini = 0; %  $x(0)$  del vehìculo
vel_ini = 0; %  $x'(0)$  del vehìculo

x0 = [pos_ini vel_ini]; % Condiciones iniciales en un vector fila.

[t_sol,x_sol] = ode45(@fun_abs,t_ex,x0); % Resuelve la E.D.O.

figure(41)
subplot(3,2,1);
plot(t_sol,x_sol(:,1),'b');
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
legend('x')
title('MOVIMIENTO ABSOLUTO DEL CHASIS','FontSize',12,'FontWeight','bold');

subplot(3,2,3);
plot(t_sol,x_sol(:,2),'b');
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
legend('dx/dt')

subplot(3,2,5);
xpp=-1/m.*(c.*(x_sol(:,2)')-yp)+k.*(x_sol(:,1)')-y); % aceleraciÛn del chasis
plot(t_sol,xpp,'b')
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('AceleraciÛn (m/s^2)','FontWeight','bold');
legend('d^2x/dt^2')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento relativo %
% EcuaciÛn del movimiento: %
%  $mz''+cz'+kz=-my''$  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Si queremos calcular y representar el movimiento relativo del vehìculo
%  $x(t)$  respecto del perfil del terreno  $y(t)$ , nuestra nueva variable
% es  $z(t)=x(t)-y(t)$ , que sustituymos en la ecuaciÛn del movimiento
% absoluto queda:  $mz''+cz'+kz=-my''$ 

z = x_sol(:,1)')-y;
zp = x_sol(:,2)')-yp;
zpp = xpp-yp;

subplot(3,2,2);
plot(t_sol,z,'r');
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
legend('z(t)')
title('MOVIMIENTO RELATIVO DEL CHASIS','FontSize',12,'FontWeight','bold');

subplot(3,2,4);

```

```

plot(t_sol,zp,'r');
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
legend('dz/dt')

subplot(3,2,6);
% zpp=-1/m*(c*(z_sol(:,2))+k*(z_sol(:,1)))-ypp; % aceleraci3n relativa del
chasis
plot(t_sol,zpp,'r')
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Aceleraci3n (m/s^2)','FontWeight','bold');
legend('d^2z/dt^2')

%%% TRANSMISIBILIDAD DE LA BASE SOBRE EL VEH3CULO %%%

% Funci3n de Transferencia (mediante transf. Laplace):
% FT = x/y = (c*s+k)/(m*s^2+c*s+k),
% representa c3mo var3a la funci3n de salida (x): desplazamiento
% del chasis respecto del movimiento de la base (y). Esto se puede
% representar mediante el diagrama de Bode.

% G = tf([c k],[m c k]);
% bode(G)

figure(51)
w=1:0.001:1e3;
Ft = (c.*(w.*1j)+k) ./ (m.*(w.*1j).^2+c.*(w.*1j)+k);
FT=20*log10(abs(Ft));
semilogx(w,FT)
xlabel('Frecuencia (Hz)','FontWeight','bold');
ylabel('Ganancia (dB)','FontWeight','bold');
title('FUNCI3N DE TRANSFERENCIA FT: X/Y')

% figure(99)
% Fc= m*9.81-c*zp-k*z;
% plot(t_sol,Fc)

function xpunto=fun_abs(t,x)

global m k c w_ex y0

y = y0*(1-cos(w_ex*t));

yp =y0*w_ex*sin(w_ex*t);

    xpunto_1 = x(2); % valor de x'
    xpunto_2 = (-1/m).*(c.*(x(2)-yp)+k.*(x(1)-y)); % valor de x''

    xpunto = [xpunto_1; xpunto_2];
end

```

## 2. Modelo de un grado de libertad no lineal. Tipo I. Dominio del tiempo

```

global m k w_ex y0

m = 250;           % masa del vehículo
k = 100000;       % rigidez del muelle en N/m
y0 = 0.1;        % amplitud de la onda en m
v = 27.78;       % velocidad de desplazamiento en m/s (100 km/h)
l0 = 30;         % longitud de onda en m
w_ex = 2*pi*v/l0; % frecuencia de excitación en la base

t_ex = 0:0.001:30; % vector de tiempos

%%% PERFIL DE EXCITACIÓN %%%

% Perfil de excitación y(t) o perfil de la carretera %

y = y0*(1-cos(w_ex*t_ex));

% Primera derivada de la excitación y'(t) o velocidad de desplazamiento de la
base en m/s %

yp =y0*w_ex*sin(w_ex*t_ex);

% Segunda derivada de la excitación y''(t) o aceleraci n de desplazamiento de
la base en m/s^2 %

ypp = y0*w_ex.^2*cos(w_ex*t_ex);

% figure(1)
% plot(t_ex,y,'b');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
% axis([0 5 0 0.12]);
% title('Movimiento de la base del vehículo: y(t)','FontSize',12,...
%       'FontWeight','bold');

% figure(2)
% plot(t_ex,yp);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad de desplazamiento (m/s)','FontWeight','bold');
% axis([0 5 -1.5 1.5]);
% title('Velocidad del movimiento de la base del vehículo: y'(t)',...
%       'FontSize',12,'FontWeight','bold');
%
% figure(3)
% plot(t_ex,ypp);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Aceleraci n de desplazamiento (m/s^2)','FontWeight','bold');
% axis([0 5 -40 40]);
% title('Aceleraci n del movimiento de la base del vehículo: y'''(t)',...
%       'FontSize',12,'FontWeight','bold');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento absoluto %
% Ecuaci n del movimiento: %
%  $m\ddot{x}'+c(x'-y')+k(x-y)=0$  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

% Inicialmente, el vehículo se encuentra  $x(0)=x'(0)=0$ .
% Hay que resolver una E.D.O de segundo orden:
%  $x''=(-1/m)*(cx'+kx-cy'-ky)$ . Integramos la ecuaci n
% entre  $t_{ini}$  y  $t_{fin}$ .

pos_ini = 0;           %  $x(0)$  del vehículo
vel_ini = 0;           %  $x'(0)$  del vehículo

x0 = [pos_ini vel_ini]; % C.I. en un vector fila.

options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-6);

[t_sol,x_sol] = ode45(@fun_abs,t_ex,x0,options);

figure(411)
subplot(3,2,1);
plot(t_sol,x_sol(:,1),'b');
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
legend('x')
title('MOVIMIENTO ABSOLUTO DEL CHASIS','FontSize',12,'FontWeight','bold');

subplot(3,2,3);
plot(t_sol,x_sol(:,2),'b');
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
legend('dx/dt')

subplot(3,2,5);
c = ((x_sol(:,2) '-yp)<0).*8000 + ((x_sol(:,2) '-yp)>0).*2000; % coef.
amortiguamiento
xpp=-1/m.*(c.*(x_sol(:,2) '-yp)+k.*(x_sol(:,1) '-y)); % aceleraci n del chasis
plot(t_sol,xpp,'b')
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Aceleraci n (m/s^2)','FontWeight','bold');
legend('d^2x/dt^2')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento relativo          %
% Ecuaci n del movimiento:    %
%  $mz''+cz'+kz=-my'$       %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Si queremos calcular y representar el movimiento relativo del vehículo
%  $x(t)$  respecto del perfil del terreno  $y(t)$ , nuestra nueva variable
% es  $z(t)=x(t)-y(t)$ , que sustituyéndola en la ecuaci n del movimiento
% absoluto queda:  $mz''+cz'+kz=-my'$ 

z = x_sol(:,1) '-y;
zp = x_sol(:,2) '-yp;
zpp = xpp-yp;

subplot(3,2,2);
plot(t_sol,z,'r');
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
legend('z(t)')
title('MOVIMIENTO RELATIVO DEL CHASIS','FontSize',12,'FontWeight','bold');

subplot(3,2,4);

```

```

plot(t_sol,zp,'r');
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
legend('dz/dt')

subplot(3,2,6);
plot(t_sol,zpp,'r')
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Aceleraci n (m/s^2)','FontWeight','bold');
legend('d^2z/dt^2')

% Comparativa en el dominio del tiempo

% figure(511)
% plot(t_sol,x_sol(:,2));
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
% legend('dx/dt')

% figure(611)
% plot(t_sol,xpp)
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Aceleraci n (m/s^2)','FontWeight','bold');
% legend('d^2x/dt^2')
%
% figure(711)
% plot(t_sol,zp);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
% legend('dz/dt')
%
figure(811)
plot(t_sol,zpp)
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Aceleraci n (m/s^2)','FontWeight','bold');
legend('d^2z/dt^2')

function xpunto=fun_abs(t,x)

global m k w_ex y0

y = y0*(1-cos(w_ex*t));

yp =y0*w_ex*sin(w_ex*t);

c = ((x(2)-yp)<0).*8000 + ((x(2)-yp)>0).*2000; % coef. amortiguamiento

    xpunto_1 = x(2); % valor de x'
    xpunto_2 = (-1/m).*(c.*(x(2)-yp)+k.*(x(1)-y)); % valor de x''

    xpunto = [xpunto_1; xpunto_2];
end

```

### 3. Modelo de un grado de libertad no lineal. Tipo I. Dominio de la frecuencia

```

global m k w_ex y0

m = 250;           % masa del vehículo
k = 100000;       % rigidez del muelle en N/m
y0 = 0.1;         % amplitud de la onda en m
ww = 1:150;

for w_ex = 1:150 % frecuencia de excitación en la base

t_ex = 0:0.01:10; % vector de tiempos

%%% PERFIL DE EXCITACIÓN %%%

% Perfil de excitación y(t) o perfil de la carretera %

y = y0*(1-cos(w_ex*t_ex));

% Primera derivada de la excitación y'(t) o velocidad de desplazamiento de la
base en m/s %

yp =y0*w_ex*sin(w_ex*t_ex);

% Segunda derivada de la excitación y''(t) o aceleraci n de desplazamiento de
la base en m/s^2 %

ypp = y0*w_ex.^2*cos(w_ex*t_ex);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento absoluto          %
% Ecuaci n del movimiento: %
% mx''+c(x'-y')+k(x-y)=0      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Inicialmente, el vehículo se encuentra x(0)=x'(0)=0.
% Hay que resolver una E.D.O de segundo orden:
% x''=(-1/m)*(cx'+kx-cy'-ky). Integramos la ecuaci n
% entre t_ini y t_fin.

pos_ini = 0;           % x(0) del vehículo
vel_ini = 0;           % x'(0) del vehículo

x0 = [pos_ini vel_ini]; % C.I. en un vector fila.

options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-6);

[t_sol,x_sol] = ode45(@fun_abs,t_ex,x0,options);

x_1= x_sol(:,1)';

%%% TRANSMISIBILIDAD DE LA BASE SOBRE EL VEHÍCULO %%%

a = max(x_1(1,500:1001));
b = min(x_1(1,500:1001));
p(w_ex) = (a-b)/2;
FT = 20*log10(abs(p/y0));

```

```
end

figure(1)
semilogx(ww,FT)
xlabel('Frecuencia (Hz)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Ganancia (dB)', 'FontWeight', 'bold');
title('FUNCI" N DE TRANSFERENCIA FT: X/Y')

function xpunto=fun_abs(t,x)

global m k w_ex y0

y = y0*(1-cos(w_ex*t));
yp =y0*w_ex*sin(w_ex*t);

c = ((x(2)-yp)<0).*500 + ((x(2)-yp)>0).*2000; % coef. amortiguamiento

    xpunto_1 = x(2); % valor de x'
    xpunto_2 = (-1/m).*(c.*(x(2)-yp)+k.*(x(1)-y)); % valor de x''

    xpunto = [xpunto_1; xpunto_2];

end
```

#### 4. Modelo de dos grados de libertad lineal. Dominio del tiempo

```

global m1 m2 k1 k2 c1 c2 y0 w_ex
m1 = 50; % masa no suspendida (neumático) en kg
m2 = 250; % masa suspendida (chasis) en kg
k1 = 220000; % coef. rigidez neumático en N/m
k2 = 26000; % coef. rigidez chasis en N/m
c1 = 0; % coef. amortiguamiento neumático N*s/m
c2 = 500; % coef. amortiguamiento chasis N*s/m
y0 = 0.1; % amplitud de la onda en m
v = 27.78; % velocidad de desplazamiento en m/s (100 km/h)
l0 = 30; % longitud de onda en m
w_ex = 2*pi*v/l0; % frecuencia de excitación en la base

t_ex = 0:0.01:30; % vector de tiempos

%%% PERFIL DE EXCITACIÓN %%%

% Perfil de excitación y(t) o perfil de la carretera %

y = y0*(1-cos(w_ex*t_ex));

% Primera derivada de la excitación y'(t) o velocidad de desplazamiento de la
base en m/s %

yp = y0*w_ex*sin(w_ex*t_ex);

% Segunda derivada de la excitación y''(t) o aceleración de desplazamiento de
la base en m/s^2 %

ypp = y0*w_ex.^2*cos(w_ex*t_ex);

% figure(1)
% plot(t_ex,y);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
% axis([0 5 0 0.12]);
% title('Movimiento de la base del vehículo: y(t)','FontSize',12,...
% 'FontWeight','bold');

% figure(2)
% plot(t_ex,yp);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad de desplazamiento (m/s)','FontWeight','bold');
% axis([0 5 -1.5 1.5]);
% title('Velocidad del movimiento de la base del vehículo: y'(t)',...
% 'FontSize',12,'FontWeight','bold');
%
% figure(3)
% plot(t_ex,ypp);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Aceleración de desplazamiento (m/s^2)','FontWeight','bold');
% axis([0 5 -40 40]);
% title('Aceleración del movimiento de la base del vehículo: y''(t)',...
% 'FontSize',12,'FontWeight','bold');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento absoluto: Sistema de ecuaciones %
% del movimiento: %
% %
% m_1*x_1''+c_2*(x_1-x_2)+k_2*(x_1-x_2)+...%

```

```

% +c_1*(x'_1-y')+k_1*(x_1-y)=0 %
%
% m_2*x'_2'+c_2*(x'_2-x'_1)+k_2*(x_2-x_1)=0 %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Inicialmente, el vehìculo se encuentra x(0)=x'(0)=0.
% Hay que resolver un sistema de E.D.O de segundo orden.

x0 = [0, 0, 0, 0]'; % condiciones iniciales x_1'(0)=x_1(0)=x_2'(0)=x_2(0)=0

options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-6);

[t_sol,x_sol] = ode45(@mifun,t_ex,x0, options); % Condiciones iniciales en un
vector fila

figure(420)
subplot(3,2,1)
plot(t_sol,x_sol(:,1),'b');
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
legend('x_1(t)')
title('MOVIMIENTO ABSOLUTO DEL NEUMÀTICO x_1',...
'FontSize',12,'FontWeight','bold');

subplot(3,2,3)
plot(t_sol,x_sol(:,2),'b');
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
legend('dx_1/dt')
% title('VELOCIDAD ABSOLUTA DEL NEUMÀTICO dx_1/dt',...
% 'FontSize',12,'FontWeight','bold');

subplot(3,2,5)
xpp_1=(-1/m1).*(c2.*(x_sol(:,2))-x_sol(:,4))+k2.*((x_sol(:,1))-
x_sol(:,3)))+...
c1.*(x_sol(:,2))-y)+k1.*(x_sol(:,1))-y)); % aceleraciÙn del chasis
plot(t_sol,xpp_1,'b');
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('AceleraciÙn (m/s^2)','FontWeight','bold');
legend('d^2x_1/dt^2')
% title('ACELERACIÙN ABSOLUTA DEL NEUMÀTICO d^2x_1/dt^2',...
% 'FontSize',12,'FontWeight','bold');

subplot(3,2,2)
plot(t_sol,x_sol(:,3),'b');
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
legend('x_2(t)')
title('MOVIMIENTO ABSOLUTO DEL CHASIS x_2',...
'FontSize',12,'FontWeight','bold');

subplot(3,2,4)
plot(t_sol,x_sol(:,4),'b');
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
legend('dx_2/dt')
% title('VELOCIDAD ABSOLUTA DEL CHASIS dx_2/dt',...
% 'FontSize',12,'FontWeight','bold');

subplot(3,2,6)
xpp2=(-1/m2).*(c2.*(x_sol(:,4))-x_sol(:,2)))+...

```

```

    k2.*((x_sol(:,3))-x_sol(:,1))); % aceleraci3n del chasis
plot(t_sol,xpp2,'b');
xlabel('Tiempo (s)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Aceleraci3n (m/s^2)', 'FontWeight', 'bold');
legend('d^2x_2/dt^2')
% title('ACELERACI3N ABSOLUTA DEL CHASIS d^2x_2/dt^2',...
%       'FontSize',12,'FontWeight', 'bold');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento relativo: Sistema de ecuaciones
% del movimiento:
%
% z_1' = -(1/m_1)*(c_2*z'_2-k_2*z_2+c_1*z'_1+k_1*z_1)-y
%
% z_2' = -(1/m_2)*(c_2*z'_2+k_2*z_2)-x'_1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% tambi3n: z'_1=x'_1-y'
%          z'_2=x'_2-x'_1

z_1 = x_sol(:,1)-y;
z_2 = x_sol(:,3)-x_sol(:,1);
zp_1 = x_sol(:,2)-yp;
zp_2 = x_sol(:,4)-x_sol(:,2);
zpp_1 = xpp_1-yp;
zpp_2 = xpp2-xpp_1;

figure(52)
subplot (3,2,1)
plot(t_sol,z_1,'r');
xlabel('Tiempo (s)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Desplazamiento (m)', 'FontWeight', 'bold');
legend('z_1(t)')
title('MOVIMIENTO RELATIVO DEL NEUM3TICO x_1-
y', 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold');

subplot (3,2,3)
plot(t_sol,zp_1,'r');
xlabel('Tiempo (s)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Velocidad (m/s)', 'FontWeight', 'bold');
legend('dz_1/dt')
% title('VELOCIDAD RELATIVO DEL NEUM3TICO
(d^z_1/dt)', 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold');

subplot (3,2,5)
plot(t_sol,zpp_1,'r');
xlabel('Tiempo (s)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Aceleraci3n (m/s^2)', 'FontWeight', 'bold');
legend('d^2z_1/dt^2')
% title('ACELERACI3N RELATIVA DEL NEUM3TICO
(d^2z_1/dt^2)', 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold');

subplot (3,2,2)
plot(t_sol,z_2,'r');
xlabel('Tiempo (s)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Desplazamiento (m)', 'FontWeight', 'bold');
legend('z_2(t)')
title('MOVIMIENTO RELATIVO DEL CHASIS x_2-
x_1', 'FontSize',12, 'FontWeight', 'bold');

subplot (3,2,4)
plot(t_sol,zp_2,'r');

```

```

xlabel('Tiempo (s)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Velocidad (m/s)', 'FontWeight', 'bold');
legend('dz_2/dt')
% title('VELOCIDAD RELATIVA DEL CHASIS
(d^2z_2/dt)', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');

subplot (3,2,6)
plot(t_sol, zpp_2, 'r');
xlabel('Tiempo (s)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Aceleraci n (m/s^2)', 'FontWeight', 'bold');
legend('d^2z_2/dt^2')
% title('ACELERACI N RELATIVA DEL CHASIS
(d^2z_2/dt^2)', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');

%%% TRANSMISIBILIDAD DE LA BASE SOBRE EL VEHÍCULO %%%

% Función de Transferencia (mediante transf. Laplace):
% Ft1 = x_1/y, Ft2 = x_2/y representan cómo varían las funciones
% de salida x_1 y x_2 (desplazamientos del neumático y
% del chasis) respecto del movimiento de la base (y). Esto se puede
% representar mediante el diagrama de Bode.

a = [m1 (c1+c2) (k1+k2)]; %m1*s.^2+(c1+c2)*s+(k1+k2)
b = [c1 k1]; %c1*s+k1
c = [c2 k2]; %c2*s+k2;
d = [m2 c2 k2]; %m2*s.^2+c2*s+k2;
e = [c2 k2]; %c2*s+k2;

% Ft1 = b*d/(a*d-c*e); % Función de transferencia desplazamiento del
neumático

% Ft2 = b*e/(a*d-c*e); % Función de transferencia desplazamiento del chasis

% sal1 = conv(b,d);
% ent1 = (conv(a,d)-[0 0 conv(c,e)]);
% sal2 = conv(b,e);
% ent2 = (conv(a,d)-[0 0 conv(c,e)]);
%
% Ft1=tf(sal1,ent1); % Ft1 = x_1/y
% figure(6)
% bode(Ft1)
%
% figure(7)
% Ft2=tf(sal2,ent2); % Ft2 = x_2/y
% bode(Ft2)

% w=1:0.01:1e3;
% s=w.*1i;
% figure(62)
% Ft1 = ((c1*s+k1).*(m2*s.^2+c2*s+k2))./((m1*s.^2+(c1+c2)*s+(k1+k2)).*...
% (m2*s.^2+c2*s+k2)-(c2*s+k2).*(c2*s+k2)); % Ft1 = x_1/y
% FT1=20*log10(abs(Ft1));
% semilogx(w,FT1)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)', 'FontWeight', 'bold');
% ylabel('Ganancia (dB)', 'FontWeight', 'bold');
% title('FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA FT_1: X_1/Y')

```

```

% figure(72)
% Ft2 = ((c1*s+k1).*(c2*s+k2))./((m1*s.^2+(c1+c2)*s+(k1+k2)).*...
%      (m2*s.^2+c2*s+k2)-(c2*s+k2).*(c2*s+k2)); % Ft2 = x_2/y
% FT2=20*log10(abs(Ft2));
% semilogx(w,FT2)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (dB)','FontWeight','bold');
% title('FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA FT_2: X_2/Y')

% A = (k2*k1-c2*c1*w.^2)+(w.*(c2*k1+c1*k2));
% A1 = m2*k1*w.^2;
% A2 = m2*c1*w.^3;
% A3 = -m2*m1*w.^4+w.^2*(m2*k1+m1*k2);
% A4 = w.^3*(m2*c2+m1*c2);
% B = w.^4*m2*m1-w.^2*(m2*k1+m2*k2+c2*c1+k2*m1)+k2*k1;
% C = w.^3*(m2*c1+m2*c2+m1*c2)+w*(c2*k1+c1*k2);
%
% figure(82)
% RC = 20*log(w.^2.*(sqrt(A.^2)./sqrt(B.^2+C.^2))); % Ride Comfort
% semilogx(w,RC)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
% title({'Aceleración del chasis: X_2''''/Y'})

% figure(92)
% ST = (sqrt(A1.^2+A2.^2)./sqrt(B.^2+C.^2)); % Suspension Travel
% semilogx(w,ST)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
% title({'Desplazamiento de la suspensión: (X_2-X_1)/Y'})

% figure(102)
% RG = (sqrt(A3.^2+A4.^2)./sqrt(B.^2+C.^2)); % Road Grip
% semilogx(w,RG)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
% title({'Deformación del neumático: (Y-X_1)/Y'})

function Xp=mifun(t,X)

global m1 m2 k1 k2 c1 c2 y0 w_ex

y = y0*(1-cos(w_ex*t));

Xp=zeros(4,1); %inicializamos

Xp(1)=X(2); % valor de x'_1

Xp(2)=(-1/m1).*(k1.*(X(1)-y)+c1.*(X(2)-y)+k2.*(X(1)-X(3))+...
c2.*(X(2)-X(4))); % valor de x''_1

Xp(3)=X(4); % valor de x'_2

Xp(4)=(-1/m2).*(k2.*(X(3)-X(1))+c2.*(X(4)-X(2))); % valor de x''_2

end

```

## 5. Modelo de dos grados de libertad lineal. Dominio de la frecuencia

```

clear;
global m1 m2 k1 k2 c1 c2 w_ex y0

m1 = 50;           % masa no suspendida (neumático) en kg
m2 = 250;         % masa suspendida (chasis) en kg
k1 = 220000;      % coef. rigidez neumático en N/m
k2 = 26000;       % coef. rigidez chasis en N/m
c1 = 0;          % coef. amortiguamiento neumático N*s/m
c2 = 8000;        % coef. amortiguamiento chasis N*s/m
y0 = 0.1;        % amplitud perfil del terreno
ww = 1:125;

for w_ex = 1:125    % Frecuencia de excitación en la base

t_ex = 0:0.01:20;  % vector de tiempos

%%% PERFIL DE EXCITACIÓN %%%

% Perfil de excitación y(t) o perfil de la carretera %

y = y0*(1-cos(w_ex*t_ex));

% Primera derivada de la excitación y'(t) o velocidad de desplazamiento de la
base en m/s %

yp =y0*w_ex*sin(w_ex*t_ex);

% Segunda derivada de la excitación y''(t) o aceleración de desplazamiento de
la base en m/s^2 %

ypp = y0*w_ex.^2*cos(w_ex*t_ex);

% figure(1)
% plot(t_ex,y);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
% axis([0 5 0 0.12]);
% title('Movimiento de la base del vehículo: y(t)','FontSize',12,...
%       'FontWeight','bold');

% figure(2)
% plot(t_ex,yp);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad de desplazamiento (m/s)','FontWeight','bold');
% axis([0 5 -1.5 1.5]);
% title('Velocidad del movimiento de la base del vehículo: y'(t)',...
%       'FontSize',12,'FontWeight','bold');
%
% figure(3)
% plot(t_ex,ypp);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Aceleración de desplazamiento (m/s^2)','FontWeight','bold');
% axis([0 5 -40 40]);
% title('Aceleración del movimiento de la base del vehículo: y''(t)',...
%       'FontSize',12,'FontWeight','bold');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento absoluto: Sistema de ecuaciones %

```

```

% del movimiento:
%
% m_1*x_1''+c_2*(x_1'-x_2')+k_2*(x_1-x_2)+...%
% +c_1*(x_1'-y')+k_1*(x_1-y)=0
%
% m_2*x_2''+c_2*(x_2'-x_1')+k_2*(x_2-x_1)=0
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Inicialmente, el vehículo se encuentra x(0)=x'(0)=0.
% Hay que resolver un sistema de E.D.O de segundo orden.

x0 = [0, 0, 0, 0]'; % condiciones iniciales x_1'(0)=x_1(0)=x_2'(0)=x_2(0)=0

[t_sol,x_sol] = ode45(@mifun,t_ex,x0); % Condiciones iniciales en un vector
fila

x_1= x_sol(:,1)';

x_3= x_sol(:,3)';

xpp2= (-1/m2).*(c2.*(x_sol(:,4)-x_sol(:,2))+...
k2.*((x_sol(:,3)-x_sol(:,1)))); % aceleraci n del chasis

st= x_sol(:,3)-x_sol(:,1);

rg= y0*(1-cos(w_ex*t_sol))-x_sol(:,1);

%%% TRANSMISIBILIDAD DE LA BASE SOBRE EL VEHÍCULO %%%

% Función de Transferencia (mediante transf. Laplace):
% Ft1 = x_1/y, Ft2 = x_2/y representan cómo varían las funciones
% de salida x_1 y x_2 (desplazamientos del neumático y
% del chasis) respecto del movimiento de la base (y). Esto se puede
% representar mediante el diagrama de Bode.

% a = max(x_1(1,1000:2001));
% b = min(x_1(1,1000:2001));
% p(w_ex) = (a-b)/2;
% FT1 = 20*log10(abs(p/y0));

% a = max(x_3(1,1000:2001));
% b = min(x_3(1,1000:2001));
% p(w_ex) = (a-b)/2;
% FT2 = 20*log10(abs(p./y0)); % Función de transferencia FT_2 = X_2/Y

a = max(xpp2(1000:2001,1));
b = min(xpp2(1000:2001,1));
p(w_ex) = (a-b)/2;
RC = 20*log10(abs(p./y0)); % Ride Comfort

% a = max(st(1000:2001,1));
% b = min(st(1000:2001,1));
% p(w_ex) = (a-b)/2;
% ST = 20*log10(abs(p./y0)); % Suspension Travel

% a = max(rg(1000:2001,1));
% b = min(rg(1000:2001,1));
% p(w_ex) = (a-b)/2;

```

```

% RG = 20*log10(abs(p/y0)); % Road Grip
end

% figure(12)
% semilogx(ww,FT1)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (dB)','FontWeight','bold');
% title('FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA FT_1: X_1/Y')

% figure (22)
% semilogx(ww,FT2)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (dB)','FontWeight','bold');
% title('FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA FT_2: X_2/Y')

figure(32)
semilogx(ww,RC)
xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
title({'Aceleración del chasis: X_2''''/Y'})

% figure(42)
% semilogx(ww,ST)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
% title({'Desplazamiento de la suspensión: (X_2-X_1)/Y'})

% figure(52)
% semilogx(ww,RG)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
% title({'Deformación del neumático: (Y-X_1)/Y'})

function Xp=mifun(t,X)

global m1 m2 k1 k2 c1 c2 w_ex y0

y = y0*(1-cos(w_ex*t));
yp =y0*w_ex*sin(w_ex*t);

Xp=zeros(4,1); %inicializamos

Xp(1)=X(2); % valor de x'_1

Xp(2)=(-1/m1).*(k1.*(X(1)-y)+c1.*(X(2)-yp)+k2.*(X(1)-X(3))+...
c2.*(X(2)-X(4))); % valor de x''_1

Xp(3)=X(4); % valor de x'_2

Xp(4)=(-1/m2).*(k2.*(X(3)-X(1))+c2.*(X(4)-X(2))); % valor de x''_2

end

```

## 6. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Tipo I. Dominio del tiempo

```

global m1 m2 k1 k2 w_ex y0
m1 = 50; % masa no suspendida (neumático) en kg
m2 = 250; % masa suspendida (chasis) en kg
k1 = 220000; % coef. rigidez neumático en N/m
k2 = 26000; % coef. rigidez chasis en N/m
y0 = 0.1; % amplitud de la onda en m
v = 27.78; % velocidad de desplazamiento en m/s (100km/h)
l0 = 30; % longitud de onda en m
w_ex = 2*pi*v/l0; % frecuencia de excitación en la base (rad/s)

t_ex = 0:0.01:30; % vector de tiempos

%%% PERFIL DE EXCITACIÓN %%%

% Perfil de excitación y(t) o perfil de la carretera %

y = y0*(1-cos(w_ex*t_ex));

% Primera derivada de la excitación y'(t) o velocidad de desplazamiento de la
base en m/s %

yp = y0*w_ex*sin(w_ex*t_ex);

% Segunda derivada de la excitación y''(t) o aceleración de desplazamiento de
la base en m/s^2 %

ypp = y0*w_ex.^2*cos(w_ex*t_ex);

% figure(1)
% plot(t_ex,y);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
% axis([0 5 0 0.12]);
% title('Movimiento de la base del vehículo: y(t)','FontSize',12,...
% 'FontWeight','bold');

% figure(2)
% plot(t_ex,yp);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad de desplazamiento (m/s)','FontWeight','bold');
% axis([0 5 -1.5 1.5]);
% title('Velocidad del movimiento de la base del vehículo: y'(t)',...
% 'FontSize',12,'FontWeight','bold');
%

% figure(3)
% plot(t_ex,ypp);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Aceleración de desplazamiento (m/s^2)','FontWeight','bold');
% axis([0 5 -40 40]);
% title('Aceleración del movimiento de la base del vehículo: y''(t)',...
% 'FontSize',12,'FontWeight','bold');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento absoluto: Sistema de ecuaciones %
% del movimiento: %
% %
%  $m_1 \ddot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + \dots$  %
%  $+ c_1 (\dot{x}_1 - \dot{y}) + k_1 (x_1 - y) = 0$  %

```

```

%
% m_2*x_2''+c_2*(x_2-x_1)+k_2*(x_2-x_1)=0
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Inicialmente, el vehículo se encuentra x(0)=x'(0)=0.
% Hay que resolver un sistema de E.D.O de segundo orden.

x0 = [0, 0, 0, 0]'; % condiciones iniciales x_1'(0)=x_1(0)=x_2'(0)=x_2(0)=0

options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-8);

[t_sol,x_sol] = ode45(@mifun,t_ex,x0,options); % Condiciones iniciales en un
vector fila

% figure(4122)
%
% subplot(3,2,1);
% plot(t_sol,x_sol(:,1),'b');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
% legend('x_1(t)')
% title('MOVIMIENTO ABSOLUTO DEL
NEUMÁTICO','FontSize',12,'FontWeight','bold');
%
% subplot(3,2,3);
% plot(t_sol,x_sol(:,2),'b');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
% legend('dx_1/dt')

c1 = ((x_sol(:,2)')-yp)<0).*0 + ((x_sol(:,2)')-yp)>0).*0;

c2 = ((x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')<0).*500 + ...
      ((x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')>0).*2000;

xpp_1=(1/m1)*(c2.*(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')+k2*((x_sol(:,3)')-
x_sol(:,1)'))+...
      c1.*(yp-x_sol(:,2)')+k1*(y-x_sol(:,1)')); % aceleraci n del neumático

% subplot(3,2,5);
% plot(t_sol,xpp_1,'b');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Aceleraci n (m/s^2)','FontWeight','bold');
% legend('d^2x_1/dt^2')
%
% subplot(3,2,2);
% plot(t_sol,x_sol(:,3),'b');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
% legend('x_2(t)')
% title('MOVIMIENTO ABSOLUTO DEL CHASIS','FontSize',12,'FontWeight','bold');
%
% subplot(3,2,4);
% plot(t_sol,x_sol(:,4),'b');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
% legend('dx_2/dt')
%
% subplot(3,2,6);

xpp2=(1/m2)*(c2.*(x_sol(:,2)')-x_sol(:,4)')+...

```

```

k2*((x_sol(:,1))-x_sol(:,3))); % aceleraci3n del chasis

% plot(t_sol,xpp2,'b');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Aceleraci3n (m/s^2)','FontWeight','bold');
% legend('d^2x_2/dt^2')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento relativo: Sistema de ecuaciones %
% del movimiento: %
% %
% z_1''=(1/m_1)*(c_2*z'_2+k_2*z_2-c_1*z'_1-k_1*z_1)-y'' %
% %
% z_2''=(1/m_2)*(-c_2*z'_2-k_2*z_2)-x''_1 %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% tambi3n: z''_1=x''_1-y''
%          z''_2=x''_2-x''_1

z_1 = x_sol(:,1)-y;
z_2 = x_sol(:,3)-x_sol(:,1);
zp_1 = x_sol(:,2)-yp;
zp_2 = x_sol(:,4)-x_sol(:,2);
zpp_1 = xpp_1-ypp;
zpp_2 = xpp2-xpp_1;

% figure(512)
%
% subplot(3,2,1);
% plot(t_sol,z_1,'r');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
% legend('z_1(t)')
% title('MOVIMIENTO RELATIVO DEL NEUM3TICO x_1-
y','FontSize',12,'FontWeight','bold');
%
% subplot(3,2,3);
% plot(t_sol,zp_1,'r');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
% legend('dz_1/dt')
%
% subplot(3,2,5);
% plot(t_sol,zpp_1,'r');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Aceleraci3n (m/s^2)','FontWeight','bold');
% legend('d^2z_1/dt^2')
%
% subplot(3,2,2);
% plot(t_sol,z_2,'r');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
% legend('z_2(t)')
% title('MOVIMIENTO RELATIVO DEL CHASIS x_2-
x_1','FontSize',12,'FontWeight','bold');
%
% subplot(3,2,4);
% plot(t_sol,zp_2,'r');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
% legend('dz_2/dt')
%

```

```

% subplot(3,2,6);
% plot(t_sol,zpp_2,'r');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Aceleraci n (m/s^2)','FontWeight','bold');
% legend('d^2z_2/dt^2')

%%% TRANSMISIBILIDAD DE LA BASE SOBRE EL VEHÍCULO %%%

% Función de Transferencia (mediante transf. Laplace):
% Ft1 = x_1/y, Ft2 = x_2/y representan cómo varian las funciones
% de salida x_1 y x_2 (desplazamientos del neumático y
% del chasis) respecto del movimiento de la base (y). Esto se puede
% representar mediante el diagrama de Bode.

a = [m1 (c1+c2) (k1+k2)]; %m1*s.^2+(c1+c2)*s+(k1+k2)
b = [c1 k1]; %c1*s+k1
c = [c2 k2]; %c2*s+k2;
d = [m2 c2 k2]; %m2*s.^2+c2*s+k2;
e = [c2 k2]; %c2*s+k2;

% Ft1 = b*d/(a*d-c*e); % Función de transferencia desplazamiento del
neumático

% Ft2 = b*e/(a*d-c*e); % Función de transferencia desplazamiento del chasis

% sall = conv(b,d);
% ent1 = (conv(a,d)-[0 0 conv(c,e)]);
% sal2 = conv(b,e);
% ent2 = (conv(a,d)-[0 0 conv(c,e)]);
%
% Ft1=tf(sall,ent1); % Ft1 = x_1/y
% figure(6)
% bode(Ft1)
%
% figure(7)
% Ft2=tf(sal2,ent2); % Ft2 = x_2/y
% bode(Ft2)

w=linspace(1,1000,3001);
% s=w.*1i;
% figure(62)
% Ft1 = ((c1*s+k1).*(m2*s.^2+c2*s+k2))./((m1*s.^2+(c1+c2)*s+(k1+k2)).*...
% (m2*s.^2+c2*s+k2)-(c2*s+k2).*(c2*s+k2)); % Ft1 = x_1/y
% FT1=20*log10(abs(Ft1));
% semilogx(w,FT1)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (dB)','FontWeight','bold');
% title('FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA FT_1: X_1/Y')

% figure(72)
% Ft2 = ((c1*s+k1).*(c2*s+k2))./((m1*s.^2+(c1+c2)*s+(k1+k2)).*...
% (m2*s.^2+c2*s+k2)-(c2*s+k2).*(c2*s+k2)); % Ft2 = x_2/y
% FT2=20*log10(abs(Ft2));
% semilogx(w,FT2)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (dB)','FontWeight','bold');
% title('FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA FT_2: X_2/Y')

% A = (k2*k1-c2.*c1'.*w.^2)+(w.*(c2.*k1+c1.*k2));
% A1 = m2*k1*w.^2;

```

```

% A2 = m2*c1*w.^3';
% A3 = -m2*m1*w.^4+w.^2*(m2*k1+m1*k2);
% A4 = w.^3*(m2*c2'+m1*c2);
% B = w.^4*m2*m1-w.^2*(m2*k1+m2*k2+c2*c1'+k2*m1)+k2*k1;
% C = w.^3*(m2*c1'+m2*c2+m1*c2)+w*(c2'*k1+c1*k2);
%
% figure(82)
% RC = w.^2.*(sqrt(A.^2)./sqrt(B.^2+C.^2)); % Ride Comfort
% semilogx(w,RC)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
% title({'Aceleraci n del chasis: X_2''''/Y'})

% figure(92)
% ST = (sqrt(A1.^2+A2.^2)./sqrt(B.^2+C.^2)); % Suspension Travel
% semilogx(w,ST)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
% title({'Desplazamiento de la suspensión: (X_2-X_1)/Y'})

% figure(102)
% RG = (sqrt(A3.^2+A4.^2)./sqrt(B.^2+C.^2)); % Road Grip
% semilogx(w,RG)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
% title({'Deformación del neumático: (Y-X_1)/Y'})

% Comparativa en el dominio del tiempo
% figure(612)
% plot(t_sol,x_sol(:,4));
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
% legend('dx_2/dt')

% figure(712)
% plot(t_sol,xpp2);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Aceleraci n (m/s^2)','FontWeight','bold');
% legend('d^2x_2/dt^2')

% figure(812)
% plot(t_sol,zp_2);
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
% legend('dz_2/dt')

figure(912)
plot(t_sol,zpp_2);
xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
ylabel('Aceleraci n (m/s^2)','FontWeight','bold');
legend('d^2z_2/dt^2')

% figure(98)
% st=(x_sol(:,3) '-x_sol(:,1)')/y0;
% plot(t_sol,st);

% figure(99)
% rg=(y0*(1-cos(w_ex*t_sol) '-x_sol(:,1)');
% plot(t_sol,rg);

```

```
function Xp=mifun(t,X)

global m1 m2 k1 k2 w_ex y0

y = y0*(1-cos(w_ex*t));

yp =y0*w_ex*sin(w_ex*t);

c1 = ((X(2)-yp)<0).*0 + ((X(2)-yp)>0).*0;
c2 = ((X(4)-X(2))<0).*500 + ((X(4)-X(2))>0).*2000;

Xp=zeros(4,1);    %inicializamos

Xp(1)=X(2);       % valor de x'_1

Xp(2)=(1/m1)*(k1*(y-X(1))+c1.*(yp-X(2))+k2*(X(3)-X(1))+c2.*(X(4)-X(2))); %
valor de x''_1

Xp(3)=X(4); % valor de x'_2

Xp(4)=(1/m2)*(k2*(X(1)-X(3))+c2.*(X(2)-X(4))); % valor de x''_2

end
```

## 7. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Tipo I. Dominio de la frecuencia

```

clear;
global m1 m2 k1 k2 w_ex y0

m1 = 50;           % masa no suspendida (neumático) en kg
m2 = 250;         % masa suspendida (chasis) en kg
k1 = 220000;      % coef. rigidez neumático en N/m
k2 = 260000;      % coef. rigidez chasis en N/m
y0 = 0.1;         % amplitud perfil del terreno
ww = 1:150;

for w_ex = 1:150      % Frecuencia de excitación en la base

t_ex = 0:0.01:20;    % vector de tiempos

%%% PERFIL DE EXCITACIÓN %%%

% Perfil de excitación y(t) o perfil de la carretera %

y = y0*(1-cos(w_ex*t_ex));

% Primera derivada de la excitación y'(t) o velocidad de desplazamiento de la
base en m/s %

yp =y0*w_ex*sin(w_ex*t_ex);

% Segunda derivada de la excitación y''(t) o aceleración de desplazamiento de
la base en m/s^2 %

ypp = y0*w_ex.^2*cos(w_ex*t_ex);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento absoluto: Sistema de ecuaciones %
% del movimiento:                               %
%                                                 %
%  $m_1 \dot{x}_1' + c_2(x_1' - x_2') + k_2(x_1 - x_2) + \dots$  %
%  $+ c_1(x_1' - y') + k_1(x_1 - y) = 0$                        %
%                                                 %
%  $m_2 \dot{x}_2' + c_2(x_2' - x_1') + k_2(x_2 - x_1) = 0$  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Inicialmente, el vehículo se encuentra  $x(0)=x'(0)=0$ .
% Hay que resolver un sistema de E.D.O de segundo orden.

x0 = [0, 0, 0, 0]'; % condiciones iniciales  $x_1'(0)=x_1(0)=x_2'(0)=x_2(0)=0$ 

options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-8);

[t_sol,x_sol] = ode45(@mifun,t_ex,x0); % Condiciones iniciales en un vector
fila

c1 = ((x_sol(:,2)-yp')<0).*0 + ((x_sol(:,2)-yp')>0).*0;

c2 = ((x_sol(:,4)-x_sol(:,2))<0).*500 + ...
      ((x_sol(:,4)-x_sol(:,2))>0).*2000;

x_1= x_sol(:,1)';

```

```

x_3= x_sol(:,3)';

xpp2= (-1/m2).*(c2.*(x_sol(:,4)-x_sol(:,2))+...
        k2.*(x_sol(:,3)-x_sol(:,1))); % aceleraci n del chasis

st= x_sol(:,3)-x_sol(:,1);

rg= y0*(1-cos(w_ex*t_sol)) - x_sol(:,1);

% plot(t_sol,xpp2,'b');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Aceleraci n (m/s^2)','FontWeight','bold');
% legend('d^2x_2/dt^2')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento relativo: Sistema de ecuaciones %
% del movimiento: %
% %
% z_1''=(1/m_1)*(c_2*z'_2+k_2*z_2-c_1*z'_1-k_1*z_1)-y'' %
% %
% z_2''=(1/m_2)*(-c_2*z'_2-k_2*z_2)-x''_1 %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% también: z''_1=x''_1-y''
%          z''_2=x''_2-x''_1

% z_1 = x_sol(:,1)'-y;
% z_2 = x_sol(:,3)-x_sol(:,1);
% zp_1 = x_sol(:,2)''-yp;
% zp_2 = x_sol(:,4)-x_sol(:,2);
% zpp_1 = xpp_1-yp;
% zpp_2 = xpp2-xpp_1;

% a = max(x_1(1,1000:2001));
% b = min(x_1(1,1000:2001));
% p(w_ex) = (a-b)/2;
% FT1 = 20*log10(abs(p/y0));

% a = max(x_3(1,1000:2001));
% b = min(x_3(1,1000:2001));
% p(w_ex) = (a-b)/2;
% FT2 = 20*log10(abs(p./y0)); % Función de transferencia FT_2 = X_2/Y

% a = max(xpp2(1000:2001,1));
% b = min(xpp2(1000:2001,1));
% p(w_ex) = (a-b)/2;
% RC = 20*log10(abs(p./y0)); % Ride Comfort

% a = max(st(1000:2001,1));
% b = min(st(1000:2001,1));
% p(w_ex) = (a-b)/2;
% ST = 20*log10(abs(p./y0)); % Suspension Travel

a = max(rg(1000:2001,1));
b = min(rg(1000:2001,1));
p(w_ex) = (a-b)/2;
RG = 20*log10(abs(p/y0)); % Road Grip

end

```

```

% figure(112)
% semilogx(ww,FT1)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (dB)','FontWeight','bold');
% title('FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA FT_1: X_1/Y')

% figure(212)
% semilogx(ww,FT2)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (dB)','FontWeight','bold');
% title('FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA FT_2: X_2/Y')

% figure(312)
% semilogx(ww,RC)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
% title({'Aceleración del chasis: X''''_2/Y'})

% figure(412)
% semilogx(ww,ST)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
% title({'Desplazamiento de la suspensión: (X_2-X_1)/Y'})

figure(512)
semilogx(ww,RG)
xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
title({'Deformación del neumático: (Y-X_1)/Y'})

function Xp=mifun(t,X)

global m1 m2 k1 k2 w_ex y0

y = y0*(1-cos(w_ex*t));

yp =y0*w_ex*sin(w_ex*t);

c1 = ((X(2)-yp)<0).*0 + ((X(2)-yp)>0).*0;
c2 = ((X(4)-X(2))<0).*500 + ((X(4)-X(2))>0).*2000; % coef. amortiguamiento
por partes 1

Xp=zeros(4,1); %inicializamos

Xp(1)=X(2); % valor de x'_1

Xp(2)=(1/m1)*(k1*(y-X(1))+c1.*(yp-X(2))+...
k2*(X(3)-X(1))+c2.*(X(4)-X(2))); % valor de x''_1

Xp(3)=X(4); % valor de x'_2

Xp(4)=(1/m2)*(k2*(X(1)-X(3))+c2.*(X(2)-X(4))); % valor de x''_2

end

```



```

% m_2*x_2'+c_2*(x'_2-x'_1)+k_2*(x_2-x_1)=0 %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Inicialmente, el vehìculo se encuentra x(0)=x'(0)=0.
% Hay que resolver un sistema de E.D.O de segundo orden.

x0 = [0, 0, 0, 0]'; % condiciones iniciales x_1'(0)=x_1(0)=x_2'(0)=x_2(0)=0

options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-8);

[t_sol,x_sol] = ode45(@mifun,t_ex,x0,options);

% figure(422)
%
% subplot(3,2,1);
% plot(t_sol,x_sol(:,1),'b');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
% legend('x_1(t)')
% title('MOVIMIENTO ABSOLUTO DEL
NEUMÁTICO','FontSize',12,'FontWeight','bold');
%
% subplot(3,2,3);
% plot(t_sol,x_sol(:,2),'b');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
% legend('dx_1/dt')

% F1 = ((x_sol(:,2)')-yp)<-0.2).*(10*(x_sol(:,2)')-yp)-8) + ...
%      (((x_sol(:,2)')-yp)>=-0.2)&(x_sol(:,2)')-yp)<0.2).*(50*(x_sol(:,2)')-
yp))+...
%      ((x_sol(:,2)')-yp)>=0.2).*(10*(x_sol(:,2)')-yp)+8);

% F2 = ((x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')<-0.2).*(680*(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')-1464)
+ ...
%      (((x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')>=-0.2)&(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')<0.2).*...
%      (8000*(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)'))+(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')>=0.2).*...
%      (680*(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')+1464);

% F2 = ((x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')<-0.2).*(680*(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')-664)
+ ...
%      (((x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')>=-0.2)&(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')<0.2).*...
%      (4000*(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)'))+(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')>=0.2).*...
%      (680*(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')+664);

% F2 = ((x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')<-0.025).*(680*(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')-33)
+ ...
%      (((x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')>=-0.025)&(x_sol(:,4)')-
x_sol(:,2)')<0.025).*...
%      (2000*(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)'))+(x_sol(:,4)')-
x_sol(:,2)')>=0.025).*...
%      (680*(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')+33);
% F2 = ((x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')<-0.1).*(680*(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')-132)
+ ...
%      (((x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')>=-0.1)&(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')<0.1).*...
%      (2000*(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)'))+(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')>=0.1).*...
%      (680*(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')+132);

```

```

% F2 = ((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')<-0.2).*(680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')-264)
+ ...
%      (((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=-0.2)&(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')<0.2).*...
%      (2000*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)'))+(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=0.2).*...
%      (680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')+264);

% F2 = 8000*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)'); % caso lineal

F2 = ((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')<-0.2).*(680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')-64) +
...
      (((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=-0.2)&(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')<0.2).*...
      (1000*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)'))+(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=0.2).*...
      (680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')+64);

% F2 = ((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')<-0.1).*(680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')+18) +
...
%      (((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=-0.1)&(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')<0.1).*...
%      (500*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)'))+(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=0.1).*...
%      (680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')-18);

xpp_1=(1/m1)*(F2+k2*((x_sol(:,3)'-x_sol(:,1)'))-0+k1*(y-x_sol(:,1)')); %
aceleraciÛn del chasis

% subplot(3,2,5);
% plot(t_sol,xpp_1,'b');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('AceleraciÛn (m/s^2)','FontWeight','bold');
% legend('d^2x_1/dt^2')
%
% subplot(3,2,2);
% plot(t_sol,x_sol(:,3),'b');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
% legend('x_2(t)')
% title('MOVIMIENTO ABSOLUTO DEL CHASIS','FontSize',12,'FontWeight','bold');
%
% subplot(3,2,4);
% plot(t_sol,x_sol(:,4),'b');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
% legend('dx_2/dt')
%
% subplot(3,2,6);

xpp2=(1/m2)*(-F2+k2*((x_sol(:,1)'-x_sol(:,3)'))); % aceleraciÛn del chasis

% plot(t_sol,xpp2,'b');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('AceleraciÛn (m/s^2)','FontWeight','bold');
% legend('d^2x_2/dt^2')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento relativo: Sistema de ecuaciones
% del movimiento:
%
% z_1''=(1/m_1)*(c_2*z'_2+k_2*z_2-c_1*z'_1-k_1*z_1)-y''
%
% z_2''=(1/m_2)*(-c_2*z'_2-k_2*z_2)-x''_1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

% también: z'_1=x'_1-y'
%           z'_2=x'_2-x'_1

z_1 = x_sol(:,1)'-y;
z_2 = x_sol(:,3)-x_sol(:,1);
zp_1 = x_sol(:,2)'-yp;
zp_2 = x_sol(:,4)-x_sol(:,2);
zpp_1 = xpp_1-ypp;
zpp_2 = xpp2-xpp_1;

% figure(522)
%
% subplot(3,2,1);
% plot(t_sol,z_1,'r');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
% legend('z_1(t)')
% title('MOVIMIENTO RELATIVO DEL
NEUMÁTICO','FontSize',12,'FontWeight','bold');
%
% subplot(3,2,3);
% plot(t_sol,zp_1,'r');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
% legend('dz_1/dt')
%
% subplot(3,2,5);
% plot(t_sol,zpp_1,'r');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Aceleración (m/s^2)','FontWeight','bold');
% legend('d^2z_1/dt^2')
%
% subplot(3,2,2);
% plot(t_sol,z_2,'r');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Desplazamiento (m)','FontWeight','bold');
% legend('z_2(t)')
% title('MOVIMIENTO RELATIVO DEL CHASIS','FontSize',12,'FontWeight','bold');
%
% subplot(3,2,4);
% plot(t_sol,zp_2,'r');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
% legend('dz_2/dt')
%
% subplot(3,2,6);
% plot(t_sol,zpp_2,'r');
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Aceleración (m/s^2)','FontWeight','bold');
% legend('d^2z_2/dt^2')

% Comparativa en el dominio del tiempo

% figure(622)
% plot(t_sol,x_sol(:,4));
% xlabel('Tiempo (s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Velocidad (m/s)','FontWeight','bold');
% legend('dx_2/dt')

figure(722)
plot(t_sol,xpp2);

```

```

xlabel('Tiempo (s)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Aceleraci n (m/s^2)', 'FontWeight', 'bold');
legend('d^2x_2/dt^2')

% figure(822)
% plot(t_sol, zp_2);
% xlabel('Tiempo (s)', 'FontWeight', 'bold');
% ylabel('Velocidad (m/s)', 'FontWeight', 'bold');
% legend('dz_2/dt')

% figure(922)
% plot(t_sol, zpp_2);
% xlabel('Tiempo (s)', 'FontWeight', 'bold');
% ylabel('Aceleraci n (m/s^2)', 'FontWeight', 'bold');
% legend('d^2z_2/dt^2')

function Xp=mifun(t,X)

global m1 m2 k1 k2 w_ex y0

y = y0*(1-cos(w_ex*t));

yp =y0*w_ex*sin(w_ex*t);

% F1 = ((X(2)-yp)<-0.2).*(10*(X(2)-yp)-8) + (((X(2)-yp)>=-0.2)&(X(2)-yp)<0.2).*(50*(X(2)-yp))+...
%      ((X(2)-yp)>=0.2).*(10*(X(2)-yp)+8);

% F2 = ((X(4)-X(2))<-0.2).*(680*(X(4)-X(2))-1464) + ...
%      (((X(4)-X(2))>=-0.2)&(X(4)-X(2))<0.2).*(8000*(X(4)-X(2)))+...
%      ((X(4)-X(2))>=0.2).*(680*(X(4)-X(2))+1464);

% F2 = ((X(4)-X(2))<-0.2).*(680*(X(4)-X(2))-664) + ...
%      (((X(4)-X(2))>=-0.2)&(X(4)-X(2))<0.2).*(4000*(X(4)-X(2)))+...
%      ((X(4)-X(2))>=0.2).*(680*(X(4)-X(2))+664);

% F2 = ((X(4)-X(2))<-0.025).*(680*(X(4)-X(2))-33) + ...
%      (((X(4)-X(2))>=-0.025)&(X(4)-X(2))<0.025).*(2000*(X(4)-X(2)))+...
%      ((X(4)-X(2))>=0.025).*(680*(X(4)-X(2))+33);
% F2 = ((X(4)-X(2))<-0.1).*(680*(X(4)-X(2))-132) + ...
%      (((X(4)-X(2))>=-0.1)&(X(4)-X(2))<0.1).*(2000*(X(4)-X(2)))+...
%      ((X(4)-X(2))>=0.1).*(680*(X(4)-X(2))+132);
% F2 = ((X(4)-X(2))<-0.2).*(680*(X(4)-X(2))-264) + ...
%      (((X(4)-X(2))>=-0.2)&(X(4)-X(2))<0.2).*(2000*(X(4)-X(2)))+...
%      ((X(4)-X(2))>=0.2).*(680*(X(4)-X(2))+264);

% F2 = 8000*(X(4)-X(2)); % caso lineal

F2 = ((X(4)-X(2))<-0.2).*(680*(X(4)-X(2))-64) + ...
      (((X(4)-X(2))>=-0.2)&(X(4)-X(2))<0.2).*(1000*(X(4)-X(2)))+...
      ((X(4)-X(2))>=0.2).*(680*(X(4)-X(2))+64);

% F2 = ((X(4)-X(2))<-0.1).*(680*(X(4)-X(2))+18) + ...
%      (((X(4)-X(2))>=-0.1)&(X(4)-X(2))<0.1).*(500*(X(4)-X(2)))+...
%      ((X(4)-X(2))>=0.1).*(680*(X(4)-X(2))-18);

Xp=zeros(4,1);      %inicializamos

Xp(1)=X(2);        % valor de x'_1

```

```
% Xp(2)=(1/m1)*(k1*(y-X(1))+c1*(yp-X(2))+k2*(X(3)-X(1))+c2*(X(4)-X(2))); %  
valor de x''_1  
  
Xp(2)=(1/m1)*(k1*(y-X(1))-0+k2*(X(3)-X(1))+F2); % valor de x''_1  
  
Xp(3)=X(4); % valor de x'_2  
  
Xp(4)=(1/m2)*(k2*(X(1)-X(3))-F2); % valor de x''_2  
  
end
```

## 9. Modelo de dos grados de libertad no lineal. Tipo II. Dominio de la frecuencia

```

global m1 m2 k1 k2 w_ex y0
m1 = 50; % masa no suspendida (neumático) en kg
m2 = 250; % masa suspendida (chasis) en kg
k1 = 220000; % coef. rigidez neumático en N/m
k2 = 26000; % coef. rigidez chasis en N/m
y0 = 0.1; % amplitud perfil del terreno
ww = 1:150;

for w_ex = 1:150 % Frecuencia de excitación en la base

t_ex = 0:0.01:20; % vector de tiempos

%%% PERFIL DE EXCITACIÓN %%%

% Perfil de excitación y(t) o perfil de la carretera %

y = y0*(1-cos(w_ex*t_ex));

% Primera derivada de la excitación y'(t) o velocidad de desplazamiento de la
base en m/s %

yp =y0*w_ex*sin(w_ex*t_ex);

% Segunda derivada de la excitación y''(t) o aceleración de desplazamiento de
la base en m/s^2 %

ypp = y0*w_ex.^2*cos(w_ex*t_ex);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento absoluto: Sistema de ecuaciones %
% del movimiento: %
% %
% m_1*x_1''+c_2*(x_1'-x_2')+k_2*(x_1-x_2)+...%
% +c_1*(x_1'-y)+k_1*(x_1-y)=0 %
% %
% m_2*x_2''+c_2*(x_2'-x_1')+k_2*(x_2-x_1)=0 %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Inicialmente, el vehículo se encuentra x(0)=x'(0)=0.
% Hay que resolver un sistema de E.D.O de segundo orden.

x0 = [0, 0, 0, 0]'; % condiciones iniciales x_1'(0)=x_1(0)=x_2'(0)=x_2(0)=0

options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-8);

[t_sol,x_sol] = ode45(@mifun,t_ex,x0,options);

% F1 = ((x_sol(:,2)')-yp)<-0.2).*(10*(x_sol(:,2)')-yp)-8) + ...
% ((x_sol(:,2)')-yp)>=-0.2)&(x_sol(:,2)')-yp)<0.2).*(50*(x_sol(:,2)')-
yp))+...
% ((x_sol(:,2)')-yp)>=0.2).*(10*(x_sol(:,2)')-yp)+8);

% F2 = ((x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')<-0.25).*(680*(x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')-830)
+ ...
% ((x_sol(:,4)')-x_sol(:,2)')>=-0.25)&(x_sol(:,4)')-
x_sol(:,2)')<0.25).*...

```

```

% (4000*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)'))+(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=0.25).*...
% (680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')+830);

% F2 = ((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')<-0.25).*(680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')-330)
+ ...
% (((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=-0.25)&(x_sol(:,4)'-
x_sol(:,2)')<0.25)).*...
% (2000*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)'))+(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=0.25).*...
% (680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')+330);

% F2 = ((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')<-0.25).*(680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')-64)
+ ...
% (((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=-0.25)&(x_sol(:,4)'-
x_sol(:,2)')<0.25)).*...
% (1000*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)'))+(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=0.25).*...
% (680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')+64);

%%% PUNTOS INFLEXION

% F2 = ((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')<-0.5).*(680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')-660)
+ ...
% (((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=-0.5)&(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')<0.5)).*...
% (2000*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)'))+(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=0.5).*...
% (680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')+660);

% F2 = ((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')<-0.25).*(680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')-330)
+ ...
% (((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=-0.25)&(x_sol(:,4)'-
x_sol(:,2)')<0.25)).*...
% (2000*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)'))+(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=0.25).*...
% (680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')+330);

F2 = ((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')<-0.1).*(680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')-132) +
...
(((x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=-0.1)&(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')<0.1)).*...
(2000*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)'))+(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')>=0.1).*...
(680*(x_sol(:,4)'-x_sol(:,2)')+132);

x_1= x_sol(:,1)';

x_3= x_sol(:,3)';

st= x_sol(:,3)-x_sol(:,1);

rg= y0*(1-cos(w_ex*t_sol)) - x_sol(:,1);

xpp2=(1/m2)*(-F2+k2*((x_sol(:,1)'-x_sol(:,3)'))); % aceleraci3n del chasis

% plot(t_sol,xpp2,'b');
% xlabel('Tiempo (s)', 'FontWeight', 'bold');
% ylabel('Aceleraci3n (m/s^2)', 'FontWeight', 'bold');
% legend('d^2x_2/dt^2')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Movimiento relativo: Sistema de ecuaciones %
% del movimiento: %
% %
% z_1''=(1/m_1)*(c_2*z'_2+k_2*z_2-c_1*z'_1-k_1*z_1)-y'' %

```

```

%
% z''_2'=(1/m_2)*(-c_2*z'_2-k_2*z_2)-x''_1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% tambiÈn: z''_1=x''_1-y''
%          z''_2=x''_2-x''_1

% z_1 = x_sol(:,1)'-y;
% z_2 = x_sol(:,3)-x_sol(:,1);
% zp_1 = x_sol(:,2)'-yp;
% zp_2 = x_sol(:,4)-x_sol(:,2);
% zpp_1 = xpp_1-yp;
% zpp_2 = xpp2-xpp_1;

% a = max(x_1(1,1000:2001));
% b = min(x_1(1,1000:2001));
% p(w_ex) = (a-b)/2;
% FT1 = 20*log10(abs(p/y0));

a = max(x_3(1,1000:2001));
b = min(x_3(1,1000:2001));
p(w_ex) = (a-b)/2;
FT2 = 20*log10(abs(p./y0)); % Funci3n de transferencia FT_2 = X_2/Y

% a = max(xpp2(1,1000:2001));
% b = min(xpp2(1,1000:2001));
% p(w_ex) = (a-b)/2;
% RC = 20*log10(abs(p./y0)); % Ride Comfort

% a = max(st(1000:2001,1));
% b = min(st(1000:2001,1));
% p(w_ex) = (a-b)/2;
% ST = 20*log10(abs(p./y0)); % Suspension Travel

% a = max(rg(1000:2001,1));
% b = min(rg(1000:2001,1));
% p(w_ex) = (a-b)/2;
% RG = 20*log10(abs(p/y0)); % Road Grip

end

% figure(122)
% semilogx(ww,FT1)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (dB)','FontWeight','bold');
% title('FUNCI3N DE TRANSFERENCIA FT_1: X_1/Y')

figure(222)
semilogx(ww,FT2)
xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
ylabel('Ganancia (dB)','FontWeight','bold');
title('FUNCI3N DE TRANSFERENCIA FT_2: X_2/Y')

% figure(322)
% semilogx(ww,RC)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
% title({'Aceleraci3n del chasis: X''''_2/Y'})

% figure(422)
% semilogx(ww,ST)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');

```

```

% ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
% title({'Desplazamiento de la suspensión: (X_2-X_1)/Y'})

% figure(522)
% semilogx(ww,RG)
% xlabel('Frecuencia (rad/s)','FontWeight','bold');
% ylabel('Ganancia (Db)','FontWeight','bold');
% title({'Deformación del neumático: (Y-X_1)/Y'})

function Xp=mifun(t,X)

global m1 m2 k1 k2 w_ex y0

y = y0*(1-cos(w_ex*t));

% yp =y0*w_ex*sin(w_ex*t);

% F1 = ((X(2)-yp)<-0.2).*(10*(X(2)-yp)-8) + (((X(2)-yp)>=-0.2)&(X(2)-yp)<0.2).*(50*(X(2)-yp))+...
%      ((X(2)-yp)>=0.2).*(10*(X(2)-yp)+8);

% F2 = ((X(4)-X(2))<-0.25).*(680*(X(4)-X(2))-830) + ...
%      (((X(4)-X(2))>=-0.25)&(X(4)-X(2))<0.25).*(4000*(X(4)-X(2)))+...
%      ((X(4)-X(2))>=0.25).*(680*(X(4)-X(2))+830);

% F2 = ((X(4)-X(2))<-0.25).*(680*(X(4)-X(2))-330) + ...
%      (((X(4)-X(2))>=-0.25)&(X(4)-X(2))<0.25).*(2000*(X(4)-X(2)))+...
%      ((X(4)-X(2))>=0.25).*(680*(X(4)-X(2))+330);

% F2 = ((X(4)-X(2))<-0.25).*(680*(X(4)-X(2))-64) + ...
%      (((X(4)-X(2))>=-0.25)&(X(4)-X(2))<0.25).*(1000*(X(4)-X(2)))+...
%      ((X(4)-X(2))>=0.25).*(680*(X(4)-X(2))+64);

%%% PUNTOS INFLEXION

% F2 = ((X(4)-X(2))<-0.5).*(680*(X(4)-X(2))-660) + ...
%      (((X(4)-X(2))>=-0.5)&(X(4)-X(2))<0.5).*(2000*(X(4)-X(2)))+...
%      ((X(4)-X(2))>=0.5).*(680*(X(4)-X(2))+660);

% F2 = ((X(4)-X(2))<-0.25).*(680*(X(4)-X(2))-330) + ...
%      (((X(4)-X(2))>=-0.25)&(X(4)-X(2))<0.25).*(2000*(X(4)-X(2)))+...
%      ((X(4)-X(2))>=0.25).*(680*(X(4)-X(2))+330);

F2 = ((X(4)-X(2))<-0.1).*(680*(X(4)-X(2))-132) + ...
      (((X(4)-X(2))>=-0.1)&(X(4)-X(2))<0.1).*(2000*(X(4)-X(2)))+...
      ((X(4)-X(2))>=0.1).*(680*(X(4)-X(2))+132);

Xp=zeros(4,1);      %inicializamos

Xp(1)=X(2);        % valor de x'_1

% Xp(2)=(1/m1)*(k1*(y-X(1))+c1*(yp-X(2))+k2*(X(3)-X(1))+c2*(X(4)-X(2))); %
valor de x''_1

Xp(2)=(1/m1)*(k1*(y-X(1))-0+k2*(X(3)-X(1))+F2); % valor de x''_1

Xp(3)=X(4); % valor de x'_2

```

```
xp(4)=(1/m2)*(k2*(X(1)-X(3))-F2); % valor de x''_2  
end
```